UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MA-1003 Cálculo III

I CICLO 2017

Exámenes parciales y sus soluciones

- **Coordinador del curso**: José Rosales-Ortega

Índice

1. Introducción.

Este material tiene como fin el ayudar en su preparación, a los estudiantes de Cálculo III (MA-1003), para el examen de ampliación.

Los errores en la digitación serán de responsabilidad única del profesor José Rosales-Ortega.

Sobre los problemas debe decirse que en su mayoría son originales y se deben a dos fuentes: problemas propuestos por el profesor Mark Villarino y problemas propuestos por José Rosales. Es importante mencionar que también se ha recurrido al famoso libro: 5000 problemas de análisis matemático de Demidovich.

Debe señalarse que uno de estos problemas que se tomaron del Demidovich, y que apareció como número tres en el tercer parcial, está originalmente incorrecto en dicho texto, y tuvo que ser enmendado por el profesor Rosales.

No hay dibujos porque es creencia(basada en pláticas con numerosos colegas de la UCR, y de universidades foráneas) que el estudiante debe adquirir su propia visión geomeétrica de las diferentes figuras propias del cálculo en varias variables. Sin embargo, esto sólo refleja el pensamiento de un grupo y no ha sido probado en investigaciones del tipo que se realiza en matemática educativa.

Esepramos que este material sea de provecho para el fin que fue creado, y cualquier sugerencia se puede dirigir al correo rosalesortega@gmail.com

Para comodidad del autor el formato de los exámenes se ha variado, y se ha quitado texto superfluo para los fines del documento.

Por último, para que el lector pueda prácticar se han añadido los exámenes de reposición, pero sin solución.

2. Primer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 22 de Abril de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

1. *a)* $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Hallar la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar el eje z alrededor de la recta que pasa por el punto $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ y con vector director $(0,0,1)$. Aquí a es una constante positiva.

   b) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Hallar una parametrización trigonométrica de la curva que es la intersección de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$ y la superficie $x^2-ax+y^2=0$, siempre con $a>0$.

2. Considere la siguiente función vectorial definida, para $t\in[0,2\pi]$, por:

$$\vec{r}(t)=(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),4\cos(t)) \tag{1}$$

   a) $\boxed{\textbf{14 puntos}}$ Justifique que $\kappa(t)$ es mínima es dos puntos, a y b, del intervalo $[0,2\pi]$,y además que $\kappa(a)=\kappa(b)$.

   b) $\boxed{\textbf{6 puntos}}$ Exprese la curva que representa la función vectorial (2) como la intersección de dos superficies que usted debe describir.

3. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Encuentre un vector unitario $\vec{u}=(a,b,0)$, de tal forma que la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{xy}{z}$ en el punto $(1,1,1)$ en la dirección de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{2}$.

   Sugerencia: que $\vec{u}$ sea unitario significa que $||\vec{u}||=\sqrt{a^2+b^2}=1$.

4. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Suponga que $F(x,y,z)=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{6}x^3(y+z)+\dfrac{1}{2}x^2yz+f(y-x,z-x)$, donde f es una función diferenciable de dos variables.

   Verifique que se cumple la siguiente igualdad: $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z} \;=\; xyz.$

5. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Considere la superficie dada por

$$x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=2.$$

   Compruebe que el plano tangente a dicha superficie en el punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{8}},\dfrac{1}{\sqrt{8}},-1\right)$ corta a los ejes coordenados en puntos cuya suma de cuadrados es 8.

6. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Supongamos que $z=\phi(x,y)$ y que $F(x+y+z,Ax+By)=0$, para A y B constantes. Compruebe que se cumple la siguiente igualdad:

$$B\frac{\partial z}{\partial x}-A\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; A-B$$

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

3. Segundo Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 14 de Junio de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

1. Considere la siguiente función de dos variables: $f(x,y) = \dfrac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12\,(1+4y^2)}$.

   a) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Verifique que dicha función posee tres puntos críticos.

   b) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Analice la naturaleza de los puntos críticos de la parte anterior.

   Puede utilizar el hecho de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3\,(1+4y^2)^3} \cdot 2\left(1 - 12y^2\right)$.

2. Sea T la región encerrada por las cuatro rectas: $y = -x + \frac{1}{2}$; $y = -x + 1$; $y = x - \frac{1}{2}$; $y = x - 1$, y considere la siguiente integral: $I = \iint\limits_T \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy$.

   a) $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Escriba I en el orden $dy\,dx$, y en el orden $dx\,dy$.

   b) $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Calcule el valor de I por medio del cambio de variables $x = (u+1)^2 + (v+1)^2$, $y = (u+1)^2 - (v+1)^2$, donde $u > -1, v > -1$.

3. Sea S el sólido que se encuentra dentro del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, por encima del plano $z = 0$, y exterior al cilindro $x^2 - x + y^2 = 0$.

   a) $\boxed{\textbf{6 puntos}}$ Exprese el volumen del sólido S en la forma $\int\int_Q f(x,y)\,dA$, donde usted debe señalar quiénes son Q y $f(x,y)$.

   b) $\boxed{\textbf{9 puntos}}$ Calcular el volumen de S. Puede ser útil que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx = \frac{3\pi}{16}$.

4. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Utilice coordenadas esféricas para hallar el valor de la integral:

$$\iiint\limits_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV,$$

   siendo T la región dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$ y exterior a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$.

5. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Considere la curva C , llamada los círculos de **Villarceau** [1], que resulta de la intersección de la superficie de revolución $(x^2+y^2+z^2+16)^2 - 100(x^2+y^2) = 0$ con el plano $3x - 4z = 0$. Encuentre el máximo de la función $f(x,y,z) = z$ restringida a los círculos de Villarceau.

   Sugerencia: En una de las ecuaciones que obtendrá, al utilizar Lagrange, debe factorizar y, y observar que los casos $y = 0$, y $\lambda = 0$, donde λ es un multiplicador de Lagrange, no llevan a la solución buscada...pero hay que analizar tales casos. Hay otro caso que debe analizar también.

[1] Vea la dirección https://ztfnews.wordpress.com/2011/11/26/el-toro-visto-por-villarceau/

6. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Utilice coordenadas cilíndricas para calcular: $I = \iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$, donde W es la región por debajo de $z = 3$ e interior al cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Puede ser útil considerar el orden $dr\, dz\, d\theta$ una vez que haga el cambio a cilíndricas.

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

4. Tercer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 11 de Julio de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

1. Considere el campo vectorial $\vec{F} = (3x^2yz - 3y, x^3z + 3x, x^3y + 2z)$. Calcule el valor de $I = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, para $\mathcal{C}$ la curva que une los puntos $(0,0,2)$ y $(0,3,0)$ de la siguiente forma: un segmento de recta desde $(0,0,2)$ y hacia $(3,0,0)$, y luego por un arco circular[2], en el plano $z = 0$, desde $(3,0,0)$ y hacia $(0,3,0)$.

