Université de Lille

Exo7

Université
de Lille

Equipo de Exo7 : Arnaud Bodin (Université de Lille) • Léa Blanc-Centi (Université de Lille) • Niels Borne (Université de Lille) • Benjamin Boutin (Université Rennes 1) Laura Desideri (Université de Lille) • Damien Mégy (université de Lorraine) • Pascal Romon (Université Marne la Vallée) avec l'aide d'autres collègues.

Autores de ejercicios:

- 600 nuevos ejercicios: (con algunas correciones) de Christophe Mourougane.
- Los ejercicios de concurso de Michel Quercia.
- Los ejercicios de clases preparatorias J.-L. Rouget.
- Algunas personas que han contribuido a la "Biblioteca de ejercicios": Arnaud Bodin, Eliane Cousquer, François Gourio, Pierre-Yves Legall, Pascal Ortiz, Franz Ridde, Jean-François Barraud, Cécile Drouet, Cornélia Drutu, Olivier Gineste, Vincent Guirardel, Jean-Marc Hécart, Arnaud Hilion, Jean-Marie Lescure, Isabelle Liousse, Sylvain Maillot, Nicolas Marco, Bertrand Monthubert, Nadja Rebinguet, Sandrine Roussel, Marie-Helène Vignal.
- Contribuciones recientes, en particular de L3 : Cornélia Drutu, Volker Mayer, Leonid Potyagailo, Anne-Marie Chollet, Gijs Tuynman, Valery Gritsenko, Jean-François Barraud, Arnaud Bodin, Frédéric Sarkis.
- Los ejercicios de Matexo1: Martine Quinio.

Todos los ejercicios

Table des matières

Lista de abreviaturas usadas en el texto (mayúsculas o minúsculas)

BON	base ortonormada
bond	base ortonormal dirigida
CL	combinación lineal
cpd	casi por doquier, casi en todas partes
CSA	condición de serie alternada
CSI	convergencia simple
CT	continua a trozos
CV	converge
CV	coeficiente de valuación
cva	convergencia absoluta
CVU	convergencia uniforme
DL	desarrollo limitado
DSE	desarrollo en serie entera
DV	diverge
ev	espacio vectorial
IPP	integración por partes
ld	linealmente dependiente
li o libre	linealmente independiente
lqfd	lo que falta demostrar
LU	factorización LU o eliminación gaussiana consiste en factorizar una matriz cuadrada en dos matrices triangulares, una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior. El LU en el término viene del inglés Lower-Upper (que se traduce como inferior-superior)
mcd	máximo común divisor
mcm	mínimo común múltiplo
Mutatis mutandis	Loc. lat. que significa “cambiando lo que se deba cambiar”
NB	Nota bene (normalmente abreviada como N. B.) es una locución latina que significa «nótese bien»
pda	puntos de adherencia
p.med	punto medio
QEM	cuestionario de escogencia múltiple
RPP	recta pasando por puntos

sev	sub-espacio vectorial
SOND	sistema ortonormado directo
TAI	tendiendo a infinito
TCD	teorema de convergencia dominada
TCL	teorema central del límite
TCM	teorema de convergencia monótona
TIF	teorema de incrementos finitos

1 100.01 Lógica

Ejercicio 1

Sean R y S relaciones. Dar la negación de $R \Rightarrow S$. [000104]

Ejercicio 2

Demostrar que $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$.

Solución ▼ [000105]

Ejercicio 3

Sean las siguientes cuatro afirmaciones :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x+y > 0; \qquad (b)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x+y > 0;$$
$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x+y > 0;,\ \ , \qquad (d)\ \exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ y^2 > x.$$

1. ¿Las afirmaciones a, b, c, d son verdaderos o falsos ?
2. Dar la negación.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000106]

Ejercicio 4

Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Negar, de la manera más precisa posible, las siguientes declaraciones :

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. La aplicación f es creciente.
3. La aplicación f es creciente y positiva.
4. Existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) \leqslant 0$.
5. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que cualquiera que sea $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.

No se pide probar nada, solo escribir lo contrario de un enunciado.

Solución ▼ Vidéo ■ [000107]

Ejercicio 5

Completar las líneas punteadas con el conector lógico apropiado : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ...... $x = 2$; 2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \bar{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$; 3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ ... $\mathrm{e}^{2ix} = 1$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000108]

Ejercicio 6

En $\mathbb{R}^2$, se definen los conjuntos $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant 0\}$ y $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geqslant 1,\ x \geqslant 0\}$. Se denota M_1M_2 la distancia usual entre dos puntos M_1 y M_2 de $\mathbb{R}^2$. Evaluar las proposiciones siguientes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 < \varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\qquad M_1M_2 < \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \qquad M_1M_2 < \varepsilon$

4. $\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\qquad M_1M_2 < \varepsilon$

Cuando son FALSAS, dar la negación.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000109]

Ejercicio 7

Negar la proposición : "todos los habitantes de la rue du Havre que tienen los ojos azules ganarán la lotería y se retirarán antes de los 50 años".

Solución ▼ Vidéo ■ [000110]

Ejercicio 8

Escribir la negación de las siguientes afirmaciones donde P, Q, R, S son proposiciones.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P y no Q,
3. P y (Q y R),
4. P o (Q y R),
5. (P y Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Solución ▼ [000111]

Ejercicio 9

Negar las siguientes afirmaciones :

1. todo triángulo rectángulo tiene un ángulo recto ;
2. en todos los establos, todos los caballos son negros ;
3. para todo entero x, existe un entero y tal que, para todo entero z, la relación $z < x$ implica la relación $z < x+1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000112]

Ejercicio 10 El misionero y los caníbales

Los caníbales de una tribu se preparan para comerse a un misionero. Deseando demostrarle por última vez su respeto por la dignidad y la libertad humana, los caníbales ofrecen al misionero que decida su destino él mismo haciendo una breve declaración : si esto es cierto, el misionero será asado, y será hervido en caso contrario. ¿Qué debe decir el misionero para salvar su vida ? (según Cervantes) [000113]

Ejercicio 11

La proposición $\big(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ ¿es cierta ? [000114]

Ejercicio 12

Se supone que la proposición P es cierta al igual que las siguientes proposiciones :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

¿La proposición T es cierta ? [000115]

Ejercicio 13

Escribir la negación de las siguientes oraciones :

1. $(\forall x)(\exists n)/(x \leqslant n)$.
2. $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leqslant M)$.
3. $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
4. $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geqslant N)(|u_n| < \varepsilon)$.
6. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathscr{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

[000116]

Ejercicio 14

Comparar las diferentes frases (¿son equivalentes, contrarias, cuáles son que implican las otras... ?)

1. $(\forall x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
2. $(\forall x)(\forall y)(x \leqslant y)$.
3. $(\exists x)(\exists y)/(x \leqslant y)$.
4. $(\exists x)/(\forall y)(x \leqslant y)$.
5. $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$.
6. $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$.
7. $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$.

[000117]

Ejercicio 15

Si $P(x)$ es una proposición dependiendo de $x \in X$, se denota $\overline{P} = \{x \in X / P(x) \text{ es cierta}\}$. Expresar en términos de $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ conjuntos $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$. [000118]

Ejercicio 16

Demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } (n \geqslant N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000119]

Ejercicio 17

Sean f, g dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Traducir en términos de cuantificadores las siguientes expresiones :

1. f es mayorada ;
2. f es acotada ;
3. f es par ;
4. f es impar ;
5. f nunca se anula ;
6. f es periódica ;
7. f es creciente ;
8. f es estrictamente decreciente ;
9. f no es la función nula ;
10. f nunca tiene los mismos valores en dos puntos diferentes ;
11. f alcanza todos los valores de $\mathbb{N}$;
12. f es inferior a g ;
13. f no es inferior a g.

Solución ▼ Vidéo ■ [000120]

Ejercicio 18 **IT

Expresar usando cuantificadores las siguientes frases y luego dar su negación.

1. (f es una aplicación del plano en sí mismo)
   (a) f es la identidad del plano.
   (b) f tiene al menos un punto invariante (también se dice punto fijo).
2. (f es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)
   (a) f es la aplicación nula.
   (b) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución.
   (c) La ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución.
3. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real)
   (a) La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
   (b) La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.
   (c) La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona.

Solución ▼ [005103]

Ejercicio 19 *IT

Dar la negación de las siguientes oraciones

1. $x \geqslant 3$
2. $0 < x \leqslant 2$.

Solución ▼ [005104]

Ejercicio 20 **IT

¿Son equivalentes las siguientes oraciones ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0\ \text{ y }\ g(x) = 0)$ » y « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)\ \text{ y }\ (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0 \text{ o } g(x) = 0)$ » y « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \text{ o } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».

Dar un ejemplo de funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ambas no nulas y cuyo producto es nulo.

Solución ▼ [005105]

2 100.02 Conjuntos

Ejercicio 21

Demostrar que $\varnothing \subset X$, para todo conjunto X. [000121]

Ejercicio 22

Demostrar por contraposición las siguientes afirmaciones, E es un conjunto :

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,

2. $\forall A,B,C \in \mathscr{P}(E) \quad (A\cap B = A\cap C \text{ y } A\cup B = A\cup C) \Rightarrow B = C.$

Solución ▼ Vidéo ■ [000122]

Ejercicio 23

Sean A,B dos conjuntos, demostrar que $\complement(A\cup B) = \complement A \cap \complement B$ y $\complement(A\cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000123]

Ejercicio 24

Sean E y F dos conjuntos, $f : E \to F$. Demostrar que :

$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad (A\subset B) \Rightarrow (f(A)\subset f(B)),$
$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B),$
$\forall A,B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A\cup B) = f(A)\cup f(B),$

$\forall A,B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),$
$\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F\setminus A) = E\setminus f^{-1}(A).$

Solución ▼ Vidéo ■ [000124]

Ejercicio 25

A y B son partes de un conjunto E, demostrar las leyes de Morgan :

$$\complement A\cup\complement B = \complement(A\cap B) \quad \text{y} \quad \complement A\cap\complement B = \complement(A\cup B).$$

[000125]

Ejercicio 26

Demostrar las siguientes relaciones :

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \quad \text{y} \quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C).$$

[000126]

Ejercicio 27

Demostrar que si F y G son subconjuntos de E :

$$(F\subset G \iff F\cup G = G) \quad \text{y} \quad (F\subset G \iff \complement F\cup G = E).$$

Deducir que :

$$(F\subset G \iff F\cap G = F) \quad \text{y} \quad (F\subset G \iff F\cap\complement G = \varnothing).$$

[000127]

Ejercicio 28

Sea E y F de conjuntos. Si $A\subset E$ y $B\subset F$ demostrar que $A\times B\subset E\times F$. [000128]

Ejercicio 29

Sea $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ y $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$. Escribir el producto cartesiano $A\times B$. ¿Cuál es el número de partes de $A\times B$? [000129]

Ejercicio 30

Sea E un conjunto de n elementos. ¿Cuál es el número de elementos de E^p ? ¿Cuál es el número de partes de E^p ? [000130]

Ejercicio 31

Sean x, y, z números reales, resolver el sistema :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)z = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0. \end{cases}$$

Representar gráficamente el conjunto de soluciones. [000131]

Ejercicio 32

Sea A una parte de E, se llama función característica de A la aplicación f de E en el conjunto de dos elementos $\{0,1\}$, tal que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Sean A y B dos partes de E, f y g sus funciones características. Demostrar que las siguientes funciones son funciones características de conjuntos que se deben determinar :

1. $1-f$.
2. fg.
3. $f+g-fg$.

[000132]

Ejercicio 33

Sea un conjunto E y dos partes A y B de E. Se designa por $A \triangle B$ el conjunto $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *En las siguientes preguntas puede ser conveniente utilizar la noción de función característica.*

1. Demostrar que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Demostrar que para todas las partes A, B, C de E se tiene $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Demostrar que existe una única parte X de E tal que para toda parte A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Demostrar que para toda parte A de E, existe una parte A' de E y solo una tal que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

[000133]

Ejercicio 34

1. Escribir el conjunto de definición de cada una de las siguientes funciones numéricas : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, $x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$.
2. Simplificar $[1,3] \cap [2,4]$ y $[1,3] \cup [2,4]$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se denota $n\mathbb{Z}$ el conjunto de enteros relativos múltiplos de n : $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Simplifier $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$.

[000134]

Ejercicio 35

Se definen los siguientes cinco conjuntos :

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y<1\right\}, \qquad A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y|<1\right\}, \qquad A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x|+|y|<1\right\},$$
$$A_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y>-1\right\}, \qquad A_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y|<1\right\}.$$

1. Representar estos cinco conjuntos.
2. Deducir una demostración geométrica de

$$(|x+y|<1 \ \text{ y } \ |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$$

[000135]

Ejercicio 36

Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es un intervalo, eventualmente vacío o reducido a un punto

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\ \text{ y } \ I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right].$$

Solución ▼ [000136]

Ejercicio 37

Demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es un intervalo que se debe calcular.

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\quad \text{ y } \quad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}, n\right]$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000137]

Ejercicio 38

Sean E un conjunto y A,B,C tres partes de E tales que $A\cup B = A\cup C$ y $A\cap B = A\cap C$. Demostrar que $B=C$. [000138]

Ejercicio 39

Sean E un conjunto y A,B,C tres partes de E. Demostrar que

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) = (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A).$$

[000139]

Ejercicio 40

Dar las posiciones relativas de $A,B,C \subset E$ si $A\cup B = B\cap C$. [000140]

Ejercicio 41

¿Es verdad que $\mathscr{P}(A\cap B)=\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$? Y $\mathscr{P}(A\cup B)=\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$? [000141]

Ejercicio 42

Demostrar que $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap \complement B=A\cap\complement C$. [000142]

Ejercicio 43

Dar la lista de los elementos de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1,2\}))$. [000143]

Ejercicio 44

Sean $A,B\subset E$. Resolver las ecuaciones de incógnita $X\subset E$

1. $A\cup X=B$.
2. $A\cap X=B$.

Solución ▼ [000144]

Ejercicio 45

Sean E,F,G tres conjuntos. Demostrar que $(E\times G)\cup(F\times G)=(E\cup F)\times G$. [000145]

Ejercicio 46

Sean E,F,G,H cuatro conjuntos. Comparar conjuntos $(E\times F)\cap(G\times H)$ y $(E\cap G)\times(F\cap H)$. [000146]

Ejercicio 47

Sea E el conjunto de funciones de $\mathbb{N}$ en $\{1,2,3\}$. Para $i=1,2,3$ se establece $A_i=\{f\in E/f(0)=i\}$. Demostrar que los A_i forman una partición de E. [000147]

Ejercicio 48 **T

A y B son partes de un conjunto E. Demostrar que :

1. $(A\Delta B=A\cap B)\Leftrightarrow(A=B=\varnothing)$.
2. $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.
3. $A\Delta B=B\Delta A$.
4. $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.
5. $A\Delta B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$.
6. $A\Delta C=B\Delta C\Leftrightarrow A=B$.

Solución ▼ [005112]

Ejercicio 49 ***IT

Sean $(A_i)_{i\in I}$ una familia de partes de un conjunto E indexada por un conjunto I y $(B_i)_{i\in I}$ una familia de partes de un conjunto F indexada por un conjunto I. Sea f una aplicación de E hacia F. Comparar desde el punto de vista de la inclusión las partes siguientes :

1. $f(\bigcup_{i\in I}A_i)$ y $\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ (se empieza de nuevo por $f(A\cup B)$ si no se tienen las ideas claras).

2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ y $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f(E\setminus A_i)$ y $F\setminus f(A_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ y $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ y $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F\setminus B_i)$ y $E\setminus f^{-1}(Bi)$.

Solución ▼ [005113]

Ejercicio 50 ***I Teorema de CANTOR

1. Demostrar que existe una inyección de E en $\mathscr{P}(E)$.
2. Considerando la parte $A=\{x\in E/\, x\notin f(x)\}$, demostrar que no existe biyección f de E sobre $\mathscr{P}(E)$.

Solución ▼ [005117]

Ejercicio 51

Sea E un conjunto y $\mathscr{O}$ una parte de $\mathscr{P}(E)$. Se dice que $\mathscr{O}$ es una *topología sobre* E si las siguientes condiciones son verdaderas

— $\mathscr{O}$ es estable bajo intersección finita, dicho de otro modo : para todo $n\in\mathbb{N}^*$ y toda familia $U_1,\ldots,U_n$ de elementos de $\mathscr{O}$, se tiene $\bigcap_{i=1}^{n} U_i\in\mathscr{O}$.

— $\mathscr{O}$ es estable para cualquier unión, dicho de otro modo : para todo conjunto I y toda familia $(U_i)_{i\in I}$ de elementos de $\mathscr{O}$, $\bigcup_{i\in I} U_i\in\mathscr{O}$.

— las partes $\varnothing$ y E son los elementos de $\mathscr{O}$.

1. Demostrar que $\mathscr{O}_1=\{\varnothing,E\}$ y $\mathscr{O}_2=\mathscr{P}(E)$ son topologías en E.
2. Demostrar que
$$\mathscr{O}_3=\{U\in\mathscr{P}(E):|:U=\varnothing \text{ o } {}^cU \text{ es finito}\}$$
es una topología sobre E.
3. ¿Cuántas topologías diferentes existen si E es el conjunto vacío ? ¿Si tiene un solo elemento ? ¿Dos elementos ? ¿Tres elementos ?

[007186]

Ejercicio 52

En el conjunto $\mathbb{R}$, existe un noción de *parte acotada* : es una parte que está incluida en un segmento del tipo $[-M,M]$, para cierto M. Este ejercicio muestra cómo generalizar esta noción de *parte acotada* a un conjunto cualquiera. Sea E un conjunto y $\mathscr{B}$ una parte de $\mathscr{P}(E)$. Se dice que $\mathscr{B}$ es una *bornología en* E si las siguientes condiciones son verdaderas

— Si $A\in\mathscr{B}$ y $B\subseteq A$, entonces $B\in\mathscr{B}$.
— Si $A\in\mathscr{B}$ y $B\in\mathscr{B}$, entonces $A\cup B\in\mathscr{B}$.
— Para todo $x\in E$, se tiene $\{x\}\in\mathscr{B}$.

Los elementos de $\mathscr{B}$ se dicen $\mathscr{B}$-*acotados*, o simplemente *acotados* si no existe ambigüedad en la bornología utilizada. En lo que sigue, se fija un conjunto E.

1. Demostrar que $\mathscr{B}_1=\{\varnothing,E\}$ es una bornología de E. Se llama la *bornología trivial (o grosera)*.

2. Demostrar que el conjunto $\mathscr{B}_2$ de partes finitas de E es una bornología de E. Se llama la *bornología discreta*.
3. ¿Cuántas bornologías diferentes existe si E es vacío ? Si contiene (exactamente) un elemento ? ¿Dos ? ¿Tres ?
4. Se supone ahora que $E = \mathbb{R}$. Sea $\mathscr{B}_3$ el conjunto de partes $A \subseteq \mathbb{R}$ acotadas en el sentido clásico, dicho de otro modo
$$A \in \mathscr{B}_3 \iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leqslant M$$
Demostrar que $\mathscr{B}_3$ es una bornología. Se llama la *bornología usual en* $\mathbb{R}$, y cuando se habla de acotados de $\mathbb{R}$, está implícito que nos referimos a esta bornología (y no a los dos primeros por ejemplo).

[007187]

Ejercicio 53

Sea E un conjunto y $\mathscr{A}$ una parte de $\mathscr{P}(E)$. Se dice que $\mathscr{A}$ es una *álgebra de partes* E si las siguientes condiciones son verdaderas :

— $\mathscr{A}$ no es vacío.
— Si $X \in \mathscr{A}$, entonces $E \setminus X$ también.
— $\mathscr{A}$ es estable por unión finita, dicho de otro modo : para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y toda familia $U_1, \ldots, U_n$ de elementos de $\mathscr{A}$, se tiene $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{A}$.

1. Demostrar que $\mathscr{P}(E)$ es un álgebra de partes de E.
2. Demostrar que un álgebra de partes de E es estable bajo intersección finita.
3. ¿Cuántas álgebras de partes hay si E tiene (exactamente) un, dos, o tres elementos ?

[007188]

---

3 100.03 Reducción al absurdo y contraposición

Ejercicio 54

Demostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. [000148]

Ejercicio 55

Sea X un conjunto y f una aplicación de X en el conjunto $\mathscr{P}(X)$ de partes de X. Se denota A el conjunto de los $x \in X$ verificando $x \notin f(x)$. Demostrar que no existe $x \in X$ tal que $A = f(x)$. [000149]

Ejercicio 56

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones del conjunto $\mathbb{N}$ en sí mismo. Se define una aplicación f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ poniendo $f(n) = f_n(n) + 1$. Demostrar que no existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f = f_p$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000150]

Ejercicio 57

1. Sea $p_1, p_2, \dots, p_r$, r números primos. Demostrar que el entero $N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$ no es divisible por ninguno de los enteros p_i.
2. Utilizar la pregunta anterior para demostrar por contradicción que existe una infinidad de números primos.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000151]

4 100.04 Recurrencia

Ejercicio 58

Demostrar, razonando por inducción, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ es divisible por 111, para todo $n \in \mathbb{N}$. (Indicación : $1000 = 9 \times 111 + 1$). [000152]

Ejercicio 59

Demostrar :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000153]

Ejercicio 60

¿Por qué el siguiente razonamiento es incorrecto ?

Sea $\mathscr{P}(n)$: n lápices de color son todos del mismo color.

— $\mathscr{P}(1)$ es cierta porque un lápiz de color es del mismo color que él mismo.

— Se supone $\mathscr{P}(n)$. Sean $n+1$ lápices. Se retira 1, los n lápices restantes son del mismo color por hipótesis de inducción. Se deja ese lápiz y se saca otro ; los n nuevos lápices son del mismo color otra vez. Por lo tanto, el primer lápiz extraído era del mismo color que los otros n. Por lo tanto, la proposición es verdadera en el rango $n+1$.

— Por tanto, se ha demostrado que todos los lápices en un número infinito numerable son del mismo color.

[000154]

Ejercicio 61

Sea la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_0 = 4$ y $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. ¿La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000155]

Ejercicio 62

1. En el plano, se consideran tres rectas $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formando un "verdadero" triángulo : no son concurrentes, y no existen dos paralelas. Dar el número R_3 de regiones (zonas blancas) cortadas por estas tres rectas.
2. Se consideran cuatro rectas $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$, tales que no existen ninguna tres concurrentes, ni dos paralelas. Dar el número R_4 de regiones cortadas por estas cuatro rectas.
3. Se considera n rectas $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, tales que no existen ninguna tres concurrentes, ni dos paralelas. Sea R_n el número de regiones delimitadas por $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, y R_{n-1} el número de regiones delimitadas por $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Demostrar que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calcular por inducción el número de regiones limitadas por n rectas en posición general, es decir tales que no existen tres concurrentes ni dos paralelas.

Solución ▼ [000156]

Ejercicio 63

Sea X un conjunto. Para $f \in \mathscr{F}(X,X)$, se define $f^0 = id$ y por recurrencia para $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Demostrar que si f es biyectiva entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000157]

Ejercicio 64

Demostrar que

$$\forall n \geqslant 2,\ n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

[000158]

Ejercicio 65

Para todo natural n, se establece

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n.$$

Demostrar que se tiene

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1).$$

[000159]

Ejercicio 66

Para $n \in \mathbb{N}$, se considera la siguiente propiedad :

$$P_n : \quad 2^n > n^2.$$

1. ¿Para qué valores de n la implicación $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ es cierta ?
2. ¿Para qué valores de n la propiedad P_n es cierta ?

[000160]

Ejercicio 67

¿Qué sucede con la siguiente demostración ?

1. Para todo $n \geqslant 2$, se considera la propiedad :

$$P(n): \quad n \text{ puntos distintos del plano están siempre alineados}$$

2. Inicialización : $P(2)$ es cierta porque dos puntos distintos siempre están alineados.
3. Herencia : Se supone que $P(n)$ es cierta y se va a demostrar $P(n+1)$. Sea así $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ de puntos distintos. Según la hipótesis de recurrencia, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ están alineados en una recta d, y $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ están alineados en una recta d'. Las dos rectas d y d' teniendo $n-1$ puntos comunes $A_2, \ldots, A_n$ son coincidentes. Entonces $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ están alineados, que demuestra la herencia de la propiedad.
4. Conclusión : La propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \geqslant 2$.

[000161]

Ejercicio 68

1. Demostrar que para todo entero natural n, 9 divide $10^n - 1$.
2. Sea k un entero estrictamente positivo. Investigar la siguiente propiedad : para todo entero natural n, k divide $(k+1)^n + 2$.

[000162]

Ejercicio 69

Demostrar que para $n \geqslant 1$, el producto de n enteros impares es un entero impar. [000163]

Ejercicio 70

Se considera una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que :

$$u_0 = 0 \quad \text{y} \quad u_1 = 1 \quad \text{y} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Demostrar que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

[000164]

Ejercicio 71

Sea $b \geqslant 2$ un entero fijo. Demostrar que para todo $N \in \mathbb{N}^*$, existe un entero $n \in \mathbb{N}$ y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ perteneciendo a $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ tales que;

$$N = a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n \quad \text{y} \quad a_n \neq 0$$

Demostrar que para cada N, el sistema $(n, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ está determinado por la propiedad anterior. Se dice que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los dígitos de la escritura del número N en base b. [000165]

Ejercicio 72

Demostrar por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k!$ divide el producto de k enteros consecutivos :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ k! \mid n(n+1)\cdots(n+k-1).$$

[000166]

Ejercicio 73

Las propiedades

$$P_n \ : \ 3 \mid 4^n - 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$Q_n \ : \ 3 \mid 4^n + 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N},$$

¿son verdaderas o falsas ? [000167]

Ejercicio 74

1. Calcular los restos de la división euclidiana de $1, 4, 4^2, 4^3$ por 3.
2. Formular, para todo $n \in \mathbb{N}$, una hipótesis $\mathscr{P}(n)$, con respecto al resto de la división euclidiana de 4^n por 3. Demostrar que $\mathscr{P}(n)$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el número $16^n + 4^n + 3$ ¿es divisible por 3 ?

[000168]

Ejercicio 75

Demostrar, razonando por inducción, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ es divisible por 7 cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. [000169]

Ejercicio 76

1. Demostrar por inducción :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Calcular de dos maneras diferentes :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$
3. Deducir :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 3n).$$

[000170]

Ejercicio 77

Demostrar que para todo entero $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

[000171]

Ejercicio 78

Demostrar, determinándolo que existe un entero n_0 tal que

$$\forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant (n+2)^2.$$

[000172]

Ejercicio 79

Demostrar por inducción sobre n que para todo $n \geqslant 2$ la implicación

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

es verdadera. [000173]

Ejercicio 80

1. Sea $n \in \mathbb{N}$; demostrar que para todo entero $k \geqslant 1$ se tiene

$$n^k + kn^{k-1} \leqslant (n+1)^k.$$

2. Sea b un real positivo o nulo. Demostrar por recurrencia, que para todo $n \geqslant 1$ se tiene

$$(1+b)^n \leqslant 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + \cdots + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

[000174]

Ejercicio 81

Demostrar por inducción que para todo entero $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

para todo real a y b. [000175]

Ejercicio 82

Se define una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manera siguiente :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 1,\ F_1 = 1.$$

1. Calcular F_n, para $1 < n < 10$.
2. Demostrar que la ecuación $x^2 = x+1$ admite una única solución positiva a que se debe calcular.
3. Demostrar que, para todo $n \geqslant 2$, se tiene

$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1}.$$

[000176]

Ejercicio 83

Demostrar que :

$$2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}.$$

[000177]

Ejercicio 84

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, encontrar una ley que simplifique el producto :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

[000178]

Ejercicio 85

Para $n \in \mathbb{N}$, sean $a_0, \ldots, a_n$ números reales del mismo signo tales que $a_i > -1$, demostrar que :

$$(1+a_0)\cdots(1+a_n) > 1+a_0+\cdots+a_n.$$

[000179]

Ejercicio 86

Demostrar $\forall n \in \mathbb{N},: \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. [007011]

Ejercicio 87

Demostrar que para todo entero n positivo, el entero $10^n - (-1)^n$ es divisible por 11. [007012]

Ejercicio 88

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $u_0 = 0$ y para todo n positivo, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4}$. Demostrar que la sucesión es mayorada por 4. [007013]

Ejercicio 89

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $u_0 = 0$ y para todo n positivo, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calcular u_n en función de n.

Indicación ▼ [007014]

Ejercicio 90

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y para todo n positivo, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Calcular u_n en función de n.

Indicación ▼ [007015]

Ejercicio 91

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ y para todo n positivo, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,: 1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Indicación ▼ [007016]

Ejercicio 92

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, la suma de los n primeros números enteros positivos impares siempre es el cuadrado de un entero. [007017]

Ejercicio 93

Demostrar : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\operatorname{sen}(nu)| \leqslant n|\operatorname{sen}(u)|$. [007018]

Ejercicio 94

1. Sea $a \in \mathbb{R}_+$. Demostrar $\forall n \in \mathbb{N}^*, : (1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$.
2. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $u_n = \frac{3n}{3^n}$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3n}{2n^2+1}$.

[007019]

Ejercicio 95

Sea $a \in]0, \pi/2[$, y definir una sucesión real por $u_0 = 2\cos(a)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$. [007020]

Ejercicio 96

Se define una sucesión por $u_0 = 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Demostrar que para todo $n \geqslant 3$, u_n es positivo. Deducir que para todo $n \geqslant 4$, se tiene $u_n \geqslant n-2$. Deducir el límite de la sucesión.
2. Se define ahora la sucesión $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Demostrar que la sucesión (v_n) es una sucesión geométrica, dar su primer término y su razón. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Se observa que u_n es la suma de una sucesión geométrica y una sucesión aritmética cuyas razones y primeros términos se deben especificar. Deducir una fórmula para la cantidad $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en función de n.

[007021]

Ejercicio 97

Se considera la sucesión real $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 = 2$ y para todo $n \in \mathbb{N}, : u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Demostrar que para todo real $a \in]1; +\infty[$, se tiene $\frac{1}{\sqrt{a}+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
4. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Deducir el límite de la sucesión (u_n).

[007022]

Ejercicio 98 Recurrencia de Cauchy y aplicación

Sea A una parte de $\mathbb{N}^*$ conteniendo 1 y tal que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \in A \Rightarrow 2n \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.

Demostrar que $A = \mathbb{N}^*$.
Deducir la desigualdad aritmético-geométrica : si $a_1, \dots, a_n$ son reales positivos, entonces se tiene

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

[007023]

Ejercicio 99

Demostrar que todo entero $n \geqslant 1$ puede escribirse como la suma de las potencias de 2 distintas.

Indicación ▼ [007024]

Ejercicio 100

Demostrar que todo entero $n \geqslant 1$ puede escribirse de manera única de la forma $2^p(2q+1)$, con p y q enteros.

Indicación ▼ [007025]

Ejercicio 101

Demostrar que para todo $n > 0$ se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

[007035]

Ejercicio 102 Una recurrencia descendente

Demostrar que para todo entero $N \geqslant 2$,

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}} < 3.$$

Indicación ▼ [007036]

Ejercicio 103 Desigualdad binomial

Demostrar que para todo $a, b > 0$ distintos y todo $n > 1$, se tiene la desigualdad

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n.$$

[007037]

Ejercicio 104 Variantes del razonamiento recursivo

Entre los siguientes enunciados, ¿cuáles permiten deducir que P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$?

1. P_0 y $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
2. P_0, P_1 y $\forall n \geqslant 1, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
3. P_0, P_1, P_2 y $\forall n \geqslant 2, P_n \Rightarrow (P_{2n} \wedge P_{2n+1})$;
4. P_0, P_1 y $\forall n \geqslant 1, P_n \Rightarrow (P_{n-1} \wedge P_{n+1})$.

[007038]

Ejercicio 105 Conductor de un sub-monoide

Sea P_n una afirmación dependiendo de $n \in \mathbb{N}$ tal que :

1. P_0 es cierta ;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow (P_{n+3}$ y $P_{n+4})$.

¿La propiedad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿Para n bastante grande ? (¿Y si es así a partir de qué rango ?) ¿Para cuáles enteros es cierta ?
Retomar la dos premières preguntas reemplazando en el enunciado los números 3 y 4 por parámetros enteros positivos a y b cualesquiera.

Indicación ▼ [007039]

Ejercicio 106 Números de Catalan

Se define una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $C_0 = 1$ y para todo natural n, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

1. Calcular los cinco primeros términos de la sucesión ;
2. Demostrar por inducción que para todo $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 2^{n-1}$;
3. Demostrar por inducción fuerte que para todo $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 3^{n-2}$;
4. Intentar demostrar por una recurrencia similar a la anterior que para todo $n \geqslant 0$, $C_n \geqslant 4^{n-2}$. ¿En qué falla ? ¿Por qué es importante que falle ?

[007040]

Ejercicio 107

Sea x un real tal que $x + \frac{1}{x}$ sea entero. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ es entero. [007041]

Ejercicio 108

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión real definida por $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Determinar u_n en función de n.

Indicación ▼ [007042]

Ejercicio 109

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión real definida por $u_0 = 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Determinar u_n en función de n. [007043]

Ejercicio 110

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se trazan n círculos en el plano. Demostrar que se puede colorear cada región del plano así delimitada con exactamente dos colores, de modo que dos regiones separadas por un arco de círculo son siempre de diferente color. [007044]

Ejercicio 111

Sea n un entero superior o igual que 2. Se colocan $2n$ puntos en el espacio, y se traza n^2+1 segmentos entre estos puntos. Demostrar que se ha trazado al menos un triángulo. [007045]

Ejercicio 112

Determinar los valores de n, para los cuales el número

$$u_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

es entero.

Indicación ▼ [007046]

5 100.05 Relación de equivalencia, relación de orden

Ejercicio 113

1. Sea $E=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se define $\mathscr{R}$ por :
   $(a,b)\mathscr{R}(a',b')\Leftrightarrow a+b'=b+a'$. Demostrar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia. Identificar $E/\mathscr{R}$.
2. La misma pregunta para $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ y $(p,q)\mathscr{R}(p',q')\Leftrightarrow pq'=p'q$.

[000207]

Ejercicio 114

En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $\mathscr{R}$ por :

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y')\Leftrightarrow y=y'.$$

1. Demostrar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia.
2. Determinar la clase de equivalencia de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

[000208]

Ejercicio 115

En $\mathbb{C}$ se define la relación $\mathscr{R}$ por :

$$z\mathscr{R}z'\Leftrightarrow |z|=|z'|.$$

1. Demostrar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia.
2. Determinar la clase de equivalencia de cada $z\in\mathbb{C}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000209]

Ejercicio 116

Sea $\mathscr{R}$ una relación binaria en un conjunto E, simétrica y transitiva. ¿Qué pasa con el razonamiento siguiente ?

"$x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$, pues $\mathscr{R}$ es simétrica,
o $(x\mathscr{R}y$ y $y\mathscr{R}x) \Rightarrow x\mathscr{R}x$ ya que $\mathscr{R}$ es transitiva,
por lo tanto $\mathscr{R}$ es reflexiva."

Indicación ▼ Solución ▼ [000210]

Ejercicio 117

Estudiar la relación $\mathscr{R}$ definida en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) por :

$$f\mathscr{R}g \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

[000211]

Ejercicio 118

Demostrar que la relación $\mathscr{R}$ definida en $\mathbb{R}$ por :

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

es una relación de equivalencia. Precisar, para x fijo en $\mathbb{R}$, el número de elementos de la clase de x módulo $\mathscr{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000212]

Ejercicio 119

¿Es la relación "divide" una relación de orden sobre $\mathbb{N}$? ¿En $\mathbb{Z}$? Si es sí, ¿es una relación de orden total ?
[000213]

Ejercicio 120

Estudiar las propiedades de las relaciones siguientes. En el caso de una relación de equivalencia, especificar clases ; en el caso de una relación de orden, especificar si es total, si el conjunto tiene un elemento más pequeño o más grande.

1. En $\mathscr{P}(E) : A\mathscr{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$; $\quad A\mathscr{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
2. En $\mathbb{Z}$: $a\mathscr{R}_3b \Leftrightarrow a$ y b tienen la misma paridad ; $\quad a\mathscr{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ a-b = 3n$; $\quad a\mathscr{R}_5b \Leftrightarrow a-b$ es divisible por 3.

[000214]

Ejercicio 121

Sean $(X, \leqslant)$ y $(Y, \leqslant)$ dos conjuntos ordenados (se denotan abusivamente los dos órdenes de la misma manera). Se define en $X \times Y$ la relación $(x,y) \leqslant (x',y')$ si y solo si $(x < x')$ o $(x = x'$ y $y \leqslant y')$. Demostrar que es un orden y que es total si y solo si X y Y son totalmente ordenados. [000215]

Ejercicio 122

Se dice que un conjunto es bien ordenado si todo subconjunto no vacío admite un elemento más pequeño.

1. Dar un ejemplo de un conjunto bien ordenado y un ejemplo de un conjunto que no lo es.
2. Demostrar que bien ordenado implica totalmente ordenado.
3. ¿El recíproco es cierto ?

[000216]

Ejercicio 123

Sea $(E, \leqslant)$ un conjunto ordenado. Se define en $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ la relación $\prec$ por

$$X \prec Y \quad \text{si y solo si} \quad (X = Y \ \text{ o } \ \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leqslant y).$$

Verificar que es una relación de orden.

Solución ▼ Vidéo ■ [000217]

Ejercicio 124

Demostrar que $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ es una l.c.i. sobre $]-1,1[$ y determinar sus propiedades. [000218]

Ejercicio 125 Congruencia de cuadrados módulo 5

Se define la relación $\sim$ sobre $\mathbb{Z}$ por $x \sim y \iff x^2 \equiv y^2 \bmod 5$.

1. Determinar el conjunto cociente.
2. ¿Se puede definir una suma cociente ? ¿Una multiplicación cociente ?

[003030]

Ejercicio 126 Producto cartesiano

Sean dos relaciones de equivalencia : $\mathscr{R}$ sobre E, y $\mathscr{S}$ sobre F. Se define sobre $E \times F$:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff x\mathscr{R}x' \text{ y } y\mathscr{S}y'.$$

1. Verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Sea $\phi : E \times F \to (E/\mathscr{R}) \times (F/\mathscr{S}), (x,y) \mapsto (\dot{x}, \dot{y})$
   Demostrar que ϕ es compatible con $\sim$, y que la aplicación cociente asociado es una biyección.

[003031]

Ejercicio 127 $X \cup A = Y \cup A$

Sea E un conjunto y $A \subset E$. Se define la relación en $\mathscr{P}(E)$:

$$X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia.
2. Sea $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E \setminus A), X \mapsto X \setminus A$. Demostrar que ϕ es compatible con $\sim$, y que la aplicación cociente asociada es una biyección.

[003032]

Ejercicio 128 Equivalencias en E^E

Sea E un conjunto no vacío. Se consideran las relaciones en $F = E^E$:

$$f \sim g \iff \exists\ n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } f^n = g^n,$$
$$f \approx g \iff \exists\ m,n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } f^n = g^m,$$
$$f \equiv g \iff f(E) = g(E).$$

1. Demostrar que $\sim$, $\approx$, $\equiv$ son relaciones de equivalencia.
2. Para $f \in F$, se denotan $f^{\sim}$, $f^{\approx}$, $f^{\equiv}$ las clases de equivalencia de f módulo $\sim$, $\approx$, $\equiv$ respectivamente.
   (a) Comparar $f^{\sim}$, $f^{\approx}$.
   (b) Demostrar que toda clase de equivalencia para $\approx$ es unión de clases de equivalencia para $\sim$.
   (c) ¿Qué se puede decir de f si existe $g \in f^{\approx}$ inyectiva ? ¿Sobreyectiva ?
   (d) La misma pregunta para $f^{\equiv}$.

[003033]

Ejercicio 129 Relación de equivalencia cociente

Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ dos relaciones de equivalencia en un conjunto E, tales que :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow x\mathscr{S}y.$$

Se define $\dot{\mathscr{S}}$ sobre $E/\mathscr{R}$ por : $\dot{x}\dot{\mathscr{S}}\dot{y} \iff x\mathscr{S}y$. Verificar que $\dot{\mathscr{S}}$ es una relación de equivalencia, luego definir una biyección entre $(E/\mathscr{R})/\dot{\mathscr{S}}$ y $E/\mathscr{S}$. [003034]

Ejercicio 130 Completación de una relación reflexiva y transitiva

Sea $\mathscr{R}$ una relación binaria en un conjunto E reflexiva y transitiva. Se definen las dos relaciones :

$$\begin{aligned} x\mathscr{S}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ y } y\mathscr{R}x), \\ x\mathscr{T}y &\iff (x\mathscr{R}y \text{ o } y\mathscr{R}x). \end{aligned}$$

¿Son $\mathscr{S}$ y $\mathscr{T}$ relaciones de equivalencia ? [003035]

Ejercicio 131 Partes saturadas para una relación de equivalencia

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en un conjunto E. Para $A \subset E$, se define $s(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

1. Comparar A y $s(A)$.
2. Simplificar $s(s(A))$.
3. Demostrar que : $\forall x \in E$, se tiene $(x \in s(A)) \iff (\dot{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$. Deducir $s(E \setminus s(A))$.
4. Demostrar que $s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i)$ y $s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$.
5. Dar un ejemplo de inclusión estricta.

[003036]

Ejercicio 132 Orden en las funciones

Sea X un conjunto y $E = \mathbb{R}^X$. Se ordena E por : $f \leqslant g \iff \forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1. Verificar que es una relación de orden.
2. ¿El orden es total ?
3. Comparar los enunciados : *“f es mayorada”*, y *“$\{f\}$ es mayorada”*.
4. Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia mayorada de funciones de E. Demostrar que tiene una cota superior.

[003037]

Ejercicio 133 $\sup\circ\inf$ y $\inf\circ\sup$

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se definen los funciones :

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto \sup\{f(t,y) \text{ tal que } y\in\mathbb{R}\},$$

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto \inf\{f(x,t) \text{ tal que } x\in\mathbb{R}\}.$$

Demostrar que g y h son acotadas, luego comparar $\sup h$ y $\inf g$. [003038]

Ejercicio 134 Orden lexicográfico

Se denota $E=[-1,1]^2$, y se define en E la relación :

$$(x,y)\preceq(x',y') \iff \Big((x<x') \text{ o } (x=x' \text{ y } y\leqslant y')\Big) \qquad (\textit{orden lexicográfico}).$$

1. Para $(a,b)\in E$, representar gráficamente el conjunto de los mayorantes de (a,b).
2. Sea A una parte no vacía de E. Demostrar que A admite una cota superior.

[003039]

Ejercicio 135 Distancia entre un punto y una parte

Para $A\subset\mathbb{R}$ no vacía y acotada, y $x\in\mathbb{R}$, se nota :

$$d(x,A)=\inf\{|x-a| \text{ tal que } a\in A\} \qquad (\textit{distancia de } x \textit{ a } A).$$

Demostrar que $\big|d(x,A)-d(y,A)\big|\leqslant|x-y|$. [003040]

Ejercicio 136 Partes adyacentes

Sean $A,B\subset\mathbb{R}$ verificando :

$$\begin{cases}\forall a\in A,\ \forall b\in B,\ a\leqslant b\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\ a\in A,\ \exists\ b\in B \text{ tal que } b-a\leqslant\varepsilon\end{cases}$$

(se dice que A y B son *adyacentes*). Demostrar que $\sup(A)=\inf(B)$. [003041]

Ejercicio 137 cota sup $\Rightarrow$ cota inf

Sea E ordenado de tal manera que toda parte no vacía y mayorada admite una cota superior. Demostrar que toda parte no vacío y minorada admite una cota inferior.

Solución ▼ [003042]

Ejercicio 138 Orden en $\mathbb{R}^2$

Se define sobre $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\ll(x',y') \iff |x'-x|\leqslant y'-y$.

1. Verificar que es una relación de orden.
2. Dibujar conjuntos de mayorantes y minorantes de un par (a,b).
3. ¿El orden es total ?

4. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Determinar $\sup(A)$.

Solución ▼ [003043]

Ejercicio 139 Propiedades de sup e inf

Una red es un conjunto ordenado E en el que para todo $x,y \in E$, $\sup(x,y)$ y $\inf(x,y)$ existen. Sea E una red.

1. Demostrar que sup y inf son operaciones asociativas.
2. ¿En qué condición tienen elementos neutros ?
3. Demostrar que :

$$\begin{aligned}
&\forall x,y \in E, \quad \sup\big(x,\inf(x,y)\big) = \inf\big(x,\sup(x,y)\big) = x,\\
&\forall x,y,z \in E, \quad x \leqslant z \Rightarrow \sup\big(x,\inf(y,z)\big) \leqslant \inf\big(\sup(x,y),z\big),\\
&\forall x,y,z \in E, \quad \inf\big(x,\sup(y,z)\big) \geqslant \sup\big(\inf(x,y),\inf(x,z)\big).
\end{aligned}$$

[003044]

Ejercicio 140 Orden deducido de una ley idempotente

Sea $\cdot$ una operación conmutativa y asociativa en E, tal que : $\forall x \in E,\ x \cdot x = x$. Se define la relación $\leqslant$ sobre E por : $x \leqslant y \iff x \cdot y = x$

1. Reconocer $\leqslant$, cuando $\cdot$ es $\cap$ sobre $\mathscr{P}(X)$ (resp $\cup$).
2. Demostrar que $\leqslant$ es una relación de orden.
3. Demostrar que : $\forall x,y \in E,\ x \cdot y = \inf(x,y)$.

[003045]

Ejercicio 141 Cota superior entre intervalos

Sea E el conjunto de intervalos de $\mathbb{R}$ (incluido $\varnothing$) ordenado por inclusión. Sean I,J dos intervalos. ¿Qué son $\inf(I,J)$, $\sup(I,J)$? [003046]

Ejercicio 142 Extensión de aplicaciones

Sea E un conjunto y $\mathscr{E} = \{(A,f)$ tal que $A \subset E,\ A \neq \varnothing$, y $f \in E^A\}$. Se ordena $\mathscr{E}$ por :

$$(A,f) \preceq (B,g) \iff \begin{cases} A \subset B \\ \forall x \in A,\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

(es decir, que la función g, definida en B, extiende la función f, definida solo en A).

1. Demostrar que $\preceq$ es una relación de orden. ¿El orden es total ?
2. Sean (A,f) y (B,g) dos elementos de $\mathscr{E}$. Encontrar un CNS para que la parte $\{(A,f),(B,g)\}$ sea mayorada. ¿Cuál es entonces su cota superior ?
3. La misma pregunta para minorada.

[003047]

Ejercicio 143 Punto fijo de una función creciente

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ creciente. Se denota $A = \{x \in [0,1]$ tal que $f(x) \leqslant x\}$.

1. Demostrar que A no es vacío.
2. Demostrar que $f(A) \subset A$.
3. Sea $a = \inf(A)$. Demostrar que $f(a)$ minora A.
4. Deducir que $f(a) = a$.

Esto prueba que toda aplicación creciente de $[0,1]$ en sí mismo admite un punto fijo. Demostrar que es falsa para el intervalo $[0,1[$. [003048]

Ejercicio 144 Relación de orden en un conjunto cociente

Sea $\mathscr{R}$ una relación en E reflexiva y transitiva. Se define la relación : $x \sim y \iff x\mathscr{R}y$ y $y\mathscr{R}x$.

1. Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en E.
   En $E/\sim$ se establece : $\dot{x} \leqslant \dot{y} \iff x\mathscr{R}y$.
2. Demostrar que esta definición es independiente de los representantes x e y escogidos.
3. Demostrar que $\leqslant$ es una relación de orden en $E/\sim$.

[003049]

Ejercicio 145 Sin cota superior en $\mathbb{Q}$

En este ejercicio, se admite que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$.

1. Sean $A = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*}$ tal que $x^2 < 2 \,\}$ y $B = \{\, x \in \mathbb{Z}^{+*}$ tal que $x^2 > 2 \,\}$. Determinar $\sup(A)$ y $\inf(B)$.
2. Sean $A = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*}$ tal que $x^2 < 2 \,\}$ y $B = \{\, x \in \mathbb{Q}^{+*}$ tal que $x^2 > 2 \,\}$. Se quiere demostrar que A no admite cota superior *en* $\mathbb{Q}$. Para esto, por el contrario, se supone que $\alpha = \sup(A)$ existe ($\alpha \in \mathbb{Q}$), y se pone $\beta = \frac{2}{\alpha}$.
   (a) Demostrar que $\beta = \inf(B)$.
   (b) Demostrar que : $\forall a \in A,\ \forall b \in B$, se tiene $a \leqslant b$. ¿Qué se puedes deducir para α y β ?
   (c) Obtenga una contradicción considerando $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

[003050]

Ejercicio 146

Sea E el conjunto de rectas del plano. ¿El paralelismo y la ortogonalidad, on relaciones reflexivas, simétricas, antisimétricas, transitivas ? [007189]

Ejercicio 147

Sea E un conjunto finito, de cardinal n. ¿Cuántas relaciones binarias existen en E ? ¿Relaciones simétricas ? ¿Reflexivas ? [007190]

Ejercicio 148

Sea $\leqslant$ una relación de orden en un conjunto E, y $<$ la relación de orden estricto asociada, es decir por definición : $x < y \iff x \leqslant y$ y $x \neq y$. ¿Es lo contrario de $x \leqslant y$ es $y < x$?

Indicación ▼ Solución ▼ [007191]

Ejercicio 149

Sea E un conjunto finito y $f : E \to E$ una involución, es decir una aplicación verificando $f \circ f = \mathrm{Id}$. Demostrar que si f no tiene puntos fijos, entonces $|E|$ es par. Más generalmente, demostrar que la paridad de $|E|$ es la del número de puntos fijos de f.

Indicación ▼ [007192]

Ejercicio 150

Sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia más fina en $\{0,1,2\}$ verificando $0\mathscr{R}1$. Describir la gráfica de $\mathscr{R}$ (dar todos sus elementos). [007193]

Ejercicio 151 (Coordenadas polares)

Sea $\sim$ la relación de equivalencia más fina en $\mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi]$ verificando las condiciones :

$$\begin{cases} \forall \theta, \theta' \in [-\pi,\pi], (0,\theta) \sim (0,\theta') \\ \forall r \in \mathbb{R}_+^*, (r,-\pi) \sim (r,\pi). \end{cases}$$

Describir la gráfica de $\sim$, así como sus clases de equivalencia. [007194]

Ejercicio 152

Sea $l > 0$ un real y $X = [0,l] \times [-1,1]$, y $\sim$ la relación de equivalencia más fina en X tal que $(0,y) \sim (l,-y)$, para todo $y \in [-1,1]$. Describir la gráfica y las clases de equivalencia de la relación. Nota : el conjunto cociente $\mathscr{M} = X/\sim$ es, por lo tanto el conjunto obtenido al pegar el rectángulo $X = [0,l] \times [-1,1]$ a lo largo de dos bordes opuestos, en la dirección opuesta. Se llama la *cinta de Möbius* (de longitud l). [007195]

Ejercicio 153

Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ de relaciones binarias en E. Se dice que $\mathscr{R}$ es más fino que $\mathscr{S}$, o incluso que es un refinamiento, si $\forall x,y \in E, x\mathscr{R}y \implies x\mathscr{S}y$. De manera equivalente, $\mathscr{R}$ es más fino que $\mathscr{S}$ si se tiene la inclusión de los gráficos $\Gamma_{\mathscr{R}} \subseteq \Gamma_{\mathscr{S}}$.

1. Demostrar que « ser más fina que » es una relación de orden en el conjunto de relaciones binarias en E.
2. Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ de relaciones binarias en E. Demostrar que existe una relación binaria en E que refina a la vez $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$, y que también existe una relación binaria en E simultáneamente menos fino que $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$.

[007196]

Ejercicio 154

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}, t \mapsto e^{it}$, y sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por $x\mathscr{R}y \iff x \equiv y \pmod{2\pi}$. Se denota $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ el conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathscr{R}$. Demostrar que la aplicación f desciende al cociente en una aplicación $[f] : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$ que es una biyección.

Solución ▼ [007197]

Ejercicio 155 (Producto de dos relaciones)

Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ dos relaciones en E. Sus *producto*, denotado $\mathscr{R}\mathscr{S}$, es la relación binaria definida por :

$$\forall x,y \in E, x\mathscr{R}\mathscr{S}y \iff \exists a \in E, : (x\mathscr{R}a \text{ y } a\mathscr{S}y)$$

1. Demostrar con un ejemplo que en general, las relaciones $\mathscr{R}\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}\mathscr{R}$ son distintas.
2. Demostrar que el producto de las relaciones es, sin embargo, asociativo, en otras palabras si $\mathscr{R}$, $\mathscr{S}$ y $\mathscr{T}$ son tres relaciones, se tiene
$$(\mathscr{R}\mathscr{S})\mathscr{T} = \mathscr{R}(\mathscr{S}\mathscr{T})$$

[007198]

Ejercicio 156 (Clausura transitiva. Este ejercicio utiliza la noción de producto de relaciones)

Sea $\mathscr{R}$ una relación en E. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\mathscr{R}$ es una relación en E, luego se define por inducción la relación $\mathscr{R}^n$ (definiendo $\mathscr{R}^0$ como la igualdad, luego $\mathscr{R}^{n+1} = \mathscr{R}\mathscr{R}^n$). Demostrar que todas las relaciones siguientes son iguales :

1. $\bigvee_{n\geqslant 0} \mathscr{R}^n$;
2. la relación cuya gráfica es $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} \Gamma_{\mathscr{R}^n}$;
3. la relación cuya gráfica es la intersección de todas las gráficas de relaciones transitivas que contienen $\Gamma_{\mathscr{R}}$.
4. la relación más fina entre todas las relaciones transitivas menos finas que $\mathscr{R}$.

Esta relación binaria (que es, por lo tanto transitivo) es llamada *clausura transitiva* de $\mathscr{R}$. Demostrar que si $\mathscr{R}$ es simétrica (resp. reflexiva), su clausura transitiva es igualmente transitiva. [007199]

Ejercicio 157

Sea E el conjunto de pares de la forma (I, f), donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y f es una función de I en $\mathbb{R}$. La relación $\preceq$ sobre E es definida por
$$(I, f) \preceq (J, g) \iff (I \subseteq J \text{ y } f = g|_I).$$
Demostrar que se trata de una relación de orden. [007200]

Ejercicio 158

Sea $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $f, g \in E$. Se dice que f y g tienen « mismo germen en cero » y se denota $f \underset{0}{=} g$ si :
$$\exists \varepsilon > 0, f_{|]-\varepsilon,\varepsilon[} = g_{|]-\varepsilon,\varepsilon[}$$

1. Demostrar que $\underset{0}{=}$ es una relación de equivalencia en E.
2. Demostrar que si $f \underset{0}{=} g$, entonces $f(0) = g(0)$, pero lo contrario es falso.
3. También demostrar que para todo $a \in \mathbb{R}^*$, existen dos funciones f y g, con $f \underset{0}{=} g$ y $f(a) \neq g(a)$.

La clase de equivalencia de una función f por esta relación de equivalencia, se llama *el germen de f en cero*. Cuidado, esta relación de equivalencia **no** es « la equivalencia en cero » que se introducirá más adelante en el curso de análisis. [007201]

Ejercicio 159

Sea $f : E \to F$, sea $\equiv_f$ la relación de equivalencia en E cuyas clases de equivalencia son fibras de f, y sea $Q = E/\equiv_f$ el conjunto cociente.

1. Demostrar que f pasa al cociente en una aplicación $\bar{f} : Q \to F$ que es inyectiva.

2. Demostrar que una relación de equivalencia $\mathscr{R}$ sobre E es más fina que $\equiv_f$ si y solo si f pasa al cociente por $\mathscr{R}$.
3. Deducir cuáles son las relaciones de equivalencia más y menos finas tales que f pasa al cociente por $\mathscr{R}$.

[007202]

Ejercicio 160 (Coecualizador)

Sean A y B dos conjuntos y f y g dos aplicaciones entre A y B. Se define en B la relación binaria siguiente : $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia más fina tal que $\forall a \in A, f(a)\mathscr{R}g(a)$. El *coecualizador de f y g* es por definición el conjunto cociente $C = B/\mathscr{R}$. Se denota $\pi : B \to C$ la sobreyección canónica en el cociente. Se tiene entonces $\pi \circ f = \pi \circ g$. Demostrar que C y π verifican la siguiente propiedad (dicha *propiedad universal del coecualizador*) :
Para todo conjunto X y aplicación $\phi : B \to X$ verificando $\phi \circ f = \phi \circ g$, existe una única una aplicación $h : C \to X$ tal que $\phi = h \circ \pi$. [007203]

Ejercicio 161 (Suma combinada de conjuntos. Este ejercicio utiliza la noción de coecualizador.)

Sean A, B y C conjuntos y $f : C \to A$, $g : C \to B$ de las aplicaciones. Sea $A \sqcup B$ la unión disjunta de A y B y i_A y i_B las inyecciones canónicas de A y B en $A \sqcup B$. Las dos aplicaciones $i_A \circ f$ y $i_B \circ g$ ambos pasan de C en $A \sqcup B$. Su coecualizador es llamado *la suma combinada de A y B bajo C*, es denotado $A \sqcup_C B$. La sobreyección canónico $A \sqcup B \to A \sqcup_C B$ es denotada π y se denota $j_A = \pi \circ i_A$ y $j_B = \pi \circ i_B$. Demostrar que $A \sqcup_C B$ verifica la siguiente propiedad universal :
Para todo conjunto D provisto de aplicaciones $\phi : A \to D$ y $\psi : B \to D$, existe una única una aplicación $h : A \sqcup_C B \to D$ tal que $\phi = h \circ j_A$ y $\psi = h \circ j_B$. [007204]

Ejercicio 162 (Trituración de una parte de un conjunto)

Sea X un conjunto. Para todo subconjunto $A \subseteq X$, se define la relación binaria $\sim_A$ sobre X como sigue :

$$\forall (x,y) \in X^2, : x \sim_A y \iff (x = y \text{ o } (x \in A \text{ y } y \in A)).$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia en X. ¿Cuáles son sus clases de equivalencia ?
2. Sea f una función de X en un conjunto E, constante en A. Demostrar que desciende al cociente en una aplicación $[f] : X/\sim_A \to E$.
3. Demostrar que para todo conjunto E, la aplicación

$$\phi : \{f \in \mathscr{F}(X,E)/f \text{ es constante en } A\} \to \mathscr{F}(X/\sim_A, E),$$

que a f asociada $[f]$ es sobreyectiva.
4. Identificar, entre las relaciones de equivalencia estudiadas en el curso y los ejercicios del capítulo, los que son casos particulares de trituración de partes.

[007205]

Ejercicio 163 (Cono en un conjunto)

Sea X un conjunto y $Y = X \times [0,1]$. Sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia más fina en Y tal que $\forall x, x' \in X, (x,0)\mathscr{R}(x',0)$.

1. Demostrar que $(x,t)\mathscr{R}(x',t') \iff (t = t' = 0)$ o $(x,t) = (x',t'))$.

2. El cono en X, denotado Cono(X), es por definición $Y/\mathscr{R}$. El nombre de « cono » se puede explicar con el siguiente ejemplo. Definir una biyección entre Cono$(\mathbb{S}^1)$ y el conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = x^2 + y^2,\ \text{y } 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

(que es un verdadero cono en el sentido usual : hacer un diseño).

[007206]

Ejercicio 164 (Suspensión de un conjunto)

Sea X un conjunto. En el conjunto $X \times [-1,1]$, se considera la relación de equivalencia más fina verificando :

$$\begin{cases} \forall x,x' \in X, (x,-1)\mathscr{R}(x',-1) \\ \forall x,x' \in X, (x,1)\mathscr{R}(x',1). \end{cases}$$

1. Demostrar que

$$(x,t)\mathscr{R}(x',t') \iff \big(t = t' = -1 \text{ o } t = t' = 1 \text{ o } (x,t) = (x',t')\big)$$

El conjunto cociente es llamado *suspensión de* X, y es denotado $S(X)$.

2. Sea $X = \{-1,1\}$. Demostrar que la aplicación $f : X \times [-1,1] \to \mathbb{R}^2,: (x,t) \mapsto (t, x\sqrt{1-t^2})$ tiene valores en el círculo unitario del plano, denotado $\mathbb{S}^1$, y pasa al cociente en aplicación inyectiva de $S(X)$ hacia $\mathbb{R}^2$ cuya imagen es $\mathbb{S}^1$. Esto formaliza la frase « la suspensión de dos puntos es un círculo. »

(Nota : Más generalmente, se puede demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, la suspensión de la esfera $\mathbb{S}^n$ está en biyección natural con la esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Este ejercicio trata el caso $n = 0$.) [007207]

Ejercicio 165 (Unión/disyunción y intersección/conjunción de dos relaciones)

Sean $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ dos relaciones en E. Se define la disyunción (o unión), denotada $\mathscr{R} \vee \mathscr{S}$, por :

$$x(\mathscr{R} \vee \mathscr{S})y \iff (x\mathscr{R}y \text{ o } x\mathscr{S}y)$$

De manera equivalente, la gráfica de $\mathscr{R} \vee \mathscr{S}$ es la unión de los gráficos de $\mathscr{R}$ y de $\mathscr{S}$. Igualmente, se define la conjunción (o intersección) $\mathscr{R} \wedge \mathscr{S}$ como la relación cuya gráfica es la intersección de las dos gráficas de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$, es decir

$$x(\mathscr{R} \wedge \mathscr{S})y \iff (x\mathscr{R}y \text{ y } x\mathscr{S}y).$$

Si $\mathscr{R}$ y $\mathscr{S}$ son relaciones de equivalencia, demostrar que $\mathscr{R} \wedge \mathscr{S}$ es una relación de equivalencia, pero no necesariamente $\mathscr{R} \vee \mathscr{S}$. (Nota : Se puede definir la conjunción o la disyunción de todo número de relaciones, usando la unión o la intersección de los gráficos asociados.) [007208]

---

6 100.99 Otro

Ejercicio 166

¿Cuáles son los números enteros n tales que $4^n \leqslant n!$? [000180]

Ejercicio 167

Demostrar que : $\forall n \geqslant 2, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$. *Indicación* : demostrar que $\forall n \geqslant 2, \exists (p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_n = \frac{2p_n+1}{2q_n}$. [000181]

Ejercicio 168

Sea $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ una aplicación que verifica :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) > f(f(n)).$$

Demostrar que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$. *Indicaciones* : ¿Qué se puede decir de $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = \inf\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$? Deducir que $\forall n > 0, f(n) > f(0)$. Demostrar luego que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene : $\forall m > n, f(m) > f(n)$ y $\forall m \leqslant n, f(m) \geqslant m$ (se puede introducir k tal que $f(k)$ sea el entero más pequeño de la forma $f(m)$, con $m > n$). Deducir que f es estrictamente creciente y solo existe una solución al problema. ¿Cuál ? [000182]

Ejercicio 169

Para $p \in \{1,2,3\}$ se denota $S_p = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Usando el cambio de índice $i = n - k$ en S_1, calcular S_1.
2. Hacer lo mismo con S_2. ¿Qué pasa ?
3. Hacer lo mismo con S_3, para expresarlo en términos de n y S_2.
4. Usando el ejercicio 59, calcular S_3.

[000183]

Ejercicio 170

Para calcular sumas de dos índices, hay interés en representar el área del plano cubierta por estos índices y sumar filas, columnas o diagonales... Calcular :

1. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
2. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i(j-1)$.
3. $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-1)j$.
4. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (n-i)(n-j)$.
5. $\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} (p+q)^2$ (se escribe $k = p+q$).

[000184]

7 101.01 Aplicación

Ejercicio 171

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 3x+1$ y $g(x) = x^2 - 1$. ¿Se tiene $f \circ g = g \circ f$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000185]

Ejercicio 172

Sea la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.

1. Determinar los conjuntos siguientes :
   $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ y $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Compararlos.
2. Las mismas preguntas con los conjuntos
   $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ y $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

[000186]

Ejercicio 173 Imágenes directas y recíprocas

Sea $f : E \to F$ una aplicación, $A, A' \subset E$ y $B, B' \subset F$.

1. Simplificar $f(f^{-1}(f(A)))$ y $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Demostrar que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. Comparar $f(A \Delta A')$ y $f(A) \Delta f(A')$.
4. Comparar $f^{-1}(B \Delta B')$ y $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$.
5. ¿Bajo qué condición sobre f se tiene $\forall A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

[002889]

Ejercicio 174 $(X \cap A, X \cap B)$

Sea E un conjunto, y A, B dos partes fijas de E. Sea $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B), X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$.

1. ¿Qué es $\phi(\varnothing)$? ¿$\phi(E \setminus (A \cup B))$?
2. ¿Bajo qué condiciones sobre A y B, ϕ es inyectiva ?
3. ¿El par $(\varnothing, B)$ tiene un antecedente por ϕ ?
4. ¿En qué condiciones sobre A y B, ϕ es sobreyectiva ?

[002890]

Ejercicio 175 Parte estable por una aplicación

Sea $f : E \to E$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se denota $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$ y $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Sea $A \subset E$, $A_n = f^n(A)$, y $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Demostrar que $f(B) \subset B$.
2. Demostrar que B es la parte más pequeña de E estable por f y conteniendo a A.

[002891]

Ejercicio 176 Factorización de una aplicación

1. Sean $f : F \to E$ y $g : G \to E$ dos aplicaciones. Demostrar que existe una aplicación $h : G \to F$ tal que $g = f \circ h$ si y solo si : $g(G) \subset f(F)$. ¿Bajo qué condición es h única ?
2. Sean $f : E \to F$ y $g : E \to G$ dos aplicaciones. Demostrar que existe una aplicación $h : F \to G$ tal que $g = h \circ f$ si y solo si : $\forall x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$. ¿Bajo qué condición h es única ?

[002892]

Ejercicio 177 Propiedades de las aplicaciones $A \mapsto f(A)$ y $B \mapsto f^{-1}(B)$

Sea $f : E \to F$, se consideran las aplicaciones

$$\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F), A \mapsto f(A) \quad \text{y} \quad \Psi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E), B \mapsto f^{-1}(B).$$

Demostrar que :
1) f es inyectiva $\iff$ Φ es inyectiva $\iff$ Ψ es sobreyectiva.
2) f es sobreyectiva $\iff$ Φ es sobreyectiva $\iff$ Ψ es inyectiva.

[002893]

Ejercicio 178 $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ y $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

Sea $f : E \to F$ una aplicación, y G un tercer conjunto que tiene al menos dos elementos. Se construye dos nuevas aplicaciones :

$$f_* : E^G \to F^G, \varphi \mapsto f \circ \varphi \qquad \text{y} \qquad f^* : G^F \to G^E, \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

Demostrar que :

1. f es inyectiva $\iff$ f_* es inyectiva $\iff$ f^* es sobreyectiva.
2. f es sobreyectiva $\iff$ f_* es sobreyectiva $\iff$ f^* es inyectiva.

[002894]

Ejercicio 179 $[h \circ g \circ f,\ g \circ f \circ h$ inyectivas y $f \circ h \circ g$ sobreyectiva$]$

Sean $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} E$ tres aplicaciones tales que $h \circ g \circ f$ y $g \circ f \circ h$ son inyectivas y $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva. Demostrar que f, g, h son biyectivas. [002895]

Ejercicio 180 Partes saturadas para la relación de equivalencia asociada con f

Sea $f : E \to F$ una aplicación, y $\mathscr{S} = \{X \subset E \text{ tal que } f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1. Para $A \subset E$, demostrar que $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.
2. Demostrar que $\mathscr{S}$ es estable bajo intersección y unión.
3. Sean $X \in \mathscr{S}$ y $A \subset E$ tales que $X \cap A = \varnothing$. Demostrar que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4. Sean X y $Y \in \mathscr{S}$. Demostrar que $\overline{X}$ y $Y \setminus X$ pertenece a $\mathscr{S}$.
5. Demostrar que la aplicación $\mathscr{S} \to \mathscr{P}(f(E))$, $A \mapsto f(A)$ es una biyección.

[002896]

Ejercicio 181 Conjugación

Sea E un conjunto y $f : E \to E$ biyectiva. La conjugación por f es la aplicación $\Phi_f : E^E \to E^E, \phi \mapsto f \circ \phi \circ f^{-1}$

1. Demostrar que Φ_f es una biyección de E^E.
2. Simplificar $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. Simplificar $\Phi_f(\phi) \circ \Phi_f(\psi)$.

4. Sean $\mathscr{I}$, $\mathscr{S}$, los subconjuntos de E^E constituidos inyecciones y sobreyecciones. Demostrar que $\mathscr{I}$ y $\mathscr{S}$ son invariantes por Φ_f.
5. Cuando ϕ es biyectiva, ¿qué es $\Big(\Phi_f(\phi)\Big)^{-1}$?

[002897]

Ejercicio 182 Conjuntos equipotentes

Sean E, F dos conjuntos. Se dice que : E es menos potente que F si existe una inyección $f:\ E \to F$
E es más potente que F si existe una sobreyección $f:\ E \to F$
E y F son equipotentes si existe una biyección $f:\ E \to F$.

1. Demostrar que : (E es menos potente que F) $\iff$ (F es más potente que E).
2. Demostrar que $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N}$ tal que n es divisible por $3\}$, y $\mathbb{Z}$ son dos a dos equipotentes.
3. Demostrar que E es menos potente que $\mathscr{P}(E)$.
4. Sea $f : E \to \mathscr{P}(E)$ cualquiera y $A = \{x \in E$ tal que $x \notin f(x)\}$. Demostrar que $A \notin f(E)$.
5. ¿Pueden E y $\mathscr{P}(E)$ ser equipotentes ?
6. Sea G un tercer conjunto. Si E es menos potente que F, demostrar que E^G es menos potente que F^G.

[002898]

Ejercicio 183 Afirmaciones

Sea $f : E \to F$. ¿Qué sucede con las siguientes afirmaciones ?

1. $\forall x \in E\ \ \forall y \in F\ \ f(x) = y$.
2. $\forall x \in E\ \ \exists\ y \in F$ tal que $\ f(x) = y$.
3. $\exists\ x \in E$ tal que $\ \forall y \in F\ \ f(x) = y$.
4. $\exists\ x \in E$ tal que $\ \exists\ y \in F$ tal que $\ f(x) = y$.
5. $\forall y \in F\ \ \forall x \in E\ \ f(x) = y$.
6. $\forall y \in F\ \ \exists\ x \in E$ tal que $\ f(x) = y$.
7. $\exists\ y \in F$ tal que $\ \forall x \in E\ \ f(x) = y$.
8. $\exists\ y \in F$ tal que $\ \exists\ x \in E$ tal que $\ f(x) = y$.

[002899]

---

8 101.02 Inyección, sobreyección

Ejercicio 184

Dar ejemplos de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (luego de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$) inyectiva y no sobreyectiva, luego sobreyectiva y no inyectiva. [000187]

Ejercicio 185

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$. ¿f es inyectiva, sobreyectiva ? Determinar $f^{-1}([-1,1])$ y $f(\mathbb{R}_+)$.
[000188]

Ejercicio 186

¿Las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ?

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n;\ \ f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n\ \ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2;\ \ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2\ \ f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z^2.$$

[000189]

Ejercicio 187

¿Las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\mapsto n+1$
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto n+1$
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$
4. $k:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000190]

Ejercicio 188

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x/(1+x^2)$.

1. f ¿es inyectiva, sobreyectiva ?
2. Demostrar que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Demostrar que la restricción $g:[-1,1]\to[-1,1]$ $g(x)=f(x)$ es una biyección.
4. Encontrar este resultado estudiando las variaciones de f.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000191]

Ejercicio 189

La aplicación $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z+1/z$ ¿es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva ?
Dar la imagen por f del círculo de centro 0 y de radio 1.
Dar la imagen inversa por f de la recta $i\mathbb{R}$. [000192]

Ejercicio 190

Se consideran cuatro conjuntos A,B,C y D y las aplicaciones $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Demostrar que :

$$g\circ f \text{ inyectiva } \Rightarrow f \text{ inyectiva},\qquad g\circ f \text{ sobreyectiva } \Rightarrow g \text{ sobreyectiva}.$$

Demostrar que :

$$\big(g\circ f \text{ y } h\circ g \text{ son biyectivas }\big)\Leftrightarrow\big(f,g \text{ y } h \text{ son biyectivas}\big).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000193]

Ejercicio 191

Sea $f:X\to Y$. Demostrar que

1. $\forall B\subset Y,\ f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$.
2. f es sobreyectiva si y solo si $\forall B\subset Y\ f(f^{-1}(B))=B$.
3. f es inyectiva si y solo si $\forall A\subset X\ f^{-1}(f(A))=A$.
4. f es biyectiva si y solo si $\forall A\subset X\ f(\complement A)=\complement f(A)$.

[000194]

Ejercicio 192

Sea $f : X \to Y$. Demostrar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes :

i. f es inyectiva.

ii. $\forall A,B \subset X\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

iii. $\forall A,B \subset X\ A\cap B = \varnothing \Rightarrow f(A)\cap f(B) = \varnothing$.

[000195]

Ejercicio 193

Sea $f : X \to Y$. Se denota $\hat{f} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), A \mapsto f(A)$ y $\tilde{f} : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X), B \mapsto f^{-1}(B)$. Demostrar que :

1. f es inyectiva si y solo si $\hat{f}$ es inyectiva.
2. f es sobreyectiva si y solo si $\tilde{f}$ es inyectiva.

[000196]

Ejercicio 194 Exponencial complejo

Si $z = x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se establece $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{iy}$.

1. Determinar el módulo y el argumento de e^z.
2. Calcular $\mathrm{e}^{z+z'}, \mathrm{e}^{\bar{z}}, \mathrm{e}^{-z}, (\mathrm{e}^z)^n$ para $n\in\mathbb{Z}$.
3. ¿La aplicación $\exp : \mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto \mathrm{e}^z$, es inyectiva, sobreyectiva ?

Solución ▼ Vidéo ■ [000197]

Ejercicio 195 *IT

Demostrar que : ($g\circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva) y ($g\circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva).

Solución ▼ [005110]

Ejercicio 196 ***IT

Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes (f es una aplicación de un conjunto E en sí mismo) :

1. f es inyectiva.
2. $\forall X\in\mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.
3. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$.
4. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ X\cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X)\cap f(Y) = \varnothing$.
5. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ Y\subset X \Rightarrow f(X\setminus Y) = f(X)\setminus f(Y)$.

Solución ▼ [005114]

9 101.03 Biyección

Ejercicio 197

Sean $a,\ b\in\mathbb{R}$, con $a\neq 0$, y $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f_{a,b}(x)=ax+b$. Demostrar que $f_{a,b}$ es una permutación y determinar su inversa.

Solución ▼ [000198]

Ejercicio 198

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ tal que

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1-x & \text{si no.}\end{cases}$$

Demostrar que $f\circ f=id$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000199]

Ejercicio 199

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ t\mapsto \mathrm{e}^{it}$. Cambiar los conjuntos de salida y llegada para que (la restricción de) f se vuelva biyectiva.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000200]

Ejercicio 200

Se llama *semi-plano de Poincaré* el conjunto $\mathscr{P}$ de números complejos z tales que $\operatorname{Im} z>0$, y *disco unidad* el conjunto $\mathscr{D}$ de números complejos z tales que $|z|<1$. Demostrar que $z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$ es una biyección de $\mathscr{P}$ sobre $\mathscr{D}$. [000201]

Ejercicio 201

Sea $f:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ tal que $f(x)=x^2-1$. ¿f es biyectiva?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000202]

Ejercicio 202

Sean $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$. Demostrar que si $g\circ f$ y $h\circ g$ son biyectivas entonces f,g y h, lo son igualmente. [000203]

Ejercicio 203

Sean $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A$. Demostrar que si $h\circ g\circ f$ y $g\circ f\circ h$ son inyectivas y $f\circ h\circ g$ sobreyectiva entonces f,g y h son biyectivas. [000204]

Ejercicio 204

Sea X un conjunto. Si $A\subset X$ se denota χ_A la función característica asociada. Demostrar que la aplicación $\Phi:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{F}(X,\{0,1\}),A\mapsto\chi_A$ es biyectiva. [000205]

Ejercicio 205

Sea E un conjunto no vacío. Se dan dos partes A y B de E y se define la aplicación $f : \wp(E) \to \wp(E)$, $x \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$. Discutir y resolver la ecuación $f(X) = \varnothing$. Deducir una condición necesaria para que f sea biyectiva. Se supone ahora $B = A^c$. Expresar f usando la diferencia simétrica Δ. Demostrar que f es biyectiva, precisar f^{-1}. ¿f es involutiva (i.e. $f^2 = id$) ? ¿Qué propiedad se deduce ? [000206]

Ejercicio 206 **IT

En cada uno de los casos siguientes, determinar $f(I)$, luego se verifica que f realiza una biyección de I sobre $J = f(I)$, luego se especifica f^{-1} :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Solución ▼ [005106]

Ejercicio 207 **IT

Para $z \neq i$, se establece $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Demostrar que f realiza una biyección de $D = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$ sobre $P = \{z \in \mathbb{C} / \ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Precisar f^{-1}.

Solución ▼ [005107]

Ejercicio 208 **T

Entre $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ y $h \circ f \circ g$ dos son inyectivas y una es sobreyectiva. Demostrar que f, g y h son biyectivas.

Solución ▼ [005111]

Ejercicio 209 **** Una biyección entre $\mathbb{N}^2$ y $\mathbb{N}$

Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$$(x,y) \mapsto y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$
Demostrar que f es una biyección. Precisar, para $n \in \mathbb{N}$ dado, el par (x,y) del cual es la imagen.

Solución ▼ [005118]

---

10 101.99 Otro

11 102.01 Binomio de Newton y combinatoria

Ejercicio 210

Demostrar que si p es un número primo, p divide C_p^k, para $1 \leqslant k \leqslant p-1$. [000219]

Ejercicio 211

Usando la función $x \mapsto (1+x)^n$, calcular :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k; \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k; \qquad \sum_{k=1}^{n} k C_n^k; \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000220]

Ejercicio 212

Demostrar que $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ (para $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$). Deducir que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

[000221]

Ejercicio 213

Usando la fórmula binomial, demostrar que :

1. $2^n + 1$ es divisible por 3 si y solo si n es impar ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ es divisible por 7.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000222]

Ejercicio 214

Demostrar que $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, para $1 \leqslant p \leqslant n-1$. [000223]

Ejercicio 215

Demostrar que, para p y n enteros naturales no nulos tales que $1 \leqslant p \leqslant n$, se tiene :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

[000224]

Ejercicio 216

1. Demostrar que :
$$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p,$$
donde p y n son números naturales con $0 \leqslant p \leqslant n$.
2. Con las mismas notaciones, demostrar que
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

[000225]

Ejercicio 217

1. Sean n, p y q de enteros naturales tales que $0 \leqslant p, q \leqslant n$.
2. Demostrar que se tiene $C_n^p = C_n^q$ si y solo si $p = q$ o $p + q = n$.
3. Resolver la ecuación
$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-2n+3}.$$

[000226]

Ejercicio 218

Sean $m,n \in \mathbb{N}^*$ y $p \in \mathbb{N}$. Usando la fórmula binomial, demostrar que $m^{2p+1}+n^{2p+1}$ es divisible por $m+n$.
[000227]

Ejercicio 219

Usando la fórmula binomial demostrar :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0 \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}.$$

Solución ▼ [000228]

Ejercicio 220

Calcular el módulo y el argumento de $(1+i)^n$. Deducir los valores de

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$$
$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000229]

Ejercicio 221

Demostrar las siguientes fórmulas :

1. $C_n^m = C_m^{n-m}$ (se puede usar el hecho de que $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E), A \mapsto A^c$ es una biyección.)
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$,
3. $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$.

Solución ▼ [000230]

Ejercicio 222

Sean E un conjunto no vacío y X,Y una partición de E.

1. Demostrar que la aplicación siguiente es una biyección : $\begin{array}{l}\mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(Y)\\ A \mapsto (A\cap X, A\cap Y)\end{array}$
2. Demostrar que para $p,q,r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leqslant p+q$ se tiene : $\displaystyle\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r$.
3. Deducir que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

[000231]

Ejercicio 223

Sea E un conjunto, $a \in E$ y $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E) \begin{cases} X \mapsto X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \mapsto X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X. \end{cases}$

1. Demostrar que f es una biyección.

2. Se supone ahora que E es finito y $\operatorname{card}(E) = n$. Se define $\mathscr{P}_0(E)$ el conjunto de partes de E de cardinal par y $\mathscr{P}_1(E)$ el conjunto de partes de E de cardinal impar. Demostrar que $\operatorname{card}(\mathscr{P}_0(E)) = \operatorname{card}(\mathscr{P}_1(E))$.
3. Calcular estos cardinales y deducir el valor de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

[000232]

Ejercicio 224

Utilizando la fórmula binomial de Newton, demostrar que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. Deducir el valor de $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k}$.

[000233]

Ejercicio 225

Sean $0 \leqslant p \leqslant n$.

1. Demostrar por inducción en n que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.
2. Escribir estas igualdades para $p = 2$ y $p = 3$.
3. Deducir las sumas

$$S_2' = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$
$$S_3' = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)^2 \cdot n \qquad S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

[000234]

Ejercicio 226 Cálculo de sumas

Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$.

Solución ▼ [002900]

Ejercicio 227 Cálculo de sumas

Sean $n, p \in \mathbb{N}^*$, con $n \geqslant p$.

1. Verificar que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{k-p}$, para $p \leqslant k \leqslant n$.
2. Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^p$.
3. Deducir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^p = 0$ si $p < n$.

Solución ▼ [002901]

Ejercicio 228 Cálculo de sumas

Sean $n, p \in \mathbb{N}^*$. Simplificar $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k$.

Solución ▼ [002902]

Ejercicio 229 Sumas de cardinales

Sea E un conjunto finito de cardinal n. Calcular $\sum_{A\subset E} \operatorname{card}(A)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{card}(A\cap B)$, $\sum_{A,B\subset E} \operatorname{card}(A\cup B)$.

Solución ▼ [002903]

Ejercicio 230 Sumas de enteros

Sea $n\in\mathbb{N}$. Calcular $\sum_{i+j=n} ij$ y $\sum_{i+j+k=n} ijk$.

Solución ▼ [002904]

Ejercicio 231 Combinaciones con repeticiones

Sean $n,p\in\mathbb{N}$. Se denota Γ_n^p el número de n-tuples $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n$ tales que $x_1+\cdots+x_n=p$.

1. Determinar Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.
2. Demostrar que $\Gamma_{n+1}^{p+1}=\Gamma_{n+1}^p+\Gamma_n^{p+1}$ (se clasifican los $(n+1)$-tuples tales que $x_1+\cdots+x_{n+1}=p+1$ dependiendo de que $x_1=0$ o no).
3. Deducir que $\Gamma_n^p=C_{n+p-1}^p$.

Solución ▼ [002905]

Ejercicio 232 Sumas de coeficientes binomiales

Sean $n,p\in\mathbb{N}$. Demostrar que $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$. [002906]

Ejercicio 233 C_n^p maximal

Sea $n\in\mathbb{N}$ fijado. Determinar para qué valor de p el número C_n^p es maximal (se debe estudiar el cociente C_n^p/C_n^{p+1}).

Solución ▼ [002907]

Ejercicio 234 Paridad de C_n^p

Sea $p\in\mathbb{N}^*$, y $n=2^p$.

1. Sea $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Verificar que $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.
2. Deducir que : $\forall k\in\{1,\dots,n-1\}$, C_n^k es par.
3. Deducir que : $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$, C_{n-1}^k es impar.

[002908]

Ejercicio 235 Fórmula de Vandermonde

Sean $a,b,c\in\mathbb{N}$. Demostrar que $\sum_{k=0}^{c} C_a^k C_b^{c-k} = C_{a+b}^c \dots$

1. Calculando de dos formas $(1+x)^a(1+x)^b$.
2. Buscando el número de partes del cardinal c en $E\cup F$, donde E y F son conjuntos disjuntos de cardinales a y b.
3. Aplicación : Sean $n,p,q\in\mathbb{N}$. Demostrar que $\sum_{k=0}^{q} C_q^k C_n^{p+k} = C_{n+q}^{p+q}$.

Ejercicio 236 Fórmula de inversión

Sea (x_n) una sucesión de reales. Se define $y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k$. Demostrar que $(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_k$. [002910]

Ejercicio 237 Sucesión de Fibonacci

Sea $u_n = \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}^{p}$. Demostrar que $u_0 = u_1 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (*sucesión de Fibonacci*). [002911]

Ejercicio 238 IT Identidades combinatorias

La dificultad aumenta gradualmente de fácil a bastante difícil sin ser insuperable.

1. Calcular $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.
2. Demostrar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$ y encontrar el valor común de las dos sumas.
3. Calcular las sumas $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots$ y $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$.
4. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
5. Demostrar que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (usar el polinomio $(1+x)^{2n}$).
6. Calcular las sumas $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n}$ y $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considera en cada caso algún polinomio inteligentemente elegido).
7. Demostrar que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, donde $0 \leqslant p \leqslant n$. Interpretación en el triángulo de PASCAL ?
8. (a) Sea $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Encontrar una relación de recurrencia que vincula I_n y I_{n+1} y deducir I_n en función de n (hacer una integración por partes en $I_n - I_{n+1}$).
   (b) Demostrar la identidad válida para $n \geqslant 1$: $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}$.

Solución ▼ [005137]

Ejercicio 239 **

¿Cuál es el coeficiente de $a^4b^2c^3$ en el desarrollo de $(a-b+2c)^9$?

Solución ▼ [005138]

Ejercicio 240 **I

Desarrollar $(a+b+c+d)^2$ y $(a+b+c)^3$.

Solución ▼ [005139]

Ejercicio 241 ***

Sea $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. ¿Cuál es el término más grande en la expansión de $(a+b)^n$?

Solución ▼ [005140]

Ejercicio 242 *

Resolver en $\mathbb{N}*$ la ecuación $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$.

Solución ▼ [005141]

Ejercicio 243 *I Desigualdad de BERNOULLI

Demostrar que, para a real positivo y n entero natural dados, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Solución ▼ [005147]

Ejercicio 244 ****I

Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tal que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, ya que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Demostrar que $E((2+\sqrt{3})^n)$ es un entero impar (pensar en $(2-\sqrt{3})^n)$).

Solución ▼ [005158]

Ejercicio 245 IT

1. (***) Encontrar una prueba combinatoria de la identidad $\sum C_n^{2k} = \sum C_n^{2k+1}$ o bien demostrar directamente que un conjunto a n elementos contienen tantas partes pares como partes impares.
2. (****) Encontrar una prueba combinatoria de la identidad $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
3. (****) Encontrar una prueba combinatoria de la identidad $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Solución ▼ [005278]

Ejercicio 246 *** Combinaciones con repeticiones

Demostrar que el número de soluciones enteras $x_i \geqslant 0$ de la ecuación $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$ (k entero natural dado) es C_{n+k-1}^k. (Denotar $a_{n,k}$ el número de soluciones y proceder por inducción.)

Solución ▼ [005280]

12 102.02 Cardinal

Ejercicio 247

Demostrar que $\mathbb{Z}$ es numerable usando la aplicación :

$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \begin{cases} n \mapsto 2n-1 & \text{si } n > 0; \\ n \mapsto -2n & \text{si no.} \end{cases}$$

[000235]

Ejercicio 248

Para A,B dos conjuntos de E se denota $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Para E un conjunto finito, demostrar :

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2 \operatorname{Card} A \cap B.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000236]

Ejercicio 249

Sea E un conjunto de n elementos, y $A \subset E$ un subconjunto de p elementos. ¿Cuál es el número de partes de E que contienen uno y solo un elemento de A ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000237]

Ejercicio 250

Determinar el número de palabras distintas que se pueden formar con 6 vocales y 20 consonantes. Cada palabra está compuesta de 3 consonantes y 2 vocales, excluyendo las palabras que contienen 3 consonantes consecutivas. [000238]

Ejercicio 251

Se consideran las manos de 5 cartas que se pueden extraer de una baraja de 52 tarjetas.

1. ¿Cuántas manos diferentes hay ?
2. ¿Cuántas manos existen con exactamente un as ?
3. ¿Cuántas manos existen con al menos una jota ?
4. ¿Cuántas manos existen (a la vez) al menos un rey y una reina ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000239]

Ejercicio 252

Sean A, A', B, B' cuatro conjuntos tales que :

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A') = a \ \text{ y } \ \operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(B') = b.$$

1. Determinar el número de biyecciones de $A \times B$ sobre $A' \times B'$.
2. Se supone ahora que $\{A,B\}$, $\{A',B'\}$ formar dos particiones de E, un conjunto. Determinar el número de biyecciones $f : E \longrightarrow E$ tales que $f(A) = A'$ y $f(B) = B'$.

[000240]

Ejercicio 253

Sean A y B dos subconjuntos finitos de un conjunto E.

1. Demostrar que : $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.
2. Demostrar por inducción que si $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es una familia de subconjuntos finitos de E, entonces :
$$\mathrm{card}(\bigcup_{i=1}^{n}F_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathrm{card}(F_i)$$
con igualdad si los F_i son dos a dos disjuntos.

