Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Enseñanza de la Matemática

PROGRAMA DEL CURSO

Curso: MA-0012 *Funciones Derivables*

Nivel: IV Ciclo	**Requisitos:** MA-0009
Tipo de Curso: Teórico	**Co-requisitos:** No tiene
Créditos: 4	**Horas presenciales:** 5

I. DESCRIPCIÓN

El concepto fundamental del Cálculo es el de límite. Su definición con Epsilon-delta, en este curso es la base formal que luego se aplica al concepto de continuidad y de derivada para ser usada en las demostraciones de teoremas y ejercicios, definiendo así un curso de Análisis. La derivada permite hallar la mejor aproximación afín de una función cerca de un punto y las derivadas de orden superior permiten aproximarla con un polinomio. Comprender la importancia de este hecho es el propósito general del curso; de paso para llegar a él se obtienen resultados que conforman la estructura matemática de los contenidos.

En este curso se demuestran teoremas como: el T. de Bolzano sobre existencia de ceros, que hace la diferencia entre el rigor en un curso de Análisis y la explicación intuitiva en un curso de Cálculo, el T. del Valor Medio y sus consecuencias (Fundamento conceptual para trazado de gráficas).

II. OBJETIVOS

El estudiante debe estar en capacidad de:

1) Demostrar formalmente la existencia de un límite y la continuidad de una función en un punto.
2) Aplicar los teoremas para calcular diversos tipos de límites.
3) Usar resultados matemáticos para justificar la continuidad de una función en un conjunto, la existencia de extremos y ceros.
4) Explicar la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme de una función en un conjunto.
5) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función a partir de la definición de derivada.
6) Reconocer gráfica y analíticamente puntos donde una función no es derivable.
7) Calcular derivadas usando las reglas de derivación.

8) Justificar la existencia de extremos de una función derivable y determinarlos.
9) Enunciar, demostrar y aplicar el T. de Rolle y el T. del Valor Medio.
10) Demostrar la equivalencia entre derivabilidad y diferenciabilidad de una función.
11) Aplicar el diferencial para aproximar el valor numérico de una función en un punto.
12) Trazar la gráfica de una función a partir del estudio de las derivadas, asíntotas y extremos.
13) Resolver problemas de razones de cambio y de optimización.
14) Aproximar valores de funciones usando polinomios de Taylor.
15) Aproximar con un margen de error dado, una función en un intervalo con un polinomio.
16) Usar los desarrollos limitados en el cálculo de límites.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Límites

Definición formal de límite de una función en un punto. Teoremas sobre límites. Límites al infinito y límites infinitos.

TEMA 2: Continuidad

Definición formal de continuidad en un punto. Continuidad de la suma, resta, producto, cociente y composición de funciones. Función continua en un conjunto. Teoremas sobre funciones continuas en intervalos. Continuidad uniforme.

TEMA 3: Derivabilidad

Definición formal de derivabilidad en un punto. Recta tangente a la gráfica de una función. Relación entre derivabilidad y continuidad. Reglas de derivación. Derivadas de funciones trascendentes. Regla de la cadena. T. de Rolle, T. del Valor Medio. Monotonía. Derivada de la función inversa. El diferencial. Relación entre el diferencial y la derivada. Derivadas de orden superior. Concavidad.

TEMA 4: Aplicaciones

Graficas de funciones. Optimización. Razones de cambio.

TEMA 5: Polinomios de Taylor

Polinomios de Taylor. Teorema de Taylor. Desarrollos limitados.

IV. METODOLOGÍA

La clase magistral se complementa con el trabajo individual y en grupos para resolver problemas, con algunas sesiones de laboratorio y con exposiciones por parte de los estudiantes.

Dado que las aplicaciones de la derivada son variadas, es posible asignar a los estudiantes la búsqueda de aplicaciones para plantear, resolver y explicar en la clase. En la exposición deben dar las justificaciones fundamentadas en la teoría, citando los resultados matemáticos que se necesitan. Se les puede sugerir:

- Plantear problemas para ser escritos en lenguaje matemático (con el uso de las derivadas, no resolver) de biología, de ecología, demografía.
- Resolver problemas de economía (costo marginal)
- Resolver problemas de optimización de diferentes contextos.