2. Verifique que se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathcal{C}} e^{x+y^2}\, dx \;+\; 2ye^{x+y^2}\, dy \;=\; e - \frac{1}{e},$$

para cualquier curva suave a trozos $\mathcal{C}$ que empiece en $(-1,0)$ y termine en $(1,0)$.

3. Utilice el **teorema de Green** para calcular el valor de la siguiente integral de línea:

$$\int_{\Gamma} e^x\,(1 - cos(y))\; dx \;+\; e^x\,(\operatorname{sen}(y) - y)\; dy,$$

donde Γ es la curva dada por $y = \operatorname{sen}(x)$, $0 \le x \le \pi$(el gráfico de la función seno y el segmento de recta que une el origen $(0,0)$ con $(\pi, 0)$).

Puede ser útil en cierto momento integrar por partes, tomando $u = sen^2(x)$, y luego utilizar la fórmula:

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\, dx \;=\; \frac{e^x}{5}\,(\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x))\,.$$

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2 + x)$, y la curva $\mathcal{C}$ dada como la intersección de dos superficies:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 8x, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Calcule, usando **Stokes**, el valor de la siguiente integral de línea:

$$\int_{\mathcal{C}} \left(z^2 - y^2\right)\, dx \;+\; \left(x^2 - z^2\right)\, dy \;+\; \left(y^2 - x^2 + x\right)\, dz.$$

[2]parte de un círculo

5. Encuentre el área de superficie de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$ que queda dentro del paraboloide $az = x^2 + y^2$ donde $0 < a < c$.

6. Utilice el teorema de la **divergencia** para calcular la siguiente integral de superficie:

$$\iint_S (xy + yz + zx)\, dS,$$

donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Como sugerencia, observe que $xy+yz+zx = \vec{F}\cdot\vec{n}$, donde $\vec{F}$ es un campo vectorial que usted debe hallar, y $\vec{n}$ es vector unitario normal a la esfera, y el cual también debe encontrar.

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

Algunas Fórmulas útiles

- Green: $\displaystyle\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$, donde $\vec{F} = (P, Q)$.
- Stokes : $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$.
- Divergencia: $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_Q \nabla\cdot\vec{F}\, dV$.
- Integral de Superficie de un campo escalar: $\displaystyle\iint_S f\, dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v))||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\, dA$.
- Integral de Superficie de un campo vectorial: $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\vec{r}_u \times \vec{r}_v\, dS$.
- Trigonométricas: $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$; $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

5. Solución Primer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 22 de Abril de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

Pautas del Examen Parcial # 1

1. *a*) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Hallar la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar el eje z alrededor de la recta que pasa por el punto $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ y con vector director $(0,0,1)$. Aquí a es una constante positiva.

Vamos a denotar con Ω la superficie de revolución buscada. Sea $(x,y,z)\in\Omega$.

Inicialmente (x,y,z) está sobre la directriz y por lo tanto $x=y=0$, y su distancia al eje de revolución es claramente dada por:

$$d\left((0,0,z);(a/2,0,z)\right) \;=\; \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+0^2+0^2}=\frac{a}{2}.$$

Si $(x,y,z)\in\Omega$, pero $y\neq 0$, entonces su distancia al eje de revolución es dado por:

$$d\left((x,y,z);(a/2,0,z)\right) \;=\; \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+0^2}=\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}.$$

Igualando las dos expresiones anteriores se concluye que Ω es dada por:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},$$

la cual representa un cilindro centrado en el punto $(a/2,0,0)$ y z arbitrario.

b) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Hallar una parametrización trigonométrica de la curva que es la intersección de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$ y la superficie $x^2-ax+y^2=0$, siempre con $a>0$.

La segunda superficie, $x^2-ax+y^2=0$, se reescribe al utilizar completación de cuadrados, basta sumar y restar el término $a^2/4$, y se obtiene:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},$$

luego debemos parametrizar la intersección de una esfera y un cilindro.

Lo usual es tomar, a partir del cilindro,

$$x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos(t);\, y=\frac{a}{2}\operatorname{sen}(t),$$

donde $t\in[0,2\pi]$.

Al sustituir lo anterior en la ecuación de la esfera se sigue que:

$$\begin{aligned}
z^2 &= a^2-x^2-y^2\\
&= a^2-\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(t)\right)^2-\frac{a^2}{4}\sin^2(t)\\
&= a^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\cos(t)-\frac{a^2}{4}\cos^2(t)-\frac{a^2}{4}\sin^2(t)\\
&= \frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos(t)\\
&= \frac{a^2}{2}\left(1-\cos(t)\right),
\end{aligned}$$

por lo tanto, se concluye que $z = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}\left(1-\cos(t)\right)}$.
La función vectorial solicitada es entonces:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos(t), \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,(t), \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}\left(1-\cos(t)\right)}\right),$$

donde $t \in [0, 2\pi]$.

2. Considere la siguiente función vectorial definida, para $t \in [0, 2\pi]$, por:

$$\vec{r}(t) = (-\,\mathrm{sen}\,(t), \cos(t), 4\cos(t)) \tag{2}$$

a) $\boxed{\textbf{14 puntos}}$ Justifique que $\kappa(t)$ es mínima es dos puntos, a y b, del intervalo $[0, 2\pi]$,y además que $\kappa(a) = \kappa(b)$.

Primero calculamos la derivada de $\vec{r}(t)$, la cual es dada por:

$$\vec{r}'(t) = \left(-\cos(t), -\,\mathrm{sen}(t), -4\,\mathrm{sen}(t)\right).$$

Luego observe que:

$$||\vec{r}'(t)|| \;=\; \sqrt{1 + 16\sin^2(t)},$$

lo cual hace que parametrizar por longitud de arco sea complicado. Entonces se utiliza la fórmula para calcular la curvatura por medio de un cociente.

Se calcula la segunda derivada de $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}''(t) = \left(\mathrm{sen}\,(t), -\cos(t), -4\cos(t)\right).$$

Ahora bien:

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos(t) & -\,\mathrm{sen}\,(t) & -4\,\mathrm{sen}\,(t) \\ \mathrm{sen}\,(t) & -\cos(t) & -4\cos(t) \end{vmatrix} = (0, -4, 1),$$

de donde se sigue que $||\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|| = \sqrt{17}$.

Ahora bien, la curvatura $\kappa(t)$ es dada por:

$$\kappa(t) = \frac{||\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)||}{||\vec{r}'(t)||^3} = \frac{\sqrt{17}}{\left(1 + 16\sin^2(t)\right)^{3/2}}.$$

La curvatura $\kappa(t)$ será mínima exactamente cuando $1 + 16\sin^2(t)$ sea máxima, lo cual es fácil de ver. Esta última función es máxima precisamente cuando la función $\sin^2 t$ sea igual a 1, y esto ocurre en los puntos $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$.