[000241]

Ejercicio 254

Sean $1\leqslant k\leqslant n$. Determinar el número de k-tuples $(i_1,\dots,i_k)$ tales que $1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n$. [000242]

Ejercicio 255 Permutaciones

¿Cuántas biyecciones existen f de $\{1,\dots,12\}$ en sí-mismo teniendo :
1. ¿La propiedad : n es par $\Rightarrow f(n)$ es par ?
2. ¿La propiedad : n es divisible por 3 $\Rightarrow f(n)$ es divisible por 3 ?
3. ¿Estas dos propiedades a la vez ?
4. Retomar las preguntas anteriores reemplazando *biyección* por *aplicación.*

Solución ▼ Vidéo ■ [002912]

Ejercicio 256 Permutaciones de pares

Debemos colocar alrededor de una mesa redonda un grupo de $2n$ personas, n hombres y n mujeres, que constituyen n parejas. ¿Cuántas disposiciones hay ...
1. en total ?
2. respetando la alternancia de los sexos ?
3. sin separar parejas ?
4. cumpliendo las dos condiciones anteriores ?

Solución ▼ [002913]

Ejercicio 257 Número de operaciones

1. ¿Cuántas operaciones internas existe en un conjunto de n elementos ?
2. ¿Cuántas son conmutativos ?
3. ¿Cuántas tiene un elemento neutro ?
4. ¿Cuántas son conmutativas y tienen un elemento neutro ?

Solución ▼ [002914]

Ejercicio 258 Fórmula de Poincaré

Sean $A_1,\dots,A_n$, n conjuntos finitos.
1. (a) Calcular $\mathrm{card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3)$ y $\mathrm{card}\,(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$.
   (b) Sugerir una fórmula para $\mathrm{card}\,(A_1\cup\dots\cup A_n)$.

2. Demostración de la fórmula : Se denota $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, y para $x \in E$ se establece $f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
   (a) Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Desarrollar completamente $p = (1 - x_1) \times \cdots \times (1 - x_n)$.
   (b) Se considera la suma $\sum_{x \in E} (1 - f_1(x)) \dots (1 - f_n(x))$, demostrar la fórmula 1b.
3. Aplicaciones :
   (a) Determinar el número de aplicaciones $f : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, n\}$ no sobreyectivas.
   (b) Determinar el número de permutaciones de un conjunto de n elementos que tienen al menos un punto fijo.

Solución ▼ [002915]

Ejercicio 259 Desigualdades para la fórmula de Poincaré

Sean $A_1, \dots, A_n$ n conjuntos finitos, y $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

1. Demostrar que $\operatorname{card}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i)$. ¿Casos de igualdad ?
2. Demostrar que $\operatorname{card}(E) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{card}(A_i \cap A_j)$. ¿Casos de igualdad ?

Solución ▼ [002916]

Ejercicio 260 Couples (A, B) tales que $A \cup B = E$

Sea E un conjunto finito de n elementos, y $\mathscr{E} = \{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \text{ tal que } A \cup B = E\}$. Determinar $\operatorname{card}(\mathscr{E})$.

Solución ▼ [002917]

Ejercicio 261 Partes que no contienen elementos consecutivos

1. ¿Cuál es el número de partes del elemento p de $\{1, \dots, n\}$ que no contienen elementos consecutivos ?
2. Sea t_n el número de partes de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal cualquiera sin elementos consecutivos.
   (a) Demostrar que $t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$, $t_{2n+1} = t_n^2 + t_{n-1}^2$, y $t_{2n} = t_n^2 - t_{n-2}^2$.
   (b) Calcular t_{50}.

Indicación ▼ Solución ▼ [002918]

Ejercicio 262 Número de relaciones de equivalencia

Sea R_n el número de relaciones de equivalencia en un conjunto para n elementos.

1. Encontrar una relación de recurrencia entre R_n y los R_k, $k < n$ (fijar un elemento, y razonar sobre la clase de equivalencia de este elemento).
2. Calcular R_n, para $n \leqslant 6$.

Solución ▼ [002919]

Ejercicio 263 Equivalencia entre funciones

Sean E, F, dos conjuntos no vacíos. Se definen dos relaciones en $X = F^E$ por :

$$\begin{aligned} f \sim g \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\ \phi : F \to F \text{ biyectiva tal que } g = \phi \circ f, \\ f \equiv g \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \iff g(x) = g(y)\big). \end{aligned}$$

1. Demostrar que son relaciones de equivalencia.
2. Demostrar que $f \sim g \Rightarrow f \equiv g$.
3. Se supone $f \equiv g$. Demostrar que $f \sim g$ en los siguientes casos :
   (a) F es finito y f es sobreyectiva.
   (b) F es finito y f es cualquiera.
   (c) E es finito.
4. Determinar un contraejemplo para $E = F = \mathbb{N}$.

[002920]

Ejercicio 264 Buen orden

Sea E un conjunto ordenado en el que cada parte no vacía tiene un elemento más grande y un elemento más pequeño. Demostrar que E es totalmente ordenado y finito. [002921]

Ejercicio 265 Elemento maximal

Sea E un conjunto ordenado. Un elemento $a \in E$ se dice *maximal* si no existe $b \in E$ tal que $b > a$.

1. Si E es totalmente ordenado, demostrar que : *maximal* $\iff$ *máximo.*
2. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ordenado por divisibilidad. Encontrar los elementos máximos.
3. Si E es finito, Demostrar que existe un elemento maximal.
4. Si E es finito y hay un solo elemento maximal, demostrar que este elemento es máximo.

[002922]

Ejercicio 266 Números de Catalan

Sean $x_1,\dots,x_n$, n reales. Para calcular la suma $x_1+\cdots+x_n$, se colocan los paréntesis para que solo se tengan que sumar dos números. Sea t_n el número de formas de poner paréntesis (se establece $t_1 = 1$).

1. Determinar t_2,t_3,t_4.
2. Encontrar una relación de recurrencia entre t_n y $t_1,\dots,t_{n-1}$.

Solución ▼ [002923]

Ejercicio 267 ***

¿Cuántas particiones hay de un conjunto de pq elementos en p clases teniendo cada una q elementos ? (Si E es un conjunto en pq elementos y si $A_1,\dots,A_p$ son p partes de E, $A_1,\dots,A_p$ forman una partición de E si y solo si todo elemento de E está en una y solo una de las partes A_i. Lo mismo equivale a decir que la unión de A_i es E y que los A_i son dos a dos disjuntos.)

Solución ▼ [005279]

Ejercicio 268 *

¿Cuántos números de 5 cifras hay donde 0 figura una vez y solo una vez ?

Solución ▼ [005281]

Ejercicio 269 **I

Se parte del punto de coordenadas $(0,0)$, para llegar en el punto de coordenadas (p,q) (p y q enteros naturales dados) moviendo cada paso una unidad hacia la derecha o hacia arriba. ¿Cuántos caminos posibles hay ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [005284]

Ejercicio 270 ***I

¿De cuántas maneras se puede pagar 100 euros con monedas de 10, 20 y 50 centavos ?

Solución ▼ [005285]

Ejercicio 271 ****

1. Sea E un conjunto finito y no vacío. Sean n un entero natural no nulo y $A_1,\dots,A_n$, n partes de E. Demostrar el « principio de inclusión-exclusión » :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1\cup\dots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}(A_i)-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\operatorname{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2})\\&+\dots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n}\operatorname{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})\\&+\dots+(-1)^{n-1}\operatorname{card}(A_1\cap\dots\cap A_n).\end{aligned}$$

2. ¿Cuántas permutaciones σ de $\{1,\dots,n\}$ hay verificando $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $\sigma(i)\neq i$? (Estas permutaciones se denominan desarreglos (permutaciones sin punto fijo)). Indicación : Denotar A_i el conjunto de permutaciones que fijan i y usar 1). Se puede entonces resolver un famoso problema de probabilidad, el problema del sombrero. n personas dejan sus sombreros en un guardarropa. Saliendo, cada persona toma un sombrero al azar. Demostrar que la probabilidad de que ninguna de estas personas se lleve su propio sombrero es aproximadamente $\frac{1}{e}$, cuando n es grande.

Solución ▼ [005286]

Ejercicio 272 **

¿Cuántas sobreyecciones hay de $\{1,\dots,n+1\}$ sobre $\{1,\dots,n\}$?

Solución ▼ [005287]

Ejercicio 273 ***

Sea (P) un polígono convexo en n vértices. ¿Cuántas diagonales tiene este polígono ? ¿En cuántos puntos distintos de los vértices se cortan como máximo ?

Solución ▼ [005288]

Ejercicio 274 ***

1. Se dan n rectas del plano. Se supone que no existen dos que sean paralelas, ni tres que sean concurrentes. Determinar el número $P(n)$ de regiones limitadas por estas rectas.
2. Se dan n planos del espacio. Se supone que no existen dos que sean paralelos, ni tres que sean concurrentes en una recta, ni cuatro que sean concurrentes en un punto. Determinar el número $Q(n)$ de las regiones limitadas por estos planos.

Solución ▼ [005289]

Ejercicio 275 ***

Sea P_n^k el número de particiones de un conjunto para n elementos en k clases. Demostrar que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$, para $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Hacer una tabla para $1 \leqslant k,n \leqslant 5$. Calcular en función de P_n^k el número de sobreyecciones de un conjunto de n elementos en un conjunto de p elementos.

Solución ▼ [005290]

13 102.99 Otro

Ejercicio 276

1. (*Principio de los pastores*) Sean E, F dos conjuntos con F conjunto finito, y f una sobreyección de E sobre F verificando :
$$\forall y \in F,\ \operatorname{card}(f^{-1}(y)) = p$$
Demostrar que E es entonces un conjunto finito y $\operatorname{card}(E) = p \operatorname{card}(F)$.
2. (*Principio de los cajones*) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, p elementos distintos de un conjunto E, repartidos entre una familia de n subconjuntos de E. Si $n < p$ demostrar que existe al menos un conjunto de la familia que contiene al menos dos elementos entre los α_i.(se puede razonar por reducción al absurdo)

[000243]

Ejercicio 277

Demostrar por inducción en n que si $A_1, \dots, A_n \subset E$, entonces

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

[000244]

Ejercicio 278

Sea $p_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ teniendo k puntos fijos, demostrar entonces que :

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

Interpretar. [000245]

Ejercicio 279

Sea E un conjunto de cardinal $nm \in \mathbb{N}^*$, donde $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, y $P_{n,m}$el conjunto de particiones de E en n partes de m elementos cada uno. Demostrar que :

$$N_{n,m} = \operatorname{card}(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(*Indicación* : Se puede proceder por recurrencia.) [000246]

Ejercicio 280

La historia : n personas traen un regalo a una fiesta, y todos sacan un regalo del montón formado por todos los regalos traídos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona se vaya con su regalo? ¿En qué se convierte esta probabilidad cuando el número de personas se vuelve muy grande, i.e. : $n \to \infty$? (Se observa que la intuición destaca dos efectos contradictorios : entre más personas es más probable que una persona tenga su regalo porque... hay más personas, pero también son más regalos, por lo tanto una mayor proporción de obsequios “aceptables”). Sea $S_n = \sigma(\{1,\dots,n\})$. Se dice que $\sigma \in S_n$ es un desarreglo si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\sigma(i) \neq i$. Se denota $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$ y D_n el conjunto de los desarreglos.

1. Calcular $\operatorname{card}(A_i)$.
2. Expresar $S_n \setminus D_n$ en función de los A_i.
3. Deducir $\operatorname{card}(D_n)$ (se puede usar el ejercicio 277).
4. Determinar el límite de $\dfrac{\operatorname{card} D_n}{\operatorname{card} S_n}$. (se recordar que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}) = e^x$).

[000247]

Ejercicio 281

Sea E un conjunto de cardinal n, $\mathcal{R}$e una relación de equivalencia en E, con k clases de equivalencia y r parejas $(x,y) \in E^2$ tales que $x\mathcal{R}ey$. Demostrar que $n^2 \leqslant kr$. [000248]

Ejercicio 282 Numeración de $\mathbb{N}^2$

Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$(p,q) \mapsto \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p$.

1. Demostrar para $q > 0$: $f(p+1,q-1) = f(p,q)+1$ y $f(0,p+1) = f(p,0)+1$.
2. Demostrar que : $f(0,p+q) \leqslant f(p,q) < f(0,p+q+1)$.
3. Demostrar que $g : n \mapsto f(0,n)$ es estrictamente creciente.
4. Demostrar que f es inyectiva (se supone $f(p,q) = f(p',q')$ y se demuestra en principio que $p+q = p'+q'$).
5. Demostrar que f es sobreyectiva.

[003051]

Ejercicio 283 Partes numerables

Sea (n_k) una sucesión de números naturales. Se dice que la sucesión es :
- casi nula si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geqslant p,\ n_k = 0$
- estacionaria si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geqslant p,\ n_k = n_p$.

Demostrar que los conjuntos de sucesiones casi nulas y sucesiones estacionarias son numerables. [003052]

Ejercicio 284 Propiedades del mcd y mcm

Sean $a,b \in \mathbb{N}$. Se denotan $m = \operatorname{mcm}(a,b)$ y $d = \operatorname{mcd}(a,b)$.

1. Sea x un múltiplo común de a y b. Escribiendo la división euclidiana de x por m, demostrar que $m \mid x$.

2. Sea x un divisor común a a y b. Demostrar que $\operatorname{mcm}(x,d)$ es también un divisor común para a y b. Deducir $x \mid d$.
3. ¿Cómo calificar m y d, para la relación de orden de divisibilidad ?

[003053]

Ejercicio 285 Bases de numeración

Sea $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ y $p \in \mathbb{N}$. Demostrar que para todo entero $n \in \{0,\ldots,b^p-1\}$, existe un único p-tuple $(n_0,\ldots,n_{p-1})$ de números naturales tal que :

$$\forall k < p,\ n_k \in \{0,\ldots,b-1\},\ \text{ y } \ n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k.$$

[003054]

Ejercicio 286 Bases de numeración

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que existe $p \in \mathbb{N}$ y $n_0,n_1,\ldots,n_p \in \{1,2\}$ únicos tales que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$. [003055]

Ejercicio 287 Bases de numeración

Sean $n,p \in \mathbb{N}^*$, con $n < p!$. Demostrar que existe un único p-tuple $(n_1,\ldots,n_p)$ de números naturales tales que

$$\forall k \leqslant p,\ n_k \leqslant k,\ \text{ y } \ n = \sum_{k=1}^{p} n_k k!.$$

[003056]

Ejercicio 288 Recurrencia de orden 2

Se denota $a_n = 25^n + 2^{3n+4}$.

1. Encontrar $a,b \in \mathbb{Z}$ tales que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$.
2. Deducir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n$ es divisible por 17.

Solución ▼ [003057]

Ejercicio 289 Orden en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Sea $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Para $f,g \in E$, con $f \neq g$, se denota $n_{f,g} = \min\{k \text{ tal que } f(k) \neq g(k)\}$. Se ordena E por :

$$\forall f,g \in E,\ f \ll g \iff (f = g) \text{ o } \big(f(n_{f,g}) < g(n_{f,g})\big).$$

1. Demostrar que es una relación de orden total.
2. Demostrar que toda parte de E no vacío tiene una cota inferior y toda parte de E no vacía y mayorada admite una cota superior.

[003058]

Ejercicio 290 $f \circ f(n) = n + k$

Se quiere demostrar que no existe aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verificando : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) = n + 1987$. (*Olimpiadas 1987*)
Sea f tal aplicación. Se pone :

$$E = \{0, \ldots, 1986\}, \quad F = \mathbb{N} \setminus E, \quad G = f(\mathbb{N}) \cap E, \quad H = E \setminus G.$$

Demostrar sucesivamente :
1.f es inyectiva, 2. $f(F) \subset F$, 3. $f^{-1}(F) = F \cup G$, 4. $f^{-1}(G) = H$,
luego se obtiene una contradicción. [003059]

Ejercicio 291 $f(f(n)) < f(n+1)$

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(f(n)) < f(n+1)$. Se quiere demostrar que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. *(Olimpiadas 1977)*

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant n,\ f(x) \geqslant n$.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \geqslant n$ tal que $f(a) = \min\{f(x)$ tal que $x \geqslant n\}$. Demostrar que $a = n$.
3. Deducir que f es estrictamente creciente, luego concluir.

Solución ▼ [003060]

Ejercicio 292 ***I

¿Cuál es la probabilidad p_n, para que en un grupo de n personas seleccionadas al azar, dos personas al menos tengan el mismo cumpleaños (se considera que el año tiene siempre 365 días, todos equiprobables). Demostrar que para $n \geqslant 23$, se tiene $p_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Solución ▼ [005282]

Ejercicio 293 ***

Demostrar que el primero del año cae más a menudo en domingo que en sábado.

Solución ▼ [005283]

---

14 103.01 Divisibilidad, división euclidiana

Ejercicio 294

¿Cuántos divisores admite $15!$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000249]

Ejercicio 295

Hallar el resto de la división por 13 del número 100^{1000}.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000250]

Ejercicio 296

Sabiendo que se tiene $96842 = 256 \times 375 + 842$, determinar, sin dividir, el resto de la división del número 96842 por cada número 256 y 375.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000251]

Ejercicio 297

Sean $m \geqslant 1$ y $n \geqslant 2$ enteros ; demostrar que :

1. $n-1 | n^m - 1$;
2. $(n-1)^2 | n^m - 1$ si y solo si $n-1 | m$.

[000252]

Ejercicio 298

Sea a un entero relativo cualquiera, demostrar que el número $a(a^2-1)$ y, más generalmente, $a(a^{2n}-1)$ es divisible por 6. [000253]

Ejercicio 299

Demostrar que el número $7^n + 1$ es divisible por 8 si n es impar ; en el caso n par, dar el resto de su división por 8.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000254]

Ejercicio 300

¿Cuál es el entero natural más pequeño que, dividido por $8, 15, 18$ y 24, da como resto $7, 14, 17$ y 23 respectivamente ? [000255]

Ejercicio 301

Demostrar que si x e y son números naturales tales que x^2 divide y^2, entonces x divide y. Aplicación : Demostrar, por contradicción, que $\sqrt{2}$ no es racional. [000256]

Ejercicio 302

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ es divisible por } 24,$$
$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ es divisible por } 120.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000257]

Ejercicio 303

Encontrar todos los enteros n tales que $n^2 + n + 7$ sea divisible por 13. [000258]

Ejercicio 304

Se considera el número $m = 2^n p$, en la cual n denota cualquier entero natural y p un número primo. Hacer una lista de los divisores de m, incluido 1 y m él mismo, y calcular, en función de m y p, la suma S de todos estos divisores. [000259]

Ejercicio 305

El divisor de una división es igual a 45 ; el resto es el cuadrado del cociente. Calcular el dividendo entero natural. [000260]

Ejercicio 306

Encontrar el entero natural más pequeño n tal que el desarrollo decimal de $1/n$ admite un periodo más pequeño de longitud 5, es decir $1/n = 0,abcde\,abcde\,ab\ldots$, con $a,b,\ldots,e \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. [000261]

Ejercicio 307

Los números a, b, c, d son elementos no nulos de $\mathbb{Z}$, Decir si las siguientes propiedades son verdaderas o FALSAS, justificando la respuesta.

1. Si a divide b y c, entonces $c^2 - 2b$ es múltiplo de a.
2. Si existen u y v enteros tales que $al + bv = d$, entonces $\mathrm{mcd}(a,b) = |d|$.
3. Si a es primo con b, entonces a es primo con b^3.
4. Si a divide $b+c$ y $b-c$, entonces a divide b y a divide c.
5. Si 19 divide ab, entonces 19 divide a o 19 divide b.
6. Si a es múltiplo de b y si c es múltiplo de d, entonces $a+c$ es múltiplo de $b+d$.
7. Si 4 no divide bc, entonces b o c es impar.
8. Si a divide b y b no divide c, entonces a no divide c.
9. Si 5 divide b^2, entonces 25 divide b^2.
10. Si 12 divide b^2, entonces 4 divide b.
11. Si 12 divide b^2, entonces 36 divide b^2.
12. Si 91 divide ab, entonces 91 divide a o 91 divide b.

[000262]

Ejercicio 308

Se definen los siguientes tres conjuntos :

$$E_1 = \{7n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$
$$E_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \text{ es múltiplo de } 4\}$$
$$E_3 = \{28n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$

1. Para $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, determinar si se tiene la inclusión $E_i \subset E_j$.
2. Escribir $E_1 \cap E_2$ bajo la forma $E = \{n \in \mathbb{N}\,,\ \mathscr{P}(n)\}$. Demostrar que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

[000263]

Ejercicio 309

Demostrar que si r y s son dos números naturales suma de dos cuadrados de enteros entonces es lo mismo para el producto rs. [000264]

Ejercicio 310

Sea n un entero relativo. Demostrar que o bien 8 divide n^2, o 8 divide n^2-1, o 8 divide n^2-4. [000265]

Ejercicio 311

Dados dos números relativos n y p demostrar que np es par, o $n^2 - p^2$ es divisible por 8. [000266]

Ejercicio 312

Demostrar que si n es una suma natural de dos cuadrados de números enteros, entonces el resto de la división euclidiana de n por 4 nunca es igual a 3.

Solución ▼ Vidéo ■ [000267]

Ejercicio 313

1. Sea n un entero natural cuyo resto de la división euclidiana por 5 vale 2 o 3, demostrar que $n^2 + 1$ es divisible por 5.
2. Demostrar que para todo entero natural n, el entero $n^5 - n$ es divisible por 5.

[000268]

Ejercicio 314

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que entre los tres enteros $n \cdot (n+1)$, $n \cdot (n+2)$ y $(n+1) \cdot (n+2)$, hay exactamente dos que son divisibles por 3. [000269]

Ejercicio 315

1. Para todo par de números reales (x, y) demostrar, por recurrencia, que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene la relación

   $$(*) \qquad x^n - y^n = (x - y). \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

   Indicación : La cantidad se puede escribir de dos maneras diferentes $y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.
2. Sea (a, b, p) enteros elementos de $\mathbb{N}$. Utilizando la fórmula $(*)$, demostrar que si existe un entero $l \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + pl$, así que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe un entero $m \in \mathbb{N}$ tal que $b^n = a^n + pm$.
3. Sean a, b, p enteros elementos de $\mathbb{N}$, usando la pregunta 2, demostrar que si $a - b$ es divisible por p,

   $$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$

   es también divisible por p. Deducir, usando la pregunta 2 y de la fórmula $(*)$, que si $a - b$ es divisible por p^n i.e. existe un entero $l \in \mathbb{N}$ tal que $a - b = l \cdot p^n$, entonces $a^p - b^p$ es divisible por p^{n+1}.

Solución ▼ [000270]

Ejercicio 316

Calcular 2000^{2000} módulo 7 y 2^{500} módulo 3. [000271]

Ejercicio 317

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ cuyos restos módulo 11 son 7 y 2 respectivamente. Dar el resto módulo 11 de $a^2 - b^2$. [000272]

Ejercicio 318

1. Demostrar que 7 divide $2222^{5555} + 5555^{2222}$;
2. Demostrar que 11 divide
$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^{5}}}}};$$
3. Encontrar un criterio de divisibilidad por 8, luego por 6.

[000273]

Ejercicio 319

Demostrar que para todo $n > 0$:
1. 7 divide $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ 2. 11 divide $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$ 3. 6 divide $5n^3 + n$ 4. 8 divide $5^n + 2.3^{n-1} + 1$.

[000274]

Ejercicio 320

1. Determinar la suma de los dígitos de la suma de los dígitos de la suma de los dígitos de 3^{500}.
2. Se da 51 números comprendidos entre 1 y 100. Demostrar que entre estos números existe necesariamente al menos dos tales que uno divide al otro. Demostrar que siempre podemos encontrar un conjunto de 50 números comprendidos entre 1 y 100 no satisface la propiedad de divisibilidad anterior.

[000275]

Ejercicio 321

Encontrar los enteros positivos n tales que $n-1$ divide n^2+1. [000276]

Ejercicio 322

Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, 4 no divide n^2+1. [000277]

Ejercicio 323

Demostrar que para todo entero positivo n, 49 divide $2^{3n+3} - 7n - 8$. [000278]

Ejercicio 324

Encontrar todos los enteros positivos a tales que $a^{10}+1$ es divisible por 10. [000279]

Ejercicio 325

¿Cuál es el dígito de las unidades de $1997^{1997^{10}}$? [000280]

Ejercicio 326

Demostrar que :

1. Si un entero es de la forma $6k+5$, entonces es necesariamente de la forma $3k-1$, pero que el recíproco es FALSO.
2. El cuadrado de un entero de la forma $5k+1$ es también de esta forma.
3. El cuadrado de un entero tiene la forma $3k$ o $3k+1$, pero nunca de la forma $3k+2$.
4. El cuadrado de un entero tiene la forma $4k$ o $4k+1$, pero nunca de la forma $4k+2$ ni de la forma $4k+3$.
5. El cubo de todo entero es de la forma $9k$, $9k+1$ o $9k+8$.
6. Si un entero es a la vez un cuadrado y un cubo, entonces es de sexta potencia, y es de la forma $7k$ o $7k+1$.

[000281]

Ejercicio 327

Determinar los enteros $n \in \mathbb{N}$ tales que :

1. $n|n+8$.
2. $n-1|n+11$.
3. $n-3|n^3-3$.

[000282]

Ejercicio 328

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Determinar los enteros $n \in \mathbb{N}^*$ tales que $(n|2k+1$ y $n|9k+4)$. [000283]

Ejercicio 329

Demostrar que $\forall\,(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ existe un único $r(a) \in \{0,\ldots,b-1\}$ tal que existe $q \in \mathbb{N}$, con $a = bq + r(a)$.

1. Usando esto para $b = 13$, determinar enteros $n \in \mathbb{N}$ tales que $13|n^2+n+7$.
2. Si $a \in \mathbb{N}$ y $b = 7$, determinar los posibles valores de $r(a^2)$ (se recordar que $r(a^2)$ debe pertenecer a $\{0,\ldots,b-1\}$).
   Demostrar entonces que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{N}^2$ $(7|x^2+y^2)$ si y solo si $(7|x$ y $7|y)$.
3. Demostrar que un entero positivo de la forma $8k+7$ no puede ser la suma de cuadrados de lTres enteros.

[000284]

Ejercicio 330

1. Demostrar que el resto de la división euclidiana por 8 del cuadrado de todo número impar es 1.
2. Demostrar igualmente que todo número par verifica $x^2 = 0 \pmod 8$ o $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Sean a,b,c tres enteros impares. Determinar el resto módulo 8 de $a^2+b^2+c^2$ y el de $2(ab+bc+ca)$.
4. Deducir que estos dos números no son cuadrados y que $ab+bc+ca$ tampoco.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000285]

Ejercicio 331 Sumas de números impares

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Demostrar que si N es la suma de n números impares consecutivos, entonces N no es primo. [003090]

Ejercicio 332 Pequeño teorema de Fermat

Sea $p \in \mathbb{N}$ primero. Demostrar que para $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divide C_p^k. Deducir que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$. [003091]

Ejercicio 333 $(p-1)(p-2)\cdots(p-n)/n!$

Sea $p \in \mathbb{N}^*$ primero y $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$. Demostrar que $\dfrac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ es un entero divisible por p. [003092]

Ejercicio 334 $n^7 \equiv n \pmod{42}$

Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^7 \equiv n \pmod{42}$. [003093]

Ejercicio 335 Potencias de 10 módulo 7

1. Verificar $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
2. Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 5 \pmod{7}$.

[003094]

Ejercicio 336 Potencias de 7

¿Cuál es el último dígito de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?

Solución ▼ [003095]

Ejercicio 337 $3^x = 2^y + 1$

1. Sean $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geqslant 3$. Demostrar por inducción en y que : $3^x \equiv 1 \pmod{2^y} \iff 2^{y-2} \mid x$.
2. Encontrar todos los pares de enteros $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $3^x = 2^y + 1$.

Solución ▼ [003096]

Ejercicio 338 Sucesiones recurrentes lineales

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7. [003097]

Ejercicio 339 Sucesiones recurrentes lineales

Determinar el resto de la división euclidiana de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ por 11.

Solución ▼ [003098]

Ejercicio 340 $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que : $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. [003099]

Ejercicio 341 $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 \pmod 8$

Demostrar que : $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 \bmod 8$. [003100]

Ejercicio 342 Cubos consecutivos

Demostrar que la suma de tres cubos consecutivos siempre es divisible por 9. [003101]

Ejercicio 343 n^2+3n+5 mod 121

Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2+3n+5 no es divisible por 121.

Solución ▼ [003102]

Ejercicio 344 $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible por 6

Demostrar que para todo entero $n \in \mathbb{Z}$, $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible por 6. [003103]

Ejercicio 345 $2^{32}+1$ es divisible por 641

Demostrar sin calculatrice que $2^{32}+1$ es divisible por 641. [003104]

Ejercicio 346 $3^x.7^y$ mod 10

Encontrar todos los pares $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tales que 3^x7^y se termina por 1 en base 10.

Solución ▼ [003105]

Ejercicio 347 $a^3 = \ldots 123456789$

Sea $a \in \mathbb{N}$ primo a 10.

1. Demostrar que $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$.
2. Demostrar que para todo entero $k \in \mathbb{N}$, $a^{4\times 10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$.
3. Deducir que existe un número $x \in \mathbb{N}$ tal que x^3 se termina por 123456789 en base 10.

Solución ▼ [003106]

Ejercicio 348 $mn(m^{60}-n^{60})$ es divisible por 56786730

Demostrar que para todos los enteros m y n, el número $mn(m^{60}-n^{60})$ es divisible por 56786730.

Solución ▼ [003107]

Ejercicio 349 $q \mid 2^p - 1$

Sean p,q primos relativos impares tales que $q \mid 2^p-1$. Demostrar que $q \equiv 1 \pmod{2p}$.

Solución ▼ [003108]

Ejercicio 350 Divisibilidad por 7

Invalidar o justificar el siguiente criterio de divisibilidad por 7 encontrado en un viejo grimorio : *Separa en unidades y decenas y luego encontrar la diferencia entre el doble de las unidades y las decenas. Hazlo*

siempre que tengas decenas y obtengas cero o siete. Así 364 se convierte en 28 luego 14 luego en fin 7.
[003109]

Ejercicio 351 *****

k es un entero impar. Demostrar por inducción que, para $n \geqslant 1$, la suma $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ es un entero divisible por $\frac{n(n+1)}{2}$. [005115]

Ejercicio 352 ****

Para $n \geqslant 1$, se establece $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Demostrar que, para $n \geqslant 2$, H_n nunca es un entero (Indicación : demostrar por recurrencia que H_n es el cociente de un entero impar por un entero par distinguiendo los casos donde n es par y n es impar).

Solución ▼ [005116]

Ejercicio 353 ****

Demostrar que para $n \in \mathbb{N}$, $E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{8n+24}{25})$.

Solución ▼ [005157]

---

15 103.02 Subgrupos de $\mathbb{Z}$

Ejercicio 354

Demostrar que es equivalente en $\mathbb{Z}$ decir m divide n, o $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. [000286]

Ejercicio 355

1. Demostrar que la intersección de dos subgrupos de $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Caracterizar el subgrupo $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Caracterizar los siguientes subgrupos :
$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}\,; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$
2. Demostrar que toda intersección de subgrupos de $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Caracterizar la intersección de una familia finita de subgrupos. Caracterizar los siguientes subgrupos :
$$\bigcap_{n=1}^{17} 2^n\mathbb{Z}\,; \quad 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} \cap 19\mathbb{Z} \cap 35\mathbb{Z}.$$

[000287]

Ejercicio 356

1. Determinar $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. ¿Es un subgrupo de $\mathbb{Z}$?
2. Determinar : $7\mathbb{Z} \cup 49\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cup 45\mathbb{Z}$; $\bigcup\limits_{n=1}^{28} 2^n\mathbb{Z}$. ¿Son estos conjuntos subgrupos de $\mathbb{Z}$?
3. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que una unión de dos subgrupos de $\mathbb{Z}$ sea un subgrupo de $\mathbb{Z}$.

[000288]

Ejercicio 357

1. Sea A una parte no vacía de $\mathbb{Z}$; demostrar que la familia de subgrupos que contienen A no es vacío. Sea H una parte que contiene A. Demostrar la equivalencia de las siguientes condiciones :
   i) H es la intersección de los subgrupos de $\mathbb{Z}$ que contienen A,
   ii) H es el subgrupo más pequeño de $\mathbb{Z}$ que contiene A,
   iii) H es el conjunto de sumas finitas de elementos de A o elementos cuyo opuesto está en A.

   Si estas condiciones son verificadas se dice que H es el subgrupo generado por A.
2. Sean $m\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ dos subgrupos de $\mathbb{Z}$.Demostrar que
$$m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=\{mu+nv \mid u,v\in\mathbb{Z}\}$$
   a) es un subgrupo de $\mathbb{Z}$,
   b) contiene $m\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$,
   c) está contenido en todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contiene $m\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$.
   d) ¿Si $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$, que se puede decir de d ?
3. Determinar los subgrupos generados por : $14\mathbb{Z}\cup 35\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}\cup 6\mathbb{Z}\cup 64\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z}\cup 21\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z}\cup 25\mathbb{Z}\cup 7\mathbb{Z}$; $\{70,4\}$.

[000289]

16 103.03 Mcd, mcm, algoritmo de Euclides

Ejercicio 358

Calcular el mcd de los siguientes números :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Solución ▼ Vidéo ■ [000290]

Ejercicio 359

1. Calcular el mcm de números : 108 y 144 ; 128 y 230 ; 6, 16 y 50.
2. Demostrar que si $a\geqslant 1$ y $b\geqslant 1$ son enteros de mcd d y, si se establece $a=da';b=db'$, el mcm de a y b es $da'b'$.
3. Demostrar que si a,b,c son números enteros mayores que 1, se tiene :
$$\mathrm{mcm}(a,b,c)=\mathrm{mcm}(\mathrm{mcm}(a,b),c).$$

[000291]

Ejercicio 360

Determinar los pares de enteros naturales de mcd 18 y de suma 360. Igualmente con mcd 18 y producto 6480.

Solución ▼ Vidéo ■ [000292]

Ejercicio 361

Si a,b,c,d son números enteros mayores que 1, demostrar que se tiene :

$$(a,b,c,d) = ((a,b),(c,d))$$

donde (,) denota el mcd. [000293]

Ejercicio 362

1. Sean a,b,c enteros relativos tales que $(a,b) \neq (0,0)$, demostrar que para la ecuación

$$ax+by=c$$

tenga una solución (x,y) de números enteros x e y, es necesario y suficiente que el $\operatorname{mcd}(a,b)$ divide a c.

2. Resolver en enteros relativos las siguientes ecuaciones :

$$7x-9y=1, \qquad 7x-9y=6, \qquad 11x+17y=5.$$

[000294]

Ejercicio 363

Sean a y b dos enteros tales que $a \geqslant b \geqslant 1$ y $\operatorname{mcd}(a,b)=1$.

1. Demostrar que $\operatorname{mcd}(a+b,a-b)=1$ o 2,
2. Si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$, demostrar que $\operatorname{mcd}(a+b,ab)=1$,
3. Si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$, demostrar que $\operatorname{mcd}(a+b,a^2+b^2)=1$ o 2.

[000295]

Ejercicio 364

Calcular por el algoritmo de Euclides : $\operatorname{mcd}(18480,9828)$. Deducir una escritura de 84 como combinación lineal de 18480 y 9828.

Solución ▼ Vidéo ■ [000296]

Ejercicio 365

Determinar el mcd de 99 099 y 43 928. Determinar el mcd de 153 527 y 245 479. [000297]

Ejercicio 366

Determinar el conjunto de todos los pares (m,n) tales que

$$955m + 183n = 1.$$

Solución ▼ [000298]

Ejercicio 367

Calcular, precisando el método seguido,

$$a = \text{mcd}(720,252) \qquad b = \text{mcm}(720,252)$$

así como dos enteros u y v tales que $720u + 252v = a$. [000299]

Ejercicio 368

Demostrar :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ y } a \wedge b_2 = 1),$$

luego por recurrencia :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \;\; a \wedge b_i = 1.$$

[000300]

Ejercicio 369

Demostrar para $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

[000301]

Ejercicio 370

Determinar dos números naturales conociendo su suma, 1008, y su mcd, 24. [000302]

Ejercicio 371

Denotemos $a = 1\,111\,111\,111$ y $b = 123\,456\,789$.

1. Calcular el cociente y el resto de la división euclidiana de a por b.
2. Calcular $p = \text{mcd}(a,b)$.
3. Determinar dos números enteros u y v tales que $al + bv = p$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000303]

Ejercicio 372

Sean m y n dos enteros $(m > n > 0)$ y $a \geqslant 2$ un entero. Demostrar que el resto de la división euclidiana de $a^m - 1$ por $a^n - 1$ es $a^r - 1$, donde r es el resto de la división euclidiana de m por n, y que el mcd de $a^m - 1$ y $a^n - 1$ es $a^d - 1$, donde d es el mcd de m y n. [000304]

Ejercicio 373

Resolver en $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000305]

Ejercicio 374

Demostrar que no existen enteros m y n tales que

$$m+n=101 \quad \text{y} \quad \operatorname{mcd}(m,n)=3$$

[000306]

Ejercicio 375

Sea m y n dos enteros positivos.

1. Si $\operatorname{mcd}(m,4)=2$ y $\operatorname{mcd}(n,4)=2$, demostrar que $\operatorname{mcd}(m+n,4)=4$.
2. Demostrar que para cada entero n, 6 divide n^3-n.
3. Demostrar que para cada entero n, 30 divide n^5-n.
4. Demostrar que si m y n son enteros impares, m^2+n^2 es par pero no divisible por 4.
5. Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24.
6. Demostrar que si $\operatorname{mcd}(a,b)=1$, entonces
   — $\operatorname{mcd}(a+b,a-b)\in\{1,2\}$,
   — $\operatorname{mcd}(2a+b,a+2b)\in\{1,3\}$,
   — $\operatorname{mcd}(a^2+b^2,a+b)\in\{1,2\}$,
   — $\operatorname{mcd}(a+b,a^2-3ab+b^2)\in\{1,5\}$.

[000307]

Ejercicio 376

Encontrar un CNS para que $ax+b\equiv 0 \bmod n$ tenga una solución. [000308]

Ejercicio 377

1. Calcular $\operatorname{mcd}(18,385)$ por el algoritmo de Euclides, deducir un par $(u_0,v_0)\in\mathbb{Z}^2$ solución de la ecuación $18u+385v=1$, con $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$.
2. Proporcionar en fin el conjunto de soluciones enteras de

$$18u+385v=1; \quad 18u+385v=3; \quad 54u+1155v=3; \quad 54u+1155v=5.$$

[000309]

Ejercicio 378

Encontrar a y b enteros naturales tales que

1. $a+b=2070$ y $\operatorname{mcm}(a,b)=9180$;
2. $a^2+b^2=5409$ y $\operatorname{mcm}(a,b)=360$ (se puede empezar demostrando que $\operatorname{mcd}(a,b)$ divide $\operatorname{mcd}(5409,360)$ y considerar luego diferentes casos).

[000310]

Ejercicio 379

Resolver en $\mathbb{Z}$ las ecuaciones : $35x \equiv 7 \bmod 4$; 22x $\equiv 33 \bmod 5$ [000311]

Ejercicio 380

Resolver en $\mathbb{Z}$ el sistema siguiente :

$$S : \begin{cases} x \equiv 4 \bmod 6 \\ x \equiv 7 \bmod 9. \end{cases}$$

Primero buscar una solución particular. [000312]

Ejercicio 381

1. Resolver en $\mathbb{Z}$ las ecuaciones : $x^2 \equiv 2 \bmod 6$; x$^3 \equiv 3 \bmod 9$.
2. Resolver en $\mathbb{Z}^2$ las siguientes ecuaciones : $5x^2 + 2xy - 3 = 0$; $y^2 + 4xy - 2 = 0$.

[000313]

Ejercicio 382

Resolver en $\mathbb{Z}^2$ las siguientes ecuaciones :

a) $17x + 6y = 1$ b) $27x + 25y = 1$ c) $118x + 35y = 1$ d) $39x + 26y = 1$.

[000314]

Ejercicio 383

Demostrar que si a divide $42n + 37$ y $7n + 4$, para un valor de n dado, entonces a divide 13. ¿Cuáles son los valores posibles para n ? [000315]

Ejercicio 384

Encontrar $\operatorname{mcd}(-357, 629)$ y encontrar números enteros x e y tales que

$$\operatorname{mcd}(-357, 629) = -357x + 629y.$$

[000316]

Ejercicio 385

Encontrar $\operatorname{mcd}(2183, 6313) = d$ y encontrar números enteros x e y tales que

$$d = 2183x + 6313y$$

[000317]

Ejercicio 386

Se supone que $\operatorname{mcd}(a, b) = d$ y que x_0 y y_0 son enteros tales que $d = ax_0 + by_0$. Demostrar que :

1. $\operatorname{mcd}(x_0, y_0) = 1$,
2. x_0 y y_0 no son únicos.

Ejercicio 387

Sean a, b, c enteros.

1. Demostrar que $\text{mcd}(ca,cb) = |c| \text{ mcd}(a,b)$.
2. Demostrar que $\text{mcd}(a^2,b^2) = (\text{mcd}(a,b))^2$.
3. Demostrar que si $\text{mcd}(a,b) = 1$ y si c divide a, entonces $\text{mcd}(c,b) = 1$.
4. Demostrar que $\text{mcd}(a,bc) = 1 \iff \text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(a,c) = 1$.
5. Demostrar que si $\text{mcd}(b,c) = 1$, entonces $\text{mcd}(a,bc) = \text{mcd}(a,b)\text{mcd}(a,c)$.
6. Demostrar que $\text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(a+b,\text{mcm}(a,b))$.

[000319]

Ejercicio 388

Dividiendo un número por 8, un estudiante ha obtenido 4 por resto ; dividiendo este mismo número por 12, se obtiene 3 por resto. ¿Qué sucede con esto ?
El calculista fuerte de la clase, que nunca se equivoca, ha dividido el año por 29, ha encontrado 25 por resto ; ha dividido el mismo año por 69, ha encontrado 7 por resto. ¿En que año esto pasó ? [000320]

Ejercicio 389

Encontrar dos números sabiendo que su suma es 581 y que el cociente del mcm por su mcd es 240. [000321]

Ejercicio 390

Encontrar las soluciones enteras de la ecuación :

$$102x - 18018y = 18.$$

¿Cuántas soluciones hay tales que x e y están comprendidos entre 0 y 4000 ? [000322]

Ejercicio 391

El mcd de dos números es 12 ; los cocientes sucesivos obtenidos en el cálculo de este mcd por el algoritmo de Euclides son 8, 2 y 7. Encontrar estas dos números. [000323]

Ejercicio 392

Encontrar los pares de números a y b, divisible por 3, verificando las siguientes propiedades : su mcm es 7560, y si aumentamos cada uno de estos números en un tercio de su valor, el mcd de los dos números obtenidos es 84. [000324]

Ejercicio 393

Un terreno rectangular cuyas dimensiones en metros a y b son números enteros, tiene por área 3024 m^2. Calcular su perímetro sabiendo que el mcd de a y b es 6. ¿Cuántas soluciones posibles hay ? [000325]

Ejercicio 394

1. En $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, escribir el conjunto de múltiplos de $\bar{x}$, clase de x, para x variando de 0 a $n-1$ en cada uno de los casos siguientes : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
2. En $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, demostrar la equivalencia de las tres proposiciones :
   i) $\bar{x}$ es invertible ;
   ii) x y n son primos entre sí ;
   iii) $\bar{x}$ genera $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, es decir que el conjunto de múltiplos de $\bar{x}$ es $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. ¿La clase de 18 es invertible en $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si es sí, ¿cuál es su inversa ? (Se puede usar el teorema de Bézout).

[000326]

Ejercicio 395

Resolver en $\mathbb{Z}$ las siguientes ecuaciones :
1. $91x-65y=156$. 2. $135x-54y=63$. 3. $72x+35y=13$. [000327]

Ejercicio 396

Resolver en $\mathbb{N}$ las siguientes ecuaciones :
1. $31x-13y=1$. 2. $31x-13y=-1$. *Aplicación :* En el borde de una piscina llena de agua, se dispone de un tanque fijo de 31 litros equipados en su base de un grifo de desagüe, y de un balde de 13 litros. Explicar cómo operar para obtener exactamente 1 litro en el balde. [000328]

Ejercicio 397

Resolver en $\mathbb{N}$ la ecuación $77x+105y=2401$. [000329]

Ejercicio 398

En un país llamado ASU, cuya unidad monetaria es el rallod, la banco nacional solo emite billetes de 95 rallods y monedas de 14 rallods.

1. Demostrar que es posible pagar cualquier suma entera (siempre que ambas partes tengan suficientes monedas y billetes).
2. Se supone que se tiene que pagar una cantidad S, que se tiene una cantidad ilimitada de monedas y billetes, pero el acreedor no puede dar cambio. Así, es posible pagar si $S=14$, pero no si $S=13$ o si $S=15\ldots$ Demostrar que es siempre posible pagar si S es bastante grande. ¿Cuál es el mayor valor de S tal que es imposible pagar S ?

[000330]

Ejercicio 399

Encontrar todos los puntos de coordenadas enteros del plano de la ecuación $6x+10y+15z=1997$. ¿Cuántas soluciones hay en $\mathbb{N}^3$? [000331]

Ejercicio 400

1. Encontrar todos los puntos con coordenadas enteras de la recta de ecuaciones $\begin{cases} 4x-2y-z-5=0 \\ x+3y-4z-7=0 \end{cases}$ del espacio.

2. La misma pregunta para la recta $\begin{cases} x+3y-5z-5=0 \\ 4x-2y+z+13=0. \end{cases}$

[000332]

Ejercicio 401

Resolver en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$ la ecuación

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}.$$

[000333]

Ejercicio 402

Un gallo cuesta 5 monedas de plata, una gallina 3 monedas y un grupo de cuatro pollitos 1 moneda. Alguien compra 100 aves de corral por 100 monedas ; ¿cuántas compra de cada tipo ? [000334]

Ejercicio 403

Sean a y b dos enteros relativos. Se denota d su mcd. Construir las sucesiones a_n y b_n, $n \in \mathbb{N}$, con valores en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera : $a_0 = a$, $b_0 = b$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se establece $a_{n+1} = b_n$ y $b_{n+1} = r$, donde r es el resto de la división euclidiana de a_n por b_n.

1. Demostrar que si d_n es el mcd de a_n y b_n, entonces d_n es igualmente el mcd de a_{n+1} y b_{n+1}.
2. Deducir de la pregunta anterior que d es el mcd de los números a_n y b_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Demostrar que la sucesión b_n es estrictamente decreciente. ¿Qué se puede deducir ?
4. Deducir de lo anterior que para todo par de enteros (a,b) existe un par de enteros relativos (u,v) tales que :
$$d = al + bv.$$

[000335]

Ejercicio 404

Sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tales que $a \wedge b = 1$. Demostrar que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. [003110]

Ejercicio 405 $\operatorname{mcd}(a+b, mcm(a,b))$

Sean a,b enteros, $d = a \wedge b$, $m = a \vee b$. Determinar $(a+b) \wedge m$.

Solución ▼ [003111]

Ejercicio 406 $\operatorname{mcd}((a-b)^3, a^3-b^3)$

Sean $a,b \in \mathbb{Z}$. Determinar $(a-b)^3 \wedge (a^3-b^3)$.

Solución ▼ [003112]

Ejercicio 407 $\operatorname{mcd}(n^3+n, 2n+1)$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar $(n^3+n) \wedge (2n+1)$.

Solución ▼ [003113]

Ejercicio 408 $\operatorname{mcd}(15n^2+8n+6, 30n^2+21n+13)$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar $(15n^2+8n+6) \wedge (30n^2+21n+13)$.

Solución ▼ [003114]

Ejercicio 409 mcd y mcm impuestos

Sean $d, m \in \mathbb{N}^*$. Dar una condición necesaria y suficiente en d y m, para que exista $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \wedge b = d$ y $a \vee b = m$. Resolver este problema para $d = 50$ y $m = 600$.

Solución ▼ [003115]

Ejercicio 410 $\operatorname{mcm}(x,y) + 11\operatorname{mcd}(x,y) = 203$

Encontrar los pares de enteros $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tales que : $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$.

Solución ▼ [003116]

Ejercicio 411 $x^2+y^2 = 85113$, $\operatorname{mcm}(x,y) = 1764$

Resolver :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 85113 \\ x \vee y = 1764. \end{cases}$$

Solución ▼ [003117]

Ejercicio 412 $\operatorname{mcm}(x,y) = 210\operatorname{mcd}(x,y)$, $y - x = \operatorname{mcd}(x,y)$

Resolver : $\begin{cases} x \vee y = 210(x \wedge y) \\ y - x = x \wedge y. \end{cases}$

Solución ▼ [003118]

Ejercicio 413 $\operatorname{mcd}(x,y) = x+y-1$

Resolver en $\mathbb{Z}$: $x \wedge y = x+y-1$.

Solución ▼ [003119]

Ejercicio 414 $\operatorname{mcm}(x,y) = x+y-1$

Resolver en $\mathbb{Z}^*$: $x \vee y = x+y-1$.

Solución ▼ [003120]

Ejercicio 415 $\operatorname{mcd}(x,y) = x-y$, $\operatorname{mcm}(x,y) = 300$

Resolver en $\mathbb{N}^*$: $\begin{cases} x \wedge y = x-y \\ x \vee y = 300. \end{cases}$

Solución ▼ [003121]

Ejercicio 416 $\operatorname{mcd}(a^n-1, a^m-1)$

Sean $a, m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$, y $d = (a^n-1) \wedge (a^m-1)$.

1. Sea $n = qm + r$ la división euclidiana de n por m. Demostrar que $a^n \equiv a^r \pmod{a^m-1}$.
2. Deducir que $d = (a^r-1) \wedge (a^m-1)$, luego $d = a^{(n \wedge m)} - 1$.

3. ¿Bajo qué condición $a^m - 1$ divide a $a^n - 1$?

Solución ▼ [003122]

Ejercicio 417 mcd múltiple

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ y $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$. Demostrar que $a_1, \dots, a_n$ son *dos a dos* primos entre sí si y solo si $b_1, \dots, b_n$ son primos entre sí *en su conjunto*. [003123]

Ejercicio 418 Ecuaciones de coeficientes enteros

Sean a, b, c tres enteros relativos. Se considera la ecuación : $ax + by = c$, cuyas soluciones se buscan en $\mathbb{Z}^2$.

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que esta ecuación admita una solución.
2. Sea (x_0, y_0) una solución al problema de Bézout : $ax_0 + by_0 = d$. Determinar todas las soluciones de $ax + by = c$ en función de a, b, c, d, x_0 y y_0.
3. Resolver en $\mathbb{Z}^2$: $2520x - 3960y = 6480$.

Solución ▼ [003124]

Ejercicio 419 Ecuaciones de coeficientes enteros

Resolver en $\mathbb{Z}$:

1. $95x + 71y = 46$. 2. $20x - 53y = 3$. 3. $12x + 15y + 20z = 7$.

Solución ▼ [003125]

Ejercicio 420 Congruencias simultáneas

1. Sean $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, con $b \wedge b' = 1$. Demostrar que el sistema : $\begin{cases} x \equiv a \pmod{b} \\ x \equiv a' \pmod{b'} \end{cases}$ tiene soluciones y que son congruentes entre sí módulo bb'.
2. Generalizar.

[003126]

Ejercicio 421 Congruencias simultáneas

Resolver :

1. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{5}. \end{cases}$

Solución ▼ [003127]

Ejercicio 422 Congruencias simultáneas

Una banda de 17 piratas tiene un botín consistente en N monedas de oro de igual valor. Deciden compartirlo por igual y dar el resto al cocinero (no pirata). Este recibe 3 monedas. Pero estalla una pelea y 6 piratas son asesinados. Todo el botín se reconstituye y se reparte entre los supervivientes como antes ; el cocinero recibe entonces 4 monedas. En un naufragio posterior, solo el botín, 6 piratas y el cocinero se salvan. El botín se divide de nuevo de la misma manera y el cocinero recibe 5 monedas. ¿Cuál es entonces la fortuna minimal que puede esperar el cocinero cuando decide envenenar los piratas que quedan ?

Solución ▼ [003128]

Ejercicio 423 Descomposición con coeficientes positivos

Sean $a,b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí. Demostrar que : $\forall x \geqslant ab$, $\exists\ u,v \in \mathbb{N}$ tales que $al+bv=x$. [003129]

17 103.04 Números primos, números primos entre sí

Ejercicio 424

Sean a,b enteros mayores o iguales que 1. Demostrar :

1. $(2^a-1)|(2^{ab}-1)$;
2. 2^p-1 primero $\Rightarrow$ p primero ;
3. $\operatorname{mcd}(2^a-1, 2^b-1) = 2^{\operatorname{mcd}(a,b)}-1$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000336]

Ejercicio 425

Demostrar que, si a y b son enteros primos entre sí, lo mismo es cierto para los enteros $a+b$ y ab.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000337]

Ejercicio 426

Resolver la ecuación $29x-11y=1$ en $\mathbb{Z}$. Se considera ahora la ecuación $29x-11y=5$. Deducir de lo anterior una solución particular de esta ecuación, luego dar la solución general. [000338]

Ejercicio 427

Sea p un número primo.

1. Demostrar que $\forall i \in \mathbb{N}$, $0<i<p$ se tiene :
$$C_p^i \text{ es divisible por } p.$$
2. Demostrar por inducción que :
$$\forall p \text{ primero}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ se tiene } a^p-a \text{ es divisible por } p.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000339]

Ejercicio 428

1. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$. Demostrar que :
$$\begin{aligned}&x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow \exists (x',y',z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que}\\ &\operatorname{mcd}(x',y',z')=1,\ x'^2+y'^2=z'^2,\ x=nx' \text{ y } y=ny' \text{ y } z=nz'.\end{aligned}$$

2. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ tales que $x^2+y^2=z^2$. Se supone que $\operatorname{mcd}(x,y,z)=1$. Demostrar que x e y no son de la misma paridad.
   (a) Se supone x par y y impar. Se establece :
   $$x=2u,\ z-y=2v,\ z+y=2w$$
   con $(u,v) \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que v y w son primos entre sí.
   (b) Demostrar que $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$, con m y n enteros naturales de paridad diferentes.
   (c) Demostrar que si $x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$, entonces
   $$x^2+y^2=z^2.$$

[000340]

Ejercicio 429

1. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ se tiene :
$$2^{2^{n+k}}-1=\left(2^{2^n}-1\right)\times\prod_{i=0}^{k-1}(2^{2^{n+i}}+1).$$
2. Se define $F_n=2^{2^n}+1$. Demostrar que para $m \neq n$, F_n y F_m son primos entre sí.
3. Deducir que existe una infinidad de números primos.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000341]

Ejercicio 430

Los números a, b, c, d son elementos no nulos de $\mathbb{Z}$, Decir si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

1. Si a divide b y b divide c, entonces a divide c.
2. Si a divide b y c, entonces a divide $2b+3c$.
3. Si existe u y v enteros tales que $al+bv=4$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)=4$.
4. Si $7a-9b=1$, entonces a y b son primos entre sí.
5. Si a divide b y b divide c y c divide a, entonces $|a|=|b|$.
6. « a y b primos entre sí »equivale a« $\operatorname{mcm}(a,b)=|ab|$ ».
7. Si a divide c y b divide d, entonces ab divide cd.
8. Si 9 divide ab y si 9 no divide a, entonces 9 divide b.
9. Si a divide b o a divide c, entonces a divide bc.
10. « a divide b » equivale a « $\operatorname{mcm}(a,b)=|b|$ ».
11. Si a divide b, entonces a no es primo con b.
12. Si a no es primo con b, entonces a divide b o b divide a.

[000342]

Ejercicio 431

1. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Demostrar que si $a \in \mathbb{Z}$ no es congruente con 0 módulo p, entonces p no divide a y entonces $\mathrm{mcd}(a,p) = 1$.
2. Sea $a \in \mathbb{Z}$ no congruente a 0 módulo p, con p primo. Demostrar usando a) que existe $u \in \mathbb{Z}$ no congruente a 0 módulo p verificando $al \equiv 1[p]$. (Se observa que esto da una inverso de a módulo p).
3. Demostrar que si p no es primo, existen elementos $a,u \in \mathbb{Z}$ no nulos módulo p tales que $al \equiv 0[p]$.

[000343]

Ejercicio 432

1. Demostrar que dos enteros consecutivos no nulos son siempre primos entre sí.
2. Demostrar que para todo entero natural n, $\mathrm{mcd}((n+1)^2, n+2) = 1$.

[000344]

Ejercicio 433

Demostrar que para verificar que un entero p es primo, es suficiente verificar que no tiene divisores menores o iguales que $\sqrt{p}$. [000345]

Ejercicio 434 Teorema de Wilson

Demostrar que todo número primo p divide $(p-1)!+1$. [000346]

Ejercicio 435

Demostrar que los siguientes números no son primos :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$, para $n \in \mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$, para $n \geqslant 2$.
3. $a^4 + 4b^4$, para $a,b \geqslant 2$.

[000347]

Ejercicio 436

Sea X el conjunto de números primos de la forma $4k+3$, con $k \in \mathbb{N}$.

1. Demostrar que X es no vacío.
2. Demostrar que el producto de números de la forma $4k+1$ es así de esta forma.
3. Se supone que X está finito y se escribe entonces $X = \{p_1, \dots, p_n\}$.
   Sea $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$. Demostrar por reducción al absurdo que a admite un divisor primo de la forma $4k+3$.
4. Demostrar que esto es imposible y por lo tanto, que X es infinito.

Solución ▼ Vidéo ■ [000348]

Ejercicio 437

Sea $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^n + 1$ sea primo, demostrar que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. ¿Qué se puede decir de la conjetura : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ es primo ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000349]

Ejercicio 438

Sea n un número primo y $p \in \{1,\dots,n-1\}$, demostrar que n divide C_n^p. [000350]

Ejercicio 439

Sean a y b dos enteros mayores que 2 primos entre sí, demostrar que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, n \in \left\{ax+by | (x,y) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

[000351]

Ejercicio 440 mcd $\times$ mcm

Sean $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. ¿Cuándo se tiene que $\operatorname{mcd}(a,b,c) \times \operatorname{mcm}(a,b,c) = abc$?

Solución ▼ [003130]

Ejercicio 441 mcd $\times$ mcm

Sean $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N}^*$ y $b_i = \prod_{j\neq i} a_j$. Demostrar que : $\operatorname{mcd}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{mcm}(b_1,\dots,b_n) = \operatorname{mcm}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{mcd}(b_1,\dots,b_n) = \prod a_i$.

Solución ▼ [003131]

Ejercicio 442 ab es un cuadrado perfecto

Sean $a,b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí tales que ab es un cuadrado perfecto. Demostrar que a y b son cuadrados perfectos. [003132]

Ejercicio 443 $a^n = b^m$

Sean $a,b \in \mathbb{N}^*$ y m,n primos entre sí tales que $a^n = b^m$. Demostrar que existe $c \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = c^m$ y $b = c^n$. [003133]

Ejercicio 444 Valoración 2-ádica de $5^{2^n} - 1$

Demostrar que la potencia más grande de 2 dividiendo $5^{(2^n)} - 1$ es 2^{n+2}.

Solución ▼ [003134]

Ejercicio 445 $a^r - 1$ primero ?

Se supone que $a^r - 1$ es un número primo. Demostrar que r es primo, luego que a vale 2. ¿Recíproco ?

Solución ▼ [003135]

Ejercicio 446 Números de Mersenne

Se denota $M_n = 2^n - 1$ (n-ésima número de Mersenne).

1. Demostrar que : M_n es primo $\Rightarrow$, n es primo.
2. Verificar que M_{11} no es primo.

Solución ▼ [003136]

Ejercicio 447 a^n+1 es primo

Sean $a,n\in\mathbb{N}$ tales que $a\geqslant 2$, $n\geqslant 1$, y a^n+1 es primo. Demostrar que n es una potencia de 2. [003137]

Ejercicio 448 Número de divisores de un entero

Para $n\in\mathbb{N}^*$, se denota d_n el número de divisores positivos de n.

1. Demostrar que si $n=ab$, con $a\wedge b=1$, entonces $d_n = d_a d_b$.
2. Demostrar que n es un cuadrado perfecto si y solo si d_n es impar.
3. Demostrar que : $\prod_{d|n} d=\sqrt{n}^{d_n}$.

[003138]

Ejercicio 449 Números primos congruentes con 3 módulo 4

Demostrar que hay una infinidad de números primos p tales que $p\equiv -1 \pmod 4$. [003139]

Ejercicio 450 Números primos congruentes con 1 módulo 4

Se recuerda que si p es primo y $n\wedge p=1$, entonces $n^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

1. Sea $n\in\mathbb{N}$ y $p\geqslant 3$ un divisor primo de n^2+1. Demostrar que $p\equiv 1 \pmod 4$.
2. Deducir que existen infinitos números primos de la forma $4k+1$.

Solución ▼ [003140]

Ejercicio 451 Intervalo sin números primos

Encontrar 1000 enteros consecutivos no primos. [003141]

Ejercicio 452 Factorización de 1000!

¿Cuál es la mayor potencia de 6 dividiendo 1000 ! ?

Solución ▼ [003142]

Ejercicio 453 $1/2+1/3+\cdots+1/n$ no es entero

Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Demostrar que $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ es de la forma : $\frac{p_n}{2q_n}$, con $p_n,q_n\in\mathbb{N}^*$ y p_n impar.

Solución ▼ [003143]

18 103.99 Otro

Ejercicio 454

Resolver en números enteros naturales la ecuación :

$$(x+1)(y+2)=2xy.$$

[000352]

Ejercicio 455

Demostrar que $(0,0,0)$ es el único triplete (x,y,z) de números naturales tales que se tiene :

$$x^2+y^2=3z^2.$$

[000353]

Ejercicio 456

Determinar las soluciones de las ecuaciones :

$$x^2-5x-11\equiv 0 \bmod 17;\quad \cos((\mathrm{n}^2-8\mathrm{n}+2)\pi/7)=1.$$

[000354]

Ejercicio 457

Un grupo de $N\geqslant 2$ personas se reúnen. Demostrar que al menos dos personas se han dado la misma cantidad de manos. Se puede separar los dos casos siguientes : ya sea todo el mundo ha apretado al menos una mano, ya sea existe alguno que no ha estrechado al menos una mano. [000355]

19 104.01 Forma cartesiana, forma polar

Ejercicio 458

Expresar en la forma $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ los números :

$$\frac{3+6i}{3-4i};\quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i};\quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000001]

Ejercicio 459

Escribir los siguientes números complejos en la forma $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i};\quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

[000002]

Ejercicio 460

Escribir bajo la forma $a+ib$ los siguientes números complejos :

1. Número de módulo 2 y de argumento $\pi/3$.
2. Número de módulo 3 y de argumento $-\pi/8$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000003]

Ejercicio 461

Colocar en el plano cartesiano, los siguientes puntos afijos : $z_1 = i, z_2 = 1+i, z_3 = -2+2i, z_4 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.
[000004]

Ejercicio 462

Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a+ib$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{(1+2i)(3-i)}, \quad \frac{1+2i}{1-2i}, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

[000005]

Ejercicio 463

1. Escribir los siguientes números complejos en forma trigonométrica : $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{4}{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{2i\theta}$.
2. Calcular $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

[000006]

Ejercicio 464

Efectuar los siguientes cálculos :

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Producto del número complejo de módulo 2 y de argumento $\pi/3$ por el número complejo de módulos 3 y de argumento $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Cociente del número complejo de módulo 2 y de argumento $\pi/3$ por el número complejo de módulos 3 y de argumento $-5\pi/6$.

Solución ▼ [000007]

Ejercicio 465

Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, así como el de sus conjugados :

1. $1+i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$, donde φ es un ángulo dado.

Solución ▼ [000008]

Ejercicio 466

Representar en forma trigonométrica los números :

$$1+i; \quad 1+i\sqrt{3}; \quad \sqrt{3}+i; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

[000009]

Ejercicio 467

Establecer las siguientes igualdades :

1. $(\cos(\pi/7)+i\operatorname{sen}(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i)=\sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\operatorname{sen}(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\operatorname{sen}(\pi/5))(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)-i\operatorname{sen}(13\pi/60))$,
3. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\operatorname{sen}(\pi/12))}{1+i}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Solución ▼ [000010]

Ejercicio 468

Calcular el módulo y el argumento de $u=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ y $v=1-i$. Deducir el módulo y el argumento de $w=\frac{u}{v}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000011]

Ejercicio 469

Escribir en la forma parte real-parte imaginaria, luego bajo la forma módulo-argumento el número complejo :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

[000012]

Ejercicio 470

Determinar el módulo y el argumento de los números complejos :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\alpha}} \quad \text{y} \quad \mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{2i\theta}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000013]

Ejercicio 471

Determinar el módulo y el argumento de $\frac{1+i}{1-i}$. Calcular $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Solución ▼ [000014]

Ejercicio 472

Calcular $z=(1+i\sqrt{3})^{2000}$. [000015]

Ejercicio 473

Calcular $(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5$ y $(1+i\sqrt{3})^5-(1-i\sqrt{3})^5$. [000016]

Ejercicio 474

Calcular el módulo y el argumento de $z=\dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$. [000017]

Ejercicio 475

Calcular las potencias n-ésimas de números complejos :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}; \quad z_2 = 1+j; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

[000018]

Ejercicio 476

¿Cómo elegir el entero natural n, para que $(\sqrt{3}+i)^n$ sea un real ? ¿Un imaginario ? [000019]

Ejercicio 477

Sea z un número complejo de módulos ρ, de argumento θ, y sea $\bar{z}$ su conjugado. Calcular $(z+\bar{z})(z^2+\bar{z}^2),\ldots,(z^n+\bar{z}^n)$ en función de ρ y θ.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000020]

Ejercicio 478 parcial de noviembre 88

Sean α y β dos números reales. Expresar el número complejo $z = e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ en forma trigonométrica $z = \rho e^{i\gamma}$ (Indicación : escribir $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$). Deducir el valor de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha+(n-p)\beta].$$

Solución ▼ [000021]

Ejercicio 479

Escribir la expresión $(1+\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)$ en forma trigonométrica. Deducir la expresión de $(1+\cos\phi+i\operatorname{sen}\phi)^n$. [000022]

Ejercicio 480

Expresar en forma trigonométrica $1+e^{i\theta}$, donde $\theta \in]-\pi,\pi[$. Dar una interprétation geométrica.

Solución ▼ [000023]

Ejercicio 481

Demostrar que si $|z| \leqslant k < 1$, entonces $1-k \leqslant |1+z| \leqslant 1+k$. Hacer un dibujo y demostrar que puede haber igualdad. [000024]

Ejercicio 482

Demostrar algebraica y geométricamente que si $|z| = 1$, entonces $|1+z| \geqslant 1$ o $\left|1+z^2\right| \geqslant 1$. [000025]

Ejercicio 483

Resolver la ecuación $\exp(z) = \sqrt{3}+3i$. [000026]

Ejercicio 484 $\sum z_i + z_j$

1. Sean $u, v \in \mathbb{C}$. Demostrar que $|u+v|+|u-v| \geqslant |u|+|v|$, y determinar los casos de igualdad.
2. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$. Demostrar que $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=k+1}^{4} |z_k + z_\ell|$.

Solución ▼ [002924]

Ejercicio 485

Sean $a, b \in \mathbb{U}$ distintos y $z \in \mathbb{C}$. Se denota $u = \dfrac{z+ab\bar{z}-a-b}{a-b}$. Demostrar que $u^2 \in \mathbb{R}$.

Solución ▼ [002927]

Ejercicio 486 **IT

Calcular de dos formas las raíces cuadradas de $1+i$ y deducir los valores exactos de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solución ▼ [005119]

Ejercicio 487 **I

Determinar los complejos z tales que z, $\frac{1}{z}$ y $z-1$ tiene el mismo módulo.

Solución ▼ [005127]

Ejercicio 488 **I

Se denota U el conjunto de números complejos de módulo 1. Demostrar que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(z \in U \setminus \{-1\} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} /\ z = \frac{1+ix}{1-ix}\right).$$

Solución ▼ [005128]

Ejercicio 489 **IT

Forma trigonométrica de $\frac{1+\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$ y de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Solución ▼ [005129]

Ejercicio 490 *T

Calcular $(1+i\sqrt{3})^9$.

Solución ▼ [005130]

Ejercicio 491

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2+\bar{z}-1=0$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007209]

Ejercicio 492

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $4z^2+8|z|-3=0$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007210]

Ejercicio 493

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $iz^2-2\bar{z}+2-i=0$. [007211]

Ejercicio 494 Partes reales e imaginarias

1. Sea $z=a+ib$ un número complejo no nulo. Determinar la parte real y la parte imaginaria del inverso de z.
2. Sea t un número real y $z=a+ib$ un número complejo. Determinar la parte real y la parte imaginaria de $\frac{z-t}{z+t}$.
3. Sea z un número complejo. Demostrar que z es real si y solo si $\bar{z}=z$.

[007518]

Ejercicio 495 Módulos

1. Sea z y w dos números complejos. Demostrar que
$$|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|w|^2$$
$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$
$$|z+w|\leqslant|z|+|w|$$
$$||z|-|w||\leqslant|z-w|.$$
2. Demostrar que el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos dotados de la distancia definida por
$$d(z,w):=|w-z|$$
es un espacio métrico, es decir que para todo $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$,
   (a) $d(x,y)\geqslant 0$
   (b) $d(x,y)=0 \iff x=y$
   (c) $d(y,x)=d(x,y)$
   (d) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

[007519]

Ejercicio 496 Argumentos

1. Sea θ y θ' dos números reales. Usando las fórmulas de adición para el cálculo de $\cos(\theta+\theta')$ y $\operatorname{sen}(\theta+\theta')$, demostrar que
$$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$
2. Sea z y z' dos números complejos. Determinar $\arg(zz')$ en función de $\arg(z)$ y $\arg(z')$.
3. Deducir la escritura polar de z^n, luego sus partes real e imaginaria.
4. Determinar $\cos(5\theta)$ en función de $\cos(\theta)$ y de $\operatorname{sen}(\theta)$.

[007520]

20 104.02 Raíz cuadrada, ecuación de segundo grado

Ejercicio 497

Calcular las raíces cuadradas de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, y $7+24i$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000027]

Ejercicio 498

Encontrar las raíces cuadradas de $3-4i$ y de $24-10i$.

Solución ▼ [000028]

Ejercicio 499

1. Calcular las raíces cuadradas de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Deducir los valores de $\cos(\pi/8)$ y $\operatorname{sen}(\pi/8)$.
2. Calcular los valores de $\cos(\pi/12)$ y $\operatorname{sen}(\pi/12)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000029]

Ejercicio 500

Demostrar que las soluciones de $az^2+bz+c=0$, con a, b, c reales, son reales o conjugadas.

Solución ▼ [000030]

Ejercicio 501

Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones :

$$\begin{array}{lll} z^2+z+1=0; & z^2-(1+2i)z+i-1=0; & z^2-\sqrt{3}z-i=0; \\ z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0; & z^2-(3+4i)z-1+5i=0; & 4z^2-2z+1=0; \\ z^4+10z^2+169=0; & z^4+2z^2+4=0. & \end{array}$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000031]

Ejercicio 502

Encontrar las raíces complejas de la siguiente ecuación :

$$x^4-30x^2+289=0.$$

[000032]

Ejercicio 503

Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$, se establece

$$f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}.$$

1. Resolver la ecuación $z^2=i,\ z\in\mathbb{C}$.
2. Resolver la ecuación $f(z)=z,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

[000033]

Ejercicio 504

Se denota $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Expresar j y j^2 en forma algebraica.
2. Verificar que $1+j+j^2=0$.
3. Factorizar el polinomio z^3-8i.

[000034]

Ejercicio 505

---

1. Calcular las raíces cuadradas de $1+i$, $7+24i$, i, $5+12i$, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Resolver las siguientes ecuaciones :

   (a) $z^2+z+1=0$

   (b) $z^2+z-2=0$

   (c) $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$

   (d) $z^2+4z+5=0$

   (e) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

   (f) $z^4-(1-i)z^2-i=0$

   (g) $z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$.

[000035]

Ejercicio 506

Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones :

1. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$.
2. $z^3+3z-2i=0$.

Solución ▼ [000036]

Ejercicio 507

Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación (E) siguiente :

$$(E) \qquad z^2-(1+a)(1+i)z+\left(1+a^2\right)i=0,$$

donde a es un parámetro real.

1. Calcular en función de $a\in\mathbb{R}$ las soluciones z_1 y z_2 de (E). (Indicación : se puede determinar las raíces cuadradas complejas de $-2i(1-a)^2$).
2. Se designa por Z_1 (resp. Z_2) los puntos del plano complejo de afijos z_1 (resp. z_2) y por M la mitad de $[Z_1,Z_2]$. Trazar la curva del plano complejo descrito por M, cuando a varía en $\mathbb{R}$.

[000037]

Ejercicio 508

---

1. Para $\alpha\in\mathbb{R}$, resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$. Deducir la forma trigonométrica de las soluciones de la ecuación :

$$z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1=0, \text{ donde } n \text{ es un entero natural no nulo.}$$

$$P_\alpha(z)=z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1.$$

(a) Justificar la siguiente factorización de P_α :

$$P_\alpha(z)=\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)\cdots\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+1\right).$$

(b) Demostrar, usando números complejos por ejemplo, la siguiente fórmula :

$$1-\cos\theta=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

(c) Calcular $P_\alpha(1)$. Deducir

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2. Para todo α perteneciendo a $]0,\pi[$, y para todo entero natural $n\geqslant 2$, se establece :

$$H_n(\alpha)=\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

(a) Demostrar que, para todo α no nulo, se tiene :

$$2^{n-1}H_n(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2n)}.$$

(b) ¿Cuál es el límite de $H_n(\alpha)$, cuando α tiende a 0 ?

(c) Deducir que, para todo entero natural n superior o igual a 2, se tiene

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

[000038]

Ejercicio 509 Posición de las raíces cuadradas

Sea $z\in\mathbb{C}$ y p,q sus raíces cuadradas. ¿En qué condición z,p,q forman un triángulo rectángulo en z ?

Solución ▼ [002945]

Ejercicio 510 Ecuaciones de segundo grado

Resolver en $\mathbb{C}$: $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Solución ▼ [002946]

Ejercicio 511 Ensi P 91

Resolver en $\mathbb{C}$: $z^4+6z^3+9z^2+100=0$.

Solución ▼ [002947]

Ejercicio 512

¿Cómo se debe elegir $m\in\mathbb{C}$, para que la ecuación : $z^2-(2+im)z-(1+im)=0$ admita dos raíces imaginarias conjugadas ?

Solución ▼ [002948]

Ejercicio 513

1. Sean $u, v \in \mathbb{C}$. Verificar que
$$\left(|u|^2 - |v|^2\right)^2 = \left(\frac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2.$$
2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dar una CNS para que las raíces de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ tengan el mismo módulo.

Solución ▼ [002949]

Ejercicio 514 Medias geométricas y aritméticas

1. Sean $u, v \in \mathbb{C}$. Demostrar que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.
2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ y μ una raíz cuadrada de $\alpha\beta$. Demostrar que $|\alpha| + |\beta| = |m+\mu| + |m-\mu|$.

Solución ▼ [002950]

Ejercicio 515 **T

Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $2z^2 + 2z + 1 = 0$
3. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, θ real dado.
4. $z^2 - (6+i)z + (11+13i) = 0$
5. $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$.

Solución ▼ [005120]

Ejercicio 516 **T

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.

Solución ▼ [005125]

Ejercicio 517

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación
$$iz^3 - (1+i)z^2 + (1-2i)z + 6 + 8i = 0,$$
sabiendo que tiene una solución real. [007212]

Ejercicio 518

Sea $a \in \mathbb{C}$. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación
$$z^2 - 2(1-i)z + a^2 - 2i = 0.$$
¿Para qué valores de a esta ecuación tiene al menos una raíz real ? [007213]

21 104.03 Raíz n-ésima

Ejercicio 519

1. ¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|1+iz| = |1-iz|$.
   Se considera en $\mathbb{C}$ la ecuación $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, donde $a \in \mathbb{R}$. Demostrar, sin calcularlos, que las soluciones de esta ecuación son reales. Encontrar luego las soluciones. Calcular las raíces cúbicas de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

[000039]

Ejercicio 520

Para todo número complejo Z, se establece $P(Z) = Z^4 - 1$.

1. Factorizar $P(Z)$ y deducir las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $P(Z) = 0$.
2. Deducir de 1. las soluciones de la ecuación de incógnita z :

$$((2z+1)/(z-1))^4 = 1.$$

[000040]

Ejercicio 521

Resolver en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación : $z^4 = (1-i)\,/\left(1+i\sqrt{3}\right).$ [000041]

Ejercicio 522

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ y demostrar que solo una de sus soluciones tiene una cuarta potencia real.

Solución ▼ [000042]

Ejercicio 523

Encontrar las raíces cúbicas de $2-2i$ y de $11+2i$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000043]

Ejercicio 524

Calcular $\dfrac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algebraicamente, luego trigonométricamente. Deducir $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^{24} = 1$.

Solución ▼ [000044]

Ejercicio 525

Encontrar las raíces cuartas de 81 y de -81.

Solución ▼ [000045]

Ejercicio 526

1. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y todo número $z \in \mathbb{C}$, se tiene :

$$(z-1)\left(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$

y deducir que, si $z \neq 1$, se tiene :

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$

2. Verificar que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene $\exp(ix) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ix}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Calcular para todo $x \in \mathbb{R}$ la suma :

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + \cdots + \exp((n-1)ix),$$

y deducir los valores de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x)$$
$$Y_n = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \cdots + \operatorname{sen}((n-1)x).$$

Solución ▼ [000046]

Ejercicio 527

Calcular la suma $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000047]

Ejercicio 528

1. Resolver $z^3 = 1$ y demostrar que las raíces se escriben $1, j, j^2$. Calcular $1 + j + j^2$ y deducir las raíces de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Resolver $z^n = 1$ y demostrar que las raíces se escriben $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$. Deducir las raíces de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Calcular, para $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000048]

Ejercicio 529

Resolver en $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$.
2. $z^5 = 1 - i$.
3. $z^3 = -2 + 2i$.
4. $z^5 = \bar{z}$.

[000049]

Ejercicio 530

1. Calcular las raíces n-ésimas de $-i$ y de $1 + i$.
2. Resolver $z^2 - z + 1 - i = 0$.

3. Deducir las raíces de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

[000050]

Ejercicio 531

Sea ε una raíz n-ésima de la unidad ; calcular

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}.$$

[000051]

Ejercicio 532

Resolver, en $\mathbb{C}$, la ecuación $(z+1)^n = (z-1)^n$. [000052]

Ejercicio 533

Resolver, en $\mathbb{C}$, la ecuación $z^n = \overline{z}$, donde $n \geqslant 1$. [000053]

Ejercicio 534

Resolver las siguientes ecuaciones :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}; \qquad z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}.$$

[000054]

Ejercicio 535

Resolver $z^6 + 27 = 0$. $(z \in \mathbb{C})$ [000055]

Ejercicio 536

1. Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos distintos teniendo el mismo cubo. Expresar z_2 y z_3 en función de z_1.
2. Dar, en forma polar, las soluciones en $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indicación : Poner $Z = z^3$; calcular $(9+i)^2$)

Solución ▼ Vidéo ■ [000056]

Ejercicio 537

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. [000057]

Ejercicio 538

Determinar las raíces cuartas de $-7-24i$. [000058]

Ejercicio 539

Sea $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta^7 = 1$ y $\beta \neq 1$. Demostrar

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

[000059]

Ejercicio 540 Raíces de la unidad

Resolver :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$.
6. $\bar{x} = x^{n-1}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Solución ▼ [002939]

Ejercicio 541 Sumas de las raíces de la unidad

Sea $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$. Calcular :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=k}^{n-1} C_\ell^k \omega^{k+\ell}$.

Solución ▼ [002940]

Ejercicio 542 Suma de potencias p-ésimas de las raíces de la unidad

Sean $n, p \in \mathbb{N}^*$ y $\mathbb{U}_n$ el grupo de raíces n-ésima de 1.

1. Calcular $\sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^p$.
2. Sea P un polinomio con coeficientes complejos de grado menor o igual a $n-1$ y $M = \max\{|P(x)|, x \in \mathbb{U}_n\}$. Demostrar que todos los coeficientes de P están acotados por M.

Solución ▼ [002941]

Ejercicio 543 $\sum \omega^{k^2}$

Sean $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ y $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. Se pide calcular $|Z|^2$. Para eso ...

1. Escribir $|Z|^2$ como una suma doble.
2. Agrupar los términos en diagonal teniendo en cuenta la periodicidad de la función $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminar el cálculo.

Solución ▼ [002942]

Ejercicio 544 $e^{2i\pi/7}$

Sea $z = \exp\frac{2i\pi}{7}$ y $u = z+z^2+z^4$, $v = z^3+z^5+z^6$.

1. Calcular $u+v$ y u^2.
2. Deducir $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7} + \operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}$.

Solución ▼ [002943]

Ejercicio 545 Cálculo del producto

Simplificar $x = \prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$ utilizando $1, j, j^2$.

Solución ▼ [002944]

Ejercicio 546 ***

Sea $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dado. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Solución ▼ [005122]

Ejercicio 547 **

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z^2+1)^n - (z-1)^{2n} = 0$.

Solución ▼ [005126]

Ejercicio 548 **T

Determinar las raíces cuartas de i y las raíces sextas de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Solución ▼ [005131]

Ejercicio 549 **I

Se considera la ecuación $(E):\ (z-1)^n - (z+1)^n = 0$, donde n es un entero natural mayor o igual que 2 dado.

1. Demostrar que las soluciones de (E) son imaginarios puros.
2. Demostrar que las soluciones de (E) son dos a dos opuestas.
3. Resolver (E).

Solución ▼ [005135]

Ejercicio 550 ***I

Calcular $a_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$, $b_n = \prod_{k=1}^{n} \cos(a+\frac{k\pi}{n})$ y $c_n = \prod_{k=1}^{n} \tan(a+\frac{k\pi}{n})$ eliminando todos los casos especiales relativos a a.

Solución ▼ [005313]

Ejercicio 551 Raíces

1. Determinar las raíces cuadradas y las raíces cúbicas de i.
2. Determinar las raíces cúbicas de 1.
3. Determinar las raíces cuadradas de $\sqrt{3}+3i$.
4. Resolver las ecuaciones $z^2+2z-2+4i=0$ y $z^6-z^3+1=0$.

[007521]

---

22 104.04 Geometría

Ejercicio 552

Determinar el conjunto de números complejos z tales que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=1,$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000060]

Ejercicio 553

1. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación (1) : $(z-2)/(z-1)=i$. Dar la solución en forma algebraica.
2. Sea M, A, y B los respectivos puntos de fijación $z, 1, 2$. Se supone que $M \neq A$ y que $M \neq B$. Interpretar geométricamente el módulo y un argumento de $(z-2)/(z-1)$ y encontrar la solución de la ecuación (1).

[000061]

Ejercicio 554

Plan P se refiere a un sistema de referencia ortonormado e identificado con el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos por

$$M(x,y) \mapsto x+iy=z,$$

donde z es llamado el afijo de M. Sea $f : P \to P$ que a todo punto M de afijo z asociada M' de afijo $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. ¿En qué subconjunto de P, f está definida?
2. Calcular $|z'|$, para z afijo de un punto M ubicado en el semi-plano abierto

$$H := \{M(x,y) \in P \mid y > 0.\}$$

3. Deducir la imagen por f de H.

[000062]

Ejercicio 555

El plano P se refiere a un sistema de referencia ortonormado y se identifica P al conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ por

$$M(x,y) \mapsto x+iy=z,$$

donde z es llamado el afijo de M. Sea $g : P \to P$ que a todo punto M de afijo $z \neq -1$ asociada $g(M)$ de afijo $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

1. Calcular $z' + \bar{z}'$, para $|z| = 1$.
2. Deducir la imagen del círculo de radio 1 de centro 0 privado del punto de coordenadas $(-1, 0)$ por la aplicación g.

[000063]

Ejercicio 556

Sea C la curva de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 0$ en el plano P referido a un marco ortonormado.

1. La curva C ¿tiene puntos de intersección con el rectángulo abierto R cuyos vértices son :
$$A = (-3, 2) \quad B = (4, 2) \quad C = (4, -1) \quad D = (-3, -1).$$
2. La misma pregunta para el rectángulo cerrado R' de vértices :
$$A' = (-1, 4) \quad B' = (2, 4) \quad C' = (2, 1) \quad D' = (-1, 1).$$

[000064]

Ejercicio 557

Determinar por cálculo y geométricamente los números complejos z tales que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Generalizar para $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Solución ▼ [000065]

Ejercicio 558

Determinar por el cálculo y geométricamente los números complejos z tales que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$. Generalizar para $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Solución ▼ [000066]

Ejercicio 559

1. Sea A, B, C tres puntos del plano complejo cuyos afijos son respectivamente a, b, c. Se supone que $a + jb + j^2c = 0$; demostrar que ABC es un triángulo equilátero (j y j^2 son las raíces cúbicas complejas de 1 — más precisamente $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). ¿Qué sucede con el recíproco ?
2. ABC es un triángulo equilátero directo del plano complejo, se construyen los triángulos equiláteros directos BOD y OCE, lo que determinan los puntos D y E (O es el origen del plano complejo). ¿Cuál es la naturaleza de cuadrilátero $ADOE$? Comparar los triángulos OBC, DBA y EAC.

Solución ▼ [000067]

Ejercicio 560

Sea H una hipérbola equilátera de centro O, y M un punto de H. Demostrar que el círculo de centro M que pasa por la simétrica de M, con respecto a O interseca H en tres puntos que son los vértices de un triángulo equilátero. *Indicaciones :* Escogiendo un sistema de referencia adecuado, H tiene una ecuación del tipo $xy = 1$, en otras palabras, identificando el plano de H en un plano complejo, $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$. Denotando

a el afijo de M, el círculo tiene por ecuación $|z-a|^2 = 4a\bar{a}$. Se define $Z = z-a$ y se elimina $\bar{Z}$ entre las ecuaciones del círculo y la hipérbola. Dividiendo por $Z+2a$, para eliminar la ya conocida solución de la simétrica de M, se obtiene una ecuación del tipo $Z^3 - A = 0$. [000068]

Ejercicio 561

Demostrar que para $u, v \in \mathbb{C}$, se tiene $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Dar una interprétation geométrica.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000069]

Ejercicio 562

Sean $z, z' \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.

1. Demostrar que $z\overline{z'} + \bar{z}z' = 0$.
2. Demostrar que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

[000070]

Ejercicio 563

1. Determinar el conjunto de puntos M del plano complejo, de afijo z tales que : $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$.
2. Determinar el conjunto de puntos M del plano complejo, de afijo z tales que las imágenes de 1, z, $1+z^2$ están alineadas.

[000071]

Ejercicio 564

Sea $s = (1-z)(1-iz)$.

1. Determinar el conjunto de imágenes de los números complejos z tal que s sea real.
2. Determinar el conjunto de imágenes de los números complejos z tal que s sea imaginario puro.

[000072]

Ejercicio 565

1. Sea A un punto del plano de afijo $\alpha = a+ib$. Determinar el conjunto de puntos M del plano cuyo afijo z verifica $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$.
2. ¿Qué condiciones deben comprobar los puntos M_1 y M_2 de afijos z_1 y z_2, para que $\frac{z_1}{z_2}$ sea real ?
3. Determinar los números complejos z tales que los puntos del plano complejo de afijos z, iz, i forman un triángulo equilátero.
4. Sea $z = a+ib$, escribir la expresión $\frac{z-1}{z+1}$ bajo forma $A+iB$, . Determinar el conjunto de puntos del plano complejo de afijos z tal que el argumento de $\frac{z-1}{z+1}$ sea $\frac{\pi}{2}$.

[000073]

Ejercicio 566

Determinar los números complejos z tales que el triángulo que tiene como vértices los puntos de los afijos z, z^2, z^3 sea rectángulo en el punto de afijo z. [000074]

Ejercicio 567

Determinar los números complejos $z \in \mathbb{C}^*$ tales que los puntos de afijos $z, \frac{1}{z}$ y $(1-z)$ están en un mismo círculo de centro O. [000075]

Ejercicio 568

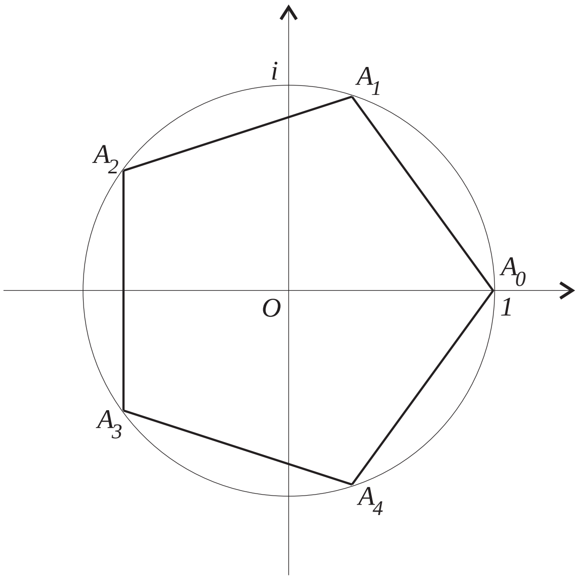
Resolver en $\mathbb{C}$ el sistema :

$$|z-1| \leqslant 1, \quad |z+1| \leqslant 1.$$

[000076]

Ejercicio 569

Sea $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentágono regular. Se denota O su centro y se elige un marco ortonormado $(O, \vec{u}, \vec{v})$, con $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, lo que nos permite identificar el plano con el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.