Trabajos como los anteriores, además de favorecer un conocimiento más amplio de las aplicaciones; deben ser considerados como espacios de práctica docente que se ofrecen a los estudiantes para desarrollar paulatinamente las habilidades propias de su futuro quehacer profesional, por ello la participación de todos los estudiantes debe ser obligatoria y evaluada.

Para lograr una comprensión más profunda de los estudiantes de los conceptos en estudio, se propone desarrollar al menos dos sesiones de clase en el laboratorio donde los estudiantes realicen actividades tales como:

1. Graficar funciones y varias de sus rectas tangentes para observar características de las rectas en diferentes puntos. (Con éxito algunos descubrirán la necesidad de la recta tangente para localizar extremos).
2. Visualizar el paso de la recta secante en tangente, o cuándo esto no se da.
3. Graficar una función y sus polinomios de Taylor de varios grados.
4. Graficar en un dominio amplio funciones equivalentes en un punto.

El trabajo anterior se aprovechará aún más, al solicitar a los estudiantes escribir un párrafo sobre el uso de la tecnología en el curso, contestando por ejemplo preguntas como ¿Por qué 1), 2), 3) y 4) permiten una comprensión más profunda de los conceptos? ¿Qué otro concepto propone usted para lograr una mayor comprensión del mismo con ayuda de la tecnología.

Con respecto a la formación en historia y epistemología de la matemática, se considera importante enfatizar en los problemas que generaron el concepto de derivada. Se puede asignar un trabajo escrito sobre:

1) El método de Fermat o Barrow comparado con el de Descartes para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva e indicar en qué se parece o diferencia el primero de ellos con método actual.
2) El método de las fluxiones de Newton y el método diferencial de Leibniz.
3) Relación entre la derivada y el diferencial (con base en la Lección Cuarta de Cauchy ¨Diferenciales de funciones de una única variable¨).
4) El Teorema del valor intermedio en Bolzano y en Cauchy.

Se debe dedicar tiempo en la clase en el momento oportuno para hacer una discusión sobre los temas de historia. Estas sesiones de discusión deben estar programadas en el cronograma del curso, asegurando que los estudiantes tengan los conocimientos matemáticos que les permitan participar asertivamente. Ese mismo día se recogen los trabajos.

V. EVALUACIÓN

Se sugiere evaluar el desempeño de los estudiantes, mediante productos tales como:

* Una exposición ante sus compañeros sobre aplicaciones.
* Trabajo escrito con una reseña histórica.
* Exámenes parciales individuales.

La reseña histórica debe cumplir requisitos como; contestar las preguntas ¿Qué generó el problema o que se quería resolver? ¿Quiénes otros lo analizaron? Presentar dos o tres aplicaciones. Además, requisitos de forma como: Introducción, conclusión y párrafos bien estructurados. Estas y otras exigencias se deben definir por parte del profesor y asignarles un porcentaje en la evaluación del trabajo.

VI. BIBLIOGRAFÍA

1) Bartle. R, Sherbert. D. (1996). **Introducción al Análisis Matemático de una variable.** México: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.
2) Courant, R. & John F. (1989). **Introduction to Calculus and Analysis.**Vol. I, New York: Springer-Verlag.
3) Demidovich. (1984). **Ejercicios de Análisis Matemático.** Moscú: Editorial MIR.
4) Edwards, C. H. (1982). **The Historical Development of the Calculus. Cálculo Infinitesimal.** España: Editorial Reverté.
5) Hawking, S. (2006). **Dios creó los números**. Editorial Crítica.
6) James, S. (2002). **Cálculo en una variable**[1]. México: Thompson Learning.
7) Spivak, M. (1992) **Calculus. Cálculo infinitesimal**. Editorial Reverté. España.

[1] Este libro se recomienda por la lectura accesible para los estudiantes, por el uso frecuente de cuatro representaciones para las funciones, y por ser de apoyo para el planteamiento de proyectos de laboratorio y proyectos de investigación histórica. Además, el método de Barrow o Fermat planteado en el eje de historia, es tomado de este libro.