Luego se concluye que la curvatura es mínima en tales puntos y su valor es:

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}^3} = \frac{1}{17}.$$

Alternativamente, el estudiante podría utilizar cálculo y decir que

$$\kappa'(t) = \frac{-48\sqrt{17}\ \text{sen}\,(t)\cdot\cos(t)}{\left(1+16\sin^2(t)\right)^{5/2}},$$

que es cero en los puntos $0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$, y luego hacer una tablita de signos...

b) $\boxed{\textbf{6 puntos}}$ Exprese la curva que representa la función vectorial (2) como la intersección de dos superficies que usted debe describir.

Como $(-\,\text{sen}\,(t))^2+\cos^2(t) = 1$, tomamos como primer superficie al cilindro $x^2+y^2 = 1$. Por otra parte, observamos que si consideramos el plano $4y - z = 0$ entonces se sigue que $4\cos(t) - 4\cos(t) = 0$, y entonces esta es nuestra segunda superficie.

En resumen, la función vectorial se puede ver como la intersección de las superficies: $x^2 + y^2 = 1$, $4y - z = 0$.

3. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Encuentre un vector unitario $\vec{u} = (a, b, 0)$ de tal forma que la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{xy}{z}$ en el punto $(1, 1, 1)$ en la direccón de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{2}$.

Sugerencia: que $\vec{u}$ sea unitario significa que $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Es claro que las derivadas parciales de $f(x, y, z)$ son continuas en $(1, 1, 1)$, y luego se tiene que $D_{\vec{u}}f(1, 1, 1) = \nabla f(1, 1, 1) \cdot \vec{u}$.

Observe que el gradiente de f es dado por:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, -\frac{1}{z^2} + \frac{xy}{z^2}\right),$$

luego al evaluar en el punto $(1, 1, 1)$ se tiene:

$$\nabla f(1, 1, 1) = (-1, -1, 0)\,.$$

Por lo tanto, se sigue que:

$$D_{\vec{u}}f(1, 1, 1) = \nabla f(1, 1, 1) \cdot \vec{u} = (-1, -1, 0) \cdot (a, b, 0) = -a - b,$$

y por lo tanto se sigue que $-a - b = \sqrt{2}$.

Por otra parte, como el vector $\vec{u}$ es unitario se sigue que $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Se debe por lo tanto resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = -\sqrt{2} \\ \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Despejando $b = -a - \sqrt{2}$ y sustituyendo en la segunda ecuación llegamos a la ecuación cuadrática $a^2 + (-a - \sqrt{2})^2 = 1$, que al desarrollar se convierte en

$$2a^2 + 2\sqrt{2}a + 1 = 0,$$

la cual a su vez factoriza como $(\sqrt{2}a+1)^2=0$, y entonces $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, y luego $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En resumen, el vector buscado es $\vec{u}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

4. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Suponga que $F(x,y,z)=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{6}x^3(y+z)+\dfrac{1}{2}x^2yz+f(y-x,z-x)$, donde f es una función diferenciable de dos variables.

Verifique que se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z} \;=\; xyz.$$

Observe que al calcular directamente la derivada parcial de F con respecto a x se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(y+z)+xyz+\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y-x,z-x)\right).$$

Para calcular la derivada parcial con respecto a x, del último sumando de la igualdad anterior, hacemos $u=y-x$ y $v=z-x$ y procedemos a utilizar regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(y+z)+xyz-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{3}$$

Procediendo de la misma forma se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y-x,z-x)\right).$$

Para calcular la derivada parcial con respecto a y, del último sumando de la igualdad anterior, hacemos $u=y-x$ y $v=z-x$ y procedemos a utilizar regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2z+\frac{\partial f}{\partial u}. \tag{4}$$

Procediendo de la misma forma se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y+\frac{\partial}{\partial z}\left(f(y-x,z-x)\right).$$

Para calcular la derivada parcial con respecto a z, del último sumando de la igualdad anterior, hacemos $u = y - x$ y $v = z - x$ y procedemos a utilizar regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{\partial f}{\partial v}. \tag{5}$$

Por último, al sumar las expresiones dadas por (3), (4) y (5)se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2(y+z) + xyz - \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \\ &- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 z + \frac{\partial f}{\partial u} \\ &- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{\partial f}{\partial v} \\ &= xyz\end{aligned}$$

5. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Considere la superficie dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 2.$$

Compruebe que el plano tangente a dicha superficie en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right)$ corta a los ejes coordenados en puntos cuya suma de cuadrados es 8.

Es fácil de verificar que $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right)$ es un punto que pertenece a tal superficie.

Sea $F(x,y,z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - 2$, de tal forma que nuestra superficie es una superficie de nivel asociada a dicha función escalar.

El gradiente de tal función es:

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}, \frac{2}{3}y^{-1/3}, \frac{2}{3}z^{-1/3}\right),$$

y luego

$$\nabla F\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right) = \left(\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

El plano tangente a la superficie en el punto en cuestión tiene la forma:

$$\frac{\sqrt{8}}{3}x + \frac{\sqrt{8}}{3}y - \frac{2}{3}z \;=\; d,$$

donde al evaluar en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, -1\right)$, obtenemos que dicho plano es:

$$\sqrt{8}x + \sqrt{8}y - 2z \;=\; 4.$$

Buscamos ahora las intersecciones de dicho plano con los ejes coordenados, para tal efecto se procede como sigue:

- al hacer $x = y = 0$ tenemos que $z = -2$,
- al hacer $x = z = 0$ tenemos que $y = 4/\sqrt{8}$,
- al hacer $y = z = 0$ tenemos que $x = 4/\sqrt{8}$.

Al elevar al cuadrado cada una de las intersecciones anteriores y luego sumarlas se obtiene el resultado pedido.

6. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Supongamos que $z = \phi(x, y)$ y que $F(x + y + z, Ax + By) = 0$, para A y B constantes. Compruebe que se cumple la siguiente igualdad:

$$B\frac{\partial z}{\partial x} - A\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; A - B$$

Hagamos $u = x + y + z$, y $v = Ax + By$, luego $0 = F(u, v)$.

Al aplicar regla de la cadena para calcular la derivada parcial con respecto a x, obtenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}A,$$

y despejando se llega a:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \;=\; \frac{-\frac{\partial F}{\partial v}A - \frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

De la misma forma, se tiene que la derivada parcial con respecto a y es:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}B,$$

y despejando se llega a:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; \frac{-\frac{\partial F}{\partial v}B - \frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Por último, se sigue que:

$$B\frac{\partial z}{\partial x} - A\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial v}AB - \frac{\partial F}{\partial u}B}{\frac{\partial F}{\partial u}} - \frac{-\frac{\partial F}{\partial v}BA - \frac{\partial F}{\partial u}A}{\frac{\partial F}{\partial u}} = A - B.$$

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

6. Solución Segundo Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — Junio de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre
Debe justificar cada ejercicio que realice con los métodos vistos en clase o establecidos en la carta al estudiante.