1. Dar afijos $\omega_0, \dots, \omega_4$ de puntos $A_0, \dots, A_4$. Demostrar que $\omega_k = {\omega_1}^k$, para $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Demostrar que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. Inferir que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ es una de las soluciones de la ecuación $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Deducir el valor de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. Se considera el punto B de afijo -1. Calcular la longitud BA_2 en función de sen $\frac{\pi}{10}$, luego de $\sqrt{5}$ (se observa que sen $\frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).
4. Se considera el punto I de afijo $\frac{i}{2}$, el círculo $\mathscr{C}$ de centro I radio $\frac{1}{2}$ y finalmente el punto J de intersección de $\mathscr{C}$, con la semi-recta $[BI)$. Calcular la longitud BI, luego la longitud BJ.
5. **Aplicación :** Dibujar un pentágono regular con regla y compás. Explicar.

Solución ▼ Vidéo ■ [000077]

Ejercicio 570 Ecuaciones afines

1. Demostrar que toda recta del plano admite por ecuación compleja : $az+\overline{az}=b$, con $a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{R}$.
2. Sean $a,b,c\in\mathbb{C}$, a,b no ambos nulos. Discutir la naturaleza de $E=\{z\in\mathbb{C}$ tal que $az+b\bar{z}=c\}$.

Solución ▼ [002925]

Ejercicio 571 Transformación homográfica

Sea $f:\mathbb{C}\setminus\{i\}\to\mathbb{C}\setminus\{1\}, z\mapsto\frac{z+i}{z-i}$

1. Demostrar que f es biyectiva.
2. Determinar $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U}\setminus\{i\})$, $f(i\mathbb{R}\setminus\{i\})$.

Solución ▼ [002926]

Ejercicio 572 Triángulo equilátero

Sean $a,b,c\in\mathbb{C}$ distintos. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes :

1. $\{a,b,c\}$ es un triángulo equilátero.
2. j o j^2 es raíz de $az^2+bz+c=0$.
3. $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.
4. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$.

[002928]

Ejercicio 573 vértices de un cuadrado

Sean $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tales que

$$\begin{aligned} a+ib&=c+id\\ a+c&=b+d. \end{aligned}$$

¿Qué se puede decir sobre los puntos de afijo a,b,c,d ? Deducir que existe $z\in\mathbb{C}$ tal que $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$.

Solución ▼ [002929]

Ejercicio 574 Configuración de puntos

Determinar los números $z\in\mathbb{C}$ tales que ...

1. z,z^2,z^4 están alineados.
2. $1,z,z^2$ forman un triángulo rectángulo.
3. $z,\frac{1}{z},-i$ están alineados.

Solución ▼ [002930]

Ejercicio 575 $a+b+c=1$

Encontrar $a,b,c\in\mathbb{U}$ tales que $\begin{cases} a+b+c=1\\ abc=1. \end{cases}$

Solución ▼ [002931]

Ejercicio 576 $u+v+w=0$

Sean u,v,w tres complejos unitarios tales que $u+v+w=0$. Demostrar que $u=jv=j^2w$ o $u=jw=j^2v$.
[002932]

Ejercicio 577 $z+1/z=2$

Encontrar los complejos $z\in\mathbb{C}^*$ tales que $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2$.
Solución ▼ [002933]

Ejercicio 578 Simétrico con respecto a una recta

Los puntos A,B,M tienen como afijos a,b,z, calcular el afijo de la simétrica M' de M, con respecto a la recta (AB).
Solución ▼ [002934]

Ejercicio 579 Ortocentro

Sean $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ dos a dos distintos. Demostrar que si dos de los cocientes $\frac{d-a}{b-c},\frac{d-b}{c-a},\frac{d-c}{a-b}$ son imaginarios puros, entonces también el tercero.
Solución ▼ [002935]

Ejercicio 580 Semejanzas en un triángulo

Se da un triángulo ABC, un real positivo k y una ángulo θ. Se denota S_M la similitud directa de centro M, de razón k y de ángulo θ. Sea C_1 deducido de C por S_A, B_1 deducido de B por S_C, A_1 deducido de A por S_B. Demostrar que los dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tienen el mismo centro de gravedad. [002936]

Ejercicio 581 Centro del círculo circunscrito

Sean $a,b,c\in\mathbb{C}$, afijos de puntos A,B,C no alineado. Calcular el afijo del centro del círculo circunscrito a ABC en función de a,b,c.
Solución ▼ [002937]

Ejercicio 582 Esfera de $\mathbb{R}^3$

Sean $u,v\in\mathbb{C}$ tales que $u+v\neq 0$. Se escribe $x=\frac{1+uv}{u+v}$, $y=i\frac{1-uv}{u+v}$, $z=\frac{u-v}{u+v}$.

1. ¿Cuál es la CNS en u y v, para que x,y,z sean reales ?
2. Se supone que esta condición se cumple. Demostrar que el punto $M(x,y,z)$ en el espacio pertenece a la esfera del centro O y de radio 1.
3. ¿Tenemos así todos los puntos de esta esfera ?

Solución ▼ [002938]

Ejercicio 583 **IT Una construcción del pentágono regular con regla y compás

1. Se define $z=\mathrm{e}^{2i\pi/5}$, luego $a=z+z^4$ y $b=z^2+z^3$. Determinar una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean a y b y deducir los valores exactos de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2. El círculo de centro Ω de afijo $-\frac{1}{2}$ pasando por el punto M de afijo i interseca (Ox) en dos puntos I y J. Demostrar que $\overline{OI}+\overline{OJ}=\overline{OI}\cdot\overline{OJ}=-1$ y deducir una construcción con regla y compás, del pentágono regular inscrito en el círculo central O y de radio 1, donde uno de los vértices es el punto de afijo 1.
3. La diagonal $[AC]$ de un pentágono regular $(ABCDE)$ es cortada por otras dos diagonales en dos puntos F y G. Calcular los cocientes $\frac{AF}{AC}$ y $\frac{FG}{AF}$.

Solución ▼ [005121]

Ejercicio 584 ****

1. Sea (ABC) un triángulo cuyas longitudes de los lados BC, CA y AB se denotan respectivamente a, b y c. Sea I el centro del círculo inscrito en el triángulo (ABC). Demostrar que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$.
2. Determinar z complejo tal que O sea el centro del círculo inscrito en el triángulo (PQR) cuyos vértices tienen por afijos respectivos z, z^2 y z^3.

Solución ▼ [005123]

Ejercicio 585 ***I

Sean A, B y C tres puntos del plano, dos a dos distintos, de afijos respectivos a, b y c. Demostrar que :

$$ABC \text{ equilátero} \Leftrightarrow j \text{ o } j^2 \text{ es la raíz de la ecuación } az^2+bz+c=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.$$

Solución ▼ [005124]

Ejercicio 586 **T

Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, se establece $Z=\frac{1+z}{1-z}$. Determinar y construir el conjunto de puntos M de afijos z tales que

1. $|Z|=1$.
2. $|Z|=2$.
3. $Z\in\mathbb{R}$.
4. $Z\in i\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005133]

Ejercicio 587 *T

Naturaleza y elementos característicos de la transformación de expresión compleja :

1. $z'=z+3-i$
2. $z'=2z+3$
3. $z'=iz+1$
4. $z'=(1-i)z+2+i$

Solución ▼ [005134]

Ejercicio 588 Teoremas de Thébault y de Van Aubel

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo directo. Se construyen cuatro cuadrados que descansan en el exterior en los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ y $[DA]$. Los respectivos centros de estos cuadrados se denotan P, Q, R y S.

1. Demostrar que en el cuadrado construido sobre $[AB]$, se tiene $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Demostrar relaciones análogas para los otros cuadrados.
2. Demostrar el teorema de Van Aubel : $PQRS$ es un *pseudo-cuadrado*, es decir sus diagonales tienen la misma longitud y se cortan en ángulo recto. Por esto, calcular $\frac{s-q}{r-p}$.
3. (Teorema de Thébault) En el caso particular en que $ABCD$ es un paralelogramo, demostrar que $PQRS$ es un cuadrado.

Solución ▼ [007004]

Ejercicio 589 Punto de Vecten

Sea ABC un triángulo recto. Se construyen tres cuadrados que descansan en el exterior en los lados $[AB]$, $[BC]$ y $[CA]$. Los respectivos centros de estos cuadrados se denotan P, Q y R. El objetivo es demostrar que (AQ), (BR) y (CP) son concurrentes. El punto de intersección se llama *punto de Vecten* del triángulo.

1. Demostrar que en el cuadrado construido sobre $[AB]$, se tiene $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Demostrar relaciones análogas para los otros cuadrados.
2. Demostrar que ABC y PQR tienen el mismo centro de gravedad.
3. Demostrar que (AQ) y (PR) son perpendiculares. Concluir.

Solución ▼ [007005]

Ejercicio 590 Teorema de Napoléon

Sea ABC un triángulo recto. Sean P,Q,R tales que CBP, ACQ y BAR son triángulos equiláteros directos. Se denotan U,V,W los respectivos centros de gravedad de estos tres triángulos equiláteros. Demostrar que UVW es equilátero, con el mismo centro de gravedad que ABC, usando la caracterización de triángulos equiláteros.

Solución ▼ [007006]

Ejercicio 591 Teorema de Ptolomeo

Se admite el resultado siguiente :

Cuatro puntos distintos de afijos a,b,c,d son cocíclicos o alineados (resp. cocíclicos o alineados en ese orden) si y solo si su bicociente

$$[a,b,c,d] := \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

es un real (resp. real positivo).

El propósito del ejercicio es demostrar el teorema de Ptolomeo en su siguiente versión :

Teorema (Ptolomeo) *Sean A, B, C, D cuatro puntos del plano no alineados. Entonces se tiene*

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

con igualdad si y solo si A,B,C,D son cocíclicos en este orden.

1. (Calentamiento) Demostrar que para todo $x,y,z \in \mathbb{C}$,
$$|x| \cdot |y-z| \leqslant |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|.$$
2. Demostrar el teorema si dos de los puntos son iguales.
3. En lo que sigue se supone los puntos distintos dos a dos. Usando los afijos a,b,c,d de los puntos, probar la desigualdad.

4. Estudiar el caso de la igualdad y concluir.

Solución ▼ [007007]

Ejercicio 592 Teorema de los cuatro círculos de Miquel

Se admite el resultado siguiente :
Cuatro puntos distintos de afijos a,b,c,d son cocíclicos o alineados si y solo si su bicociente

$$[a,b,c,d] := \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

es real.
Sean $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ cuatro círculos del plano que satisfacen la siguiente condición :
$\mathscr{C}_1$ corta $\mathscr{C}_2$ en dos puntos distintos z_1 y w_1, que corta $\mathscr{C}_3$ en dos puntos distintos z_2 y w_2, que corta $\mathscr{C}_4$ en dos puntos distintos z_3 y w_3, que corta $\mathscr{C}_1$ en dos puntos distintos z_4 y w_4. Se supone que los ocho puntos arriba son todos *distintos*.

1. Demostrar que

$$\frac{[z_1,w_2,z_2,w_1]\cdot[z_3,w_4,z_4,w_3]}{[z_2,w_3,z_3,w_2]\cdot[z_4,w_1,z_1,w_4]} = [z_1,z_3,z_2,z_4]\cdot[w_1,w_3,w_2,w_4].$$

2. Deducir que si Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 son alineados o cocíclicos, entonces lo mismo es cierto para W_1,W_2,W_3,W_4.

[007008]

Ejercicio 593

Determinar una ecuación compleja de la recta :

1. conteniendo los puntos de afijo i y $1+2i$;
2. conteniendo el punto de afijo $1+i$ y de vector normal de afijo $2+i$;
3. conteniendo el punto de afijo $1+i$ y de vector director de afijo $2+i$.

[007009]

Ejercicio 594

Sean A y B dos puntos distintos de afijos a y b, y $\theta \in \mathbb{R}$. Determinar el conjunto de puntos M de afijo z tales que

$$\operatorname{Arg}\frac{z-b}{z-a} \equiv \theta[\pi].$$

Solución ▼ [007010]

Ejercicio 595

Determinar los elementos característicos de las transformaciones representadas por :

1. $z \mapsto (1-i)z+i$;
2. $z \mapsto i\bar{z}+1-i$;
3. $z \mapsto 2i\bar{z}+3$;
4. $z \mapsto \bar{z}+1$.

Solución ▼ [007145]

Ejercicio 596

Escribir en coordenadas complejas :

1. la rotación de ángulo $\pi/4$ y de centro de afijo $2+3i$;
2. la reflexión de eje de ecuación $y=2x+1$.

Solución ▼ [007146]

Ejercicio 597

Escribir en coordenadas complejas las dos similitudes (directa e indirecta) enviando puntos de afijos 2 y 3 a los de afijos i y $3i$ y encontrar sus elementos característicos.

Indicación ▼ Solución ▼ [007147]

Ejercicio 598

Sea $a \in \mathbb{C}^*$, y sea f la similitud directa del plano representado por $z \mapsto a^2z+a-1$. Determinar el conjunto de los parámetros a, para los cuales f es :

1. una traslación ;
2. una homotecia de la razón -4 ;
3. una rotación de ángulo $\pi/2$.

Solución ▼ [007148]

Ejercicio 599

Sea ABC un triángulo tal que C sea la imagen de B por la rotación de centro A y de ángulo $\pi/2$. Sea s una similitud enviando A sobre B y B sobre C.

1. ¿Qué puede valer $s(C)$?
2. Se supone que s es directa. Determinar su centro Ω. Se expresa como el baricentro de A, B y C.
3. Si la similitud es indirecta, determinar su centro y su eje.

Solución ▼ [007149]

Ejercicio 600

Se fija un sistema de referencia ortonormado directo del plano. ¿Bajo qué condición sobre los números reales a, b, c, d, e y f la transformación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \end{pmatrix}$ es una similitud directa ? ¿Indirecta ?

Aplicación : escribir en coordenadas complejas las aplicaciones

$$\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x-y-1 \\ x-2y+1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y\sqrt{3} \\ x\sqrt{3}+y \end{pmatrix}$$

Solución ▼ [007150]

Ejercicio 601

El plano está provisto de un sistema de referencia ortonormado directo $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Se denotan A y B los puntos de afijos $z_A = 1-i$ y $z_B = 7+\frac{7}{2}i$.

1. Sea s la aplicación del plano en sí mismo que envía un punto de afijo z en el de afijo

$$\frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$$

   Determinar la naturaleza y los elementos característicos de s.

2. Se denota $B_0 = B$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se denota $B_{n+1} = s(B_n)$.
   (a) Calcular la distancia AB_{n+1} en función de AB_n.
   (b) Determinar el entero más pequeño N verificando la siguiente propiedad : para todo $n \geqslant N$, el punto B_n pertenece al disco central A y de radio 10^{-2}. Se pide una fórmula exacta para este entero pero no su escritura explícita en base 10.
   (c) Determinar el conjunto de números enteros n tales que los puntos A, B y B_n están alineados.

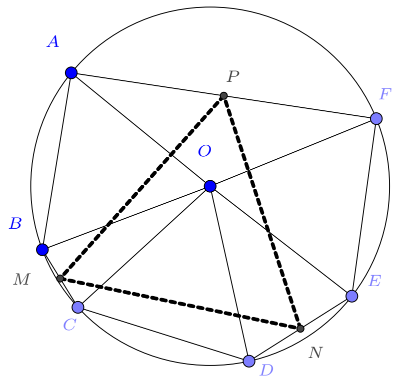
Solución ▼ [007151]

Ejercicio 602

1. Sea ABC un triángulo. Demostrar que es equilátero directo si y solo si los afijos (se ha fijado un sistema de referencia ortonormado directo) de vértices verifica $a + bj + cj^2 = 0$.
2. (Notaciones reinicializadas) Sea O un punto del plano, $\mathscr{C}$ un círculo de centro O, y A, B, C, D, E y F puntos distintos de $\mathscr{C}$ verificando (en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) la igualdad :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = \pi/3.$$

   Se denota M (resp. N, P) la mitad de $[BC]$ (resp. $[DE]$, $[FA]$). Demostrar que MNP es equilátero directo.



Solución ▼ [007163]

Ejercicio 603

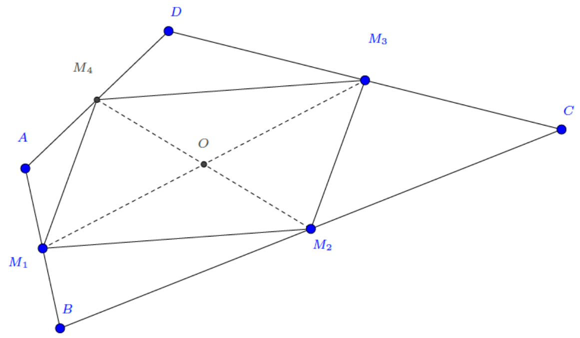
Sea ABC un triángulo equilátero directo, y M un punto. Se denota A' (resp. B' y C') el simétrico ortogonal de M, con respecto a la recta (BC) (resp. (CA) y (AB)). El propósito del ejercicio es demostrar que ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo centro de gravedad.

1. Escribir en coordenadas complejas (relativamente a un sistema de referencia que se elige juiciosamente) la reflexión σ_{AB}, con respecto al eje (AB).
2. Concluir.

Solución ▼ [007164]

Ejercicio 604

Sea $M_1M_2M_3M_4$ un paralelogramo directo del plano, de centro O, y A un punto cualquiera del plano. Se considera B el simétrico de A, con respecto a M_1, C el simétrico de B, con respecto a M_2, D el simétrico de C, con respecto a M_3 y E el simétrico de D, con respecto a M_4.



1. Demostrar que $E = A$.
2. Demostrar que si z y z' son dos complejos, entonces $|z+z'|+|z-z'| \geqslant 2|z|$.
3. Se fija un sistema de referencia ortonormado directo de centro O. Expresar a, b, c y d, luego el perímetro de $ABCD$ en función de m_1, m_2 y de $t = a - m_1 + m_2$.
4. Se hace ahora variar el punto A. Demostrar que el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ es minimal cuando AM_1OM_4 es un paralelogramo.

Solución ▼ [007166]

23 104.05 Trigonometría

Ejercicio 605

Se recuerda la fórmula ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

1. Establecer fórmulas de Euler ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

2. Usando las fórmulas de Euler, linealizar (o transformar de producto a suma) (a, $b \in \mathbb{R}$) :

$$2\cos a\cos b; \qquad 2\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b; \qquad \cos^2 a; \qquad \operatorname{sen}^2 a.$$

3. Usando la fórmula : $\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{i(x+y)}$ (x, $y \in \mathbb{R}$), encontrar las correspondientes a $\operatorname{sen}(x+y)$, $\cos(x+y)$ y $\tan(x+y)$ en función del seno, coseno y tangente de x o de y; deducir las fórmulas de cálculo para $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$ y $\tan(2x)$ (x, $y \in \mathbb{R}$).
4. Calcular $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en función de $\tan\frac{x}{2}$ ($x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

5. Establecer la fórmula de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta).$$

6. Usando la fórmula de De Moivre, calcular $\cos(3x)$ y $\operatorname{sen}(3x)$ en función de $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$.

[000078]

Ejercicio 606

1. Calcular $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\operatorname{sen} 6\theta$, $\operatorname{sen} 9\theta$, en función de las líneas trigonométricas del ángulo θ.
2. Calcular $\operatorname{sen}^3\theta$, $\operatorname{sen}^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, utilizando las líneas trigonométricas de los múltiplos enteros de θ.

[000079]

Ejercicio 607

Usando números complejos, calcular $\cos 5\theta$ y $\operatorname{sen} 5\theta$ en función de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000080]

Ejercicio 608

1. Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Utilizando la fórmula de Moivre, expresar en función de $\cos\theta$ y de $\operatorname{sen}\theta$:
   (a) $\cos(2\theta)$ y $\operatorname{sen}(2\theta)$.
   (b) $\cos(3\theta)$ y $\operatorname{sen}(3\theta)$. Deducir una ecuación de tercer grado que tenga por solución $\cos(\frac{\pi}{3})$ y resolverla.
2. Linealizar los polinomios trigonométriques siguientes : $1+\cos^2 x$, $\cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x$.

[000081]

Ejercicio 609

Expresar $(\cos 5x)(\operatorname{sen} 3x)$ en función de $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$. [000082]

Ejercicio 610

Sea x un número real. Se denota $C = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \sum_{k=0}^{n}\cos kx$, y $S = \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen}kx$. Calcular C y S. [000083]

Ejercicio 611

Resolver en $\mathbb{R}$ las ecuaciones :

$$\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \tan x = -1,$$

y colocar en el círculo trigonométrico las imágenes de las soluciones ; resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

[000084]

Ejercicio 612

Calcular $\operatorname{sen}(25\pi/3), \cos(19\pi/4), \tan(37\pi/6)$. [000085]

Ejercicio 613

Resolver la ecuación : $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x - 2 = 0$, luego la desigualdad : $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x - 2 > 0$. [000086]

Ejercicio 614

Estudiar el signo de la función dada por $f(x) = \cos 3x + \cos 5x$. [000087]

Ejercicio 615

Simplificar, según el valor de $x \in [-\pi, \pi]$, la expresión $\sqrt{1+\cos x} + |\operatorname{sen} x/2|$. [000088]

Ejercicio 616

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones : (dar los valores de las soluciones pertenecientes a $]-\pi, \pi]$ y colocarlos en el círculo trigonométrico).

1. $\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$,
2. $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$,
3. $\cos(3x) = \operatorname{sen}(x)$.

Solución ▼ [000089]

Ejercicio 617

¿Bajo qué condición sobre el real m tiene la ecuación $\sqrt{3}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) = m$ una solución real ? Resolver esta ecuación para $m = \sqrt{2}$.

Solución ▼ [000090]

Ejercicio 618

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes desigualdades :

$$\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$$
$$2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0.$$

Solución ▼ [000091]

Ejercicio 619

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones :

1. $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \operatorname{sen}^4(x) = 1$.

Solución ▼ [000092]

Ejercicio 620 Suma de coeficientes binomiales

Con ayuda de fórmulas del binomio, simplificar :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(-3)^k$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^{k}\cos(k\theta)$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^{k}\operatorname{sen}\big((k+1)\theta\big)$.
5. $\cos a + C_n^1\cos(a+b) + C_n^2\cos(a+2b) + \cdots + C_n^n\cos(a+nb)$.

Solución ▼ [002951]

Ejercicio 621 Sumas trigonométricas

Simplificar :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^3(k\theta)$.

Solución ▼ [002952]

Ejercicio 622 Ecuación trigonométrica

Sea $a\in\mathbb{R}$. Resolver :

$$\begin{cases}\cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\\ \operatorname{sen}(a)+\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a+y)=0.\end{cases}$$

Solución ▼ [002953]

Ejercicio 623 $\sum\cos^{2p}(x+k\pi/2p)$

Sea $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Simplificar $\cos^4\theta+\cos^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Simplificar $\cos^6\theta+\cos^6\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cdots+\cos^6\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$.
3. Simplificar $\cos^{2p}\theta+\cos^{2p}\left(\theta+\frac{\pi}{2p}\right)+\cdots+\cos^{2p}\left(\theta+\frac{(2p-1)\pi}{2p}\right)$.

Solución ▼ [002954]

Ejercicio 624 $\sum\cos(kx)/\cos x^k=0$

Resolver : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=0$.

Solución ▼ [002955]

Ejercicio 625 $\sum C_n^k x^{n-k}\cos(k\alpha) = 0$

Resolver en x : $x^n + C_n^1 x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + C_n^n \cos(n\alpha) = 0$.

Solución ▼ [002956]

Ejercicio 626 $\sum 2^{-k}/\cos\theta\cdots\cos(2^k\theta)$

Simplificar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cdots\cos 2^{k-1}\theta}.$$

Solución ▼ [002957]

Ejercicio 627 Cálculo de $\tan(nx)$

Sea $n\in\mathbb{N}$, y $x\in\mathbb{R}$. Expresar $\tan(nx)$ en función de $\tan x$.

Solución ▼ [002958]

Ejercicio 628 $z = (1+ia)/(1-ia)$

Sea $z\in\mathbb{U}$. ¿Se puede encontrar $a\in\mathbb{R}$ tal que $z = \frac{1+ia}{1-ia}$?

Solución ▼ [002959]

Ejercicio 629 *IT

Resolver en $\mathbb{R}$, luego en $[0,2\pi]$ las siguientes ecuaciones :

1. $\operatorname{sen} x = 0$,
2. $\operatorname{sen} x = 1$,
3. $\operatorname{sen} x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Solución ▼ [005063]

Ejercicio 630 *IT

Resolver en $\mathbb{R}$, luego en $[0,2\pi]$ las siguientes ecuaciones :

1. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$,
2. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución ▼ [005064]

Ejercicio 631 **IT

Resolver en $\mathbb{R}$, luego en I las siguientes ecuaciones :

1. $\operatorname{sen}(2x)=\frac{1}{2}$, $I=[0,2\pi]$,
2. $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I=[0,4\pi]$,
3. $\tan(5x)=1$, $I=[0,\pi]$,
4. $\cos(2x)=\cos^2 x$, $I=[0,2\pi]$,
5. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$, $I=[0,2\pi]$,
6. $\cos(nx)=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$,
7. $|\cos(nx)|=1$,
8. $\operatorname{sen}(nx)=0$,
9. $|\operatorname{sen}(nx)|=1$,
10. $\operatorname{sen}x=\tan x$, $I=[0,2\pi]$,
11. $\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}x=0$, $I=[0,2\pi]$,
12. $12\cos^2 x-8\operatorname{sen}^2 x=2$, $I=[-\pi,\pi]$.

Solución ▼ [005065]

Ejercicio 632 **IT

Resolver en I las siguientes desigualdades :

1. $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$, $I=[-\pi,\pi]$,
2. $\operatorname{sen}x\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I=\mathbb{R}$,
3. $\cos x>\cos\frac{x}{2}$, $I=[0,2\pi]$,
4. $\cos^2 x\geqslant\cos(2x)$, $I=[-\pi,\pi]$,
5. $\cos^2 x\leqslant\frac{1}{2}$, $I=[0,2\pi]$,
6. $\cos\frac{x}{3}\leqslant\operatorname{sen}\frac{x}{3}$, $I=[0,2\pi]$.

Solución ▼ [005066]

Ejercicio 633 *I

Calcular $\cos\frac{\pi}{8}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$.

Solución ▼ [005067]

Ejercicio 634 *I

Calcular $\cos\frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Solución ▼ [005068]

Ejercicio 635 ***

Demostrar que $\sum\cos(\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n)=2^n\cos a_1\cos a_2\cdots\cos a_n$ (la suma incluye 2^n términos).

Solución ▼ [005069]

Ejercicio 636 ***I

1. Calcular $\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, para a elemento dado de $]0,\pi[$ (pensar en $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$).
2. Determinar $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)$.

Solución ▼ [005070]

Ejercicio 637 **

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación $2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{4\operatorname{sen}^2 x-3}=20$.

Solución ▼ [005071]

Ejercicio 638 ***

Sea a un real distinto de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calcular $\tan(3\theta)$ en función de $\tan\theta$.
2. Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación :
$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}.$$
Se encuentran dos métodos, uno algebraico y el otro usando la fórmula trigonométrica establecida en 1).

Solución ▼ [005072]

Ejercicio 639 ****

Se quiere calcular $S=\tan 9°-\tan 27°-\tan 63°+\tan 81°$.

1. Calcular $\tan(5x)$ en función de $\tan x$.
2. Deducir un polinomio de grado 4 cuyas raíces son $\tan 9°$, $-\tan 27°$, $-\tan 63°$ y $\tan 81°$, luego el valor de S.

Solución ▼ [005073]

Ejercicio 640 ***

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación
$$\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)=0,$$
en $[0,\pi]$?

Solución ▼ [005074]

Ejercicio 641 **I

Se quiere calcular $\cos\frac{2\pi}{5}$ y $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$. Por esto, se establece $a=2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b=2\cos\frac{4\pi}{5}$ y $z=e^{2i\pi/5}$.

1. Verificar que $a=z+z^4$ y $b=z^2+z^3$.
2. Verificar que $1+z+z^2+z^3+z^4=0$.
3. Deducir un polinomio de grado 2 cuyas raíces son a y b, luego los valores exactos de $\cos\frac{2\pi}{5}$ y $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$.

Solución ▼ [005075]

Ejercicio 642 **I

Calcular una primitiva de cada una de las siguientes funciones :

1. $x \mapsto \cos^2 x$,
2. $x \mapsto \cos^4 x$,
3. $x \mapsto \operatorname{sen}^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x$,
5. $x \mapsto \operatorname{sen}^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \operatorname{sen}^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Solución ▼ [005076]

Ejercicio 643 **

Calcular $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \operatorname{sen}^6 x\, dx$ y $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \operatorname{sen}^7 x\, dx$.

Solución ▼ [005077]

Ejercicio 644 **

Demostrar las siguientes identidades, precisando cada vez su dominio de validez :

1. $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \tan \dfrac{x}{2}$,
2. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{2}{\cos(2x)}$,
4. $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$.

Solución ▼ [005078]

Ejercicio 645 ***

Sea k un real distinto de -1 y de 1.

1. Estudiar las variaciones de $f_k : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-2k\cos x + k^2}}$.
2. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x)\, dx$.

Solución ▼ [005079]

Ejercicio 646 ***I

calcular las siguientes sumas :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ dados).
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ dados).
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ y $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sen}(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ dados).

Solución ▼ [005080]

Ejercicio 647 ***

Resolver el sistema $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0 \end{cases}$, donde a, b y c son tres reales.

Solución ▼ [005081]

Ejercicio 648 **

Demostrar que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Solución ▼ [005082]

Ejercicio 649 ***

1. Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación $\cos(3x) = \operatorname{sen}(2x)$.
2. Deducir los valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, para x elemento de $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\right\}$.

Solución ▼ [005083]

Ejercicio 650 ***

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \frac{n}{4}$ (Se observa que si $x \in [0;1]$, $x^2 \leqslant x$).

Solución ▼ [005162]

Ejercicio 651

Sea θ un número real.

1. Utilizando las fórmulas de adición, calcular $\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta$ en función de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.
2. Verificar la validez de las fórmulas obtenidas para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/3$.
3. Calcular $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en función de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.
4. Verificar la validez de las fórmulas obtenidas para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/3$.

[007255]

Ejercicio 652

1. Expresar $\cos(a)\cos(b)$ en función de $\cos(a+b)$ y $\cos(a-b)$.
2. Realizando un cambio de variables a precisar, demostrar que para todo real p y q se tiene :
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
3. Deducir las soluciones de la siguiente ecuación :
$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

[007256]

Ejercicio 653

1. Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación $\sqrt{3}\cos(x) + \operatorname{sen}(x) = \sqrt{2}$.
2. Usando un método similar, resolver la ecuación $\cos(x) + \operatorname{sen}(x) = 1$.

[007257]

24 104.99 Otro

Ejercicio 654

Demostrar que todo número complejo z no real de módulo 1 se puede expresar en la forma $\dfrac{1+ir}{1-ir}$, donde $r \in \mathbb{R}$. [000093]

Ejercicio 655

Sea u, v de números complejos no reales tales que $|u| = |v| = 1$ y $uv \neq -1$. Demostrar que $\dfrac{u+v}{1+uv}$ es real. [000094]

Ejercicio 656

Calcular las siguientes sumas :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx); \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx).$$

[000095]

Ejercicio 657

Sea $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib;\ a,b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Demostrar que si α y β están en $\mathbb{Z}[i]$, entonces $\alpha+\beta$ y $\alpha\beta$ están también.
2. Encontrar los elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$, es decir los elementos $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tales que existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, con $\alpha\beta = 1$.
3. Verificar que cualquiera que sea $\omega \in \mathbb{C}$ existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $|\omega - \alpha| < 1$.
4. Demostrar que existe en $\mathbb{Z}[i]$ una división euclidiana, es decir que, cualesquiera que sean α y β en $\mathbb{Z}[i]$ existe q y r en $\mathbb{Z}[i]$ verificando :

$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{con} \qquad |r| < |\beta|.$$

(Indicación : Se puede considerar el complejo $\frac{\alpha}{\beta}$)

Solución ▼ Vidéo ■ [000096]

Ejercicio 658

Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\dfrac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$. Estudiar los casos de igualdad. [000097]

Ejercicio 659

Sea $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tal que $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$. Demostrar que si $z \neq -\dfrac{d}{c}$, entonces $\mathrm{Im}(\dfrac{az+b}{cz+d}) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|(cz+d)|^2}$. [000098]

Ejercicio 660

¿Qué sucede con tres complejos a, b, c no nulos tales que $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$. [000099]

Ejercicio 661

1. Estudiar la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por : $z_0 = 4$, $z_{n+1} = f(z_n)$, donde f es la aplicación de $\mathbb{C}$ en sí mismo definida por :
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$
Indicación : Se comienza por buscar las coordenadas cartesianas del punto único α tal que $f(\alpha) = \alpha$, luego se analiza la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por :
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$
2. Se define $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$. Calcular
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} l_k$$
y interpretar geométricamente.

[000100]

Ejercicio 662 examen de octubre 1999

Se define una función f de $\mathbb{C} - \{i\}$ en $\mathbb{C} - \{1\}$ poniendo
$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. Se supone z real. ¿Cuál es el módulo de $f(z)$?
2. Encontrar los números complejos z tales que $f(z) = z$.

[000101]

Ejercicio 663 Examen de noviembre 2001

Sea f la función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

1. Calcular los puntos fijos de la función f, es decir los números complejos z tales que $f(z) = z$.
2. Determinar los números complejos z, para los cuales $f(z)$ es real.

[000102]

Ejercicio 664

1. Demostrar que si $x + y + z = a$, $yz + zx + xy = b$, $xyz = c$, entonces x, y y z son soluciones de la ecuación $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Encontrar x, y y z si se supone $a = b = 0$ y $c = -8$.
2. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

Solución ▼ [000103]

Ejercicio 665 ***

Demostrar que las soluciones de la ecuación $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0$ son de módulo inferior o igual a 1.

Solución ▼ [005132]

Ejercicio 666 ***T ESIM 1993

Para $z\in\mathbb{C}$, se establece $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})$, $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})$ y $\operatorname{th} z=\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1. ¿Cuáles son los números complejos z, para los cuales $\operatorname{th} z$ existe ?
2. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $\operatorname{th} z=0$.
3. Resolver en $\mathbb{C}$ el sistema $\begin{cases} |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z|<1. \end{cases}$
4. Demostrar que la función th realiza una biyección de $\Delta=\{z\in\mathbb{C}/\ |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{4}\}$ sobre $U=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|<1\}$.

Solución ▼ [005136]

25 105.01 División euclidiana

Ejercicio 667

Efectuar la división euclidiana del polinomio $P=X^5-X^4+2X^3+X^2+4$ por $Q=X^2-1$. El mismo ejercicio para $P=X^4-2X\cos(2\varphi)+1$ y $Q=X^2-2X\cos(\varphi)+1$. [000356]

Ejercicio 668

Sea P un polinomio. Sabiendo que el resto de la división euclidiana de P por $X-a$ es 1 y el de la división de P por $x-b$ es -1, $(a\neq b)$, ¿cuál es el resto de la división euclidiana de P por $(X-a)(X-b)$? [000357]

Ejercicio 669

Calcular el resto de la división euclidiana del polinomio X^n por el polinomio $Q=X^2+1$ x^n+X+1 por el polinomio $(X-1)^2$. [000358]

Ejercicio 670

¿Para qué valores de m el polinomio $P=(X+1)^m-X^m-1$ es divisible por el polinomio $Q=X^2+X+1$? [000359]

Ejercicio 671

Demostrar que el polinomio $P(X)-X$ divide el polinomio $P(P(X))-X$. [000360]

Ejercicio 672

Determinar $a, b \in \mathbb{Z}$ de manera que el polinomio $aX^{n+1} - bX^n + 1$ sea divisible por el polinomio $(X-1)^2$. Calcular entonces el cociente de los dos polinomios. [000361]

Ejercicio 673

¿Existe un polinomio P de grado 7 tal que $(X-1)^4$ divide $P(X)+1$ y $(X+1)^4$ divide $P(X)-1$? [000362]

Ejercicio 674

Efectuar divisiones por potencias crecientes de :

1. $P = 1$ por $Q = 1 - X$, de orden n,
2. $P = 1 + X$ por $Q = 1 + X^2$ de orden 5,
3. $P = X - \dfrac{X^3}{6} + \dfrac{X^5}{12}$ por $Q = 1 - 2X^2 + X^4$ de orden 5.

[000363]

Ejercicio 675

Efectuar las divisiones euclidianas de

$$\begin{aligned} &3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ por } X^2 + 2X + 3, \\ &3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ por } X^3 + X + 2, \\ &X^4 - X^3 + X - 2 \text{ por } X^2 - 2X + 4. \end{aligned}$$

Solución ▼ [000364]

Ejercicio 676

En $\mathbb{C}[X]$, efectuar las divisiones euclidianas de

$$\begin{aligned} &X^2 - 3iX - 5(1+i) \text{ por } X - 1 + i, \\ &4X^3 + X^2 \text{ por } X + 1 + i. \end{aligned}$$

[000365]

Ejercicio 677

Efectuar la división de acuerdo a las potencias crecientes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ por } X^2 + X + 1 \text{ de orden 2.}$$

Solución ▼ [000366]

Ejercicio 678

Sean a y b dos números complejos distintos, m y n dos enteros naturales. Demostrar que si los polinomios $(X-a)^m$ y $(X-b)^n$ dividen un polinomio P, entonces el polinomio $(X-a)^m(X-b)^n$ divide P. [000367]

Ejercicio 679

Para $n \in \mathbb{N}$, ¿cuál es el resto de la división de $x^n + X + b$ por $(X-a)^2$? [000368]

Ejercicio 680

Para $n \in \mathbb{N}$, demostrar que el polinomio $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ es divisible por X^2-X+1. Hallar el cociente si $n=2$. [000369]

Ejercicio 681

Encontrar todos los polinomios P tales que $P+1$ sea divisible por $(X-1)^4$ y $P-1$ por $(X+1)^4$.

Indicaciones. Comenzar por encontrar una solución particular P_0, con uno de los siguientes métodos :

1. a partir de la relación de Bézout entre $(X-1)^4$ y $(X+1)^4$;
2. considerando el polinomio derivada P_0' y buscando un polinomio de grado minimal.

Demostrar que P sirve si y solo si el polinomio $P-P_0$ es divisible por $(X-1)^4(X+1)^4$, y deducir todas las soluciones del problema.

Solución ▼ Vidéo ■ [000370]

Ejercicio 682

Efectuar la división de $A = X^6-2X^4+X^3+1$ por $B = X^3+X^2+1$:

1. Siguiendo las potencias decrecientes.
2. De orden 4 (es decir, tal que el resto es divisible por X^5) según potencias crecientes.

Solución ▼ [000371]

Ejercicio 683

Determinar a y b en $\mathbb{R}$ tales que X^2+2 divide $X^4+X^3+aX^2+bX+2$. [000372]

Ejercicio 684

Determinar el resto de la división euclidiana de $(\operatorname{sen} aX+\cos a)^n$ por X^2+1. [000373]

Ejercicio 685

Sea P un polinomio cuyo resto de la división euclidiana por $X-1$ es 7 y por $X+5$ es 3. ¿Cuál es el resto de la división euclidiana de P por X^2+4X-5 ? [000374]

Ejercicio 686

Efectuar la división euclidiana de $X^5-7X^4-X^2-9X+9$ por X^2-5X+4.

Solución ▼ [000375]

Ejercicio 687

Sea $n \geqslant 1$. Determinar el resto de la división euclidiana de $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ por $(X-1)^2$. [000376]

Ejercicio 688

Sean $P, Q \in K[X]$ tales que X^2+X+1 divide $P(X^3)+XQ(X^3)$. Demostrar que $P(1)=Q(1)=0$. ¿Recíproco ?

[000377]

Ejercicio 689

¿Cuáles son los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$ tales que P' divide P ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000378]

Ejercicio 690 Descomposición en potencias crecientes

Sea $A \in K[X]$ de grado > 0. Demostrar que para todo polinomio $P \in K_n[X]$, existen polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_n$ únicos verificando :

$$\begin{cases} \operatorname{grad} P_i < \operatorname{grad} A \\ P = P_0 + P_1 A + \cdots + P_n A^n. \end{cases}$$

[003196]

Ejercicio 691 Linealidad del resto y del cociente

Sea $B \in K[X]$ de grado $n > 0$. Se consideran las aplicaciones :

$$\Phi : K[X] \to K_{n-1}[X], \quad P \mapsto R$$

y

$$\Psi : K[X] \to K[X], \quad P \mapsto Q, \text{ con } P = QB + R.$$

1. Demostrar que Φ y Ψ son lineales. Determinar sus núcleos y sus images. Determinar un contra-ejemplo para el recíproco.
2. Simplificar $\Phi(P_1 P_2)$.

[003197]

Ejercicio 692 Endomorfismo $P \mapsto AP \bmod B$

Sean $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$, y $\varphi : E \to E, P \mapsto$ resto de la división euclidiana de AP por B. Determinar $\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$.

Solución ▼ [003198]

Ejercicio 693 Congruencias

Sean $P \in K[X]$, $a, b \in K$ distintos, y $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

1. ¿Cuál es el resto de la división euclidiana de P por $(X-a)(X-b)$?
2. Encontrar el resto de la división euclidiana de $(\cos\theta + X \operatorname{sen}\theta)^n$ por X^2+1.

Solución ▼ [003199]

Ejercicio 694 Congruencias

Determinar los polinomios $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ divisibles por $X+1$ y cuyos restos de las divisiones por $X+2, X+3, X+4$ son iguales.

Solución ▼ [003200]

Ejercicio 695 Cálculo de mcd

Calcular el mcd de P y Q, para :

1. $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$, $Q = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $P = X^4 - 10X^2 + 1$, $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$
3. $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$, $Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

Solución ▼ [003201]

Ejercicio 696 Coeficientes de Bézout

Demostrar que los polinomios P y Q siguientes son primos entre sí. Encontrar $U, V \in K[X]$ tales que $UP + VQ = 1$.

1. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$, $Q = X^2 + X + 1$
2. $P = X^3 + X^2 + 1$, $Q = X^3 + X + 1$

Solución ▼ [003202]

Ejercicio 697 División de $(X+1)^n - X^n - 1$ por $X^2 + X + 1$

Determinar el resto de la división euclidiana de $(X+1)^n - X^n - 1$ por $X^2 + X + 1$.

Solución ▼ [003203]

Ejercicio 698 Ensi P 90

¿Para qué $n \in \mathbb{N}$ el polinomio $(1+X^4)^n - X^n$ es divisible por $1 + X + X^2$ en $\mathbb{R}[X]$?

Solución ▼ [003204]

Ejercicio 699 División de $(X-2)^2 n + (X-1)^n - 1$ por $(X-1)(X-2)$

Sea $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

1. Demostrar que P_n es divisible por $X - 1$ y por $X - 2$. Se denota Q_1 y Q_2 los cocientes correspondientes.
2. Demostrar que P_n es divisible por $(X-1)(X-2)$ y el cociente es $Q_2 - Q_1$.
3. Demostrar que este cociente es igual a :
$$\Big((X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \cdots - (X-2) + 1\Big) + \Big((X-1)^{n-2} + (X-1)^{n-3} + \cdots + (X-1) + 1\Big).$$

Solución ▼ [003205]

Ejercicio 700 Cálculo de residuos

Encontrar los restos de las divisiones euclidianas :

1. de X^{50} por $X^2 - 3X + 2$.
2. de $\left(X + \sqrt{3}\right)^{17}$ por $X^2 + 1$.
3. de $X^8 - 32X^2 + 48$ por $\left(X - \sqrt{2}\right)^3$.

Solución ▼ [003206]

Ejercicio 701 Divisibilidad

Encontrar $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que X^2+X+1 divide $x^5+\lambda X^3+\mu X^2+1$.

Solución ▼ [003207]

Ejercicio 702 congruencias

Sea $P \in K[X]$ tal que los restos de las divisiones de P por X^2+1 y X^2-1 valen respectivamente $2X-2$ y $-4X$. ¿Cuál es el resto de dividir P entre X^4-1 ?

Solución ▼ [003208]

Ejercicio 703 $\operatorname{mcd}(X^n-1, X^m-1)$

Sean $m,n \in \mathbb{N}^*$. Determinar $\operatorname{mcd}(X^n-1, X^m-1)$.

Solución ▼ [003209]

Ejercicio 704 Grado minimal en la fórmula de Bézout

Sean $P,Q \in K[X]$ no nulos y $D = \operatorname{mcd}(P,Q)$.

1. Demostrar que existe $U,V \in K[X]$ únicos tales que : $\begin{cases} UP+VQ=D \\ \operatorname{grad} U < \operatorname{grad} Q - \operatorname{grad} D \\ \operatorname{grad} V < \operatorname{grad} P - \operatorname{grad} D. \end{cases}$
2. Demostrar que el método de divisiones euclidianas proporciona U y V.

Solución ▼ [003210]

Ejercicio 705 Aplicación $(U,V) \mapsto UA+VB$

Sean $A,B \in K[X]$, $p = \operatorname{grad} A$, $q = \operatorname{grad} B$. Se considera la aplicación :

$$\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X], \quad (U,V) \mapsto UA+VB$$

Demostrar que : $A \wedge B = 1 \iff \Phi$ es biyectiva. [003211]

Ejercicio 706 $\operatorname{mcd}(P(X),P(-X))$ y $\operatorname{mcm}(P(X),P(-X))$

Sea $P \in K[X]$. Demostrar que $\operatorname{mcd}(P(X),P(-X))$ y $\operatorname{mcm}(P(X),P(-X))$ son pares o impares. [003212]

Ejercicio 707 $A \circ P | B \circ P \Rightarrow A|B$

Sean $A,B,P \in K[X]$, con P no constante. Demostrar que si $A \circ P$ divide $B \circ P$, entonces A divide B. [003213]

Ejercicio 708 ***

Hacer la división euclidiana de $P = \operatorname{sen} aX^n - \operatorname{sen}(na)X + \operatorname{sen}((n-1)a)$ por $Q = X^2 - 2X\cos a + 1$, a real dado.

Solución ▼ [005323]

Ejercicio 709

1. Efectuar la división euclidiana de A por B :
   (a) $A=3X^5+4X^2+1,\ B=X^2+2X+3$
   (b) $A=3X^5+2X^4-X^2+1,\ B=X^3+X+2$
   (c) $A=X^4-X^3+X-2,\ B=X^2-2X+4$
   (d) $A=X^5-7X^4-X^2-9X+9,\ B=X^2-5X+4$
2. Efectuar la división de acuerdo a las potencias crecientes de A por B de orden k (es decir, tal que el resto es divisible por X^{k+1}) :
   (a) $A=1-2X+X^3+X^4,\ B=1+2X+X^2,\ k=2$
   (b) $A=1+X^3-2X^4+X^6,\ B=1+X^2+X^3,\ k=4$

Solución ▼ Vidéo ■ [006955]

Ejercicio 710

¿Bajo qué condición en $a,b,c\in\mathbb{R}$ el polinomio x^4+aX^2+bX+c es divisible por X^2+X+1 ?

Solución ▼ Vidéo ■ [006956]

26 105.02 Mcd

Ejercicio 711

Calcular $\mathrm{mcd}(P,Q)$ cuando :

1. $P=X^3-X^2-X-2$ y $Q=X^5-2X^4+X^2-X-2$,
2. $P=X^4+X^3-2X+1$ y $Q=X^3+X+1$.

Solución ▼ [000379]

Ejercicio 712

Determinar el mcd de los siguientes polinomios :
1. $x^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ y X^4+2X^3+X+2,
2. $x^4+X^3-3X^2-4X-1$ y X^3+X^2-X-1,
3. $x^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+3$ y $X^4+2X^3+2X^2+X+1$.

Solución ▼ [000380]

Ejercicio 713

Determinar $A,B\in\mathbb{R}[X]$ tales que $(X^3+1)A+(X^2+X+1)B=1$. [000381]

Ejercicio 714

Demostrar que existen dos polinomios : U,V, verificando : $(\star)$ $(X-1)^nU+X^nV=1$. Determinar U_1 y V_1 de grado estrictamente inferior a n, satisfaciendo esta igualdad. Deducir todos los polinomios U,V verificando $(\star)$. [000382]

Ejercicio 715

Sean P,Q dos polinomios primos entre sí.

1. Demostrar que entonces P^n y Q^m son primos entre sí, donde n, m son dos enteros positivos.
2. Demostrar también que $P+Q$ y PQ son primos entre sí.

[000383]

Ejercicio 716

Sea n un entero positivo.

1. Determinar el mcd de los polinomios $(X^n - 1)$ y $(X-1)^n$.
2. Para $n = 3$ demostrar que existe un par de polinomios (U, V) tal que $(X^3-1)U + (X-1)^3 V = X - 1$. Dar uno.

[000384]

Ejercicio 717

Demostrar que los elementos X^2+X, X^2-X, X^2-1 de $\mathbb{R}[X]$ son primos entre sí, pero no son dos en dos primos entre sí. [000385]

Ejercicio 718

Encontrar todos los polinomios U y V de $\mathbf{R}[X]$ tales que $AU+BV$ sea un mcd de A y B, con $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ y $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$. [000386]

Ejercicio 719

Calcular el mcd D de polinomios A y B definidos a continuación. Encontrar los polinomios U y V tales que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad$ y $\quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X \quad$ y $\quad B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Solución ▼ [000387]

Ejercicio 720

Encontrar el mcd de los tres polinomios :

$$A = X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 2, \quad B = X^2 + 3X + 2, \quad C = X^3 + 2X^2 + X + 2.$$

[000388]

Ejercicio 721

Sean los polinomios de $\mathbb{R}[X]$:

$$A = (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3, \quad B = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1), \quad C = (X+3)(X+2)(X^2+1)^2.$$

1. ¿Cuántos divisores normalizados tiene A y B? y C?
2. Escribir el mcd y mcm de A y B.
3. Escribir el mcd y mcm de los tres polinomios A, B y C.

[000389]

Ejercicio 722

1. Encontrar el mcd de $X^{24}-1$ y $X^{15}-1$; el mcd de $X^{280}-1$ y $X^{60}-1$.
2. Demostrar que cualesquiera que sean los enteros positivos b y q, X^b-1 divide $X^{bq}-1$. Deducir que el resto de la división de X^a-1 por x^b-1 es X^r-1, donde r es el resto de la división en $\mathbb{N}$ de a por b. ¿Cuál es entonces el mcd de X^a-1 y X^b-1 ? Aplicación : Encontrar el mcd de $X^{5400}-1$ y $X^{1920}-1$.
3. P es cualquier polinomio de $\mathbb{C}[X]$, y a y b dos enteros naturales, ¿cuál es el mcd de P^a-1 y P^b-1 ? Indicación : Usar el teorema de Bézout en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{C}[X]$.

[000390]

Ejercicio 723

Sea $A \in \mathbb{C}[X]$ y $B \in \mathbb{C}[X]$.

1. ¿Se tiene $\operatorname{mcd}(A,B)=1 \iff \operatorname{mcd}(A+B,AB)=1$?
2. ¿Se tiene $\operatorname{mcd}(A,B)=\operatorname{mcd}(A+B,AB)$?

[000391]

Ejercicio 724

Sea n un entero estrictamente positivo.

1. Demostrar que existe un único par de polinomios P y Q de grado estrictamente menores que n tales que $(1-X)^nP(X)+X^nQ(X)=1$.
2. Demostrar que $P(1-X)=Q(X)$ y $Q(1-X)=P(X)$.
3. Demostrar que existe una constante a tal que

$$(1-X)P'(X)-nP(X)=aX^{n-1}.$$

   Deducir los coeficientes de P y el valor de a.

Respuesta : $a=-(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}$. [000392]

Ejercicio 725

Determinar los polinomios $P \in \mathbb{R}[X]$ y $Q \in \mathbb{R}[X]$, primos entre sí, tales que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$. Deducir que la ecuación $x^2+y^2=z^2$ tiene una infinidad de soluciones (no proporcionales) en $\mathbb{Z}$. [000393]

Ejercicio 726

1. Demostrar que los polinomios $X-1$ y $X-2$ son primos entre sí y deducir $d=\operatorname{mcd}((X-1)^2,(X-2)^3)$, y los polinomios U y V tales que

$$U(X-1)^2+V(X-2)^3=d.$$

2. Determinar el polinomio P, de grado minimal, tal que el resto de la división euclidiana de P por $(X-1)^2$ es $2X$ y el resto de la división euclidiana de P por $(X-2)^3$ es $3X$.

[000394]

Ejercicio 727

Demostrar que los polinomios complejos $P = X^{1998} + X + 1$ y $Q = X^5 + X + 1$ son primos entre sí. [000395]

Ejercicio 728 **IT

Determinar el MCD de $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ y $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

Solución ▼ [005317]

Ejercicio 729

1. Determinar el mcd de los siguientes polinomios :
   (a) $X^3 - X^2 - X - 2$ y $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$
   (b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ y $X^3 + X + 1$
   (c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ y $X^4 + 2X^3 + X + 2$
   (d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ y $X^n - nX + n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
2. Calcular el mcd D de polinomios A y B abajo. Encontrar de polinomios U y V tales que $AU + BV = D$.
   (a) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ y $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
   (b) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ y $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006957]

Ejercicio 730

1. Demostrar que si A y B son dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, luego el cociente y el resto de la división euclidiana de A por B, así como $\operatorname{mcd}(A,B)$, son también con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
2. Sea $a,b,c \in \mathbb{C}^*$ distintos, y $0 < p < q < r$ enteros. Demostrar que si $P(X) = (X-a)^p(X-b)^q(X-c)^r$ es a coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces $a,b,c \in \mathbb{Q}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006958]

27 105.03 Raíz, descomposición en factores irreducibles

Ejercicio 731

1. Demostrar que el polinomio $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admite una única raíz real y que esta es irracional.
2. Demostrar que el polinomio $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ tiene una raíz racional (que se va a calcular). Deducir su descomposición en producto de factores irreducibles en $\mathbb{C}[X]$.

[000396]

Ejercicio 732

Sea $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros primos entre sí (es decir tales que los únicos divisores comunes a todos los a_i sean -1 y 1). Demostrar que si $r = \frac{p}{q}$, con p y q el primos entre sí es una raíz racional de P, entonces p divide a_0 y q divide a_n. [000397]

Ejercicio 733

Sea $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado n.

1. Demostrar que si P es irreducible en $\mathbb{Q}$, entonces solo tiene raíces simples en $\mathbb{C}$.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ una raíz de P, de multiplicidad estrictamente mayor que $\frac{n}{2}$. Demostrar que λ es racional.

[000398]

Ejercicio 734

Demostrar que el polinomio $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admite una raíz múltiple. Aplicación : Determinar las raíces del polinomio $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$. [000399]

Ejercicio 735

Sea $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Verificar que i es raíz de P.
2. Deducir entonces la descomposición en producto de factores irreducibles de P sobre $\mathbb{R}[X]$
3. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$ los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles : $P = X^4 + X^2 + 1,\ Q = X^{2n} + 1,\ R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1,\ S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (se buscan las raíces dobles de S).

[000400]

Ejercicio 736

Descomponer en $\mathbb{R}[X]$, sin determinar sus raíces, el polinomio $P = X^4 + 1$, como producto de factores irreducibles.

Solución ▼ [000401]

Ejercicio 737

Para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar que $X - a$ divide $X^n - a^n$. [000402]

Ejercicio 738

Descomponer $X^{12} - 1$ como producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}[X]$. [000403]

Ejercicio 739

Demostrar que B divide A, donde :

$$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p} \text{ y } B = X^2 + X + 1,$$
$$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1 \text{ y } B = X(X+1)(2X+1),$$
$$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \text{ y } B = (X-1)^2.$$

[000404]

Ejercicio 740

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$ y $n \in \mathbb{Z}$; se denota $m = P(n)$; $(\text{grad}(P) \geqslant 1)$.

1. Demostrar que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divide $P(n+km)$.
2. Demostrar que no existe polinomio P en $\mathbb{Z}[X]$, no constante, tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ sea primo.

[000405]

Ejercicio 741

Sea P un polinomio de $\mathbb{R}[X]$ tal que $P(x) \geqslant 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tales que $P = S^2 + T^2$ (se utiliza la factorización en $\mathbb{C}[X]$). *Indicaciones :*

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, determinar $c, d \in \mathbb{R}$ tales que : $ab = c^2 - d^2$, verificar que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.
2. Resolver el problema para P de grado 2.
3. Concluir.

[000406]

Ejercicio 742

Sea $\theta \in \mathbb{R}$; se supone $\operatorname{sen} n\theta \neq 0$. Determinar el raíces del polinomio $P = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \operatorname{sen} k\theta \, X^k$. Verificar que estas raíces son todos reales. [000407]

Ejercicio 743

Sea $a \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ y $Q \in \mathbb{C}[X]$, primos entre sí. Se supone que a es raíz doble de $P^2 + Q^2$. Demostrar que a es raíz de $P'^2 + Q'^2$. [000408]

Ejercicio 744

Para $n \in \mathbb{N}^*$, ¿cuál es el orden de multiplicidad de 2 como raíz del polinomio

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1} ?$$

Solución ▼ [000409]

Ejercicio 745

¿Para qué valores de a el polinomio $(X+1)^7 - X^7 - a$ admite una raíz múltiple real ?

Solución ▼ Vidéo ■ [000410]

Ejercicio 746

Demostrar que el polinomio $X^3 + 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser este polinomio en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$. [000411]

Ejercicio 747

En $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$, descomponer los siguientes polinomios en factores irreducibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Solución ▼ [000412]

Ejercicio 748

¿Cuál es la descomposición de $X^6 + 1$ en factores irreducibles en $\mathbb{C}[X]$? ¿En $\mathbb{R}[X]$? [000413]

Ejercicio 749

Sea P el polinomio $X^4 + 2X^2 + 1$. Determinar las multiplicidades de raíces i y $-i$, de dos maneras diferentes : ya sea descomponiendo P en $\mathbb{C}[X]$, ya sea usando el polinomio derivada de P. [000414]

Ejercicio 750

Sea el polinomio $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Demostrar que j es raíz de este polinomio. Determinar su orden de multiplicidad.
2. ¿Qué consecuencia se puede sacar de la paridad de P ?
3. Descomponer P en factores irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

[000415]

Ejercicio 751

Sea E el polinomio de tercer grado : $aX^3 + bX^2 + cX + d$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, y sean x_1, x_2, x_3 sus tres raíces en $\mathbb{C}$. Encontrar un polinomio teniendo por raíces x_1x_2, x_2x_3 y x_3x_1. [000416]

Ejercicio 752

Sean x_1, x_2, x_3 las raíces de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calcular $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. [000417]

Ejercicio 753

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijado. Demostrar que existe un número finito de polinomios mónicos de grado n, con coeficientes enteros que tienen todas sus raíces un módulo inferior o igual a 1. [000418]

Ejercicio 754

Sea $n \geqslant 2$ y $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. ¿$P_n$ tiene raíz doble ? [000419]

Ejercicio 755

Resolver las ecuaciones :

1. $P'P'' = 18P$, donde $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$, donde $P \in \mathbb{C}[X]$.

[000420]

Ejercicio 756

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ dividido en $\mathbb{R}$ i.e. con raíces simples.

1. Demostrar que lo mismo es cierto para P'.
2. Demostrar que el polinomio P^2+1 solo tiene raíces simples en $\mathbb{C}$.

[000421]

Ejercicio 757

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. ¿Cuál es el grado de P?
2. Factorizar P en $\mathbb{C}[X]$.
3. Demostrar que $\forall\, p \in \mathbb{N}^*\ \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2p+1}) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

[000422]

Ejercicio 758

Factorizar en $\mathbb{R}[X]$: 1. X^6+1. 2. $X^9+X^6+X^3+1$.

Solución ▼ [000423]

Ejercicio 759 Factorización de X^n-1

Factorizar X^n-1 sobre $\mathbb{C}$.

1. Deducir $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. 2. Calcular igualmente $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)$.
3. Se denota $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$, calcular $\displaystyle\prod_{0\leqslant k,\ell<n, k\neq\ell} (\omega^k - \omega^\ell)$.

Solución ▼ [003214]

Ejercicio 760 Mines MP 1999

Demostrar que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1) = 2(1-\cos(n\theta))$, con $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Solución ▼ [003215]

Ejercicio 761 Raíces de j y j^2

Demostrar que si $p \leqslant n$, entonces $X^{2^p} + X^{2^{p-1}} + 1$ divide $x^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$. [003216]

Ejercicio 762 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divide $X^{2n} - 2X^n\cos(n\theta) + 1$

Demostrar que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divide $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$. Para $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, encontrar el cociente.

Solución ▼ [003217]

Ejercicio 763 $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divide $X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Demostrar que $X^2-2X\cos\theta+1$ divide $x^{n+1}\cos(n-1)\theta-X^n\cos n\theta-X\cos\theta+1$, luego determinar el cociente.

Solución ▼ [003218]

Ejercicio 764 X^8+X^4+1 divide $X^{8n}+pX^{4n}+q$

Dar una CNS en $p,q\in\mathbb{C}$, para que X^8+X^4+1 divida $X^{8n}+pX^{4n}+q$ ($n\in\mathbb{N}^*$ fijado).

Solución ▼ [003219]

Ejercicio 765 Raíces racionales

Factorizar $P(X)=3X^4+11X^3+20X^2+7X-5$, sabiendo que existen raíces racionales.

Solución ▼ [003220]

Ejercicio 766 Ecuación de grado 4 tal que $x_1x_2=5$

Encontrar las raíces de $P(X)=X^4-3X^3+6X^2-15X+5$ sabiendo que dos raíces, x_1 y x_2, verifican : $x_1x_2=5$. (Introducir el polinomio $Q=X^4P(5/X)$).

Solución ▼ [003221]

Ejercicio 767 Raíces múltiples

Factorizar $P=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$ sabiendo que admite una raíz triple.

Solución ▼ [003222]

Ejercicio 768 Búsqueda de una raíz triple

Sea $P=X^5+aX^2+15X-6i$. Encontrar $a\in\mathbb{C}$ tal que P tiene una raíz triple en $\mathbb{C}$. Factorizar entonces P.

Solución ▼ [003223]

Ejercicio 769 Ensi P 90

Dar una condición en λ, para que la ecuación : $x^4-2x^3+\lambda x^2+2x-1=0$ tiene al menos una raíz triple.

Solución ▼ [003224]

Ejercicio 770 $x_1+x_2=1$

Sean $p,q\in\mathbb{C}$ y $P(X)=X^5+pX+q$. Dar una CNS en p y q de modo que dos de las raíces de P tengan por suma 1.

Solución ▼ [003225]

Ejercicio 771 Factorización

Factorizar

$$1-\frac{X}{1!}+\frac{X(X-1)}{2!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

Solución ▼ [003226]

Ejercicio 772 $X-1\mid P(X^n)\Rightarrow X-1\mid P$

Sean $P,Q\in K[X]$.

1. Demostrar que si $P(X^n)$ es divisible por $X-1$, entonces P es divisible por $X-1 \quad (n\in\mathbb{N})$.
2. Demostrar que si $P(X^3)+XQ(X^3)$ es divisible por X^2+X+1, entonces P y Q son divisibles por $X-1$.

[003227]

Ejercicio 773 Raíces de $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(\operatorname{sen} k\theta)X^k$

Sea $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} n\theta\neq 0$. Demostrar que el polinomio $P=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(\operatorname{sen} k\theta)X^k$ tiene todas sus raíces reales.

Solución ▼ [003228]

Ejercicio 774

Demostrar que $1+X+X^n$ solo tiene raíces simples. [003229]

Ejercicio 775 P' divide P

¿Cuáles son los polinomios $P\in K[X]$ tales que P' divide P?

Solución ▼ [003230]

Ejercicio 776 Ecuaciones funcionales

Encontrar todos los polinomios $P\in\mathbb{C}[X]$ tales que ...

1. $P(X^2)=P(X-1)P(X+1)$.
2. $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.
3. $P(X)P(X+2)+P(X^2)=0$.

Solución ▼ [003231]

Ejercicio 777 P, con raíces reales simples => P^2+a^2, con raíces simples

Sea $P\in\mathbb{R}[X]$, donde todas las raíces son reales.

1. Demostrar que las raíces de P' también son reales.
2. Deducir que : $\forall a\in\mathbb{R}^*$, las raíces de P^2+a^2 son simples.

[003232]

Ejercicio 778 P y Q tienen mismo módulo

Sean $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tales que : $\forall z\in\mathbb{C},\ |P(z)|=|Q(z)|$. Demostrar que existe $u\in\mathbb{C},|u|=1$ tal que $P=uQ$.

Solución ▼ [003233]

Ejercicio 779 Valor medio

Sean $z_0,z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ tales que : $\forall P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, se tiene $P(z_0)=\dfrac{P(z_1)+\cdots+P(z_n)}{n}$.

Se denota $\Phi(X)=\prod\limits_{i=1}^{n}(X-z_i)$.

1. Calcular $\dfrac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k}$.
2. Deducir que $\Phi(X) = \dfrac{(X - z_0)\Phi'(X)}{n} + \Phi(z_0)$.
3. Demostrar que $z_1, \dots, z_n$ son los vértices de un polígono regular de centro z_0.
4. ¿Recíproco ?

Solución ▼ [003234]

Ejercicio 780 $P(x) \neq 14$

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $P(x) = 7$, para al menos 4 valores distintos $x \in \mathbb{Z}$. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{Z}$, se tiene $P(x) \neq 14$. [003235]

Ejercicio 781 Número algebraico racional

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Se dice que α es *algebraico* si existe un polinomio $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$. El polinomio unitario de grado menor verificando $P(\alpha) = 0$ es llamado : *polinomio minimal de* α.

1. Sea α algebraico de polinomio minimal P. Demostrar que P es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y que α es raíz simple de P.
2. Sea α algebraico, y $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$. Se supone que la multiplicidad de α en P es estrictamente mayor que $\frac{1}{2}\operatorname{grad} P$. Demostrar que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

[003236]

Ejercicio 782 $P(\sqrt{2}) = 0$

Sea $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P\big(\sqrt{2}\big) = 0$. Demostrar que $-\sqrt{2}$ es también raíz de P, con la misma multiplicidad que $\sqrt{2}$. [003237]

Ejercicio 783 Polinomio minimal de $2\cos(2\pi/7)$

Demostrar que $x = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ es raíz de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. ¿Cuáles son las otros raíces ?

Solución ▼ [003238]

Ejercicio 784 Raíces reales simples

Sea $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ cuyas raíces son reales simples.

1. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.
2. Demostrar que : $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Solución ▼ [003239]

Ejercicio 785 Método de Ferrari

Sea $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$. Encontrar $Q \in \mathbb{R}[X]$ tal que $\operatorname{grad}(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, y $P - Q^2$ tiene una raíz doble. Factorizar entonces P sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [003240]

Ejercicio 786 Mcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ raíz común

Sean $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Demostrar que P y Q son primos entre sí, si y solo si P y Q no tienen raíces comunes en $\mathbb{C}$.

[003241]

Ejercicio 787 Mines MP 2001

Sea K un cuerpo de característico p.

1. Demostrar que $\sigma: x \mapsto x^p$ es un morfismo de cuerpos.
2. Demostrar que σ es sobreyectiva si y solo si todo polinomio $P \in K[X]$ irreducible verifica $P' \neq 0$.

Solución ▼ [003242]

Ejercicio 788 Central MP 2001

Sea $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.

Para $x \in \mathbb{R}$ se denota $V(x)$ el número de cambios de signo en la sucesión $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ acordando eliminar los términos nulos. Sean $\alpha < \beta$ dos reales no raíces de P. Demostrar que el número de raíces de P en $[\alpha, \beta]$, contados con su orden de multiplicidad, tiene la misma paridad que $V(\alpha) - V(\beta)$ y que $V(\alpha) - V(\beta) \geqslant 0$.

Solución ▼ [003243]

Ejercicio 789 X MP* 2004

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ de grado d, donde todas las raíces son de módulo estrictamente menor a 1. Para $\omega \in \mathbb{U}$ se denota $\overline{P}$ el polinomio cuyos coeficientes son los conjugados de los de P y $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Demostrar que las raíces de Q son de módulo 1.

Solución ▼ [003244]

Ejercicio 790 X MP* 2005

Sean $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $|a_0| + \dots + |a_{n-1}| < a_n$. Sea $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos(nx)$. Demostrar que los ceros de f son todos reales (es decir, $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $f(x) \neq 0$).

Solución ▼ [003245]

Ejercicio 791 Factorización en $\mathbb{R}$ de $X^8 + X^4 + 1$

Factorizar $X^8 + X^4 + 1$ sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [003246]

Ejercicio 792 Polinomio irreducible en $\mathbb{Q}$

Demostrar que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

Solución ▼ [003247]

Ejercicio 793 Polinomios positivos en $\mathbb{R}$

Sea $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $\exists\ Q, R \in \mathbb{R}[X]$, donde $P = Q^2 + R^2\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{E}$ es estable bajo la multiplicación.
2. Demostrar que $\mathscr{E} = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.

3. (Central MP 2000, con Maple) Sea $P = 65X^4 - 134X^3 + 190X^2 - 70X + 29$, encontrar A y B en $\mathbb{Z}[X]$ tales que $P = A^2 + B^2$.

Solución ▼ [003248]

Ejercicio 794 Lema de Gauss

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$, se llama *contenido de P* el mcd de los coeficientes de P (notación : cont(P)).

1. Sean $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, con $\mathrm{cont}(P) = 1$, y $R = PQ$. Sea p un factor primo de cont(R).
   (a) Si p es primo con el coeficiente constante de P, demostrar que p divide todos los coeficientes de Q.
   (b) Si p divide el coeficiente constante de P, se vuelve al caso precedente.
   (c) Deducir que cont(Q) = cont(R).
2. Cuando $\mathrm{cont}(P) \neq 1$, encontrar cont(PQ).
3. Aplicación : Sea $R \in \mathbb{Z}[X]$, y $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tales que $R = PQ$. Demostrar que existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proporcionales a P y Q y tales que $R = P_1Q_1$. (*Es decir : un polinomio con coeficientes enteros reducibles en $\mathbb{Q}$ es también reducible a $\mathbb{Z}$*)

[003249]

Ejercicio 795 Polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}$

Demostrar que $X^4 + X + 1$ y $X^6 + X^2 + 1$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[X]$. [003250]

Ejercicio 796 Polinomios irreducibles en $\mathbb{Z}$

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ distintos.

1. Demostrar que $(X - a_1)\cdots(X - a_n) - 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.
2. La misma pregunta para $(X - a_1)\cdots(X - a_n) + 1$, n impar.

Solución ▼ [003251]

Ejercicio 797 Criterio de irreductibilidad de Eisenstein

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0X^0$ y p un número primo tal que :

$$a_0 \equiv 0 \pmod p, \dots, a_{n-1} \equiv 0 \pmod p, \quad a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Demostrar que P es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

Solución ▼ [003252]

Ejercicio 798 Irreductilidad de $X^p - a$

Sea K un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$, $a \in K$ y $p \in \mathbb{N}$ primo. Demostrar que el polinomio $X^p - a$ es irreducible en K si y solo si no tiene raíz en K.

Indicación ▼ Solución ▼ [003253]

Ejercicio 799 **T

¿Para qué valores del entero natural n el polinomio $(X+1)^n - X^n - 1$ es divisible por $X^2 + X + 1$?

Solución ▼ [005318]

Ejercicio 800 ***

Sea P un polinomio con coeficientes reales tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Demostrar que existen dos polinomios R y S, con coeficientes reales tales que $P = R^2 + S^2$.

Solución ▼ [005319]

Ejercicio 801 ****I Teorema de LUCAS

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ de grado mayor o igual a 1. Demostrar que las raíces de P' son baricentros con coeficientes positivos de las raíces de P (se dice que las raíces de P' están en la envolvente convexa de las raíces de P). Indicación : calcular $\frac{P'}{P}$.

Solución ▼ [005324]

Ejercicio 802 ***

Encontrar todos los polinomios divisibles por su derivada.

Solución ▼ [005325]

Ejercicio 803 **T

Determinar $a \in \mathbb{C}$ tal que $P = X^5 - 209X + a$ admite dos ceros cuyo producto es 1.

Solución ▼ [005328]

Ejercicio 804 ***T

Sea $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant 5}$ la familia de las raíces de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calcular $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k + 2}{a_k - 1}$.

Solución ▼ [005329]

Ejercicio 805

Descomponer en producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}[X]$, el polinomio $X^6 - 2X^3 \cos a + 1$, donde a es un real dado en $[0, \pi]$.

Solución ▼ [005342]

Ejercicio 806

Formar una ecuación de sexto grado cuyas raíces son las $\operatorname{sen} \frac{k\pi}{7}$, donde $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, luego demostrar que estos seis números son irracionales.

Solución ▼ [005345]

Ejercicio 807

Determinar λ y μ complejos tales que los ceros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ están en progresión aritmética. Resolver luego la ecuación.

Solución ▼ [005349]

Ejercicio 808

Sean x_1, x_2, x_3 los ceros de X^3+2X-1. Calcular $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

Solución ▼ [005350]

Ejercicio 809

Sean $x_1,\dots,x_8$ los ceros de X^8+X^7-X+3. Calcular $\sum \frac{x_1}{x_2x_3}$ (168 términos).

Solución ▼ [005351]

Ejercicio 810

1. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ los siguientes polinomios :

   $a)$ X^3-3 $\quad b)$ $X^{12}-1$ $\quad c)$ X^6+1 $\quad d)$ $X^9+X^6+X^3+1$.

2. Factorizar los siguientes polinomios :

   $a)$ $X^2+(3i-1)X-2-i$ $\quad b)$ $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$.

Solución ▼ Vidéo ■ [006959]

Ejercicio 811

Encontrar todos los polinomios P que verifican la relación

$$P(X^2)=P(X)P(X+1).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006960]

Ejercicio 812

Sea $n\in\mathbb{N}$. Demostrar que existe un único $P\in\mathbb{C}[X]$ tal que

$$\forall z\in\mathbb{C}^* \qquad P\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{1}{z^n}$$

Demostrar entonces que todas las raíces de P son reales, simples, y pertenecen al intervalo $[-2,2]$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006961]

Ejercicio 813

1. Sea $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ un polinomio de grado $n\geqslant 1$, con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Demostrar que si P admite una raíz en $\mathbb{Z}$, entonces esta divide a_0.
2. ¿Los polinomios $X^3-X^2-109X-11$ y $X^{10}+X^5+1$ tienen raíces en $\mathbb{Z}$?

Solución ▼ Vidéo ■ [006962]

Ejercicio 814

Sean $a_0,\dots,a_n$ números reales dos a dos distintos. Para todo $i=0,\dots,n$, se establece

$$L_i(X)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

(los L_i son llamados *polinomios de interpolación de Lagrange*). Calcular $L_i(a_j)$. Sean $b_0, \dots, b_n$ números reales fijos. Demostrar que $P(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(X)$ es el único polinomio de grado menor o igual a n que verifica :

$$P(a_j) = b_j, \qquad \text{para todo } j = 0, \dots, n.$$

Aplicación. Encontrar el polinomio P de grado menor o igual que 3 tal que

$$P(0) = 1 \text{ y } P(1) = 0 \text{ y } P(-1) = -2 \text{ y } P(2) = 4.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006963]

28 105.04 Fracción racional

Ejercicio 815

Descomponer las siguientes fracciones racionales :

$\dfrac{3}{X^3+1}$ en $\mathbb{C}$, luego en $\mathbb{R}$,

$\dfrac{X^3}{X^3-1}$ en $\mathbb{R}$,

$\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ en $\mathbb{R}$,

$F(X) = \dfrac{1}{(X^3-1)^2}$ en $\mathbb{C}$, notando que $F(jX) = F(X)$,

$\dfrac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$ en $\mathbb{R}$,

$\dfrac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1}$ en $\mathbb{R}$,

$\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en $\mathbb{C}$, luego en $\mathbb{R}$,

$\dfrac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}$ en $\mathbb{R}$.

[000443]

Ejercicio 816

1. Descomponer $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
2. Descomponer $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
3. Descomponer $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
4. Descomponer $\dfrac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
5. Descomponer $\dfrac{X}{X^2-4}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
6. Descomponer $\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
7. Descomponer $\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
8. Descomponer $\dfrac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.

9. Descomponer $\dfrac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$.
10. Descomponer $\dfrac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en elementos simples sobre $\mathbb{C}$.
11. Descomponer $\dfrac{X+i}{X^2+i}$ en elementos simples sobre $\mathbb{C}$.
12. Descomponer $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ en elementos simples sobre $\mathbb{C}$.
13. Descomponer $\dfrac{X^2+1}{X^4+1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
14. Descomponer $\dfrac{X}{X^4+1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
15. Descomponer $\dfrac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
16. Descomponer $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
17. Descomponer $\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
18. Descomponer $\dfrac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
19. Descomponer $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.
20. Descomponer $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en elementos simples sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

Solución ▼ [000444]

Ejercicio 817

Descomponer en elementos simples $\Phi = \dfrac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000445]

Ejercicio 818

Descomponer en elementos simples $\Phi = \dfrac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000446]

Ejercicio 819

Descomponer en elementos simples $\Phi = \dfrac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3}$.

Solución ▼ [000447]

Ejercicio 820

Sean a y b dos reales distintos y $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. Usando la fórmula de Taylor en a, para $f(X) = (X-a)^n F(X)$, descomponer F en $\mathbb{R}$. [000448]

Ejercicio 821

Dar una CNS en $f \in \mathbb{C}(X)$, para que exista $g \in \mathbb{C}(X)$ tal que $f = g'$. [000449]

Ejercicio 822

Una aplicación se llama valoración $v : \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que : $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) :$ $v(a) = 1$

$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f) + v(g)$$
$$\forall (f,g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geqslant \min(v(f), v(g))$$

(con las convenciones obvias $k + \infty = \infty, \forall k \geqslant 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$, etc.) Determinar todas las valoraciones de $\mathbb{C}(X)$ y demostrar la fórmula (la suma de todas las valuaciones) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

[000450]

Ejercicio 823 Sustitución de fracciones

Sea $F \in K(X)$ no constante y $P \in K[X], P \neq 0$.

1. Demostrar que $P \circ F \neq 0$.
2. Demostrar que la aplicación $K(X) \to K(X), G \mapsto G \circ F$ es un morfismo inyectivo de álgebra.
3. ¿Bajo qué condiciones es sobreyectiva ?
4. Demostrar que todos los isomorfismos de cuerpo de $K(X)$ son de esta forma.

Solución ▼ [003270]

Ejercicio 824 Multiplicidad de polos

Sean $F, G_0, \dots, G_{n-1} \in K(X)$ tales que $F^n + G_{n-1}F^{n-1} + \dots + G_0 = 0$. Demostrar que el conjunto de polos de F está incluido en la unión de los conjuntos de los polos de los G_i. [003271]

Ejercicio 825 Conjunto de imágenes de una función racional

Sea $F \in \mathbb{C}(X)$. Estudiar $F(\mathbb{C} \setminus \{\text{polos}\})$.

Solución ▼ [003272]

Ejercicio 826 $F \circ G$ es un polinomio

Encontrar todos los pares $(F,G) \in \left(\mathbb{C}(X)\right)^2$ tales que $F \circ G \in \mathbb{C}[X]$ (utilizar el ejercicio 825).

Solución ▼ [003273]

Ejercicio 827 Fracciones invariantes

1. Sea $F \in \mathbb{C}(X)$ tal que $F(e^{2i\pi/n}X) = F(X)$. Demostrar que existe une único fracción $G \in \mathbb{C}(X)$ tal que $F(X) = G(X^n)$.

2. Aplicación : Simplificar $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}$.

Solución ▼ [003274]

Ejercicio 828 Fracciones invariantes

Sea $H = \{F \in K(X) \text{ tal que } F(X) = F\left(\frac{1}{X}\right)\}$.

1. Demostrar que : $F \in H \Leftrightarrow \exists\, G \in K(X)$ tal que $F(X) = G\left(X + \frac{1}{X}\right)$.
2. Demostrar que H es un subcuerpo de $K(X)$.
3. ¿Cuánto vale $\dim_H(K(X))$? Dar una base de $K(X)$ sobre H.

Solución ▼ [003275]

Ejercicio 829 Fórmula de Taylor

Sea $F \in K(X)$ definida en $a \in K$, demostrar que existe una fracción G_n definida en a tal que :

$$F(X) = F(a) + (X-a)F'(a) + \cdots + (X-a)^{n-1}\frac{F^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (X-a)^n G_n(X).$$

[003276]

Ejercicio 830 Derivada de $1/(x^2+1)$

Sea $F = \dfrac{1}{X^2+1}$. Demostrar que existe un polinomio $P_n \in \mathbb{Z}_n[X]$ tal que $F^{(n)} = \dfrac{P_n}{(X^2+1)^n}$. Demostrar que las raíces de P_n son reales y simples. [003277]

Ejercicio 831 Fracciones de grado negativo

Sea $A = \{F \in K(X) / \operatorname{grad} F \leqslant 0\}$. Demostrar que A es una sub-álgebra de $K(X)$. Determinar sus ideales.

Solución ▼ [003278]

Ejercicio 832 Descomposiciones prácticas de fracciones racionales

---

Elementos de 1era especie

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2-1)^5} =& \frac{1}{32(x-1)^5} - \frac{5}{64(x-1)^4} + \frac{15}{128(x-1)^3} - \frac{35}{256(x-1)^2} + \frac{35}{256(x-1)} \\
&- \frac{35}{256(x+1)} - \frac{35}{256(x+1)^2} - \frac{15}{128(x+1)^3} - \frac{15}{64(x+1)^4} - \frac{1}{32(x+1)^5} \\
\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} =& \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^3+x+1}{x^4(x-1)^3} =& -\frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^2} - \frac{17}{x} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{17}{x-1} \\
\frac{(x^2-x+1)^2}{x^2(x-1)^2} =& 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \\
\frac{x^2}{(x^2-1)^2} =& \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}
\end{aligned}$$

De tipo x^2+1

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x^2+1)^2} &= \frac{-1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\\
\frac{x}{(x^4-1)^2} &= \frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{16(x+1)^2}-\frac{1}{8(x+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{x}{4(x^2+1)}\\
\frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2} &= \frac{1}{4(x-1)}+\frac{1-x}{2(x^2+1)^2}-\frac{x+1}{4(x^2+1)}\\
\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2} &= 1+\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{2(x^2+1)^2}-\frac{x+1/4}{x^2+1}\\
\frac{x^6}{(x^2+1)(x-1)^3} &= x+3+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{5}{2(x-1)^2}+\frac{19}{4(x-1)}
\end{aligned}$$

De tipo x^2+x+1

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2(x^2-x+1)}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}\\
\frac{x^4+1}{x^4+x^2+1} &= 1+\frac{x}{2(x^2+x+1)}-\frac{x}{2(x^2-x+1)}\\
\frac{x^4+1}{x^2(x^2+x+1)^2} &= \frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+2}{x^2+x+1}\\
\frac{3x^5-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^6} &= -\frac{23x+6}{(x^2+x+1)^6}+\frac{13x+18}{(x^2+x+1)^5}+\frac{3x-11}{(x^2+x+1)^4}
\end{aligned}$$

Otros elementos de 2a especie

$$\begin{aligned}
\frac{x^8}{x^6-1} &= x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\\
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)\\
\frac{x}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)\\
\frac{1}{x^5+1} &= \frac{1}{5(x+1)}-\frac{1}{5}\left(\frac{\omega x-2}{x^2-\omega x+1}+\frac{\omega' x-2}{x^2-\omega' x+1}\right), \quad \omega=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \omega'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Raíces de la unidad

$$\begin{aligned}
\frac{x^n+1}{x^n-1} &= 1+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}, \quad \omega=\mathrm{e}^{2i\pi/n}\\
\frac{1}{x^n-1} &= \sum_{\substack{k=1\\2k\neq n}}^{n-1}\frac{2x\cos\alpha_k-2}{n(x^2-2x\cos\alpha_k+1)}+\frac{1}{n(x-1)}\ \left[-\frac{1}{n(x+1)}\text{ si n es par}\right], \quad \alpha_k=\frac{2k\pi}{n}\\
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-\omega^k} &= \frac{nx^{n-1}}{x^n-1}, \quad \omega=\mathrm{e}^{2i\pi/n}\\
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(x-\omega^k)^2} &= \frac{nx^{2n-2}+n(n-1)x^{n-2}}{(x^n-1)^2}, \quad \omega=\mathrm{e}^{2i\pi/n} \quad \text{(derivada)}
\end{aligned}$$

Polinomios de Chebyshev

$$\frac{1}{\cos(n\arccos x)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k \operatorname{sen}\beta_k}{x-\cos\beta_k}, \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$\tan(n\arctan x) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\2k\neq n-1}}^{n-1}\frac{1}{\cos^2\beta_k(\tan\beta_k - x)}\left[+\frac{x}{n}\text{ si } n \text{ es impar}\right], \quad \beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Diversos

$$\frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(x^2+1)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma_n^k}{2^{n+k}}\left(\frac{(-1)^k}{(x-1)^{n-k}} + \frac{(-1)^n}{(x+1)^{n-k}}\right)$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\Gamma_n^k}{2^{n+k}}\left(\frac{i^{k+n}}{(x-i)^{n-k}} + \frac{(-i)^{k+n}}{(x+i)^{n-k}}\right)$$

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}kC_n^k}{x+k}$$

$$\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos\alpha+1} = \frac{1}{4\cos(\alpha/2)}\left(\frac{x}{x^2-2x\cos(\alpha/2)+1} - \frac{x}{x^2+2x\cos(\alpha/2)+1}\right), \quad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

[003279]

Ejercicio 833 Ensi PC 1999

Descomponer en elementos simples en $\mathbb{R}$, luego en $\mathbb{C}$: $\dfrac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)}$.

Solución ▼ [003280]

Ejercicio 834 Cálculo de derivadas

Calcular las derivadas p-ésimas de las fracciones siguientes :

1. $\dfrac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$.
2. $\dfrac{1}{X^2-2X\cos\alpha+1}$, $(\alpha \not\equiv 0, \pmod{\pi})$.
3. $\dfrac{1}{X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$.

Solución ▼ [003281]

Ejercicio 835 Suma de series

Usando la descomposición en elementos simples, calcular :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Solución ▼ [003282]

Ejercicio 836 Parte polar para un polo de orden 2

Sea $F(X) = \frac{1}{R(X)} = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$, con $Q(a) \neq 0$. Encontrar la parte polar de F en a en función de Q, luego en función de R.

Solución ▼ [003283]

Ejercicio 837

Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ distintos y $P = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$.

1. Descomponer la fracción en elementos simples $\frac{(1+X^2)^n}{P^2}$.
2. Demostrar que los coeficientes de los $\frac{1}{X-a_i}$ son todos nulos si y solo si : $(1+X^2)P'' - 2nXP' + n(n+1)P = 0$.

Solución ▼ [003284]

Ejercicio 838 P, con raíces x_i simples $\Rightarrow \sum x_i^k / P'(x_i) = 0$

Sea $P \in \mathbb{C}_n[X]$ $(n \geqslant 2)$ teniendo n raíces distintas : $x_1, \ldots, x_n$.

1. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.
2. Calcular $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)}$, para $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Solución ▼ [003285]

Ejercicio 839 Las raíces de P' son los baricentros de las raíces de P

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ de raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con las multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

1. Descomponer en elementos simples $\frac{P'}{P}$.
2. Deducir que las raíces de P' están en la envolvente convexa de $x_1, \ldots, x_n$.

Solución ▼ [003286]

Ejercicio 840 $F'(X)/F(X) = \cdots$

Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. ¿Existe $F \in K(X)$ tal que : $\frac{F'(X)}{F(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-a_k}$? [003287]

Ejercicio 841 $F(X+1) - F(X) = \ldots$

Encontrar las fracciones $F \in \mathbb{R}(X)$ tales que : $F(X+1) - F(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.

Solución ▼ [003288]

Ejercicio 842 Inversión de la matriz $(1/(a_i - b_j))$

Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, y c de escalares distintos. Se denota A la matriz cuadrada $\left(\left(\frac{1}{a_i - b_j}\right)_{ij}\right)$ y B la matriz columna $\left(\frac{1}{a_i - c}\right)$. Demostrar que la ecuación $AX = B$ tiene una solución única al considerar una fracción racional bien elegida.

Solución ▼ [003289]

Ejercicio 843 Raíces de $(X^2+1)PP'+X(P^2+P'^2)$

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ teniendo n distintas raíces positivas (entre otras). Factorizar el polinomio $Q=(X^2+1)PP'+X(P^2+P'^2)$ en dos palabras, hacer aparecer $\frac{P'}{P}$, y demostrar que Q admite al menos $2n-2$ raíces positivas.

Solución ▼ [003290]

Ejercicio 844 Desigualdad

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ unitario de grado n y $Q(X)=X(X-1)\cdots(X-n)$. Calcular $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}$ y deducir la existencia de $k \in [\![0,n]\!]$ tal que $|P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Solución ▼ [003291]

Ejercicio 845 ENS MP 2002

1. Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ admitiendo dos raíces distintas, tal que P'' divide P. Demostrar que P tiene raíces simples.
2. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ admitiendo dos raíces reales distintas, tal que P'' divide P. Demostrar que P se divide en $\mathbb{R}$, con raíces simples.

Solución ▼ [003292]

Ejercicio 846 División de X^3-1 por X^2+1

1. Efectuar la división de acuerdo a las potencias crecientes de X^3-1 por X^2+1 de orden 3.
2. Deducir una primitiva de $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.

Solución ▼ [003293]

Ejercicio 847 División de 1 por $(1-X)^2$

1. Efectuar la división de 1 por $(1-X)^2$ según las potencias crecientes de orden n cualquiera.
2. Deducir $1+2\cos\theta+3\cos 2\theta+\cdots+n\cos(n-1)\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución ▼ [003294]

Ejercicio 848 División de $1-X^2$ por $1-2X\cos t+X^2$

1. Efectuar la división según las potencias crecientes de orden cualquiera de $1-X^2$ por $1-2X\cos\theta+X^2$.
2. Deducir el valor de $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$, $(\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi})$.