1. Considere la siguiente función de dos variables: $f(x,y) = \dfrac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12\,(1+4y^2)}$.

   a) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Verifique que dicha función posee tres puntos críticos.
   Lo primero que tenemos que calcular es el gradiente de f, y para ello observe que:
   $$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x^3 - x^2 - 2x}{1+4y^2}, \frac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3\,(1+4y^2)^2} \cdot 2y \right).$$
   Debemos resolver el siguiente sistema:
   $$\begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{1+4y^2} \;=\; 0 \\[2ex] \dfrac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3\,(1+4y^2)^2} \cdot 2y \;=\; 0 \end{cases}$$
   Este sistema es equivalente a resolver el sistema:
   $$\begin{cases} x^3 - x^2 - 2x \;=\; 0 \\[2ex] \left(-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18\right) \cdot 2y \;=\; 0 \end{cases}$$
   La ecuación $x^3 - x^2 - 2x \;=\; 0$ se factoriza como $x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1) = 0$, cuyas soluciones son $x = -1, 0, 2$.
   Sustituyendo estos valores de x en la segunda ecuación del sistema anterior vemos que sólo obtenemos $y = 0$.
   Por lo tanto, los puntos críticos son: $(0,0); (-1,0); (2,0)$.

   b) $\boxed{\textbf{10 puntos}}$ Analice la naturaleza de los puntos críticos de la parte anterior. Sugerencia: puede utilizar el hecho de que
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3\,(1+4y^2)^3} \cdot 2\left(1 - 12y^2\right).$$
   Para contestar esta pregunta debemos calcular la matriz Hessiana, derivando y utilizando la sugerencia se llega a que:
   $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3x^2 - 2x - 2}{1+4y^2} & \frac{-4x^3 + 4x^2 + 8x}{(1+4y^2)^2} \cdot 2y \\[2ex] \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(1+4y^2)^2} \cdot -8y & \frac{-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 18}{3(1+4y^2)^3} \cdot 2\,(1 - 12y^2) \end{pmatrix}.$$

En este punto observemos que los puntos críticos tienen coordenada $y = 0$, luego

$$H_f(x, 0) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x - 2 & 0 \\ & \\ 0 & \frac{-3x^4+4x^3+12x^2-18}{3} \cdot 2 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir en el punto $(0, 0)$, obtenemos que

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ & \\ 0 & -12 \end{pmatrix},$$

y por criterio visto en clase, el de los libros de cálculo se sigue que como $-2 < 0$ y $24 > 0$, entonces en $(0, 0)$ hay un máximo.
También se puede ver la forma cuadrática

$$(x, y) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ & \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x^2 - 12y^2,$$

y por lo tanto es definida negativa y se sigue que $(0, 0)$ es máximo local.
En $(-1, 0)$, se tiene que:

$$H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ & \\ 0 & \frac{-26}{3} \end{pmatrix}.$$

y se sigue que en este punto se tiene un punto de ensilladura.
Por último, en $(2, 0)$ se tiene que

$$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ & \\ 0 & \frac{28}{3} \end{pmatrix}.$$

y se concluye que se tiene un punto de mínimo local.

2. Sea T la región encerrada por las cuatro rectas: $y = -x + \frac{1}{2}; y = -x + 1; y = x - \frac{1}{2}; y = x - 1$, y considere la siguiente integral:

$$I = \iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

a) $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Escriba I en el orden $dy\,dx$, y en el orden $dx\,dy$.
La región de integración es el paralelogramo cuyos vértices se encuentran en los puntos: $(1/2, 0); (1, 0); (3/4, 1/4); (3/4, -1/4)$. Esta región es ya sea y-simple, o bien x-simple, y en cualesquiera de ambos casos debe partirse la integral I en dos integrales.

En el primer caso, viendo a la región T como y-simple se tiene que:

$$I=\int_{1/2}^{3/4}\int_{-x+1/2}^{x-1/2}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy\,dx+\int_{3/4}^{1}\int_{x-1}^{-x+1}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy\,dx.$$

En el segundo caso, viendo a la región T como x-simple se tiene que:

$$I=\int_{0}^{1/4}\int_{y+1/2}^{-y+1}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dx\,dy+\int_{-1/4}^{0}\int_{-y+1/2}^{y+1}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dx\,dy.$$

b) $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Calcule el valor de I por medio del cambio de variable $x=(u+1)^2+(v+1)^2$, $y=(u+1)^2-(v+1)^2$

Procedemos en primer lugar a calcular el jacobiano del cambio de variable efectuado:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} 2(u+1) & 2(u+1) \\ 2(v+1) & -2(v+1) \end{vmatrix}=-8(u+1)(v+1).$$

Procedemos a cambiar de variables en la función integrando, pero antes observe que

$$x^2-y^2=\left((u+1)^2+(v+1)^2\right)^2\left((u+1)^2-(v+1)^2\right)^2=4(u+1)^2(v+1)^2,$$

de donde sigue que : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{1}{2(u+1)(v+1)}$. Por lo tanto, la nueva integral es dada por

$$I\ =\ \iint\limits_T\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_S\frac{1}{2(u+1)(v+1)}\cdot|-8(u+1)(v+1)|\,du\,dv=\iint\limits_S 4\,du\,dv,$$

y resta sólo calcular la nueva región S.

La recta $x+y=1$ se convierte en $2(u+1)^2=1$, y luego $u=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, y por lo dicho en el texto del ejercicio se concluye que $u=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La recta $x+y=1/2$ se convierte en $2(u+1)^2=1/2$, y luego $u=-1\pm\frac{1}{2}$, y entonces $u=-1/2$.

De forma totalmente análoga se tiene que $x-y=1/2$ se convierte en $v=-1/2$, y la recta $x-y=1$ se convierte en $v=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, S es el cuadrado $[-1/2,-1+\frac{1}{\sqrt{2}}]\times[-1/2,-1+\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

En resumen:

$$I=\iint\limits_S 4\,du\,dv=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

3. Sea S el sólido que se encuentra dentro del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, por encima del plano $z = 0$, y exterior al cilindro $x^2 - x + y^2 = 0$.

   a) $\boxed{\textbf{6 puntos}}$ Exprese el volumen del sólido S en la forma $\int\int_Q f(x, y)\, dA$, donde usted debe señalar quiénes son Q y $f(x, y)$.

   Se observa que dicho sólido, visto como una región z-simple, varía desde $z = 0$ hasta $z = 1 - x^2 - y^2$.

   La proyección de dicho sólido en el plano $z = 0$ es el círculo, S_1, dado por $x^2 + y^2 = 1$ menos el círculo S_2 dado por $(x - 1/2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, y a esta región la llamaremos Q.

   Por lo tanto:
$$I = \int\int_Q \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dA.$$

   b) $\boxed{\textbf{14 puntos}}$ Calcular el volumen de S. Puede ser útil que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\, dx = \frac{3\pi}{16}$.

   Usaremos coordenadas polares para calcular $I = \int\int_Q (1 - x^2 - y^2)\, dA$.

   Este cálculo se puede hacer directamente viendo en qué se transforma Q via polares.

   Por la parte anterior se sigue que dicho volumen es dado por
$$\int\int_Q \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos(\theta)}^{1} (1 - r^2) r\, dr\, d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, d\theta.$$

   Calculemos la primer integral del lado derecho de la igualdad anterior:
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\cos(\theta)}^{1} (1 - r^2) r\, dr\, d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2(\theta)}{2} + \frac{\cos^4(\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{32} \\
&= \frac{3\pi}{32},
\end{aligned}$$

   y por otra parte:
$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr\, d\theta &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{4}\, d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

   Por último se sigue que
$$\int\int_Q \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dA = +\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{32} = \frac{11\pi}{32}.$$

4. $\boxed{\textbf{20 puntos}}$ Utilice coordenadas esféricas para hallar el valor de la integral:

$$\iiint\limits_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV,$$

siendo T la región dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ y exterior a la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$.

Antes que nada observe que $x^2+y^2+z^2=4z$, es lo mismo que $x^2+y^2+(z-2)^2=4$, y que $x^2+y^2+z^2=2z$ es lo mismo que $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Al utilizar esféricas debemos poner $x=\rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\psi)$, $y=\rho\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\psi)$, y $z=\rho\cos(\psi)$. No olvidar que el Jacobiano es $J(\theta,\psi,\rho)=\rho^2\operatorname{sen}(\psi)$.

La función integrando se convierte en:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}=\frac{1}{\rho}.$$

Observe que ambas esferas $x^2+y^2+z^2=4z$ y $x^2+y^2+z^2=2z$ se convierten, en coordenadas esféricas, en $\rho=4\cos(\psi)$ y $\rho=2\cos(\psi)$, respectivamente.

La proyección de nuestro sólido en el plano $z=0$ nos da los círculos anidados $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=1$, los cuales comprueban que θ varía desde 0 hasta 2π.

Es claro que el ángulo ψ va desde 0 hasta $\pi/2$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos(\psi)}^{4\cos(\psi)} \frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\operatorname{sen}(\rho)\, d\rho\, d\psi\, d\theta \\
&= \pi\int_0^{\pi/2} \rho^2\operatorname{sen}(\psi)\Big|_{2\cos(\psi)}^{4\cos(\psi)}\, d\rho \\
&= \pi\int_0^{\pi/2} 12\cos^2(\psi)\cdot\operatorname{sen}(\rho)\, d\rho \\
&= 12\pi\cdot -\frac{\cos^3(\psi)}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= 12\pi\cdot\frac{1}{3} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

5. $\boxed{\textbf{15 puntos}}$ Considere la curva C , llamada los círculos de **Villarceau** [3], que resulta de la intersección de la superficie de revolución $(x^2+y^2+z^2+16)^2-100(x^2+y^2)=0$ con el plano $3x-4z=0$. Encuentre el máximo de la función $f(x,y,z)=z$ restringida a los círculos de Villarceau.

[3] Vea la dirección https://ztfnews.wordpress.com/2011/11/26/el-toro-visto-por-villarceau/

Sugerencia: En una de las ecuaciones que obtendrá, al utilizar Lagrange, debe factorizar y,y observar que los casos $y = 0$, y $\lambda = 0$, donde λ es un multiplicador de Lagrange, no llevan a la solución buscada...pero hay que analizar tales casos. Hay otro caso que debe analizar también.

Consideremos el llamado Lagrangeano:

$$L(x,y,z) = z + \lambda\left((x^2+y^2+z^2+16)^2 - 100(x^2+y^2)\right) + \mu\,(3x-4z)\,. \tag{6}$$

Como el dominio en que trabajamos es un compacto, entonces basta evaluar la función en los puntos críticos que hallemos y ver cuál es el que tiene imagen máxima.

Derivemos a la ecuación (6) parcialmente con respecto x, y, z, respectivamente, luego igualamos a cero y añadimos las restricciones:

$$\begin{cases} \lambda\,[4x(x^2+y^2+z^2+16) - 200x] + 3\mu & = \;\; 0 \\ \lambda\,[4y(x^2+y^2+z^2+16) - 200y] & = \;\; 0 \\ 1 + \lambda\,[4z(x^2+y^2+z^2+16) - 200x] - 4\mu & = \;\; 0 \\ (x^2+y^2+z^2+16)^2 - 100(x^2+y^2) & = \;\; 0 \\ 3x - 4z & = \;\; 0 \end{cases}$$

Utilizando la sugerencia vemos que la segunda ecuación del sistema anterior se puede factorizar de forma simple y obtenemos:

$$\begin{cases} \lambda\,[4x(x^2+y^2+z^2+16) - 200x] + 3\mu & = \;\; 0 \\ \lambda \cdot y \cdot [(x^2+y^2+z^2+16) - 50] & = \;\; 0 \\ 1 + \lambda\,[4z(x^2+y^2+z^2+16) - 200x] - 4\mu & = \;\; 0 \\ (x^2+y^2+z^2+16)^2 - 100(x^2+y^2) & = \;\; 0 \\ 3x - 4z & = \;\; 0 \end{cases} \tag{7}$$

Entonces de la segunda ecuación del sistema (7), debemos estudiar los casos: $\lambda = 0$, $y = 0$, y $x^2 + y^2 + z^2 + 16 = 50$.

Es claro que $\lambda = 0$ no se puede dar, ya que al sustituir en las ecuaciones primera y tercera del sistema (7) obtenemos, respectivamente, que $\mu = 0$ y que $\mu = 1/4$. Lo cual es un disparate.

Si suponemos que $y = 0$ entonces, al sustituir en la cuarta ecuación del sistema (7), se llega a que $(x^2 + z^2 + 16)^2 - 100x^2 = 0$, y utilizando la quinta ecuación tenemos que $x = 4z/3$. Utilizando estas dos ecuaciones se llega a la ecuación cuadrática:

$$\left(\frac{25}{9}z^2 + 16\right)^2 = 100\frac{16z^2}{9} \Longrightarrow 25z^2 + 144z = 120 \Longrightarrow (5z-12)^2 = 0,$$

de donde se concluye que $z = \frac{12}{5}$, y luego $x = \frac{16}{5}$, y por lo tanto

$$\left(\frac{16}{5}, 0, \frac{12}{5}\right),$$

es punto crítico condicionado.

En el caso en que $x^2 + y^2 + z^2 + 16 = 50$, se tiene lo siguiente: al sustituir dicha expresión en la cuarta ecuación del sistema (7) se tiene que: $50^2 - 100(34 - z^2) = 0$, de donde sigue que $50^2 - 100 \cdot 34 + 100z^2 = 0$, y por lo tanto al dividir por 100 se llega a que $25 - 34 + z^2 = 0$, y luego $z^2 = 9$, y por lo tanto $\boxed{z = \pm 3}$. De la quinta ecuación del sistema (7) se sigue que $x = \frac{4z}{3}$, y se concluye que $\boxed{x = \pm 4}$.