Solución ▼ [003295]

Ejercicio 849 Coeficientes de Bézout

Sean $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ y $Q = X^5$.

1. Verificar que P y Q son primos entre sí.
2. Encontrar $U, V \in K[X]$ tales que $UP + VQ = 1$ (usar una división de acuerdo a las potencias crecientes).

Solución ▼ [003296]

Ejercicio 850

Descomponer en elementos simples en $C(X)$ las siguientes fracciones racionales

1) $\dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$ 2) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ 3) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

4) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ 5) $\dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$ 6) $\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$

7) $\dfrac{1}{X^6+1}$ 8) $\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$ 9) $\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$

10) $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$ 11) $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ 12) $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$

13) $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

Solución ▼ [005335]

Ejercicio 851

Descomponer en elementos simples en $C(X)$ las siguientes fracciones racionales

1) $\dfrac{1}{X^n-1}$ 2) $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ 3) $\dfrac{n!}{(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}$

4) $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$ 5) $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$.

Solución ▼ [005336]

Ejercicio 852

Sea U_n el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$. Escribir como una fracción racional (o aún reducir al mismo denominador) $F = \displaystyle\sum_{\omega \in U_n} \frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$.

Solución ▼ [005337]

Ejercicio 853

Sea $F = \frac{P}{Q}$, donde P y Q son polinomios no nulos y primos entre sí. Demostrar que F es par si y solo si P y Q son pares. Establecer un resultado análogo para F impar.

Solución ▼ [005338]

Ejercicio 854

Demostrar que $(\frac{1}{X-a})_{a\in\mathbb{C}}$ es libre en $K(X)$.

Solución ▼ [005339]

Ejercicio 855

Calcular la derivada n-ésima de $\frac{1}{X^2+1}$.

Solución ▼ [005340]

Ejercicio 856

Sea $P = a(X-x_1)\cdots(X-x_n)$, donde los x_i no son necesariamente complejos distintos dos a dos y a es un complejo no nulo. Calcular $\frac{P'}{P}$. De manera general, determinar la descomposición en elementos simples de $\frac{P'}{P}$, cuando P es un polinomio dividido. Aplicación : Encontrar todos los polinomios divisibles por sus derivadas.

Solución ▼ [005341]

Ejercicio 857

¿Existe una fracción racional F tal que $\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006964]

Ejercicio 858

Sea $F = \frac{P}{Q}$ una fracción racional escrita en forma irreducible. Se supone que existe una fracción racional G tal que $G\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right) = X$.

1. Si $G = \frac{a_nX^n+\cdots+a_1X+a_0}{b_nX^n+\cdots+b_1X+b_0}$, demostrar que P divide (a_0-b_0X) y que Q divide (a_n-b_nX).
2. Deducir que $F = \frac{P}{Q}$ es de la forma $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$.
3. Para $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$, expresar X en función de Y. Deducir la expresión de G.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006965]

Ejercicio 859

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ (donde los a_i son números complejos y donde $c \neq 0$).

1. Expresar usando P y sus derivadas las siguientes sumas :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}, \qquad \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n\\ k\neq \ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}.$$
2. Demostrar que si z es raíz de P', pero no de P, entonces existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de reales positivos o nulos tales que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$ y $z = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k$. Si todas las raíces de P son reales, ¿qué se puede deducir acerca de las raíces de P' ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006966]

Ejercicio 860

Descomponer las siguientes fracciones en elementos simples en $\mathbb{R}$, por identificación de los coeficientes.

1. $F=\dfrac{X}{X^2-4}$ 2. $G=\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ 3. $H=\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$ 4. $K=\dfrac{X+1}{X^4+1}$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006967]

Ejercicio 861

Descomponer las siguientes fracciones en elementos simples en $\mathbb{R}$, razonando por sustitución para obtener los coeficientes.

1. $F=\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$ 2. $G=\dfrac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$ 3. $H=\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
4. $K=\dfrac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006968]

Ejercicio 862

Descomponer las siguientes fracciones en elementos simples en $\mathbb{R}$.

1. Usando divisiones euclidianas sucesivas : $F=\dfrac{4X^6-2X^5+11X^4-X^3+11X^2+2X+3}{X(X^2+1)^3}$.
2. Usando una división según potencias crecientes : $G=\dfrac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$.
3. Idem para : $H=\dfrac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}$.
4. Usando el cambio de indeterminada $X=Y+1$: $K=\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006969]

Ejercicio 863

1. Descomponer las siguientes fracciones en elementos simples en $\mathbb{C}$.

$$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} \qquad \frac{X+i}{X^2+i} \qquad \frac{2X}{(X+i)^2}$$

2. Descomponer las siguientes fracciones en elementos simples en $\mathbb{R}$, luego en $\mathbb{C}$.

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} \qquad \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} \qquad \frac{X^2+1}{X^4+1}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006970]

Ejercicio 864

Se establece $Q_0 = (X-1)(X-2)^2$, $Q_1 = X(X-2)^2$ y $Q_2 = X(X-1)$. Utilizando el descomposición en elementos simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$, encontrar de polinomios A_0, A_1, A_2 tales que $A_0Q_0 + A_1Q_1 + A_2Q_2 = 1$. ¿Qué se puede Deducir sobre Q_1, Q_2 y Q_3 ?

Solución ▼ Vidéo ■ [006971]

Ejercicio 865

Sea $T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big)$, para $x \in [-1,1]$.

1. (a) Demostrar que para todo $\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Calcular T_0 y T_1.
   (c) Demostrar la relación de recurrencia $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, para todo $n \geqslant 0$.
   (d) Deducir que T_n una función polinomial de grado n.
2. Sea $P(X) = \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ un polinomio, donde los a_k son dos a dos distintos y $\lambda \neq 0$. Demostrar que
$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$$
3. Descomponer $\frac{1}{T_n}$ en elementos simples.

Indicación ▼ Solución ▼ [006972]

---

29 105.05 Definición, grado, producto

30 105.99 Otro

Ejercicio 866

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe un polinomio P_n y solo uno tal que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta.$$
Demostrar que P_n es unitario y sus coeficientes son enteros. Deducir los r racionales tales que $\cos r\pi$ es racional. [000424]

Ejercicio 867

Determinar, si existe, todos los ideales J de $\mathbb{R}[X]$ tales que : $I(P) \subset J \subset \mathbb{R}[X]$, con $I(P)$ ideal generado por P en los siguientes casos :
$$P = X^2 + X + 1, \quad P = X^2 + 2X + 1, \quad P = X^3 + 3X - 4.$$
[000425]

Ejercicio 868

Encontrar un polinomio P de grado $\leqslant 2$ tal que
$$P(1) = -2 \quad \text{y} \quad P(-2) = 3 \quad \text{y} \quad P(0) = -1.$$

Solución ▼ [000426]

Ejercicio 869

Encontrar el polinomio P de grado menor o igual que 3 tal que :

$$P(0)=1 \text{ y } P(1)=0 \text{ y } P(-1)=-2 \text{ y } P(2)=4.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000427]

Ejercicio 870

Encontrar los polinomios P de $\mathbb{R}[X]$ tales que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\int_k^{k+1} P(t)dt = k+1$ (se puede usar el polinomio $Q(x)=\int_0^x P(t)dt$). [000428]

Ejercicio 871

Sea $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ una familia de polinomios de $\mathbb{K}[X]$ tal que $\forall k \in \{0,\dots,n\}$ $\operatorname{grad} P_k = k$. Demostrar usando una inducción cuidadosa que esta familia es libre. [000429]

Ejercicio 872

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ fijo y $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)-P(X)$.

1. Demostrar que Δ es lineal, i.e. que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(aP+bQ) = a\Delta(P)+b\Delta(Q)$.
2. Determinar $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$.
3. Sean $H_0 = 1$ y para $k \in \{1,\dots,n\}$ $H_k = \dfrac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calcular $\Delta(H_k)$.
4. Sea $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. ¿Cómo encontrar $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $\Delta(P) = Q$.
5. Determinar P, para $Q = X^2$ tal que $P(1) = 0$.
6. Deducir la suma $1^2+2^2+\dots+n^2$.

[000430]

Ejercicio 873

Resolver la ecuación de incógnita $P \in \mathbb{C}[X] : P(X+1)P(X) = -P(X^2)$. [000431]

Ejercicio 874

Sea $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tales que $\exists (a,A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in]-a,a[, |P(x)-Q(x)| \leqslant A\left|x^{n+1}\right|$. ¿Qué se puede decir de P y de Q? [000432]

Ejercicio 875

Sean $W_n = (X^2-1)^n$, $L_n = \frac{1}{2^n n!}W_n^{(n)}$.

1. Dar el grado de L_n, su coeficiente dominante, su paridad y calcular $L_n(1)$. Dar L_0, L_1, L_2.
2. Demostrar : $\forall n \geqslant 1, (X^2-1)W_n' = 2nXW_n$, y deducir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$

3. Demostrar luego que : $\forall n \geqslant 1$, $L'_n = XL'_{n-1} + nL_{n-1}$ y que $nL_n = XL'_n - L'_{n-1}$.
4. Demostrar en fin que los polinomios L_n se pueden definir por recurrencia :

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

[000433]

Ejercicio 876

Demostrar que si $n \geqslant 3$, la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución no trivial (i.e. $xyz \neq 0$) en $\mathbb{C}[X]$. *Indicación* : Se puede asumir x, y, z, sin factores comunes. Derivar la relación, multiplicarla por z y estudiar el grado. [000434]

Ejercicio 877

Sea $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$ de grado n, con $P(0) = 1, P(1) = 0$, demostrar :

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Indicación : $w_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, demostrar $\sum_{k=0}^{n} P(w_k) = (n+1)a_0.$ [000435]

Ejercicio 878

1. Lema : Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ no constante, $z_0 \in \mathbb{C}$, demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leqslant \varepsilon\},\ \ |P(z)| > |P(z_0)|.$$

Indicaciones : Escribir $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\operatorname{grad} P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$, donde k es el entero estrictamente positivo más pequeño tal que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$. Se propone demostrar el teorema de d'Alembert-Gauss : todo polinomio no constante con coeficientes complejos admite una raíz compleja.
2. Explicar por qué el mínimo de la función $z \to |P(z)|$ se alcanza en un disco centrado en 0, digamos $D(0, \mathbb{R})$, y explicar por qué :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C},\ \ |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

3. Demostrar con el lema que $P(z_0) = 0$.

[000436]

Ejercicio 879

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, y $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$. ¿Cuál es el grado de P? Factorizarlo en $\mathbb{C}[X]$. [000437]

Ejercicio 880

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio cuyos ceros son todos reales y distintos, demostrar que $\phi = (P')^2 - PP''$ no tiene cero real. [000438]

Ejercicio 881

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un cuerpo con las leyes usuales sobre $\mathbb{C}$ y $P \in K[X]$ no constante.

1. Demostrar que si α es raíz de P de multiplicidad $m \in [1, +\infty[$, entonces α es raíz del polinomio P', con la multiplicidad $m-1$.
2. Se supone $K = \mathbb{R}$ y P dividido en $\mathbb{R}$. Demostrar que P' se divide en $\mathbb{R}$ (se utiliza el teorema de Rolle).

[000439]

Ejercicio 882

Sean $m, n \in [1, +\infty[$, $d = \operatorname{mcd}(m, n)$ y $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. (a) Demostrar que si $x \in \mathbb{C}$ es raíz común de P y Q, entonces x es raíz de D (se puede usar la igualdad de Bézout en $\mathbb{Z}$).
   (b) Demostrar que si $y \in \mathbb{C}$ es raíz de D, entonces y es raíz común de P y Q (utilizar la definición de d).
2. (a) Sean $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tales que toda raíz de A es raíz de B. ¿Se puede deducir que A divide B? La misma pregunta si las raíces de A son simples.
   (b) Demostrar que las raíces de D y P son simples y deducir que $\operatorname{mcd}(P, Q) = D$.

[000440]

Ejercicio 883

Sean los polinomios complejos $P_1 = X^3 - 2$, $P_2 = X^4 + 4$ y $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$.

1. Estudiar su irreductibilidad en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que P_1 es irreducible en $\mathbb{Q}$ (se utiliza que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
3. Demostrar que P_2 es reducible a $\mathbb{Z}$.
4. Demostrar que P_3 es irreducible en $\mathbb{Z}$.

[000441]

Ejercicio 884

Sea $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$. Determinar todas las raíces complejas de P sabiendo que dos de ellas tienen 6 por producto. [000442]

Ejercicio 885 Familias libres de polinomios

Sea $a, b \in K$, $a \neq b$. Se define $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Demostrar que la familia $(P_0, \ldots, P_n)$ es libre. [003164]

Ejercicio 886 Fórmula de Van der Monde

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Para $k \in [\![0, n]\!]$ se establece $P_k = X^k (1-X)^{n-k}$. Demostrar que $\mathscr{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ es una base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calcular los componentes en $\mathscr{B}$ de $\frac{d^n}{dx^n}\big(X^n (1-X)^n\big)$. Deducir el valor de $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$. [003165]

Ejercicio 887 Familia libre de polinomios

Sean $U, V \in K[X]$ no constantes y sea $P_k = U^k V^{n-k}$. Demostrar que $(P_0, \ldots, P_n)$ es libre ...

1. cuando $U \wedge V = 1$.

2. cuando (U,V) es libre.

[003166]

Ejercicio 888 Ensi PC 1999

Determinar los polinomios $P\in\mathbb{R}_{2n-1}(X)$ tales que $P(X)+1$ es múltiplo de $(X-1)^n$ y $P(X)-1$ es múltiplo de $(X+1)^n$.

Solución ▼ [003167]

Ejercicio 889 Operador diferencia

Se denota $U_p=\dfrac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}$, $p\in\mathbb{N}$, y $\Delta:K[X]\to K[X]$, $P\mapsto P(X+1)-P(X)$.

1. Demostrar que la familia $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una base de $K[X]$.
2. Calcular $\Delta^n(U_p)$.
3. Deducir que : $\forall P\in K_n[X]$, se tiene $P=P(0)+(\Delta P)(0)U_1+(\Delta^2P)(0)U_2+\cdots+(\Delta^nP)(0)U_n$.
4. Sea $P\in K[X]$. Demostrar que :
   $\big(\forall n\in\mathbb{Z}$, se tiene $P(n)\in\mathbb{Z}\big)\Leftrightarrow\big($ las coordenadas de P en la base (U_p) son entières$\big)$.
5. Sea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, demostrar que f es polinomial si y solo si : $\exists\ n\in\mathbb{N}$ tal que $\Delta^n(f)=0$.

[003168]

Ejercicio 890 Libertad de $P(X),\dots,P(X+n)$

Sea $P\in K[X]$ de grado n. Demostrar que la familia $\big(P(X),P(X+1),\dots,P(X+n)\big)$ es una base de $K_n[X]$. (Utilizar el operador Δ del ejercicio 889)

Solución ▼ [003169]

Ejercicio 891 $(X+z_0)^n,\dots,(X+z_k)^n$ (Central MP 2003)

Sea $k\in\mathbb{N}^*$ y $z_0,\dots,z_k$ complejos. Sean los polinomios $P_0=(X+z_0)^n,\dots,P_k=(X+z_k)^n$. Dar una condición necesaria y suficiente para que $(P_0,\dots,P_k)$ sea una base de $C_n[X]$.

Solución ▼ [003170]

Ejercicio 892 $P-X\mid P\circ P-X$

1. Sea $P\in K[X]$, demostrar que $P-X$ divide $P\circ P-X$.
2. Resolver en $\mathbb{C}$: $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4=0$.

Solución ▼ [003171]

Ejercicio 893 $P\mapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$

Sea $\Phi:K[X]\to K[X],P\mapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$

1. Determinar $\operatorname{grad}(\Phi(P))$ en función de $\operatorname{grad}P$.
2. Deducir $\ker\Phi$ y $\operatorname{Im}\Phi$.
3. Demostrar que : $\forall Q\in K[X]$, $\exists!\ P\in K[X]$ tal que $\Phi(P)=Q$, $P(0)=P'(0)=0$.

[003172]

Ejercicio 894 $P \mapsto (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a)$

Sea $a \in K$ y $\Phi : K_n[X] \to K_n[X], P \mapsto (X-a)(P'(X)+P'(a))+P(X)-P(a)$. Determinar $\ker\Phi$ y $\operatorname{Im}\Phi$.

Solución ▼ [003173]

Ejercicio 895 $A^3+B=C^3+D$

Sean $A,B,C,D \in \mathbb{R}[X]$ tales que : $\begin{cases} \operatorname{grad} A = \operatorname{grad} C = m \\ \operatorname{grad} B < 2m,\ \operatorname{grad} D < 2m \\ A^3+B=C^3+D. \end{cases}$

Demostrar que $A=C$ y $B=D$. Encontrar un contraejemplo con polinomios con coeficientes complejos.

[003174]

Ejercicio 896 $P(n) \mid P(n+P(n))$

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$, y $p = P(n)$. Demostrar que p divide $P(n+p)$.

Solución ▼ [003175]

Ejercicio 897 $P(a/b)=0 \Rightarrow a-kb$ divide $P(k)$

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$ y $a,b \in \mathbb{Z}^*$ primos entre sí tales que $P\left(\frac{a}{b}\right)=0$.

1. Demostrar que a divide el coeficiente constante de P.
2. Demostrar que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $a-kb$ divide $P(k)$.

Solución ▼ [003176]

Ejercicio 898 Automorfismos de polinomios

Para $A \in K[X]$ se denota $\Phi_A : K[X] \to K[X], P \mapsto P \circ A$.

1. Demostrar que las aplicaciones Φ_A son los únicos endomorfismos del álgebra de $K[X]$.
2. ¿Bajo qué condición Φ_A es un isomorfismo ?

[003177]

Ejercicio 899 Sub-anillo no principal de polinomios

Sea $A = \{P \in K[X]$ cuyo coeficiente de X es nulo$\}$. Demostrar que A es un subanillo no principal de $K[X]$.

[003178]

Ejercicio 900 Ecuación $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$

Encontrar $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ primos entre sí tales que $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$.

Solución ▼ [003179]

Ejercicio 901 Ecuación $X(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$

Encontrar todos los polinomios $P \in K[X]$ tales que : $x(X-1)P'+P^2-(2X+1)P+2X=0$.

Solución ▼ [003180]

Ejercicio 902 $P(X)+P(X+1)=2X^n$

1. Demostrar que existe un único polinomio $P_n \in K[X]$ tal que $P_n(X)+P_n(X+1)=2X^n$.
2. Encontrar una relación de recurrencia entre P_n' y P_{n-1}.
3. Descomponer $P_n(X+1)$ en la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
4. Demostrar que $P_n(1-X)=(-1)^n P_n(X)$.

Solución ▼ [003181]

Ejercicio 903 $(1-X)^n P + X^n Q = 1$

1. Demostrar que existe $P, Q \in K_{n-1}[X]$ únicas tales que $(1-X)^n P + X^n Q = 1$.
2. Demostrar que $Q = P(1-X)$.
3. Demostrar que : $\exists\ \lambda \in K$ tal que $(1-X)P' - nP = \lambda X^{n-1}$.
4. Deducir P.

Solución ▼ [003182]

Ejercicio 904 Endomorfismos que conmutan con la derivación

Sea $\Phi \in \mathscr{L}K[X]$ conmutante con la derivada, es decir : $\forall P \in K[X]$, se tiene $\Phi(P') = \Phi(P)'$.

1. Demostrar que existe una sucesión única $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de escalares tales que :

$$\forall P \in K_n[X], \text{ se tiene } \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}.$$

(Se escribe *formalmente* : $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{D}^k$, con $\mathrm{D}(P) = P'$)

2. Descomponer así el endomorfismo $\Phi : P \mapsto P(X+1)$.

[003183]

Ejercicio 905 P es positivo $\Rightarrow P+P'+P''+\cdots$ también

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que : $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene $P(x) \geqslant 0$. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene $(P+P'+P''+\cdots)(x) \geqslant 0$.

Solución ▼ [003184]

Ejercicio 906 $P(\tan\alpha) = Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$. ¿Existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tal que $\forall \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $P(\tan\alpha) = Q\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$?

Solución ▼ [003185]

Ejercicio 907 $X^n + 1/X^n = P_n(X+1/X)$

1. Demostrar que para todo entero $n \in \mathbb{N}$ existe un único polinomio $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ verificando :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^n + z^{-n} = P_n(z + z^{-1}).$$

2. Determinar el grado, el coeficiente dominante, y las raíces de P_n.
3. Para $P \in \mathbb{C}[X]$, se denota $\tilde{P}$ el polinomio tal que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P(z) + P(z^{-1}) = \tilde{P}(z + z^{-1}).$$

Estudiar la aplicación $P \mapsto \tilde{P}$.

Solución ▼ [003186]

Ejercicio 908 Polytechnique MP* 2000

1. Dar un isomorfismo f entre $\mathbb{C}^{n+1}$ y $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Demostrar que $\sigma : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}, (a_0, \ldots, a_n) \mapsto (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$ es lineal.
3. Si $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, se define el producto $\overline{PQ}$ como el resto de la división euclidiana de PQ por $X^{n+1} - 1$. Demostrar que la aplicación inducida por σ sobre $\mathbb{C}_n[X]$ (es decir $f \circ \sigma \circ f^{-1}$) es la aplicación que a P asociada $\overline{XP}$.
4. Sea F un subespacio de $\mathbb{C}^{n+1}$ estable por σ. Demostrar que existe un polinomio Q tal que $f(F) = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$.

Solución ▼ [003187]

Ejercicio 909 Central MP 2002

Determinar todos los polinomios P tales que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$, luego tales que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ y finalmente tal que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Solución ▼ [003188]

Ejercicio 910 Polytechnique MP 2002

Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ distintos y $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. Encontrar $E = \{P \in \mathbb{C}[X]$ tal que $\forall i,\ P^{-1}(\{y_i\}) = \{x_i\}\}$.

Solución ▼ [003189]

Ejercicio 911 ENS Ulm MP 2002

Sea $S \subset \mathbb{N}$ finito y $P = \sum_{s \in S} a_s X^s \in \mathbb{C}[X]$.

1. Se supone que los a_s son reales. Demostrar que P tiene menos raíces estrictamente positivas distintas que la sucesión (a_s) no tiene cambio de signo.
2. Se supone que P verifica : $\forall s \in S,\ P(s) = 0$. Demostrar que P es nulo.

Solución ▼ [003190]

Ejercicio 912 $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Demostrar que el conjunto de soluciones de la desigualdad $\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$ es una unión finita de intervalos disjuntos. Calcular la suma de las longitudes de estos intervalos.

Solución ▼ [003191]

Ejercicio 913 Polinomio positivo (Ens Ulm MP* 2003)

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$. Demostrar :

$(\forall x \geqslant 0,\ P(x) > 0) \Leftrightarrow (\exists\ \ell \in \mathbb{N}$ tal que $(X+1)^{\ell}P(X)$ tiene loa coeficientes estrictamente positivos).

Solución ▼ [003192]

Ejercicio 914 Divisores primos de la sucesión $(P(n))$ (Ens ULM-Lyon-Cachan MP* 2003)

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$ no constante y E el conjunto de divisores primos de al menos un $P(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Demostrar que E es infinito.

Solución ▼ [003193]

Ejercicio 915 Central MP 2004

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar la existencia de $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tal que $1+X-P_n^2$ es divisible por X^n.

Solución ▼ [003194]

Ejercicio 916 Polinomios con coeficientes enteros, ULM-Lyon-Cachan MP* 2004

Se da un entero $n \geqslant 0$. Demostrar que existen polinomios $P_0,\dots,P_n$ en $\mathbb{Z}_n[X]$ tales que $\forall\, i,j \in [\![0,n]\!]$, $\mid \int_0^1 t^i P_j(t)\,dt = \delta_{ij}$.

Solución ▼ [003195]

Ejercicio 917 $a/b+b/c+c/a$

Sean a,b,c las raíces de X^3+pX+q, $q \neq 0$. Calcular : $\sum_{\sigma\in S_3}\left(\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)}+\frac{\sigma(b)}{\sigma(c)}+\frac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right)$.

Solución ▼ [003254]

Ejercicio 918 $1/(x_i-1)$

Sean x_1,x_2,x_3,x_4 las raíces de X^4+X+1. Calcular $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i-1}$.

Solución ▼ [003255]

Ejercicio 919 $x_i/(x_jx_k)$

Sean $x_1,\dots,x_8$ las raíces de $X^8+X^7-X^2+3$. Calcular $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\ 1\leqslant j<k\leqslant 8}}\frac{x_i}{x_jx_k}$.

Solución ▼ [003256]

Ejercicio 920 x_i^7

Sean a,b,c las raíces de X^3-X+1. Calcular $a^7+b^7+c^7$.

Solución ▼ [003257]

Ejercicio 921 $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $1/a+1/b+1/c$ dados

Resolver
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=-1. \end{cases}$$

Solución ▼ [003258]

Ejercicio 922 Ensi P 90

Resolver en $\mathbb{C}$ el sistema : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Solución ▼ [003259]

Ejercicio 923 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$

Encontrar $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = d\big(P(a)+P(b)+P(c)\big)$.

Solución ▼ [003260]

Ejercicio 924 a,b,c en progresión geométrica

Sean $a,b,c \in \mathbb{C}$. Demostrar que estos números están en progresión geométrica si y solo si $(ab+ac+bc)^3 = abc(a+b+c)^3$. [003261]

Ejercicio 925 Condición que vincula las raíces

Sea $P = X^3 + pX + q$ de raíces a,b,c.

1. ¿Existen CNS para que estas raíces estén en los vértices de un cuadrado ?
2. ¿Existen CNS para que $a^2+b^2 = 1+c^2$?

Solución ▼ [003262]

Ejercicio 926 Condición que vincula las raíces

Sean A,B,C los puntos cuyos afijos son las raíces de x^3+pX+q, $p,q \in \mathbb{C}$. ¿Bajo qué condición sobre p y q se tiene $AB = AC = 2BC$?

Solución ▼ [003263]

Ejercicio 927 Condición que vincula las raíces

Sea $P = X^4 + aX^2 + bX + c$ de raíces $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Dar CNS para estas raíces estén en progresión aritmética.

Solución ▼ [003264]

Ejercicio 928 Transformación de ecuaciones

Sean x_1,x_2,x_3 las raíces de X^3+2X^2+3X+4. Calcular el polinomio unitario de $\mathbb{R}_3[X]$ cuyas *raíces* son $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$.

Solución ▼ [003265]

Ejercicio 929 Transformación de ecuaciones

Sean x_1, x_2, x_3 las raíces de $X^3 + aX^2 + bX + c$. Calcular el polinomio unitario de $\mathbb{R}_3[X]$ donde x_1^2, x_2^2, x_3^2 son *las* raíces.

Solución ▼ [003266]

Ejercicio 930 $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ tiene una raíz de módulo 1

Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ tiene una raíz de módulo 1.

Solución ▼ [003267]

Ejercicio 931 Polinomios cuyas raíces tienen módulo 1

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $\mathscr{E}$ el conjunto de polinomios con coeficientes enteros, unitarios de grado n y donde todas las raíces tienen módulo 1.

1. Demostrar que $\mathscr{E}$ es finito.
2. Para $P \in \mathscr{E}$ de raíces $x_1, \ldots, x_n$, se denota $\widetilde{P}$ el polinomio unitario de raíces $x_1^2, \ldots, x_n^2$. Demostrar que $\widetilde{P} \in \mathscr{E}$.
3. Deducir que : $\forall P \in \mathscr{E}$, las raíces de P son raíces de la unidad.

Solución ▼ [003268]

Ejercicio 932 Central MP 2001

Sea $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a, b, c, d reales. Dar una condición necesaria y suficiente sobre a, b, c, d, para que exista una recta que corta la curva representativa de f en cuatro puntos distintos M_1, M_2, M_3, M_4 tales que $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$.

Solución ▼ [003269]

Ejercicio 933 ***

Sea $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ y $Q = 1 + 2X + \cdots + nX^{n-1}$. Calcular $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

Solución ▼ [005314]

Ejercicio 934 **

Sea P un polinomio diferente de X. Demostrar que $P(X) - X$ divide $P(P(X)) - X$.

Solución ▼ [005320]

Ejercicio 935 ***

Sea P un polinomio con coeficientes enteros relativos de grado mayor o igual que 1. Sea n un entero relativo y $m = P(n)$.

1. Demostrar que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(n + km)$ es un entero divisible por m.
2. Demostrar que no existe polinomios no constantes con coeficientes enteros, tales que $P(n)$ sea primo para todo entero n.

Solución ▼ [005321]

Ejercicio 936 *** Polinomios P verificando $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

Sea E la parte de $\mathbb{C}[X]$ formada por polinomios P verificando $\forall a \in \mathbb{Z},\ P(a) \in \mathbb{Z}$.

1. Sea $P_0 = 1$ y para n entero natural no nulo, $P_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)$ (se puede definir la notación $P_n = C_{X+n}n$). Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in E$.
2. Demostrar que toda combinación lineal con coeficientes enteros relativos de los P_n es aún un elemento de E.
3. Demostrar que E es el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes enteros relativos de P_n.

Solución ▼ [005322]

Ejercicio 937 ***T

Encontrar un polinomio de grado 5 tal que $P(X)+10$ sea divisible por $(X+2)^3$ y $P(X)-10$ sea divisible por $(X-2)^3$.

Solución ▼ [005326]

Ejercicio 938 ***I

Encontrar los polinomios P de $\mathbb{R}[X]$ verificando $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ (pensar en las raíces de P).

Solución ▼ [005327]

Ejercicio 939 **

Resolver en $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^4$) el sistema :

$$1)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26. \end{cases}$$

Solución ▼ [005330]

Ejercicio 940 **T

Encontrar todos los polinomios P verificando $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Solución ▼ [005331]

Ejercicio 941 **

Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ el polinomio $12X^4+X^3+15X^2-20X+4$.

Solución ▼ [005332]

Ejercicio 942 ***

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $(X-1)^{2n}-X^{2n}+2X-1$ es divisible por $2X^3-3X^2+X$, luego determinar el cociente.

Solución ▼ [005333]

Ejercicio 943 **I

Determinar dos polinomios U y V verificando $UX^n + V(1-X)^m = 1$ y $\text{gr}(U) < m$ y $\text{gr}(V) < n$.

Solución ▼ [005334]

Ejercicio 944

Sea P un polinomio de grado n entero natural no nulo, donde los a_i son enteros relativos y a_0 y a_n son no nulos. Sean p un entero relativo no nulo y q un entero natural no nulo tal que $p \wedge q = 1$. Demostrar que, si $r = \frac{p}{q}$ es una raíz (racional) de P, entonces p divide a_0 y q divide a_n. Aplicación. Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $9z^4 - 3z^3 + 16z^2 - 6z - 4 = 0$.

Solución ▼ [005343]

Ejercicio 945 Ecuaciones recíprocas

Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones :

1. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$ poniendo $Z = z + \frac{1}{z}$ (o de otra manera).
2. $z^6 - 5z^5 + 5z^4 - 5z^2 + 5z - 1 = 0$.
3. $z^7 - z^6 - 7z^5 + 7z^4 + 7z^3 - 7z^2 - z + 1 = 0$.

Solución ▼ [005344]

Ejercicio 946

Sea P un polinomio con coeficientes complejos de grado 4. Demostrar que las imágenes en el plano complejo de las raíces de P forman un paralelogramo si y solo si P' y $P^{(3)}$ tienen una raíz común

Solución ▼ [005346]

Ejercicio 947

Resolver en $\mathbb{C}^3$ el sistema $\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$

Solución ▼ [005347]

Ejercicio 948

Sea n un entero natural superior o igual a 2. Para $k \in \mathbb{Z}$, se establece $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

1. Calcular $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right)$.
2. Demostrar que, para todo real a, $\prod_{k=0}^{n-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) = 2(1 - \cos(na))$ (preguntas independientes.)

Solución ▼ [005348]

Ejercicio 949

Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^4 - 21z + 8 = 0$ sabiendo que existen dos soluciones que son inversas entre sí.

Solución ▼ [005352]

31 106.01 Definición, subespacio

Ejercicio 950

Determinar cuáles de los conjuntos E_1, E_2, E_3 y E_4 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\} \\
E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\} \\
E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\} \\
E_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.
\end{aligned}$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000886]

Ejercicio 951

Sea $\mathbb{R}_+^*$ dotado de la ley interna $\oplus$ definida por $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ y de ley externa $\otimes$ tal que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. [000887]

Ejercicio 952

Entre los siguientes conjuntos reconocer aquellos que son subespacios vectoriales.
$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ y } x + 3az = 0\right\}$, $E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$, $E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$, $E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000888]

Ejercicio 953

Entre los siguientes conjuntos, reconocer cuales son subespacios vectoriales :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$;
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$;
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geqslant 0\}$;
$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(1) = 0\}$;

$E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.
$E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.
$E_3' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
$E_4' = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(0) = 1\}$;
$E_4'' = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f \text{ es creciente}\}$.

[000889]

Ejercicio 954

Determinar si $\mathbb{R}^2$, equipado con las siguientes leyes internas y externas, es o no es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial :

1. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; $\lambda(a,b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; $\lambda(a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a,b) + (c,d) = (c,d)$; $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

[000890]

Ejercicio 955

Decir si los siguientes objetos son espacios vectoriales :

1. El conjunto de funciones reales en $[0,1]$, continuas, positivas o nulas, para la adición y el producto por un real.
2. El conjunto de funciones reales en $\mathbb{R}$ verificando $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ por las mismas operaciones.
3. El conjunto de soluciones (x_1,x_2,x_3) del sistema : $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-4x_2+7x_3=0 \\ x_1+3x_2-6x_3=0. \end{cases}$
4. El conjunto funciones continuas en $[0,1]$ verificando $f(1/2)=0$.
5. El conjunto $\mathbb{R}_+^*$, para las operaciones $x\oplus y=xy$ y $\lambda\cdot x=x^\lambda$, $(\lambda\in\mathbb{R})$.
6. El conjunto de funciones impares en $\mathbb{R}$.
7. El conjunto de funciones en $[a,b]$ continuas, verificando $f(a)=7f(b)+\displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
8. El conjunto de funciones en $\mathbb{R}$ que son nulas en 1 o nulas en 4.
9. El conjunto de funciones en $\mathbb{R}$ que se puede escribir como la suma de una función nula en 1 y de una función nula en 4. Identificar este conjunto.
10. El conjunto de polinomios de grado exactamente n.
11. El conjunto de funciones de clase C^2 verificando $f''+\omega^2 f=0$.
12. El conjunto de funciones en $\mathbb{R}$ tales que $f(3)=7$.
13. El conjunto de primitivas de la función xe^x sobre $\mathbb{R}$.
14. El conjunto de números complejos de argumento $\pi/4+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.
15. El conjunto de puntos (x,y) de $\mathbb{R}^2$, verificando $\operatorname{sen}(x+y)=0$.
16. El conjunto de vectores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ ortogonales al vector $(-1,3,-2)$.
17. El conjunto funciones continuas en $[0,1]$ verificando $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x f(x)\,dx=0$.
18. El conjunto de polinomios sin término de grado 7.
19. El conjunto de funciones pares en $\mathbb{R}$.

[000891]

Ejercicio 956

Demostrar que el conjunto $\mathscr{E}=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}/(\exists(a,\varphi)\in\mathbb{R}^2)(\forall x\in\mathbb{R})f(x)=a\cos(x-\varphi)\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. [000892]

Ejercicio 957

Sea E un espacio vectorial.

1. Sean F y G dos subespacios de E. Demostrar que
$$F\cup G \text{ es un subespacio vectorial de } E \iff F\subset G \text{ o } G\subset F.$$
2. Sea H un tercer subespacio vectorial de E. Demostrar que
$$G\subset F \Longrightarrow F\cap(G+H)=G+(F\cap H).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000893]

Ejercicio 958

Se provee $\mathbb{R}^2$ de la adición usual y de la ley externa $\lambda(x,y) = (\lambda x, y)$. ¿Es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial ? [000894]

Ejercicio 959

Demostrar que $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \text{ y } 2x-y+3z=0\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. [000895]

Ejercicio 960

Demostrar que

$$F = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \exists (A,\phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x+\phi)\}$$

es un espacio vectorial. [000896]

Ejercicio 961

VERDADERO O FALSO

1. El conjunto $\{0\}$ es un espacio vectorial real.
2. El conjunto $\{0,1\}$ es un espacio vectorial real.
3. Todo subespacio vectorial que no sea $\{0\}$ tiene un subespacio estricto.
4. La intersección de dos subespacios vectoriales (de un mismo espacio más grande) es un espacio vectorial.
5. La unión de dos subespacios vectoriales es un espacio vectorial.
6. La suma de dos subespacios vectoriales es un espacio vectorial.
7. El producto cartesiano $E \times F$ de dos espacios vectoriales es un espacio vectorial.

[002425]

Ejercicio 962

Se denota $\mathbb{R}^n$ el conjunto de los n-tuples $(x_1,\dots,x_n)$ números reales ; $\mathbb{R}[X]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales en la variable X ; $\mathbb{R}[X]_p$ el subconjunto de polinomios de grado $\leqslant p$; $\mathbb{R}(X)$ el conjunto de fracciones racionales con coeficientes reales en la variable X ; $\mathbb{R}(X)_p$ el subconjunto de fracciones racionales de grado $\leqslant p$; $C^k(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones reales definidas en $\mathbb{R}$ y k veces continuamente derivables ($k \geqslant 0$ entero) ; $C^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones infinitamente derivables en $\mathbb{R}$.

1. Equipado con las operaciones usuales de suma y multiplicación, ¿cuáles de estos conjuntos son espacios vectoriales ?
2. Demostrar que $\mathbb{R}[X]_p \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}(X)$ y que $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$, y que son subespacios vectoriales.
3. Si se identifican los polinomios y las fracciones racionales con las funciones correspondientes, ¿se tiene $\mathbb{R}[X] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}(X) \subset C^\infty(\mathbb{R})$?

[002427]

Ejercicio 963

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, F,G dos subespacios de E. Demostrar que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

[002428]

Ejercicio 964

Sea $E = \mathbb{R}[X]_n$ (polinomios de grado $\leqslant n$), y $P \in E$.

1. Demostrar que el conjunto F_P de polinomios de E múltiplos de P es un subespacio vectorial de E. ¿Cuál es la dimensión en función del grado de P?
2. Sea $Q \in E$ un polinomio sin raíz común con P, y tal que $\operatorname{grad} P + \operatorname{grad} Q = n+1$. Demostrar que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. Deducir que existen dos polinomios U y V tales que $UP + VQ = 1$.

[002429]

Ejercicio 965

Sea E el espacio vectorial de funciones reales infinitamente derivables con valores en $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que las cuatro funciones definidas por
$$x_1(t) = \cos t \cosh t, \quad x_2(t) = \operatorname{sen} t \cosh t, \quad x_3(t) = \cos t \sinh t, \quad x_4(t) = \operatorname{sen} t \sinh t$$
pertenecen a E y son linealmente independientes.
2. Sea F el subespacio vectorial de E generado por estos cuatro vectores, y u el endomorfismo de E definido por $u(f) = f'$. Demostrar que F es estable por u y determinar la matriz M de u en la base (x_1, x_2, x_3, x_4) de F.
3. Calcular M^n.

[002447]

Ejercicio 966

1. Usando operaciones de suma $+$ y multiplicación $\cdot$ de dos números, définir, para cada conjunto E de la lista que aparece a continuación :
   — una suma $\oplus : E \times E \to E$;
   — una multiplicación por un número real $\odot : \mathbb{R} \times E \to E$.
   (a) $E = \mathbb{R}^n$;
   (b) $E =$ el conjunto de trayectorias de una partícula puntual en el espacio $\mathbb{R}^3$;
   (c) $E =$ el conjunto de soluciones $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de la ecuación $\mathscr{S}_1 : x - 2y + 3z = 0$;
   (d) $E =$ el conjunto de soluciones $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ del sistema de ecuaciones.
   $$\mathscr{S}_2 : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0; \end{cases}$$
   (e) $E =$ el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 3y = 0$;

(f) $E =$ el conjunto de funciones $y(x)$ tales que

$$y''(x)\operatorname{sen}x + x^3 y'(x) + y(x)\log x = 0, \quad \forall x > 0;$$

(g) $E =$ el conjunto de funciones $\Psi(t,x)$, con valores complejos, soluciones de la ecuación de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + x^2\Psi(t,x)$$

donde $\hbar$ y m son constantes ;

(h) $E =$ el conjunto de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ números reales ;

(i) $E =$ el conjunto de polinomios $P(x)$, con coeficientes reales ;

(j) $E =$ el conjunto de polinomios $P(x)$, con coeficientes reales de grado menor o igual a 3 ;

(k) $E =$ el conjunto de polinomios $P(x)$, con coeficientes reales divisibles por $(x-1)$;

(l) $E =$ el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con valores reales ;

(m) $E =$ el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con valores reales y de integral nula ;

(n) $E =$ el conjunto de funciones derivables en el intervalo $]0,1[$, con valores reales ;

(o) $E =$ el conjunto de funciones reales que se anulan en $0 \in \mathbb{R}$.

(p) $E =$ el conjunto de funciones reales que tienden a 0, cuando x tiende a $+\infty$;

2. Para las operaciones de suma $\oplus$ construidas, demostrar que E tiene un elemento neutro (término a definir), y que cada elemento de E tiene un inverso.

[002778]

Ejercicio 967

¿Qué es lo que impide definir las mismas operaciones que en el ejercicio anterior sobre los siguientes conjuntos ?

(a) $E =$ el conjunto de soluciones $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de la ecuación $\mathscr{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$;

(b) $E =$ el conjunto de funciones $y(x)$ tales que $y''(x)\operatorname{sen}x + x^3y^2(x) + y(x)\log x = 0, \forall x > 0$;

(c) $E = \mathbb{N}$;

(d) $E = \mathbb{Z}$;

(e) $E = \mathbb{R}^+$;

(f) $E = \mathbb{Q}^n$;

(g) $E =$ el conjunto de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números positivos ;

(h) $E =$ el conjunto de funciones reales que toman el valor 1 en 0 ;

(i) $E =$ el conjunto de funciones reales que tienden a $+\infty$, cuando x tiende a $+\infty$;

[002779]

Ejercicio 968 Suma de subespacios

Sean F, G, H tres subespacios de un espacio vectorial E. Comparar $F \cap (G + (F \cap H))$ y $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Solución ▼ [003298]

Ejercicio 969 $F \cap G = F' \cap G'$

Sean F, G, F', G' de sev de un ev E. Demostrar que si $F \cap G = F' \cap G'$, entonces $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.

Solución ▼ [003299]

Ejercicio 970 E no es unión de subespacios estrictos

Sea E un K-ev no nulo y $F_1, \ldots, F_n$ de sev estrictos de E. Se quiere demostrar que $E \neq F_1 \cup \cdots \cup F_n$:

1. Tratar el caso $n = 2$.
2. Caso general : se supone $F_n \not\subset F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ y se elige $\overrightarrow{x} \in F_n \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1})$ y $\overrightarrow{y} \notin F_n$.
   (a) Demostrar que : $\forall \lambda \in K$, $\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \notin F_n$.
   (b) Demostrar que : $\forall i \leqslant n-1$, existe a lo sumo un $\lambda \in K$ tal que $\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F_i$.
   (c) Concluir.

[003300]

Ejercicio 971 Intersección y suma de sev

Sea E un ev de dimensión finita y $(F_i)_{i \in I}$ una familia de subespacios de E. Se denota $H = \bigcap_{i \in I} F_i$ y $S = \sum_{i \in I} F_i = \operatorname{vect}\Big(\bigcup_{i \in I} F_i\Big)$. Demostrar que existe una parte finita, J, de I tal que : $H = \bigcap_{i \in J} F_i$ y $S = \sum_{i \in J} F_i$. [003323]

Ejercicio 972 *T

Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ (provisto de $f+g$ y $\lambda \cdot f$ usuales) (no dudar en volver a demostrar que E es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial). Sea F el conjunto de las aplicaciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ verificando una de las siguientes condiciones :

1) $f(0)+f(1)=0$	2) $f(0)=0$	3) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$
4) $\forall x \in [0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$	5) $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$	6) $2f(0)=f(1)+3$.

¿En qué caso F es un subespacio vectorial de E ?

Solución ▼ [005164]

Ejercicio 973 **T

Se provee $\mathbb{R}^n$ de las leyes de productos usuales. Entre los siguientes subconjuntos F de $\mathbb{R}^n$, ¿cuáles son subespacios vectoriales ?

1) $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 0\}$	2) $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = 1\}$
3) $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 = x_2\}$	4) $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$
5) $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1.x_2 = 0\}$.	

Solución ▼ [005165]

Ejercicio 974 **

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sean A, B y C tres subespacios vectoriales de E verificando $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ y $B \subset C$. Demostrar que $B = C$.

Solución ▼ [005166]

Ejercicio 975 **T

Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $u = (1,2,-5,3)$ y $v = (2,-1,4,7)$. Determinar λ y μ reales tales que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ pertenece a F.

Solución ▼ [005168]

Ejercicio 976 **T

Demostrar que $a = (1,2,3)$ y $b = (2,-1,1)$ generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1,0,1)$ y $d = (0,1,1)$.

Solución ▼ [005169]

Ejercicio 977 **

Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y A, B y C tres subespacios de E.

1. Demostrar que : $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.
2. ¿Se tiene la igualdad ?
3. Demostrar que : $(A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + (A \cap C))$.

Solución ▼ [005172]

Ejercicio 978 **T

En $E = \mathbb{R}^4$, se considera $V = \{(x,y,z,t) \in E / \ x - 2y = 0 \ \text{y} \ y - 2z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z,t) \in E / \ x + z = y + t\}$.

1. Demostrar que V y W son subespacios vectoriales de E.
2. Dar una base de V, W y $V \cap W$.
3. Demostrar que $E = V + W$.

Solución ▼ [005173]

Ejercicio 979 ***

Sea $f : [0,+\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$
$$(x,y) \mapsto (x\cos y, x \operatorname{sen} y).$$

1. ¿f es inyectiva, sobreyectiva ?
2. Sean a, b, α y β cuatro reales. Demostrar que existe $(c,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tal que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = c\cos(x-\gamma)$.
3. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea $F = \{u \in E / \ \exists (a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta)\}$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de E.
4. Determinar $\{\cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), 1, \cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\} \cap F$.
5. Demostrar que $(\cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x))$ es una familia libre de F.

Solución ▼ [005174]

Ejercicio 980 **

Sea C el conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, crecientes en $\mathbb{R}$.

1. ¿C es un espacio vectorial (para las operaciones usuales) ?
2. Demostrar que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g,h) \in C^2 \text{ tal que } f = g - h\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución ▼ [005175]

Ejercicio 981 **

Demostrar que la conmutatividad de la ley $+$ es una consecuencia de los otros axiomas de la estructura del espacio vectorial.

Solución ▼ [005176]

Ejercicio 982 ***

Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y A, B y C tres subespacios vectoriales de E. Demostrar que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A+B) \cap (B+C) \cap (C+A).$$

Solución ▼ [005177]

Ejercicio 983 ** I

Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E. Demostrar que : $[(F \cup G$ subespacio de $E) \Leftrightarrow (F \subset G$ o $G \subset$

Solución ▼ [005563]

Ejercicio 984 ****

Generalización del ejercicio 983. Sean n un entero superior o igual que 2 y $F_1, \dots, F_n$, n subespacios de E, donde E es un espacio vectorial en un subcuerpo $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$. Demostrar que

$$\left[(F_1 \cup \dots \cup F_n \text{ subespacio de } E) \Leftrightarrow (\text{el existe } i \in [\![1,n]\!] / \bigcup_{j \neq i} F_j \subset F_i)\right].$$

Solución ▼ [005564]

Ejercicio 985

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (sobre $\mathbb{R}$) :

— $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$: el conjunto de funciones de valor real definidas en el intervalo $[0,1]$, dotado de la adición $f+g$ de funciones y multiplicación por un número real $\lambda \cdot f$.

— $E_2 = \{(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$: el conjunto de sucesiones reales dotado de la suma de sucesiones definidas por $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ y la multiplicación por un número real $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda \times u_n)$.

— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \operatorname{grad} P \leqslant n\}$: el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, dotado de la adición $P+Q$ de polinomios y de multiplicación por un número real $\lambda \cdot P$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006868]

Ejercicio 986

1. Describir los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}$; luego de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$.
2. En $\mathbb{R}^3$ dar un ejemplo de dos subespacios cuya unión no sea un subespacio vectorial.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006869]

32 106.02 Sistema de vectores

Ejercicio 987

Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ y $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Demostrar que $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ no son colineales. Hacer lo mismo con $\vec{v_1}$ y $\vec{v_3}$, luego con $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$.
2. ¿La familia $(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ es libre ?

[000897]

Ejercicio 988

¿Son libres las siguientes familias ?

1. $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,2,2)$ y $\vec{v_3}(3,7,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1}(1,0,0)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$ y $\vec{v_3}(1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1}(1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2}(2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3}(1,0,1,1,0)$ y $\vec{v_4}(0,1,0,0,1)$ en $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1}(2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2}(1,1,2,1,3,1)$ y $\vec{v_3}(0,-1,0,3,6,2)$ en $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1}(2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3)$ y $\vec{v_3}(1,5,0,4,-1,7)$ en $\mathbb{R}^6$.

[000898]

Ejercicio 989

Se considera en $\mathbb{R}^n$ una familia de 4 vectores linealmente independientes : $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})$. ¿Son libres las siguientes familias ?

1. $(\vec{e_1},2\vec{e_2},\vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1},\vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1},2\vec{e_1}+\vec{e_4},\vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1}+\vec{e_3},\vec{e_3},\vec{e_2}+\vec{e_3})$.
5. $(2\vec{e_1}+\vec{e_2},\vec{e_1}-3\vec{e_2},\vec{e_4},\vec{e_2}-\vec{e_1})$.

[000899]

Ejercicio 990

Sean en $\mathbb{R}^4$ los vectores $v_1=(1,2,3,4)$ y $v_2=(1,-2,3,-4)$. ¿Se puede determinar x e y, para que $(x,1,y,1)\in \mathrm{vect}\{v_1,v_2\}$? ¿Y para qué $(x,1,1,y)\in \mathrm{vect}\{v_1,v_2\}$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000900]

Ejercicio 991

En $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto E de vectores (x_1,x_2,x_3,x_4) verificando $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. ¿El conjunto E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$? Si es sí, dar una base.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000901]

Ejercicio 992

En el espacio $\mathbb{R}^4$, se dan cinco vectores : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. Encontrar las relaciones de dependencia lineal entre estos vectores. Si estos vectores son dependientes, extraer al menos una familia libre generando el mismo subespacio. [000902]

Ejercicio 993

En el espacio $\mathbb{R}^4$, se dan cinco vectores : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. ¿En cuál(es) condición(es) un vector $B = (b_1,b_2,b_3,b_4)$ pertenece al subespacio generado por los vectores V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Definir este subespacio mediante una o más ecuaciones. [000903]

Ejercicio 994

Sean los vectores $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,-2,3,-4)$ de $\mathbb{R}^4$. ¿Se puede determinar x e y, para que $(x,1,y,1) \in \mathrm{vect}\{e_1,e_2\}$?, ¿para qué $(x,1,1,y) \in \mathrm{vect}\{e_1,e_2\}$? [000904]

Ejercicio 995

Sea E un espacio vectorial en $\mathbb{R}$ y x,y,z,t una familia libre de elementos de E, las familias siguientes son libres ?

1. $x,2y,z$.
2. x,z.
3. $x,2x+t,t$.
4. $3x+z,z,y+z$.
5. $2x+y,x-3y,t,y-x$.

[000905]

Ejercicio 996

En $\mathbb{R}^4$, comparar los subespacios F y G siguientes :

$$F = \mathrm{vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\}$$
$$G = \mathrm{vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\}$$

[000906]

Ejercicio 997

Se supone que $v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n$ son vectores independientes de $\mathbb{R}^n$.

1. Los vectores $v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_4,\ldots,v_n-v_1$ son linealmente independientes ?
2. Los vectores $v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4,\ldots,v_n+v_1$ son linealmente independientes ?
3. Los vectores $v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3,v_1+v_2+v_3+v_4,\ldots,v_1+v_2+\cdots+v_n$ son linealmente independientes ?

[000907]

Ejercicio 998

Sea E el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $v_1 = (2,3,-1)$ y $v_2 = (1,-1,-2)$ y F el generado por $w_1 = (3,7,0)$ y $w_2 = (5,0,-7)$. Demostrar que E y F son iguales.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000908]

Ejercicio 999

Demostrar que en $\mathbb{R}^3$, los vectores $u_1 = (2,3,-1)$ y $u_2 = (1,-1,-2)$ generan el mismo s.e.v. que los vectores $v_1 = (3,7,0)$ y $v_2 = (5,0,-7)$.

[000909]

Ejercicio 1000

1. Demostrar que los sistemas : $S_1 = (1;\sqrt{2})$ y $S_2 = (1;\sqrt{2};\sqrt{3})$ son libres en $\mathbb{R}$ considerado como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
2. Sean, en $\mathbb{R}^2$, los vectores $u_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ y $u_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Demostrar que el sistema (u_1,u_2) es $\mathbb{Q}$-libre y $\mathbb{R}$-ligado.
3. Sean los vectores $v_1 = (1-i,i)$ y $v_2 = (2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$.
   (a) Demostrar que el sistema (v_1,v_2) es $\mathbb{R}$-libre y $\mathbb{C}$-ligado.
   (b) Verificar que el sistema $S = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ es una base de l'ev $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, y dar las componentes de los vectores v_1,v_2, con respecto a esta base.

[000910]

Ejercicio 1001

1. Se definen las funciones siguientes : $f_1 : t \mapsto \cos t.\mathrm{ch} t, f_2 : t \mapsto \cos t \cdot \mathrm{sh} t, f_3 : t \mapsto \mathrm{sen}\, t \cdot \mathrm{ch} t, f_4 : t \mapsto \mathrm{sen}\, t \cdot \mathrm{sh} t$. Demostrar que el sistema (f_1,f_2,f_3,f_4) es libre en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. La misma pregunta para la familia $\mathscr{F} = \{f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

[000911]

Ejercicio 1002

¿En $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, las tres funciones $x \mapsto \mathrm{sen}\, x$, $x \mapsto \mathrm{sen}\, 2x$, $x \mapsto \mathrm{sen}\, 3x$, son linealmente independientes ? Generalizar. [000912]

Ejercicio 1003

Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $S_1 = (e_1,e_2,\ldots,e_n)$ un sistema libre en E, $n \geqslant 2$.

1. Se considera el sistema $S_2 = (e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ definido por : $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k, 1 \leqslant j \leqslant n$. ¿$S_2$ es libre ?
2. Se considera el sistema $S_3 = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ definido por : $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant n-1$ y $\varepsilon_n = e_n + e_1$. Demostrar que los siguientes resultados :
   (a) S_3 libre $\Rightarrow S_1$ libre.
   (b) n impar : S_3 libre $\Leftrightarrow S_1$ libre.
   (c) n par : S_3 ligado.

[000913]

Ejercicio 1004

¿Se pueden determinar reales x, y, para que el vector $v = (-2, x, y, 3)$ pertenezca al sev generado en $\mathbb{R}^4$ por el sistema (e_1, e_2), donde $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ y $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Solución ▼ [000914]

Ejercicio 1005

Sean $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)$. Determinar $\operatorname{vect}(f, g, h)$. [000915]

Ejercicio 1006

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = 1 & \text{si } x = \alpha \\ f_\alpha(x) = 0 & \text{si } x \neq \alpha. \end{cases}$$

Demostrar que la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es libre.

Indicación ▼ Solución ▼ [000916]

Ejercicio 1007

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$. Demostrar que la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es libre.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000917]

Ejercicio 1008

Demostrar que las siguientes familias son libres en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, y cualquiera que sea $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(x \to |x - a|)_{a=1,3,5,\dots,2N+1}; \qquad (x \to \cos nx)_{n=1,2,\dots,N}; \qquad (x \to \mathrm{e}^{ax})_{a=1,\dots,N}.$$

[000918]

Ejercicio 1009

Sea E el conjunto de sucesiones reales $(u_n)_{n \geqslant 0}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, se denota δ_k el elemento de E cuyas coordenadas son todas cero, excepto $\delta_{k,k} = 1$. Demostrar que la familia infinita $\mathscr{B} = \{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es libre (en el sentido de que toda subfamilia finita es libre). Sea E_0 el subconjunto de sucesiones que convergen a cero. Demostrar que es un subespacio vectorial de E. Demostrar que $\mathscr{B}$ es también una familia libre de E_0.

[002430]

Ejercicio 1010

Sea E un espacio vectorial real y u un endomorfismo de E tal que $u^2 = -I$.

1. Demostrar que u es biyectivo.
2. Se supone que los $2p - 1$ vectores $x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_{p-1})$ son linealmente independientes. Demostrar que los $2p$ vectores $x_1, \dots, x_p$, $u(x_1), \dots, u(x_p)$ son linealmente independientes.
3. Se supone que E es de dimensión finita. Demostrar que E tiene una base de la forma $x_1, \dots, x_p$, $u(x_1), \dots, u(x_p)$ y es de dimensión par. Dar la matriz de u en esta base.

[002435]

Ejercicio 1011

En $\mathbb{R}^4$, se denota $v_1 = {}^t(1,2,0,-1)$, $v_2 = {}^t(3,2,-1,-1)$, $v_3 = {}^t(-1,2,1,-3)$ y $v_4 = {}^t(1,-1,1,-1)$. ¿Son linealmente independientes ? Encontrar una relación de dependencia lineal entre ellos. [002450]

Ejercicio 1012 $\mathbb{C}$ isomorfo a un subespacio de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Sea E el espacio vectorial de matrices cuadradas reales de orden 2.

1. Demostrar que los "vectores"
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
de E son linealmente independientes.
2. Demostrar que todo elemento $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E se escribe de manera única en la forma $X = x_1 I + x_2 J + x_3 K + x_4 L$ y calcular x_1, x_2, x_3, x_4 en función de a, b, c, d.
3. Verificar la relación $J^2 = -I$. Calcular JX y XJ. Demostrar que la ecuación $XJ = JX$ es equivalente a $x_3 = x_4 = 0$. Deducir que el subespacio de E generado por I, J es isomorfo al cuerpo de complejos $\mathbb{C}$.

[002459]

Ejercicio 1013

Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (4,1,4)$ y $\overrightarrow{v_3} = (2,-1,4)$.

1. Demostrar que $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ no son colineales. Hacer lo mismo con $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_3}$, luego con $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$.
2. ¿La familia $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ es libre ?

[002780]

Ejercicio 1014

¿Son libres las siguientes familias ?

1. $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,2,2)$ y $\overrightarrow{v_3} = (3,7,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
2. $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
3. $\overrightarrow{v_1} = (1,2,1,2,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (2,1,2,1,2)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,0,1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_4} = (0,1,0,0,1)$ en $\mathbb{R}^5$.
4. $\overrightarrow{v_1} = (2,4,3,-1,-2,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,2,1,3,1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (0,-1,0,3,6,2)$ en $\mathbb{R}^6$.
5. $\overrightarrow{v_1} = (2,1,3,-1,4,-1)$, $\overrightarrow{v_2} = (-1,1,-2,2,-3,3)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,5,0,4,-1,7)$ en $\mathbb{R}^6$.

[002781]

Ejercicio 1015

Se supone que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ son vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$.

1. ¿Los vectores $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ son linealmente independientes ?
2. ¿Los vectores $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ son linealmente independientes ?
3. ¿Los vectores $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ son linealmente independientes ?

[002782]

Ejercicio 1016 Sev de K^3 generados a dos vectores

Se consideran los vectores de K^3 : $\overrightarrow{a} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{b} = (1,3,2)$, $\overrightarrow{c} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{d} = (3,8,5)$. Sean $F = \text{vect}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ y $G = \text{vect}(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$. Comparar F y G.

Solución ▼ [003297]

Ejercicio 1017 Estudio de familias libres

Estudiar la libertad de las siguientes familias :

1. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (\text{sen}, \cos)$.
2. $E = \{f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto x^a)$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $\mathscr{F} = (f_a : x \longmapsto |x-a|)$, $a \in \mathbb{R}$.

[003301]

Ejercicio 1018 Números algebraicos

Se considera que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

1. Demostrar que la familia $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ es libre.
2. Demostrar que la familia $(\ln p)$, donde p recorre el conjunto de números primos positivos es libre.

[003302]

Ejercicio 1019 Modificación de los vectores de una familia libre

Sea E un espacio vectorial, $(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n)$ una familia libre de vectores de E, y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de escalares. Se establece $\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x}_i$, y $\overrightarrow{x}'_i = \overrightarrow{x}_i + \overrightarrow{y}$. Estudiar en qué condiciones la familia $(\overrightarrow{x}'_1, \dots, \overrightarrow{x}'_n)$ es libre.

Solución ▼ [003303]

Ejercicio 1020 Polinomios trigonométricos

Sea E el ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F el sev generado por las funciones $f_n : x \mapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, y G el sev generado por las funciones $g_n : x \mapsto \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $F = G$. [003304]

Ejercicio 1021 **T

Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las sucesiones reales (provisto de las operaciones usuales). Se consideran los tres elementos de E siguientes : $u = (\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (\cos(n\theta + a))_{n\in\mathbb{N}}$ y $w = (\cos(n\theta + b))_{n\in\mathbb{N}}$, donde θ, a y b son reales dados. Demostrar que (u, v, w) es una familia ld.

Solución ▼ [005167]

Ejercicio 1022 ***T

En $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, estudiar la libertad de las familias siguientes A de vectores de E :

1. a, b y c son tres reales dados, $A = (f_a, f_b, f_c)$, donde, para todo real x, $f_u(x) = \text{sen}(x+u)$.
2. $A = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, donde, para todo real x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
3. $A = (x \mapsto x^{\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ (aquí $E = (]0; +\infty[)^2$).

4. $A = (x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

Solución ▼ [005180]

Ejercicio 1023 **

¿Las siguientes familias de $\mathbb{R}^4$ son libres o ld ? Proporcionar relaciones de dependencia lineal cuando estas relaciones existan.

1. (e_1,e_2,e_3), donde $e_1 = (3,0,1,-2)$, $e_2 = (1,5,0,-1)$ y $e_3 = (7,5,2,1)$.
2. (e_1,e_2,e_3,e_4), donde $e_1 = (1,1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1,-1)$, $e_3 = (1,1,-1,1)$ y $e_4 = (1,-1,1,1)$.
3. (e_1,e_2,e_3,e_4), donde $e_1 = (0,0,1,0)$, $e_2 = (0,0,0,1)$, $e_3 = (1,0,0,0)$ y $e_4 = (0,1,0,0)$.
4. (e_1,e_2,e_3,e_4), donde $e_1 = (2,-1,3,1)$, $e_2 = (1,1,1,1)$, $e_3 = (4,1,5,3)$ y $e_4 = (1,-2,2,0)$.

Solución ▼ [005566]

Ejercicio 1024 ***

Demostrar que $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ es una familia libre del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005567]

Ejercicio 1025 **

Sea $f(x) = \ln(1+x)$, para x real positivo. Sean $f_1 = f$, $f_2 = f\circ f$ y $f_3 = f\circ f\circ f$. Estudiar la libertad de (f_1,f_2,f_3) en $[0,+\infty[^{[0,+\infty[}$.

Solución ▼ [005568]

Ejercicio 1026 **

Sea $f_a(x) = |x-a|$, para a y x reales. Estudiar la libertad de la familia $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Solución ▼ [005569]

Ejercicio 1027 **I

Se define $f_a(x) = e^{ax}$, para a y x reales. Estudiar la libertad de la familia de funciones $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Solución ▼ [005570]

Ejercicio 1028 **

Demostrar que toda sucesión de polinomios no nulos de grados dos a dos distintos es libre. Demostrar que toda sucesión de polinomios no nulos con valuaciones distintas dos a dos es libre.

Solución ▼ [005571]

Ejercicio 1029 **

1. Calcular para p y q enteros naturales dados las siguientes integrales :
$$J(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx, \quad K(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos(px)\operatorname{sen}(qx)\,dx \text{ y}$$
$$L(p,q) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}(qx)\,dx.$$
2. Demostrar que la familia de funciones $(\cos(px))_{p\in\mathbb{N}} \cup (\operatorname{sen}(qx))_{q\in\mathbb{N}^*}$ es libre.

Solución ▼ [005574]

Ejercicio 1030

1. Sean $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ y $v_3 = (3,3,6)$ de vectores de $\mathbb{R}^3$, encontrar tres números reales no todos nulos α, β, γ tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. Se consideran dos planos vectoriales

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}, \qquad P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\},$$

encontrar un vector director de la recta $D = P_1 \cap P_2$ así como una ecuación paramétrica.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006870]

Ejercicio 1031

En $\mathbb{R}^4$ se consideran los cuatro vectores

$$v_1 = (1,0,-1,1), \ \ v_2 = (2,1,0,1), \ \ v_3 = (1,1,1,0), \ \ v_4 = (3,1,-1,2).$$

Sea $V = \mathrm{vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Además, sea $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ -3x+y+2z-t=0\}$.

1. Demostrar que $\dim V = 2$. ¿El sistema (v_1,v_2,v_3,v_4) ¿es libre ? ¿Es generador de $\mathbb{R}^4$?
2. Dar una base de V, completarla a una base de $\mathbb{R}^4$.
3. Calcular las ecuaciones cartesianas para V.
4. Demostrar que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
5. Encontrar una representación paramétrica de H, y deducir una base de H. ¿Cuál es $\dim H$?
6. Demostrar que $v_3 \in H$ y que $v_1 \notin H$. Deducir $\dim(V \cap H)$ y $\dim(V+H)$.
7. Dar una base de $V \cap H$.

Solución ▼ [007410]

33 106.03 Suma directa

Ejercicio 1032

Sean $v_1 = (0,1,-2,1), v_2 = (1,0,2,-1), v_3 = (3,2,2,-1), v_4 = (0,0,1,0)$ y $v_5 = (0,0,0,1)$ vectores de $\mathbb{R}^4$. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas ? Justificar la respuesta.

1. $\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\} = \mathrm{vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. $\dim(\mathrm{vect}\{v_1,v_2\} \cap \mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}) = 1$ (es decir, es una recta vectorial).
4. $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\} + \mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\mathrm{vect}\{v_4,v_5\}$ es un subespacio vectorial suplemento de $\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ en $\mathbb{R}^4$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000919]

Ejercicio 1033

Sean los vectores $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$.

1. ¿$\text{vect}\{v_1,v_2\}$ y $\text{vect}\{v_3\}$ son suplementarios en $\mathbb{R}^4$?
2. ¿$\text{vect}\{v_1,v_2\}$ y $\text{vect}\{v_4,v_5\}$ son suplementarios en $\mathbb{R}^4$?
3. ¿$\text{vect}\{v_1,v_3,v_4\}$ y $\text{vect}\{v_2,v_5\}$ son suplementarios en $\mathbb{R}^4$?
4. ¿$\text{vect}\{v_1,v_4\}$ y $\text{vect}\{v_3,v_5\}$ son suplementarios en $\mathbb{R}^4$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000920]

Ejercicio 1034

Si L,M,N son tres subespacios vectoriales de E, ¿se tiene que

$$L\cap(M+N)=L\cap M+L\cap N\ ?$$

[000921]

Ejercicio 1035

Sea $E=\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de polinomios. Se define

$$E_a=\{P\in E;(X-a)/P\}$$

para $a\in\mathbb{R}$. Demostrar que si $a\neq b$, entonces $E=E_a+E_b$. ¿La suma es directa ? [000922]

Ejercicio 1036

Sea $E=\Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio de funciones derivables y $F=\{f\in E\mid f(0)=f'(0)=0\}$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de E y determinar un suplemento de F en E.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000923]

Ejercicio 1037

Sean E un espacio vectorial, F y G dos subespacios vectoriales de E. Se dice que F y G son *suplementarios* en E, cuando $F\cap G=\{0\}$ y $E=F+G$. Se denota $E=F\oplus G$.

1. Sean $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $e_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ de vectores de $\mathbb{R}^4$. Se define $F=\text{Vect}\ \{e_1,e_2\},G=\text{Vect}\ \{e_3,e_4\},G'=\text{Vect}\ \{e_3,e_4,e_5\}$. Demostrar que $E=F\oplus G$ y $E\neq F\oplus G'$.
2. Se supone que E es de dimensión finita n, que $\dim\ (F)=p$ y $E=F\oplus G$.
   (a) Calcular $\dim\ (G)$.
   (b) Demostrar que todo elemento x de E se descompone de una manera *único* en una suma $x=y+z$, con $y\in F$ y $z\in G$.
   (c) Sean $\mathscr{F}=\{f_1,\dots,f_k\}$ una familia libre de F y $\mathscr{G}=\{g_1,\dots,g_l\}$ una familia libre de G. Demostrar que la familia $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ es libre.
   (d) Sea φ una aplicación lineal de E en $\mathbb{R}^q$, $q\in\mathbb{N}$. Construir dos aplicaciones lineales ψ y ψ' de E en $\mathbb{R}^q$ tales que : $\forall y\in F:\psi'(y)=0,\forall z\in G:\psi(z)=0$ y $\forall x\in E:\varphi(x)=\psi(x)+\psi'(x)$.

[000924]

Ejercicio 1038 Caracterización de la suma directa de tres s.e.v.

Sean U,V,W de los s.e.v. de un ev E, verificando $(I):U\cap V=\{0\}=(U+V)\cap W$.

1. Demostrar que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V+W)$.

2. Demostrar que (I) equivale a

$$(II) : (\forall x \in U+V+W)(\exists!(u,v,w) \in U \times V \times W)(x = u+v+w).$$

[000925]

Ejercicio 1039

Sea $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge} \right\}$. Demostrar que el conjunto de sucesiones constantes y el conjunto de sucesiones convergentes a 0 son subespacios suplementarios en E.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000926]

Ejercicio 1040

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base canónica (e_1, e_2, e_3) es

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que los vectores

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular la matriz de f, con respecto a esta base.

Solución ▼ Vidéo ■ [002433]

Ejercicio 1041 Suplementario común, X MP* 2005

1. Sea $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tal que } P = (1-X)Q(X^2), \text{ con } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
   (a) Demostrar que A es un $\mathbb{R}$-ev y que se tiene $R[X] = A \oplus \{ \text{ polinomios pares } \}$. ¿Se tiene $R[X] = A \oplus \{ \text{ polinomios impares } \}$?
   (b) ¿Qué se puede decir si se reemplaza $Q(X^2)$ por una función f par ?
2. Sean E_1, E_2 dos sev de un ev E tales que E_1 y E_2 son isomorfos y $E = E_1 \oplus E_2$. Demostrar que E_1 y E_2 tienen un suplementario común.

Solución ▼ [003305]

Ejercicio 1042

Sea $E = K_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tal que } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tal que } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, y $H = \{P \in E \text{ tal que } P(X) = P(-X)\}$.

1. Demostrar que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tal que } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Demostrar que $F \oplus G \oplus H = E$.

[003652]

Ejercicio 1043 Caracterización de sumas directas

Sean F_1, F_2, F_3 tres subespacios vectoriales de E. Demostrar que $F_1+F_2+F_3$ es directa si y solo si : $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$ y $(F_1+F_2) \cap F_3 = \{\overrightarrow{0}\}$. Generalizar. [003653]

Ejercicio 1044 Suma directa en $E \Rightarrow$ suma directa en $\mathscr{L}(E)$

Sea E un K-ev de dimensión finita n y $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base de E. Se denota $F_i = \{u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(\overrightarrow{e}_i)\}$.

1. Caracterizar matricialmente los elementos de F_i.
2. Demostrar que $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathscr{L}(E)$.

[003654]

Ejercicio 1045 Toda suma se puede hacer directa reduciendo los sev

Sea E un K-ev de dimensión finita, F_1, F_2, …, F_n de sev de E tales que $F_1+\cdots+F_n = E$. Demostrar que existen sev $G_1 \subset F_1$, …, $G_n \subset F_n$ tales que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$. [003655]

Ejercicio 1046 Suma e intersección

Sea E un K-ev, $E_1, \dots, E_n$ de sev tales que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$ y sea F otro sev de E, y sea $F_i = E_i \cap F$.

1. Demostrar que la suma $G = F_1 + \cdots + F_n$ es directa.
2. Comparar F y G.

[003656]

Ejercicio 1047 Suma directa de endomorfismos

Sea E un K-ev, $E_1, \dots, E_n$ de sev tales que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$. Sean $u_1 \in \mathscr{L}(E_1), \dots, u_n \in \mathscr{L}(E_n)$.

1. Demostrar que existe un único endomorfismo $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que para todo $i : u_{|F_i} = u_i$.
2. Demostrar que $\ker(u) = \ker(u_1) \oplus \cdots \oplus \ker(u_n)$ y $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_n)$.

[003657]

Ejercicio 1048 Suma de proyectores

Sea E un K-ev de dimensión finita y $p_1, \dots, p_n$ de proyectores tales que $p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E$.

1. Demostrar que $\operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{rg}(p_i)$.
2. Demostrar que $E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_n)$.

[003658]

Ejercicio 1049 Proyectores

Sean E un espacio vectorial de dimensión n y $f_1, \dots, f_n$, n aplicaciones lineales todas no nulas. Se supone que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $f_i \circ f_j = \delta_{i,j} f_i$. Demostrar que los f_i son todos de rango uno.

Solución ▼ [003659]

Ejercicio 1050 **IT

Sean $u = (1,1,\dots,1)$, $F = \operatorname{vect}(u)$ y $G = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Demostrar que G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Solución ▼ [005178]

Ejercicio 1051 **

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean f y g dos endomorfismos de E verificando $E = \ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Demostrar que estas sumas son directas.

Solución ▼ [005185]

Ejercicio 1052 ** I

Sean $E = \mathbb{K}^n$, donde $\mathbb{K}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$, $F = \{(x_1,\dots,x_n) \in E / x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ y $G = \operatorname{vect}((1,\dots,1))$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de E. Demostrar que F y G son suplementarios en E. Especificar el proyectado de un vector x de E sobre F, paralelamente a G y en G, paralelamente a F.

Solución ▼ [005565]

Ejercicio 1053

Por consideraciones geométricas responder las siguientes preguntas :

1. ¿Dos rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son suplementarios ?
2. ¿Dos planos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son suplementarios ?
3. ¿Bajo qué condiciones un plano vectorial y una recta vectorial de $\mathbb{R}^3$ son suplementarios ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006871]

Ejercicio 1054

Sea E el espacio vectorial de las funciones de clase $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que se escriben $x \mapsto ax+b$, para ciertos reales a y b. Sea en fin $G = \{f \in E | f(0) = 0, f'(0) = 0\}$.

1. Demostrar que F y G son subespacios vectoriales de E.
2. Demostrar que $E = F \oplus G$.

Solución ▼ [007414]

34 106.04 Base

Ejercicio 1055

Demostrar que los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Calcular las respectivas coordenadas de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en esta base.

Solución ▼ [000979]

Ejercicio 1056

Sean $\overrightarrow{v_1}(1,2,3,4), \overrightarrow{v_2}(2,2,2,6), \overrightarrow{v_3}(0,2,4,4), \overrightarrow{v_4}(1,0,-1,2), \overrightarrow{v_5}(2,3,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$. Sean $F = Vect\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ y $G = Vect\{\overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}\}$. Determinar una base de los subespacios $F \cap G$, F, G y $F+G$. [000980]

Ejercicio 1057

1. Demostrar que los vectores $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ y $v_3 = (1,1,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Encontrar las componentes del vector $w = (1,1,1)$ en esta base (v_1, v_2, v_3).
2. Demostrar que los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ y $v_3 = (1,0,-1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. Encontrar las componentes del vector $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ y $w = (1,2,-3)$ en esta base (v_1, v_2, v_3).
3. En $\mathbb{R}^3$, dar un ejemplo de una familia libre que no es generatriz.
4. En $\mathbb{R}^3$, dar un ejemplo de una familia generatriz que no es libre.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000981]

Ejercicio 1058

Se considera en $\mathbb{R}^4$, $F = \text{gen}\{a,b,c\}$ y $G = \text{gen}\{d,e\}$, con $a = (1,2,3,4)$, $b = (2,2,2,6)$, $c = (0,2,4,4)$, $d = (1,0,-1,2)$ y $e = (2,3,0,1)$. Determinación las bases de los subespacios $F \cap G$, F, G, $F + G$. [000982]

Ejercicio 1059

En el espacio $\mathscr{P}_5$ de polinomios de grado $\leqslant 5$, se definen los subconjuntos :

$E_1 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P(0) = 0\}$, $E_2 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$, $E_3 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divide } P\}$,
$E_4 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ es una función par}\}$,
$E_5 = \{P \in \mathscr{P}_5 \mid \forall x,\ P(x) = xP'(x)\}$.

1. Determinar las bases de los subespacios vectoriales E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.
2. Determinar en $\mathscr{P}_5$ subespacios suplementarios de E_4 y de $E_1 \cap E_3$.

[000983]

Ejercicio 1060

En $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto E de vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) verificando la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. ¿Es el conjunto E un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$? Si es así, dar una base. [000984]

Ejercicio 1061

¿Verdadero o falso ? Se designa por E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

1. Si los vectores x, y, z son dos a dos no colineales, entonces la familia x, y, z es libre.
2. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_p$ una familia de vectores. Si ninguno es una combinación lineal de los otros, la familia es libre.

Indicación ▼ Solución ▼ [000985]

Ejercicio 1062

Estudiar la independencia lineal de las siguientes listas de vectores, y encontrar cada vez una base del subespacio generado.

1. $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,7,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

2. $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.
3. $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$ en $\mathbb{R}^5$.
4. $(2,4,3,-1,-2,1)$, $(1,1,2,1,3,1)$, $(0,-1,0,3,6,2)$ en $\mathbb{R}^6$.
5. $(2,1,3,-1,4,-1)$, $(-1,1,-2,2,-3,3)$, $(1,5,0,4,-1,7)$ en $\mathbb{R}^6$.

[000986]

Ejercicio 1063

¿En $\mathbb{R}^3$, los vectores siguientes forman una base ? Si no describir el subespacio que generan.

1. $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (-1,1,-1)$.
2. $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (3,0,-1)$, $v_3 = (1,8,13)$.
3. $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (1,10,-11)$.

Solución ▼ [000987]

Ejercicio 1064

En $\mathbb{R}^3$, comparar los subespacios F y G siguientes : $F = \mathrm{gen}\{(2,3,-1),(1,-1,-2)\}$ y $G = \mathrm{gen}\{(3,7,0),(5,0,-7)\}$.
[000988]

Ejercicio 1065

En $\mathbb{R}^4$, se consideran las siguientes familias de vectores
$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,-2,3)$, $v_4 = (2,1,0,-1)$, $v_5 = (4,3,2,1)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (3,4,5,16)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (2,1,0,11)$, $v_4 = (3,4,5,14)$.
¿Forman estos vectores :

1. Una familia libre ? Si es sí, completarla para obtener una base de $\mathbb{R}^4$. Si no, dar relaciones de dependencia entre ellas y extraer de esta familia al menos una familia libre.
2. Una familia generatriz ? Si es sí, extraer al menos una base del espacio. Si no, dar la dimensión del subespacio que generan.

[000989]

Ejercicio 1066

Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, F y G dos subespacios de E, demostrar que $F \cup G$ es un subespacio vectorial si y solo si $F \subset G$ o $G \subset F$. [000990]

Ejercicio 1067

Se designa por E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes propiedades ?

1. Sean D_1, D_2, D_3 de las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$ distintas dos a dos. Entonces $\mathbb{R}^3$ es suma de D_1, D_2, D_3.
2. Sean F y G hiperplanos vectoriales de E. Entonces $E \neq F \cup G$.
3. Sean P_1 y P_2 de planos vectoriales de E tales que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Entonces $\dim E \geqslant 4$.
4. Sean F y G subespacios de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$. Entonces $F \cap G \neq \{0\}$.

5. Sea (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $F = \text{gen}\{e_1,e_3\}$. Todo subespacio vectorial suplemento de F contiene e_2.

[000991]

Ejercicio 1068

1. Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n. Demostrar que toda familia de polinomios $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$, con $\text{grad}\,P_i = i$ (para $i = 0,1,\dots,n$) formar una base de E.
2. Escribir el polinomio $F = 3X - X^2 + 8X^3$ bajo la forma $F = a + b(1-X) + c(X-X^2) + d(X^2-X^3)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, luego bajo la forma $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$, donde $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000992]

Ejercicio 1069

En el espacio vectorial $\mathscr{P}_2$ de polinomios de grado $\leqslant 2$, se consideran los polinomios $P_1 = X^2 + X(1-X) + (1-X)^2$, $P_2 = X^2 + (1-X)^2$, $P_3 = X^2 + 1 + (1-X)^2$, $P_4 = X(1-X)$. ¿Se puede extraer de $\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ bases de $\mathscr{P}_2$? Si es sí, encontrarlas todas. [000993]

Ejercicio 1070

Sea E el conjunto de fracciones racionales F que se puede escribir

$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \qquad P \text{ polinomio de grado } \leqslant 6.$$

¿Las fracciones $\frac{1}{(X-1)}, \frac{1}{(X-1)^2}, \frac{1}{(X-1)^3}, \frac{1}{X^2+1}, \frac{X}{X^2+1}, \frac{1}{(X^2+1)^2}, \frac{X}{(X^2+1)^2}$ forman una base de E ? ¿Qué sucede si se supone que P recorre el conjunto de polinomios de grado $\leqslant 9$? [000994]

Ejercicio 1071

Problema de interpolación : Se consideran los cinco puntos $(x_1,y_1) = (-2,3)$, $(x_2,y_2) = (0,-2)$, $(x_3,y_3) = (1,5)$, $(x_4,y_4) = (5,1)$, $(x_5,y_5) = (6,7)$ de $\mathbb{R}^2$, y $\mathscr{P}_4$ el espacio vectorial de polinomios de grado $\leqslant 4$. Se quiere encontrar un polinomio F en $\mathscr{P}_4$ tal que para $i = 1,\dots,5$ se tiene $F(x_i) = y_i$.

1. Sin realizar los cálculos, indicar cómo podríamos calcular a,b,c,d,e expresando $F = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ según la base $\{1,X,X^2,X^3,X^4\}$ de $\mathscr{P}_4$.
2. Demostrar que $\{1, X+2, (X+2)X, (X+2)X(X-1), (X+2)X(X-1)(X-5)\}$ es una base de $\mathscr{P}_4$. Calcular directamente (independientemente de la pregunta anterior) las coordenadas de F en esta base.
3. Demostrar que el conjunto de polinomios $X(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)(X-1)(X-5)(X-6), (X+2)X(X-5)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-6), (X+2)X(X-1)(X-5)$ forman una base de $\mathscr{P}_4$. Calcular directamente (independientemente de las preguntas anteriores) las coordenadas de F en esta base.
4. ¿En cuál de las diversas bases anteriores el cálculo de F es más fácil ?

[000995]

Ejercicio 1072

Determinar para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ los vectores $\{(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)\}$, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000996]

Ejercicio 1073

Sea (Σ) el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-t=0. \end{cases}$$

Demostrar que el conjunto de soluciones de (Σ) forma un subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$. Determinar la dimensión y una base de F. [000997]

Ejercicio 1074

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea para todo $p \in Nn : A_p(X) = (X-a)^p$ y $B_p(X) = X^p$.

1. Demostrar que $\varepsilon = \{A_0, \dots, A_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Sea $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Demostrar que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (Se puede demostrar que el conjunto E de elementos de $\mathbb{R}_n[X]$ que satisfacen esta igualdad es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[X]$ y contiene una base.)

[000998]

Ejercicio 1075

Se provee a $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la ley interna “adición” + : $(a,b)+(a',b') = (aa', b+b')$, y de la ley externa $\cdot$ con coeficientes reales : $(\forall \lambda \in \mathbb{R}), \forall (a,b) \in E,\ \lambda \cdot (a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

1. Verificar que $(E,+,\cdot)$ es un $\mathbb{R}$-ev
2. Los siguientes sistemas son libres o son ld : ¿((1,0),(1,1)) ? ¿((2,1),(8,3)) ? ¿((2,1),(6,3)) ?
3. Verificar que el sistema $\beta = ((2,0),(2,1))$ es una base de E y determinar las componentes del vector $v = (x,y) \in E$, con respecto a la base β.

[000999]

Ejercicio 1076

Para $k = 2,3,4$ demostrar que V_k es un sev de $\mathbb{C}^k$, y dar una base :

$V_2 = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 / a+ib=0\}$, $V_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 / a+2b+3c=0\}$,
$V_4 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4 / a+ib=b+ic=c+id\}$.

[001000]

Ejercicio 1077

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $E = \mathbb{R}_n[X]$, el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales, de grado $\leqslant n$.

1. Sea $\beta = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ un sistema de $(n+1)$ polinomios tales que, $\forall k,\ 0 \leqslant k \leqslant n$, grad $P_k = k$. Demostrar que β es una base de E.

2. Sea P un polinomio de grado n. Demostrar que : $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$ es una base de E y determinar las componentes del polinomio Q definido por : $Q(X) = P(X+a)$, (a real fijado), en la base γ.
3. Demostrar que el sistema $S = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ es una base de E, y determinar, para todo $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, los componentes del polinomio X^p en la base S.

[001001]

Ejercicio 1078

Sean $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$. Dar una base del subespacio vectorial $F = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$. Determinar un suplementario G de F en $\mathbb{R}^4$. [001002]

Ejercicio 1079

Sean el triplete $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,1,2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,5,8,1)$ y el triplete $\mathbf{w}_1 = (0,3,5,1)$, $\mathbf{w}_2 = (1,-1,1,0)$, $\mathbf{w}_3 = (0,0,3,1)$. Se consideran los subespacios vectoriales $F =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ y $G = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$. Dar una base de los siguientes subespacios $F, G, F \cap G$ y $F+G$. [001003]

Ejercicio 1080

Sea $E = \{f_{\alpha,A} \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2 \quad f_{\alpha,A}(x) = A\cos(x+\alpha)\}$. Demostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y dar una base. [001004]

Ejercicio 1081

Sea $E = \mathbb{R}^3$ y sea el sistema $S = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,1), \mathbf{e}_2 = (1,1,2), \mathbf{e}_3 = (1,2,3)\}$.

1. Demostrar que S es una base de E.
2. Calcular las coordenadas de $\mathbf{v} = (5,7,12)$ en esta base.

[001005]

Ejercicio 1082

1. Demostrar que los vectores $v_1 = (1,-1,i)$, $v_2 = (-1,i,1)$, $v_3 = (i,1,-1)$ forman una base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calcular las coordenadas de $v = (1+i, 1-i, i)$ en esta base.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001006]

Ejercicio 1083

1. Demostrar que los sistemas $\mathbf{s}_1 = (1, \sqrt{2})$ y $\mathbf{s}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ son libres en $\mathbb{R}$ considerado como un espacio vectorial en $\mathbb{Q}$.
2. Sean los vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}_1 = (3+\sqrt{5}, 2+3\sqrt{5})$ y $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5}-9)$. Demostrar que el sistema $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ es $\mathbb{Q}$–libre y $\mathbb{R}$–ligado.
3. Sean los vectores en $\mathbb{C}^2$, $\mathbf{r}_1 = (1+i, 1-2i)$ y $\mathbf{r}_2 = (3i-1, 5)$. Demostrar que el sistema $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ es $\mathbb{R}$–libre y $\mathbb{C}$–ligado.

[001007]

Ejercicio 1084

Determinar para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ los polinomios $X^2 + t/2 \ X - t \ (X+t+1)^2$ forman una base de $\mathbb{R}_2[X]$.
[001008]

Ejercicio 1085

Estudiar la independencia de las familias

1. $(1,1),(1,2)$. 2. $(2,3),(-6,9)$. 3. $(1,3,1),(1,3,0),(0,3,1)$. 4. $(1,3),(-1,-2),(0,1)$.

[001009]

Ejercicio 1086

¿Las siguientes familias son generatrices ?

1. $(1,1),(3,1)$ en $\mathbb{R}^2$. 2. $(1,0,2),(1,2,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

[001010]

Ejercicio 1087

Se considera en $\mathbb{R}^3$, $\Pi = \text{vect}\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$ y $D = \text{vect}\{(0,1,-1)\}$. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.
[001011]

Ejercicio 1088

Determinar una base de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\right\}$. [001012]

Ejercicio 1089

Determinar una base de $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0, x-y+z=0\right\}$. [001013]

Ejercicio 1090 Ensayo de bases

Demostrar que en $\mathbb{R}^3$, los tres vectores $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (-1,-1,2)$ y $\vec{c} = (-2,1,-2)$ forman una base, y calcular las coordenadas en esta base de un vector $\vec{x} = (x,y,z)$.
Solución ▼ [003317]

Ejercicio 1091 Rango de vectores

En $\mathbb{R}^4$, encontrar el rango de la familia de vectores :

$$\vec{a} = (3,2,1,0), \quad \vec{b} = (2,3,4,5), \quad \vec{c} = (0,1,2,3), \quad \vec{d} = (1,2,1,2), \quad \vec{e} = (0,-1,2,1).$$

Solución ▼ [003318]

Ejercicio 1092 Funciones afines por partes

Sea $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ una subdivisión de $[0,1]$ y F el conjunto de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua cuya restricción en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es afín. Demostrar que F es de dimensión finita y encontrar una base de F. [003319]

Ejercicio 1093 Proyección y simetría en K^3

En K^3, se dan los subespacios : $\begin{cases} H = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z) \text{ tal que } x+y+z=0\} \\ K = \mathrm{vect}(\overrightarrow{U} = (1,1,2)). \end{cases}$

1. Determinar $\dim H$ y dar una base.
2. Demostrar que $H \oplus K = K^3$.
3. Dar las expresiones analíticas de la proyección y simetría asociadas : π_H y s_H.

Solución ▼ [003320]

Ejercicio 1094 Supplémentaires

Sea $E = H \oplus K$ y $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_k)$ una base de K.

1. Demostrar que para todo $\overrightarrow{a} \in H$, $K_{\overrightarrow{a}} = \mathrm{vect}(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{a}, \dots, \overrightarrow{e}_k + \overrightarrow{a})$ es un suplemento de H.
2. Demostrar que si $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$, entonces $K_{\overrightarrow{a}} \neq K_{\overrightarrow{b}}$.

[003321]

Ejercicio 1095 ****

1. Sea n un entero natural. Demostrar que si n no es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2. Sea $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Verificar que E es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial, luego determinar una base de E.

Solución ▼ [005179]

Ejercicio 1096 **I

$E = \mathbb{R}_n[X]$. Para $0 \leqslant k \leqslant n$, se define $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Demostrar que la familia $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ es una base de E.

Solución ▼ [005572]

Ejercicio 1097 **I Polinomios de interpolación de LAGRANGE

Sean $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ números complejos distintos dos a dos y $b_0, \dots, b_n$ $n+1$ números complejos. Demostrar que existe una única familia de $n+1$ polinomios con coeficientes complejos de grado n, exactamente verificando $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]$, $L_i(a_j) = 1$ si $i = j$ y 0 si no. Demostrar que la familia $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ es una base de $\mathbb{C}_n[X]$. Demostrar que existe un único polinomio P de grado menor o igual que n verificando $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$. Especificar P, luego determinar todos los polinomios que satisfacen las igualdades anteriores.

Solución ▼ [005573]

35 106.05 Dimensión

Ejercicio 1098

Calcular la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $V_1 = (0,1,2,3)$, $V_2 = (1,2,3,4)$ y $V_3 = (2,3,4,5)$. [001014]

Ejercicio 1099

Sea E es un espacio vectorial de dimensión finita y F y G dos subespacios vectoriales de E. Demostrar que :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001015]

Ejercicio 1100

Demostrar que todo subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita es de dimensión finita.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001016]

Ejercicio 1101

Sean P_0, P_1, P_2 y $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ definidos por

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \qquad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2}, \qquad P_2(X) = 2X(X-2), \qquad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Expresar 1, X, X^2 en función de P_0, P_1 y P_2. Se denota $F = \mathrm{vect}\{P_0, P_1\}$ y $G = \mathrm{vect}\{P_2, P_3\}$. Calcular $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ y $\dim(F \cap G)$. Verificar que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

[001017]

Ejercicio 1102

Dar la dimensión del subespacio F de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ generado por $f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $f_4(x) = \cos 2x$. [001018]

Ejercicio 1103

Se consideran en $\mathbb{R}^4$, los vectores :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Sea F el espacio vectorial generado por $\{v_1, v_2, v_3\}$ y sea G el generado por $\{v_4, v_5\}$. Calcular las dimensiones respectivas de F, G, $F \cap G$, $F+G$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001019]

Ejercicio 1104

Sean $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t = 0\}$ y $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y = z+t\}$. Determinar $\dim E$, $\dim F$, $\dim(E+F)$, $\dim(E \cap F)$. [001020]

Ejercicio 1105

Demostrar que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (z, x-y, y+z)$ es un automorfismo. [001021]

Ejercicio 1106

Sea E un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión n. Demostrar que

$$n \text{ es par } \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) / \operatorname{Im} f = \ker f.$$

[001022]

Ejercicio 1107

Demostrar que existe una única forma lineal f sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,2) = 2$ y $f(-2,1) = 5$. Determinar el núcleo y la imagen de f. [001023]

Ejercicio 1108

Determinar según el valor de $x \in \mathbb{R}$ el rango de familia de vectores $e_1 = (1,x,-1), e_2 = (x,1,x), e_3 = (-1,x,1)$. [001024]

Ejercicio 1109

Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^2 \neq 0$ y $f^3 = 0$. Sea $x_0 \in E / f^2(x_0) \neq 0$.

1. Demostrar que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ es una base.
2. Demostrar que el conjunto de endomorfismos que conmutan con f es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}(E)$ de base (id, f, f^2).

[001025]

Ejercicio 1110

Sea E de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar la equivalencia de las tres propiedades :

(i) $\ker f = \ker f^2$. (ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. (iii) $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

[001026]

Ejercicio 1111

Sean E y F ev de dimensiones finitas y $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Demostrar que $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. Deducir que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001027]

Ejercicio 1112

Sea $(f,g) \in (L(E))^2$, donde E es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, demostrar las desigualdades :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \inf(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

(se puede usar $g_{|\ker(f\circ g)} = h$ cuyo núcleo se va a determinar) [001028]

Ejercicio 1113

Sea $(f,g) \in (L(E))^2$, donde E es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, tal que $(f+g)$ es invertible y $fg = 0$. Demostrar que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$. [001029]

Ejercicio 1114

Sea U un subespacio vectorial de E espacio vectorial, y $A = \{f \in L(E) | U \subset \ker(f)\}$. Demostrar que A es un subespacio vectorial de $L(E)$. Si E es de dimensión finita, ¿cuál es la dimensión de A ? [001030]

Ejercicio 1115

Sean $E_0, E_1, \ldots, E_n$, $n+1$ espacios vectoriales en un mismo cuerpo conmutativo K, de dimensiones respectivas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Se supone que existe n aplicaciones lineales $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ tales que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

y además :
- f_0 es inyectiva;
- $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \text{Im} f_{j-1} = \ker(f_j)$;
- f_{n-1} es sobreyectiva.

Demostrar que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

[001031]

Ejercicio 1116

Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos de E, espacio vectorial de dimensión n. Demostrar que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2.$$

Generalizar. [001032]

Ejercicio 1117

Dar un ejemplo de endomorfismo de espacio vectorial inyectivo y no sobreyectivo, luego de un endomorfismo sobreyectivo y no inyectivo. [001033]

Ejercicio 1118

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $f \in L(E)$, demostrar la equivalencia :

$$E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f) \Leftrightarrow \text{Im} f = \text{Im} f^2.$$

Dar un contra-ejemplo cuando $\dim E = +\infty$. [001034]

Ejercicio 1119

Sea $(f,g) \in L(E,F)^2$, con E, F ev de dimensión finita. Se supone

$$\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

Demostrar que :

$$E = \ker(f) + \text{Im} f; \qquad \text{Im} f \cap \text{Im} g = \{0\}.$$

[001035]

Ejercicio 1120

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y $(f,g) \in L(E)^2$, con $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker(f) + \ker(g)$. Demostrar que estas sumas son directas.

[001036]

Ejercicio 1121

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y $(f_1, \ldots, f_k)$ de proyectores de E. Demostrar la equivalencia :

$$\left[\forall (i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow f_i f_j = 0\right] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ es un proyector.}$$

[001037]

Ejercicio 1122

Sea $f \in L(E)$, donde E es un K-espacio vectorial de dimensión n, tal que : $f^2 = -\operatorname{Id}$.

1. Demostrar que f es invertible y que la dimensión de E es par, por lo tanto $n = 2p$.
2. Sea $x \neq 0$, demostrar que x y $f(x)$ son linealmente independientes, y que generan un subespacio estable de E.
3. Demostrar que existen p subespacios bidimensionales estables por f, $E_1, \ldots, E_p$ tales que : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Deducir una "buena" fórmula para calcular f.

[001038]

Ejercicio 1123

Sea E un K espacio vectorial de dimensión finita $n \geqslant 1$. Sea $f \in L(E)$ nilpotente. Se denota $q \in \mathbb{N}^*$ el índice de nilpotencia de f, i.e. :

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Demostrar que : $\exists x_0 \in E$ tal que $\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{q-1}(x_0)\}$ es libre. Deducir $q \leqslant n$.
2. Sea $r = \dim \ker(f)$. Demostrar que $r > 0$ y que

$$\frac{n}{r} \leqslant q \leqslant n + 1 - r.$$

[001039]

Ejercicio 1124 $\dim H = \dim K \Leftrightarrow H$ y K tienen un complemento común

Sean H, K dos sev de un ev E de dimensión finita. Demostrar que $\dim H = \dim K$ si y solo si H y K tienen un complemento común (por inducción en $\operatorname{codim} H$).

Solución ▼ [003322]

Ejercicio 1125 **IT

E denota el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ (provisto de las operaciones usuales). Se consideran los vectores $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (1,1,1,3)$, $e_3 = (2,1,1,1)$, $e_4 = (-1,0,-1,2)$ y $e_5 = (2,3,0,1)$. Sean entonces $F = \operatorname{vect}(e_1, e_2, e_3)$ y $G = \operatorname{vect}(e_4, e_5)$. ¿Cuáles son las dimensiones de F, G, $F \cap G$ y $F + G$?

Solución ▼ [005183]

Ejercicio 1126 **IT

Sea $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \geqslant 2$. Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos de E. Determinar $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interpretar el resultado cuando $n = 2$ o $n = 3$.

Solución ▼ [005184]

Ejercicio 1127 ***I

Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial de dimensión finita en $\mathbb{K}$. Demostrar que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Solución ▼ [005575]

Ejercicio 1128 **

Sean F, G y H tres subespacios de un espacio vectorial E de dimensión finita en $\mathbb{K}$. Demostrar que :

$$\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H).$$

Encontrar un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.

Solución ▼ [005576]

Ejercicio 1129 ***

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n subespacios vectoriales de un espacio E de dimensión finita en $\mathbb{K}$ $(n \geqslant 2)$. Demostrar que $\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leqslant \dim F_1 + \cdots + \dim F_n$, con igualdad si y solo si la suma es directa.

Solución ▼ [005577]

Ejercicio 1130 **I

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n \geqslant 3$. Demostrar que la intersección de $n-1$ hiperplanos de E es no nulo.

Solución ▼ [005578]

Ejercicio 1131 **

Sean $(x_1, .., x_n)$ una familia de n vectores de rango r y $(x_1, \ldots, x_m)$ una sub-familia de rango s ($m \leqslant n$ y $s \leqslant r$). Demostrar que $s \geqslant r + m - n$. ¿Caso de igualdad ?

Solución ▼ [005579]

Ejercicio 1132 **

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita y sean f y g dos aplicaciones lineales de E en F. Demostrar que $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Solución ▼ [005580]

Ejercicio 1133 **

Sean E, F y G, tres $\mathbb{K}$-espacios vectoriales luego $f \in \mathscr{L}(E,F)$ y $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Demostrar que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

Solución ▼ [005581]

36 106.99 Otro

37 107.01 Definición

Ejercicio 1134

Notaciones :
$\mathscr{C}$: conjunto de funciones numéricas continuas en $[0,1]$.
$\mathscr{C}_d$: conjunto de funciones numéricas que tienen una derivada continua en $[0,1]$.
$\mathscr{C}(\mathbb{R})$ y $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$: definidos de manera análoga para las funciones definidas en $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}$: conjunto de polinomios en $\mathbb{R}$.
$\mathscr{P}_n$: conjunto de polinomios en $\mathbb{R}$, de grado $\leqslant n$.

Decir si las siguientes aplicaciones son aplicaciones lineales :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
5. $\mathscr{C} \to \mathscr{C} : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$.
6. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.
7. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto f(1/4) - \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,dt$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x + 5y$.
9. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$.
10. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \operatorname{sen}(3x + 5y)$.
11. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
12. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
13. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$ y0 si no.
14. $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_d : f \mapsto \{x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\}$.
15. $\mathscr{P} \to \mathscr{P}_n : A \mapsto$ cociente de A por B de orden n según las potencias crecientes (B y n fijos, con $B(0) \neq 0$).
16. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$ definido por : $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ si $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{0}$ y 0 si no.
17. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{V}$, donde $\overrightarrow{V} = (4,-1,1/2)$.
18. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
19. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.
20. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} f(t) - \min\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.

21. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ la solución del sistema de ecuaciones en (u,v) :

$$\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$$

22. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ el simétrico de (x,y), con respecto a la recta de ecuación $x+y-a=0$ (discutir de acuerdo a los valores de a).
23. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto$ la proyección de (x,y,z) en el plano $x+y+z-a=0$, paralelamente a Oz (discutir de acuerdo a los valores de a).
24. $\mathscr{C}_d \to \mathscr{C} : f \mapsto f'$.
25. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto (2x-3y+z, x-y+z/3)$.
26. $\mathbb{R} \to \mathscr{C}d : \lambda \mapsto$ la solución de la ecuación diferencial $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$ valiendo λ en $x_0 = 1$.
27. $\mathscr{C} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1+|f(t)|)\,dt$.
28. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto$ la 17-ésimo decimal de x (en escritura decimal).
29. $\mathscr{C}_d \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)\,dt$.
30. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$.
31. $\mathbb{R} \times \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : (\lambda, f) \mapsto$ la primitiva de f que vale λ en $x_0 = \pi$.
32. $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \operatorname{sen} x\}$.

[000927]

Ejercicio 1135

Sean f y g, aplicaciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, definidas por $f(z) = \bar{z}$ y $g(z) = \operatorname{Re}(z)$. Demostrar que f y g son lineales en $\mathbb{C}$ en tanto que $\mathbb{R}$-ev, y no lineales en $\mathbb{C}$ en tanto que $\mathbb{C}$-ev [000928]

Ejercicio 1136

Determinar si las aplicaciones f_i siguientes son lineales :

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (2x+y, x-y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3, & f_5(x,y) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000929]

Ejercicio 1137

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y ϕ una aplicación lineal de E en sí mismo tal que $\phi^n = 0$ y $\phi^{n-1} \neq 0$. Sea $x \in E$ tal que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Demostrar que la familia $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ es una base de E.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000930]

Ejercicio 1138

Entre las siguientes aplicaciones, establecer las son formas lineales en $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$f \mapsto f(0), \quad f \mapsto f(1)-1, \quad f \mapsto f''(3), \quad f \mapsto (f'(2))^2, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

[002431]

Ejercicio 1139

1. Se provee $\mathbb{R}^2$ de un marco ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Demostrar que una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ está determinada únicamente por sus valores en los vectores $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$.
2. ¿Cuál es la matriz de simetría axial con respecto al eje de abscisas en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$?
3. ¿Cuál es la matriz de la proyección ortogonal sobre el eje de abscisas en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$?
4. ¿Cuál es la matriz de la rotación de ángulo θ y de centro O en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$?
5. ¿Cuál es la matriz de la homotecia de centro O y de cociente k en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$?
6. ¿Cuál es la matriz de simetría central de centro O en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$?
7. ¿Es una traslación, una aplicación lineal ?

[002740]

Ejercicio 1140

Sea f la función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por :

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, 2x+2y+2z+2t).$$

1. Demostrar que f es lineal y determinar su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
2. Verificar que los vectores $\overrightarrow{a} = (1,-1,0,0)$, $\overrightarrow{b} = (0,1,-1,0)$ y $\overrightarrow{c} = (0,0,1,-1)$ pertenecen a $\ker f$.
3. Verificar que el vector $\overrightarrow{d} = (5,5,5,10)$ pertenece a $\mathrm{Im} f$.

[002741]

Ejercicio 1141

Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por :

$$f(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z).$$

1. Justificar que f es lineal.
2. Dar la matriz de A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Determinar una base y la dimensión del núcleo de f, denotado $\ker f$.
   (b) ¿La aplicación f es inyectiva ?
4. (a) Dar el rango de f y una base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) ¿La aplicación f es sobreyectiva ?

[002742]

Ejercicio 1142 Endomorfismo tal que todo vector no nulo es propio

Sea E un espacio vectorial y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que para todo $\overrightarrow{x} \in E$, la familia $\left(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})\right)$ es ld.

1. Demostrar que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, existe un único escalar $\lambda_{\vec{x}}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
2. Comparar $\lambda_{\vec{x}}$ y $\lambda_{\vec{y}}$, cuando $(\vec{x},\vec{y})$ es libre.
3. Demostrar que f es una homotecia.

[003309]

Ejercicio 1143 Aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales sobre $\mathbb{C}$

Se considera que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

1. Dar una base de $\mathbb{C}$.
2. Demostrar que todo endomorfismo de $\mathbb{C}$ se puede escribir en la forma : $f(z) = az + b\bar{z}$, con $a, b \in \mathbb{C}$.
3. ¿Hay una CNS sobre a y b, para que f sea biyectivo ?

Solución ▼ [003312]

Ejercicio 1144 **T

1. Verificar que existe una única aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ verificando $f((1,0,0)) = (1,1)$, luego $f((0,1,0)) = (0,1)$ y $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calcular $f((3,-1,4))$ y $f((x,y,z))$ en general.
2. Determinar $\ker f$. Proporcionar una base. Dar un suplemento de $\ker f$ en $\mathbb{R}^3$ y verificar que es isomorfo a $\operatorname{Im} f$.

Solución ▼ [005170]

Ejercicio 1145 ***I

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$, el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n (n entero natural dado). Sea φ la aplicación definida por : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Verificar que φ es un endomorfismo de E.
2. Determinar $\ker \varphi$ y $\operatorname{Im} \varphi$.

Solución ▼ [005186]

Ejercicio 1146 **

Sea $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}, \\ z & \mapsto & z + a\bar{z} \end{array}$ donde a es un número complejo dado no nulo. Demostrar que f es un endomorfismo del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$. ¿f es un endomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$? Determinar el núcleo y la imagen de f.

Solución ▼ [005188]

Ejercicio 1147 **

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se establece $f((x,y)) = (x',y')$.

1. Recordar la escritura general de (x',y') en función de (x,y).
2. Se define $z = x + iy$ y $z' = x' + iy'$ (donde $i^2 = -1$), demostrar que : $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C},\ z' = az + b\bar{z}$.
3. Recíprocamente, demostrar que la expresión anterior define un único endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ (en claro, la expresión compleja de un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ es $z' = az + b\bar{z}$).

Solución ▼ [005189]

---

38 107.02 Imagen y núcleo, teorema del rango

Ejercicio 1148

Sean F y G dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, se define la aplicación $f : F \times G \to \mathbb{R}^n$ por $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

1. Demostrar que f es lineal.
2. Determinar el núcleo y la imagen de f.

[000931]

Ejercicio 1149

Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que las propiedades (1) a (3) son equivalentes.

(1) $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \bigoplus \ker(f)$, (2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, (3) $\ker(f) = \ker(f^2)$.

[000932]

Ejercicio 1150

Sean : E, F y G tres subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^N$, f una aplicación lineal de E en F y g una aplicación lineal de F en G. Se recuerda que $g \circ f$ es la aplicación de E en G definida por $g \circ f(v) = g(f(v))$, para todo vector v de E.

1. Demostrar que $g \circ f$ es una aplicación lineal.
2. Demostrar que $f\big(\ker(g \circ f)\big) = \ker g \cap \mathrm{Im} f$.

[000933]

Ejercicio 1151

Sea E un espacio vectorial y sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales de dimensión finita de E, se define la aplicación $f\colon E_1 \times E_2 \to E$ por $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

1. Demostrar que f es lineal.
2. Determinar el núcleo y la imagen de f.
3. ¿Qué da el teorema del rango ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000934]

Ejercicio 1152

Sea E el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n. Para $p \leqslant n$ se denota e_p el polinomio $x \mapsto x^p$. Sea f la aplicación definida en E por $f(P) = Q$, con $Q(x) = P(x+1) + P(x-1) - 2P(x)$.

1. Demostrar que f es una aplicación lineal de E en E.
2. Calcular $f(e_p)$; ¿cuál es su grado ? Deducir $\ker f$, $\mathrm{Im} f$ y el rango de f.
3. Sea Q un polinomio de $\mathrm{Im} f$; demostrar que existe un único polinomio P tal que : $f(P) = Q$ y $P(0) = P'(0) = 0$.

[000935]

Ejercicio 1153

Sea E, F, G tres espacios vectoriales, f y g dos aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; demostrar que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \operatorname{Im} f) = f^{-1}(\ker g).$$

[000936]

Ejercicio 1154

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, F y N dos subespacios vectoriales de E ; dar una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación lineal f de E en E verificando : $f(E) = F$ y $\ker f = N$.
[000937]

Ejercicio 1155

Sea E, F, G tres espacios vectoriales de dimensiones respectivas n, p, q, y sean f y g dos aplicaciones lineales $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ tales que $g \circ f = 0$. ¿Cuál es la relación entre el rango de f y el de g ? [000938]

Ejercicio 1156

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, f una aplicación lineal de E en E ; demostrar que las propiedades (1) a (3) son equivalentes :

(1) $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$, (2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, (3) $\ker f = \ker f^2$.

[000939]

Ejercicio 1157

Sea E un espacio vectorial, y u una aplicación lineal de E en E. Decir si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas :

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ es libre, es lo mismo con $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ es libre, es lo mismo con $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ es generatriz, es lo mismo con $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ es generatriz, es lo mismo con $e_1, e_2, \dots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ es una base de $\operatorname{Im} u$, entonces $e_1, e_2, \dots, e_p$ es una base de un subespacio vectorial suplemento de $\ker u$.

[000940]

Ejercicio 1158

Sean E un espacio vectorial y φ una aplicación lineal de E en E. Se supone que $\ker(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$. Demostrar que, si $x \notin \ker(\varphi)$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$: $\varphi^n(x) \neq 0$.

Solución ▼ [000941]

Ejercicio 1159

Para aplicaciones lineales $f : E \to F$, $g : F \to G$, establecer la equivalencia $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \ker g$. Sea f un endomorfismo de una ev E, verificando la identidad $f^2 + f - 2i_E = 0$. Establecer $\operatorname{Im}(f - i_E) \subset \ker(f + 2i_E)$; $\operatorname{Im}(f + 2i_E) \subset \ker(f - i_E)$; $E = \ker(f - i_E) \oplus \ker(f + 2i_E)$. [000942]

Ejercicio 1160

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y f una aplicación lineal de E en sí mismo. Demostrar que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes :

(i) $\ker f = \operatorname{Im} f$, (ii) $f^2 = 0$ y $n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000943]

Ejercicio 1161

Sean E un espacio vectorial y F un subespacio vectorial de E de dimensión finita. Sea f una aplicación lineal de E en sí mismo.

1. Demostrar que, si $F \subset f(F)$, entonces $f(F) = F$.
2. Demostrar que, si f es inyectiva y $f(F) \subset F$, entonces $f(F) = F$.

[000944]

Ejercicio 1162

Sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ dos aplicaciones lineales. Demostrar que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ y $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(f)$. [000945]

Ejercicio 1163

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y φ una aplicación lineal de E en E. Sea $K_n = \ker(\varphi^n)$ y $I_n = \operatorname{Im}(\varphi^n)$. Demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se tiene $K_n = K_{n_0}$. Deducir que para todo $n \geqslant n_0$ se tiene igualmente $I_n = I_{n_0}$. [000946]

Ejercicio 1164

Sean f y g dos endomorfismos de E tales que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$ son estables por g.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000947]

Ejercicio 1165

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^3 = f^2 + f$. Demostrar que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ (se observa que $f \circ (f^2 - f - \operatorname{Id}) = 0$).
[000948]

Ejercicio 1166

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000949]

Ejercicio 1167

Sea U un subespacio vectorial de E espacio vectorial, y $A = \{f \in L(E) | U \subset \ker(f)\}$. Demostrar que A es un subespacio vectorial de $L(E)$. [000950]

Ejercicio 1168

Dar ejemplos de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ verificando :

1. $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.
2. $\ker(f)$ incluido estrictamente en $\operatorname{Im}(f)$.
3. $\operatorname{Im}(f)$ incluido estrictamente en $\ker(f)$.

Solución ▼ [000951]

Ejercicio 1169

Sea $(u,v) \in (L(E))^2$, tales que $u^2 = u$ y $vu = 0$. Demostrar que $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. [000952]

Ejercicio 1170

Sea $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ una base de $\mathbb{R}^3$, y λ un número real. Demostrar que las relaciones

$$\begin{cases} \phi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \\ \phi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \\ \phi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \lambda \overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

define una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Escribir la imagen del vector $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$. ¿Cómo escoger λ, para que ϕ sea inyectiva ?, ¿sobreyectiva ? [000953]

Ejercicio 1171

Sea E un espacio vectorial de dimensión 3, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E, y t un parámetro real.

Demostrar que la dada de $\begin{cases} \phi(e_1) = e_1 + e_2 \\ \phi(e_2) = e_1 - e_2 \\ \phi(e_3) = e_1 + te_3 \end{cases}$ define una aplicación lineal ϕ de E en E. Escribir la transformada del vector $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. ¿Cómo escoger t, para que ϕ sea inyectiva ? sobreyectiva ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000954]

Ejercicio 1172

E es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, f una aplicación lineal de E en E, construir en los siguientes tres casos dos aplicaciones lineales biyectivas u y v de E en E tales que $f = u - v$.

— f es biyectiva.
— $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.
— f es cualquiera.

[000955]

Ejercicio 1173

Para las siguientes aplicaciones lineales, determinar $\ker f_i$ y $\operatorname{Im} f_i$. Deducir si f_i es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

$$\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, && f_1(x,y) = (2x+y, x-y), \\ &f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, && f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y), \\ &f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, && f_3(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y), \\ &f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3, && f_4(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big). \end{aligned}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000956]

Ejercicio 1174

Sea $f \in L(E)$ no nulo; demostrar que f es inyectiva si y solo si para todo par (E_1, E_2) de subespacios suplementarios de E, la suma $f(E_1) + f(E_2)$ es directa (i.e. $f(E_1)$ y $f(E_2)$ son suplementarios). [000957]

Ejercicio 1175

Sea $f \in L(E)$, donde E es un $K-$espacio vectorial. Se supone que $\forall x \in E$, $\exists \lambda \in K$, $f(x) = \lambda x$. Demostrar que $\exists \mu \in K$, $f = \mu\,\mathrm{Id}$. [000958]

Ejercicio 1176

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$ y sean A y B dos polinomios con coeficientes reales de grado $n+1$. Se considera la aplicación f que a todo polinomio P de E, asocia el resto de la división euclidiana de AP por B.

1. Demostrar que f es un endomorfismo de E.
2. Demostrar la equivalencia f es biyectiva $\iff$ A y B son primos entre sí.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000959]

Ejercicio 1177

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$. Demostrar que f es un automorfismo. [000960]

Ejercicio 1178

Sea E un $\mathbb{C}$–espacio vectorial y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Demostrar que f es un automorfismo.
2. Demostrar que $E = \ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$.
3. Deducir de 2. que si E es de dimensión finita n, existe una base $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, tal que $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$, con $\lambda_i = 1$ o $\lambda_i = 2$.

[000961]

Ejercicio 1179

Demostrar que si $p < q$ no existe una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$. Demostrar que si $q < p$ tampoco existe una aplicación lineal inyectiva de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$. [000962]

Ejercicio 1180

Sea E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita y ϕ una aplicación lineal de E en F. Demostrar que ϕ es un isomorfismo si y solo si la imagen por ϕ de todo base de E es una base de F.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000963]

Ejercicio 1181

1. Sean E y F dos espacios vectoriales y φ una aplicación lineal biyectiva de E en F. Demostrar que la biyección recíproca φ^{-1} es lineal. Tal aplicación se llama isomorfismo de espacios vectoriales.
2. Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que existe un isomorfismo de espacios vectoriales de E, con valores en F si y solo si $\dim(E) = \dim(F)$.

[000964]

Ejercicio 1182

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita φ y ψ dos aplicaciones lineales de E en E tales que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$. Demostrar que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. [000965]

Ejercicio 1183

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n, y u, v dos endomorfismos de E.

1. Demostrar que $u \circ v = 0$ si y solo si la imagen de v está contenida en el núcleo de u.
2. Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de E. Se supone en esta pregunta que u y v se expresan en esta base por
$$u(e_1) = e_1,\ u(e_i) = 0,\ \text{si } i \neq 1, \qquad v(e_2) = e_2,\ v(e_i) = 0,\ \text{si } i \neq 2.$$
Encontrar las matrices de u, v y $u \circ v$ en esta base.
3. Si u es cualquier endomorfismo no nulo de E, ¿qué condición debe verificar el núcleo de u, para que exista un endomorfismo no nulo v tal que $u \circ v = 0$? ¿En este caso, u es biyectiva?

[002441]

Ejercicio 1184

1. Sea f una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es la dimensión del núcleo de f?
2. Sea g una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}^{26}$ en $\mathbb{R}^{100}$. ¿Cuál es la dimensión de la imagen de g?
3. ¿Existe una aplicación lineal biyectiva entre $\mathbb{R}^{50}$ y $\mathbb{R}^{72}$?

[002743]

Ejercicio 1185

Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar una base núcleo de A.
2. Determinar una base de la imagen de A.

[002744]

Ejercicio 1186

Sea la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar una base núcleo de B.
2. Determinar una base de la imagen de B.

[002745]

Ejercicio 1187

Sea la matriz
$$C=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&2&0\\2&-1&-1\\2&4&0\\1&7&1\end{pmatrix}.$$

1. Determinar una base núcleo de C.
2. Determinar una base de la imagen de C.

[002746]

Ejercicio 1188

Para cada par de matrices (A_i,b_i), $1\leqslant i\leqslant 5$, abajo :

1. dar la naturaleza del conjunto de soluciones del sistema $A_iX=b_i$;
2. dar una representación paramétrica del conjunto de soluciones de $A_iX=b_i$;
3. dar una base de la imagen y una base del núcleo de A_i.

a) $A_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$ b) $A_2=\begin{pmatrix}1&2&0&1&3\\0&1&1&1&2\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$

c) $A_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$ d) $A_4=\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\0&1&1&2&2\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$

e) $A_5=\begin{pmatrix}1&2&0&1&1\\0&1&1&2&2\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad b_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix};$

[002770]

Ejercicio 1189

Calcular una base de la imagen y una base del núcleo de la aplicación lineal

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^3&\longrightarrow\mathbb{R}^5\\(x,y,z)&\longmapsto(x+y,x+y+z,2x+y+z,2x+2y+z,y+z)\end{aligned}$$

¿Cuál es el rango de f ? [002771]

Ejercicio 1190 $f\circ g\circ f=f$ y $g\circ f\circ g=g$

Sean $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tales que $f\circ g\circ f=f$ y $g\circ f\circ g=g$.

1. Demostrar que $E=\ker f\oplus\operatorname{Im} g$.

2. Demostrar que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Solución ▼ [003310]

Ejercicio 1191 $f^3 = \mathrm{Id}$

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Demostrar que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$.
2. Demostrar que $\ker(f - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id})$ y $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}) = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id})$.

[003311]

Ejercicio 1192 Suplementario de un hiperplano

Sea E un K-ev y $f : E \to K$ una forma lineal no idénticamente nula. Se denota $H = \ker f$.

1. Demostrar que $\operatorname{Im} f = K$.
2. Sea $\overrightarrow{u} \in E \setminus H$ y $F = \operatorname{vect}(\overrightarrow{u})$. Demostrar que $F \oplus H = E$.

[003313]

Ejercicio 1193 Conmutantes iterados

Sea $u \in \mathscr{L}(E)$. Se define para $v \in \mathscr{L}(E)$: $\varphi(v) = v \circ u - u \circ v$, y se denota $c_i = \ker \varphi^i$ ($c_0 = \{0\}$, c_1 es el conmutante de u, c_2 es el conjunto de los v tales que $v \circ u - u \circ v$ conmuta con u, $\ldots$).

1. Calcular $\varphi(v \circ w)$ en función de $v, w, \varphi(v)$ y $\varphi(w)$.
2. Demostrar que $c = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_i$ es una subálgebra de $\mathscr{L}(E)$.

Solución ▼ [003316]

Ejercicio 1194 Aplicaciones del teorema del rango

Sean E, F dos K-ev y $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Demostrar que si H es un sev de E, entonces $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \ker f)$.
2. Demostrar que si K es un sev de F, entonces $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\ker f)$.

[003327]

Ejercicio 1195 Aplicación del teorema del rango

Sean E, F dos ev de dimensiones finitas y $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Demostrar que $\dim(\ker(u + v)) \leqslant \dim(\ker u \cap \ker v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$. (Considerar $w = u_{|\ker(u+v)}$.) [003328]

Ejercicio 1196 Rango de $f \circ g$

Sea E un ev de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Establecer :

1. $\dim \ker(f \circ g) \leqslant \dim \ker f + \dim \ker g$.
2. $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.
3. $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

[003329]

Ejercicio 1197 CNS para que $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$ sean suplementarios

Sea E un ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :

1. $\ker f^2 = \ker f$. 2. $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. 3. $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$. 4. $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\overrightarrow{0}\}$. 5. $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.

[003330]

Ejercicio 1198 $fog = 0$

Sea E un ev de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tales que $f \circ g = 0$. Encontrar una desigualdad que relaciona los rangos de f y de g. ¿Se puede tener igualdad ? [003331]

Ejercicio 1199 Rango de $f + g$

Sean E, F dos ev, E de dimensión finita, y $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Demostrar que $\operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
2. Demostrar que existe igualdad si y solo si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}_F\}$ y $\ker f + \ker g = E$.

Solución ▼ [003332]

Ejercicio 1200 $\ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$

Sean E un ev de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tales que $\ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$. Demostrar que las sumas son directas. [003333]

Ejercicio 1201 $f^3 = 0$

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^3 = 0$.

1. Demostrar que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim E$.
2. Demostrar que $2 \operatorname{rg} f^2 \leqslant \operatorname{rg} f$ (aplicar el teorema del rango a $f_{|\operatorname{Im} f}$).

[003334]

Ejercicio 1202 $f \circ g = 0$ y $f + g \in \mathrm{GL}(E)$

Sea E de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tales que : $\begin{cases} f \circ g = 0 \\ f + g \in \mathrm{GL}(E). \end{cases}$

Demostrar que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.

Solución ▼ [003335]

Ejercicio 1203 f tal que $\operatorname{Im} f$ y $\ker f$ son impuestos

Sea E un K-ev de dimensión finita y H, K dos sev fijos de E.

1. ¿Bajo qué condiciones existe un endomorfismo $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\operatorname{Im} f = H$ y $\ker f = K$?
2. Se denota $\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{L}(E) \text{ tal que } \operatorname{Im} f = H \text{ y } \ker f = K\}$. Demostrar que $\mathscr{E}$ es un grupo para $\circ$ si y solo si $H \oplus K = E$.

Solución ▼ [003336]

Ejercicio 1204 Teoremas de factorización

Sean E,F,G tres K-ev con $\dim(G)$ finita.

1. Sean $u \in \mathscr{L}(F,E)$ y $v \in \mathscr{L}(G,E)$. Demostrar que existe $h \in \mathscr{L}(G,F)$ tal que $v = u \circ h$ si y solo si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.
2. Sean $u \in \mathscr{L}(E,F)$ y $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Demostrar que existe $h \in \mathscr{L}(G,F)$ tal que $u = h \circ v$ si y solo si $\ker v \subset \ker u$.

[003337]

Ejercicio 1205 Núcleos iterados

Sea E un ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Sea $N_k = \ker(f^k)$ y $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

1. Demostrar que la sucesión (N_k) es creciente (para la inclusión) y que la sucesión (I_k) es decreciente.
2. Sea p tal que $N_p = N_{p+1}$. Justificar la existencia de p y demostrar que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \dots$
3. Demostrar que las sucesiones (N_k) y (I_k) son estacionarias a partir del mismo rango p.
4. Demostrar que $N_p \oplus I_p = E$.
5. Demostrar que la sucesión $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ es decreciente.

[003349]

Ejercicio 1206 Dimensión de los g tal que $f \circ g = 0$ y/o $g \circ f = 0$

Sean $f \in \mathscr{L}(E)$, $K = \ker f$, $I = \operatorname{Im} f$, $\mathscr{K} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tal que } f \circ g = 0\}$ y $\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tal que } g \circ f = 0\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{K}$ y $\mathscr{I}$ son sev de $\mathscr{L}(E)$.
2. Sea $g \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que : $g \in \mathscr{K} \iff \operatorname{Im} g \subset K$, y : $g \in \mathscr{I} \iff \ker g \supset I$.
3. (a) Demostrar que la aplicación $\Phi : \mathscr{K} \to \mathscr{L}(E,K), g \mapsto g^{|K}$ es un isomorfismo de ev. Deducir $\dim \mathscr{K}$.
   (b) Determinar lo mismo $\dim \mathscr{I}$ introduciendo un suplementario I' de I.
   (c) Determinar también $\dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I})$.

Solución ▼ [003350]

Ejercicio 1207 Rango de $f \mapsto u \circ f \circ v$

Sean $u,v \in \mathscr{L}(E)$. Determinar el rango del endomorfismo de $\mathscr{L}(E)$: $f \mapsto u \circ f \circ v$.

Solución ▼ [003351]

Ejercicio 1208 ideales de $\mathscr{L}(E)$

Un ideal a la izquierda de $\mathscr{L}(E)$ es un sev $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}(E)$ tal que : $\forall f \in \mathscr{I}$, $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ g \in \mathscr{I}$. Sea $\mathscr{I}$ un ideal de izquierda.

1. Demostrar que si $f \in \mathscr{I}$ y $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$, entonces $g \in \mathscr{I}$.
2. Sean $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$. Demostrar que existe $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(E)$ tales que $\operatorname{Im}(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2) = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$.

3. Sea $f \in \mathscr{I}$ tal que $\operatorname{rg}(f)$ sea maximal. Demostrar que :

$$\mathscr{I} = \{g \in \mathscr{L}(E) \text{ tal que } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f\} = \{f \circ g \text{ tal que } g \in \mathscr{L}(E)\}.$$

[003353]

Ejercicio 1209 **I

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y f un elemento de $\mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$ y $[\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \ker f + \operatorname{Im} f]$ (donde $f^2 = f \circ f$).
2. Por definición, un endomorfismo p de E es un proyector si y solo si $p^2 = p$. Demostrar que

$$[p \text{ proyector} \Leftrightarrow \operatorname{Id} - p \text{ proyector}]$$

ya que

$$[p \text{ proyector} \Rightarrow \operatorname{Im} p = \ker(\operatorname{Id} - p) \text{ y } \ker p = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - p) \text{ y } E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p].$$

3. Sean p y q dos proyectores, demostrar que : $[\ker p = \ker q \Leftrightarrow p = p \circ q \text{ y } q = q \circ p]$.
4. p y q son dos focos verificando $p \circ q + q \circ p = 0$, demostrar que $p \circ q = q \circ p = 0$. Dar una condición necesaria y suficiente para que $p + q$ sea un proyector cuando p y q, lo son. En este caso, determinar $\operatorname{Im}(p+q)$ y $\ker(p+q)$ en función de $\ker p$, $\ker q$, $\operatorname{Im} p$ y $\operatorname{Im} q$.

Solución ▼ [005171]

Ejercicio 1210 ****

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1. Demostrar que $[\ker v \subset \ker u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ u = w \circ v]$.
2. Deducir que $[v \text{ inyectivo} \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ w \circ v = \operatorname{Id}_E]$.

Solución ▼ [005181]

Ejercicio 1211 ***

Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales.

— Sea $f : \begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto P' \end{array}$. ¿$f$ es lineal, inyectiva, sobreyectiva ? Proporcionar un suplemento de $\ker f$.

— Las mismas preguntas con $g : \begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto \int_0^x P(t)\,dt \end{array}$.

Solución ▼ [005182]

Ejercicio 1212 **T

Sean $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ y $f(e_4) = e_2 - e_4$. Determinar $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$.

Solución ▼ [005187]

Ejercicio 1213 **I

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$ y E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y u y v dos aplicaciones lineales de E en F. Demostrar que : $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

Solución ▼ [005190]

Ejercicio 1214 ****

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$ y E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n.

1. Demostrar que, para todo endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$, se tiene :
$$(\ker f = \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ y } n = 2\operatorname{rg} f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ y } \exists g \in \mathscr{L}(E)/\ f\circ g + g\circ f = \mathrm{Id}_E).$$
2. Se supone $\ker f = \operatorname{Im} f$. Demostrar que existe una base $(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_p)$ de E tal que :
$$\forall i \in \{1,\dots,p\},\ f(u_i) = 0 \text{ y } f(v_i) = u_i.$$

Solución ▼ [005191]

Ejercicio 1215 ***I El teorema del núcleo iterado

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y f un endomorfismo de E no inyectivo. Para k entero natural dado, se establece $N_k = \ker f^k$ y $I_k = \operatorname{Im} f^k$ (con la convención $f^0 = \mathrm{Id}_E$).

1. Demostrar que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k \subset N_{k+1} \text{ y } I_{k+1} \subset I_k)$.
2. (a) Demostrar que : $(\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2})$.
   (b) Demostrar que : $\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall k \in \mathbb{N},\ (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ y } k \geqslant p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
   (c) Demostrar que $p \leqslant n$.
3. Demostrar que si $k < p$, $I_k = I_{k+1}$ y si $k \geqslant p$, $I_k = I_{k+1}$.
4. Demostrar que $E = I_p \oplus N_p$ y que f induce un automorfismo de I_p.
5. Sea $d_k = \dim I_k$. Demostrar que la sucesión $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente (en otros términos la sucesión de imágenes iteradas I_k decrece cada vez menos rápido).

Solución ▼ [005192]

Ejercicio 1216 ***I

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión cualquier sobre $\mathbb{K}$ y f un endomorfismo de E verificando $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0$. Demostrar que $E = \ker(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3\mathrm{Id})$.

Solución ▼ [005194]

Ejercicio 1217 ***

Sean E un espacio de dimensión finita y F y G dos subespacios de E. Condición necesaria y suficiente en F y G, para que exista un endomorfismo f de E tal que $F = \ker f$ y $G = \operatorname{Im} f$.

Solución ▼ [005582]

Ejercicio 1218 ***

Sean E un espacio vectorial no nulo de dimensión finita y f un endomorfismo de E. Demostrar que :

1. $(f$ no inyectiva$) \Leftrightarrow (f = 0$ o f divisor de cero a la izquierda$)$.
2. $(f$ no sobreyectiva$) \Leftrightarrow (f = 0$ o f divisor de cero a la derecha$)$.

Solución ▼ [005583]

Ejercicio 1219 **I Núcleos iterados

Sean E un espacio vectorial y f un endomorfismo de E. Para $k \in \mathbb{N}$, se establece $N_k = \ker(f^k)$ y $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$, luego $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ y $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$. ($N$ es el nilespacio de f e I el corazón de f)

1. (a) Demostrar que las sucesiones $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son respectivamente crecientes y decrecientes para la inclusión.
   (b) Demostrar que N e I son estables por f.
   (c) Demostrar que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})$.
2. Se supone además que $\dim E = n$ entero natural no nulo.
   (a) Sea $A = \{k \in \mathbb{N} / \ N_k = N_{k+1}\}$ y $B = \{k \in \mathbb{N} / \ I_k = I_{k+1}\}$. Demostrar que existe un entero $p \leqslant n$ tal que $A = B = \{k \in \mathbb{N} / \ k \geqslant p\}$.
   (b) Demostrar que $E = N_p \oplus I_p$.
   (c) Demostrar que $f_{|N}$ es nilpotente y que $f_{|I} \in \mathrm{GL}(I)$.
3. Encontrar ejemplos donde
   (a) A es vacío y B es no vacío,
   (b) A es no vacío y B es vacío,
   (c) (****) A y B son vacíos.
4. Para $k \in \mathbb{N}$, se establece $d_k = \dim(I_k)$. Demostrar que la sucesión $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

Solución ▼ [005586]

Ejercicio 1220 ***

Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y f una aplicación lineal de E hacia F.

1. Demostrar que $[(\forall g \in \mathscr{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ biyectiva}]$.
2. Sea $\dim E = p$, $\dim F = n$ y $\operatorname{rg} f = r$. Calcular la dimensión de $\{g \in \mathscr{L}(F,E) / \ f \circ g \circ f = 0\}$.

Solución ▼ [005601]

Ejercicio 1221 **I

Sea $E = \mathbb{K}_n[X]$. u es el endomorfismo de E definido por : $\forall P \in E,\ u(P) = P(X+1) - P$.

1. Determinar $\ker u$ y $\operatorname{Im} u$.
2. Determinar explícitamente una base en la que la matriz de u es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005602]

39 107.03 Morfismos particulares

Ejercicio 1222

Sean U y V dos conjuntos no vacíos y f una aplicación de U, con valores en V. El *gráfico* de f es el subconjunto de $U \times V$ definido por $\mathscr{G}_f = \{(x,y) \in U \times V$ tales que $y = f(x)\}$.

1. Se supone ahora que U y V son espacios vectoriales. Recordar la definición de la estructura de espacio vectorial de $U \times V$.
2. Demostrar que una parte H de $U \times V$ es el gráfico de una aplicación lineal de U en V si y solo si se cumplen las siguientes tres condiciones :
   i) La proyección canónica $H \to U$ definida por $(x,y) \mapsto x$ es sobreyectiva.
   ii) H es un subespacio vectorial de $U \times V$.
   iii) $H \cap (\{0_U\}) \times V) = \{0_{U\times V}\}$. ($0_U$ y $0_{U\times V}$ son los elementos neutros respectivos de U y $U \times V$.)
3. Se identifica $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ por el isomorfismo $(x,y,z,t) \mapsto ((x,y),(z,t))$. Indicar condiciones necesarias y suficientes para E sea la gráfica de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.
4. Demostrar que E es el gráfico de una aplicación lineal φ de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. Determinar su matriz en una base que se definirá de antemano.

[000966]

Ejercicio 1223 Proyector e involución

Sea E un espacio vectorial ; se denota i_E la identidad en E. Un endomorfismo u de E es un **proyector** si $u \circ u = u$.

1. Demostrar que si u es un proyector entonces $i_E - u$ es un proyector. Verificar también que $\operatorname{Im} u = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ y que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.
   Un endomorfismo u de E es llamado *involutivo* si $u \circ u = i_E$.
2. Demostrar que si u es involutivo entonces u es biyectiva y $E = \operatorname{Im}(i_E + u) \oplus \operatorname{Im}(i_E - u)$.
   Sea $E = F \oplus G$ y sea $x \in E$ que se escribe de una manera única $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G. Sea $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Demostrar que u es involutivo, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ y $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Demostrar que si u es un proyector, $2u - i_E$ es involutivo y que todo endomorfismo involutivo puede ponerse de esta forma.

[000967]

Ejercicio 1224

Sean $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ y $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. Se designa por ε la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

1. Dar una base $\{e_1, e_2\}$ de P y $\{e_3\}$ una base de D. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ ya que $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
2. Sea p la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre P, paralelamente a D. Determinar $\operatorname{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$, luego $A = \operatorname{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$. Verificar $A^2 = A$.
3. Sea s la simetría de $\mathbb{R}^3$, con respecto a P, paralelamente a D. Determinar $\operatorname{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$, luego $B = \operatorname{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$. Verificar $B^2 = I$, $AB = A$ y $BA = A$.

[000968]

Ejercicio 1225

1. Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Un *hiperplano* de E es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Demostrar que la intersección de dos hiperplanos de E tiene una dimensión mayor o igual a $n-2$. Demostrar que, para todo $p \leqslant n$, la intersección de p hiperplanos tiene una dimensión mayor o igual a $n-p$.
2. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $y \in \mathbb{R}$, la aplicación e_y de $\mathbb{R}_n[X]$, con valores en $\mathbb{R}$ definida por $e_y(P(X)) = P(y)$ (i.e. la aplicación e_y es la evaluación en y) es lineal. Calcular la dimensión de su núcleo.
3. La misma pregunta para la aplicación e'_y de $\mathbb{R}_n[X]$, con valores en $\mathbb{R}$ definida al definir $e'_y(P(X)) = P'(y)$ (designando por P' el polinomio derivado de P).
4. Demostrar, usando estos dos resultados, que existe en $\mathbb{R}_6[X]$ un polinomio P no nulo y teniendo las siguientes propiedades : $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ y $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$.

[000969]

Ejercicio 1226

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y)$. Demostrar que f es el biîîîp con respecto a bîîîîp paralelamente a bîîîîp.********** [000970]

Ejercicio 1227

E es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, F y G dos subespacios suplementarios de E : $E = F \bigoplus G$. Se define $s(u) = u_F - u_G$, donde $u = u_F + u_G$ es la descomposición (única) obtenida gracias a $E = F \bigoplus G$. s es la simetría con respecto a F de dirección G.

1. Demostrar que $s \in L(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, dar $\ker(s)$ y calcular s^2.
2. Recíprocamente, si $f \in L(E)$ verifica $f^2 = id_E$. Se define $p = \dfrac{f + id_E}{2}$. Calcular $f(u)$ en función de $p(u)$ y u. Verificar que p es un proyector, calcular su núcleo y su imagen. Demostrar que f es la simetría con respecto a $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de dirección $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

[000971]

Ejercicio 1228

Sean p y q dos proyectores de E, espacio vectorial, tales que $pq = qp$ (p y q conmutan). Demostrar que pq y $(p+q-pq)$ son dos proyectores de E, y que :

$$\operatorname{Im}(pq) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q,$$

$$\operatorname{Im}(p+q-pq) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q.$$

[000972]

Ejercicio 1229

Sean p y q dos proyectores de E, espacio vectorial ; dar una condición necesaria y suficiente para que $p+q$ sea un proyector de E ; dar entonces $\operatorname{Im}(p+q)$ y $\ker(p+q)$.

Indicación : Se puede demostrar que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \bigoplus \mathrm{Im}\, q$ y que $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$. [000973]

Ejercicio 1230

Sea E el espacio vectorial de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sean P el subespacio de funciones pares e I el subespacio de funciones impares. Demostrar que $E = P \bigoplus I$. Dar la expresión del proyector en P de dirección I.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000974]

Ejercicio 1231

Sea $E = \mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de polinomios, y $f : E \to E$ definida por :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Demostrar que $f \in L(E)$, que $E = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \ker(f)$, pero que $f^2 = -f$. ¿Qué teorema ilustra este ejemplo ?
[000975]

Ejercicio 1232

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$ el espacio vectorial de polinomios de grado $\leqslant n$, y $f : E \to E$ definida por :

$$f(P) = P + (1-X)P'.$$

Demostrar que f es una aplicación lineal y dar una base para $\mathrm{Im}\, f$ y de $\ker f$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000976]

Ejercicio 1233

Sea $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y $U : E \to E$ definida por $f \mapsto U(f)$ tal que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad U(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

y $U(f)(0) = f(0)$. Demostrar que $U \in L(E)$, determinar $\ker(U)$ y $\mathrm{Im}(U)$. [000977]

Ejercicio 1234

Se designa por $\mathscr{P}_q$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que q, y $\mathscr{O}_q$ el espacio vectorial de polinomios de orden mayor o igual a q, es decir divisible por x^q. P es un polinomio, se denota $T(P)$ el polinomio definido por :

$$T(P)(x) = xP(0) - \frac{1}{20}x^5 P^{(4)}(0) + \int_0^x t^2[P(t+1) - P(t) - P'(t)]\,dt.$$

1. Demostrar que T es lineal. Determinar $T(e_i)$, donde $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x^3$, $e_4 = x^4$, y comprobar que $T(\mathscr{P}_4) \subset \mathscr{P}_4$. A partir de ahora, se considera T como aplicación lineal de $\mathscr{P}_4$ en $\mathscr{P}_4$. Escribir su matriz con respecto a la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$.
2. Determinar cuidadosamente los espacios $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_3)$ y $T(\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2)$.
3. ¿La restricción T' de T a $\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{O}_2$ es inyectiva ? Si no determinar una base del núcleo de T'.
4. Demostrar que $\mathrm{Im}\, T = (\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus (\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4)$. ¿Cuál es el rango de T ?

5. Demostrar que $\ker T$ se puede escribir en la forma $(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{P}_1) \oplus V$; explicitar un subespacio V posible. Determinar $\ker T \cap \operatorname{Im} T$.
6. Se busca un vector no nulo $u = ae_3 + be_4$ de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$, y un número real λ, tales que $T(u) = \lambda u$. Escribir las ecuaciones que deben verificar a, b, λ. Demostrar que existen dos valores posibles de λ, λ_1 y λ_2, tales $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; calcularlos. Encontrar dos vectores no nulos u_3 y u_4 de $\mathscr{O}_3 \cap \mathscr{P}_4$ tales que $T(u_3) = \lambda_1 u_3$ y $T(u_4) = \lambda_2 u_4$.
7. Sea $u_0 = e_1$, $u_1 = e_2 - 4e_3 + 3e_4$, $u_2 = e_0$. Demostrar que $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es una base de $\mathscr{P}_4$. Escribir la matriz de T en esta base.

[000978]

Ejercicio 1235

Entre las siguientes aplicaciones, que son endomorfismos de $C^\infty(\mathbb{R})$ ($\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ es fijado) :

$$f \mapsto f + \phi, \quad f \mapsto \phi f, \quad f \mapsto f \circ \phi, \quad f \mapsto \phi \circ f, \quad f \mapsto \int f, \quad f \mapsto f'.$$

¿Cuáles son endomorfismos de $C^0(\mathbb{R})$? ¿Para qué valores de ϕ endomorfismos $\Phi : f \mapsto f \circ \phi$ y $D : f \mapsto f'$ conmutan (es decir, verificando $D(\Phi f) = \Phi(Df), \forall f$) ? [002432]

Ejercicio 1236 imagen de una suma, de una intersección

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal y E_1, E_2 dos subespacios vectoriales de E, F_1, F_2 dos subespacios vectoriales de F. ¿Qué se puede decir de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$, $f^{-1}(F_1 + F_2)$, $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$? [003306]

Ejercicio 1237 Efecto sobre las familias libres y generatrices

Sean E, F dos espacios vectoriales y $f : E \to F$ lineal.

1. Demostrar que f es inyectiva si y solo si f transforma toda familia libre de E en una familia libre de F.
2. Demostrar que f es sobreyectiva si y solo si existe una familia generatriz de E transformada por f en una familia generatriz de F.

[003307]

Ejercicio 1238 $f(\ker(g \circ f))$

Sea E un espacio vectorial y $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$. [003308]

Ejercicio 1239 Permutación de coordenadas en K^n

Sea $\sigma \in S_n$ (grupo simétrico) y $f_\sigma : K^n \to K^n, (x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$
Se provee K^n de la estructura algebraica para las operaciones componente por componente.

1. Demostrar que f_σ es un automorfismo de álgebra.
2. Sea φ un automorfismo de álgebra de K^n.
   (a) Demostrar que la base canónica de K^n es invariante por φ (Estudiar $\varphi(e_i^2)$ y $\varphi(e_i \times e_j)$).
   (b) Deducir que existe $\sigma \in S_n$ tal que $\varphi = f_\sigma$.
3. Demostrar que $\{0\}$, $K(1, \ldots, 1)$, $\{(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ y K^n son los únicos sev estables por todos los endomorfismos f_σ.

[003314]

Ejercicio 1240 Isomorfismo $\circ$ proyector

Sean E un ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que existe un proyector $p \in \mathscr{L}(E)$ y un isomorfismo $g \in \mathrm{GL}(E)$ tales que $f = g \circ p$.
2. Demostrar que existe un proyector $p \in \mathscr{L}(E)$ y un isomorfismo $g \in \mathrm{GL}(E)$ tales que $f = p \circ g$.

[003338]

Ejercicio 1241 Centro de $\mathscr{L}(E)$

Sea E un K-ev de dimensión finita. El centro de $\mathscr{L}(E)$ es : $Z = \{f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1. Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ y $\overrightarrow{x} \in E$. Si $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ es libre, demostrar que existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que $g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ y $g \circ f(\overrightarrow{x}) = -f(\overrightarrow{x})$.
2. Deducir que Z es el conjunto de homotecias.
3. Determinar $Z' = \{f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\forall g \in \mathrm{GL}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

[003339]

Ejercicio 1242 Elementos regulares en $\mathscr{L}(E)$

Sea $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Demostrar que : (f es inyectiva) $\iff$ ($\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$).
2. Demostrar que : (f es sobreyectiva) $\iff$ ($\forall g \in \mathscr{L}(F),\ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$).

[003340]

Ejercicio 1243 $f^2 = -\mathrm{Id}$

Sea E un $\mathbb{R}$-ev y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$. Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y $\overrightarrow{u} \in E$, se establece : $z\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{u} + yf(\overrightarrow{u})$.

1. Demostrar que se define así una estructura de $\mathbb{C}$-ev sobre E.
2. Deducir que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ es par.

[003341]

Ejercicio 1244 $f \circ f = 0$ y $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}$

1. Sea E un K-ev y $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tales que : $\begin{cases} f^2 = 0 \\ f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E\,. \end{cases}$

   Demostrar que $\ker f = \mathrm{Im} f$.
2. Recíprocamente, sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\ker f = \mathrm{Im} f$, y F un suplemento de $\ker f$. Demostrar que
   (a) $f^2 = 0$.
   (b) $\forall \overrightarrow{x} \in E$, existen $\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in F$ únicas tales que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + f(\overrightarrow{z})$.
   (c) Existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Solución ▼ [003342]

Ejercicio 1245 Endomorfismo nilpotente

Un endomorfismo $f \in \mathscr{L}(E)$ se dice *nilpotente* si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p = 0$. En este caso, *el índice* de f es el entero más pequeño p tal que $f^p = 0$. Se considera $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente de índice p.

1. Sea $\overrightarrow{u} \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Demostrar que la familia $\left(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \dots, f^{p-1}(\overrightarrow{u})\right)$ es libre.
2. Deducir que si E es de dimensión finita n, entonces $f^n = 0$.
3. Sea $g \in \mathrm{GL}(E)$ tal que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que $f + g \in \mathrm{GL}(E)\dots$
   (a) en dimensión finita.
   (b) para E cualquiera.
4. En $\mathscr{L}(K^2)$, sean f, g de matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Verificar que f es nilpotente, $g \in \mathrm{GL}(K^2)$, pero $f + g \notin \mathrm{GL}(K^2)$.

Solución ▼ [003343]

Ejercicio 1246 Matexo

Sea E un K espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\forall x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = \overrightarrow{0}$. Demostrar que f es nilpotente. Dar un contraejemplo en dimensión infinita. [003344]

Ejercicio 1247 Mines P' 1995

Sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente de índice n. Sea $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), g \mapsto f \circ g - g \circ f$.

1. Demostrar que $\phi^p(g) = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f^{p-k} \circ g \circ f^k$. Inferir que ϕ es nilpotente.
2. Sea $a \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que existe $b \in \mathscr{L}(E)$ tal que $a \circ b \circ a = a$. Deducir el índice de nilpotencia de ϕ.

[003345]

Ejercicio 1248 Endomorfismo cíclico

Sea E un ev de dimensión n y $f \in \mathscr{L}(E)$. Se supone que existe un vector $\overrightarrow{u} \in E$ tal que la familia $\left(f^k(\overrightarrow{u})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ engendra E.

1. Demostrar que $\left(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}), \dots, f^{n-1}(\overrightarrow{u})\right)$ es una base de E. (Se puede considerar p maximal tal que $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u}, \dots, f^{p-1}(\overrightarrow{u})\right)$ es libre, y probar que $f^k(\overrightarrow{u})$ es combinación lineal de $\mathscr{F}$, para todo entero k)
2. Demostrar que un endomorfismo $g \in \mathscr{L}(E)$ conmuta con f si y solo si es un polinomio en f.

[003346]

Ejercicio 1249 $u^2 = 0$ en dimensión 3

Sea E un ev de dimensión 3 y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $u^2 = 0$. Demostrar que existe $f \in E^*$ y $\overrightarrow{a} \in E$ tales que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ u(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})\overrightarrow{a}$. [003347]

Ejercicio 1250 $(u,x,f(x))$ ld

Sea E una ev de dimensión superior o igual a 3 y $\overrightarrow{u} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Encontrar todos endomorfismos $f \in \mathscr{L}(E)$ tales que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,$ la familia $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ es ld.

Solución ▼ [003348]

Ejercicio 1251 Automorfismos de $\mathscr{L}(E)$

Sea E un ev de dimensión n y $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ un automorfismo de álgebra. Se denota $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ una base fijada de E, (φ_{ij}) la base de $\mathscr{L}(E)$ asociada $\left(\varphi_{ij}(\overrightarrow{e}_k) = \delta_{jk}\overrightarrow{e}_i\right)$ y $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1. Simplificar $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.
2. Deducir que existe $\overrightarrow{u}_1 \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que $\psi_{11}(\overrightarrow{u}_1) = \overrightarrow{u}_1$.
3. Se denota $\overrightarrow{u}_i = \psi_{i1}(\overrightarrow{u}_1)$. Demostrar que $\psi_{ij}(\overrightarrow{u}_k) = \delta_{jk}\overrightarrow{u}_i$ y deducir que $(\overrightarrow{u}_i)$ es una base de E.
4. Sea $f \in \mathrm{GL}(E)$ definida por : $f(\overrightarrow{e}_i) = \overrightarrow{u}_i$. Demostrar que : $\forall g \in \mathscr{L}(E),\ \Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Solución ▼ [003354]

Ejercicio 1252 $f^2 = 0 \Rightarrow f = g \circ h$, con $h \circ g = 0$

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^2 = 0$. Demostrar que existe $g, h \in \mathscr{L}(E)$ tales que $f = g \circ h$ y $h \circ g = 0$.

Solución ▼ [003355]

Ejercicio 1253 Baricentro de proyecciones

Sean p, q dos proyecciones de misma base H y de direcciones F, G. Sea $\lambda \in K$. Demostrar que $\lambda p + (1-\lambda)q$ es aún una proyección de base H. [003485]

Ejercicio 1254 Valores propios de una proyección

Sea E un espacio vectorial y $p \in \mathscr{L}(E)$ una proyección. Demostrar que para todo $\lambda \in K \setminus \{-1\}$, $\mathrm{Id}_E + \lambda p$ es un isomorfismo de E. [003486]

Ejercicio 1255 Proyecciones que tienen la misma base o la misma dirección

Sea E un espacio vectorial y $p, q \in \mathscr{L}(E)$ dos proyecciones.

1. Demostrar que p y q tienen la misma base si y solo si : $p \circ q = q$ y $q \circ p = p$.
2. Dar una condición análoga para que p y q tengan la misma dirección.

[003487]

Ejercicio 1256 Suma de dos proyectores

Sean p, q dos proyecciones. Demostrar las equivalencias :

$$p + q \text{ es una proyección } \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Base}(p) \subset \mathrm{Dir}(q) \\ \mathrm{Base}(q) \subset \mathrm{Dir}(p). \end{cases}$$

Luego hallar la base y la dirección de $p + q$. [003488]

Ejercicio 1257 $f \circ g = f$ y $g \circ f = g$

Sea E un K-ev. Encontrar todos los pares (f,g) de endomorfismos de E tales que : $\begin{cases} f\circ g = f \\ g\circ f = g. \end{cases}$

Solución ▼ [003489]

Ejercicio 1258 $f\circ g = \mathrm{Id}$

Sea E un espacio vectorial y $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tales que $f\circ g = \mathrm{Id}_E$. Demostrar que $g\circ f$ es una proyección y determinar sus elementos.

Solución ▼ [003490]

Ejercicio 1259 Proyección $p+q-q\circ p$

Sean p,q dos proyecciones tales que $p\circ q = 0$. Demostrar que $p+q-q\circ p$ es una proyección, y determinar sus elementos.

Solución ▼ [003491]

Ejercicio 1260 Endomorfismo de rango 1

Sea $f\in\mathscr{L}(E)$ de rango 1. Demostrar que existe un único $\lambda\in K$ tal que $f^2=\lambda f$. Demostrar que : $\lambda = 1 \iff \mathrm{Id}-f$ es no inyectiva $\iff \mathrm{Id}-f$ es no sobreyectiva (incluso en dimensión infinita).

Solución ▼ [003492]

Ejercicio 1261 Relación de orden en los proyectores

Se provee el conjunto de los proyecciones de un ev E de la relación : $p \ll q \iff p\circ q = q\circ p = p$.

1. Demostrar que es una relación de orden.
2. Sean p,q dos proyecciones conmutables. Demostrar que $\sup(p,q) = p+q-p\circ q$ y $\inf(p,q) = p\circ q$.

[003493]

Ejercicio 1262 Expresiones analíticas

Sea $E = K^3$, $F = \{\overrightarrow{X} = (x,y,z)$ tal que $x+2y+z=0\}$ y $G = \mathrm{vect}\big(\overrightarrow{U} = (1,1,1)\big)$.

1. Verificar que $F\oplus G = E$.
2. Sea s la simetría de base F de dirección G y $\overrightarrow{X} = (x,y,z)$. Determinar $s(\overrightarrow{X})$.

Solución ▼ [003494]

Ejercicio 1263 Traza nula

Sea E un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita y A una parte finita de $\mathrm{GL}(E)$ estable por composición. Se define $u = \sum_{f\in A} f$. Demostrar que $\mathrm{tr}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Solución ▼ [003495]

Ejercicio 1264 ***I

Sean $\mathbb{K}$ un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$ y E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita denotada n. Sea u un endomorfismo de E. Se dice que u es nilpotente si y solo si $\exists k\in\mathbb{N}^* /\ u^k = 0$ y se llama entonces índice de nilpotencia de u el menor de estos enteros k (por ejemplo, el único endomorfismo u, nilpotente de índice 1 es 0).

1. Sea u un endomorfismo nilpotente de índice p. Demostrar que existe un vector x de E tal que la familia
   $(x,\ u(x),\dots,\ u^{p-1}(x))$ es libre.
2. Sea u un endomorfismo nilpotente. Demostrar que $u^n = 0$.
3. Se supone en esta pregunta que u es nilpotente de índice n. Determinar $\operatorname{rg} u$.

Solución ▼ [005193]

Ejercicio 1265 *** I

Sean E un espacio de dimensión finita n no nula y f un endomorfismo nilpotente de E. Demostrar que $f^n = 0$.

Solución ▼ [005584]

Ejercicio 1266 ***I

Sea E un espacio vectorial no nulo. Sea f un endomorfismo de E tal que para todo vector x de E la familia $(x, f(x))$ sea ld. Demostrar que f es una homotecia.

Solución ▼ [005587]

Ejercicio 1267 ***I

Sea E un espacio de dimensión finita. Encontrar los endomorfismos (resp. automorfismos) de E que conmutan con todos los endomorfismos (resp. automorfismos) de E.

Solución ▼ [005588]

Ejercicio 1268 **I

Sean p y q dos proyectores de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial E. Demostrar que $(p+q \text{ proyector}) \Leftrightarrow (p\circ q = q\circ p = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(p) \subset \ker(q)\ \text{ y }\ \operatorname{Im}(q) \subset \ker(p))$. En el caso donde $p+q$ es un proyector, determinar $\ker(p+q)$ y $\operatorname{Im}(p+q)$.

Solución ▼ [005589]

Ejercicio 1269 **I

Sea E un espacio de dimensión finita. Demostrar que la traza de un proyector es su rango.

Solución ▼ [005590]

Ejercicio 1270 ****

Sean $p_1,\dots,p_n$, n proyectores de un $\mathbb{C}$-espacio de dimensión finita. Demostrar que $(p_1+\cdots+p_n)$ es un proyector $\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i\circ p_j = 0$.

Solución ▼ [005591]

Ejercicio 1271 ***

Sea E un $\mathbb{C}$-espacio de dimensión finita n. Sean $p_1,\dots,p_n$, n proyectores no nulos de E tales que $\forall i \neq j$, $p_i\circ p_j = 0$.

1. Demostrar que todos los p_i son de rango 1.
2. Sean $q_1,\dots,q_n$, n proyectores que verifican las mismas igualdades. Demostrar que existe un automorfismo f de E tal que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $q_i = f\circ p_i\circ f^{-1}$.

Solución ▼ [005592]

Ejercicio 1272 ***

Sea E un espacio vectorial. Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal n. Sea F un subespacio de E estable para todos los elementos de G y p un proyector de imagen F. Demostrar que $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$ es un proyector de imagen F.

Solución ▼ [005593]

Ejercicio 1273 ***

Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y f un endomorfismo de E. Demostrar que existe un proyector p y un automorfismo g de E tal que $f = g\circ p$.

Solución ▼ [005598]

Ejercicio 1274 **I

Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial no nulo de dimensión finita n y f un endomorfismo de E tal que $\forall x\in E$, $\exists\, p\in\mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = 0$. Demostrar que f es nilpotente.

Solución ▼ [005599]

Ejercicio 1275 ***

Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita no nula. Sean f y g dos proyectores distintos y no nulos de E tales que existen dos complejos a y b tales que :

$$fg - gf = af + bg.$$

1. Demostrar que si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ se tiene : $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Im}(g)$. Deducir que $gf = f$, luego que $a+b=0$, luego que $a=-1$.
2. Demostrar que si $a\neq 0$ y $a\neq -1$, se tiene $\ker(g)\subset\ker(f)$. ¿Qué se puede deducir ?
3. Demostrar que si f y g son dos proyectores que no conmutan y además verifican $fg-gf = af+bg$, entonces (a,b) es elemento de $\{(-1,1),(1,-1)\}$. Caracterizar cada uno de estos casos.

Solución ▼ [005600]

40 107.99 Otro

Ejercicio 1276 $\mathscr{L}(E\times F)$, Chimie P 1996

¿Es cierto que $\mathscr{L}(E\times F)$ y $\mathscr{L}(E)\times\mathscr{L}(F)$ son isomorfos ? (E y F espacios vectoriales de dimensión finita).

Solución ▼ [003315]

Ejercicio 1277 Central MP 2001

Sea f un endomorfismo dado de E de dimensión n y $F = \{g\in\mathscr{L}(E)\mid g\circ f = f\circ g = 0\}$. Encontrar la dimensión de F.

Solución ▼ [003356]

Ejercicio 1278 X MP* 2001

Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ y $F = \bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id})$. Demostrar que $\operatorname{card}(G) \times \dim F = \sum_{g\in G} \operatorname{tr}(g)$.

Solución ▼ [003357]

41 108.01 Propiedades elementales, generalidades

Ejercicio 1279

Efectuar el producto de las matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [001040]

Ejercicio 1280

Se considera la siguiente matriz :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular M^2, M^3, M^4, M^5. [001041]

Ejercicio 1281

Se consideran las tres matrices siguientes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calcular AB, luego $(AB)C$.
2. Calcular BC, luego $A(BC)$.
3. ¿Qué se observa ?

[001042]

Ejercicio 1282

Se consideran las dos matrices siguientes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular AB.

2. Calcular BA.
3. ¿Qué se observa?

[001043]

Ejercicio 1283

Encontrar las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Similarmente para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. [001044]

Ejercicio 1284

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^2 y comprobar que $A^2 = A + 2I_3$, donde I_3 es la matriz identidad 3×3. Deducir que A es invertible y calcular su inversa. [001045]

Ejercicio 1285

---

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $B = A - I_3$.
   (a) Calcular B^2, B^3 deducir una fórmula de recurrencia que probaremos para B^n, para todo entero n.
   (b) Desarrollar $(B + I_3)^n$ por la fórmula binomial y simplificar.
   (c) Deducir A^n Para todo entero n.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para todo entero n, calcular A^n utilizando $A - I_4$.

[001046]

Ejercicio 1286

---

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   ¿Se puede demostrar que $AB = AC$, se tiene $A = C$? ¿A puede ser invertible?
   (b) Determinar todas las matrices F tales que $A \times F = O$ (O es la matriz donde todos los coeficientes son nulos).
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Determinar todas las matrices B tales que $BA = I_2$.

3. Sean A y B dos matrices cuadradas $n\times n$ tales que $AB = A + I_n$. Demostrar que A es invertible y determinar su inversa (en función de B).

[001047]

Ejercicio 1287

Calcular el determinante e invertir si es posible las matrices siguientes :

$$\begin{bmatrix} 1&1&2&1&1\\ 2&1&1&1&1\\ 1&1&1&2&1\\ 2&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&2 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1&1&1&1&3\\ 0&2&1&1&2\\ 1&1&1&2&2\\ 2&1&1&1&3\\ 1&-1&1&1&0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1&1&1&1&2\\ 0&2&1&1&2\\ 1&1&1&2&2\\ 2&1&1&1&3\\ 1&-1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

[001048]

Ejercicio 1288

Sea A una matriz cuadrada de orden n ; se supone que A^2 es una combinación lineal de A y I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Demostrar que A^n es igualmente una combinación lineal de A y I_n, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Demostrar que si β es no nulo, entonces A es invertible y que A^{-1} es aún una combinación lineal de A y I_n.
3. Aplicación 1 : Sea $A = J_n - I_n$, donde J_n es la matriz Atila (invadido por los unos...), con $n \geqslant 1$. Demostrar que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; deducir que A es invertible, y encontrar su inversa.
4. Aplicación 2 : Demostrar que si $n = 2$, A^2 es siempre una combinación lineal de A y I_2, y re-encontrar la fórmula dando A^{-1} utilizando 2.

[001049]

Ejercicio 1289

Sea $A = \begin{pmatrix} -1&1&1\\ 1&-1&1\\ 1&1&-1 \end{pmatrix}$. Calcular A^2 y demostrar que $A^2 = 2I - A$, deducir que A es invertible y calcular A^{-1}.

[001050]

Ejercicio 1290

Recordar la estructura del espacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. Determinar una base de $M_n(\mathbb{R})$. Dar su dimensión.
[001051]

Ejercicio 1291

Sea $A = \begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&-1&1\\ 1&-2&0 \end{pmatrix}$. Calcular $A^3 - A$. Deducir que A es invertible, luego determinar A^{-1}.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001052]

Ejercicio 1292

Determinar dos elementos A y B de $M_2(\mathbb{R})$ tales que : $AB=0$ y $BA\neq 0$.

Solución ▼ [001053]

Ejercicio 1293

Sea E el subconjunto de $M_3(\mathbb{R})$ definido por $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & a\end{pmatrix} a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

1. Demostrar que E es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$ estable para la multiplicación de matrices. Calcular dim (E).
2. Sea $M(a,b,c)$ un elemento de E. Determinar, según los valores de los parámetros a,b y $c\in\mathbb{R}$ su rango. Calcular (cuando sea posible) la inversa $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.
3. Dar una base de E formada por matrices invertibles y otra formada por matrices de rango 1.

[001054]

Ejercicio 1294

Sea $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Se llama conmutante de A y se denota $C(A)$ el conjunto de los $B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $AB=BA$.

1. Demostrar que $C(A)$ y un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Demostrar que para todo $k\in\mathbb{N},A^k\in C(A)$.

[001055]

Ejercicio 1295

Sea F y G los subconjuntos de $M_3(\mathbb{R})$ definidos por :
$F=\left\{\begin{pmatrix} a+b & 0 & c\\ 0 & b+c & 0\\ c+a & 0 & a+b\end{pmatrix} a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$, $\quad G=\left\{\begin{pmatrix} a+b+d & a & c\\ 0 & b+d & 0\\ a+c+d & 0 & a+c\end{pmatrix} a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$. Demostrar que este son subespacios vectoriales de $M_3(\mathbb{R})$, y determinar las bases.

Solución ▼ [001056]

Ejercicio 1296

Demostrar que $F=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R});tr(M)=0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Determinar una base de F y completarla a una base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [001057]

Ejercicio 1297

Sean A y $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dos matrices triangulares superiores.

1. Demostrar (calculando los coeficientes) que AB es triangular superior.
2. Sea φ un endomorfismo biyectivo de $\mathbb{K}^n$ y F un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ tal que $\varphi(F)\subset F$. Demostrar que $\varphi^{-1}(F)\subset F$.
3. Deducir una nueva prueba de 1. Demostrar que si A es invertible, A^{-1} es triangular superior.

[001058]

Ejercicio 1298

Sea $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente. Calcular $\det(I+N)$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ conmuta con N, demostrar que $\det(A+N) = \det(A)$. (Se puede comenzar estudiando el caso donde A es invertible.) [001059]

Ejercicio 1299

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Demostrar que G es un grupo multiplicativo. [001060]

Ejercicio 1300

Sea $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, para $\theta \in \mathbb{R}$. Calcular $A(\theta) \times A(\theta')$ y $\big(A(\theta)\big)^n$, para $n \geqslant 1$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001061]

Ejercicio 1301

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calcular $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. ¿Cuál es el resto de la división euclidiana de X^n entre $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.
4. A ¿es invertible ?

[001062]

Ejercicio 1302

Sean A y $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Demostrar que $A = B$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001063]

Ejercicio 1303

¿Qué se puede decir de una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que verifica $\operatorname{tr}(A\,{}^tA) = 0$?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001064]

Ejercicio 1304

Discutir según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$. [001065]

Ejercicio 1305

Calcular la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. [001066]

Ejercicio 1306

Determinar el conjunto de matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \;\; MH = HM.$$

[001067]

Ejercicio 1307

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $M - I_n$ sea nilpotente (ie $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$). Demostrar que M es invertible.
[001068]

Ejercicio 1308

$A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Demostrar que A es invertible.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001069]

Ejercicio 1309

Demostrar que si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $AB = A + B$, entonces $AB = BA$. [001070]

Ejercicio 1310

Sea $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, demostrar :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geqslant \max_i \min_j a_{i,j}.$$

[001071]

Ejercicio 1311

Sea $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que : $J^2 = I$ y

$$E = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2;\, A = aI + bJ\}.$$

1. Demostrar que E es un espacio vectorial estable por multiplicación (¿Es un álgebra ?). Deducir que :

$$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2;\, A^n = a_n I + b_n J$$

y calcular los coeficientes a_n y b_n.

2. Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Calcular (u_n, v_n) tal que $S_n = u_n I + v_n J$ en función de a y de b. Calcular los límites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $\mathrm{e}^A = uI + vJ$, donde $u = \lim_{n \to \infty} u_n$, $v = \lim_{n \to \infty} v_n$. Calcular e^{-A} y el producto $\mathrm{e}^{-A}\,\mathrm{e}^{A}$.

3. Aplicación :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Calcular e^A.

[001072]

Ejercicio 1312

Sea $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tal que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), AXB = 0$. Demostrar que $A = 0$ o $B = 0$. [001073]

Ejercicio 1313

Sea $(A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$ tal que $AB = I + A + A^2$. Demostrar que $AB = BA$ (*Indicación* : ver primero que A es invertible). [001074]

Ejercicio 1314

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular con elementos diagonales nulos, demostrar que :

$$A^n = 0.$$

[001075]

Ejercicio 1315

Calcular las potencias de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001076]

Ejercicio 1316

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, se define :

$$\exp A = \sum_{i \geqslant 0} \frac{A^i}{i!},$$

la suma es finita y se detiene por ejemplo en el primer índice i tal que $A^i = 0$. Demostrar que si A y B son nilpotentes y conmutan, entonces $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Deducir que $\exp(A)$ es siempre invertible y calcular su inversa. [001077]

Ejercicio 1317

Calcular la inversa de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[001078]

Ejercicio 1318

Calcular la inversa de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

[001079]

Ejercicio 1319 Examen

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales, verificando la relación de recurrencia lineal siguiente :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = \ \ 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

con $x_0 = -137$ y $y_0 = 18$. Se propone en este problema encontrar los términos generales de estas dos sucesiones.

1. Demostrar que existe una matriz $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tal que la relación de recurrencia lineal anterior es equivalente a la relación $U_{n+1} = AU_n$, donde $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. Encontrar una expresión de U_n en función de A y de U_0.
3. Encontrar el núcleo de A, y dar una base B_1. Calcular el rango de A.
4. Demostrar que el conjunto de vectores $X \in \mathbb{R}^2$ tales que $AX = 3X$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál es su dimensión ? Dar una base, que se denota B_2.
5. Demostrar que la unión $B_1 \cup B_2$ formar una base B de $\mathbb{R}^2$. Sea P la matriz formada por las componentes de los vectores de B relativamente a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que P es invertible, y que el producto $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D que se va a calcular.
6. Demostrar que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calcular D^n, y deducir A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.
7. Dar los términos generales x_n y y_n.

Solución ▼ [001080]

Ejercicio 1320

Para toda matriz cuadrada A de dimensión n, se llama traza de A, y se denota $\operatorname{tr} A$, la suma de los elementos diagonales de A :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Demostrar que si A, B son dos matrices cuadradas de orden n, entonces $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Demostrar que si f es un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n, M su matriz con respecto a una base e, M' su matriz con respecto a una base e', entonces $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M'$. Se denota $\operatorname{tr} f$ el valor común de estas cantidades.
3. Demostrar que si g es otro endomorfismo de E, $\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

Solución ▼   Vidéo ■   [002442]

Ejercicio 1321

Se recuerda que una matriz cuadrada A de orden n se dice *simétrica* si $a_{i,j} = a_{j,i}, \forall i, j$, y *antisimétrica* si $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1. ¿Cuántas matrices diagonales antisimétricas existen ?
2. Demostrar que A^tA es simétrica para toda matriz cuadrada A.
3. Demostrar que si A, B son simétricas, su producto $C = AB$ es simétrica si y solo si $AB = BA$. ¿Qué sucede si son antisimétricas ? ¿Si una es simétrica y la otra antisimétrica ?
4. Sea P un polinomio. Demostrar que si A es simétrica, $P(A)$, lo es también. ¿Qué sucede si A es antisimétrica ?

[002443]

Ejercicio 1322

Sean A, B dos matrices semejantes (i.e. existe P invertible tal que $B = P^{-1}AP$). Demostrar que si una es invertible, la otra también ; que si una es idempotente, la otra también ; que si una es nilpotente, la otra también ; que si $A = \lambda I$, entonces $A = B$.

Indicación ▼   Solución ▼   Vidéo ■   [002444]

Ejercicio 1323

Sea A una matriz cuadrada de orden n verificando para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + |a_{i,2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}|.$$

Demostrar que A es invertible.   [002445]

Ejercicio 1324

Una matriz cuadrada real A se dice *estocástica* si $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1, \forall i, j$ y $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1, \forall j$.

1. Demostrar que el producto de dos matrices estocásticas es también una matriz estocástica.
2. Sea $B = A^2$, $A_i = \sup_j a_{i,j}$, $a_i = \inf_j a_{i,j}$. Demostrar que $a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant A_i, \forall j$.

[002446]

Ejercicio 1325

Se consideran las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular *cuando están bien definidos* los siguientes productos de matriz : AB, BA, AC, CA, AD, AE, BC, BD, BE, CD, DE.   [002747]

Ejercicio 1326

Sean las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular : $(A-2B)C$, $C^T A$, $C^T B$, $C^T(A^T - 2B^T)$, donde C^T denota la matriz transpuesta de C. [002748]

Ejercicio 1327

Calcular A^n, para todo $n \in \mathbb{Z}$, con sucesivamente

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cosh(a) & \sinh(a) \\ \sinh(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}.$$

[002749]

Ejercicio 1328

¿Son invertibles las siguientes matrices ? Si es sí, calcular sus inversas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002750]

Ejercicio 1329

Invertir las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002751]

Ejercicio 1330

La *exponencial* de una matriz cuadrada M es, por definición, el límite de la serie

$$\mathrm{e}^M = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}.$$

Se admite que este límite existe en virtud de un teorema de análisis.

1. Demostrar que si $AB = BA$, entonces $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$. Es permitido, para abordar este asunto, pasar al límite sin precauciones.
2. Calcular e^M, para las cuatro matrices siguientes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Encontrar un ejemplo simple donde $e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$.

[002752]

Ejercicio 1331

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Demostrar que $AB = AC$. ¿La matriz A puede ser invertible ?
2. Determinar todas las matrices F de tamaño $(3,3)$ tales que $AF = 0$, (donde 0 es la matriz cuyos coeficientes son nulos).

[002772]

Ejercicio 1332

¿Para qué valores de a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

es invertible ? Calcular en este caso su inversa. [002773]

Ejercicio 1333

Sea a y b dos reales y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. ¡Para qué valores de a y b se tiene que $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Solución ▼ Vidéo ■ [002774]

Ejercicio 1334

Calcular la inversa de la siguiente matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[002775]

Ejercicio 1335 Matrices en tablero

Sea $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. Se dice que M es *un damero* si $a_{ij} = 0$, para $j - i$ impar. Se denota $\mathscr{D}$ el conjunto de matrices $n \times n$ un damero. Demostrar que $\mathscr{D}$ es una subálgebra de $\mathscr{M}_n(K)$. ¿Cuál es su dimensión ? [003358]

Ejercicio 1336 Matrices estocásticas

Sea $\mathscr{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \forall i,j,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ y } \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{D}$ es estable bajo la multiplicación.
2. Determinar las matrices $A \in \mathscr{D}$ invertibles tales que $A^{-1} \in \mathscr{D}$.

Solución ▼ [003359]

Ejercicio 1337 Matrices centro-simétricas

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. Se dice que A es *centro-simétrica* si para todo $i, j : a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$. Demostrar que si A y B son centro-simétricas, es lo mismo con AB. También demostrar que si A es centro simétrica e invertible entonces A^{-1} es así centro-simétrica. [003360]

Ejercicio 1338 Ecuación $AX = B$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Demostrar que la ecuación en $X : AX = B$, $X, B \in \mathscr{M}_{3,n}(K)$, tiene solución si y solo si las columnas de B son progresiones aritméticas (tratar primero el caso $n = 1$).
2. Resolver $AX = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003393]

Ejercicio 1339 Ecuación $AX = B$

Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. ¿Existe una matriz B tal que $BC = A$?

Solución ▼ [003394]

Ejercicio 1340 Cálculo de A^n por la fórmula binomial

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si se escribe $A = I + J$, calcular A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Solución ▼ [003395]

Ejercicio 1341 Cálculo de A^n por el polinomio anulador

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Verificar que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y P_n el polinomio de grado menor o igual que 2 tal que
$$P(6) = 6^n, \quad P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n, \quad \text{y } P(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^n.$$
Demostrar que $A^n = P_n(A)$.

3. La misma pregunta para $n \in \mathbb{Z}$.

[003396]

Ejercicio 1342 Cálculo de A^k

Calcular A^k, para $k \in \mathbb{N}$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3. $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003397]

Ejercicio 1343 $**$

Para x real, se establece :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Determinar $(A(x))^n$, para x real y n entero relativo.

Solución ▼ [005258]

Ejercicio 1344 $**$

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Calcular A^n, para n entero relativo.

Solución ▼ [005262]

Ejercicio 1345 $**$

Demostrar que $\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1,1[\}$ es un grupo para la multiplicación de matrices.

Solución ▼ [005263]

Ejercicio 1346 $**$

Sean $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ y $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dos matrices cuadradas de tamaño n tales que $a_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r-1$ y $b_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+s-1$, donde r y s son dos enteros dados entre 1 y n. Demostrar que si $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, entonces $c_{i,j} = 0$ si $j \leqslant i+r+s-1$.

Solución ▼ [005611]

42 108.02 Núcleo, imagen

Ejercicio 1347

Sea $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y u el endomorfismo cuya matriz en esta base es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar el núcleo y la imagen de u. Calcular su rango de dos modos. Calcular la matriz de u^2 en la base e. Demostrar que $u^2 - 3u = 0$. [002436]

Ejercicio 1348

Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[002449]

Ejercicio 1349 **T

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ es :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Determinar $\ker u$ y $\operatorname{Im} u$.
3. Calcular M^2 y M^3.
4. Determinar $\ker u^2$ e $\operatorname{Im} u^2$.
5. Calcular $(I - M)(I + M + M^2)$ y deducir que $I - M$ es invertible. Precisar $(I - M)^{-1}$.

Solución ▼ [005257]

Ejercicio 1350 **

Sea $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$
$P \mapsto Q = e^{X^2}(Pe^{-X^2})'$.

1. Verificar que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. Determinar la matriz de f relativa a las bases canónicas de $\mathbb{R}_n[X]$ y $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
3. Determinar $\ker f$ y $\operatorname{rg} f$.

Solución ▼ [005260]

Ejercicio 1351 ***T

Determinar el rango de las siguientes matrices :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 4) $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

5) $(\operatorname{sen}(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 6) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005269]

Ejercicio 1352 ***

Determinar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005603]

Ejercicio 1353 **

Determinar el rango de la matriz $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Solución ▼ [005607]

Ejercicio 1354 ***

Sean $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ y B el elemento de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ definido por bloques por $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$. Determinar el rango de B en función del rango de A.

Solución ▼ [005622]

Ejercicio 1355 ***

Sea H un elemento de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \lambda_A \in \mathbb{C} / \ HAH = \lambda_A H$. Demostrar que $\operatorname{rg} H \leqslant 1$.

Solución ▼ [005623]

Ejercicio 1356 ***

Sea $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Demostrar que las siguientes dos propiedades son equivalentes :

$$(1)\ M^2 = 0 \quad \text{y} \quad (2)\ \operatorname{rg} M \leqslant 1 \text{ y } \operatorname{tr} M = 0.$$

Solución ▼ [005624]

43 108.03 Aplicación matricial y lineal

Ejercicio 1357

Sea h el homomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida con respecto a dos bases (e_1,e_2,e_3) y (f_1,f_2) por la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Se toma en $\mathbb{R}^3$ la nueva base :

$$e_1' = e_2+e_3, \quad e_2' = e_3+e_1, \quad e_3' = e_1+e_2.$$

¿Cuál es la nueva matriz A_1 de h?

2. Se escoge como base de $\mathbb{R}^2$ los vectores :

$$f_1' = \tfrac{1}{2}(f_1+f_2), \quad f_2' = \tfrac{1}{2}(f_1-f_2)$$

conservando la base (e_1',e_2',e_3') de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es la nueva matriz A_2 de h?

[001081]

Ejercicio 1358

Sea h una aplicación lineal de rango r, de E, espacio vectorial de dimensión n, en F, espacio vectorial de dimensión m.