Utilizando una vez más la cuarta ecuación del sistema (7) se llega a que: $50^2 - 100(16 + y^2) = 0$, y luego $y^2 = 9$, y entonces $\boxed{y = \pm 3}$.

En resumen, en este caso hemos obtenido los siguientes ocho puntos:

$$(4, 3, 3)\,;(4, -3, 3)\,;(4, 3, -3)\,;(4, -3, -3)\,;(-4, 3, 3)\,;(-4, -3, 3)\,;(-4, 3, -3)\,;(-4, -3, -3)\,.$$

Por lo tanto el máximo de la función $f(x, y, z) = z$ restringida a los círculos de Villarceau es 3.

6. **15 puntos** Utilice coordenadas cilíndricas para calcular: $I = \iiint\limits_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, donde W es la región por debajo de $z = 3$ e interior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tomar el orden $dr\, dz\, d\theta$.

Al utilizar coordenadas cilíndricas debe ponerse $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}\,(\theta)$, y $z = z$. Entonces se sigue que:

- $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$,
- $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$.

Luego los límites de z varían desde $z = r$ hasta $z = 3$.

La proyección del sólido en en plano $z = 0$ es dada por $x^2 + y^2 = 9$, y con esto tenemos que r varía desde $r = 0$ hasta $r = 3$, y que el ángulo θ va de 0 hasta 2π.

Teniendo en cuenta que $J(\theta, r, z) = r$ se sigue que:

$$\iiint\limits_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Claramente la última integral no es fácilmente calculable con respecto a z, así que decidimos cambiar el orden de integración a $dr\, dz\, d\theta$, como indica el enunciado.

Debe dibujarse la región de integración de la última integral para que se pueda realizar dicho cambio en el orden de integración. Al dibujar ejes coordenados en el orden: $\theta - r - z$, vemos que la región de integración es el paralelepípedo, $[0, 2\pi] \times [0, 3] \times [0, 3]$ que se corta con el plano $z = r$. No está demás decir que se está viendo dicha región como una región del tipo

z-simple. Al ver dicha figura como r-simple vemos que r varía desde $r = 0$ hasta $r = z$, y que la proyección de dicha figura en el plano $\theta - z$ es el rectángulo $[0, 2\pi,] \times [0, 3]$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r \, dz \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^z \sqrt{r^2 + z^2} \cdot r \, dr \, dz \, d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^3 \left(r^2 + z^2\right)^{3/2} \Big|_0^z \, dz \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^3 \left(2\sqrt{2} - 1\right) z^3 \, dz \\
&= \frac{2\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{3} \cdot \frac{z^4}{4} \Big|_0^3 \\
&= \frac{27\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{2}
\end{aligned}$$

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

7. Solución Tercer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 11 de Julio de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

1. Considere el campo vectorial $\vec{F} = (3x^2yz - 3y, x^3z + 3x, x^3y + 2z)$. Calcule el valor de $I = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, para $\mathcal{C}$ la curva que une los puntos $(0, 0, 2)$ y $(0, 3, 0)$ de la siguiente forma: un segmento de recta desde $(0, 0, 2)$ y hacia $(3, 0, 0)$, y luego por un arco circular, en el plano $z = 0$, desde $(3, 0, 0)$ y hacia $(0, 3, 0)$.

   La parametrización del segmento de recta desde $(0, 0, 2))$ y hasta $(3, 0, 0)$ es dada por

$$\alpha_1(t) = (1 - t)(0, 0, 2) + t(3, 0, 0) = (3t, 0, 2 - 2t) \Longrightarrow \alpha_1(t) = (3t, 0, 2 - 2t),$$

y donde $t \in [0,1]$. Luego $\alpha_1'(t) = (3,0,-2)$, y de eso se sigue que:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_0^1 \vec{F}(\alpha_1(t)) \cdot \alpha_1'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \big(0, 27t^3(2-2t) + 9t, 4-4t\big) \cdot (3,0,-2)\ dt \\
&= \int_0^1 (-8+8t)\, dt \\
&= \big(-8t + 4t^2\big)\Big|_0^1 \\
&= -4
\end{aligned}$$

La parametrización del arco circular que va desde $(3,0,0)$ y hasta $(0,3,0)$ es dada por

$$\alpha_2(t) = (3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}\,(t), 0),$$

y donde $t \in [0, \pi/2]$. Luego $\alpha_2'(t) = (-3\,\mathrm{sen}\,(t), 3\cos(t), 0)$, y de eso se sigue que:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\alpha_2(t)) \cdot \alpha_2'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \big(-9\,\mathrm{sen}(t), 9\cos(t), 81\cos^3(t)\,\mathrm{sen}\,(t)\big) \cdot (-3\,\mathrm{sen}\,(t), 3\cos(t), 0)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (27 sin^2(t) + 27\cos^2(t))\, dt \\
&= \frac{27\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$I = I_1 + I_2 = -4 + \frac{27\pi}{2}.$$

2. Verifique que se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathcal{C}} e^{x+y^2}\, dx \ + \ 2ye^{x+y^2}\, dy \ = \ e - \frac{1}{e},$$

para cualquier curva suave a trozos $\mathcal{C}$ que una los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ en ese orden.

Como el dominio , $\mathbb{R}^2$, de las funciones $P(x,y) = e^{x+y^2}$ y $Q(x,y) = 2ye^{x+y^2}$, es convexo, y ellas son suaves allí, y además se cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2ye^{x+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y^2}\right) = 2ye^{x+y^2},$$

se sigue que el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(e^{x+y^2}, 2ye^{x+y^2}\right)$ es conservativo . Esto significa que debe existir $f(x,y)$ tal que $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$.

No es difícil darse cuenta que $f(x,y,z) = e^{x+y^2} + c$, donde c es cualquier constante.

Por lo tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} e^{x+y^2}\,dx \;+\; 2ye^{x+y^2}\,dy &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s} \\
&= \int_{\mathcal{C}} \nabla f(x,y,z)\cdot d\vec{s} \\
&= f\left(\alpha(b)\right) - f\left(\alpha(a)\right) \\
&= f(-1,0) - f(1,0) \\
&= e - \frac{1}{e},
\end{aligned}$$

donde $\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ es cualquier parametrización suave a trozos de $\mathcal{C}$.

3. Utilice el teorema de Green para calcular el valor de la siguiente integral de línea:

$$\int_{\Gamma} e^{x}\left(1 - cos(y)\right)\,dx \;+\; e^{x}\left(\operatorname{sen}(y) - y\right)\,dy,$$

donde Γ es la curva dada por $y = \operatorname{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$(el gráfico de la función seno y el segmento de recta que une el origen con $(\pi, 0)$).

Puede ser útil en cierto momento integrar por partes, tomando $u = sen^2(x)$, y luego utilizar la fórmula:

$$\int e^{x}\operatorname{sen}(2x)\,dx \;=\; \frac{e^{x}}{5}\left(\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\right).$$

Sean $P(x,y) = e^{x}\left(1 - cos(y)\right)$ y $Q(x,y) = e^{x}\left(\operatorname{sen}(y) - y\right)$, y observe que tanto la curva como P, Q satisfacen las condiciones del teorema de Green.

Entonces se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} e^{x}\left(1 - cos(y)\right)\,dx \;+\; e^{x}\left(\operatorname{sen}(y) - y\right)\,dy &= \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA \\
&= \iint\limits_{D} -ye^{x}\,dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin^2(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}I.
\end{aligned}$$

Por otra parte, observe que si hacemos $u = sin^2(x)$ y $dv = e^{x}\,dx$, entonces $u = 2\sin(x)\cos(x) = sen(2x)$, y $v = e^{x}$, entonces

$$\int e^{x}\sin^2(x)\,dx = e^{x}sin^2(x) - \int e^{x}\operatorname{sen}(2x)\,dx = e^{x}sin^2(x) - \frac{e^{x}}{5}\left(\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\right).$$

Por lo tanto, se sigue que:

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin^2(x)\, dx = \left[e^x sin^2(x) - \frac{e^x}{5} \left(\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x) \right) \right] \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5},$$

y por lo tanto, se sigue que:

$$\int_{\Gamma} e^x \left(1 - cos(y)\right)\, dx \; + \; e^x \left(\operatorname{sen}(y) - y\right)\, dy = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5} \right) = \frac{1 - e^{\pi}}{5}.$$

4. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2 + x)$, y la curva $\mathcal{C}$ dada como la intersección de dos superficies:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 8x, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Calcule, usando Stokes, el valor de la siguiente integral de línea:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \left(z^2 - y^2\right)\, dx \; + \; \left(x^2 - z^2\right)\, dy \; + \; \left(y^2 - x^2 + x\right)\, dz.$$

Para calcular el rotacional de $\vec{F}$ necesitamos calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - x^2 + x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 - z^2\right) = 2y - -2z = 2y + 2z.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - x^2 + x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2 - y^2\right) = -2x + 1 - 2z.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - z^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 - y^2\right) = 2x - -2y = 2x + 2y.$$

Luego se tiene que:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - y^2 & x^2 - z^2 & y^2 - x^2 + x \end{vmatrix} = \left(2y + 2z, 2x - 1 + 2z, 2x + 2y\right).$$

Al utilizar Stokes se tiene que:

$$I \; = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}},$$

donde S es una superficie, con ciertos atributos, tal que su borde es la curva $\mathcal{C}$, con la orientación usual.

En nuestro caso la superficie, S, a elegir es el plano $x+y+z=0$. De los datos del problemas se sigue que la proyección, D, de dicho plano en el plano $z=0$ es el círculo, y su interior, $(x-4)^2+y^2 \leq 4^2$.

En claro que para dicha S el vector normal unitario, $\vec{n}$, es dado por:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Lo anterior puede ser visto de varias formas, y el estudiante debe dar al menos una.

Por lo tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}} &= \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathbf{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{2y+2z+2x-1+2z+2x+2y}{\sqrt{3}}\, d\mathbf{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{-1}{\sqrt{3}}\, d\mathbf{S} \\
&= \iint\limits_D \frac{-1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\, dA \\
&= -\iint\limits_D 1\, dA \\
&= -16\pi,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado para pasar de la segunda a la tercera igualdad que $4(x+y+z)=0$, y en la última igualdad que el área de un círculo es $\pi \times r^2$. También el estudiante puede hacer ese último cálculo utilizando polares.

5. Encuentre el área de superficie de la parte de la esfera $x^2+y^2+(z-c)^2 = c^2$ que queda dentro del paraboloide $az = x^2+y^2$, donde $0 < a < c$.

   Primero calculamos la intersección de las dos superficies, para ello se nota que:

   $$az + (z-c)^2 = c^2 \Longrightarrow z^2 + (a-2c)z = 0 \Longrightarrow z = 2c - a > 0.$$

   En dicha intersección se tiene que la proyección en el plano $z=0$ es un círculo $x^2+y^2 = a(2c-a)$.

   Para evitar parametrizar, vamos a utilizar la fórmula siguiente para el cáclulo del área de una superficie:

   $$\iint\limits_D ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\, dA = \iint\limits_D \frac{1}{\cos\theta}\, dA,$$

donde $\cos(\theta) = \vec{n} \cdot \vec{k}$, siendo $\vec{n}$ vector normal unitario a la superficie y $\vec{k}$, en este caso, el vector $(0, 0, 1)$.

Es fácil conseguir el vector normal a la superficie:

$$\vec{n} = \frac{(2x, 2y, 2(z-c))}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-c)^2}} = \left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}, \frac{z-2}{c}\right).$$

Por lo tanto, $\vec{n} \cdot \vec{k} = \dfrac{z-c}{c}$, y luego el área de superficie a considerar es dada por: $\displaystyle\iint_D \frac{c}{z-c}\, dA$, donde D es el círculo descrito anteriormente en el plano $z = 0$.

Para calcular dicha integral hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{c}{z-c}\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a(2c-a)}} \frac{rc}{\sqrt{c^2 - r^2}}\, dr\, d\theta \\
&= 2\pi c \int_0^{\sqrt{a(2c-a)}} \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}\, dr \\
&= 2c\pi . - \sqrt{c^2 - r^2}\Big|_0^{\sqrt{a(2c-a)}} \\
&= 2\pi c \left(c - \sqrt{c^2 - a(2c-a)}\right) \\
&= 2\pi c \left(c - \sqrt{(c-a)^2}\right) \\
&= 2\pi ca.
\end{aligned}$$

6. Utilice el teorema de la **divergencia** para calcular la siguiente integral de superficie:

$$\iint_S (xy + yz + zx)\, dS,$$

donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Como sugerencia, observe que $xy + yz + zx = \vec{F} \cdot \vec{n}$, donde $\vec{F}$ es un campo vectorial que usted debe hallar, y $\vec{n}$ es vector unitario normal a la esfera...

Sabemos que podemos ver a la esfera como una superficie de nivel vía $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, y luego su gradiente es dado por $\nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, y la norma es dada por $||G(x, y, z)|| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{4\,(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$.