1. Especificar cómo obtener una base $(e_i)_{i=1}^n$ de E, y una base $(f_j)_{j=1}^m$ de F, tales que $h(e_k)=f_k$, para $k=1,\dots,r$ y $h(e_k)=0$, para $k>r$. ¿Cuál es la matriz de h en este par de bases?
2. Determinar un par de bases para el homomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ definido en las bases canónicas por :

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4)=(y_1,y_2,y_3) \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1-x_2+x_3-x_4 \\ y_2 = x_2+x_3-2x_4 \\ y_3 = x_1+2x_2+x_3+x_4. \end{cases}$$

3. La misma pregunta para la aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en sí misma definida por :

$$f(x,y,z) = (2x+y+z, -y+z, x+y).$$

[001082]

Ejercicio 1359

Se designa por $\mathscr{P}_2$ el espacio de polinomios en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 2. Se designa por (e_0,e_1,e_2) la base canónica de $\mathscr{P}_2$ y se escribe

$$p_0 = e_0, \quad p_1 = e_1 - \tfrac{1}{2}e_0, \quad p_2 = e_2 - e_1 + \tfrac{1}{2}e_0.$$

1. Demostrar que todo polinomio de $\mathscr{P}_2$ puede escribirse de forma única $p = b_0p_0+b_1p_1+b_2p_2$.
2. Escribir de esta forma los polinomios : p_0', p_1', p_2', p', Xp', p''.
3. Demostrar que la aplicación $\varphi : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ definida por $\varphi(p) = Xp' - \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p''$ es una aplicación lineal. Precisar el núcleo y la imagen de esta aplicación. Escribir las matrices de esta aplicación con respecto a la base canónica (e_i) y con respecto a la base (p_i). Escribir la matriz de pasaje de la base (e_i) en la base (p_i); ¿cuál es la relación entre esta matriz y las dos anteriores?

[001083]

Ejercicio 1360

Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la aplicación $z\mapsto e^{i\theta}\bar{z}$. Se considera $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y se fija la base $\varepsilon=\{1,i\}$.

1. Demostrar que f es $\mathbb{R}$-lineal.
2. Calcular $A=\mathrm{Mat}(f,\varepsilon,\varepsilon)$.
3. ¿Existen x y $y\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tales que $f(x)=x$ y $f(y)=-y$? En caso afirmativo, determinar x e y.
4. Describir geométricamente f.
5. Sea $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la aplicación $z\mapsto e^{i\rho}\bar{z}$. Calcular $A=\mathrm{Mat}(g\circ f,\varepsilon,\varepsilon)$ y describir geométricamente $g\circ f$.

[001084]

Ejercicio 1361

Sea $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $f^3=-f$ y $f\neq 0$.

1. Demostrar que $\ker(f)\cap\ker(f^2+I)=\{0\}$, $\ker(f)\neq\{0\}$ y $\ker(f^2+I)\neq\{0\}$.
2. Sea x un elemento distinto de 0 de $\ker(f^2+I)$. Demostrar que no existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\alpha x$. Deducir que $\{x,f(x)\}$ es libre.
3. Calcular $\dim(\ker(f))$ y $\dim(\ker(f^2+I))$.
4. Determinar una base ε de $\mathbb{R}^3$ tal que : $\mathrm{Mat}(f,\varepsilon)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

[001085]

Ejercicio 1362

Sean E un espacio vectorial de dimensión n, f una aplicación lineal de E en E y x un elemento de E tal que la familia $\{f(x),\dots,f^n(x)\}$ es libre.

1. Demostrar que la familia $\{x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\}$ es una base de E. Deducir que f es biyectiva.
2. Se supone ahora que $f^n(x)=x$. Determinar la matriz de f en la base $\{x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\}$.

[001086]

Ejercicio 1363

Sea $\mathbb{R}^2$ provisto con la base canónica $\mathscr{B}=(\vec{i},\vec{j})$. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la proyección sobre el eje de abscisas $\mathbb{R}\vec{i}$, paralelamente a $\mathbb{R}(\vec{i}+\vec{j})$. Determinar $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, la matriz de f en la base $(\vec{i},\vec{j})$. La misma pregunta para $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, donde $\mathscr{B}'$ es la base $(\vec{i}-\vec{j},-2\vec{i}+3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$. La misma pregunta para $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001087]

Ejercicio 1364

Sea $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales.

1. Sea $n\in\mathbb{N}$. Demostrar que $\mathbb{R}_n[X]$, conjunto de polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual que n, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[X]$. Demostrar que la familia $\{1,X,\dots,X^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Sean f, g y h las aplicaciones de $\mathbb{R}[X]$ en sí mismas definidas por :

$$f(P(X)) = XP(X), \qquad g(P(X)) = P'(X), \qquad h(P(X)) = (P(X))^2.$$

   Demostrar que las aplicaciones f y g son lineales, pero que h no lo es. ¿f y g son inyectivas ? ¿Sobreyectivas ? Determinar la dimensión de sus respectivos núcleos. Determinar la imagen de f.

3. Se designa por f_n y g_n las restricciones de f y de g a $\mathbb{R}_n[X]$. Demostrar que la imagen de g_n está incluido en $\mathbb{R}_n[X]$ y la de f_n está incluido en $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Determinar la matriz de g_n en la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Determinar la matriz de f_n de la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$ en la base $1, X, \ldots, X^{n+1}$. Calcular las dimensiones respectivas de los images de f_n y de g_n.

[001088]

Ejercicio 1365

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y f la aplicación de $M_2(\mathbb{R})$ en $M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$. Demostrar que f es lineal. Determinar su matriz en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$. [001089]

Ejercicio 1366

Sea φ una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi \neq 0$ y $\varphi^2 = 0$.

1. Construir ejemplos de tales aplicaciones.
2. Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Demostrar que $\{x, \varphi(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Determinar la matriz de φ en esta base.

[001090]

Ejercicio 1367

Sea E un espacio vectorial y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Se supone que $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^2)$. Sea $p \geqslant 1$ y $x \in \ker(\varphi^p)$. Demostrar que $x \in \ker(\varphi^{p-1})$. Deducir que $\ker(\varphi^p) = \ker(\varphi)$, para todo $p \geqslant 1$.
2. Demostrar igualmente que si $\ker(\varphi^2) = \ker(\varphi^3)$, entonces $\ker(\varphi^p) = \ker(\varphi^2)$, para todo $p \geqslant 2$.
3. Se supone ahora que φ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo tal que $\varphi^2 \neq 0$. Sea $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi^2(x) \neq 0$. Demostrar que $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar la matriz de φ en esta base.

[001091]

Ejercicio 1368

Sean E un espacio vectorial de dimensión 3 y φ una aplicación lineal de E en E tal que $\varphi^2 = 0$ y $\varphi \neq 0$. Sea $r = \mathrm{rg}(\varphi)$.

1. Demostrar que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi)$. Deducir que $r \leqslant 3 - r$. Calcular r.
2. Sea $e_1 \in E$ tal que $\varphi(e_1) \neq 0$ y sea $e_2 = \varphi(e_1)$. Demostrar que existe $e_3 \in \ker(\varphi)$ tal que la familia $\{e_2, e_3\}$ es libre. Demostrar que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de E.
3. Determinar la matriz de φ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Ejercicio 1369

Sea E un espacio vectorial y f una aplicación lineal de E en sí mismo tal que $f^2 = f$.

1. Demostrar que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
2. Sea E sea de dimensión finita n y sea $r = \dim \operatorname{Im} f$. Demostrar que existe una base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tal que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leqslant r$ y $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Determinar la matriz de f en esta base $\mathscr{B}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001093]

Ejercicio 1370

Sea f la aplicación de $\mathbb{R}_n[X]$ en $\mathbb{R}[X]$ definida al escribir para todo $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Demostrar que f es lineal y su imagen está incluida en $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En el caso donde $n = 3$, dar la matriz de f en la base $1, X, X^2, X^3$. Determinar entonces, para un valor de n cualquier, la matriz de f en la base $\{1, X, \dots, X^n\}$.
3. Determinar el núcleo y la imagen de f. Calcular su dimensión respectiva.
4. Sea Q un elemento de la imagen de f. Demostrar que existe un único $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que : $f(P) = Q$ y $P(0) = P'(0) = 0$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001094]

Ejercicio 1371

Sea (e_1, e_2, e_3) una base del espacio E tridimensional sobre un cuerpo K. I_E significa la aplicación identidad de E. Se considera la aplicación lineal f de E en E tal que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Estudiar el subespacio $\ker(f - I_E)$: dimensión, base.
2. Estudiar el subespacio $\ker(f^2 + I_E)$: dimensión, base.
3. Demostrar que la unión de las bases anteriores constituye una base de E. ¿Cuál es la matriz de f en esta nueva base ?, ¿y la de f^2 ?

[001095]

Ejercicio 1372

Sea E un espacio de n dimensiones y f un endomorfismo de E.

1. Demostrar que la condición $f^2 = 0$ es equivalente a $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. ¿Qué condición satisface entonces el rango de f ? Se supone en el resto del ejercicio que $f^2 = 0$.
2. Sea E_1 un suplemento de $\ker f$ en E y sea $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ una base de E_1. Demostrar que la familia de vectores $(e_1, e_2, \dots, e_r, f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_r))$ es libre. Demostrar cómo se puede completar, si es necesario, por vectores de $\ker f$ de manera que se obtenga una base de E. ¿Cuál es la matriz de f en esta base ?
3. ¿Bajo qué condición necesaria y suficiente se tiene $\operatorname{Im} f = \ker f$?

4. Ejemplo : Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Demostrar que $f^2 = 0$. Determinar una nueva base en la que la matriz de f tiene la forma indicada en la pregunta 2).

[001096]

Ejercicio 1373

Sean tres vectores e_1, e_2, e_3 formando una base de $\mathbb{R}^3$. Se denota ϕ la aplicación lineal definida por $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ y $\phi(e_3) = e_3$.

1. Escribir la matriz A de ϕ en la base (e_1, e_2, e_3). Determinar el núcleo de esta aplicación.
2. Sea $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calcular e_1, e_2, e_3 en función de f_1, f_2, f_3. ¿Los vectores f_1, f_2, f_3 forman una base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calcular $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en función de f_1, f_2, f_3. Escribir la matriz B de ϕ en la base (f_1, f_2, f_3) y encontrar la naturaleza de la aplicación ϕ.
4. Se define $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que P es invertible y calcular P^{-1}. ¿Qué relación une A, B, P y P^{-1} ?

Solución ▼ Vidéo ■ [001097]

Ejercicio 1374

Sea $M_{\alpha,\beta}$ la matriz : $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Determinar para qué valores de α y de β la aplicación lineal asociada es sobreyectiva.

Solución ▼ [001098]

Ejercicio 1375

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(B)$. Determinar una base de núcleo y una base de imagen para cada una de las aplicaciones lineales asociadas f_A y f_B.

Solución ▼ Vidéo ■ [001099]

Ejercicio 1376

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y φ una aplicación lineal de E en E. Demostrar que existe un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $P(f) = 0$. (Se puede usar el hecho que $\mathscr{L}(E)$ es isomorfo a $M_n(\mathbb{R})$.)

Solución ▼ [001100]

Ejercicio 1377

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot{}^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizando la aplicación lineal asociada de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calcular A^p, para $p \in \mathbb{Z}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001101]

Ejercicio 1378

La misma pregunta del ejercicio anterior para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. [001102]

Ejercicio 1379

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ en la base canónica. Determinar la matriz de f en la base $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$. [001103]

Ejercicio 1380

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ en la base canónica. Sean $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Demostrar que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y determinar $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
2. Calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.
3. Determinar el conjunto de sucesiones reales que satisfacen $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001104]

Ejercicio 1381

Sea $E = \mathrm{vect}(AB - BA, (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})^2)$.

1. Demostrar que $E = \ker \mathrm{tr}$ (para la inclusión no trivial, se encuentra una base de $\ker \mathrm{tr}$ formada por matrices de la forma $AB - BA$).
2. Sea $f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})^*$ tal que $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})^2$ $f(AB) = f(BA)$. Demostrar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f = \alpha\, \mathrm{tr}$.

[001105]

Ejercicio 1382

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$. Demostrar que Φ es lineal, determinar su matriz en la base canónica y calcular $\ker\Phi$ y $\operatorname{Im}\Phi$. [001106]

Ejercicio 1383

Sea $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ una matriz cuadrada $n \times n$. Se quiere demostrar el siguiente resultado debido a Hadamard : Se supone que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, se tiene

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

entonces A es invertible.

1. Demostrar el resultado para $n = 2$.
2. Sea B, la matriz obtenida reemplazando, para $j \geqslant 2$, cada columna c_j de A por la columna
$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$
Calcular los b_{ij} en función de los a_{ij}. Demostrar que si los coeficientes de A satisfacen las desigualdades anteriores, entonces para $i \geqslant 2$, se tiene
$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}|.$$
3. Demostrar el resultado de Hadamard para n cualquiera.

Solución ▼ [002565]

Ejercicio 1384

Sean A y B de matrices no nulas de $M_n(\mathbb{R})$. Se supone que $A \cdot B = 0$.

1. Demostrar que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$.
2. Se supone que el rango de A es igual a $n-1$, determinar el rango de B.

Solución ▼ [002585]

Ejercicio 1385

Se designa por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. A una permutación $\sigma \in \mathscr{S}_n$, se asocia el endomorfismo u_σ de $\mathbb{R}^n$ siguiente :

$$u_\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

1. Sea $\tau = (i\,j)$ una transposición. Escribir la matriz de u_τ en la base canónica. Demostrar que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Demostrar que $\forall\, \sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma'\circ\sigma}$.
3. Deducir que $\forall\, \sigma \in \mathscr{S}_n$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$, donde ε designa el signo.

[002776]

Ejercicio 1386 Coeficientes binomiales

Sea $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$ tal que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Interpretar A como la matriz de un endomorfismo simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. Deducir la matriz A^{-1}.

[003406]

Ejercicio 1387 Coeficientes binomiales

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $a_{ij} = (-1)^{n-j}C_{n-j}^{i-1}$.

1. Interpretar A como la matriz de un endomorfismo de $K_{n-1}[X]$.
2. Deducir A^3.

Solución ▼ [003407]

Ejercicio 1388 ***I

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, nilpotente de índice 2. Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f se escribe $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005261]

Ejercicio 1389

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (4x+y+z, 4x+7y+2z, -6x-6y-z).$$

1. Escribir la matriz A de f en la base canónica $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Demostrar que los vectores $v_1 = (1,0,-2)$, $v_2 = (1,-1,0)$ y $v_3 = (0,-1,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ que se denota $\mathscr{B}'$.
3. Determinar la matriz de paso $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, y la matriz de transición $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}$.
4. Determinar la matriz M de f en la base $\mathscr{B}'$.
5. Deducir A^n, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución ▼ [007411]

Ejercicio 1390

Sea $\mathbb{R}[X]$ el conjunto de polinomios en $\mathbb{R}$ y sea $\mathbb{R}_n[X]$ el conjunto de polinomios de grado a lo sumo n. Se considera la aplicación $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ definida por :

$$\Phi(P)(X) := (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

1. Demostrar que la aplicación Φ es un endomorfismo.
2. Demostrar que la matriz A de la aplicación Φ en la base $(1, X, X^2)$ se escribe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinar el rango de Φ.
4. Deducir que Φ es una aplicación invertible.
5. Determinar una base del núcleo de la aplicación $\Phi - \mathrm{Id}$, donde Id designa la aplicación identidad.
6. Demostrar que la dimensión de la imagen de $\Phi - \mathrm{Id}$ es de dimensión 2. Determinar una base de la imagen.
7. Determinar el conjunto de polinomios de $\mathbb{R}[X]$ verificando la identidad : $2X\,P = (X^2-1)\,P'$.

Solución ▼ [007412]

44 108.04 Ejemplos geométricos

Ejercicio 1391 Homografías

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, se denota $f_M : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Demostrar que $M \mapsto f_M$ es un morfismo de grupos. ¿Cuál es su núcleo ? [003364]

45 108.05 Inversa, método de Gauss

Ejercicio 1392 Conservación de la inversa en un sub-cuerpo

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$. Comparar los enunciados :
1 : M es invertible en $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$.
2 : M es invertible en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. [003361]

Ejercicio 1393 Álgebra de matrices

Se denota $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathscr{A} = \{aU + bI,\ a,b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geqslant 2)$.

1. Demostrar que $\mathscr{A}$ es una subálgebra conmutativa de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Sea $M = aU + bI \in \mathscr{A}$. Demostrar que M tiene una inversa en $\mathscr{A}$ si y solo si $b(b+na) \neq 0$, y llegado el caso, dar M^{-1}.
3. Demostrar que si $b(b+na) = 0$, entonces M no es invertible en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Encontrar las matrices $M \in \mathscr{A}$ verificando : $M^n = I$.

Solución ▼ [003362]

Ejercicio 1394 Operaciones por bloques

1. Sean $A_1 \in \mathscr{M}_{n,p_1}(K)$, $A_2 \in \mathscr{M}_{n,p_2}(K)$, $B_1 \in \mathscr{M}_{p_1,q}(K)$, $B_2 \in \mathscr{M}_{p_2,q}(K)$. Se establece $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p_1+p_2}(K)$ y $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p_1+p_2,q}(K)$. Demostrar que $AB = A_1B_1 + A_2B_2$.

2. Sea $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, donde $A, B, 0, C$ son matrices de tamaños $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q \times q$ (matriz triangular por bloques). Demostrar que M es invertible si y solo si A y C, lo son. El caso échéant, dar M^{-1} en la misma forma.
3. Deducir una nueva demostración de la propiedad : *La inversa de una matriz triangular es triangular.*

Solución ▼ [003365]

Ejercicio 1395 Descomposición de una matriz en matrices invertibles

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(K)$ tales que $A = U + V$. [003366]

Ejercicio 1396 Todo hiperplano de $\mathscr{M}_n(K)$ contiene una matriz invertible

Sea H un hiperplano de $\mathscr{M}_n(K)$ $(n \geqslant 2)$.

1. Demostrar que existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $H = \{M \text{ tal que } \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.
2. Deducir que H contiene una matriz invertible.

Solución ▼ [003376]

Ejercicio 1397 M antisimétrica $\Rightarrow I + M$ es invertible

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica.

1. Demostrar que $I + M$ es invertible (si $(I + M)X = 0$, calcular ${}^t(MX)(MX)$).
2. Sea $A = (I - M)(I + M)^{-1}$. Demostrar que ${}^tA = A^{-1}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [003380]

Ejercicio 1398 Ecuación $X^2 + X = A$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se quiere resolver la ecuación en $\mathscr{M}_2(K)$: $X^2 + X = A$. Sea X una solución y ϕ_A, ϕ_X endomorfismos de K^2 de matrices A y X en la base canónica.

1. Demostrar que X o $X + I$ no es invertible.
2. Si X no es invertible, demostrar que X es proporcional a A (se demuestra que $\ker \phi_X = \ker \phi_A$ y $\operatorname{Im} \phi_X = \operatorname{Im} \phi_A$).
3. Resolver la ecuación.

Solución ▼ [003381]

Ejercicio 1399 Grupos de matrices

Sea $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}_n(K)$ tal que para la multiplicación, $\mathscr{G}$ sea un grupo. Se denota J el elemento neutro y para $M \in \mathscr{G}$, ϕ_M el endomorfismo de K^n canónicamente asociada a M.

1. Demostrar que ϕ_J es una proyección.
2. Demostrar que : $\forall M \in \mathscr{G}$, $\phi_{M|\ker \phi_J} = 0$ y $\phi_{M|\operatorname{Im} \phi_J}$ es un isomorfismo de $\operatorname{Im} \phi_J$.
3. Deducir que $\mathscr{G}$ es isomorfo a un grupo $\mathrm{GL}_k(K)$.

Solución ▼ [003382]

Ejercicio 1400 Inversión de matrices

Invertir las matrices siguientes :

1. $\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{gen}\,(0) & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\lambda_1} & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1+\frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003398]

Ejercicio 1401 Efecto de redondeo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y B^{-1}.

Solución ▼ [003399]

Ejercicio 1402 ***

Sea $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ definida por

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i>j \\ 0 & \text{si } i<j \end{cases}.$$

Demostrar que A es invertible y calcular su inversa.

Solución ▼ [005267]

Ejercicio 1403 ***I Teorema de HADAMARD

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que : $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Demostrar que A es invertible.

Solución ▼ [005272]

Ejercicio 1404 ***I Matriz de VANDERMONDE de raíces n-ésimas de la unidad

Sea $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$, $(n \geqslant 2)$. Sea $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1} (calcular primero $A\bar{A}$).

Solución ▼ [005274]

Ejercicio 1405 ***I

Sea $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ definida por $a_{i,j}=0$ si $i>j$ y $a_{i,j}=C_{j-1}^{i-1}$ si $i\leqslant j$. Demostrar que A es invertible y determinar su inversa. (Indicación : Considerar el endomorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$ que a un polinomio P asocia el polinomio $P(X+1)$).

Solución ▼ [005276]

Ejercicio 1406 ****

Demostrar que todo hiperplano de $M_n(\mathbb{R})$ contiene las matrices invertibles.

Solución ▼ [005597]

Ejercicio 1407 ***

Sea $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ definida por $a_{i,j}=1$ si $i=j$, j si $i=j-1$ y 0 si no. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

Solución ▼ [005604]

Ejercicio 1408 ***

Sean $a_1,\dots,a_n$, n reales todos no nulos y $A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$. Dar la inversa de A en caso de existencia.

Solución ▼ [005610]

Ejercicio 1409 **I

Calcular la inversa de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0}\\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005612]

Ejercicio 1410 ***I

Sea n un entero natural mayor o igual a 2 y $\omega=e^{2i\pi/n}$. Sea $A=(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

Solución ▼ [005613]

Ejercicio 1411 ***I Teorema de HADAMARD

Sea $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Demostrar que $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. (Una matriz con diagonal estrictamente dominante es invertible.)

Solución ▼ [005617]

Ejercicio 1412

Calcular (si existe) la inversa de las matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & \bar\alpha & \bar\alpha^2\\ \alpha & 1 & \bar\alpha\\ \alpha^2 & \alpha & 1\end{pmatrix},(\alpha\in\mathbb{C}),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \vdots & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & 2\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006872]

Ejercicio 1413

Para un entero $n\geqslant 2$ y x en $\mathbb{R}$, consideremos la matriz de orden n :

$$D_n=\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & x\end{pmatrix}.$$

1. Calcular $\det(D_2)$ y $\det(D_3)$.
2. Demostrar primero que

$$\det(D_n)=\begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \cdots & \cdots & x+n-1\\ 1 & x & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x\end{vmatrix},$$

y entonces

$$\det(D_n)=(x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & x\end{vmatrix}.$$

3. Usando el método de pivote gaussiano, calcular $\det(D_n)$, para todo n.
4. Para cada n, ¿para cuáles valores de x la matriz D_n es invertible ?

Solución ▼ [007413]

46 108.06 Cambio de base, matriz de pasaje

Ejercicio 1414 Conjugación

1. Sea $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Demostrar que la aplicación $\phi_P : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$, $M \mapsto P^{-1}MP$ es un isomorfismo de álgebra.
2. Sea $\phi : A = (a_{ij}) \longmapsto A' = (a_{n+1-i,n+1-j})$.
   (a) Demostrar que ϕ es un isomorfismo de álgebra de $\mathscr{M}_n(K)$.
   (b) Encontrar una matriz $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tal que $\phi = \phi_P$.

[003367]

Ejercicio 1415 Chimie P' 1996

Sea $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ teniendo como matriz en la base canónica $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en otra base. Dar la matriz de pasaje.

Solución ▼ [003368]

Ejercicio 1416 Cambio de base

Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz relativamente a las bases canónicas, $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}, \overrightarrow{L})$ y $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ es $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se definen dos nuevas bases : $\mathscr{B} = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, 4\overrightarrow{I} + \overrightarrow{J} - 3\overrightarrow{L}, -7\overrightarrow{I} + \overrightarrow{K} + 5\overrightarrow{L})$ y $\mathscr{B}' = (4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{k})$. ¿Cuál es la matriz de f relativamente a $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$?

Solución ▼ [003400]

Ejercicio 1417 Matrices semejantes

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que A y B son semejantes. (Se busca P invertible tal que $PB = AP$)

Solución ▼ [003401]

Ejercicio 1418 Matrices semejantes

Demostrar que $M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Solución ▼ [003402]

Ejercicio 1419 Matrices no semejantes

Demostrar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no son semejantes.

Solución ▼ [003403]

Ejercicio 1420 matrices no semejantes

Sean $A = \begin{pmatrix} 29 & 38 & -18 \\ -11 & -14 & 7 \\ 20 & 27 & -12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Demostrar que A y B tienen el mismo rango, mismo determinante, misma traza, pero no son semejantes (calcular $(A-I)^2$ y $(B-I)^2$). [003404]

Ejercicio 1421 Ensi Physique P 1995

¿Las matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son semejantes ?

Solución ▼ [003405]

Ejercicio 1422 Comatriz

Sea $n \geqslant 2$ y $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Si A y B son invertibles, demostrar que $\mathrm{com}\,(AB) = (\mathrm{com} A)(\mathrm{com} B)$.
2. Demostrar el mismo resultado en el caso general, considerando los escalares λ tales que $A - \lambda I$ y $B - \lambda I$ son invertibles.
3. Deducir que si A y B son semejantes, entonces $\mathrm{com} A$ y $\mathrm{com} B$ también lo son.

[003433]

Ejercicio 1423 Matrices reales semejantes en $\mathbb{C}$

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semejantes en $\mathbb{C}$: existe $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que : $\begin{cases} P + iQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (P+iQ)A = B(P+iQ). \end{cases}$

1. Demostrar que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (P+\lambda Q)A = B(P+\lambda Q)$.
2. Deducir que A y B son semejantes en $\mathbb{R}$.

[003577]

Ejercicio 1424 ***T

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ es :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que u es un automorfismo de $\mathbb{R}^3$ y determinar u^{-1}.
2. Determinar una base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ tal que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ y $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Determinar P la matriz de pasaje de (i, j, k) a (e_1, e_2, e_3) así como P^{-1}.
4. Deducir $u^n(i)$, $u^n(j)$ y $u^n(k)$, para n entero relativo.

Solución ▼ [005259]

Ejercicio 1425 **

Sean $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ y $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. ¿$M(a)$ y $N(a)$ son semejantes ?

Solución ▼ [005626]

Ejercicio 1426 ***I

Sean A y B dos elementos de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que si A y B son semejantes en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, lo son en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [005627]

47 108.99 Otro

Ejercicio 1427

Sea A una matriz cuadrada que conmuta con todos las matrices cuadradas. Demostrar que es una matriz escalar. [002434]

Ejercicio 1428

Sea A una matriz cuadrada.

1. Demostrar que $A^2 = I$ si y solo si $(I-A)(I+A) = 0$. Demostrar que en este caso A es invertible.
2. Demostrar que si A es idempotente ($A^2 = A$), entonces $B = I - A$, lo es también y que $AB = BA = 0$.
3. Demostrar que I es la única matriz idempotente invertible.

[002437]

Ejercicio 1429

Encontrar todas las matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que verifican

1. $M^2 = 0$; 2. $M^2 = M$; 3. $M^2 = I$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002475]

Ejercicio 1430

Un tren que frena con desaceleración constante hace 20s para recorrer el primer km y 30s para recorrer el segundo km. Se quiere calcular la distancia que tendrá que recorrer para llegar a la parada.

— Tomando como origen la posición inicial del tren, escribir la ecuación general de un movimiento uniformemente desacelerado.
— Deducir un sistema de dos ecuaciones cuyas incógnitas son la desaceleración y la velocidad inicial del tren, y resolver este sistema.
— Concluir.

[002693]

Ejercicio 1431 Cuaterniones

Demostrar que $\mathscr{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Demostrar que $\mathscr{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \right\}$ es un cuerpo no conmutativo. [003363]

Ejercicio 1432 Centro de $\mathrm{GL}_n(K)$

Se denota (E_{ij}) la base canónica de $\mathscr{M}_n(K)$.

1. Demostrar que $F_{ij} = I + E_{ij}$ es invertible.
2. Deducir que $\operatorname{vect}\big(\mathrm{GL}_n(K)\big) = \mathscr{M}_n(K)$.
3. Cuál es el centro de $\mathrm{GL}_n(K)$?

[003369]

Ejercicio 1433 Centro de $\mathrm{GL}_n(K)$

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ teniendo la misma matriz en todas las bases de E. Demostrar que f es una homotecia. [003370]

Ejercicio 1434 Centro de matrices triangulares unipotentes

Se denota $\mathscr{G} = \{A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i > j$ y $a_{ii} = 1\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{G}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(K)$.
2. Usando la base canónica de $\mathscr{M}_n(K)$, determinar el centro de $\mathscr{G}$, y demostrar que es un grupo conmutativo isomorfo a $(K,+)$.

Solución ▼ [003371]

Ejercicio 1435 Ecuación $aX + (\operatorname{tr} X)A = B$

Sea $\alpha \in K$, y $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Estudiar la ecuación de incógnita $x \in \mathscr{M}_n(K)$: $\alpha X + (\operatorname{tr} X)A = B$.

Solución ▼ [003372]

Ejercicio 1436 Conmutante de una matriz diagonal

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ y $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $AM = MA\}$ (*conmutante de* A).

1. Demostrar que $\mathscr{C}_A$ es una subálgebra de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Sea $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ una matriz diagonal donde todos los λ_i son distintos.
   (a) Determinar $\mathscr{C}_A$.
   (b) Sea $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), M \mapsto MA - AM$. Demostrar que $\operatorname{Im}\phi$ es el conjunto de matrices de diagonal nula.

[003373]

Ejercicio 1437 Matrices de trazas nulas

Sea $M \in \mathscr{M}_n(K)$ *no escalar* tal que $\operatorname{tr} M = 0$.

1. Demostrar que existe una matriz columna X_1 tal que MX_1 no sea no colineal con X_1.
2. Deducir que M es semejante a una matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$, donde $M_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$ y $\operatorname{tr} M_1 = 0$.
3. Demostrar que M es semejante a una matriz de diagonal nula.
4. Demostrar que existe $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$ tales que $M = AB - BA$.

[003374]

Ejercicio 1438 Forma bilineal traza

1. Sea $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ no nula. Demostrar que la aplicación $f_A : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K, X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$ es una forma lineal no nula en $\mathscr{M}_{p,n}(K)$.
2. Recíprocamente : Sea $\phi : \mathscr{M}_{p,n}(K) \to K$ una forma lineal cualquiera. Demostrar que existe una única matriz $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ tal que $\phi = f_A$ (se puede considerar la aplicación $A \mapsto f_A$).
3. Sea $\phi : \mathscr{M}_n(K) \to K$ una forma lineal verificando : $\forall X, Y \in \mathscr{M}_n(K),\ \phi(XY) = \phi(YX)$.
   Demostrar que existe $\lambda \in K$ tal que $\phi = \lambda \operatorname{tr}$.

[003375]

Ejercicio 1439 Matrices mágicas

Una matriz cuadrada M se dice *mágica* si las sumas de los coeficientes de M por fila y por columna son constantes. Se denota $s(M)$ su valor común. Sea $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathscr{M} = \{\text{matrices } n \times n \text{ mágicas}\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{M}$ es una subálgebra de $\mathscr{M}_n(K)$ y $s : \mathscr{M} \to K$ es un morfismo de álgebra (calcular MU y UM).
2. Si M es mágica invertible, demostrar que M^{-1} es también mágica.
3. Demostrar que $\mathscr{M}$ es la suma directa del sev de matrices mágicas simétricas y el sev de matrices mágicas antisimétricas.
4. Para $M \in \mathscr{M}_n(K)$, se denota ϕ_M el endomorfismo de K^n canónicamente asociada a M. Sea $\mathscr{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \text{ tal que } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ y $\mathscr{K} = \{(x, \dots, x) \in K^n\}$.
   (a) Demostrar que : $M \in \mathscr{M} \iff \mathscr{H}$ y $\mathscr{K}$ son estables por ϕ_M.
   (b) Deducir $\dim(\mathscr{M})$.

[003377]

Ejercicio 1440 Matrices triangulares nilpotentes

1. Sea A una matriz triangular de diagonal nula. Demostrar que A es nilpotente.
2. Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ una matriz nilpotente de índice n y ϕ el endomorfismo de K^n asociada. Se denota $E_i = \ker \phi^i$, y $\overrightarrow{e}_i$ un vector cualquiera elegido en $E_i \setminus E_{i-1}$ ($\overrightarrow{e}_1 \in E_1 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$).
   (a) Justificar la existencia de $\overrightarrow{e}_i$.
   (b) Demostrar que la familia $(\overrightarrow{e}_i)$ es una base de K^n.
   (c) Deducir que A es semejante a una matriz triangular de diagonal cero.

Ejercicio 1441 Matriz verificando $A^k = I$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $A^k = I$ $(k \neq 0)$. Sea $B = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. Sean u, v endomorfismos de K^n de matrices A y B en la base canónica.

1. Demostrar que : $\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, v$, $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \ker v$, $\quad \ker v \oplus \mathrm{Im}\, v = K^n$.
2. Deducir : $\mathrm{tr}\, B = k\, \mathrm{rg}\, B$.

Solución ▼ [003383]

Ejercicio 1442 $A > 0, X > 0$ y $A^k X = X$

Sea $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Se dice que A es positiva si todos sus coeficientes son estrictamente positivos. Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positiva. Se supone que existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positivo y $k \in \mathbb{N}^*$ tales que $M^k X = X$. Demostrar que existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positivo tal que $MY = Y$. [003384]

Ejercicio 1443 Sucesión recurrente lineal matricial

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Expresar en términos de k el término general de la sucesión (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_n(K)$ definida por : $\begin{cases} M_0 \text{ es dada,} \\ M_{k+1} = AM_k + B. \end{cases}$

Solución ▼ [003385]

Ejercicio 1444 A, A^2, A^3 dadas $\Rightarrow A^p$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Se supone que existe $\lambda, \mu \in K$ y $U, V \in \mathscr{M}_n(K)$ tales que : $\begin{cases} A = \lambda U + \mu V \\ A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \\ A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \end{cases}$

1. Demostrar que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$ (buscar una relación lineal entre A, A^2, A^3).
2. Se supone aquí $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$. Sea X un vector propio de A. Demostrar que X es un vector propio de U y de V, con valores propios $0,0$ o $1,0$, o $0,1$.

Solución ▼ [003386]

Ejercicio 1445 Ideal es de $\mathscr{M}_n(K)$

Una parte $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}_n(K)$ es llamada *ideal a la derecha de* $\mathscr{M}_n(K)$ si es un subgrupo aditivo verificando :

$$\forall A \in \mathscr{I},\ \forall B \in \mathscr{M}_n(K),\ AB \in \mathscr{I}.$$

Para $A \in \mathscr{M}_n(K)$, se denota $\mathscr{H}_A$ el sev de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ generado por las columnas de A, y $\mathscr{I}_A$ el ideal de recta generada por A : $\mathscr{I}_A = \{AM \text{ tal que } M \in \mathscr{M}_n(K)\}$.

1. Sean $A, M \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que : $M \in \mathscr{I}_A \iff \mathscr{H}_M \subset \mathscr{H}_A$.
2. Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que existe $C \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $\mathscr{H}_A + \mathscr{H}_B = \mathscr{H}_C$. Simplificar $\mathscr{I}_A + \mathscr{I}_B$.
3. Sea $\mathscr{I}$ un ideal a la derecha de $\mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que $\mathscr{I}$ es un sev de $\mathscr{M}_n(K)$, luego que existe $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $\mathscr{I} = \mathscr{I}_A$.
4. ¿Qué se puede decir de los ideales *a la izquierda* de $\mathscr{M}_n(K)$?

[003387]

Ejercicio 1446 Clases de equivalencia en $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$

1. Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Demostrar que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si y solo si $|\det M| = 1$.
2. Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ y d el mcd de $x_1, \dots, x_n$. Demostrar que existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tal que $AX = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (por inducción en n).
3. Sean $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. ¿SE puede dar una CNS para que exista $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tal que $AX = Y$?

[003388]

Ejercicio 1447 Radio espectral de una matriz con coeficientes positivos

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ con : $\forall i, j,\ a_{ij} > 0$. Se provee $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la relación de orden :

$$(X \geqslant Y) \iff (\forall i,\ x_i \geqslant y_i),$$

y se define para $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \geqslant 0$, $X \neq 0$:

$$\begin{cases} R(X) = \sup\{r \geqslant 0 \text{ tal que } AX \geqslant rX\}, \\ \quad R \quad = \sup\{R(X) \text{ tal que } X \geqslant 0, X \neq 0\}. \end{cases}$$

1. Demostrar que R es finito y que existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $R(X_0) = R$.
2. Demostrar que todas las coordenadas de X_0 son estrictamente positivas.
3. Se define $AX_0 = RX_0 + Y$. Demostrar que $Y = 0$.
4. Sea λ un valor propio complejo de A. Demostrar que $|\lambda| \leqslant R$, y $(|\lambda| = R) \Leftrightarrow (\lambda = R)$.

Solución ▼ [003389]

Ejercicio 1448 INT Ingeniería 93

Sea $E = \{\text{matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisimétricas}\}$ y $f : E \to E, M \mapsto {}^t\!AM + MA$, donde $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que f es un endomorfismo.
2. ¿Cuál es la traza de f ?

Solución ▼ [003390]

Ejercicio 1449 Ensam PSI 1998

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ y $\mathscr{C}(A)$ su conmutante. Demostrar que para $M, N \in \mathscr{C}(A)$ se tiene : $M = N \Leftrightarrow M$ y N tienen la misma última columna. Deducir que $\mathscr{C}(A) = K_{n-1}[A]$. [003391]

Ejercicio 1450 ENS MP 2002

¿Qué pasa con los morfismos de grupo $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Solución ▼ [003392]

Ejercicio 1451 ***

1. Demostrar que una matriz triangular superior es invertible si y solo si sus coeficientes diagonales son todos no nulos.
2. Demostrar que toda matriz triangular superior es semejante a una matriz triangular inferior.

Solución ▼ [005264]

Ejercicio 1452 ***

Sean $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y sea $E = \{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Demostrar que $(E,+,\cdot)$ es un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Determinar una base de E y su dimensión.
2. Demostrar que $(E,+,\times)$ es un anillo conmutativo.
3. ¿Cuáles son los invertibles de E ?
4. Resolver en E las siguientes ecuaciones :

   a) $X^2 = I$ b) $X^2 = 0$ c) $X^2 = X$.

5. Calcular $(M(x,y))^n$, para n entero natural no nulo.

Solución ▼ [005265]

Ejercicio 1453 ****

Sea $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tales que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demostrar la existencia de al menos un par (A,B) verificando las condiciones del enunciado y luego calcular BA. (Indicación. Calcular $(AB)^2$ y usar el rango.)

Solución ▼ [005266]

Ejercicio 1454 ***I

Determinar el centro de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, es decir el conjunto de elementos de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que conmutan con todos los elementos de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (usar las matrices elementales).

Solución ▼ [005268]

Ejercicio 1455 ****

Demostrar que todo hiperplano de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ contiene al menos una matriz invertible.

Solución ▼ [005270]

Ejercicio 1456 ***

Sea f que a $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ asociada $f(P) = X(X+1)P' - 2kXP$. Encontrar k tal que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$, luego para este valor de k, encontrar todos los polinomios P no nulos tales que la familia $(P, f(P))$ sea ld. [005271]

Ejercicio 1457 ***I

Cálculo por bloques.

1. Sea $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, con $(A, A') \in (\mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K}))^2$, $(B, B') \in (\mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K}))^2$, $(C, C') \in (\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}))^2$ y $(D, D') \in (\mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K}))^2$. Calcular $M+N$ en función de A, B, C, D, A', B', C' y D'.
2. Pregunta análoga para MN analizando con precisión los formatos de cada matriz.

Solución ▼ [005273]

Ejercicio 1458 ***

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ y u el endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ de matriz A en la base canónica de $\mathbb{C}^4$.

1. Determinar una base de $\mathbb{C}^4$ formada por vectores colineales a sus imágenes.
2. Escribir las fórmulas de cambio de base correspondientes.
3. Deducir el cálculo de A^n, para n entero natural.

Solución ▼ [005275]

Ejercicio 1459 ***I

Sean $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tales que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justificar la existencia de A y B, luego calcular BA.

Solución ▼ [005585]

Ejercicio 1460 ***

Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $\sum_{M \in G} \mathrm{tr}(M) = 0$. Demostrar que $\sum_{M \in G} M = 0$.

Solución ▼ [005594]

Ejercicio 1461 ***

Sea G un subgrupo de $\mathrm{GL}(E)$, con $\dim E = n$ y $\operatorname{card} G = p$. Sea $F = \{x \in E / \forall g \in G,\ g(x) = x\}$. Demostrar que $\dim F = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$.

Solución ▼ [005595]

Ejercicio 1462 ***I

Sean $A_1,\ldots,A_p$ p matrices distintas e invertibles de $M_n(\mathbb{R})$ tales que $G=\{A_1,\ldots,A_p\}$ sea estable para la multiplicación. Sea $A=A_1+\cdots+A_p$. Demostrar que $\operatorname{tr} A$ es un entero divisible por p.

Solución ▼ [005596]

Ejercicio 1463 ***

Sean n un entero natural no nulo, entonces $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Sea f el endomorfismo de $M_n(\mathbb{K})$ que tiene una matriz X asociada $AX+XA$. Calcular $\operatorname{tr}(f)$.

Solución ▼ [005605]

Ejercicio 1464 **

Sean a un real no nulo y A y B dos elementos de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Resolver en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la ecuación de incógnita M : $aM+\operatorname{tr}(M)A=B$.

Solución ▼ [005606]

Ejercicio 1465 **

Sean $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $J=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Sea $E=\{M(x,y)=xI+yJ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Demostrar que $(E,+,\cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y precisar su dimensión.
2. Demostrar que $(E,+,\times)$ es un anillo conmutativo.
3. ¿Cuáles son los elementos invertibles del anillo $(E,+,\times)$?
4. Resolver en E las ecuaciones :

   1. $X^2=I$, 2. $X^2=0$, 3. $X^2=X$.
5. Calcular $(M(x,y))^n$, para n todo natural con x, y reales.

Solución ▼ [005608]

Ejercicio 1466 ***

Se llama al ideal bilateral del anillo $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ todo subconjunto I de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

a) $(I,+)$ es un grupo y b) $\forall A\in I$, $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AM\in I$ y $MA\in I$.

Determinar todos los ideales bilaterales del anillo $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Solución ▼ [005609]

Ejercicio 1467 *I

¿Existen dos matrices cuadradas A y B tales que $AB-BA=I_n$?

Solución ▼ [005618]

Ejercicio 1468 **I

Sea f una forma lineal en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $f(AB)=f(BA)$. Demostrar que existe un complejo a tal que $f=a\operatorname{tr}$.

Solución ▼ [005619]

Ejercicio 1469 ***

Sea $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a real dado). Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

Solución ▼ [005620]

Ejercicio 1470 **

Sean A una matriz cuadrada de tamaño n y f la aplicación de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en sí mismo que tiene una matriz M asociada MA. Encontrar la matriz de f en la base canónica de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ordenado por el orden lexicográfico).

Solución ▼ [005621]

Ejercicio 1471 ***I

Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño n tales que $AB - BA = A$. Calcular la traza de A^{2010}.

Solución ▼ [005625]

Ejercicio 1472 **I Exponencial de una matriz nilpotente

Para A matriz nilpotente dada, se establece $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1. Demostrar que si A y B conmutan y son nilpotentes entonces $A+B$ es nilpotente y $\exp(A+B) = \exp A \times \exp B$.
2. Demostrar que $\exp A$ es invertible.
3. Calcular $\exp A$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005628]

48 120.01 Los racionales

Ejercicio 1473

1. Demostrar que si $r \in \mathbb{Q}$ y $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $r + x \notin \mathbb{Q}$ y si $r \neq 0$, entonces $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Demostrar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. Deducir : entre dos números racionales siempre existe un número irracional.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000451]

Ejercicio 1474

¿Son racionales los siguientes números ?, ¿decimales ?
$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, $e = 8/3$, $f = 0,333\ldots3\ldots$, $g = \sqrt{2}$,
$h = 0,123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\ldots$, $i = 0,123\,456\,789\,101\,112\,131\,4\ldots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

[000452]

Ejercicio 1475 Un método geométrico de aproximación de $\sqrt{2}$

En el plano xOy, se lleva en Ox una sucesión de puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y en Oy una sucesión de puntos $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, construida de la siguiente manera :

(i) $a_1 = 2$ y $b_1 = 1$, (ii) $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,
(iii) $a_n b_n = 2$ (el rectángulo de lados a_n y b_n tiene por área 2).

1. Representar esta serie de rectángulos de lados a_n y b_n.
2. Demostrar sucesivamente que : $\forall n,\ b_n < a_n$; $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ decreciente ; $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ creciente.
3. Calcular $a_n - b_n$ en función de $a_{n-1} - b_{n-1}$ y a_n. Demostrar que se tiene la desigualdad :
$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}.$$
4. Calcular los primeros términos de la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_6$. ¿Cuántos decimales exactos de $\sqrt{2}$ se obtiene en cada paso ? Utilizar la desigualdad anterior para demostrar que el número de decimales exactos obtenidos se duplica *grosso modo* a cada paso.

[000453]

Ejercicio 1476

Calcular con una calculadora : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ y $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$. Explicar el resultado. [000454]

Ejercicio 1477

Se consideran los números racionales menores que $\sqrt{2}$. ¿Hay un número racional justo antes de $\sqrt{2}$, más grande que todos los números racionales menores que $\sqrt{2}$?
¿Una sucesión de números racionales tiene un número racional como límite ?
¿Una sucesión de números decimales tiene un número decimal como límite ? [000455]

Ejercicio 1478

Sean a y b dos racionales positivos tales que $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son irracionales. Demostrar que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es irracional.
[000456]

Ejercicio 1479

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$. Se supone que todos los a_i son enteros.

1. Demostrar que si p tiene una raíz racional $\frac{\alpha}{\beta}$ (con α y β primos entre sí) entonces α divide a_0 y β divide a_n.
2. Se considera el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Calculando su cuadrado, demostrar que este cuadrado es la raíz de un polinomio de grado 2. Deducir, usando el resultado anterior de que no es racional.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000457]

Ejercicio 1480

Encontrar en la forma $\frac{p}{q}$ los racionales x cuyas expansiones decimales periódicas están dadas por :

$3,14\overset{\frown}{14}\ldots$; $0,99\overset{\frown}{9}\ldots$; $3,149\overset{\frown}{9}\ldots$ [000458]

Ejercicio 1481

1. Sea $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n veces). Expresar N_n bajo la forma $\frac{p}{q}$, con $p,q \in \mathbb{N}^*$.
2. Sea $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Dar el racional cuya notación decimal es M.
3. La misma pregunta para : $P = 0,11111\ldots+0,22222\ldots+0,33333\ldots+0,44444\ldots+0,55555\ldots+0,66666\ldots+0,77777\ldots+0,88888\ldots+0,99999\ldots$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000459]

Ejercicio 1482

Demostrar que el conjunto $\{r^3;\ r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. [000460]

Ejercicio 1483

Demostrar que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ es irracional.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000461]

Ejercicio 1484

Sea $a \in \mathbb{R}$, demostrar :

$$\exists\,(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*;\left|a-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Indicación : Considerar las partes fraccionarias de $0,a,2a,\ldots,qa$ y la partición $[0,\frac{1}{q}[,[\frac{1}{q},\frac{2}{q}[,\ldots,[\frac{q-1}{q},1[$ de $[0,1[$. [000462]

Ejercicio 1485

Demostrar que el conjunto de números diádicos :

$$\left\{\frac{a}{2^k},(a,k) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$$

es denso en $\mathbb{R}$. [000463]

Ejercicio 1486

Demostrar que toda sucesión convergente es acotada.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000506]

Ejercicio 1487

Demostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

no es convergente.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000507]

Ejercicio 1488

Estudiar la sucesión $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, a y b dados en $\mathbb{R}_+^*$. [000508]

Ejercicio 1489

Verificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si una sucesión positiva es no mayorada, tiende a $+\infty$.
2. Si una sucesión de números enteros converge, es estacionaria.
3. Si una sucesión tiene un número finito de valores, converge si y solo si es estacionaria.
4. Una sucesión es convergente si y solo si está acotada.
5. Si una sucesión no es mayorada, es minorada.

[000509]

Ejercicio 1490

Sea l un número real. ¿Se puede decir que una sucesión que verifica

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n > N, \ |u_n - l| < \varepsilon$$

converge a l? [000510]

Ejercicio 1491

Construir una sucesión $u_n = v_n w_n$ (resp. $v_n + w_n$) convergente y tal que al menos una de las sucesiones (v_n) y (w_n) diverge. [000511]

Ejercicio 1492 Números irracionales

Sea $a \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Demostrar que existe $C > 0$ tal que para todo racional $r = \frac{p}{q}$, se tiene : $\left|r - \sqrt{a}\right| \geqslant \frac{C}{q^2}$.

Solución ▼ [003066]

Ejercicio 1493 Números irracionales

Sean $a, b \in \mathbb{Q}^+$ tales que $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$. Demostrar que existe $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tales que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ si y solo si $a^2 - b$ es un cuadrado en $\mathbb{Q}$.

Solución ▼ [003067]

Ejercicio 1494 Partes fraccionarias

Sea $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, con p, q enteros, $q \geqslant 1$, $p \wedge q = 1$. Calcular $\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{frac}(kx)$.

Solución ▼ [003144]

Ejercicio 1495 Denominadores en un subanillo

Sea A un subanillo de $\mathbb{Q}$. Se escriben los elementos de A en forma irreducible ; sea P el conjunto de denominadores. Demostrar que $A = \left\{ \frac{m}{p} \text{ tales que } m \in \mathbb{Z},\ p \in P \right\}$.

Solución ▼ [003145]

Ejercicio 1496 Los subanillos de $\mathbb{Q}$ son principales

Sea A un subanillo de $\mathbb{Q}$. Demostrar que A es principal (si I es un ideal de A, considerar $I \cap \mathbb{Z}$). [003146]

Ejercicio 1497 Descomposición en inversas

Sea $x \in \mathbb{Q}$, $0 < x < 1$. Se define una sucesión (x_n) de racional por recurrencia :

— $x_0 = x$,

— Si x_n existe y es no nulo, sea $k_n \in \mathbb{N}^*$ el entero más pequeño tal que $\frac{1}{k_n} \leqslant x_n$. Se define $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{k_n}$,

— Si $x_n = 0$, se detiene. En este caso, $x = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_{n-1}}$.

1. Demostrar que la sucesión es siempre finita.
2. Demostrar que si k_{i+1} existe, entonces $k_{i+1} > k_i(k_i - 1)$.
3. Recíprocamente, sea una descomposición : $x = \frac{1}{n_0} + \cdots + \frac{1}{n_p}$, con $n_i \in \mathbb{N}^*$ y $n_{i+1} > n_i(n_i - 1)$. Demostrar que para todo i, se tiene $n_i = k_i$.

Solución ▼ [003147]

Ejercicio 1498 Combinación de fracciones

Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos racionales con $a, c \in \mathbb{Z}$, y $b, d \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que todo racional x se puede escribir de la forma : $x = \frac{ma+nc}{mb+nd}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, y $mb + nd \neq 0$.
2. Estudiar la unicidad de tal escritura.
3. Demostrar que $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ está comprendido entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ si y solo si m y n tienen mismo signo.

Solución ▼ [003148]

Ejercicio 1499 Ecuaciones algebraicas

Determinar $x \in \mathbb{Q}$ sabiendo que :

1. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$.
2. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.
3. $2x^3 - x - 4 = 0$.

Solución ▼ [003149]

Ejercicio 1500 $x^y = y^x$

Se buscan los pares $(x, y) \in \left(\mathbb{Q}^{+*}\right)^2$ tales que $x < y$ y $x^y = y^x$ ($x^y, y^x \in \mathbb{R}$). Se define $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p'}{q'}$ (formas irreducibles), $d = pq' \wedge p'q$, $\quad pq' = ad$ y $p'q = bd$.

1. Demostrar que existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tales que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ y $q' = n^b$.
2. Deducir : $b - a = m^{b-a} - n^{b-a}$.
3. Demostrar que $b - a \leqslant 1$ y concluir.

Solución ▼ [003150]

Ejercicio 1501 I

Demostrar que los siguientes números son irracionales.

1. (**) $\sqrt{2}$ y más generalmente $\sqrt[n]{m}$, donde n es un entero mayor o igual que 2 y m es un entero natural mayor o igual que 2, que no es una potencia n-ésima perfecta.
2. (**) $\log 2$.
3. (****) π (LAMBERT ha demostrado en 1761 que π es irracional, LEGENDRE ha demostrado en 1794 que π^2 es irracional, LINDEMANN ha demostrado en 1882 que π es trascendente). Para esto, suponer por reducción al absurdo que $\pi = \frac{p}{q}$, con p y q enteros naturales primos no nulos. Se considera entonces $I_n = \int\limits_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \operatorname{sen} x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ y demostrar que I_n verifica
   (a) I_n es un entero relativo;
   (b) $I_n > 0$;
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (ver tarea).
4. (***) e (HERMITE ha demostrado en 1873 que e es trascendente. Este es históricamente el primer « verdadero » número cuya trascendencia ha sido demostrada con éxito). Por esto, establecer que para todo entero natural n, $\mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt$, ya que **para todo** entero natural no nulo n, $0 < \mathrm{e} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Entonces razonar por reducción al absurdo.
5. (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Para esto hallar una ecuación de tercer grado con coeficientes enteros cuyas soluciones sean $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ y $\cos(\frac{6\pi}{7})$, luego se verifica que esta ecuación no tiene raíz racional (asumir por reducción al absurdo, que existe una raíz racional $\frac{p}{q}$, con $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ y $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$ y demostrar que p divide 1 y q divide 8). (Se recuerda el teorema de GAUSS : sean a, b y c tres enteros relativos no todos nulos. Si a divide bc y a y b son primos entre sí, entonces a divide c).
6. (***) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Solución ▼ [005209]

Ejercicio 1502 ****

Sea u_n el dígito de las unidades de C_n^k, k entero natural fijo no nulo y n entero natural mayor o igual que k. Demostrar que el número $0,u_k u_{k+1} u_{k+2} \ldots$ es racional.

Solución ▼ [005214]

Ejercicio 1503 ****

Sea $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$, con $p_n \in \mathbb{Z}$ y $q_n \in \mathbb{N}^*$, una sucesión de racionales que convergen a un irracional x. Demostrar que las sucesiones $(|p_n|)$ y (q_n) tienden a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [005243]

49 120.02 Máximo, mínimo, cota superior

Ejercicio 1504

El máximo de dos números x, y (es decir, el más grande de los dos) es denotado $\max(x, y)$. Así mismo, denotamos $\min(x, y)$ el menor de los dos números x, y. Demostrar que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{y} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Encontrar una fórmula para $\max(x, y, z)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000464]

Ejercicio 1505

Determinar la cota superior e inferior (si existen) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ poniendo $u_n = 2^n$ si n es par y $u_n = 2^{-n}$ si no.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000465]

Ejercicio 1506

Determinar (si existen) : los mayorantes, los minorantes, la cota superior, la cota inferior, el elemento más grande, el elemento más pequeño de los siguientes conjuntos :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0,1[\cap\mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000466]

Ejercicio 1507

Sea

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leqslant 2\right\}.$$

1. Demostrar que I es la unión de dos intervalos.
2. Determinar (si existen) : los mayorantes, los minorantes, la cota superior, la cota inferior, el elemento más grande, el elemento más pequeño de I.

[000467]

Ejercicio 1508

¿Los siguientes conjuntos tienen una cota superior, un elemento más grande, una cota inferior, un elemento más pequeño, en $\mathbb{D}$, en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$, (si surge la cuestión) ?

1. $[0, 3[$, 2. $\{0\} \cup]1, 2]$, 3. $\mathbb{D} \cap [0, 1/3]$, 4. $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x = 1/n\}$, 5. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

[000468]

Ejercicio 1509

Se considera el conjunto de números de la forma $1 + \frac{1}{n}$, donde n recorre el conjunto de enteros estrictamente positivos. ¿Este conjunto es mayorado ? ¿Minorado ? ¿Tiene un elemento más pequeño ? ¿Un elemento más grande ? Justificar las respuestas. [000469]

Ejercicio 1510

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, escribir con cuantificadores las siguientes propiedades :

1. 10 es una cota superior de A,
2. m es una cota inferior de A,
3. P no es una un mayorante de A,
4. A es mayorado,
5. A no es minorado,
6. A es acotado,
7. A no es acotada.

[000470]

Ejercicio 1511

Sea E el conjunto de reales de la forma $\frac{n-1/n}{n+1/n}$, con $n \in \mathbb{N}^*$. ¿El conjunto E admite una cota inferior, una cota superior, un elemento más grande, un elemento más pequeño ? [000471]

Ejercicio 1512

Sea $E = \{\frac{1}{n}\cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; calcular $\inf E$ y $\sup E$. [000472]

Ejercicio 1513

Sean A y B dos partes no vacías de $\mathbb{R}$ tales que para todo x de A y todo y de B se tiene $x \leqslant y$. Demostrar que $\sup A$ y $\inf B$ existen y que $\sup A \leqslant \inf B$. [000473]

Ejercicio 1514

Sea $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ una familia no vacía y acotada por reales ; comparar :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}), \quad \text{con} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

[000474]

Ejercicio 1515

Sea A una parte mayorada de $\mathbb{R}$ de al menos dos elementos y x un elemento de A.

1. Demostrar que si $x < \sup A$, entonces $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.
2. Demostrar que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, entonces $x = \sup A$.

[000475]

Ejercicio 1516

Sean A y B dos partes acotadas de $\mathbb{R}$. Se denota $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Demostrar que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A+B$.
2. Demostrar que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000476]

Ejercicio 1517

Sean A y B dos partes acotadas de $\mathbb{R}$. Analizar si cada enunciado es **Verdadero** o **falso**.

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000477]

Ejercicio 1518

Dar la cota superior y el límite inferior (si existen) del conjunto :

$$D = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} / n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

¿Este conjunto admite un máximo, un mínimo ? [000478]

Ejercicio 1519

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, n números reales. Calcular :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x - a_i| .$$

[000479]

Ejercicio 1520

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Trazar las gráficas de funciones $f, |f|, f_+, f_-$, donde : $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = \min(f,0)$. [000480]

Ejercicio 1521

Si $a = \sup A$, demostrar que existe una sucesión de elementos de A que converge a a. Analizar el recíproco. [000481]

Ejercicio 1522

Sea $A = \mathbb{Q} \cap]0,1[$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$. Se considera las aplicaciones siguientes de A en $\mathbb{R}^+$:

$$f : \frac{p}{q} \mapsto \frac{q-p}{q+p}; \qquad g : \frac{p}{q} \mapsto \frac{aq+bp}{p+q}.$$

Determinar la cota superior y la cota inferior de $f(A)$ y de $g(A)$. [000482]

Ejercicio 1523

Sea A el conjunto de números reales que se pueden escribir $x = \dfrac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$, para p y q enteros verificando $0 < p < q$.

1. Demostrar que A es minorada por -3 y mayorada por 2.
2. Determinar $\inf A$ y $\sup A$ (para la cota superior se puede tomar $q = p + 1$).

[000483]

Ejercicio 1524

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Se establece $A_p = \sup\limits_{n>p} u_n$ y $B_p = \inf\limits_{n>p} u_n$. Demostrar que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente acotada y que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente acotada. Sea $L = \lim\limits_{p\to\infty} A_p$ y $l = \lim\limits_{p\to\infty} B_p$.

1. En el caso particular en que $u_n = \frac{n+2}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$, calcular L y l.
2. Demostrar que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n > l - \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ u_n < l + \varepsilon.$$

3. Interpretar estas propiedades. Indicar propiedades análogas para L. Demostrarlas.
4. ¿Qué se puede decir de (u_n) si $L = l$?

[000484]

Ejercicio 1525

Sean x e y dos reales estrictamente positivos. Se define

$$a = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2xy}{x+y}, \qquad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Demostrar que a, g, h, q están dispuestos en un orden independiente de x e y. [000485]

Ejercicio 1526

Sean A y B dos partes no vacías y acotadas de $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que $A \cup B$ es acotada y que $\sup(A\cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enunciar un resultado análogo para $\inf(A\cup B)$.
3. ¿Qué sucede con $A \cap B$?

[000486]

Ejercicio 1527 **IT

Sean A y B dos partes de $\mathbb{R}$, no vacías y acotadas. Demostrar que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, inf B, $\inf(A+B)$ existen y que se tiene $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ y $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ denota el conjunto de sumas de un elemento de A y de un elemento de B).

Solución ▼ [005210]

Ejercicio 1528 **

Sea $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Determinar $\sup A$ y $\inf A$.

Solución ▼ [005211]

Ejercicio 1529 **IT

Sea A una parte no vacío y acotada de $\mathbb{R}$. Demostrar que $\sup\{|x-y|,\ (x,y)\in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Solución ▼ [005212]

Ejercicio 1530 ***IT

Sean A y B dos partes no vacías y mayoradas en $\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir de $\sup(A\cap B)$, $\sup(A\cup B)$, $\sup(A+B)$ y $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) designa el conjunto de sumas (resp. de productos) de un elemento de A y de un elemento de B).

Solución ▼ [005213]

50 120.03 Propiedades de los números reales

51 120.04 Intervalo, densidad

52 120.99 Otro

Ejercicio 1531

Demostrar por inducción sobre n, que para todo $n \geqslant 2$ la implicación

$$[x > -1,\ x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

es verdadera. [000487]

Ejercicio 1532

Sean $a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$, los a_i no son todos nulos. Sea $p(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i+xb_i)^2$. Demostrar que el discriminante de esta ecuación de segundo grado es $\leqslant 0$. Deducir que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

y que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

[000488]

Ejercicio 1533

¿Dos números naturales distintos pueden verificar la relación $a^b = b^a$? [000489]

Ejercicio 1534

Resolver la ecuación $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x} = 4$, x es un real positivo. [000490]

Ejercicio 1535

Si a y b son reales positivos o nulos, demostrar que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000491]

Ejercicio 1536

Sean $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Se denota $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ y $\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Demostrar que en los dos casos se tiene :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

[000492]

Ejercicio 1537

Para todo $x\in\mathbb{R}$ se denota $E(x)$ su parte entera y $\{x\}$ su parte decimal.

1. Trazar las gráficas de funciones $x\mapsto E(x)$ y $x\mapsto\{x\}$.
2. Demostrar las siguientes relaciones : $E(x)+E(y)\leqslant E(x+y)$, $E(x+n)=E(x)+n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$, para todo $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Determinar $\lim E(x)$ y $\lim\{x\}$, cuando $x\to -1_+$ y $x\to -1_-$. ¿Estas funciones tienen un límite cuando $x\to -1$?

[000493]

Ejercicio 1538

Para todo $x,y\in\mathbb{R}$ y $\lambda>0$ demostrar que :

$$2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda}+\lambda y^2.$$

[000494]

Ejercicio 1539

Sean dos números reales a y b verificando : $-1<a<4$ y $-3<b<-1$. Dar un encuadramiento de $a-b$ y de a/b. [000495]

Ejercicio 1540

Se denota $E(x)$ la parte entera de un real x.

1. Demostrar que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $E(x)+E(y)\leqslant E(x+y)\leqslant E(x)+E(y)+1$.
2. Calcular $E(x)+E(-x)$, para $x\in\mathbb{R}$.
3. Demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ y $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(x)=E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

[000496]

Ejercicio 1541

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Demostrar que

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n \cdot f(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n \cdot f(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q},\ f(q) = q \cdot f(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot f(1)$ si f es creciente.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000497]

Ejercicio 1542

Sean $n \in \mathbb{N}^*$, y $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$. Demostrar que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = 1$.

[000498]

Ejercicio 1543

Sean $n \in \mathbb{N}^*$, y $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, demostrar que :

$ds \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$. [000499]

Ejercicio 1544

Sea A una parte de $\mathbb{R}$ verificando : $A \neq \varnothing, \forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0,\ ]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset A, \forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing) \Rightarrow x \in A$. Demostrar que $A = \mathbb{R}$. [000500]

Ejercicio 1545

Demostrar : $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$. [000501]

Ejercicio 1546

Sean A y B dos partes densas de $\mathbb{R}$, ¿AB y $A+B$ son densas ? Estudiar el recíproco. [000502]

Ejercicio 1547

Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})$. [000503]

Ejercicio 1548 Morfismos de $\mathbb{R}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de cuerpos.

1. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
2. Demostrar que f es una aplicación creciente.
3. Deducir que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

[003061]

Ejercicio 1549 Partes densas

Sea $A \subset \mathbb{R}$ verificando :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ a,b \in A \text{ tal que } a < x < b \\ \forall a,b \in A,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Demostrar que A es denso en $\mathbb{R}$. [003062]

Ejercicio 1550 Partes densas

Sea A un subanillo de $\mathbb{R}$. Demostrar que A es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $A \cap]0,1[\neq \varnothing$. [003063]

Ejercicio 1551 Subgrupos de $\mathbb{R}$

Sea H un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, $H \neq \{0\}$. Sea $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$, y $\alpha = \inf(H^{+*})$.

1. Si $\alpha \in H^{+*}$, demostrar que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
2. Si $\alpha \notin H^{+*}$, demostrar que $\alpha = 0$ y deducir que H es denso en $\mathbb{R}$.

[003064]

Ejercicio 1552 Parte entera

1. Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = a$.
2. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que : $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a+1}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{a+b-1}{b}\right] = [a]$.

Solución ▼ [003065]

Ejercicio 1553 **I Medias aritmética, geométrica y armónica

Sean x e y dos reales tales que $0 < x \leqslant y$. Se define $m = \frac{x+y}{2}$ (media aritmética), $g = \sqrt{xy}$ (media geométrica) y $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (media armónica). Demostrar que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Solución ▼ [005146]

Ejercicio 1554 ***

Sean a, b y c tres reales positivos. Demostrar que al menos uno de los tres reales $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ es inferior o igual a $\frac{1}{4}$.

Solución ▼ [005151]

Ejercicio 1555 **I

1. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Demostrar que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) \leqslant E(x+y)$.
3. Demostrar que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x) + E(y) + E(x+y) \leqslant E(2x) + E(2y)$.

Solución ▼ [005152]

Ejercicio 1556 **I

Todo entero natural no nulo n se escribe de manera única en la forma

$$n = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^p a_p,$$

donde p es un entero natural y los a_i son enteros elementos de $\{0,\dots,9\}$, a_p es no nulo. Determinar p en función de n.

Solución ▼ [005153]

Ejercicio 1557 **I

Sean n un entero natural y x un real positivo.

1. ¿Cuántos enteros naturales hay entre 1 y n?, ¿entre 1 y x?
2. ¿Cuántos enteros naturales hay entre 0 y n?, ¿entre 0 y x?
3. ¿Cuántos números naturales pares hay entre 0 y x? ¿Cuántos números naturales impares hay entre 0 y x?
4. ¿Cuántos múltiplos de 3 hay entre 0 y x?
5. ¿Cuántos pares de soluciones tiene la ecuación $x+2y=n$, dados n números naturales y x e y números naturales desconocidos?
6. ¿De cuántas maneras se puede pagar 10 euros con monedas de 10 y 20 céntimos de euro?
7. (***) ¿Cuántos pares de soluciones tiene la ecuación $2x+3y=n$, dados n números naturales y x e y números naturales desconocidos?

Solución ▼ [005155]

Ejercicio 1558 ****

Demostrar que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$ (plantear la división euclidiana de $E(nx)$ por n).

Solución ▼ [005156]

Ejercicio 1559 **

Demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Solución ▼ [005159]

Ejercicio 1560 ***

Sea $n\in\mathbb{N}^*$ y $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in[-1,1]^n$ tales que $x_1+x_2+\dots+x_n=0$. Demostrar que $|x_1+2x_2+\dots+nx_n|\leqslant E(\frac{n^2}{4})$.

Solución ▼ [005160]

Ejercicio 1561 ** Identidad de Catalan

Demostrar que para todo entero natural no nulo n, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Solución ▼ [005215]

Ejercicio 1562 **I Desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski

Sean $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ números reales.

1. Considerando la función $f:\ x\mapsto \sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2$, demostrar que $|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz).

2. Deducir la desigualdad de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$.

   (La desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ afirma que el producto punto de dos vectores es menor o igual que el producto de sus normas y la desigualdad de MINKOWSKI es la desigualdad triangular).

Solución ▼ [005216]

Ejercicio 1563 **

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$.

Solución ▼ [005217]

Ejercicio 1564 **** Subgrupos de $(\mathbb{R},+)$

1. Demostrar que los subgrupos del grupo $(\mathbb{R},+)$ son ya sea de la forma $a\mathbb{Z}$, a real dado, ya sea densos en $\mathbb{R}$.

   Indicación : para G subgrupo dado de $(\mathbb{R},+)$, no reducido a $\{0\}$, considerar $a=\text{Inf}\,(G\cap]0;+\infty[)$, luego considerar ambos casos $a=0$ y $a>0$.

   (Definición : G es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si : $(\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ |y-x|<\varepsilon)$.
2. Aplicación 1. Demostrar que $\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
3. Aplicación 2 (grupo de periodos de una función).
   (a) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto de periodos de f es un subgrupo de $(\mathbb{R},+)$ (este subgrupo se reduce a $\{0\}$ si f no es periódica).
   (b) Demostrar que una función continua en $\mathbb{R}$ que admite 1 y $\sqrt{2}$ por periodos, es constante en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005218]

Ejercicio 1565 **

Demostrar que $\{r^3,\ r\in\mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005219]

Ejercicio 1566

Sea x un real.

1. Dar el encuadre que defina la parte entera $E(x)$.
2. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión definida por $u_n=\dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$.

   Dar un encuadramiento simple de $n^2\times u_n$, que utiliza $\sum_{k=1}^{n}k$.
3. Deducir que (u_n) converge y calcular su límite.
4. Deducir que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [005982]

Ejercicio 1567

Sean a y b dos reales. Demostrar

$$ab\leqslant\frac{a^2}{4}+b^2.$$

Generalizar.

Indicación ▼ Solución ▼ [007169]

Ejercicio 1568

Se consideran dos números reales positivos cuyo producto es 100. ¿Su suma es un valor minimal y, en caso afirmativo, cuál y en qué caso(s) ?

Indicación ▼ Solución ▼ [007170]

Ejercicio 1569

Sea $n > 0$ un entero. Se consideran n reales positivos cuyo producto es 1. ¿Su suma es un valor minimal y, en caso afirmativo, cuál(es) y en qué caso(s) ?

Indicación ▼ Solución ▼ [007171]

Ejercicio 1570

Una tienda vende dos juegos de tres cristales al mismo precio. El primer lote presenta tres cristales cúbicos de lado a, b y c respectivamente. El segundo lote incluye tres cristales idénticos en forma de paralelepípedo de dimensiones $a \times b \times c$. ¿Qué lote es preferible de comprar ?

Indicación ▼ Solución ▼ [007172]

Ejercicio 1571

Sean a, b y c de reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geqslant 3.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007173]

Ejercicio 1572

Sean $a_1, \ldots, a_n$ de reales estrictamente positivos y $b_1, \ldots, b_n$ los mismos n reales pero numerados en un orden diferente. Demostrar que

$$\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007174]

Ejercicio 1573

Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$. Demostrar que

$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant 4ab.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007175]

Ejercicio 1574

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Demostrar que

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geqslant 9a^2b^2c^2.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007176]

Ejercicio 1575

Sean a y b dos reales positivos tales que $a+b=8$. Determinar el valor mínimo de

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$$

y especificar para qué valores se alcanza.

Indicación ▼ Solución ▼ [007177]

Ejercicio 1576 Cauchy-Schwarz

Sean a, b, c y d cuatro reales. Demostrar que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007178]

Ejercicio 1577

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$2^x+x^2=2-\frac{1}{2^x}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007179]

Ejercicio 1578

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x+\frac{18}{y} = 14 \\ 2y+\frac{9}{z} = 15 \\ 9z+\frac{16}{x} = 17. \end{cases}$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007180]

Ejercicio 1579

Sean a y b dos reales positivos. Demostrar que

$$2a^3+b^3 \geqslant 3a^2b.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007181]

Ejercicio 1580

Sean a, b y c tres reales. Demostrar que

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007182]

Ejercicio 1581

Sean a, b y c tres reales. Demostrar que

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c).$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007183]

Ejercicio 1582

Sean a, b y c tres números reales no nulos. Demostrar que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007184]

Ejercicio 1583

Sean a, b y c de reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007185]

53 121.01 Convergencia

Ejercicio 1584

1. Dibujar las siguientes sucesiones :
   (a) $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ (tomar 2 cm como unidad en Oy)
   (b) $u_n = (-1)^n$
   (c) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n}|\cos n|$ (n en radianes)
   (d) $u_n = \cos n$
   (e) $u_1 = 1\,;\, u_2 = 2\,;\, u_3 = 3\,;\, u_4 = -1\,;\, u_n = 2$, para $n \geqslant 5$.
   (f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (tomar 10 cm como unidad en Oy)
   (g) $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$
   (h) $u_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (tomar 1 cm como unidad en Oy)
   (i) $u_n = n^2+1$
   (j) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (para $n \geqslant 2$).
2. Clasificar los diseños por paquetes especificando los criterios.
3. ¿Para cada sucesión, se puede encontrar l y n tales que $|u_n - l| < \frac{1}{10}$ o $\frac{1}{100}$? Expresar en relación con la clasificación anterior.

4. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas ?
   (a) Una sucesión con términos positivos que tiende a 0 es decreciente a partir de un cierto rango.
   (b) Si una sucesión tiene un límite estrictamente positivo, todos sus términos son estrictamente positivos a partir de cierto rango. ¿Recíproco ?

[000504]

Ejercicio 1585

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$. ¿Qué sucede con las siguientes proposiciones : ?
• Si $(u_n)_n$ converge a un real ℓ, entonces $(u_{2n})_n$ y $(u_{2n+1})_n$ convergente hacia ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ y $(u_{2n+1})_n$ son convergentes, pasa lo mismo con $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ y $(u_{2n+1})_n$ son convergentes, de mismo límite ℓ, pasa lo mismo con $(u_n)_n$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000505]

Ejercicio 1586

Verdadero o falso : existe una sucesión (u_n) tal que $(u_{n+1}-u_n)$ tiende a 0 y que diverge. [000512]

Ejercicio 1587

Enmarcar la sucesión (u_n) definida por $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. ¿Qué se puede deducir ? [000513]

Ejercicio 1588

1. ¿Qué se puede decir de una sucesión que verifica $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$?
2. ¿Qué se puede decir de una sucesión que verifica $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1$?
3. ¿Qué se puede decir de una sucesión que verifica $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$?

[000514]

Ejercicio 1589

Dado $k \in \mathbb{R}^+$, ¿Qué se puede decir de una sucesión (u_n) que verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$? *Aplicación* : Estudiar $u_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}$. [000515]

Ejercicio 1590

Demostrar que una parte D es densa en $\mathbb{R}$ si y solo si todo número real es un límite de una sucesión de puntos de D. [000516]

Ejercicio 1591

Sea A una parte acotada de $\mathbb{R}$ y x un real.

1. Demostrar que $x = \sup(A)$ si y solo si (x mayora A y existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A que converge a x).
2. Enunciar un resultado análogo para $\inf(A)$.

[000517]

Ejercicio 1592

Estudiar la convergencia de las sucesiones :

$$\mathrm{d}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} \qquad \frac{n\,\mathrm{sen}(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\Big).$$

Solución ▼ [000518]

Ejercicio 1593

Demostrar que una sucesión convergente de enteros es constante a partir de cierto rango.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000519]

Ejercicio 1594

Sea $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

1. Usando una integral, demostrar que para todo $n>0$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Deducir que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)+1$.
3. Determinar el límite de H_n.
4. Demostrar que $u_n = H_n - \ln(n)$ es decreciente y positiva.
5. ¿Conclusión ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000520]

Ejercicio 1595

Demostrar que una sucesión monótona de la que converge una sucesión extraída es convergente. [000521]

Ejercicio 1596

Demostrar que (u_n) converge si y solo si $(u_{2n}),(u_{2n+1}),(u_{3n})$ convergen (sus límites no necesariamente son iguales). [000522]

Ejercicio 1597

Estudiar la convergencia de la sucesión $u_n = (-1)^n\frac{n+1}{n}$. [000523]

Ejercicio 1598

Sea q un entero al menos igual a 2. Para todo $n\in\mathbb{N}$, se establece $u_n = \cos\frac{2n\pi}{q}$.

1. Demostrar que $u_{n+q} = u_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.
2. Calcular u_{nq} y u_{nq+1}. Deducir que la sucesión (u_n) no tiene límite.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000524]

Ejercicio 1599

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tomando todos los valores racionales. Demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no admite límite. [000525]

Ejercicio 1600

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \lambda$. ¿Qué se puede decir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000526]

Ejercicio 1601

1. Dar un ejemplo de una sucesión mayorada divergente, luego de una sucesión divergente tal que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty}(x_{n+k} - x_n) = 0.$$
2. Dar un ejemplo de una sucesión divergente que tenga un solo valor adherente (i.e. tal que solo existe una extracción (sub-sucesión) ϕ tal que $x_{\phi(n)}$ converge).
3. Dar un ejemplo de sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente tal que $\forall k \geqslant 2, (x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

[000527]

Ejercicio 1602

¿Qué se puede decir de los números reales a y b si
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a - \frac{1}{n} \leqslant b \leqslant a + \frac{1}{n}?$$

[000528]

Ejercicio 1603

Estudiar la sucesión (u_n) definida por :
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si n es primo,} \\ 67 + 1/n & \text{si no.} \end{cases}$$
Si esta sucesión converge, demostrar que su límite es inferior a 72. Estudiar la convergencia de esta sucesión. [000529]

Ejercicio 1604

Se da la siguiente sucesión (u_n) definida por :
$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$
Estudiando las sucesiones (u_{2n}) y (u_{2n+1}), demostrar que la sucesión (u_n) es convergente. [000530]

Ejercicio 1605

1. Sean (u_n), (v_n), (w_n) tres sucesiones tales que para n suficientemente grande se tiene $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$. Se supone que (v_n) y (w_n) son convergentes, y se denota $v = \lim v_n$ y $w = \lim w_n$. Demostrar que para todo ε positivo, se tiene $v - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w + \varepsilon$, para n bastante grande (*teorema de encuadre*). ¿Qué se puede deducir si $v = w$?

2. Sea (u_n) una sucesión convergente de límite l. Demostrar que la sucesión

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

es convergente y tiene un límite l. Para esto, encuadrar u_n a ε cercano para n bastante grande, y deducir un encuadramiento de v_n.

[000531]

Ejercicio 1606

Sea α un número irracional positivo y (p_n) y (q_n) dos sucesiones de elementos de $\mathbb{N}^*$ tales que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n = +\infty.$$

[000532]

Ejercicio 1607

Estudiar la sucesión $u_n = \ln(1+\ln(2+\ln(3+\cdots+\ln(n-1+\ln n)\cdots)))$. [000533]

Ejercicio 1608

Demostrar que para $n \geqslant 1$, la ecuación $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ admite una única raíz positiva, que se denota u_n. Estudiar la sucesión (u_n). [000534]

Ejercicio 1609

Un borracho sale en un momento dado de un punto dado. A cada segundo, da un paso en una dirección desconocida (y que puede cambiar, arbitrariamente a cada paso). Como se cansa, sus pasos son cada vez más cortos. ¿Se puede predecir que luego de cierto tiempo permanecerá a menos de un metro de cierta posición si admitimos que la longitud de su n-ésima paso es :

1. $1/n$ metro ?
2. $1/n^2$ metro ?

[000535]

Ejercicio 1610

Sean $(u_n)_{n\geqslant 2}$ definida por $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ y $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Demostrar que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ es convergente.
2. Demostrar que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ es una sucesión geométrica. Deducir el límite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

[001193]

Ejercicio 1611

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales tal que $\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Demostrar que los valores de adherencia de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman un intervalo de $\mathbb{R}$. [001194]

Ejercicio 1612

Se define por inducción las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Demostrar por inducción que se tiene $u_n > 0$ y $v_n > 0$.
2. Demostrar que las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrecen. Deducir que convergente hacia ℓ y ℓ' respectivamente. Demostrar que se tiene $\ell\ell' = 0$.
3. Demostrar que la sucesión $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante. Deducir ℓ y ℓ'.

[001195]

Ejercicio 1613

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que $0 < u_1 < v_1$ y $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ y $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Demostrar que convergen al mismo límite.

[001196]

Ejercicio 1614

1. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no nulos que convergen a un límite ℓ diferente de cero. Demostrar que la sucesión $(\dfrac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\dfrac{1}{\ell}$.
2. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos que convergen en un límite ℓ diferente de cero. Demostrar que la sucesión $\left(\sqrt{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sqrt{\ell}$.

[001197]

Ejercicio 1615

1. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que las sucesiones extraídas $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al mismo límite ℓ. Demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge también a ℓ.
2. Deducir que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de término general $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ converge.

[001198]

Ejercicio 1616

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge a ℓ, entonces $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge a ℓ. ¿El recíproco es verdadero ?
2. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2nk+k}$.
3. Sea $(a_n)_{n\geqslant 0}$ una sucesión tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \ell$. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$.
4. Sea $(u_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión estrictamente positiva tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \ell$.

Ejercicio 1617

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se denota $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ y $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$. Se recuerda que $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} u_n$.

1. Demostrar que las sucesiones $(u_n)_{n\geqslant 1}$ y $(v_n)_{n\geqslant 1}$ son adyacentes. Deducir un valor aproximado de e a $\frac{1}{1000}$.
2. Demostrar que e es irracional.

[001200]

Ejercicio 1618

Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de Cauchy cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m,n \geqslant N$, entonces $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

1. Demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Demostrar que toda sucesión de Cauchy es acotada.
2. Sea $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demostrar que, para todo $p \in \mathbb{N}$, $u_{2^p} \geqslant \frac{p+2}{2}$. Deducir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito.
3. Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface el criterio $\mathscr{C}'$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant N$, entonces $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$. ¿Una sucesión que satisface el criterio $\mathscr{C}'$ es de Cauchy ?
4. Demostrar que las siguientes tres afirmaciones son equivalentes :
   (a) Toda parte mayorada de $\mathbb{R}$ admite una cota superior y toda parte minorada de $\mathbb{R}$ tiene una cota inferior.
   (b) Toda sucesión de Cauchy es convergente.
   (c) Dos sucesiones adyacentes son convergentes.

[001201]

Ejercicio 1619 Límite de la parte entera de una sucesión

Sea (u_n) una sucesión real que converge a $\ell \in \mathbb{R}$. ¿La sucesión $([u_n])$ es convergente ? [004668]

Ejercicio 1620 Límites dobles diferentes

Comparar $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ y $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$. [004669]

Ejercicio 1621 Sucesiones convergentes a 0

1. Sea (u_n) una sucesión real tal que $\frac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Demostrar que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. La misma pregunta para $\begin{cases} \frac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (u_n) \text{ es acotada.} \end{cases}$

[004670]

Ejercicio 1622 $u_n v_n \to 1$

Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones verificando : $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{cases}$ ¿Qué se puede decir de estas sucesiones ?

[004671]

Ejercicio 1623 Serie alternada

Se establece $u_n = \dfrac{96 \times (-1)^n}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ y $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Estudiar las sucesiones (v_{2n}) y (v_{2n+1}) y demostrar que la sucesión (v_n) es convergente.
2. Calcular $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ a 10^{-5} cerca.

Solución ▼ [004672]

Ejercicio 1624 Crecimiento comparado

Demostrar que el conjunto de enteros n tales que $2^{n^2} < (4n)!$ es finito. [004673]

Ejercicio 1625 Límite de $n^{1/n}$

Demostrar, sin utilizar la función ln, que $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Determinar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$. [004674]

Ejercicio 1626 Crecimiento logarítmico comparado

Sean (a_n), (b_n) dos sucesiones estrictamente positivas tales que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Demostrar que si $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. [004675]

Ejercicio 1627 Suma de partes enteras

Sea $x \in \mathbb{R}$. Determinar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$.

Solución ▼ [004676]

Ejercicio 1628 Divergencia de $\cos(nt)$ y $\operatorname{sen}(nt)$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, las sucesiones $(\cos(n\theta))$ y $(\operatorname{sen}(n\theta))$ ambos son divergentes (demostrar que si una converge, entonces la otra también, luego se obtiene una contradicción). [004677]

Ejercicio 1629 Suma de los $1/k^{1/2}$

Sea $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Determinar $\lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n)$, luego $\lim_{n\to\infty} u_n$.
2. Comparar $\frac{1}{2\sqrt{k}}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, y $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Deducir que la sucesión $\left(u_n - 2\sqrt{n}\right)$ es convergente.

Ejercicio 1630 Límite de $(1+1/n)^n$

1. Sea $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
   (a) Demostrar que la sucesión (u_n) es convergente.
   (b) Calcular el número $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ a 10^{-7} cerca.
2. Se denota $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}$.
   (a) Desarrollar v_n y demostrar que $v_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (b) Se fija $p \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que para n suficientemente grande, $v_n \geqslant \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} - \varepsilon$.
   (c) ¿Qué se puede deducir ?

[004679]

Ejercicio 1631 Estudio de $C_{2n}^n/4^n$

Se establece $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.

1. Expresar u_n usando factoriales.
2. Demostrar que la sucesión (u_n) es convergente.
3. Sea $v_n = (n+1)u_n^2$. Demostrar que la sucesión (v_n) converge. ¿Qué se puede deducir para $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?
4. Se denota $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Estudiando la sucesión (nu_n^2), demostrar que $\alpha > 0$.

Solución ▼ [004680]

Ejercicio 1632 Sucesión $a^n/\prod(1+a^k)$

Sea $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$. Estudiar la sucesión de término general : $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$.

Solución ▼ [004681]

Ejercicio 1633 Lema de Césaro

Sea (u_n) una sucesión real. Se define $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

1. Demostrar que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Demostrar que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, entonces $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. $(\ell \in \overline{\mathbb{R}})$
3. Dar un ejemplo donde (v_n) converge pero (u_n) diverge.

[004682]

Ejercicio 1634 Lema de Césaro

1. Sea (b_n) una sucesión real estrictamente creciente que tiende a $+\infty$, y (a_n) una sucesión real tal que : $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

2. Aplicación : ¿Cuál es el límite de $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$, $(k \in \mathbb{N})$?

[004683]

Ejercicio 1635 Césaro generalizado

Sea (u_n) una sucesión real convergente, y $S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Estudiar la sucesión (S_n).

Solución ▼ [004684]

Ejercicio 1636 Producto Cauchy

Sean (a_n), (b_n) dos sucesiones que convergen a a, b. Demostrar que $\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.

[004685]

Ejercicio 1637 $x_n - ax_{n-1} \to 0$

Sea (x_n) una sucesión real y $\alpha \in]0,1[$. Se define $y_0 = x_0$, $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$ para $n \geqslant 1$. Demostrar que : $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{0}) \Leftrightarrow (y_n \xrightarrow[n\to\infty]{0})$.

[004686]

Ejercicio 1638 $x_n + x_{2n}/2 \to 1$

Sea (x_n) una sucesión acotada tal que $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Demostrar que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$.

[004687]

Ejercicio 1639 Aproximación de un irracional

Sea $x \in \mathbb{R}^*$ y (r_n) una sucesión de racionales que convergen a x. Se escribe $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, con $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que si una de las sucesiones (p_n), (q_n) es acotada, entonces la otra también, y $x \in \mathbb{Q}$.
2. Deducir que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ y $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

[004688]

Ejercicio 1640 Suma de los dígitos de n

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se denota $S(n)$ la suma de los dígitos de la escritura decimal de n.

1. Encuadrar $S(n+1)$ en función de $S(n)$. Inferir que la sucesión $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ es acotada.
2. Determinar $\inf\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tal que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$, y $\sup\left\{\frac{S(n+1)}{S(n)} \text{ tal que } n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
3. ¿La sucesión $\left(\frac{S(n+1)}{S(n)}\right)$ es convergente ?

Solución ▼ [004689]

Ejercicio 1641 Ecuación $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$

Se considera la ecuación : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Demostrar que existe una única raíz positiva, a_n.
2. Demostrar que la sucesión (a_n) es decreciente.
3. Demostrar que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ (calcular $a_n^{n+1} - 1$).

[004690]

Ejercicio 1642 Sucesión que tiene un solo valor de adherencia

Sea (u_n) una sucesión real. Se llama *valor de adherencia* todo límite de una sub-sucesión convergente extraída de (u_n).

1. ¿Cuáles son los valores de adherencia de una sucesión convergente ?
2. ¿Cuáles son los valores de adherencia de la sucesión $(\cos(n\pi/3))$?
3. Demostrar que si la sucesión (u_n) es acotada y diverge, ella tiene al menos dos valores de adherencia.

[004691]

Ejercicio 1643 Límites superior e inferior

Sea (x_n) una sucesión acotada de reales. Se establece : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p \text{ tal que } p \geqslant n\} \\ z_n = \inf\{x_p \text{ tal que } p \geqslant n\}. \end{cases}$

1. Demostrar que las sucesiones (y_n) y (z_n) convergente.
2. Demostrar que (x_n) converge si y solo si (y_n) y (z_n) tienen el mismo límite.

[004692]

Ejercicio 1644 Convergencia hacia 0 y monotonía

Sea (x_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos que convergen a 0.

1. Demostrar que existe una infinidad de índices n tales que $x_n = \max(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.
2. Demostrar que existe una infinidad de índices n tales que $x_n = \min(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Solución ▼ [004693]

Ejercicio 1645 Convergencia hacia 0 y monotonía

Sea (u_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos que convergen a 0. Demostrar que existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(u_{\sigma(n)})$ converge a 0 en forma descendente. [004694]

Ejercicio 1646 Función $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva. Demostrar que $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. [004695]

Ejercicio 1647 Función $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva. Demostrar que $\frac{f(1)}{1^2} + \frac{f(2)}{2^2} + \dots + \frac{f(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Solución ▼ [004696]

Ejercicio 1648 Radicales iterados

Sea $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\dots+\sqrt{1}}}$.

1. Demostrar que la sucesión $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ es acotada.

2. Determinar $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$.

3. Determinar $\lim_{n\to\infty}(u_n-\sqrt{n})$.

Solución ▼ [004697]

Ejercicio 1649 Ensae MP* 2000

Sea (a_n) una sucesión de números reales mayores o iguales que 1 tal que para todo n,m, $a_{n+m}\leqslant a_n a_m$. Sea $b_n=\frac{\ln a_n}{n}$. Demostrar que (b_n) converge a $\inf\{b_n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.

Solución ▼ [004698]

Ejercicio 1650 Polytechnique MP* 2000

Sea h creciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, tendiendo a $+\infty$ en $+\infty$, y tal que $h(x+1)-h(x)$ tiende a 0 en $+\infty$. Sea V el conjunto de valores de adherencia de la sucesión de término general $e^{ih(n)}$ Demostrar que V es exactamente el círculo trigonométrico (i.e. $\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$).

Solución ▼ [004699]

Ejercicio 1651 $u_n^2+u_n-u_{n+1}\to 0$ (X MP* 2000)

Sea u_n una sucesión real acotada. Se supone que $u_n^2+u_n-u_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Demostrar que $u_n\to 0$.

Solución ▼ [004700]

Ejercicio 1652 Punto fijo (Ensae MP* 2003)

Sea una función continua f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $x_0\in\mathbb{R}$. Se define $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por la relación de recurrencia : $x_{n+1}=f(x_n)$. Demostrar que si la sucesión (x_n) admite un único valor adherente entonces es convergente.

Solución ▼ [004701]

Ejercicio 1653 Sucesión recurrente

Sea $u_0\in\mathbb{N}^*$ y (u_n) la sucesión definida por la relación de recurrencia : $u_{n+1}=u_n^2+1$. Demostrar que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $u_n=[a^{2^n}]$, para todo n, donde [ ] representa la parte entera.

Solución ▼ [004702]

Ejercicio 1654 ***

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real. Demostrar que si la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido de CÉSARO y es monótona, entonces la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución ▼ [005221]

Ejercicio 1655 **IT

Para n entero natural no nulo, se establece $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (serie armónica).

1. Demostrar que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1)<H_n<1+\ln(n)$ y deducir $\lim_{n\to+\infty}H_n$.
2. Para n entero natural no nulo, se establece $u_n=H_n-\ln(n)$ y $v_n=H_n-\ln(n+1)$. Demostrar que las sucesiones (u_n) y (v_n) convergen a un real $\gamma\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ (γ es llamada constante de EULER). Dar un valor aproximado de γ a 10^{-2} cerca.

Solución ▼ [005222]

Ejercicio 1656 ***

Sean a y b dos reales tales que $0<a<b$. Se define $u_0=a$ y $v_0=b$, para n entero natural dado, $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ y $v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}$. Demostrar que las sucesiones (u_n) y (v_n) son adyacentes y su límite común es igual a $\dfrac{b\operatorname{sen}(\arccos(\frac{a}{b}))}{\arccos(\frac{a}{b})}$.

Solución ▼ [005225]

Ejercicio 1657 **

Límite cuando n tiende a $+\infty$ de

1. $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$,
2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
3. $\frac{n!}{n^n}$,
4. $\dfrac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2\right)}$,
5. $\sqrt[n]{n^2}$,
6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,
7. $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$,
8. $\prod_{k=1}^{n}2^{k/2^k}$.

Solución ▼ [005226]

Ejercicio 1658 **

Estudiar la sucesión (u_n) definida por $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Solución ▼ [005227]

Ejercicio 1659 ***

Sea u una sucesión compleja y v la sucesión definida por $v_n=|u_n|$. Se supone que la sucesión $(\sqrt[n]{v_n})$ converge a un real positivo l. Demostrar que si $0\leqslant\ell<1$, la sucesión (u_n) converge a 0 y si $\ell>1$, la sucesión (v_n) tiende a $+\infty$. Demostrar que si $\ell=1$, todo es posible.

Solución ▼ [005232]

Ejercicio 1660 ***

1. Sea u una sucesión de números reales estrictamente positivos. Demostrar que si la sucesión $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge a un real ℓ, entonces $(\sqrt[n]{u_n})$ converge y tiene el mismo límite.
2. Estudiar el recíproco.
3. Aplicación : Determinar los límites de

   1. $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$,
   2. $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,
   3. $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$.

Solución ▼ [005233]

Ejercicio 1661 *

Sean u y v dos sucesiones de reales de $[0,1]$ tales que $\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=1$. Demostrar que (u_n) y (v_n) convergente hacia 1.

Solución ▼ [005234]

Ejercicio 1662 **

Demostrar que si las sucesiones (u_n^2) y (u_n^3) convergente entonces (u_n) converge.

Solución ▼ [005235]

Ejercicio 1663 ***T

Estudiar las dos sucesiones $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Solución ▼ [005236]

Ejercicio 1664 **T

Estudiar las dos sucesiones $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ y $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Solución ▼ [005237]

Ejercicio 1665

Estudiar las dos sucesiones $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ y $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Solución ▼ [005238]

Ejercicio 1666 ***

Demostrar que, para $n \geqslant 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\ (n-1 \text{ radicales}) \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\ (n-1 \text{ radicales}).$$

Deducir $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$, ($n$ radicales).

Solución ▼ [005241]

Ejercicio 1667 ***

1. Demostrar que para x real estrictamente positivo, se tiene : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.
2. Demostrar que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ y deducir el límite cuando n tiende a $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Solución ▼ [005242]

Ejercicio 1668 **

Dar un ejemplo de sucesión (u_n) divergente, tal que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la sucesión (u_{kn}) converge.

Solución ▼ [005244]

Ejercicio 1669 ***I

Sea f una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Solución ▼ [005245]

Ejercicio 1670 ****I

Estudiar de las sucesiones $(u_n) = (\cos na)$ y $(v_n) = (\operatorname{sen} na)$, donde a es un real dado.

1. Demostrar que si $\frac{a}{2\pi}$ es racional, las sucesiones u y v son periódicas y demostrar en este caso que (u_n) y (v_n) convergente si y solo si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Se supone en esta pregunta que $\frac{a}{2\pi}$ es irracional.
   (a) Demostrar que (u_n) converge si y solo si (v_n) converge.
   (b) Usando diferentes fórmulas trigonométricas que proporcionen relaciones entre u_n y v_n, demostrar por reducción al absurdo que (u_n) y (v_n) son divergentes.
3. Siempre se supone que $\frac{a}{2\pi}$ es irracional. Se quiere demostrar que el conjunto de valores de la sucesión (u_n) (o (v_n)) es denso en $[-1,1]$, es decir que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}/\ |u_n - x| < \varepsilon$ (e igualmente para v).
   (a) Demostrar que el problema se reduce a demostrar que $\{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N}\ \text{ y }\ k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.
   (b) Demostrar que $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N}\ \text{ y }\ k \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ (por reducción al absurdo se supone que $\inf(E \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$, para deducir que $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$).
   (c) Concluir.

Solución ▼ [005247]

Ejercicio 1671 **I

Sea (u_n) una sucesión real no mayorada. Demostrar que existe una sucesión extraída de (u_n) tendiendo a $+\infty$.

Solución ▼ [005250]

Ejercicio 1672 ***

Sea (u_n) una sucesión de reales elementos de $]0,1[$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Demostrar que (u_n) converge a $\frac{1}{2}$.

Solución ▼ [005251]

Ejercicio 1673 ****I

1. Sean p un entero natural y a un real. Dar el desarrollo de $(\cos a + i \operatorname{sen} a)^{2p+1}$, luego eligiendo cuidadosamente a, determinar $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. Deducir entonces $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.
2. Para n entero natural no nulo, se establece $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Demostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (para mayorar u_n, se observa que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$).
3. Demostrar que para todo real x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, se tiene $\operatorname{cotan} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.
4. Deducir un encuadramiento de u_n, luego el límite de (u_n).

Solución ▼ [005316]

Ejercicio 1674 $**$

Determinar los límites cuando n tiende a $+\infty$ de

$$1)\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{arcsen}^n x\,dx, \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \qquad 3)\ \int_0^{\pi} \frac{n\operatorname{sen} x}{x+n}\,dx.$$

Solución ▼ [005459]

54 121.02 Sucesión definida por una relación de recurrencia

Ejercicio 1675

Sea (u_n) la sucesión real definida por inducción poniendo $u_0 = 1$ y $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que (u_n) es creciente y acotada superiormente.
2. Demostrar que (u_n) converge al número real positivo ℓ que verifica $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ y calcular ℓ.

[000536]

Ejercicio 1676

Estudiar la sucesión (u_n) definida por

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4),\ \forall n \geqslant 0.$$

[000537]

Ejercicio 1677

Estudiar las sucesiones :

1. $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ y $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

[000538]

Ejercicio 1678

Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

y se define la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 0}$ por $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = f(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$.

1. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución única $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Demostrar que la ecuación $f(x) = x$ es equivalente a la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ y deducir que α es la única solución de la ecuación $f(x) = x$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.
3. Demostrar que la función f es creciente en $\mathbb{R}^+$ y que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Deducir que la sucesión (x_n) es creciente.

4. Demostrar que $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ y deducir que $0 \leqslant x_n < \frac{1}{2}$, para todo $n \geqslant 0$.
5. Demostrar que la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge a α.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000539]

Ejercicio 1679

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se considera la sucesión (u_n) definida por $u_0 = a$ y $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$, para $n \geqslant 0$.

1. Estudiar esta sucesión si $a = 0$.
2. Estudiar esta sucesión si $a = -10$.
3. Estudiar esta sucesión si $a = 3$.
4. Generalizar discutiendo según el valor de a.

[000540]

Ejercicio 1680

Estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$ en los siguientes casos :

1. $u_0 = -4$. 2. $u_0 = -2$. 3. $u_0 = 2$. 4. $u_0 = 3$.

[000541]

Ejercicio 1681

Estudiar la sucesión (u_n) definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \frac{(u_n-3)^2}{4}$. [000542]

Ejercicio 1682

Estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = e^{-u_n}$ y $u_0 = 0$. [000543]

Ejercicio 1683

Estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = \cos u_n$ y $u_0 = -8$. [000544]

Ejercicio 1684

Estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = \frac{2u_n^3+7}{3(u_n^2+1)}$ y $u_0 = 2$. Deducir un valor aproximado a 10^{-8} cerca de la raíz real del polinomio $X^3 + 3X - 7$. [000545]

Ejercicio 1685

Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \frac{-u_n^2 - u_n + 24}{6}$, para $n \geqslant 0$. [000546]

Ejercicio 1686

Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = -\frac{3}{13}u_n^2 - \frac{1}{9}u_n + 3$, para $n \geqslant 0$. [000547]

Ejercicio 1687

Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n^2 - \frac{1}{6}u_n + \frac{33}{10}$, para $n \geqslant 0$. [000548]

Ejercicio 1688

Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \ln(\mathrm{e} - 1 + u_n)$. [000549]

Ejercicio 1689

Discutir según los valores de u_0 la naturaleza de la sucesión $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2$. [000550]

Ejercicio 1690

Sean a y b dos reales estrictamente positivos; se define una sucesión (u_n) por :

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}.$$

1. Demostrar que existe un valor de u_0 por lo que esta sucesión es estacionaria.
2. Demostrar que si u_0 es distinto de este valor, (u_n) es monótona y acotada. Encontrar $\lim_{n\to\infty} u_n$.

[000551]

Ejercicio 1691

Estudiar de acuerdo a los valores dados a u_0 perteneciendo a $\mathbb{C}$ las sucesiones :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}, \qquad u_{n+1} = \frac{-1}{u_n + 1}.$$

[000552]

Ejercicio 1692

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Se considera $a \in [0,1]$ y la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificando $u_0 = a$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. ¿Son verdaderas o falsas las siguientes propiedades? :

1. Si f es creciente, entonces (u_n) es creciente.
2. Si (u_n) es creciente, entonces f es creciente.
3. Si (u_n) es creciente y f monótona, entonces f es creciente.
4. Si (u_n) converge a un límite l, entonces l es punto fijo de f.
5. Si f es derivable, entonces (u_n) es acotada.
6. Si la gráfica de f está por encima de la recta de ecuación $y = x$, entonces (u_n) es creciente.
7. Si (u_n) converge a un punto fijo l de f, entonces f es continua en l.

[000553]

Ejercicio 1693

Estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$ (analizarla según los valores de u_0). [000554]

Ejercicio 1694

Sea $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ y $a \in [0,1]$. Estudiar la sucesión definida por $u_0 = a$ y $u_{n+1} = f(u_n)$. [000555]

Ejercicio 1695

Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n + \mathrm{E}(u_n))$, donde E designa la función « parte entera ». [000556]

Ejercicio 1696

1. Estudiar la sucesión definida por recurrencia por $u_0 = a$ y $u_{n+1} = \cos u_n$, donde a es un número real dado.
2. Estudiar la sucesión definida para $n \geqslant 1$ por $u_n = \underbrace{\cos(\cos(\cos(\cdots(\cos n)}_{n \text{ veces } \cos}\cdots)))$.

[000557]

Ejercicio 1697

1. Estudiar en $\mathbb{C}$ una sucesión (u_n) tal que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n^2$. Discutir según u_0.
2. Se considera en $\mathbb{C}$ una sucesión (v_n) tal que $\forall n,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{A}{v_n}\right)$, donde A es un número complejo dado no nulo. Estudiar la existencia y convergencia de esta sucesión según los valores de v_0. Se puede denotar a una de las raíces cuadradas de A y definir $w_n = \frac{v_n - a}{v_n + a}$.

[000558]

Ejercicio 1698

1. Sean $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$; estudiar la sucesión definida por la relación de recurrencia $u_{n+1} = \dfrac{A}{n+1} + Bu_n$.
2. Estudiar la sucesión definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \dfrac{\frac{4n}{n+1} - u_n}{2 + u_n}$ (se puede usar la pregunta anterior para terminar).

[000559]

Ejercicio 1699

Se considera la sucesión real definida por : $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.

1. Demostrar que x_n es superior o igual a 1, para todo n.
2. Demostrar que si (x_n) converge, su límite l verifica $l = \sqrt{2l+1}$.
3. l está definida por la igualdad de 2), ¿es posible encontrar $k \in]0,1[$ tal que $|x_n - l| \leqslant k|x_{n-1} - l|$? Si es sí deducir que $|x_n - l| \leqslant k^n |x_0 - l|$. Concluir.

[000560]

Ejercicio 1700

Usando los métodos del ejercicio anterior, estudiar las sucesiones definidas por :

$$y_0 = 3; \quad y_{n+1} = \frac{4+3y_n}{3+2y_n}, \qquad\qquad z_0 = 1; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}.$$

[000561]

Ejercicio 1701

Sea una sucesión que satisface una relación de recurrencia

$$u_n = \frac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d} \tag{E$_1$}$$

1. Demostrar que si la transformación homográfica : $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tiene dos puntos fijos distintos, α y β, se puede escribir la relación (E$_1$) bajo la forma : $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calcular $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en función de $\frac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.
2. Demostrar que si la transformación homográfica tiene un solo punto fijo γ, se puede tener la relación (E$_1$) bajo la forma : $\frac{1}{u_n-\gamma} = \frac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calcular $\frac{1}{u_n-\gamma}$ en función de u_1.
3. Utilizar el método anterior para estudiar las sucesiones (u_n) definidas por :

   a) $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+3}$, b) $u_{n+1} = \dfrac{-3u_n-1}{u_n-3}$, c) $u_{n+1} = \dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$, d) $u_{n+1} = \dfrac{2u_n-1}{u_n+4}$.

   Discutir según los valores de u_1 ; especificar para qué valores de u_1 cada sucesión se define.

[000562]

Ejercicio 1702 Estudio de sucesiones

Estudiar la convergencia de la sucesión (u_n) definida por :

1. $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.
2. $0 < u_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
3. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.
5. $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6. $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}}$.
7. $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.
8. $u_{n+1} = \sqrt{4-3u_n}$.
9. $u_{n+1} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.
10. $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.
11. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^{\alpha}$.
12. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Solución ▼ [004703]

Ejercicio 1703 Convergencia cuadrática

Sea $k \in \mathbb{C}$ fijado. Estudiar la convergencia de la sucesión (a_n) definida por : $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_{n+1} = ka_n^2$.

Solución ▼ [004704]

Ejercicio 1704 $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$

Sea (u_n) una sucesión real tal que para todo entero n : $u_n \in [0,1]$ y $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$. Demostrar que esta sucesión converge a $\frac{1}{2}$.

[004705]

Ejercicio 1705 Radicales iterados

Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$, ($n$ radicales).

Solución ▼

[004706]

Ejercicio 1706 Radicales iterados

Se considera la sucesión (u_n) definida por : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$. Demostrar que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Solución ▼

[004707]

Ejercicio 1707 Radicales iterados

Se establece $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ y $v_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n}}}}}$.

1. Demostrar que estas sucesiones son convergentes.
2. Se denota $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Demostrar que $\lambda - u_n \leqslant \dfrac{n}{2^n\sqrt{n!}}$.

Indicación ▼

[004708]

Ejercicio 1708 Sucesiones homográficas

Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$. Se define la sucesión (u_n) por : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n}. \end{cases}$

Se supone u_0 elegido de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1. ¿Cuáles son los límites posibles para (u_n) ?
2. Se supone que la ecuación $x^2 = ax + b$ tiene dos raíces reales α, β, con $|\alpha| > |\beta|$. Estudiar la sucesión $(v_n) = \left(\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ y deducir $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

[004709]

Ejercicio 1709 Sistema de orden 1

Sean $0 < x_0 < y_0$ y (x_n), (y_n). Las sucesiones definidas por : $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n}. \end{cases}$

Demostrar que son convergentes y calcular sus límites.

Solución ▼

[004710]

Ejercicio 1710 Sistema de orden 1

Estudiar la convergencia de las sucesiones (x_n), (y_n) definidas por : $0 < x_0 < y_0$ y $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2x_n + y_n}{3} \\ y_{n+1} = \dfrac{2y_n + x_n}{3}. \end{cases}$

Solución ▼

[004711]

Ejercicio 1711 Sistema de orden 1

Estudiar la convergencia de las sucesiones (x_n), (y_n) definidas por : $0 < y_0 < x_0$ y $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}. \end{cases}$

Solución ▼ [004712]

Ejercicio 1712 Sistema de orden 1

Sean $0 < a < b$ y $(x_n),(y_n)$ Las sucesiones definidas por : $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}$ y $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}. \end{cases}$

1. Demostrar que estas sucesiones convergen al mismo límite.
2. Sea $a = b\cos\varphi$. Expresar este límite en términos de b y φ.

Solución ▼ [004713]

Ejercicio 1713 Medias aritmética, geométrica, armónica

1. Sean $x,y,z \geqslant 0$. Demostrar que $x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0$ (dar $x+y+z$ en factor).
2. Estudiar la convergencia de las sucesiones (a_n), (b_n), (c_n) definidas por :

$$0 < a_0 < b_0 < c_0, \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{3}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n} \\ 3c_{n+1} = a_n+b_n+c_n. \end{cases}$$

Solución ▼ [004714]

Ejercicio 1714 Central MP 2000

Se considera la función $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ y la sucesión definida por $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Estudiar la sucesión (u_n), luego la serie $\sum u_n$.

Solución ▼ [004715]

Ejercicio 1715 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua y la sucesión (u_n) definida por $u_0 \in [a,b]$ y $u_{n+1} = f(u_n)$. Demostrar que si $\lim(u_{n+1}-u_n) = 0$, entonces la sucesión (u_n) converge.

Solución ▼ [004716]

Ejercicio 1716 **T Recurrencias homográficas

Determinar u_n en función de n, cuando la sucesión u verifica :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{u_n}$ (no preocuparse por la existencia).

Solución ▼ [005228]

Ejercicio 1717 **

Sean (u_n) y (v_n) las sucesiones definidas por los valores de u_0 y v_0 y las relaciones de recurrencia

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{y} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Estudiar las sucesiones u y v, luego determinar u_n y v_n en función de n buscando combinaciones lineales interesantes de u y v. Deducir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Solución ▼ [005229]

Ejercicio 1718 **

Sean (u_n), (v_n) y (w_n) las sucesiones definidas por los valores de u_0, v_0 y w_0 y las relaciones de recurrencia

$$u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2} \quad \text{y} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Estudiar las sucesiones u, v y w, luego determinar u_n, v_n y w_n en función de n buscando combinaciones lineales interesantes de u, v y w. Deducir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$y $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Solución ▼ [005230]

Ejercicio 1719 ***

Demostrar que las sucesiones definidas dando u_0, v_0 y w_0 reales tales que $0 < u_0 < v_0 < w_0$ y las relaciones de recurrencia :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \quad \text{y} \quad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \quad \text{y} \quad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},$$

tienen un límite común que no se busca determinar.

Solución ▼ [005231]

Ejercicio 1720 ****

Sea $u_1 = 1$ y, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Solución ▼ [005240]

Ejercicio 1721 **I

Se establece $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ y $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Para $n \in \mathbb{N}$, calcular A^n. Deducir u_n y v_n en función de n.
2. Usando dos combinaciones lineales interesantes de las sucesiones u y v, calcular directamente u_n y v_n en función de n.

Solución ▼ [005277]

Ejercicio 1722 ***I

Estudiar la sucesión (u_n) en cada uno de los casos siguientes :

1) $u_0 \geqslant -1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$,
2) $u_0 > -1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$,
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sen} u_n$,
4) $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$,
5) $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sen}(2u_n)$,
6) $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

Solución ▼ [005425]

Ejercicio 1723 ***I

Sea $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n)$.

1. Demostrar brevemente que la sucesión u es estrictamente positiva y converge a 0.
2. (a) Determinar un real α tal que la sucesión $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ tiene un límite finito no nulo.
   (b) Usando el lema de CÉSARO, determinar un equivalente simple de u_n.

Solución ▼ [005435]

Ejercicio 1724 **I

Sea u la sucesión definida por el su primer término $u_0 > 0$ y la relación $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$. Dar un equivalente simple de u_n, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [005436]

55 121.03 Sucesiones equivalentes, sucesiones despreciables

Ejercicio 1725

Sea $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ y para todo entero $n \geqslant 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calcular u_n. Deducir que se tiene $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000563]

Ejercicio 1726

Calcular, cuando convergen, los límites de las sucesiones definidas por :

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - n}, \qquad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n, \qquad u_n = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}, \qquad u_n = \frac{\operatorname{sen} n^2 - \cos n^3}{n}.$$

[000564]

Ejercicio 1727

Demostrar que las sucesiones definidas para $n \geqslant 1$ por :

$$u_n = \frac{n+1}{n}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad u_n = \frac{1}{n^2+1}, \qquad u_n = \frac{n}{n^2+1},$$

admite todos los límites que se van a calcular. [000565]

Ejercicio 1728

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida definiendo $u_0 = 0$ y $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Demostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y determinar su límite. [000566]

Ejercicio 1729

Estudiar el límite de las siguientes sucesiones :

$$a_n=\cos\left(\frac{2^n}{n!}\right); \quad b_n=\sqrt[n]{3-\operatorname{sen} n^2}; \quad c_n=\frac{n^3+2^n}{3^n}; \quad d_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}; \quad e_n=(\cos n)\operatorname{sen}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

[000567]

Ejercicio 1730

Determinar los límites cuando n tiende al infinito de las siguientes sucesiones; para cada, tratar de precisar en pocas palabras el método utilizado.

1. $1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\ldots\,;\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,;\,\ldots$
2. $2/1\,;\,4/3\,;\,6/5\,;\ldots;\,2n/(2n-1)\,;\ldots$
3. $0{,}23\,;\,0{,}233\,;\,\ldots\,;\,0{,}233\cdots3\,;\,\ldots$
4. $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$
5. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$
7. $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$, luego $\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2\sqrt{2}}\,;\,\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,;\,\ldots$
10. $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\frac{n\operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$
13. Demostrar la fórmula
$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$
deducir $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000568]

Ejercicio 1731

Sea $a>0$. Se define la sucesión $(u_n)_{n\geqslant0}$ por u_0 un real verificando $u_0>0$ y por la relación

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

Se propone de demostrar que (u_n) tiende a $\sqrt{a}$.

1. Demostrar que $u_{n+1}^2-a=\frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$.
2. Demostrar que si $n\geqslant1$, entonces $u_n\geqslant\sqrt{a}$, luego que la sucesión $(u_n)_{n\geqslant1}$ es decreciente.
3. Deducir que la sucesión (u_n) converge a $\sqrt{a}$.
4. Usando la relación $u_{n+1}^2-a=(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a})$ dar una mayoración de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en función de $u_n-\sqrt{a}$.
5. Si $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$ y para $n\geqslant1$, demostrar que $u_n-\sqrt{a}\leqslant2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.
6. Aplicación : Calcular $\sqrt{10}$, con una precisión de 8 cifras luego del punto decimal, tomando $u_0=3$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000569]

Ejercicio 1732

Se consideran las dos sucesiones :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ convergen al mismo límite, y demostrar que este límite es un elemento de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000570]

Ejercicio 1733

Sean a y b dos reales, $a < b$. Se considera la función $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ que se supone continua y una sucesión recurrente $(u_n)_n$ definida por $u_0 \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Se supone aquí que f es creciente. Demostrar que $(u_n)_n$ es monótona y deducir su convergencia hacia una solución de la ecuación $f(x) = x$.
2. *Aplicación.* Calcular el límite de la sucesión definida por : $u_0 = 4$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+5}{u_n+3}$.
3. Se supone ahora que f es decreciente. Demostrar que las sucesiones $(u_{2n})_n$ y $(u_{2n+1})_n$ son monótonas y convergentes.
4. *Aplicación.* Sea $u_0 = \frac{1}{2}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. Calcular los límites de las sucesiones $(u_{2n})_n$ y $(u_{2n+1})_n$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000571]

Ejercicio 1734

1. Sean $a,b > 0$. Demostrar que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Demostrar las siguientes desigualdades ($b \geqslant a > 0$) :
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{y} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$
3. Sean u_0 y v_0 de reales estrictamente positivos con $u_0 < v_0$. Se definen dos sucesiones (u_n) y (v_n) de la manera siguiente :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{y} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}.$$
   (a) Demostrar que $u_n \leqslant v_n$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Demostrar que (v_n) es una sucesión decreciente.
   (c) Demostrar que (u_n) es creciente. Deducir que las sucesiones (u_n) y (v_n) son convergentes y tienen el mismo límite.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000572]

Ejercicio 1735

Sea x un real.

1. Determinar el límite de $u_n = \dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$.

2. Deducir que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

[000573]

Ejercicio 1736

Sea $n \geqslant 1$.

1. Demostrar que la ecuación $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admite una única solución, denotada a_n, en $[0,1]$.
2. Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente minorada por $\frac{1}{2}$.
3. Demostrar que (a_n) converge a $\frac{1}{2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000574]

Ejercicio 1737

Calcular según los valores de x :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2m}\right].$$

[000575]

Ejercicio 1738

Sean a_0 y b_0 dos reales fijos. Se define por inducción las sucesiones (a_n) y (b_n) por $a_{n+1} = \frac{2a_n+b_n}{3}$ y $b_{n+1} = \frac{a_n+2b_n}{3}$.

1. Demostrar que estas dos sucesiones son adyacentes.
2. Calculando a_n+b_n, demostrar que convergen a $\frac{a_0+b_0}{2}$.

[000576]

Ejercicio 1739

Sea (u_n) una sucesión que tiende a 0. Sea $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Demostrar que (x_n) converge a 0 (se puede fijar ε, luego dividir la suma en dos y finalmente elegir N...). [000577]

Ejercicio 1740

Determinar los límites de $\frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$ y $\sqrt[n]{n^2}$. [000578]

Ejercicio 1741

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real cuyos términos son todos no nulos y tal que :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. [000579]

Ejercicio 1742

Estudiar la sucesión definida por inducción :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

[000580]

Ejercicio 1743

Estudiar la convergencia y calcular el eventual límite de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2}).$$

[000581]

Ejercicio 1744

Estudiar la convergencia y calcular el eventual límite de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}.$$

[000582]

Ejercicio 1745

Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = \ell$. Calcular ℓ. [000583]

Ejercicio 1746

Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva ; demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$. [000584]

Ejercicio 1747

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea $v_n = u_{n+1} - u_n$ y $w_n = v_{n+1} - v_n$, y se supone que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. [000585]

Ejercicio 1748

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real que converge a ℓ y ϕ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. (no necesariamente estrictamente creciente !). Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. [000586]

Ejercicio 1749

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

[000587]

Ejercicio 1750

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Demostrar que

$$E = \{u_n - v_m | (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$$

es denso en $\mathbb{R}$. [000588]

Ejercicio 1751

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con valores en $[0,1]$ tales que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1.$$

Demostrar que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1.$$

[000589]

Ejercicio 1752

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergiendo respectivamente hacia ℓ y L. Estudiar la sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

[000590]

Ejercicio 1753

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada tal que :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$

¿Qué se puede decir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? [000591]

Ejercicio 1754

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Estudiar la sucesión definida por :

$$z_0 \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Indicación : Se escribe $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$, donde $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ y se usa :

$$\operatorname{sen}\phi = 2^n \operatorname{sen}\frac{\phi}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\phi}{2^i}.$$

[000592]

Ejercicio 1755 ***I

Determinar el equivalente más simple posible de cada una de las sucesiones siguientes cuando n tiende a $+\infty$.

1) $\arccos\frac{n-1}{n}$ 2) $\arccos\frac{1}{n}$ 3) $\operatorname{ch}(\sqrt{n})$ 4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 5) $\dfrac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$

6) $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$ 7) $\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\operatorname{sen}\frac{1}{n})$ 8) $(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$ 9) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Solución ▼ [005252]

Ejercicio 1756 ***I

Demostrar que $\sum\limits_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Solución ▼ [005253]

Ejercicio 1757 ***I

1. Sean u y v dos sucesiones reales estrictamente positivas. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ y $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. Demostrar que si $u_n \sim v_n$ y si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, entonces $U_n \sim V_n$.
2. Aplicación. Encontrar un equivalente de $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ y $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k)$.

Solución ▼ [005254]

Ejercicio 1758 ****

Sea (u_n) una sucesión real con límite nulo. Demostrar que si $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$, entonces $u_n \sim \frac{1}{n}$. ¿Se tiene que si $u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}$, entonces $u_n \sim \frac{1}{n}$?

Solución ▼ [005255]

Ejercicio 1759 ***I

Sea u la sucesión definida por $u_0 = \frac{\pi}{2}$ y, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n)$.

1. Demostrar que la sucesión u es estrictamente positiva, decreciente al límite cero.
2. Se admite que si u es una sucesión con límite nulo, entonces, cuando n tiende a $+\infty$, $\operatorname{sen}(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Determinar un real α tal que la sucesión $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tiene un límite real no nulo. Aplicando el lema de CÉSARO a la sucesión (v_n), deducir un equivalente simple de u_n, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [005256]

---

56 121.04 Sucesión recurrente lineal

Ejercicio 1760

¿Qué sucede con la siguiente afirmación : si $(u_n) \sim (v_n)$, entonces $(\mathrm{e}^{u_n}) \sim (\mathrm{e}^{v_n})$? Dar un enunciado correcto.
[000593]

Ejercicio 1761

1. Demostrar que si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ y si $(u_n) \to 0$, entonces $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
2. Sea a un real. Determinar el límite de $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

[000594]

Ejercicio 1762

Comparar las siguientes sucesiones :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = \mathrm{e}^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n \ln n}.$$

[000595]

Ejercicio 1763

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales de límite $+\infty$ tales que $u_n = o(v_n)$. Demostrar que existe une sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de límite $+\infty$ tal que $u_n = o(w_n)$ y $w_n = o(v_n)$. [000596]

Ejercicio 1764

Dar un ejemplo de sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $u_n = O(v_n)$, pero que no se tiene ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$. [000597]

Ejercicio 1765

Estudio de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = u_n^2$. Dar un equivalente de u_n, cuando $n \to \infty$. [000598]

Ejercicio 1766

Demostrar el recíproco del teorema de Césaro (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$) :

1. en el caso donde $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$ y $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$,
2. en el caso donde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

[000599]

Ejercicio 1767

Estudiar la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$. Utilizando $v_n = \frac{u_n^2}{4}$, dar un equivalente de u_n.
Indicación : Se demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty}(v_{n+1} - v_n) = 1$, se deduce un equivalente de v_n, luego de u_n. [000600]

Ejercicio 1768

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Estudiar la sucesión, utilizar $v_n = \frac{1}{u_n}$, dar un equivalente en el caso $u_0 \in]-1;0]$. ¿Qué se puede decir en el caso $u_0 \in]0;\infty[$? (Estudiar $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.) [000601]

Ejercicio 1769

Sean f y g dos formas lineales en un espacio vectorial E tales que $fg = 0$. Demostrar que $f = 0$ o $g = 0$. Estudiar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2}$. Estudiando $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$, dar un equivalente. [000602]

Ejercicio 1770

Estudiar la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $u_{n+1} = \operatorname{sen} u_n$. Dar $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2})$, (respuesta : $\frac{1}{3}$) y deducir un equivalente de u_n^{-2}, por lo tanto de u_n. [000603]

Ejercicio 1771

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists !x_n \in [n, n+1[$ solución de $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$. Dar un equivalente de x_n, luego hacer una expansión asintótica de $x_n - n$ de orden 5 en función de $\frac{1}{n}$. [000604]

Ejercicio 1772

Estudiar la convergencia y calcular el eventual límite de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{n^2}.$$

Primero se demuestra que :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

cuando $n \to \infty$. [000605]

Ejercicio 1773

Sea (u_n) definida por u_0 y u_1 estrictamente positivos y $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, para $n \geqslant 1$.

1. Demostrar que $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe y determinarlo. ¿Qué se observa ?
2. Sea $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Expresar a_{n+1} en función de a_n.
3. Demostrar que a_{2n} y a_{2n+1} son adyacentes.
4. Determinar un racional r tal que $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$.

Solución ▼ [001202]

Ejercicio 1774

Determinar (u_n) tal que

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

2. $u_0 = 1$, $u_1 = i$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

[001203]

Ejercicio 1775

Determinar las sucesiones acotadas que verifican $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Solución ▼ [001204]

Ejercicio 1776

Determinar las sucesiones convergentes que verifican $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$. [001205]

Ejercicio 1777

Demostrar que la sucesión $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ está bien definida y determinarla. [001206]

Ejercicio 1778

Determinar las sucesiones (u_n) y (v_n) que verifica $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$ [001207]

Ejercicio 1779 Ensi Chimie P' 93

1. Resolver $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$, $u_0 = a$, $u_1 = b$.
2. Si $a = 0$, encontrar $\lim_{n\to\infty} u_n$.
3. Resolver : $v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$.

Solución ▼ [003068]

Ejercicio 1780 Ecuaciones de recurrencia lineal

1. Resolver $u_{n+2} - u_n = n - 1$, $u_0 = u_1 = 0$.
2. Resolver : $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$.

Solución ▼ [003069]

Ejercicio 1781 Sistema recurrente

Se dan u_0, v_0 reales. Resolver el sistema : $\begin{cases} 5u_n = 2u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ 5v_n = 2v_{n-1} + 3u_{n-1}. \end{cases}$

Solución ▼ [003070]

Ejercicio 1782 Caracterización de sucesiones polinómicas

Sea (u_n) una sucesión de reales. Se definen las sucesiones derivadas de (u_n) :

$$\begin{cases} (u'_n) = (u_{n+1} - u_n) \\ (u''_n) = (u'_{n+1} - u'_n) \\ \dots \\ \left(u_n^{(k+1)}\right) = \left(u_{n+1}^{(k)} - u_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

1. Expresar $u_n^{(k)}$ en función de $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k}$.
2. Demostrar que la sucesión (u_n) es polinomial si y solo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left(u_n^{(k)}\right) = (0)$.

Solución ▼ [003071]

Ejercicio 1783 Número de cifras sin incluir 13

Sea T_n el número de números naturales de n cifras exactamente sin incluir la sucesión 13 en numeración decimal.

1. Demostrar que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
2. Calcular T_n en función de n.

Solución ▼ [003072]

Ejercicio 1784 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

Se denota $x_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, $y_n = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, y $z_n = [x_n]$.

1. Demostrar que $z_n = x_n - y_n$.
2. Deducir que 2^{n+1} divide z_n.

[003073]

Ejercicio 1785 **T

Determinar u_n en función de n y sus primeros términos en cada uno de los siguientes casos :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
5. $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$.
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5$.

Solución ▼ [005239]

---

57 121.05 Sucesiones de Cauchy

Ejercicio 1786

Demostrar que la sucesión $\left(\frac{\operatorname{sen} n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y que la sucesión $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no lo es. [001208]

Ejercicio 1787

Demostrar que la sucesión definida por

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \cdots + \frac{\cos n}{n!}$$

es una sucesión de Cauchy. Deducir su convergencia. [001209]

Ejercicio 1788

Demostrar que toda sub-sucesión extraída de una sucesión de Cauchy es también una sucesión de Cauchy. Demostrar que si (u_n) es una sucesión de Cauchy, se puede encontrar una sub-sucesión (u_{n_k}) de (u_n) tal que :

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall q \geqslant p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leqslant \frac{1}{2^p}.$$

[001210]

Ejercicio 1789

Una sucesión (x_n) se define por una relación de recurrencia $x_{n+1} = a \operatorname{sen} x_n + b$, donde a es un número real de $]0,1[$ y b un número real cualquiera. Demostrar que para todo $p \in \mathbb{N}$, $|x_{p+1} - x_p| \leqslant a^p |x_1 - x_0|$. Deducir que la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. ¿Cuántos términos se deben calcular para obtener un valor aproximado de $\lim x_n$ de error menor a 10^{-10} si se supone $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$, $x_0 = 1$? [001211]

58 121.06 Sucesión en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1790

Sea x_n una sucesión de $\mathbb{R}^d$. Demostrar que el conjunto A de valores de adherencia de x_n es cerrado.
Indicación : Probar que el complemento de A es abierto. [001901]

Ejercicio 1791

Sea x_n una sucesión acotada de $\mathbb{R}^d$. Demostrar que x_n converge si y solo si la adherencia A de x_n es un punto aislado.
Indicación : Para probar la convergencia, utilizar que una sucesión acotada de $\mathbb{R}^d$ tiene al menos un valor de adherencia. [001902]

Ejercicio 1792

Sean $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y x_n una sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Se supone que $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$. Demostrar que si $a \in A$, entonces $f(a) = a$.
Indicación : Aplicar la definición de la continuidad de f en a en términos de límites. [001903]

Ejercicio 1793

Sea x_n una sucesión acotada de $\mathbb{R}^d$, se supone que $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$. Demostrar que el conjunto A es no vacío, compacto, conexo.
Indicación : para la conexidad, suponer que $A = A_1 \cup A_2$, con A_1 y A_2 no vacíos, disjuntos, cerrados. Si $d = 1$ concluir que $A = [a,b]$, con $a \leqslant b$. [001904]

Ejercicio 1794

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea x_n la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Se supone que x_n es acotada. Demostrar que x_n converge si y solo si $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$.
Indicación. Demostrar que basta probar que $a = b$ en $[a,b] = A$. Si $a < b$ Demostrar que la sucesión es estacionaria. [001905]

Ejercicio 1795

Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ y $x_n = \cos(s_n)$. Demostrar que no existe aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $x_{n+1} = f(x_n)$.
Indicación : Demostrar que $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$, pero que x_n no converge. [001906]

59 121.99 Otro

Ejercicio 1796 I

1. (*) Calcular $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (***) Calcular $\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k}$, $a \in]0,\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$

Solución ▼ [005145]

Ejercicio 1797 ***

Se quiere demostrar de manera elemental (es decir, prescindiendo del logaritmo natural y trabajando solo con las dos operaciones $+$ y $\times$) solo para $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n < 3$. Para esto desarrollar el binomio, luego mayorar $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$ comenzando por mayorar $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$ por $\frac{1}{2}$.
Solución ▼ [005148]

Ejercicio 1798 **I

Sean x un real. Determinar $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$.
Solución ▼ [005154]

Ejercicio 1799 ***IT

Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}$.

1. Demostrar que si la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a un real ℓ, la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y tiene el límite ℓ. ¿Recíproco ?
2. Demostrar que si la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. ¿Recíproco ?
3. Demostrar que si la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es.

Solución ▼ [005220]

Ejercicio 1800 ***I

Sea u_n la única raíz positiva de la ecuación $x^n + x - 1 = 0$. Estudiar la sucesión (u_n).
Solución ▼ [005246]

Ejercicio 1801 ****

Demostrar que el conjunto E de reales de la forma $u_n = \operatorname{sen}(\ln(n))$, n entero natural no nulo, es denso en $[-1,1]$.

Solución ▼ [005248]

Ejercicio 1802 ***

Calcular $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\operatorname{sen}(n\alpha)|))$.

Solución ▼ [005249]

,

60 122.01 Series de términos positivos

Ejercicio 1803

Sean, para $n>0$, $u_n=\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ y $v_n=\ln u_n$.

1. Estudiar la serie de término general w_n, donde, para $n\geqslant 2$, $w_n=v_n-v_{n-1}$ y $w_1=v_1$.
2. Deducir, usando la convergencia de la sucesión de sumas parciales de w_n, que la sucesión u_n converge a $\lambda>0$.
3. Determinar λ usando la fórmula de Wallis : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}$. Deducir un equivalente de $n!$.

   Indicación : Expresar $n!$ (respectivamente $(2n)!$) en función de u_n (resp. de u_{2n}) y sustituirlos en la fórmula de Wallis.

[001930]

Ejercicio 1804

Estudiar la serie de término general

$$u_n=\frac{a^n2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}\text{ donde }a>0,\ b>0.$$

Indicación : Encontrar un equivalente según los valores de b. [001932]

Ejercicio 1805 Comparación con la serie de Riemann y equivalente

Estudiar la serie de término general

1. $u_n=\cos(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1})$, con $a>0$. 2. $v_n=\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. 3. $w_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

[001934]

Ejercicio 1806

Sea (u_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos, se supone que $\lim(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})=1$ y que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+O(\frac{1}{n^\beta}),\text{ donde }\alpha>0\ \ \beta>1.$$

Sea $v_n=n^\alpha u_n$, estudiar $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ y demostrar que (v_n) tiene un límite finito.

Aplicación : Estudiar la serie de término general

$$u_n = \sqrt{n!}\,\mathrm{sen}\,1\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

[001935]

Ejercicio 1807

Determinar la naturaleza de la serie de término general :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$
2. $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$
3. $n^{-(1+(1/n))}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $\dfrac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n-1)}$
6. $n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

Solución ▼ [001936]

Ejercicio 1808

Estudiar, según los valores de $p \in \mathbb{N}$, la naturaleza de la serie de término general

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}.$$

Solución ▼ [001937]

Ejercicio 1809

Calcular las sumas de las siguientes series, mostrando su convergencia :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)3^{-n}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 3}\dfrac{2n-1}{n^3-4n}$

Indicación ▼ Solución ▼ [001938]

Ejercicio 1810

Sea (u_n) una sucesión real positiva y $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$. Comparar la naturaleza de las series $(\sum u_n)$ y $(\sum \frac{u_n}{S_n})$.

[001939]

Ejercicio 1811 Utilización de una serie

El propósito de este ejercicio es demostrar la convergencia de la siguiente integral generalizada $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4\,\mathrm{sen}^2 x}$. Por esto, se considera la serie de término general

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^4\,\mathrm{sen}^2 x}.$$

Por un cambio de variable, transformar u_n en

$$u_n = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(n\pi+x)^4\,\mathrm{sen}^2 x}.$$

Encuadrar u_n por los términos de la sucesión v_n, donde

$$v_n = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \operatorname{sen}^2 x}.$$

Calcular explícitamente la integral v_n y deducir un equivalente de u_n. Concluir. [001941]

Ejercicio 1812

Sea u_n una sucesión decreciente con términos positivos. Se supone $(\sum u_n)$ converge. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} (nu_n) = 0.$$

Indicación : Encuadrar $\sum_{p+1}^{n} u_k$, para $n > p$. Luego volver a las definiciones de los límites con los épsilones.
[001942]

Ejercicio 1813

Sean $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ dos series de términos reales estrictamente positivos. Se supone que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, y que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Demostrar que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge. [001943]

Ejercicio 1814 Examen 2000

1. Se recuerda que la serie armónica alternada converge y tiene por suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

   Demostrar la convergencia de las dos series $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ y calcular su suma usando el recordatorio anterior.
2. Descomponer en elementos simples la fracción racional $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Demostrar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$ y calcular su suma usando lo anterior.
4. ¿La integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3-x}$ converge ? Si es sí, calcularla.

[001945]

Ejercicio 1815

Sea $0 < a < b$ y $(u_n)_{n\geqslant 0}$ definida por $u_0 = 1$ y $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, para $n \geqslant 0$. Demostrar que el límite de la sucesión $W_n = \log(n^{b-a}u_n)$ existe y es finita. Deducir los valores de a y b tales que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ converge. Calcular entonces su suma : para esto, explicitar la suma parcial s_n, mostrando primero que para todo n se tiene

$$\sum_{j=0}^{n} [(j+1)+b-1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^{n} [j+a]u_j.$$

Ejercicio 1816

Por un cálculo directo, demostrar que las sumas parciales de la serie armónica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}, \qquad n \geqslant 1$$

no son una sucesión de Cauchy. Deducir que esta serie diverge. [002718]

Ejercicio 1817

Discutiendo eventualmente según el valor de los parámetros reales α y β, estudiar las series de términos generales positivos $(n \geqslant 2)$:

$\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}$,

$\dfrac{1}{n(n^2-1)}$,

$\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+\alpha n}, \quad \alpha \leqslant 2$,

$\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ln n^2 + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2-n}$,

$\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

$\dfrac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$,

$\dfrac{n^n\alpha^n}{n!}$,

$\sqrt[n]{n}-1$,

$n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}$,

$\displaystyle\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$,

$\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+k)!}, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$n^{\alpha}\left[(n+1)^{(n+1)/n} - (n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

$\displaystyle\int_1^{\infty} \exp(-x^n)\,dx$ (Indicación : cambiar de variable $t = x^n$).

[002719]

Ejercicio 1818

Sea (a_n) una sucesión de reales estrictamente positivos tal que, en un vecindario de $+\infty$, se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Demostrar que la serie de término general n^{α} es de este tipo; recordar para cuáles valores de α converge.
2. Demostrar que si $\alpha > -1$, la serie de término general a_n diverge, y que si $\alpha < -1$ converge.
3. Aplicación : Estudiar la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}.$$

4. Demostrar que si se tiene en un vecindario de $+\infty$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

entonces la serie de término general a_n diverge.

5. Aplicación : Estudiar la serie

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-\exp(-1/n)).$$

[002720]

Ejercicio 1819

Sea (u_n) la sucesión definida por $u_0 \in]0,1[$ dado y $u_{n+1}=u_n-{u_n}^2$. Demostrar que esta sucesión converge y dar su límite. Demostrar que la serie de términos general ${u_n}^2$ converge y dar su límite. Demostrar que los series de término general u_n y $\ln(u_{n+1}/u_n)$ son divergentes. [002721]

Ejercicio 1820

Demostrar que existen dos números reales α, β, tales que para todo $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}.$$

Deducir el valor de

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Solución ▼ [002722]

Ejercicio 1821

Sea (a_n) una sucesión de reales estrictamente positivos tal que $\sum a_n$ converge. Estudiar la serie

$$\sum a_n^2, \qquad \sum \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum a_n a_{2n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

[002723]

Ejercicio 1822

Justificar la convergencia y calcular las sumas de las siguientes series

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+k)},\ (k\in\mathbb{N}^*), \qquad \sum\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \qquad \sum\frac{n^2+n-3}{n!}, \qquad \sum_{n\geqslant 2}\ln\frac{n^2}{n^2-1}.$$

[002725]

Ejercicio 1823 **T

Demostrar por inducción que, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Encontrar una demostración directa.

Solución ▼ [005108]

Ejercicio 1824 ***I

1. Demostrar por inducción que, para todo natural no nulo n, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Calculando la diferencia $(k+1)^2 - k^2$, encontrar una prueba directa de este resultado.
2. Calcular igualmente las sumas $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ y $\sum_{k=1}^{n} k^4$ (y memorizar los resultados).
3. Sea $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Determinar una relación de recurrencia que permita calcular los S_p paso a paso.

Solución ▼ [005109]

Ejercicio 1825 Sumas telescópicas

Calcular las siguientes sumas :

1. (**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ y $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. (***) Calcular $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$, para $n \in \mathbb{N}^*$ y $p \in \{1,2,3,4\}$ (en cada caso, encontrar un polinomio P_p de grado $p+1$ tal que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).
3. (**) Calcular $\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$ (ir y releer ciertas fórmulas establecidas en un apartado anterior).
4. (**) Calcular $\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2}$.

Solución ▼ [005143]

Ejercicio 1826 I

Calcular las siguientes sumas :

1. (**) $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1$.
2. (**) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j$ y $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j$.
3. (*) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.
4. (***) Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Determinar $\lim_{n \to +\infty} u_n$. (Utilizar los resultados del ejercicio 1825, 2)).

Solución ▼ [005144]

Ejercicio 1827 ***I

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_1, a_2, \dots, a_n$, n reales estrictamente positivos. Demostrar que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geqslant n^2$. (Desarrollar y usar $f(x) = x + \frac{1}{x}$).

Solución ▼ [005149]

Ejercicio 1828 **

Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión aritmética que no se anula. Demostrar que para todo entero natural n, se tiene $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$.

Solución ▼ [005223]

Ejercicio 1829 **

Calcular $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}$.

Solución ▼ [005224]

Ejercicio 1830 **

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión positiva tal que la serie de término general u_n converge. Investigar la naturaleza de la serie de término general $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Solución ▼ [005697]

Ejercicio 1831 ***

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales positivos. Encontrar la naturaleza de la serie de término general $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$, $n \geqslant 1$, conociendo la naturaleza de la serie de término general u_n, luego calcular la suma en caso de convergencia.

Solución ▼ [005698]

Ejercicio 1832 ****

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales estrictamente positivos tal que la serie de término general u_n diverge. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Estudiar en función de $\alpha > 0$ la naturaleza de la serie de término general $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Solución ▼ [005699]

Ejercicio 1833 *

Analizar la naturaleza de la serie de término general $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Solución ▼ [005704]

Ejercicio 1834 **

Determinar un equivalente simple de $\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, cuando n tiende a infinito (a real positivo dado).

Solución ▼ [005705]

61 122.02 Convergencia absoluta

Ejercicio 1835 Utilización de las reglas de Cauchy y d'Alembert

Estudiar la serie de término general

1. $u_n = \sqrt{n!}\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\cdots\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{n}}$, con $x > 0$.
2. $v_n = e^{an^2}(1 - \frac{a}{n})^{n^3}$.

[001933]

Ejercicio 1836 Serie de términos arbitrarios

Estudiar la serie de término general

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$.

2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$, donde $\alpha > 0$.

3. $w_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, donde $\alpha > 0$.

Indicación : Los cálculos de dl pueden ser fructíferos... [001940]

Ejercicio 1837 Examen 2000

Justificar la respuesta, clasificar las diez series $\sum u_n$ siguientes en 4 categorías

— GD : tales que u_n no tiende a 0 ;

— ZD : que divergen y tales que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

— AC : que convergen absolutamente ;

— SC : que convergen, pero no absolutamente.

(Cuidado : Para poder responder, algunas series requieren dos demostraciones : por ejemplo para demostrar que $\sum u_n$ es SC, es necesario demostrar que $\sum u_n$ converge y que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})\right]; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - (1 - \frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n + 1000}{3^n + 1}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \cos\frac{\pi}{n}); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\pi n)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

Ejercicio 1838

Determinar, en función de parámetros reales α, β, la naturaleza de la serie de términos generales ($n \geqslant 2$)

$$(-1)^n n^\alpha, \qquad n^\beta\left(1 - (-1)^n n^\alpha\right), \qquad \frac{(-1)^n}{n - \ln n}, \qquad \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{n}} - 1\right),$$

$$\ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \qquad \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{n!}{\mathrm{e}}\right) \text{ (usar que : } 1/\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\text{)}.$$

[002724]

---

62 122.03 Series semi-convergentes

Ejercicio 1839 Examen 2000

Justificar la respuesta, clasificar las diez series $\sum u_n$ siguientes en 4 categorías

— GD : tales que u_n no tiende a 0 ;

— ZD : que divergen y tales que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

— AC : que convergen absolutamente ;

— SC : que convergen, pero no absolutamente.

(Cuidado : para poder responder, algunas series requieren dos demostraciones : por ejemplo para demostrar que $\sum u_n$ es SC, es necesario demostrar que $\sum u_n$ converge y que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right]; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n}); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\pi n)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n}); \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

[001944]

63 122.04 Series alternadas

Ejercicio 1840

Sea $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Dar un valor aproximado de S garantizando un error inferior o igual a 10^{-3}. [001931]

Ejercicio 1841 Examen 2000

1. Se recuerda que la serie armónica alternada converge y tiene la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2$.

   Demostrar la convergencia de las dos series $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)$ y calcular su suma usando lo anterior.
2. Descomponer en elementos simples la fracción racional $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Demostrar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}$ y calcular su suma usando lo anterior.
4. ¿La integral impropia $\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}$ converge ? Si es sí, calcularla.

[001945]

Ejercicio 1842 Permutación en la serie armónica alternada : Pringsheim (1883)

Para todo entero $n>0$, sea $u(n)=(-1)^n/n$. Sea σ una permutación de enteros >0 y sea τ la permutación recíproca. Se supone además que :
(1) para todo entero $p>0$ se tiene $\tau(2p-1)<\tau(2p+1)$ y $\tau(2p)<\tau(2p+2)$.
(2) Denotando por $p(n)$ el número de enteros k tales que $1\leqslant k\leqslant n$ y $\sigma(k)$ es par, entonces $\alpha=\lim_{n\to\infty}p(n)/n$ existe y está en $]0,1[$.

1. En el caso particular en que σ es definida por

$$\sigma(3p)=2p,\ \ \sigma(3p+1)=4p+1,\ \ \sigma(3p+2)=4p+3$$

   para todo entero $p>0$, calcular explícitamente τ, y comprobar que σ satisface (1) y (2), calculando $p(n)$, para todo n así como α.

2. Se denota $f(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n$, y se recuerda el hecho, vu en curso, que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \gamma$ existe (constante de Euler). Se vuelve al caso general de σ, se considera la serie de término general $v_n = u(\sigma(n))$ y se denota $s_n = v_1 + \cdots + v_n$.
3. Demostrar por inducción que $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ y que

$$s_n = \tfrac{1}{2} f(p(n)) + \tfrac{1}{2} f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \tfrac{1}{2} \log \frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$

inferir que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge y calcular su suma en función de α.

[001948]

Ejercicio 1843 **

Calcular $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solución ▼ [005710]

64 122.05 Familias sumables

Ejercicio 1844 Numerabilidad

A es un conjunto infinito numerable, ¿son los siguientes conjuntos numerables :

1. $\mathscr{P}(A)$?
2. $\{$partes finitas de $A\}$?
3. $\{$sucesiones periódicas con valores en $A\}$?
4. $\{$sucesiones periódicas con valores en $A\}$?
5. $\{$relaciones de orden total en $A\}$?

[004487]

Ejercicio 1845 Discontinuidades de una función monótona

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente. Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es numerable (para $[a,b] \subset \mathbb{R}$, considerar la familia $(f(x^+) - f(x^-))_{x\in[a,b]}$).
2. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente que tiene una infinidad numerable de discontinuidades.
3. $(**)$ Encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *estrictamente* creciente cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es igual a $\mathbb{Q}$.

Solución ▼ [004488]

Ejercicio 1846 Conjunto no vacío

Sea $(r_n)_{n\geqslant 1}$ una numeración de racionales. Se denota $I_n = \left]r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right[$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $F = \mathbb{R} \setminus E$. Demostrar que $F \neq \varnothing$. (Esto es chocante en vista de que los elementos de F son, por definición, “lejos” de cada racional, sin embargo es cierto).

Solución ▼ [004489]

Ejercicio 1847 Estudio de convergencia

Estudiar la finitud de las siguientes sumas :

1. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^\alpha}$. 2. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$. 3. $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$. 4. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p + b^q}$, $a>1, b>1$.

Solución ▼ [004490]

Ejercicio 1848 Serie de restos

Calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Solución ▼ [004491]

Ejercicio 1849 Serie de restos

Calcular $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$ en función de $\zeta(3)$.

Solución ▼ [004492]

Ejercicio 1850 Sin inversión de sumas

Se establece $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n\neq p$ y $a_{n,n}=0$.

1. Explicar simplemente por qué la sucesión doble $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ no es sumable.
2. Calcular $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ y $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Solución ▼ [004493]

Ejercicio 1851 Identidad notable

Demostrar que para $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$, se tiene la igualdad : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Solución ▼ [004494]

Ejercicio 1852 Cálculo de suma

Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|<1$. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)z^n$, donde $d(n)$ es el número de divisores positivos de n. [004495]

Ejercicio 1853 Central MP 2000

Sea $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

1. ¿Para qué valores de t $S(t)$ tiene sentido ?
2. Demostrar que $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{1-t^k}$.

3. Sea $F_m(t)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{t^k(1-t)}{1-t^k}$. Demostrar que $(F_m(t))$ converge uniformemente a $(1-t)S(t)$ sobre $[0,1]$. Deducir el límite en 1 de $(1-t)S(t)$. Recordar que $\ln 2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}$.
4. Calcular el desarrollo en serie entera de $S(t)$. Dar una interpretación aritmética de los coeficientes de este desarrollo y especificar su signo de acuerdo con n.

Solución ▼ [004496]

Ejercicio 1854 Central MP 2002

Sean $a,b,c\in\mathbb{N}^*$y sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

1. Estudie la convergencia de la serie y demostrar que se pueden intercambiar b y c en la fórmula.
2. Desarrollar en serie entera : $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m}}{1-z^m}$.

Solución ▼ [004497]

Ejercicio 1855 Cálculo de sumas

Calcular las sumas siguientes : $A=\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{p^2q^2}$, $B=\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p|q}\frac{1}{p^2q^2}$ y $C=\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2;p\wedge q=1}\frac{1}{p^2q^2}$.

Solución ▼ [004498]

Ejercicio 1856 Serie armónica alternada

Reordenando los términos de la serie armónica alternada tomando a su vez p términos positivos, luego q términos negativos, $p,q\geqslant 1$. Calcular la suma de la serie correspondiente.

Solución ▼ [004499]

Ejercicio 1857 Familias de cuadrados sumables

1. Sea $P\in\mathbb{R}[X]$. Verificar que : $|\int_{-1}^{1}P(t)\,dt+i\int_{0}^{\pi}P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta=0$.
   Deducir : $|\int_{0}^{1}P^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi}|P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$.
2. Sean $2n$ reales positivos $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. Demostrar que $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{a_kb_\ell}{k+\ell}\leqslant\pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n}b_\ell^2}$.
3. Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones complejas de cuadrados sumables. Demostrar que la sucesión doble $\left(\frac{a_kb_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ es sumable.

[004500]

Ejercicio 1858 Asociatividad general

Sea $(a_i)_{i\in I}$ una familia sumable y $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de partes de I, no necesariamente finitas, tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n=I$. Demostrar que $\sum_{i\in I_n}a_i\to\sum_{i\in I}a_i$, cuando $n\to\infty$. Deducir que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición numerable de I, entonces $\sum_{i\in I}a_i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n}a_i$. [004501]

Ejercicio 1859 Mines MP 2001

Determinar el conjunto de definiciones de $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en su dominio y desarrollarla en serie entera.

Solución ▼ [004502]

65 122.06 Función exponencial compleja

Ejercicio 1860 $\cos z$

¿Cuáles son los complejos z tales que $\cos z \in [-1,1]$?

Solución ▼ [004403]

Ejercicio 1861 $\lim((1+z/n)^n)$

Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^z$, cuando $n \to \infty$.

Solución ▼ [004404]

Ejercicio 1862 Desigualdad

Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que $|\mathrm{e}^z - 1| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} - 1 \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|}$.

Solución ▼ [004405]

Ejercicio 1863 Desigualdad, Polytechnique MP* 2006

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$. Demostrar que $\left|\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right|$. ¿Qué sucede en caso de igualdad?

Solución ▼ [004406]

Ejercicio 1864 Morfismos $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C},*)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ tal que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Si f es derivable, demostrar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.
2. Obtenga el mismo resultado si f solo se supone que es continua (tomar una primitiva, F, de f y demostrar que ella es de clase $\mathbb{C}^2$).

[004407]

Ejercicio 1865 $\mathrm{e}^z = z$

Demostrar que existen infinitos complejos z tales que $\mathrm{e}^z = z$ (se calcula x en función de y, y se estudia la ecuación obtenida).

Solución ▼ [004408]

Ejercicio 1866 Ecuaciones trigonométricas

Resolver en $\mathbb{C}$:

1. $\cos z = 2$. 2. $\operatorname{ch} z = -1$.
3. $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} jz + \operatorname{sen} j^2 z = 0$. 4. $8\cos z + 4i \operatorname{sen} z = 7 + 5i$.

Solución ▼ [004409]

Ejercicio 1867 $|\cos|$ y $|\operatorname{sen}|$ en el círculo unidad

Calcular $\sup\{|\cos z| \text{ tal que } |z| \leqslant 1\}$ y $\sup\{|\operatorname{sen} z| \text{ tal que } |z| \leqslant 1\}$.

Solución ▼ [004410]

Ejercicio 1868 Curvas

Sean M, M' dos puntos del plano de afijos $z = x + iy$ y $z' = x' + iy'$.

1. Se supone que z y z' están ligados por la relación : $z' = e^z$. Estudiar la curva descrita por M', cuando M describe :
   (a) una recta $x =$ cte.
   (b) una recta $y =$ cte.
   (c) una recta arbitraria.
2. Retomar las preguntas 1a y 1b con $z' = \cos z$.

[004411]

Ejercicio 1869 Central MP 2002

Resolver en $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [004412]

---

66 122.99 Otro

Ejercicio 1870 Examen 2000

Sea $a > 0$ fijado. Para n entero positivo o nulo se define $P_n(a)$ por $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = a$, $P_2(a) = a(a+1)$ y, más generalmente $P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a)$. Demostrar que

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$

existe y es un número estrictamente positivo. Método : considerar la serie de término general para $n > 0$: $u_n = \log(n+a) - a\log(n+1) + (a-1)\log n$, comparar su suma parcial de orden $n-1$, con $\log \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$, y,. . .usando un desarrollo limitado en $1/n$ de orden apropiado, demostrar que, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. [001946]

Ejercicio 1871

Sea α y β dos números reales o complejos tales que $\alpha\beta = -1$ y $|\alpha| > 1 > |\beta|$. Para n en el conjunto $\mathbb{Z}$ enteros positivos o negativos que establecemos $F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$ y $L_n = \alpha^n + \beta^n$ (si $\alpha + \beta = 1$ estos números se llaman enteros de Fibonacci (1225) y de Lucas (1891)).

1. Demostrar por el criterio de D'Alembert que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1}$ converge y calcular el límite de $Q_n = L_n/F_n$ si $n \to +\infty$..
2. Se admite (identidad de Backstrom (1981)) solo para todo n y k de $\mathbb{Z}$ se tiene
$$\frac{1}{F_{4n-2k-1}+F_{2k+1}} + \frac{1}{F_{4n+2k+1}+F_{2k+1}} = \frac{1}{2L_{2k+1}}\left(Q_{2n+2k+1} - Q_{2n-2k-1}\right).$$
haciendo $k=0$ en esta identidad, calcular la suma parcial de orden $2n$ de la serie inicial, es decir $s_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{F_{2j+1}+1}$ mostrando por inducción sobre n que $s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_1)$. Deducir la suma de la serie en términos de α y β. Dar una expresión simple para el término general de la serie y de su suma si $\alpha = \exp t$ y $\beta = -\exp(-t)$ si t es real.
3. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_3}$ converge y calcular su suma.

[001947]

Ejercicio 1872

Indicar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n$$
converge, y calcular su suma. Deducir la escritura en base 10 de números $1/9$ y $1/11$ y más generalmente sobre la base k, del número $1/(k-1)$ y del número $1/(k+1)$. [002656]

Ejercicio 1873

Comparando con las integrales de Wallis
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt,$$
Determinar la naturaleza y calcular la suma de la serie
$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n 2^{-2n} C_{2n}^n.$$

[002726]

Ejercicio 1874 Estudio de convergencia

Estudiar la convergencia de las series de término general :

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$.
2. $\mathrm{ch}^{\alpha} n - \mathrm{sh}^{\alpha} n$.
3. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$.
4. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
5. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
6. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
7. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. $\frac{(-1)^n}{\ln n}$.
9. $\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$.
10. $\frac{2.4.6\dots(2n)}{n^n}$.
11. $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
12. $\frac{1!-2!+\cdots\pm n!}{(n+1)!}$.
13. $\frac{(-1)^n}{\ln n + \mathrm{sen}(2n\pi/3)}$.
14. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
15. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
16. $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.
17. $\frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$.
18. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Solución ▼ [004413]

Ejercicio 1875 Central PC 1999

Sea la sucesión de término general : $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$, donde P es un polinomio. ¿Con qué condición sobre P la serie $\sum u_n$ converge ?

Solución ▼ [004414]

Ejercicio 1876 Ensi PC 1999

¿Cuál es la naturaleza de la serie de término general $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

Solución ▼ [004415]

Ejercicio 1877 Mines MP 2000

Sea $\alpha > 0$. Estudiar la serie $\sum u_n$, con $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Solución ▼ [004416]

Ejercicio 1878 Mines MP 2003

Si $\alpha > 0$, dar la naturaleza de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^\alpha}$, $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ y $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$.

Solución ▼ [004417]

Ejercicio 1879 Ensi PC 1999

Sea (u_n) una sucesión real tal que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \to a$ y $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \to b$, cuando $n \to \infty$. Estudiar la convergencia de $\sum u_n$.

Solución ▼ [004418]

Ejercicio 1880 Encuadramiento

Sean $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ tres series reales tales que $\sum u_n$ y $\sum w_n$ convergen, y $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, para todo n. Demostrar que $\sum v_n$ converge. [004419]

Ejercicio 1881 Cálculo aproximado

Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\,\mathrm{sen}(0.4/n)\right)^n$ converge. Calcular en la calculadora un error aproximado a 10^{-8} de su suma.

Solución ▼ [004420]

Ejercicio 1882 Ensi MP 2002

Se supone que la serie con términos positivos de término general u_n es divergente y se escribe $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una aplicación decreciente continua. Comparar los enunciados :

1. f es integrable
2. La serie de término general $u_n f(S_n)$ converge.

Solución ▼ [004421]

Ejercicio 1883 Central P' 1996

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ converge. Calcular un valor aproximado con error de 10^{-4} de su suma.

Solución ▼ [004422]

Ejercicio 1884 $C_{2n}^n / n4^n$

Una al menos de las dos series : $\sum \frac{C_{2n}^n}{n4^n}$ y $\sum \frac{n4^n}{C_{2n}^n}$ diverge. Decir por qué y decir cuál. [004423]

Ejercicio 1885 $1/(1+n^2 u_n)$, Mines-Ponts MP 2005

Sea (u_n) una sucesión real positiva y $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. Demostrar que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.Estudiar el caso cuando $\sum u_n$ diverge.

Solución ▼ [004424]

Ejercicio 1886 $a_n/(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$

Sea (a_n) una sucesión real positiva. Se establece $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.

1. Demostrar que la serie $\sum u_n$ converge.
2. Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, cuando $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solución ▼ [004425]

Ejercicio 1887 $1/a^{\text{número de dígitos de } n}$

Para $n \in \mathbb{N}^*$ se denota p_n el número de dígitos decimales de n (sin ceros innecesarios). Sea $a > 0$. Estudiar la convergencia y determinar la eventual suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}}$.

Solución ▼ [004426]

Ejercicio 1888 Cauchy-Schwarz

Sean (u_n), (v_n) dos sucesiones reales tales que $\sum u_n^2$ y $\sum v_n^2$ convergente.

1. Demostrar que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Demostrar que $\sum (u_n+v_n)^2$ converge y : $\sqrt{\sum (u_n+v_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

[004427]

Ejercicio 1889 $(-1)^n/(n^{3/4}+\cos n)$

Sea $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos n}$.

1. ¿La serie $\sum u_n$ es absolutamente convergente ?
2. Escribiendo $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + v_n$, estudiar de convergencia de $\sum u_n$.

Solución ▼ [004428]

Ejercicio 1890 Resto de una serie alternada

Se establece $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Estudiar la convergencia de la serie $\sum u_n$.

Solución ▼ [004429]

Ejercicio 1891 Cálculo de sumas

Calcular las sumas de las siguientes series :

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.
8. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.
9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.
10. $\sum_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

Solución ▼ [004430]

Ejercicio 1892

Estudiar la convergencia y suma de la serie de término general $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Solución ▼ [004431]

Ejercicio 1893 Chimie P 90

1. Resolver las ecuaciones diferenciales : $y''+2y'+2y=0$, $y''+4y'+4y=2e^{-x}\cos x$.
2. Sea f la solución común. Se define la serie de término general $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx$. Demostrar que $\sum u_n$ converge y calcular su suma.

Solución ▼ [004432]

Ejercicio 1894 $1/n^2(n+1)^2$

Se admite que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calcular $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Solución ▼ [004433]

Ejercicio 1895 $1/(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

Se admite que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$. Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$ es convergente y calcular su suma.

Solución ▼ [004434]

Ejercicio 1896 $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$

¿Para qué valores de $a,b \in \mathbb{R}$ la serie de término general $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ es convergente ? Calcular entonces la suma de la serie.

Solución ▼ [004435]

Ejercicio 1897 $\arctan(1/(k^2+k+1))$

Demostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \frac{\pi}{2}$. (Se puede calcular $\tan s_n$)

Solución ▼ [004436]

Ejercicio 1898 $\arctan(n+a) - \arctan n$

Sea $a \in \mathbb{R}$.

1. Demostrar que la serie de término general $\arctan(n+a) - \arctan n$ es convergente.
2. Sea $S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (\arctan(k+a) - \arctan k)$. Encontrar $\lim_{a\to+\infty} S(a)$.

Solución ▼ [004437]

Ejercicio 1899 Pila en voladizo

¿Se pueden apilar 100 monedas de 1F de forma que la última moneda quede completamente en voladizo ? (es decir, su proyección en un plano horizontal no coincide con la proyección de la primera pieza)

Solución ▼ [004438]

Ejercicio 1900 Búsqueda de equivalentes

Por comparación a una integral, dar un equivalente de :

1. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Solución ▼ [004439]

Ejercicio 1901 $\ln^2(k)$

En comparación con una integral, dar un equivalente de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. ¿La serie de término general $\frac{1}{u_n}$ es convergente ?

Solución ▼ [004440]

Ejercicio 1902 $k^{-2/3}$

Encontrar la parte entera de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Solución ▼ [004441]

Ejercicio 1903 $(-1)^k\sqrt{k}$

Sea $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\sqrt{k}$. Dar un equivalente de u_n, cuando $n \to \infty$. (Agrupar los términos de dos en dos y luego comparar con una integral)

Solución ▼ [004442]

Ejercicio 1904 Constante de Euler

Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ decreciente. Se define $u_n=f(n)$ y $s_n=u_0+\cdots+u_n$. Demostrar que la sucesión de términos generales $s_n-\int_0^{n+1}f(t)\,dt$ es convergente. Dar una interpretación gráfica de este hecho.

Aplicación : Sea $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$. Justificar la existencia de γ y demostrar que $\frac{1}{2}\leqslant\gamma\leqslant 1$.

[004443]

Ejercicio 1905 Constante de Euler (Central MP 2003)

Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}-\ln n$ y $T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}-\ln n$. ¿Las sucesiones (S_n) y (T_n) son adyacentes ?

Solución ▼ [004444]

Ejercicio 1906 Constante de Euler, Mines-Ponts MP 2005

Sea $u_{n,k}$ el resto de la división de n por k. ¿Cuál es el límite de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{n,k}}{k}$?

Solución ▼ [004445]

Ejercicio 1907 Mines MP 2003

Sea la sucesión de término general $u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}$.

1. Dar un equivalente de u_n en $+\infty$.
2. Demostrar que la sucesión de términos generales : $v_n=u_n-\frac{\ln^2 n}{2}$ es convergente.
3. Sea $\ell=\lim_{n\to\infty}v_n$. Dar un equivalente de $v_n-\ell$.

Solución ▼ [004446]

Ejercicio 1908 Central MP 2001

Dar un equivalente simple de $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2-k^2}$.

Solución ▼ [004447]

Ejercicio 1909 $1/n\ln^2(n)$

1. Demostrar la convergencia de la serie de término general $u_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$.
2. Se denota $S_n=\sum_{k=2}^{n}u_k$ y $S=\sum_{k=2}^{\infty}u_k$. Demostrar que $\frac{1}{\ln(n+1)}\leqslant S-S_n\leqslant\frac{1}{\ln n}$, para $n\geqslant 2$.
3. Demostrar que si S_n es un valor aproximado de S con un error de 10^{-3}, entonces $n>10^{434}$.
4. Se supone que se tiene una máquina que calcular un millón de términos de la serie por segundo con 12 cifras significantes. ¿Se puede obtener un valor aproximado de S con un error de 10^{-3} ? (Observación : 1 año $\approx$ 32 millones de segundos)
5. Dar un valor aproximado de S con un error de 10^{-3}.

Solución ▼ [004448]

Ejercicio 1910 $(x-1)\zeta(x)\to 1$

Para $x > 1$ se denota $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$. Comparando $\zeta(x)$ a una integral, encontrar $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Solución ▼ [004449]

Ejercicio 1911 $u_n/(1+u_n)$

Sea $\sum u_n$ una serie con términos positivos y $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Demostrar que $\sum u_n$ y $\sum v_n$ tienen la misma naturaleza.

Solución ▼ [004450]

Ejercicio 1912 Serie de restos

1. Sea (u_n) una sucesión real tal que $\sum |u_n|$ y $\sum n|u_n|$ convergente. Sea $v_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$.
   (a) Demostrar que $nv_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.
   (b) Demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$.
2. Aplicación : Calcular cuando es posible : $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kr^k$.

Solución ▼ [004451]

Ejercicio 1913 X MP* 2001

Sea (u_n) una sucesión real positiva, $U_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$ y $\alpha > 0$ un real dado. Se supone $\frac{U_n}{nu_n} \to \alpha$, cuando $n \to \infty$. Estudiar la sucesión de término general $\frac{1}{n^2 u_n} \sum\limits_{k=0}^{n} ku_k$.

Solución ▼ [004452]

Ejercicio 1914 $\sum nu_n$ converge

Se considera una sucesión $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tal que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,u_n$ converge. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Solución ▼ [004453]

Ejercicio 1915 (u_n) decrece

Sea $(u_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión real positiva decreciente tal que $\sum u_n$ converge.

1. Demostrar que $nu_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. $\left(\text{Considerar } \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$.
2. Demostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge y tiene la misma suma que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.
3. Aplicación : Calcular para $0 \leqslant r < 1$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kr^k$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

Solución ▼ [004454]

Ejercicio 1916 u_n/S_n

Sea (u_n) una sucesión con términos estrictamente positivos que convergen a 0. Sea $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si la serie $\sum u_n$ converge, ¿qué pasa con la serie $\sum \frac{u_n}{S_n}$?
2. Si la serie $\sum u_n$ diverge, demostrar que la serie $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge también. Se puede considerar $p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{u_k}{S_k}\right)$.

Solución ▼ [004455]

Ejercicio 1917 Polytechnique MP* 2000

Se da una sucesión de números reales estrictamente positivos (a_n), decreciente y de límite nulo. Demostrar que la serie de término general $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$ diverge.

Solución ▼ [004456]

Ejercicio 1918 $(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1})/n$

Sea $\sum u_n$ una serie con términos positivos. Se establece $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}}{n}$. Demostrar que $\sum v_n$ tiene la misma naturaleza que $\sum u_n$.

Solución ▼ [004457]

Ejercicio 1919 $\sum k u_k / n(n+1)$

Sea $(u_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión positiva. Se establece $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$. Demostrar que la serie $\sum u_n$ y $\sum v_n$ tienen la misma naturaleza y eventualmente la misma suma.

Solución ▼ [004458]

Ejercicio 1920 $\sum k u_k / n^2$

Sea $\sum u_n$ una serie con términos positivos convergente. Estudiar la convergencia de la serie de término general $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Solución ▼ [004459]

Ejercicio 1921 Principio de acumulación

Sea (u_n) una sucesión real positiva decreciente. Sea $v_n = 2^n u_{2^n}$. Demostrar que las series $\sum u_n$ y $\sum v_n$ tienen la misma naturaleza.
Aplicaciones : Reencontrar la convergencia de la serie de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Estudiar la convergencia de series de Bertrand : $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\alpha}$.

Solución ▼ [004460]

Ejercicio 1922 $u_{n+1} = 1/ne^{u_n}$. Ensi P 90

Sea (u_n) definida por : $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}$. ¿Cuál es la naturaleza de la serie $\sum u_n$?

Solución ▼ [004461]

Ejercicio 1923 $x_{n+1} = x_n + x_n^2$

Sea (x_n) una sucesión definida por : $x_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

1. Demostrar que $x_n \to +\infty$, cuando $n \to \infty$.

2. Sea $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Demostrar que la sucesión (u_n) es convergente. (Estudiar la serie $\sum u_{n+1} - u_n$).
3. Deducir que existe $\alpha > 0$ tal que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

[004462]

Ejercicio 1924 $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

Se considera la sucesión (u_n) definida por : $0 < u_0 < 1$ y $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Demostrar que la sucesión (u_n) converge. ¿Cuál es su límite ?
2. Demostrar que la serie de término general u_n^2 converge.
3. Demostrar que la serie de término general $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ y u_n divergente.
4. Demostrar que $u_n < \frac{1}{n+1}$ y que la sucesión (nu_n) es creciente. Sea ℓ su límite.
5. Sea $u_n = \frac{\ell - v_n}{n}$. Demostrar que la serie de término general $v_{n+1} - v_n$ converge.
6. Deducir que u_n es equivalente a $\frac{1}{n}$.

[004463]

Ejercicio 1925 $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b)$

Sea (u_n) una sucesión definida por el valor de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ y la relación : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, donde a, b son dos constantes reales $(-a, -b \notin \mathbb{N})$.

1. Demostrar que u_n es de signo constante a partir de cierto rango.
2. Se define $v_n = (n+b-1)u_n$. Estudiar la convergencia de la sucesión (v_n) (se introduce la serie de término general $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$).
3. Deducir que la serie $\sum u_n$ converge si y solo si $a - b + 1 < 0$ y calcular su suma de acuerdo con a, b, u_0.

Solución ▼ [004464]

Ejercicio 1926

Se dan u_1 y a dos reales estrictamente positivos y se define por inducción la sucesión (u_n) por $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$. Estudiar el límite de la sucesión (u_n), y, cuando $a \leqslant 1$, dar un equivalente.

Solución ▼ [004465]

Ejercicio 1927 $1/k^\alpha(n-k)^\alpha$

Sea $\alpha > 0$. Se establece $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. Estudiar la convergencia de $\sum u_n$.

Solución ▼ [004466]

Ejercicio 1928 Producto de Cauchy de tres series

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ tres series absolutamente convergentes de sumas A, B, C. Sea $u_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$. Demostrar que $\sum u_n = ABC$.

[004467]

Ejercicio 1929 Producto de series geométricas

Sean $a \in [0,1[$. Escribir $\frac{1}{(1-a)^2}$ como producto de dos series. Deducir la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k$. Calcular por el mismo método $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$.

Solución ▼ [004468]

Ejercicio 1930 Producto de series geométricas

Para $n \in \mathbb{N}$ se denota T_n el número de maneras de descomponer n francos con monedas de 1, 2, 5 y 10 francos ($T_0 = 1$). Demostrar que :

$$\forall x \in [0,1[, \ \sum_{k=0}^{\infty} T_k x^k = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}.$$

[004469]

Ejercicio 1931 $\sum u_k/2^{n-k}$

Sea $\sum u_n$ una serie convergente. Se establece $v_n = \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{u_0}{2^n}$.

1. Demostrar que $v_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.
2. Demostrar que $\sum v_n$ converge y dar su valor.

Solución ▼ [004470]

Ejercicio 1932 $\sum a_n/n^p = 0$

Sea (a_n) una sucesión acotada tal que para todo entero $p \geqslant 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} = 0$. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_n = 0$.

Solución ▼ [004471]

Ejercicio 1933 $\sum x_{kn} = 0$

Sea $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ una serie absolutamente convergente tal que para todo entero $k \geqslant 1$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn} = 0$. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n = 0$.

Solución ▼ [004472]

Ejercicio 1934 Césaro

1. Sean $k, p \in \mathbb{N}$, con $k \leqslant p$. Demostrar que $\sum_{n=k}^{p} \frac{C_n^k - C_n^{k+1}}{2^n} = \frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}$.
2. Sea (u_n) una serie convergente. Se establece $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p$. Demostrar que la serie (v_n) es convergente.

Solución ▼ [004473]

Ejercicio 1935 $nu_n \to 0$

Sea (u_n) una serie convergente con términos positivos decrecientes.

1. Demostrar que $nu_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

2. Demostrar que $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \frac{1}{u_k} = o(n^2)$.

Solución ▼ [004474]

Ejercicio 1936 u_n / R_n^p

Sea (a_n) una serie positiva convergente, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ y $p \in]0, 1[$.

1. Demostrar que existe $C_p \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leqslant C_p A^{1-p}$.
2. Encontrar la mejor constante C_p.

Solución ▼ [004475]

Ejercicio 1937 $u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$

Sea (a_n) una sucesión real positiva y (u_n) la sucesión definida por la relación de recurrencia : $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$, con $u_0 > 0$. Demostrar que la sucesión (u_n) converge si y solo si la serie $\sum a_n$ converge.

Solución ▼ [004476]

Ejercicio 1938 Raabe-Duhamel

Sea (u_n) una sucesión real positiva tal que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Demostrar que existe $A > 0$ tal que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$. [004477]

Ejercicio 1939 Stirling++

Demostrar que $n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. [004478]

Ejercicio 1940 Desarrollo factorial

Sea $\mathscr{S}$ el conjunto de sucesiones crecientes de números enteros (q_i) tales que $q_0 \geqslant 2$.

1. Si $s = (q_i) \in \mathscr{S}$, demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \cdots q_k}$ converge. Se denota $\Phi(s)$ su suma.
2. Demostrar que la aplicación $\Phi : \mathscr{S} \to]0, 1]$ es biyectiva.
3. Sea $s = (q_i) \in \mathscr{S}$. Demostrar que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ si y solo si s es estacionario.

[004479]

Ejercicio 1941 Desarrollo asintótico

1. Demostrar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + o(1)$.
2. Demostrar : $\frac{\ln 2}{2} - \int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant C \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} - \int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,dt$.
3. Demostrar : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2(n) + C + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Ejercicio 1942

Sea (u_n) una sucesión de complejos tal que $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n} \to \ell \in \mathbb{C}$, cuando $n \to \infty$. Demostrar que $\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{u_1}{1}+\cdots+\frac{u_n}{n}\right) \to \ell$, cuando $n \to \infty$.

Solución ▼ [004481]

Ejercicio 1943

Sea (u_n) una sucesión de complejos que converge en el sentido de Césaro a cero. Estudiar la sucesión de término general $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{n+k+1}$.

Solución ▼ [004482]

Ejercicio 1944 Central MP 2000

Sean dos sucesiones de términos generales u_n y v_n definidas dando u_1 y v_1, ambos reales, y las relaciones :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{v_n}{n(n+1)}, \qquad v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n(n+1)}.$$

Demostrar que estas sucesiones están definidas y acotadas.

Solución ▼ [004483]

Ejercicio 1945 Productos infinitos, Polytechnique 2000

Se considera una sucesión (a_n) de reales y se define $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$ y $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$.

1. Se supone que para todo n, $a_n \geqslant 0$.
   (a) Demostrar que, para todo N, $1+S_N \leqslant P_N \leqslant e^{S_N}$.
   (b) Comparar las respectivas convergencias de las sucesiones (S_N) y (P_N).
2. Se supone ahora que para todo n, $-1 \leqslant a_n \leqslant 0$.
   (a) ¿Sigue siendo válida la relación anterior?
   (b) Discutir la convergencia de las sucesiones (S_N) y (P_N).
3. Se supone que (a_n) tiene signo cualquiera y que para todo n, $1+a_n > 0$. Se supone además que la serie $\sum a_n$ converge. Demostrar que (P_N) tiene un límite y que este límite es nulo si y solo si $\sum a_n^2$ diverge.
4. Complemento. Se supone que la sucesión (a_n) es compleja, que para todo n, $|a_n| < 1$ y que la serie $\sum |a_n|$ es convergente.
   (a) Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ existe, ya que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ existe $\Bigg($se puede probar y usar la desigualdad $\left|\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)-1\right| \leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)-1\Bigg)$.
   (b) Demostrar que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ no es nulo.

Solución ▼ [004484]

Ejercicio 1946 Polytechnique MP 2002

Encontrar las funciones $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuas verificando : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}$.

Solución ▼ [004485]

Ejercicio 1947 ENS Cachan MP* 2005

Sea $P(n)=\max\{p \text{ primero}, p\mid n\}$. Demostrar que $\sum\limits_{n}\frac{1}{nP(n)}$ converge.

Solución ▼ [004486]

Ejercicio 1948 IT

Este ejercicio está dedicado a las sumas de términos consecutivos de una sucesión aritmética o una sucesión geométrica.

1. (*) Calcular $\sum\limits_{i=3}^{n} i$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$, y $\sum\limits_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.
2. (*) Calcular el número $1,1111...=\lim\limits_{n\to+\infty}1,\underbrace{11...1}_{n}$ y el número $0,9999...=\lim\limits_{n\to+\infty}0,\underbrace{99...9}_{n}$.
3. (*) Calcular $\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
4. (*) Calcular $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.
5. (**) Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.
6. (**) Sean $n\in\mathbb{N}$ y $\theta\in\mathbb{R}$. Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ y $\sum\limits_{k=0}^{n}\operatorname{sen}(k\theta)$.
7. (***) Para $x\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}^*$, se establece $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Determinar $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.
8. (**) Se define $u_0=1$ y, para $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n-3$.
   (a) Calcular la sucesión $(u_n-3)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

Solución ▼ [005142]

Ejercicio 1949 ***I Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $n\in\mathbb{N}^*$ y $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$, $2n$ reales. Demostrar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot|b_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

(Indicación. Considerar el polinomio $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_kx)^2$, desarrollar, luego ordenar de acuerdo con potencias decrecientes, luego usar, en el caso general, conocimiento de segundo grado). Encontrar entonces el resultado del ejercicio 1827.

Solución ▼ [005150]

Ejercicio 1950 **

Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{k}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Solución ▼ [005458]

Ejercicio 1951

Naturaleza de la serie de término general

1) (*) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
2) (*) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
3) (**) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
4) (**) $\frac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$
5) (**) $\arccos \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}$
6) (*) $\frac{n^2}{(n-1)!}$
7) $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$
8) (**) $\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{n^2+1}{n}\right)$
9) (*) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$
10) (**) $n^{-\sqrt{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$
11) (**) $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Solución ▼ [005688]

Ejercicio 1952

Naturaleza de la serie de término general

1) (***) $\sqrt[4]{n^4+2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$, donde P es un polinomio.

2) (**) $\frac{1}{n^\alpha}S(n)$, donde $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.

3) (**) u_n, donde $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.

4) (****) $u_n = \frac{1}{p_n}$, donde p_n es el n-ésimo número primo.

(Indicación : considerar $\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \sum_{n=1}^{N} \ln(1+p_n+p_n^2+\cdots)$).

5) (***) $u_n = \frac{1}{n(c(n))^\alpha}$, donde $c(n)$ es el número de dígitos de n en base 10.

6) (*) $\frac{\left(\prod_{k=2}^{n}\ln k\right)^a}{(n!)^b}$ $a>0$ y $b>0$.

7) (**) $\arctan\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a\right) - \arctan\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^a\right)$.

8) (**) $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$.

9) (***) $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^\alpha}\right)\right) - 1$.

Solución ▼ [005689]

Ejercicio 1953

Naturaleza de la serie de término general

1) (***) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ 2) (**) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ 3) (**) $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

4) (***) $\frac{e^{en\alpha}}{n}$, $\frac{\cos(n\alpha)}{n}$ y $\frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{n}$ 5) (**) $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

6) (**) $(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$, donde P y Q son dos polinomios no nulos

7) (****) $(\operatorname{sen}(n!\pi e))^p$ p entero natural no nulo.

Solución ▼ [005690]

Ejercicio 1954

Calcular las sumas de las siguientes series luego de comprobar su convergencia.

1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$ 2) (**) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ 3) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$

4) (*) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 5) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 6) (***) $\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{a}{2^n}}{2^n}$.