Por lo tanto se tiene que $\vec{n}$ es dado por:

$$\vec{n} \;=\; \frac{1}{2}\,(2x, 2y, 2z) = (x, y, z)\,.$$

Observe entonces que $(y,z,x)\cdot(x,y,z) = xy+yz+zx$, de donde $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ y nuestra integral de superficie se convierte en:

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)\, dS = \iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

y al utilizar el teorema de la divergencia vemos que:

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_Q \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint\limits_Q 0\, dV = 0.$$

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

8. Reposición Primer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-1003 Cálculo III

Mayo 2017.
Primer Semestre

Reposición Examen Parcial # 1

Instrucciones

- Cuenta con dos horas y 45 minutos horas para realizar el examen.
- El examen consta de cinco preguntas, cada una vale 20 puntos.
- Debe justificar cada ejercicio que realice con los métodos vistos en clase o establecidos en la carta al estudiante.

1. **20 puntos** Verifique que la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y^2 - y + z^2 = 0; x = 0$, alrededor del eje z, viene dada por la fórmula:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = x^2+y^2.$$

2. Sea C la curva de intersección del elipsoide $2x^2+11y^2+z^2=1$ y el plano $3y-z=0$.

   a) **10 puntos** Hallar una parametrización trigonométrica de la curva C.

   b) **10 puntos** Demostrar que la curvatura de C es constante, es decir que en cada punto de la curva la curvatura es la misma e igual a una constante.

3. **20 puntos** Sea $f(x,y,z) = x^3+4xy+z^2-2yz$. Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1,2,1)$ a lo largo de la dirección en que dicha derivada direccional es máxima.

4. **20 puntos** Consideremos la superficie $z = x^2 + 3y$ y la curva $\vec{r}(t) = (t, 2-t, t^2)$. Sea (a, b, c) un punto común a la superficie y a la curva. Verificar si la recta tangente a la curva en el punto (a, b, c) pertenece al plano tangente a la superficie en el punto (a, b, c).

5. **20 puntos** Sea $u(x, y) = \phi(x^2 - y^2)$, donde ϕ es una función de una variable la cual es dos veces derivable. Compruebe que se cumple lo siguiente:

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

9. Reposición Segundo Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
MA-1003 Cálculo III

24 de Junio, 2017.
Primer Semestre

Reposición Examen Parcial # 2

Instrucciones

- Cuenta con tres horas para realizar el examen. El examen consta de cinco preguntas que suman cien puntos. Debe justificar cada ejercicio que realice con los métodos vistos en clase o establecidos en la carta al estudiante.

1. Considere la siguiente función de tres variables: $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$.

   a) **15 puntos** Justifique que la función anterior posee un único punto crítico y utilice la teoría vista en clase para comprobar que en este punto se alcanza un mínimo local.

   b) **5 puntos** Existirá un punto (x, y, z) tal que $f(x, y, z) < 0$? Qué puede concluir con respecto al mínimo local?

2. **20 puntos** Considere la función $f(x, y, z) = c_1^2 \cdot x^2 + c_2^2 \cdot y^2 + c_3^2 \cdot z^2$, donde c_1, c_2, c_3 son constantes reales distintas de cero. Muestre, usando Lagrange, que el ***valor*** mínimo de $f(x, y, z)$ restringida al plano $x + y + z = 1$ es el número:

$$\tau = \left[\sum_{j=1}^{3} (c_j^{-2}) \right]^{-1}.$$

3. **20 puntos** Sea T la región encerrada por las cuatro rectas: $y = -x + \alpha; y = -x + \beta; y = x + \alpha; y = x + \beta$, donde $\alpha = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$, y $\beta = \ln(\pi)$. Utilice el cambio de variable $u = e^{x+y}$, $v = e^{x-y}$ para calcular el valor de la siguiente integral doble:

$$\iint\limits_T e^{2x} \operatorname{sen}(e^{x+y}) \cos(e^{x-y})\, dx\, dy.$$

4. **20 puntos** Utilice coordenadas cilíndricas para hallar el valor de la integral:

$$\iiint\limits_W |xyz|\, dx\, dy\, dz,$$

donde W es la región interior al cono $x^2 + y^2 = z^2$ y entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

5. **20 puntos** Considere la siguiente integral triple $I = \displaystyle\iiint\limits_W \frac{z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\, dV$, donde W es la región dada por: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$; $y \geq x$; $x \geq 0$; $z \geq 0$.

Utilice coordenadas esféricas para hallar el valor de I.

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

10. Reposición Tercer Parcial

Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática — 12 de Julio de 2017.
MA-1003 Cálculo III — Primer Semestre

Reposición Examen Parcial # 3

Instrucciones

- Cuenta con tres horas para realizar el examen. El examen consta de cinco preguntas que suman cien puntos. Debe justificar cada ejercicio que realice con los métodos vistos en clase o establecidos en la carta al estudiante.

1. Considere la curva $\mathcal{C}$ dada por $2x^2 - 8x + y^2 = 0$, y el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (yx^2, y)$. Utilice una parametrización de $\mathcal{C}$ o el teorema de **Green**, para calcular la integral de línea: $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

2. Calcule el valor de la siguiente integral de línea: $\displaystyle\int_{\Gamma} (2xy + \cos(2y))\ dx + \big(x^2 - 2x\operatorname{sen}(2y)\big)\ dy$, donde Γ es cualquier curva suave a trozos y cerrada que empiece y termine en el punto $(0, 0)$.

3. Calcule el área de superficie de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que es limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$.

4. Considere la curva, Γ, que es la intersección del cubo unitario, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, con el plano $x + z = 1$, orientada de forma positiva. Utilice el teorema de **Stokes** para calcular el valor de:
$$\int_{\Gamma} \big(y^2 - z^2\big)\ dx\ +\ \big(z^2 - x^2\big)\ dy\ \ +\ \big(x^2 - y^2\big)\ dz.$$

5. Un campo vecrtorial $\vec{F}(x, y, z)$ se llama **solenoidal** si cumple que su divergencia es cero.

   a) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, axy^2z, (x^2 + y^2)^2 - 4xyz^2)$. Encuentre el valor de a para que dicho campo sea solenoidal.

   b) Sea S el casquete esférico[4] $x^2 + y^2 + z^2 = 5/4$, tal que $1/2 \leq z$. Calcule el valor de la siguiente integral de superficie:
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\mathbf{S}},$$
   donde $\vec{F}$ es el campo solenoidal del ejercicio anterior.

El entendimiento es una especie de éxtasis. *Carl Sagan*

[4]Un casquete esférico es la esfera a la cual se le quita un trozo, con lo cual queda una superficie abierta.

Algunas Fórmulas útiles

- Green: $\oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$, donde $\vec{F} = (P, Q)$.
- Stokes : $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{S} \left(\nabla \times \vec{F} \right) \cdot \, d\vec{S}$.
- Divergencia: $\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \, d\vec{S} = \iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint\limits_{Q} \nabla \cdot \vec{F} \, dV$.
- Integral de Superficie de un campo escalar: $\iint\limits_{S} f \, dS = \iint\limits_{D} f(\vec{r}(u,v)) ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v|| \, dA$.
- Integral de Superficie de un campo vectorial: $\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \, d\vec{S} = \iint\limits_{S} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, dS$.
- Trigonométricas: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$; $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.