Solución ▼ [005691]

Ejercicio 1955 *** I

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales estrictamente positivos tal que la serie con término general u_n converge. Demostrar que $u_n \sim \left(\frac{1}{n}\right)$, cuando $n\to\infty$. Encontrar un ejemplo de una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales estrictamente positivos tal que la serie de término general u_n converge, pero tal que la sucesión de término general nu_n no tiende a 0.

Solución ▼ [005692]

Ejercicio 1956 ***

Sea σ una inyección de $\mathbb{N}^*$ en $\mathbb{N}^*$. Demostrar que la serie de término general $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Solución ▼ [005693]

Ejercicio 1957 **

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Demostrar que la serie de término general u_n, $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ y $\int_0^{u_n}\frac{dx}{1+x^e}$ son de la misma naturaleza.

Solución ▼ [005694]

Ejercicio 1958 ***

Determinar el desarrollo limitado de orden 4, cuando n tiende al infinito de $\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\times(n+1)!$.

Solución ▼ [005695]

Ejercicio 1959 ***

Estudiar la naturaleza de la serie de término general $u_n=\operatorname{sen}\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Solución ▼ [005696]

Ejercicio 1960 **

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Estudiar la naturaleza de la serie de término general $u_n = \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n \geqslant 1$.

Solución ▼ [005700]

Ejercicio 1961 ****

Se sabe que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$. A partir de la serie anterior, se construye una nueva serie tomando p términos positivos, q términos negativos, p términos positivos... (Por ejemplo, para $p = 3$ y $q = 2$, se interesa en $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$). Convergencia y suma de esta serie.

Solución ▼ [005701]

Ejercicio 1962 ***

Estudiar la naturaleza de la serie de término general $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$.

Solución ▼ [005702]

Ejercicio 1963

Analizar la convergencia y eventual suma de la serie de término general

1) (**) $u_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$ 2) (***) $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$ dado.

Solución ▼ [005703]

Ejercicio 1964 *

Estudiar la naturaleza de la serie de término general $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Solución ▼ [005706]

Ejercicio 1965 *** I

Desarrollo limitado de orden 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, cuando n tiende a infinito.

Solución ▼ [005707]

Ejercicio 1966

Dar la parte principal cuando n tiende a $+\infty$ de

1) (***) $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p}$ **2) (**)** $\sum_{p=1}^{n} p^p$.

Solución ▼ [005708]

Ejercicio 1967 ***

Sea $p \in \mathbb{N}^*$, calcular $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*,\, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*,\, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$. ¿Qué se puede deducir ?

Solución ▼ [005709]

Ejercicio 1968 $**$

Calcular $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solución ▼ [005710]

Ejercicio 1969 $****$

Sean $(u_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión real. Para $n \geqslant 1$, se establece $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$. Demostrar que si la serie de término general (u_n^2) converge, entonces la serie de término general (v_n^2) converge y que $\sum_{n=1}^{+\infty}(v_n^2) \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n^2)$. (Indicación : Mayorar $v_n^2 - 2u_nv_n$).

Solución ▼ [005711]

Ejercicio 1970 $***$

Convergencia y suma de series de término general $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$.

Solución ▼ [005712]

67 123.01 Continuidad : teoría

Ejercicio 1971

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, f y g dos funciones definidas en I.

1. Sea $a \in I$. Dar una razón por la cual :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. Se supone que f y g son continuas en I. Usando la implicación demostrada arriba, la relación $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, y las propiedades de las funciones continuas, demostrar que la función $\sup(f,g)$ es continua en I.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000639]

Ejercicio 1972

Sea f una función de $[a,b]$ en $[a,b]$ tal que para todo x y x' $(x \neq x')$ de $[a,b]$ se tiene : $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. Demostrar que f es continua en $[a,b]$.
2. Demostrar que la ecuación $f(x) = x$ admite una y solo una solución en $[a,b]$. (Se puede introducir la función : $x \mapsto g(x) = f(x)-x$).

[000640]

Ejercicio 1973

1. Sea f una función continua en $]a,b[$ tal que $f(]a,b[) \subset [a,b]$. Demostrar, considerando $\phi(x) = f(x) - x$, que existe c en $[a,b]$ tal que $f(c) = c$.
2. Sea f una función continua en $[0,1]$ tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe c en $[0,\frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$.

3. Un móvil recorre, a velocidad continua, una distancia d en una unidad de tiempo. Demostrar que existe un intervalo de una semi-unidad de tiempo durante el cual recorre una distancia $\frac{d}{2}$.

[000641]

Ejercicio 1974

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)=f(b)$. Demostrar que la función $g(t)=f(t+\frac{b-a}{2})-f(t)$ se anula en al menos un punto de $[a,\frac{a+b}{2}]$.
Aplicación : Una persona recorre 4 km en 1 hora. Demostrar que existe un intervalo de 30 mn durante el cual recorre exactamente 2 km.

Solución ▼ Vidéo ■ [000642]

Ejercicio 1975

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ y $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. Demostrar que f se anula. Aplicar esto a polinomios de grado impar.

Solución ▼ [000643]

Ejercicio 1976

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continua tal que $f(0)=1$, $\lim\limits_{-\infty} f=0$ y $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

1. Demostrar que existe $a>0$ tal que si $|x|>a$, entonces $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.
2. Demostrar que f es acotada y tiene un máximo.

[000644]

Ejercicio 1977

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f:I\to\mathbb{R}$ continua, tal que para cada $x\in I$, $f(x)^2=1$. Demostrar que $f=1$ o $f=-1$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000645]

Ejercicio 1978

Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continua admitiendo un límite finito en $+\infty$. Demostrar que f es acotada. ¿Alcanza sus cotas ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000646]

Ejercicio 1979

Sean f y g continua en $[0,1]$ tales que $\forall x\in[0,1]$, $f(x)<g(x)$. Demostrar que existe $m>0$ tal que $\forall x\in[0,1]$, $f(x)+m<g(x)$. [000647]

Ejercicio 1980

Sea f creciente en $[a,b]$ y tomando todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Demostrar que f es continua. [000648]

Ejercicio 1981

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en 0 tal que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$. Demostrar que f es constante. [000649]

Ejercicio 1982

Sea f periódica creciente. ¿Qué se puede decir de f ? [000650]

Ejercicio 1983

Dar un ejemplo de una función continua en $[0,1]$ no lipschitziana, luego una función continua en un solo punto, luego de función discontinua en los racionales y continua en los irracionales, en fin una función continua tal que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ o si $x = 0$, y $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. ¿Una función tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$ es continua en $\mathbb{R}$? Dar un ejemplo de una biyección de $[0,1]$ en $[0,1]$ discontinua en todos los puntos. [000651]

Ejercicio 1984

Sea f continua en $\mathbb{R}$ admitiendo 1 y $\sqrt{2}$ por periodos. ¿Qué se puede decir de f ? [000652]

Ejercicio 1985

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ creciente, demostrar que tiene un punto fijo.
Indicación : Estudiar

$$E = \left\{ x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x], f(t) > t \right\}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000653]

Ejercicio 1986

Sea $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ creciente tal que $x \to \frac{f(x)}{x}$ es decreciente ; demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^{+*}$. [000654]

Ejercicio 1987

Sea $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ una función que verifica :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f(x)\mathrm{e}^{f(x)} = x.$$

Dar las variaciones de f, luego comparar f y ln en un vecindario de $+\infty$. [000655]

Ejercicio 1988

Sea $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ creciente. Construir $g : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f \leqslant g$. [000656]

Ejercicio 1989

Dar un ejemplo de aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no constante tal que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

Se supone f continua en 0 y en 1, demostrar que f es constante. [000657]

Ejercicio 1990

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ continua. Demostrar que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists a_n\in[0,1],\ \ f(a_n)=a_n^n.$$

Se supone f estrictamente decreciente. Demostrar que a_n es único y estudiar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. [000658]

Ejercicio 1991

¿Existe una biyección continua de $[0,1[$ sobre $\mathbb{R}$? [000659]

Ejercicio 1992

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ continua tal que $f\circ f=f$. Se denota $E_f=\{x\in[0,1]|f(x)=x\}$. Demostrar que $E_f\neq\varnothing$, luego que es un intervalo de $\mathbb{R}$. Encontrar todas las funciones $f:[0,1]\to[0,1]$ continuas tales que $f\circ f=f$.

Solución ▼ [000660]

Ejercicio 1993

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua, evaluar :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

[000661]

Ejercicio 1994

¿Una función que verifica la propiedad del valor intermedio es necesariamente continua ?

Indicación ▼ Solución ▼ [000662]

Ejercicio 1995

Sea f uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$ tal que $\forall x\geqslant 0$, la sucesión $(f(xn))_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 cuando $n\to\infty$. Demostrar $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. [000663]

Ejercicio 1996

Sea $f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ admitiendo un límite finito en $+\infty$, demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$. [000664]

Ejercicio 1997

Sea f continua en $[a,b]$, demostrar :

$$\forall\varepsilon>0,\exists k\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in[a,b]^2,|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|+\varepsilon.$$

[000665]

Ejercicio 1998

Sea $(f,g)\in C([0,1],[0,1])^2$, tal que : $fg=gf$. Se quiere demostrar que $f-g$ se anula por dos métodos :

— Por contradicción, usar el hecho que $(f-g)([0,1])$ es un segmento que no contiene 0.

— por contradicción, examinando, si $f-g>0$ por ejemplo, $\min\{x\in[0,1]|f(x)=x\}$.

¿Se mantiene el resultado si reemplazamos $[0,1]$ par $\mathbb{R}$? [000666]

Ejercicio 1999

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua, tal que $f(0)=f(1)$. Demostrar que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists x_n\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\ f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)=f\left(x_n\right).$$

[000667]

Ejercicio 2000

Sea f continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, demostrar que : $\lim_{|x|\to\infty}|f(x)|=+\infty \Leftrightarrow$ la imagen inversa de toda parte acotada es acotada. [000668]

Ejercicio 2001

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Se quiere demostrar que

$$\sup_{a<x<b} f(x)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Demostrar que
$$\sup_{a<x<b} f(x)\leqslant\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
2. Sea $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Demostrar que $f(x_0)=\sup_{a<x<b} f(x)$ distinguiendo los tres casos : $x_0=a$, $x_0=b$, $x_0\in]a,b[$.
3. Sea $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=0$ si $x\in[0,1[$ y $g(x)=1$ si $x=1$. Demostrar que
$$\sup_{0<x<1} g(x)\neq\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
¿Qué suposición es esencial en la propiedad demostrada anteriormente ?

Indicación ▼ Solución ▼ [000669]

Ejercicio 2002 Función periódica

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $T>0$. Se supone que f es T-periódica, es decir : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)$.

1. Si f tiene un límite en $+\infty$, demostrar que f es constante.
2. Si f es continua, no constante, demostrar que f tiene un período más pequeño.
3. Si f es continua, demostrar que f está acotada y alcanza sus cotas.

[003845]

Ejercicio 2003 Función que tiene límites en infinito

Sea $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ una función continua con un límite finito en $+\infty$.

1. Demostrar que f es acotada.
2. Demostrar que f admite un máximo o mínimo absoluto, pero no necesariamente los dos.

3. Demostrar que f es uniformemente continua.

[003846]

Ejercicio 2004 Permutación de decimales

Para $x \in [0,1[$, se denota $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$ la expansión decimal adecuada de x.

1. Sea $f : [0,1[\to [0,1[$ definida por : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{10^k}$. Demostrar que f es continua a trozos.
2. Sea $g : [0,1[\to [0,1[$ definida por : $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_{2k}}{10^{2k-1}} + \frac{x_{2k-1}}{10^{2k}} \right)$. Determinar los puntos donde g es continua.

[003847]

Ejercicio 2005 $\max(f,g)$

Sean $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Se establece para $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$. Demostrar que h es continua. [003849]

Ejercicio 2006 Extensión de desigualdades

1. Sean $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que : $\forall x,y \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Demostrar que $f \leqslant g$.
   (b) Demostrar que no necesariamente se tiene : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x) < g(x)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua cuya restricción a $\mathbb{Q}$ es estrictamente creciente. Demostrar que f es estrictamente creciente.

[003850]

Ejercicio 2007 Estudio de un sup

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Sea $g(x) = \sup\big(f([x,x+1])\big)$. Demostrar que g es continua. La misma pregunta asumiendo que f es solo continua. [003851]

Ejercicio 2008 Weierstrass

Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Se establece $h(t) = \sup\{f(x) + tg(x)$ tal que $x \in [a,b]\}$. Demostrar que h es continua. [003852]

Ejercicio 2009 Weierstrass

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\sup_{[a,b]} f = \sup_{]a,b[} f$. [003853]

Ejercicio 2010 Weierstrass

Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Se supone que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) > g(x) > 0$. Demostrar que existe $k > 1$ tal que $f > kg$. [003854]

Ejercicio 2011 TAI al infinito

Sea $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua que tiene un límite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Demostrar que f toma todo valor comprendido entre $f(0)$ y ℓ (ℓ excluido). [003855]

Ejercicio 2012 $f(x) = g(x)$

1. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.
2. Sean $f,g : [0,1] \to [0,1]$ continuas tales que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = g(x)$ (se pueden considerar los puntos fijos de f).

Solución ▼ [003856]

Ejercicio 2013 f continua decreciente $\Rightarrow$ punto fijo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua decreciente. Demostrar que existe un único real x tal que $f(x) = x$. [003857]

Ejercicio 2014 Mines MP 2002

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que existe a verificando $f \circ f(a) = a$. ¿f tiene puntos fijos ? Generalizar.

Solución ▼ [003858]

Ejercicio 2015 Cuerdas de longitud $1/n$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(1)$.

1. Demostrar que existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2. Para $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, demostrar que existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
3. Encontrar una función f tal que : $\forall x \in \left[0, \frac{3}{5}\right]$, $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$.
4. Demostrar que existe $a > 0$ tal que : $\forall b \in]0,a]$, $\exists\ x \in [0, 1-b]$ tal que $f(x) = f(x+b)$.

[003859]

Ejercicio 2016

Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Se supone que : $\forall x \in [a,b]$, $\exists\ y \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(y)$. Demostrar que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(x)$. [003860]

Ejercicio 2017 TAI + inyectiva $\Rightarrow$ continua

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f verifica la propiedad de los valores intermedios si :

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b, \forall y \text{ comprendido entre } f(a) \text{ y } f(b),\ \exists x \in [a,b] \text{ tal que } f(x) = y.$$

1. Demostrar que si f verifica la propiedad de valores intermedios y es inyectiva, entonces es continua.
2. Encontrar una función discontinua que tenga la propiedad de los valores intermediarios.

Solución ▼ [003861]

Ejercicio 2018 f uc $\Rightarrow$ f(intervalo acotado) = intervalo acotado

Sea I un intervalo acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que $f(I)$ es un intervalo acotado.
[003862]

Ejercicio 2019 f uc $\Rightarrow |f(x)| \leqslant a+b|x|$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Demostrar que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tales que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant a+b|x|$. (tomar $\varepsilon = 1$ y mayorar $|f(x) - f(0)|$) [003863]

Ejercicio 2020 Composición

Sean $f : D \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, acotada y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que $g \circ f$ es uniformemente continua. [003864]

Ejercicio 2021 $\operatorname{sen}(t^2)$

Demostrar que $t \mapsto \operatorname{sen}(t^2)$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. [003865]

Ejercicio 2022 f uc y $f(n) \to +\infty$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua tal que $f(n) \to +\infty$, cuando $n \to \infty$. Demostrar que $f(x) \to +\infty$, cuando $x \to \infty$. [003866]

Ejercicio 2023 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Sea $a = f(1)$.

1. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.
2. Se supone f continua. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
3. Se supone que f es acotada en un vecindario de 0. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

[003867]

Ejercicio 2024 $f(x^2) = f(x)$

Encontrar todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas tales que : $\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$. [003868]

Ejercicio 2025 $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$

Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$.
Solución ▼ [003869]

Ejercicio 2026 Polytechnique MP* 2000

Sea f continua en $[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$, y δ un real positivo. Se denota $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|$ tal que $|x - y| \leqslant \delta\}$. Demostrar que $\omega(\delta)$ tiende a 0, cuando δ tiende a 0, luego que ω es continua.
Solución ▼ [003870]

Ejercicio 2027 Ensae MP* 2003

Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continuas tales que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = g(x)$.
Solución ▼ [003871]

Ejercicio 2028 La función más grande de Lipschitz minorando f (Ens Lyon MP* 2003)

1. ¿Existe siempre φ lipschitziana tal que $\varphi \leqslant f$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua dada?
2. Sea $k > 0$. Encontrar un CNS en f, para que exista $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-lipschitziana minorando f.
3. Se supone que esta CNS se verifica para $k_0 > 0$. Demostrar que si $k \geqslant k_0$, entonces existe φ_k, k-lipschitziana minorando f y maximal para el orden usual de funciones.

Solución ▼ [003872]

Ejercicio 2029 Sucesión $(f(nx))$ ENS Cachan MP* 2004

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua tal que para todo $x > 0$ la sucesión $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. ¿Qué se puede decir de f?

Solución ▼ [003873]

Ejercicio 2030 ***I

Sea f una función real de una variable real definida y continua en un vecindario de $+\infty$. Se supone que la función $f(x+1) - f(x)$ admite en $\mathbb{R}$ un límite ℓ, cuando x tiende a $+\infty$. Estudiar la existencia y el valor eventual de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Solución ▼ [005382]

Ejercicio 2031 ***

Sea f una función definida en un vecindario de 0 tal que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. (Indicación. Considerar $g(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

Solución ▼ [005383]

Ejercicio 2032 **I

Sean f y g dos funciones continuas en $x_0 \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\min\{f,g\}$ y $\max\{f,g\}$ son continuas en x_0.

Solución ▼ [005384]

Ejercicio 2033 ***I Distancia de un punto a una parte

Sea A una parte no vacía de $\mathbb{R}$. Para $x \in \mathbb{R}$, se establece $f(x) = \inf\{|y-x|,\ y \in A\}$. Demostrar que f es continua en todos los puntos $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005385]

Ejercicio 2034 **T

Demostrar volviendo a la definición que $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$ es continua en todos los puntos $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Solución ▼ [005386]

Ejercicio 2035 **IT

Demostrar que la función característica de $\mathbb{Q}$ es discontinua en cada uno de sus puntos.

Solución ▼ [005387]

Ejercicio 2036 ****

Estudiar la existencia de un límite y la posible continuidad en cada uno de sus puntos de la función definida en $]0,+\infty[$ por $f(x)=0$ si x es irracional y $f(x)=\frac{1}{p+q}$ si x es racional igual a $\frac{p}{q}$, la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible.

Solución ▼ [005388]

Ejercicio 2037 **IT

Estudiar en cada punto de $\mathbb{R}$ la existencia de un límite justo, a la izquierda, la continuidad de la función f definida por $f(x)=xE(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ y 1 si $x=0$.

Solución ▼ [005389]

Ejercicio 2038 **

Encontrar f biyectiva de $[0,1]$ en $[0,1]$ y discontinua en cada uno de sus puntos.

Solución ▼ [005390]

Ejercicio 2039 ***

Sea f una función continua y periódica en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$, admitiendo un límite real cuando x tiende a $+\infty$. Demostrar que f es constante.

Solución ▼ [005391]

Ejercicio 2040 **I

Sea A una parte no vacía de $\mathbb{R}$. Para x real, se establece $f(x)=d(x,A)=\inf\{|y-x|,\ y\in A\}$. Demostrar que f es lipschitziana.

Solución ▼ [005392]

Ejercicio 2041 ***

Sea f creciente de $[a,b]$ en $[a,b]$. Demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución ▼ [005395]

Ejercicio 2042 ****

Sea f creciente en $[a,b]$ tal que $f([a,b])=[f(a),f(b)]$. Demostrar que f es continua en $[a,b]$.

Solución ▼ [005396]

Ejercicio 2043 ***IT

Sea f continua en $\mathbb{R}^+$, con valores en $\mathbb{R}$ admitiendo un límite real cuando x tiende a $+\infty$. Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+$.

Solución ▼ [005398]

Ejercicio 2044 ***

Sea f periódica y continua en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005401]

68 123.02 Continuidad : práctica

Ejercicio 2045

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$. Para todo $\varepsilon > 0$ determinar δ tal que, $(x \neq 1/3$ y $|x| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)+3| \leqslant \varepsilon$. ¿Qué se puede concluir ?

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000670]

Ejercicio 2046

Sea f la función real de valores reales definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

1. Trazar la gráfica de f.
2. ¿f es continua ?
3. Dar la fórmula que define f^{-1}.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000671]

Ejercicio 2047

Estudiar la continuidad de f, la función real de valores reales definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000672]

Ejercicio 2048

1. Sea la función real definida por $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si no. Demostrar que f no admite ningún límite en todo punto de $\mathbb{R}$.
2. Sea la función real definida por $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 1 - x$ si no. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ f es continua ?

[000673]

Ejercicio 2049

Se admite que para todo $x \in \mathbb{R}, |\operatorname{sen} x| \leqslant |x|$.

1. Demostrar que $x \mapsto \operatorname{sen} x$ es continua en 0, luego en todo $\mathbb{R}$.
2. Deducir que $x \mapsto \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$.

[000674]

Ejercicio 2050

Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones :

1. $f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, y $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, y $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\operatorname{sen}(\pi x)$. 4

[000675]

Ejercicio 2051

Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ es estrictamente creciente, ya que para todo $y \in]-1, 1[$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. [000676]

Ejercicio 2052

¿Son las siguientes funciones extensibles por continuidad en $\mathbb{R}$?

a) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$; b) $g(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; c) $h(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000677]

Ejercicio 2053

Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones :

1. $f(x) = E(x)\operatorname{sen}(x)$,
2. $g(x) = E(x)\operatorname{sen}(\pi x)$.

[000678]

Ejercicio 2054

Estudiar la continuidad de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

[000679]

Ejercicio 2055

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en 0 tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Demostrar que f es constante.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000680]

Ejercicio 2056

¿La función $\frac{1}{x}$ es Lipschitziana en $]0, +\infty[$?, ¿en $[1, +\infty[$? [000681]

Ejercicio 2057

Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0, 1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2, 1[$ y $f(1) = 1$.

1. Trazar la gráfica de f. Estudiar su continuidad.
2. Demostrar que f es una biyección de $[0, 1]$ sobre $[0, 1]$.
3. Demostrar que para todo $x \in [0, 1]$, se tiene $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1 - 2x)$.

[000682]

Ejercicio 2058

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$, sobre $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = [x - E(x)]^2$ y $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$.

[000683]

Ejercicio 2059

Estudiando la sucesión $u_0 \in \mathbb{R}$ y $u_{n+1} = \cos(u_n)$, determinar un valor aproximado con un error de 10^{-5}, de la única solución real de $\cos(x) = x$. [000684]

Ejercicio 2060

Sea f definida por $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$, donde E representa la parte entera. Dar el dominio de la definición de f, luego una relación entre $f(x+1)$ y $f(x)$. ¿f es monótona ? ¿f es $k-$lipschitziana en $[a, 1]$, $(a > 0)$? ¿Y en $[0, 1]$? Estudiar la continuidad de f sobre $[0, 1]$ usando la definición. Deducir de la continuidad en $\mathbb{R}$.
[000685]

Ejercicio 2061

Sea f una función continua de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ tal que $f(0) = 0$ y para todo par (x, y) de $[0, 1] \times [0, 1]$ se tiene $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

1. Sea x un elemento de $[0, 1]$, sea $x_0 = x$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Demostrar que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.
2. Deducir que $f(x) = x$, para todo $x \in [0, 1]$.
3. ¿El resultado es verdadero sin la hipótesis $f(0) = 0$?

[001212]

69 123.03 Límite de funciones

Ejercicio 2062

Escribir las definiciones de los siguientes límites : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$. (Se debe especificar en qué tipo de intervalo la función f debe ser definida.) [000606]

Ejercicio 2063

Sea f una función definida en un intervalo I conteniendo x_0 en su interior. Se supone que $\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0$. Demostrar que existe $t > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < t$, entonces $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$. [000607]

Ejercicio 2064

Demostrar que si una función f definida en $E \subset \mathbb{R}$ es continua en x_0, entonces la función $|f|$ es, también, continua en x_0. Demostrar que el recíproco es falso. [000608]

Ejercicio 2065

1. Demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Sean m,n enteros positivos. Estudiar $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \frac{1}{2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000609]

Ejercicio 2066

Sea f una función de variable real tal que $\frac{f(x)}{|x|} \to \infty$, cuando $x \to \infty$. Demostrar que para todo real α existe X_α tal que $f(x) - |\alpha x| \geqslant |x|$, si $|x| \geqslant X_\alpha$. Deducir que para todo α real $f(x) - \alpha x \to \infty$, cuando $x \to \infty$. [000610]

Ejercicio 2067

Sean f y g dos funciones definidas en $\mathbb{R}_+$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ y } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Demostrar que
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$
2. Demostrar que si $L > 0$,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

[000611]

Ejercicio 2068

1. Demostrar que toda función periódica y no constante no admite límite en $+\infty$.
2. Demostrar que toda función creciente y mayorada admite un límite finito en $+\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000612]

Ejercicio 2069

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Sean f y g dos funciones de variable real con valores reales definidos en $\dot{I} := I \setminus \{x_0\}$. Demostrar que si f tiene un límite por la derecha y un límite por la izquierda en x_0 y que además estos dos límites coinciden, entonces f admite un límite en x_0 cuyo valor es el valor común de los límites derecho e izquierdo. [000613]

Ejercicio 2070

Sean P y Q dos polinomios con coeficientes reales de grado respectivo d y d'. Estudiar según los valores de d y d', y eventualmente algunos de los coeficientes de P y Q,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x).$$

[000614]

Ejercicio 2071

Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ creciente tal que $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$. Demostrar que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. (Se pueden usar los ε, sumar desigualdades y usar la monotonía de f, para demostrar que es acotada en un segmento). ¿Cómo generalizar este resultado ? [000615]

Ejercicio 2072

Calcular cuando existen los siguientes límites

a) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2|x|}{x}$ c) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}$ e) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000616]

Ejercicio 2073

1. Demostrar que para todo $0<\varepsilon<1$ y para $x\in\mathbb{R}$, se tiene :
$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow|x^2+x-2|<\varepsilon.$$
2. Deducir :
$$\lim_{x\to1}x^2+x-1 \text{ y } \lim_{x\to1}(x^2+x-2)\cos x.$$

[000617]

Ejercicio 2074

1. Demostrar que para todo $a\in\mathbb{R}^{+*}$, y para todo par de números reales (x,y) perteneciendo a $]-\infty,-a]$ o en $[a,\infty[$, se tiene :
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\leqslant\frac{1}{a^2}|x-y|.$$
2. Deducir que para todo $x_0\in\mathbb{R}^*$ y para todo $\varepsilon>0$ existe $\alpha>0$ tal que :
$$|x-x_0|<\alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$
3. Deducir que la función $x\mapsto\frac{1}{x}$ es continua en todos los puntos $\mathbb{R}^*$.

[000618]

Ejercicio 2075

1. Para todo n entero natural y todo par de reales (x,y), establecer la fórmula :

$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Deducir de la pregunta anterior que para todo entero n todo real estrictamente positivo a y todo par de reales (x,y) tal que $|x| \leqslant a$ y $|y| \leqslant a$,

$$|x^n - y^n| \leqslant na^{n-1}|x-y|.$$

3. Deducir de lo anterior que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$

Concluir.

4. ¿En qué subconjunto D de $\mathbb{R}$, la función de la variable real f dada por

$$f(x) := \frac{1-x^n}{1-x}$$

está definida ? Calcular los límites de f en la frontera de D.

[000619]

Ejercicio 2076

1. Recordar que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un entero n tal que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \varepsilon, \qquad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \varepsilon.$$

2. Demostrar que para todo número real l, y para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tal que :

$$|\operatorname{sen}\frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3. Deducir que la función $x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene límite cuando x tiende a 0.
4. Demostrar que la función definida por $f(x) = x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es continua en $\mathbb{R}$.

[000620]

Ejercicio 2077

Determinar los límites siguientes :

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ b) $\lim_{x\to1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ c) $\lim_{x\to0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ f) $\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Ejercicio 2078

Se recuerdan los límites : $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calcular los siguientes límites :

a) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x}{x^2}$ e) $\lim_{x\to 0} x\frac{\tan x}{\cos^2 x - 1}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3(\frac{x}{2})}$.

[000622]

Ejercicio 2079

Determinar los límites siguientes, justificando los cálculos.

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x\to (-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$.

Solución ▼ [000623]

Ejercicio 2080

Sean a,b de reales positivos. $E(x)$ representa la parte entera de x. Demostrar que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

[000624]

Ejercicio 2081

Calcular los siguientes límites :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1};\qquad \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}\ (a>0,m,p\in\mathbb{N}^*);\qquad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ (x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*);$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right);\qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{4x+\pi};\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}.$$

[000625]

Ejercicio 2082

Usando la definición de un límite, demostrar que :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{2}{3}}(3x+2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3x+2}\right)=0;$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}=2.$

[000626]

Ejercicio 2083

Calcular los siguientes límites :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}xE(\tfrac{1}{x});$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xE(\tfrac{1}{x});$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}E(\tfrac{1}{x});$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}};$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$

[000627]

Ejercicio 2084

Calcular, cuando existen, los siguientes límites :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x(\cos 2x-\cos x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x},\qquad \lim_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},\quad(\alpha>0)$$

$$\lim_{x\to 0}xE\left(\frac{1}{x}\right),\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{1+x^\alpha\operatorname{sen}^2 x},\ \text{en función de } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000628]

Ejercicio 2085

Determinar los límites siguientes :

$$\frac{x}{2+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})} \text{ en } 0 \qquad \frac{x^3-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6} \text{ en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{x} \text{ en } 0 \qquad \frac{\tan x}{\sqrt{x^2+4}+x-2} \text{ en } 0$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \text{ en } 0 \qquad \frac{1-\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x-1} \text{ en } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})-1}{\sqrt{3}-2\cos(x+\frac{\pi}{6})} \text{ en } 0.$$

[000629]

Ejercicio 2086

Estudiar las asíntotas de $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$. [000630]

Ejercicio 2087

Demostrar que

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha}<\frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}}, \text{ donde } \alpha>0.$$

Inferir que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0, \quad \alpha>0.$$

[000631]

Ejercicio 2088

Calcular los siguientes límites :

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^7-1}{x^6-1}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1},\ n,m\in\mathbb{N}^*$

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^3)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x},\ a,b>0$ h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$

[000632]

Ejercicio 2089

Calcular :

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}}.$$

[000633]

Ejercicio 2090

Calcular :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^2}-\frac{1}{(\sinh x)^2}\right).$$

Solución ▼ [000634]

Ejercicio 2091

Calcular :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000635]

Ejercicio 2092

Encontrar :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

Solución ▼ [000636]

Ejercicio 2093

Encontrar para $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000637]

Ejercicio 2094

Encontrar para $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000638]

Ejercicio 2095 $f(x+1)-f(x)\to a$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que $f(x+1)-f(x)\to a\in\overline{\mathbb{R}}$, cuando $x\to+\infty$.

1. Demostrar que $\frac{f(n)}{n}\to a$, cuando $n\to\infty$.
2. Demostrar que $\frac{f(x)}{x}\to a$, cuando $x\to\infty$.

[003848]

Ejercicio 2096 **

Encontrar $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Solución ▼ [005101]

70 123.04 Estudio de funciones

Ejercicio 2097

Determinar los dominios de definición de las siguientes funciones

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}; \qquad g(x)=\sqrt{x^2-2x-5}; \qquad h(x)=\ln(4x+3).$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000686]

Ejercicio 2098

Demostrar que la ecuación $x^7-3x^2+4x-1=0$ admite al menos una solución en el intervalo $]-1,1[$. La misma pregunta para la ecuación $x^{29}+14x^{17}-7x^5+2=0$. [000687]

Ejercicio 2099

Sean $n\in\mathbb{N}^*$ y $d\in\mathbb{R}^+$. Demostrar usando el teorema de valores intermediarios que el polinomio $P(X)=X^n-d$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{R}$. [000688]

Ejercicio 2100

Estudiando las variaciones de la función f definida en $]0,+\infty[$ por $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, encontrar el elemento más grande del conjunto $f(\mathbb{N}^*)$.
Deducir que cualesquiera que sean m y n perteneciendo a $\mathbb{N}^*$, uno de los números $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ es inferior o igual a $\sqrt[3]{3}$. [000689]

Ejercicio 2101

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$. Demostrar que f es mayorada en $\mathbb{R}$, minorada en $\mathbb{R}$. Determinar $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Solución ▼ [000690]

Ejercicio 2102

1. Sea la función $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Demostrar que f admite un recíproco que se va a explicitar.
2. Encontrar un intervalo de $\mathbb{R}$ en el que la función $g(x)=\tan(x^3)$ admite una función inversa. (Especificar el dominio de definición de esta inversa y su imagen).

[000691]

Ejercicio 2103

Demostrar que las siguientes funciones no son polinomios :

$$x\to \mathrm{e}^x, \qquad x\to\ln x, \qquad x\to\sqrt{x^2+1}, \qquad x\to\cos x.$$

[000692]

Ejercicio 2104 f creciente y $f \circ f = \mathrm{Id}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente tal que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$. [003874]

Ejercicio 2105 f creciente y $x \mapsto f(x)/x$ es decreciente

Sea $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ creciente tal que $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ es decreciente. Demostrar que f es continua. [003875]

Ejercicio 2106 Estudio de $x(2+\mathrm{sen}(1/x))$

Se establece :

$$\begin{cases} f(x) = |x|\left(2+\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es continua, minimal en 0, pero para todo $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ no es monótona. [003876]

Ejercicio 2107 Cota superior de funciones crecientes

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se denota $\mathscr{E} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crecientes tal que $g \leqslant f\}$, y para $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = \sup\{g(x)$ tal que $g \in \mathscr{E}\}$.

1. Demostrar que $\tilde{f} \in \mathscr{E}$.
2. Se supone f continua. Demostrar que $\tilde{f}$ es también continua.
   (Si existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim\limits_{x \to x_0^+} \tilde{f}(x)$, construir una función $\mathscr{E}$ superior a $\tilde{f}$)

[003877]

Ejercicio 2108 El conjunto de puntos de discontinuidad es numerable

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona. Para $x \in]a,b[$, se establece $\delta(x) = \left|\lim\limits_{y \to x^+} f(y) - \lim\limits_{y \to x^-} f(y)\right|$ (salto de f en x).

1. Para $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar que $E_n = \left\{x \in]a,b[\text{ tal que } \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ es finito.
2. Deducir que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es a lo sumo numerable.

[003878]

Ejercicio 2109 Función localmente creciente

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es localmente creciente si : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $f_{|]x-\varepsilon,x+\varepsilon[}$ es creciente. Demostrar que : (f es localmente creciente) $\Rightarrow$ (f es creciente). (Estudiar $E = \{x \geqslant 0$ tal que $f_{|[0,x]}$ es creciente$\}$ y $F = \{x \leqslant 0$ tal que $f_{|[x,0]}$ es creciente$\}$) [003879]

Ejercicio 2110 Extensión de una función uniformemente continua

Sea $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para $x \in]0,1]$ se establece : $\begin{cases} g(x) = \sup\big(f(]0,x])\big) \\ h(x) = \inf\big(f(]0,x])\big). \end{cases}$

1. Demostrar que g y h son monótonos. Se denota $\ell = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ y $m = \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$.

2. Usando la continuidad uniforme de f, demostrar que $\ell = m$.
3. Deducir que $f(x) \to \ell$, si $x \to 0^+$.

[003880]

Ejercicio 2111 f continua, creciente en $\mathbb{Q}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f_{|\mathbb{Q}}$ es estrictamente creciente. Demostrar que f es estrictamente creciente.

[003881]

Ejercicio 2112 morfismos de $\mathbb{R}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula tal que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x+y) & = f(x) + f(y) \\ f(xy) & = f(x)f(y). \end{cases}$

Demostrar que f es creciente, luego $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. [003882]

Ejercicio 2113 Punto fijo para una aplicación creciente

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ creciente. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.
(Estudiar $A = \{x \in [0,1]$ tal que $f(x) \leqslant x\}$)

Solución ▼ [003883]

Ejercicio 2114 Función localmente monótona a la derecha

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ \delta > 0,$ tal que $\forall y \in [x, x+\delta],\ f(y) \geqslant f(x)$. Demostrar que f es creciente.

Solución ▼ [003884]

Ejercicio 2115 Función afín

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ |x-y| < |x-z| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$. Demostrar sucesivamente que f es inyectiva, monótona, continua, y finalmente afín.

Solución ▼ [003885]

Ejercicio 2116 Cálculo del límite

Demostrar que : $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$. Deducir $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$. [003886]

Ejercicio 2117 Derivadas de $\exp(-1/x)$

Se establece $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}^{+*}$, y que $f^{(n)}(x)$ es de la forma $\frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$, donde P_n es una función polinomial de grado menor o igual que $n-1$ ($n \geqslant 1$).
2. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en 0^+.
3. Demostrar que el polinomio P_n tiene $n-1$ raíces en $\mathbb{R}^{+*}$.

[003887]

Ejercicio 2118 $(1+1/t)^t$

1. Demostrar que : $\forall t>1,\ \left(1+\frac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.
2. Demostrar que : $\forall x,y>0,\ \left(1+\frac{x}{y}\right)^y < \mathrm{e}^x < \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Solución ▼ [003888]

Ejercicio 2119 $\ln(1+ax)/\ln(1+bx)$

Sean $0<a<b$. Demostrar que la función $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ es creciente.

Solución ▼ [003889]

Ejercicio 2120 Desigualdad

Sean $0<a<b$. Demostrar que : $\forall x>0,\ a\mathrm{e}^{-bx}-b\mathrm{e}^{-ax}>a-b$. [003890]

Ejercicio 2121 Fórmulas de adición para funciones hiperbólicas

Calcular $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ en función de $\operatorname{ch}a$, $\operatorname{sh}a$, $\operatorname{th}a$, $\operatorname{ch}b$, $\operatorname{sh}b$, $\operatorname{th}b$. [003891]

Ejercicio 2122 Simplificación de $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$

Sean $a,b\in\mathbb{R}$ no ambos nulos.

1. ¿Se puede encontrar $A,\varphi\in\mathbb{R}$ tales que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x)+b\operatorname{sh}(x)=A\operatorname{ch}(x+\varphi)$?
2. ¿Se puede encontrar $A,\varphi\in\mathbb{R}$ tales que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a\operatorname{ch}(x)+b\operatorname{sh}(x)=A\operatorname{sh}(x+\varphi)$?

Solución ▼ [003892]

Ejercicio 2123 Suma de ch

Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(kx)$.

Solución ▼ [003893]

Ejercicio 2124 Suma de sh

Sea $a\in\mathbb{R}$. Resolver : $\operatorname{sh}a+\operatorname{sh}(a+x)+\operatorname{sh}(a+2x)+\operatorname{sh}(a+3x)=0$.

Solución ▼ [003894]

Ejercicio 2125 Suma de th

Sea $x\in\mathbb{R}^*$. Verificar que $\operatorname{th}x=2\coth 2x-\coth x$. Deducir la convergencia y la suma de la serie de término general $\frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Solución ▼ [003895]

Ejercicio 2126 Suma de $1/\operatorname{sh}$

Sea $x \in \mathbb{R}^*$. Verificar que $\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \coth \frac{x}{2} - \coth x$. Deducir la convergencia y la suma de la serie de término general $\frac{1}{\operatorname{sh}(2^n x)}$.

Solución ▼ [003896]

Ejercicio 2127 ch(nx) y sh(nx)

Demostrar que las funciones : $x \mapsto \operatorname{ch}(n \operatorname{argch}(x))$ y $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(n \operatorname{argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ son polinomios. [003897]

Ejercicio 2128 $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a$, $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Estudiar la existencia de soluciones para el sistema : $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b. \end{cases}$

Solución ▼ [003898]

Ejercicio 2129 Relación entre funciones hiperbólicas y circulares

Sea $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sea $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Demostrar que $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \tan \frac{y}{2}$, $\quad \operatorname{th} x = \operatorname{sen} y$, $\quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$.

[003899]

Ejercicio 2130 $\operatorname{argth}((1+3\operatorname{th} x)/(3+\operatorname{th} x))$

Simplificar $\operatorname{argth}\left(\frac{1+3\operatorname{th} x}{3+\operatorname{th} x}\right)$.

Solución ▼ [003900]

Ejercicio 2131 Ecuaciones diversas

Resolver $\operatorname{argch} x = \operatorname{argsh}(x - \frac{1}{2})$.

Solución ▼ [003901]

Ejercicio 2132 Cálculo de primitivas

Determinar las primitivas de las siguientes funciones :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$.

Solución ▼ [003902]

Ejercicio 2133 Raíz de una suma de exponenciales

Sean $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ números reales fijos.

1. Demostrar que $\forall a > a_p$ existe un único real $x_a > 0$ solución de la ecuación : $a_1^x + \cdots + a_p^x = a^x$.
2. Para $a < b$, comparar x_a y x_b.
3. Determinar $\lim_{a \to +\infty} x_a$, luego $\lim_{a \to +\infty} x_a \ln a$

Solución ▼ [003903]

Ejercicio 2134 Central MP 2000

Sea $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ tal que : $\forall x, y > 0,\ f(xf(y)) = yf(x)$ y $f(x) \to +\infty$, cuando $x \to 0^+$

1. Demostrar que f es involutiva.
2. Demostrar que f conserva el producto. ¿Qué se puede decir de la monotonía de f, de su continuidad ?
3. Encontrar f.

Solución ▼ [003904]

Ejercicio 2135 Ecuaciones trigonométricas

Resolver las siguientes ecuaciones :

1. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\theta+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\operatorname{sen}\theta=2$.
2. $\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}2\theta+\operatorname{sen}3\theta+\operatorname{sen}4\theta=0$.
3. $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=0$.
4. $\cos\theta-\cos2\theta=\operatorname{sen}3\theta$.
5. $\cos\theta+\cos7\theta=\cos4\theta$.
6. $\cos2\theta+\cos12\theta=\sqrt{3}\cos5\theta$.
7. $\operatorname{sen}7\theta-\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}3\theta$.
8. $\cos^3\theta\operatorname{sen}3\theta+\cos3\theta\operatorname{sen}^3\theta=\frac{3}{4}$.
9. $\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}3\theta=\operatorname{sen}5\theta\operatorname{sen}7\theta$.
10. $3\tan\theta=2\cos\theta$.
11. $\tan4\theta=4\tan\theta$.
12. $\operatorname{cotan}\theta-\tan\theta=\cos\theta+\operatorname{sen}\theta$.
13. $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \tan(x+y)=4/3.\end{cases}$

Solución ▼ [003905]

Ejercicio 2136 Desigualdades

1. Resolver : $\cos\theta+\cos(\theta+\pi/3)>0$.
2. Resolver : $2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta<2$.

Solución ▼ [003906]

Ejercicio 2137 Linealización

$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$.

$2\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos2\theta$.

$4\cos^3\theta=3\cos\theta+\cos3\theta$.

$4\operatorname{sen}^3\theta=3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta$.

$8\cos^4\theta=3+4\cos2\theta+\cos4\theta$.

$8\operatorname{sen}^4\theta=3-4\cos2\theta+\cos4\theta$.

$32\cos^6\theta=10+15\cos2\theta+6\cos4\theta+\cos6\theta$.

$32\operatorname{sen}^6\theta=10-15\cos2\theta+6\cos4\theta-\cos6\theta$.

$32\cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta=2+\cos2\theta-2\cos4\theta-\cos6\theta$.

$32\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta=2-\cos2\theta-2\cos4\theta+\cos6\theta$.

$16\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta=\cos5\theta-3\cos3\theta+2\cos\theta$.

$16\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta=\operatorname{sen}5\theta+3\operatorname{sen}3\theta+2\operatorname{sen}\theta$.

$4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\operatorname{sen}3\theta$.

[003907]

Ejercicio 2138 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

Sean $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

1. Demostrar que : $1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.
2. Simplificar $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$.

Solución ▼ [003908]

Ejercicio 2139 $\operatorname{sen}^2(\theta-\alpha), \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}^2(\theta+\alpha)$ en progresión aritmética

Demostrar que existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los números $\operatorname{sen}^2(\theta-\alpha), \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}^2(\theta+\alpha)$ están en progresión aritmética. [003909]

Ejercicio 2140 Cálculo de suma

Calcular $\tan p - \tan q$. Deducir el valor de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución ▼ [003910]

Ejercicio 2141 Cálculo de suma

Simplificar $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$.

Solución ▼ [003911]

Ejercicio 2142 Cálculo de suma

Calcular $\operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan} 2x$. Simplificar $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\frac{\alpha}{2^k}$.

Solución ▼ [003912]

Ejercicio 2143 Heptágono regular

Sea $ABCDEFG$ un heptágono (7 lados) plano regular. Sea $\alpha = AB$, $\beta = AC$, $\gamma = AD$ (distancias). Demostrar que $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Solución ▼ [003913]

Ejercicio 2144 **I

1. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que si f es par, f' es impar y si f es impar, f' es par.
2. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y f una función n veces derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ denotando la derivada n-ésima de f, demostrar que si f es par, $f^{(n)}$ es par si n es par e impar si n es impar.
3. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. ¿Tenemos resultados análogos con respecto a las primitivas de f ?
4. Retomar las preguntas anteriores reemplazando la condición « f es par (o impar) » por la condición « f es T-periódica ».

Solución ▼ [005097]

Ejercicio 2145 **

Encontrar el mayor valor de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución ▼ [005098]

Ejercicio 2146 **I

1. Estudiar brevemente la función $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ y trazar su gráfica.
2. Encontrar todos los pares (a,b) de enteros naturales no nulos que satisfacen $a^b = b^a$.

Solución ▼ [005099]

Ejercicio 2147

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones o desigualdades :

1. $(**)$ $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
2. $(*)$ $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
3. $(**)$ $2\,\mathrm{argsh}\,x = \mathrm{argch}\,3 - \mathrm{argth}\,\frac{7}{9}$,
4. $(**)$ $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$,
5. $(**)$ $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Solución ▼ [005100]

Ejercicio 2148

construir la gráfica de las siguientes funciones :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(\mathrm{ch}\,x)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (a estudiar en $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.

Solución ▼ [005102]

Ejercicio 2149 $**$

Sea f de $[0,1]$ en $[0,1]$ tal que $\forall (x,y) \in ([0,1])^2$, $|f(y) - f(x)| \geqslant |x-y|$. Demostrar que $f = \mathrm{Id}$ o $f = 1 - \mathrm{Id}$.

Solución ▼ [005404]

Ejercicio 2150

Estudio completo de las siguientes funciones

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln\left|\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\right|$.
4. $4_(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{/\ln x}$.

8. $f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x)+(x-E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1}{2}-x}+\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1}{2}+x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \arccos(\frac{1}{\operatorname{ch} x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y+\sqrt{y^2-1})-\ln(\frac{1+x}{1-x})$, donde $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln|\operatorname{sh} x-1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x+\operatorname{sen} x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2-1}$.
20. $f_{20}(x) = \operatorname{arcsen}((2x-1)+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1}-5\cdot 3^{x-1}-x\ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln\left|\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right|$.

Solución ▼ [005443]

71 123.05 Función continua a trozos

Ejercicio 2151

Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\phi\in CM\left([a,b],\mathbb{R}\right),\forall x\in[a,b],|g(x)-\phi(x)|<\varepsilon.$$

Demostrar que se puede elegir $\phi\in\mathscr{E}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$, ie :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\phi\in E\left([a,b],\mathbb{R}\right),\forall x\in[a,b],|g(x)-\phi(x)|<\varepsilon.$$

NB : CT para continua a trozos y E para escalera. [000693]

Ejercicio 2152

Dar un ejemplo de una función que no se puede aproximar por ε más cercano mediante las funciones escaleras. [000694]

Ejercicio 2153

Se dice que un conjunto A de funciones definidas en un intervalo $I=[a,b]$ de $\mathbb{R}$ es denso en un conjunto B si :

$$\forall f\in B,\forall\varepsilon>0,\exists g\in A,\forall x\in I,|f(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

El curso dice por ejemplo, que el conjunto de funciones escalonadas es denso en el conjunto de funciones continuas a trozos si $I=[a,b]$. Demostrar que el conjunto de funciones continuas afines a trozos es denso en el conjunto de funciones continuas en un intervalo $I=[a,b]$. [000695]

Ejercicio 2154

Se dice que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas en $I=[a,b]$ converge uniformemente a f si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\mathbb{N}\in\mathbb{N},\forall n\geqslant\mathbb{N},\forall x\in I,|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Se supone que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en el intervalo $[a,b]$, y que todos los f_n son continuas. Demostrar que $\forall x\in[a,b]$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y dar su límite. Demostrar que f es acotada y continua. No se supone más que $(f_n)_n$ converge uniformemente pero solo punto a punto (ie, $\forall x\in[a,b]$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $f(x)$) ; además todo f_n son lipschitzianas de razón k ; demostrar que f es lipschitziana de cociente k y que hay convergencia uniforme. [000696]

Ejercicio 2155

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es de variación acotada si y solo si :

$$\exists\mu\in\mathbb{R}^+,\forall d=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}\text{ subdivisión de }[a,b],\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sigma(d)\leqslant\mu.$$

Se llama entonces $V(a,b)=\sup_{d\text{ subdivisión}}\sigma(d)$ y se define una función de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^+$: $x\to V(a,x)$. Demostrar que toda función monótona tiene variación acotada, luego que $x\to V(a,x)$ es creciente, así como $x\to V(a,x)-f(x)$. Deducir que toda función con variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes (de ahí la naturaleza de sus discontinuidades). ¿Una función continua, una función de Lipschitz es de variación acotada ? [000697]

72 123.06 Funciones equivalentes, funciones despreciables

Ejercicio 2156

¿En qué condición en f y g se tiene $e^f\underset{a}{\sim}e^g$? [001213]

Ejercicio 2157

Sean f y g equivalentes en un vecindario de a y estrictamente positivo. Demostrar que si f admite en a un límite en $\bar{\mathbb{R}}$ diferente de 1, entonces $\ln f\underset{a}{\sim}\ln g$. [001214]

Ejercicio 2158

Demostrar que si f tiende a 0 en a, entonces $\ln(1+f)\underset{a}{\sim}f$ y $e^f-1\underset{a}{\sim}f$. [001215]

Ejercicio 2159

Estudiar en $+\infty$ y $-\infty$ la función $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt{x^2+x+1}$.

Solución ▼ [001216]

Ejercicio 2160

Calcular los límites de

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Solución ▼ [001217]

Ejercicio 2161

Encontrar un equivalente simple en $+\infty$ de $(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$. [001218]

Ejercicio 2162

Límite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

Equivalente en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$

Límite en 0 de $\dfrac{\tan(ax)-\operatorname{sen}(ax)}{\tan(bx)-\operatorname{sen}(bx)}$

Límite en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$

Límite en $\frac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$

Equivalente en 0 de $\dfrac{\tan(x-x\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-1}$

Equivalente en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(\tan(2x)+\tan(x+\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2$

Límite en 0 de $x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$

Límite en $\frac{1}{2}$ de $\left(2x^2-3x+1\right)\tan(\pi x)$

Límite en 0 de $\dfrac{(\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$

Equivalente en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$.

Solución ▼ [001219]

Ejercicio 2163

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales. Demostrar que existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}, f_n(t) = o(f(t))$ si $t\to\infty$. [001220]

73 123.99 Otro

Ejercicio 2164 ***I

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 3 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!})$.
(Comenzar por verificar que para $k = 2, 3, \ldots, n$, se tiene : $(n-k+1)k > n$).

Solución ▼ [005161]

Ejercicio 2165 **I

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\operatorname{sen}(nx)| \leqslant n|\operatorname{sen} x|$.

Solución ▼ [005163]

Ejercicio 2166 **I

Sea f continua en $[a,b]$, con valores en $[a,b]$. Demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución ▼ [005393]

Ejercicio 2167 **I

Sea f definida en $[0,+\infty[$, con valores en $[0,+\infty[$, continua en $[0,+\infty[$ tal que $\frac{f(x)}{x}$ tiene un límite real $\ell \in [0,1[$, cuando x tiende a $+\infty$. Demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución ▼ [005394]

Ejercicio 2168 ***

Sea f continua en $\mathbb{R}^+$ tal que, para todo real positivo x, se tiene $f(x^2) = f(x)$. Demostrar que f es constante en $\mathbb{R}^+$. Encontrar un ejemplo donde f no es constante.

Solución ▼ [005397]

Ejercicio 2169 ***I

Encontrar todos los morfismos continuos de $(\mathbb{R},+)$.

Solución ▼ [005399]

Ejercicio 2170 ***

Sean a y b dos reales tales que $0 < a < b$. Demostrar que $\bigcup_{k \geqslant 1}]ka, kb[$ contiene un intervalo de la forma $]A,+\infty[$, luego determinar el menor valor posible de A.

Solución ▼ [005400]

Ejercicio 2171 *** Teorema de homeomorfismo

Sea f una aplicación continua durante un intervalo I de $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es inyectiva si y solo si f es estrictamente monótona y que en este caso $f(I)$ es un intervalo de la misma naturaleza que I (abierto, semi-abierto, cerrado).

Solución ▼ [005402]

Ejercicio 2172 ***

Encontrar un ejemplo de una función periódica cuyo grupo de períodos sea denso en $\mathbb{R}$, pero no $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005403]

Ejercicio 2173 ***

Encontrar las funciones biyectivas de $[0,1]$ en $[0,1]$ verificando $\forall x \in [0,1],\ f(2x - f(x)) = x$.

Solución ▼ [005405]

Ejercicio 2174 ***I

Sea f una aplicación de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, continua en $[0,1]$ y verificando $f(0) = f(1)$.

1. Sea n un entero natural no nulo y sea $a = \frac{1}{n}$. Demostrar que la ecuación $f(x+a) = f(x)$ admite al menos una solución.
2. Demostrar (proporcionando una función precisa) que, si a es un real de $]0,1[$ que no es de la forma anterior, es posible que la ecuación $f(x+a) = f(x)$ no tiene solución.
3. Aplicación. Un ciclista recorre 20 km en una hora.
   (a) Demostrar que existe al menos un intervalo de tiempo de media hora de duración durante el cual ha recorrido 10 km.
   (b) Demostrar que existe al menos un intervalo de tiempo de duración 3 min durante los cuales recorre 1 km.
   (c) Demostrar que no existe necesariamente un intervalo de tiempo de 45 minutos durante el cual haya recorrido 15 km.

Solución ▼ [005406]

74 124.01 Cálculos

Ejercicio 2175

Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones :

$$f_1(x) = x^2 \cos \tfrac{1}{x},\ \text{si } x \neq 0;\ f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \tfrac{1}{x},\ \text{si } x \neq 0;\ f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1},\ \text{si } x \neq 1;\ f_3(1) = 1.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000698]

Ejercicio 2176

Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que la función f definida en $\mathbb{R}_+$ por :

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{y} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1, \quad \text{si } x > 1$$

sea derivable en $\mathbb{R}_+^*$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000699]

Ejercicio 2177

Sea $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Demostrar que f es extensible por continuidad en 0; se denota todavía f la función extendida. Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}$, pero que f' no es continua en 0.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000700]

Ejercicio 2178

Calcular la función derivada de orden n, de las funciones f, g, h definidas por :

$$f(x) = \operatorname{sen} x; \qquad g(x) = \operatorname{sen}^2 x; \qquad h(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000701]

Ejercicio 2179

Calcular las derivadas de orden n, de las funciones :

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2(x+1)(x-3)} \qquad g(x) = \ln(1+x).$$

[000702]

Ejercicio 2180 Fórmula de Leibnitz

Dadas u y v funciones derivables de orden n en el intervalo I, Demostrar por inducción que la derivada de orden n del producto uv en este intervalo es :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Deducir las derivadas sucesivas de las funciones :

$$x \mapsto x^2 e^x; \qquad x \mapsto x^2(1+x)^n; \qquad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2}; \qquad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

[000703]

Ejercicio 2181

Estudiar la derivabilidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes aplicaciones :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

[000704]

Ejercicio 2182

Calcular las derivadas de las funciones :

1. $x \mapsto \sqrt{1+x^2 \operatorname{sen}^2 x}, \quad x \mapsto \dfrac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}.$ 2. $x \mapsto \log\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right), \quad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}.$

[000705]

Ejercicio 2183

Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$.

1. Calcular la derivada de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ y de $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
2. Se supone $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcular la derivada de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

[000706]

Ejercicio 2184

Prolongar por continuidad en 0 y estudiar la derivabilidad de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.   2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

[000707]

Ejercicio 2185

Sea $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ si no} \end{cases}$

Determinar a, b, c, para que f sea C^2 (y C^3 ?). [000708]

Ejercicio 2186

Sea $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que f es C^∞ y que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Solución ▼ [000709]

Ejercicio 2187

Sean a y b dos reales y $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calcular $f^{(n)}$ y deducir $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$. [000710]

Ejercicio 2188

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f(0) = 0.$$

Demostrar que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y calcular sus derivadas en 0. [000711]

Ejercicio 2189

Calcular la derivada de $x \to \ln\cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$. [000712]

Ejercicio 2190

¿La función $x \to \cos\sqrt{x}$ es derivable en 0 ? [000713]

Ejercicio 2191

¿En qué puntos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2, \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

es derivable ? [000714]

Ejercicio 2192

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{sen}(x) \leqslant x$. [001221]

Ejercicio 2193

Para todo $x \in]1,+\infty[$ se define $f(x) = x\ln(x) - x$. Demostrar que f es una biyección de $]1,+\infty[$ en $]-1,+\infty[$. Sea $g = f^{-1}$ la aplicación inversa de f. Calcular $g(0)$ y $g'(0)$. [001222]

Ejercicio 2194

Estudiar la continuidad, la derivabilidad, la continuidad de la derivada para las siguientes aplicaciones :

1. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.
2. $g : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.
3. $h : x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

[001223]

Ejercicio 2195

Sea g una función dos veces derivable en $[a,b]$ tal que $g(a) = g(b) = 0$ y $g''(x) \leqslant 0$, para todo $x \in]a,b[$. Demostrar que para todo $x \in]a,b[$, $g(x) \geqslant 0$. [001224]

Ejercicio 2196

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ y $f''(x) \geqslant 0$. Estudiar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. [001225]

Ejercicio 2197

Sea f una aplicación continua de $[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$ derivable en $]a,b]$. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, f es derivable en a. [001226]

Ejercicio 2198

Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ una función acotada dos veces derivable y tal que existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}_+$, se tiene $\alpha f(x) \leqslant f''(x)$.

1. (a) Demostrar que f' tiene un límite en $+\infty$. ¿Cuál es el valor de este límite ?
   (b) Demostrar que f es decreciente y que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Sea $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$. Demostrar que g es creciente y tiene límite 0 en ∞.
   (b) Sea $f(x) = h(x)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$, demostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \leqslant f(0)\exp(-\sqrt{\alpha}x)$.

[001227]

Ejercicio 2199

Demostrar que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ |\operatorname{sen} x| \leqslant |x|, \qquad \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \ 1-\cos x \leqslant x \operatorname{sen} x,$$

$$\forall x \in [-1,1],\ \ |\arcsin x| \leqslant \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|.$$

[002689]

Ejercicio 2200 **

Determinar en cada uno de los siguientes casos la derivada n-ésima de la función propuesta :

$$1)\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x), \qquad 2)\ x \mapsto \cos^3 x \operatorname{sen}(2x) \qquad 3)\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ 4)\ x \mapsto (x^3+2x-7)\mathrm{e}^x.$$

Solución ▼ [005413]

---

75 124.02 Teorema de Rolle e incrementos finitos

Ejercicio 2201

Demostrar que el polinomio P_n definido por

$$P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

es un polinomio de grado n cuyas raíces son reales, simples, y pertenecen a $[-1,1]$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000715]

Ejercicio 2202

Estudiar la función $f : x \mapsto x^5-5x+1$ sobre $\mathbb{R}$ y deducir que la ecuación $x^5-5x+1=0$, tiene tres soluciones reales. [000716]

Ejercicio 2203

Demostrar que el polinomio X^n+aX+b, (a y b reales) admite como máximo tres raíces reales.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000717]

Ejercicio 2204

Sea f una función n veces derivable en $]a,b[$ se anula en $n+1$ puntos de $]a,b[$. Demostrar que si $f^{(n)}$ es continua, existe un punto x_0 de $]a,b[$ tal que $f^{(n)}(x_0)=0$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000718]

Ejercicio 2205

Dado y un real positivo y n un entero natural par, demostrar que $(x+y)^n = x^n+y^n$ si y solo si $x=0$. Analizar el caso n impar. [000719]

Ejercicio 2206

Sea f una función continua y derivable en $[a,+\infty[$ y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Demostrar que existe un elemento c en $]a,+\infty[$ tal que $f'(c) = 0$. [000720]

Ejercicio 2207

En la aplicación del teorema de crecimientos finitos a la función

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

en el intervalo $[a,b]$ especificar el número “c” de $]a,b[$. Dar una interpretación geométrica.

Solución ▼ Vidéo ■ [000721]

Ejercicio 2208

Aplicar la fórmula de incremento finito a la función

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(donde a,b,c,α Son reales, y c y α son no nulos) en el intervalo $[0,X]$.

1. Calcular “θ” en función de X.
2. Deducir que $x \mapsto \frac{1}{\alpha x}\ln\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}$ es acotada en $\mathbb{R}$.

[000722]

Ejercicio 2209

Sea f una función dos veces derivable en $[a,a+2h]$. Por introducción de la función

$$g(t) = f(a+t+h) - f(a+t)$$

demostrar que existe α en $]0,2[$ tal que

$$f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a+\alpha h).$$

[000723]

Ejercicio 2210

Sean x e y reales con $0 < x < y$.

1. Demostrar que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. Se considera la función f definida en $[0,1]$ por
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$
Del estudio de f deducir que para todo α de $]0,1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
Interpretación geométrica.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000724]

Ejercicio 2211

Aplicando el teorema de incrementos finitos a $f(x) = \ln x$ sobre $[n, n+1]$, demostrar que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tiende al infinito cuando n tiende a infinito.

Indicación ▼ Solución ▼ [000725]

Ejercicio 2212

Dado α en $]0,1[$, demostrar que para todo entero natural n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \geqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Deducir el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

[000726]

Ejercicio 2213

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [000727]

Ejercicio 2214

Sea $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, tal que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(a).$$

Demostrar que existe $c \in]a, +\infty[$ tal que $f'(c) = 0$. [002688]

Ejercicio 2215 *** Fórmula de TAYLOR-LAGRANGE

Sean a y b dos reales tales que $a < b$ y n un entero natural. Sea f una función de elemento de $C^n([a,b],\mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indicación. Aplicar el teorema de ROLLE a la función $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, donde A se escoge inteligentemente.

Solución ▼ [005408]

Ejercicio 2216 *** Fórmula del trapecio

Sea $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b)) - f^{(3)}(c).$$

Indicación. Aplicar el teorema de ROLLE a g', luego g, donde $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a)) - A(x-a)^3$, donde A se escoge inteligentemente.
¿En qué se convierte esta fórmula si se reemplaza f por F una primitiva de una función f de clase C^1 sobre $[a,b]$ y dos veces derivable en $]a,b[$? Interpretar geométricamente.

Solución ▼ [005409]

Ejercicio 2217 ***I Polinomios de LEGENDRE

Para n entero natural no nulo dado, se establece $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Determinar el grado y el coeficiente principal de L_n.
2. Estudiando el polinomio $A_n = (X^2-1)^n$, demostrar que L_n admite n raíces reales simples y todas en $]-1;1[$.

Solución ▼ [005412]

Ejercicio 2218 **

Demostrar que para todo real estrictamente positivo x, se tiene : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Solución ▼ [005415]

Ejercicio 2219 **

Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ verificando $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ para cierto a no nulo. Demostrar que existe un punto distinto de O de la curva representativa de f en que la tangente pasa por el origen.

Solución ▼ [005416]

Ejercicio 2220 ** Generalización del teorema de los incrementos finitos

Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Sea $\Delta : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Demostrar que Δ es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y calcular su derivada.
2. Deducir que existe c en $]a,b[$ tal que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

Solución ▼ [005421]

76 124.03 Aplicaciones

Ejercicio 2221

Sea f una función continua de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se denota g_n la función $x \mapsto f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Se supone $g_n(x) > 0$, para todo $x \in [0, 1-\frac{1}{n}[$. Demostrar que $f(1) > f(0)$.
2. Se supone ahora que $f(0) = f(1)$. Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función g_n se anula en al menos un punto del intervalo $[0, 1-\frac{1}{n}]$.

[001228]

Ejercicio 2222

Para todo n entero mayor o igual que 2, se considera el polinomio de grado n, con coeficientes reales :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1.$$

1. Sea $n \geqslant 2$. Demostrar que P_n tiene una única raíz real positiva a la que llamaremos λ_n. (Se puede estudiar la aplicación $X \mapsto P_n(X)$.)
2. Demostrar que la sucesión $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ es creciente y luego converge a un límite que denotamos ℓ.
3. Demostrar que ℓ es raíz del polinomio $X^2 + X - 1$. Deducir su valor.

Solución ▼ [001229]

Ejercicio 2223

Sea f una función de un intervalo I, con valores en $\mathbb{R}$ derivable en I. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :

1. f es estrictamente creciente en I.
2. f' es positiva o nula en I y $\{x \in I; f'(x) > 0\}$ es denso en I.

[001230]

Ejercicio 2224

1. Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivable en 0. Demostrar que existe una aplicación ε de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dar una interpretación geométrica de este resultado.
2. Deducir los límites de las sucesiones $(u_n)_{n\geqslant 1}$ y $(v_n)_{n\geqslant 1}$ definidas por, $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = (n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n$ y $v_n = (1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{1}{n}}$.
3. Construir un ejemplo de sucesión $(w_n)_{n\geqslant 1}$ con, $w_n < 1$, para todo $n \geqslant 1$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$. (Se puede usar de guía el ejemplo de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ arriba.)

[001231]

Ejercicio 2225

1. Demostrar que para todo $x > 0$ se tiene : $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$.
2. Deducir que para todo entero $n \geqslant 1$: $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Se define $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$. Demostrar que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y convergente.

Ejercicio 2226

1. Sea f una aplicación continua de un intervalo $]a,b[$, con valores en $\mathbb{R}$, derivable en $c\in]a,b[$. Demostrar que existe una (única) aplicación continua ε de $]a,b[$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(c)=0$ y, para todo $x\in]a,b[$ distinto de c, se tiene :
$$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+(x-c)\varepsilon(x).$$
2. Demostrar que la sucesión $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de término general :
$$S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$$
es decreciente y que converge hacia un límite que llamaremos S.
3. ¿Por qué se puede decir, *a priori*, que $\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1$?
4. Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ una aplicación continua, derivable en 0 y tal que $f(0)=0$. Demostrar que la sucesión $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ de término general :
$$\sigma_n(f)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)$$
converge hacia $f'(0)S$ (utilizar 1.).
5. Demostrar que $\sigma_n(f)=\log(2)$, cuando f es la aplicación $x\mapsto\log(1+x)$ y deducir el valor de S.
6. Calcular el límite de la sucesión $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ de término general :
$$\sigma_n=\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n+1}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}.$$
7. Más generalmente, ¿cuál es el valor de $p\in\mathbb{N}^*$ dado, del límite S_p de la sucesión $(\sigma_n(p))_{n\geqslant 1}$ de término general :
$$\sigma_n(p)=\sum_{k=0}^{pn}\frac{1}{n+k}?$$

Solución ▼ [001233]

Ejercicio 2227

Sea f una función derivable y a un real. Sea $h>0$ un número real fijo estrictamente positivo.

1. Demostrar que existe $\theta\in]0,1[$ tal que
$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h).$$
2. Para todo $h\neq 0$ se denota : $\varphi(h)=\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Demostrar que si $f''(a)$ existe, entonces $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=f''(a)$.

[001234]

Ejercicio 2228

Sea I un intervalo abierto que contiene 0 y 1 y $f:I\to\mathbb{R}$ una función derivable. Sea $p=f(1)-f(0)$.

1. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(0) = f'(0)$ y $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ si no. Demostrar que si u es un real comprendido entre $f'(0)$ y p, entonces existe $a \in [0,1]$ tal que $u = f'(a)$.
2. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(1) = f'(1)$ y $h(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ si no. Demostrar que si v es un real comprendido entre $f'(1)$ y p, entonces existe $b \in [0,1]$ tal que $v = f'(b)$.
3. Sea w un real comprendido entre $f'(0)$ y $f'(1)$. Demostrar que existe $c \in [0,1]$ tal que $w = f'(c)$.

[001235]

Ejercicio 2229

Sea $P(X)$ un polinomio con coeficientes complejos de grado 3 teniendo tres raíces distintas. Demostrar que las raíces de P' están en el triángulo que tiene como vértice las raíces de P [001236]

---

77 124.04 Funciones convexas

Ejercicio 2230 Determinando

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y $x < y < z$. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$. [003981]

Ejercicio 2231 Suma de fracciones

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Demostrar que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Solución ▼ [003982]

Ejercicio 2232 Monotonía

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Demostrar que se tiene :
– ya sea que f creciente en $\mathbb{R}$.
– ya sea que f decreciente en $\mathbb{R}$.
– ya sea que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f es decreciente en $]-\infty, a]$, luego creciente en $[a, +\infty[$. [003983]

Ejercicio 2233 Función convexa mayorada

1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexa y acotada. Demostrar que f es decreciente.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y acotada. Demostrar que f es constante.

[003984]

Ejercicio 2234 f convexa mayorada por g afín

Sea $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ convexa y $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ afín. Se supone que : $\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) \leqslant g(x), \\ f(1) = g(1). \end{cases}$

Demostrar que $f = g$. [003985]

Ejercicio 2235 Posición relativa a una asíntota

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa tal que $\mathscr{C}_f$ admite una asíntota de ecuación $y = mx + p$ en $+\infty$. Demostrar que $\mathscr{C}_f$ está por encima de esta asíntota. [003986]

Ejercicio 2236 Función convexa derivable

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa derivable. Demostrar que f' es continua. [003987]

Ejercicio 2237 Estudio en infinito

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable tal que : $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$.

1. Estudiar la existencia de los límites (en $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, $\frac{f(x)}{x}$.
2. La misma pregunta para los límites en $-\infty$ de $f(x)$, $f'(x)$, y $xf'(x)$.

Solución ▼ [003988]

Ejercicio 2238 Cero de f''

Sea $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dos veces derivable tal que $f(x) \to f(0)$, cuando $x \to +\infty$. Demostrar que existe $c \in]0,+\infty[$ tal que $f''(c) = 0$. [003989]

Ejercicio 2239 $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que : $\forall x,y \in [a,b]$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Demostrar que f es convexa. [003990]

Ejercicio 2240 Sucesiones adyacentes

Sea $f : [a,b] \to [c,d]$ convexo, biyectiva, creciente. Se definen las sucesiones (u_n) y (v_n) por :

$$a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right).$$

Demostrar que (u_n) y (v_n) convergente al mismo límite. [003991]

Ejercicio 2241 Polígono inscrito en una circunferencia de máximo perímetro

Sea $n \geqslant 3$ y $A_1A_2\cdots A_n$ un polígono convexo en n lados inscritos en un círculo fijo. Demostrar que el perímetro de este polígono es máximo si y solo si el polígono es regular. [003992]

Ejercicio 2242 Funciones logarítmicamente convexas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$. Demostrar que : ($\ln f$ es convexa) $\iff$ ($\forall \alpha > 0$, f^α es convexa). [003993]

Ejercicio 2243 Límite de $f(x) - xf'(x)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa derivable.

1. Demostrar que $p = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - xf'(x))$ existe.
2. Se supone p finito. Usando el hecho de que $f(x) - xf'(x)$ es acotada en un vecindario de $+\infty$, demostrar que $\frac{f(x)}{x}$ y $f'(x)$ admite el mismo límite m finito en $+\infty$.

3. Demostrar entonces que $f(x)-mx-p \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Solución ▼ [003994]

Ejercicio 2244 Función cóncava positiva

Sea $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ cóncava.

1. Demostrar que la función $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ es decreciente en $]0,+\infty[$.
2. Demostrar que : $\forall x,y \geqslant 0,\ f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Solución ▼ [003995]

Ejercicio 2245 Constante de Euler

Sea $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ cóncava, derivable, creciente.

1. Demostrar que : $\forall x \geqslant 1,\ f(x+1)-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x)-f(x-1)$.
2. Sean : $u_n = f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n)$, $v_n = f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(n)-f(n+1)$. Demostrar que estas sucesiones convergen.
3. Se toma $f(x)=\ln x$. Sea $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ (constante de Euler). Calcular γ con un error de 10^{-2}.

[003996]

Ejercicio 2246 Tangentes que pasan por un punto

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexa derivable, y $A=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Estudiar el número maximal de tangentes a $\mathscr{C}_f$ pasando por A. [003997]

Ejercicio 2247 Caracterización de funciones convexas o cóncavas por el TIF

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable tal que : $\forall a,b\in\mathbb{R}$ tal que $a<b$, $\exists!\ c\in]a,b[$ tal que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

1. Demostrar que para todo $a\in\mathbb{R}$, la función $b \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es monótona en $]-\infty,a[$ y en $]a,+\infty[$.
2. Deducir que f es estrictamente convexa o estrictamente cóncava.

[003998]

Ejercicio 2248 Pseudo-derivada segunda

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Se supone que : $\forall x\in\mathbb{R},\ D^2f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe.

1. Si f es de clase $\mathscr{C}^2$, calcular $D^2f(x)$.
2. Sea f cualquiera y $a<b<c$ tales que $f(a)=f(b)=f(c)$. Demostrar que existe $x\in]a,c[$ tal que $D^2f(x)\leqslant 0$. Se supone ahora que : $\forall x\in\mathbb{R}, D^2f(x)\geqslant 0$.
3. Sean $a<b<c$ y P el polinomio de grado menor o igual que 2 coincidiendo con f en los puntos a,b,c. Demostrar que $P''\geqslant 0$.
4. Calcular P'' en función de a,b,c y $f(a),f(b),f(c)$. Deducir que f es convexa.

Solución ▼ [003999]

Ejercicio 2249 Función convexa no derivable en un subconjunto numerable

Sea (a_n) una sucesión acotada de reales. Se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}$. Demostrar que f es convexa, y no es derivable en los puntos a_n.

Solución ▼ [004000]

Ejercicio 2250 convergencia simple + convexidad $\Longrightarrow$ convergencia uniforme en un compacto

Sea (f_n) una sucesión de funciones convexas en $[a,b]$ convergiendo simplemente a una función f que se supone continua. Sea $\varepsilon > 0$.

1. Demostrar que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que : $\forall x,y \in [a,b],\ |x-y| \leqslant \frac{b-a}{p} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Se elige tal p, y se fija una subdivisión (a_k) de $[a,b]$ tal que $a_k = a + k\frac{b-a}{p}$.
2. Sea $t \in [0,1]$. Encuadrar $f_n\big(ta_k + (1-t)a_{k+1}\big)$ por dos funciones afines de t usando la convexidad de f_n.
3. Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f.

[004001]

Ejercicio 2251 DL de una función convexa

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa derivable tal que $f(x) = a + bx + \frac{cx^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$. Demostrar que f es dos veces derivable en 0 y $f''(0) = c$. (Encuadrar $f'(x)$ por las tasas de crecimiento de f entre $x - \varepsilon x$, x y $x + \varepsilon x$).

[004002]

Ejercicio 2252 DL de una función convexa

Sea f continua y creciente en $\mathbb{R}^+$. Se define $F(x) = \int_0^x f$, y se supone que $F(x) = x^2 + o(x)$. Demostrar que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.

Solución ▼ [004003]

---

78 124.99 Otro

Ejercicio 2253

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1-k)^3x^2 + (1+k)x^3$, donde k es un número real. Determinar los valores de k para los cuales el origen es un extremo local de f.

Solución ▼ [000728]

Ejercicio 2254

Aplicar la regla de L'Hôpital a los cálculos de los siguientes límites :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotan} x.$$

[000729]

Ejercicio 2255

Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^4)-1}{x^4 e^x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};\qquad \lim_{x\to 0}\ x^2\left(\exp\frac{1}{x}-\exp\frac{1}{x+1}\right).$$

[000730]

Ejercicio 2256

Sea $f\in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)f(x-y)\leqslant f(x)^2$. Demostrar que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)f''(x)\leqslant f'(x)^2$.
[000731]

Ejercicio 2257

Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ derivable tal que $\lim\limits_{+\infty} f'=l$. Demostrar que entonces $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$. [000732]

Ejercicio 2258

Determinar los extremos de $f(x)=x^4-x^3+1$ sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [000733]

Ejercicio 2259

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de inflexión (y luego los extremos locales) de f_λ, cuando λ recorre $\mathbb{R}$, donde :

$$f_\lambda : x\mapsto \lambda e^x+x^2?$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000734]

Ejercicio 2260

Encontrar las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivables en 0 tales que :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\},\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \ f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

[000735]

Ejercicio 2261

Sea f derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(\omega)=\omega$. Se define una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al dar x_0 y la recurrencia $x_{n+1}=f(x_n)$. Demostrar que si $|f'(\omega)|<1, \exists\varepsilon>0, \forall x_0\in]\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon[, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w, y que si $|f'(\omega)|>1$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w si y solo si es estacionaria (i.e. $x_n=\omega$ a partir de un cierto rango). ¿Qué se puede decir en el caso $|f'(\omega)|=1$? [000736]

Ejercicio 2262

Sea $f\in C^1([0;1],\mathbb{R})$,tal que $f(0)=0$. Calcular :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

[000737]

Ejercicio 2263

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$ ($a < b$) y derivable en $]a,b[$. Se supone que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$.

1. Demostrar que $g(x) \neq g(a)$, para todo $x \in]a,b[$.
2. Se define $p = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ y considerar la función $h(x) = f(x) - pg(x)$, para $x \in [a,b]$. Demostrar que h verifica las hipótesis del teorema de Rolle y deducir que existe un número real $c \in]a,b[$ tal que
$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. Se supone que $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, donde ℓ es un número real. Demostrar que
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. *Aplicación.* Calcular el siguiente límite :
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000738]

Ejercicio 2264

Sea $n \geqslant 2$ un entero fijo y $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por la fórmula siguiente :
$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y calcular $f'(x)$, para $x \geqslant 0$.
   (b) Estudiando el signo de $f'(x)$ sobre $\mathbb{R}^+$, demostrar que f alcanza un mínimo en $\mathbb{R}^+$ que se va a determinar.
2. (a) Deducir la siguiente desigualdad :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Demostrar que si $x \in \mathbb{R}^+$ y $y \in \mathbb{R}^+$, entonces se tiene
$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Solución ▼ Vidéo ■ [000739]

Ejercicio 2265

Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}$, en particular en $t = 0$.
2. Estudiar la existencia de $f''(0)$.
3. Se quiere demostrar que para $t < 0$, la derivada n-ésima de f se escribe

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} \mathrm{e}^{1/t}$$

donde P_n es un polinomio.

   (a) Encontrar P_1 y P_2.

   (b) Encontrar una relación de recurrencia entre P_{n+1}, P_n y P_n', para $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Demostrar que f es de clase C^∞.

Solución ▼ Vidéo ■ [000740]

Ejercicio 2266 Límite doble

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en 0. Demostrar que f es derivable en 0, y $f'(0) = \ell$ si y solo si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall h, k \in]0, \delta[,\ \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h + k} - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$

[003932]

Ejercicio 2267 Propiedades de paridad y periodicidad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable.

1. ¿Qué se puede decir de f' si se sabe que f es par, impar, periódica ?
2. ¿Qué se puede decir de f si se sabe que f' es par, impar, periódica ?
3. Demostrar que si f' es T-periódica y $f(T) \neq f(0)$, entonces f no tiene período. (Estudiar $f(nT)$, para $n \in \mathbb{N}$).

[003933]

Ejercicio 2268 Propiedad de paridad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que la función $t \mapsto 2f(t) - tf'(t)$ es par. f ¿s un par ?

Solución ▼ [003934]

Ejercicio 2269 inyectividad local

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) \neq 0$.

1. Demostrar que existe un vecindario V de a tal que $\forall x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' es continua en el punto a, demostrar que existe un vecindario V de a tal que $f_{|V}$ sea inyectiva.

[003935]

Ejercicio 2270 Derivabilidad de $|f|$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Demostrar que $|f|$ admite en todo punto una derivada a la derecha y una derivada a la izquierda. [003936]

Ejercicio 2271 $f'(x) \to \ell$ y f es acotada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y acotada tal que $f'(x) \to \ell$, cuando $x \to +\infty$. Demostrar que $\ell = 0$. [003937]

Ejercicio 2272 $\lim\limits_{\infty} f'(x) = \lim\limits_{\infty} f(x)/x$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) \to \ell$, cuando $x \to +\infty$. Demostrar que $\frac{f(x)}{x} \to \ell$, cuando $x \to +\infty$. Determinar un contraejemplo para el recíproco. [003938]

Ejercicio 2273 Central MP 2006

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x)\displaystyle\int_0^x f^2(t)\,dt \to \ell \in \mathbb{R}^*$, cuando $x \to +\infty$. Demostrar que existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tales que $f(x) \sim \frac{\alpha}{x^\beta}$ en $+\infty$.

Solución ▼ [003939]

Ejercicio 2274 Propiedad de valores intermedios para f'

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable.

1. Se supone que : $\forall x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0$. Demostrar que f' es de signo constante.
2. En el caso general, demostrar que $f'([a,b])$ es un intervalo.

[003940]

Ejercicio 2275 Propiedad de valores intermedios para f'

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable.

1. Se denota $E = \{(x,y) \in [a,b]^2$ tal que $x < y\}$ y para $(x,y) \in E : \varphi(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Demostrar que $\varphi(E)$ es un intervalo.
2. Deducir que $f'([a,b])$ es un intervalo.

[003941]

Ejercicio 2276 Regla de l'Hospital

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables con : $\forall x \in \,]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Demostrar que existe $c \in \,]a,b[$ tal que : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. (Aplicar el teorema de Rolle a $f - \lambda g$, donde λ es un real bien elegido)
2. Deducir que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$, cuando $x \to a^+$, entonces $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell$, cuando $x \to a^+$ (règle de l'Hospital).
3. Aplicación : Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

[003942]

Ejercicio 2277 Búsqueda de límite

Encontrar $\lim\limits_{x \to \pi/4} \frac{\ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Solución ▼ [003943]

Ejercicio 2278 $f(a) = f(b) = 0,\ f'(a)f'(b) > 0 \Rightarrow$ existe otro cero

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(a) = f(b) = 0$, y $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$, y $f'(c) \leqslant 0$. [003944]

Ejercicio 2279 $f'(a) = f'(b)$

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(a) = f'(b)$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$. [003945]

Ejercicio 2280 Tangentes que pasan por un punto dado

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demostrar que para todo $d \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, existe una tangente a $\mathscr{C}_f$ pasando por el punto $(d,0)$. [003946]

Ejercicio 2281 Rolle iterado

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, n veces derivable.

1. Si f se anula en $n+1$ puntos distintos en $[a,b]$, demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Si $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$, demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.

[003947]

Ejercicio 2282 Rolle en infinito

Sea $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(x) \to f(a)$, cuando $x \to +\infty$. Demostrar que existe $x \in]a,+\infty[$ tal que $f'(x) = 0$. [003948]

Ejercicio 2283 Fórmula de incrementos finitos con $\theta = \frac{1}{2}$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que : $\forall a,b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Demostrar que f es un polinomial de grado menor o igual que 2.

Solución ▼ [003949]

Ejercicio 2284 Función $\mathscr{C}^\infty$ acotada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ acotada.

1. Demostrar que si una derivada, $f^{(k)}$, $k \geqslant 2$, admite un número finito de ceros, entonces las derivadas anteriores, $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$, tienden a 0 en $\pm\infty$.
2. Deducir que para todo $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ se anula al menos $k-1$ veces en $\mathbb{R}$.

[003950]

Ejercicio 2285 Distancia a la cuerda

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$.

1. Se supone que $f(a)=f(b)=0$. Sea $c\in\,]a,b[$. Demostrar que existe $d\in\,]a,b[$ tal que :
$$f(c)=-\frac{(c-a)(b-c)}{2}f''(d).$$
(Considerar $g(t)=f(t)+\lambda(t-a)(b-t)$, donde λ se elige de manera que $g(c)=0$).
2. Caso general : Sea $c\in\,]a,b[$. Demostrar que existe $d\in\,]a,b[$ tal que :
$$f(c)=\frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b)-\frac{(c-a)(b-c)}{2}f''(d).$$

[003951]

Ejercicio 2286 Desviación de un polinomio de interpolación

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^n$, $a_1,\dots,a_n$, n puntos distintos en $\mathbb{R}$, y P el polinomio de Lagrange tomando los mismos valores que f en los puntos a_i. Se define $Q(x)=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$. Demostrar que : $\forall b\in\mathbb{R},\ \exists\ c\in\mathbb{R}$ tal que $f(b)=P(b)+Q(b)f^{(n)}(c)$.
(Considerar $g(t)=f(t)-P(t)-\lambda Q(t)$, donde λ se elige de manera que $g(b)=0$). [003952]

Ejercicio 2287 Polinomios de Legendre

Se establece $f(t)=(t^2-1)^n$.

1. Demostrar que : $\forall k\in\{0,\dots,n-1\},\ f^{(k)}(1)=f^{(k)}(-1)=0$.
2. Calcular $f^{(n)}(1)$ y $f^{(n)}(-1)$.
3. Demostrar que $f^{(n)}$ se anula al menos n veces en el intervalo $]-1,1[$.

Solución ▼ [003953]

Ejercicio 2288 Raíces de x^n+ax+b

Sea $n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$, y $a,b\in\mathbb{R}$. Demostrar que la ecuación $x^n+ax+b=0$ no puede tener más de dos raíces reales distintas si n es par, y más de tres raíces reales distintas si n es impar. [003954]

Ejercicio 2289 Raíces de $P(x)-\mathrm{e}^x$

Sea P un polinomio. Demostrar que existe a lo sumo un número finito de reales x tales que $P(x)=\mathrm{e}^x$.
[003955]

Ejercicio 2290 Límite de $1/(n+1)+\cdots+1/2n$

Se quiere calcular $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

1. Demostrar la existencia de ℓ.
2. Sea $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ derivable tal que $f(0)=0$. Demostrar que $f\left(\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)\to\ell f'(0)$, cuando $n\to\infty$.
3. Se toma $f(x)=\ln(1+x)$. Determinar ℓ.

[003956]

Ejercicio 2291 Cálculo del límite

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable tal que $f(0)=0$. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Solución ▼ [003957]

Ejercicio 2292 Suma $1/k\ln k$

Para $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, aplicar el teorema de incrementos finitos a $x\mapsto\ln(\ln x)$ sobre $[k,k+1]$. Deducir que la serie de término general $\frac{1}{k\ln k}$ es divergente. [003958]

Ejercicio 2293 $f'(x)f'(f(x))=1$

Encontrar todas las aplicaciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivables tales que : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x))=1\\ f(0)=0 \text{ y } f'(0)>0.\end{cases}$

Solución ▼ [003959]

Ejercicio 2294 $f\circ f=f$

Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ derivable tal que $f\circ f=f$. Demostrar que f es constante o bien $f=\mathrm{Id}_{[0,1]}$. [003960]

Ejercicio 2295 Derivabilidad uniforme

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0 \text{ tal que } \forall x,y\in[a,b],\ \text{si } 0<|x-y|<\delta,\ \text{entonces } \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x)\right|\leqslant\varepsilon.$$

[003961]

Ejercicio 2296 Formas indeterminadas

Sean $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones tales que : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R},\ u(x)\neq v(x)\\ \lim\limits_{x\to0}u(x)=\lim\limits_{x\to0}v(x)=a>0.\end{cases}$

1. Determinar $\lim\limits_{x\to0}\frac{u^v-v^v}{u-v}$.
2. Determinar $\lim\limits_{x\to0}\frac{u^v-v^u}{u^u-v^v}$.

Solución ▼ [003962]

Ejercicio 2297 $(1+k)(1+k^2)\cdots(1+k^n)$

1. Demostrar que : $\forall x\geqslant-1,\ \ln(1+x)\leqslant x$.
2. Sea $k\in\,]-1,1[$. Sea $u_n=(1+k)(1+k^2)\cdots(1+k^n)$. Demostrar que la sucesión (u_n) es convergente. (Tratar por separado los casos $k\geqslant0$, $k<0$).

Solución ▼ [003963]

Ejercicio 2298 Derivada n-ésima de $\cos^3 x$

Calcular la derivada n-ésima de la función $x\mapsto\cos^3 x$. [003964]

Ejercicio 2299 Derivada n-ésima de $\arctan x$ y e^{x^3}

Establecer una fórmula de recurrencia para las derivadas sucesivas de funciones : $f : x \mapsto \arctan x$ y $g : x \mapsto e^{x^3}$.

Solución ▼ [003965]

Ejercicio 2300 Derivada n-ésima de $(x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$

Calcular la derivada n-ésima de $x \mapsto (x^3 + 2x^2 - 5)e^{-x}$.

Solución ▼ [003966]

Ejercicio 2301 Ensi Chimie P 94

Sea $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \operatorname{sen} x$. Calcular $f^{(n)}(x)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [003967]

Ejercicio 2302 Derivada n-ésima de $x^n(1-x)^n$

Calcular la derivada n-ésima de $x \mapsto x^n(1-x)^n$. Deducir el valor de $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Solución ▼ [003968]

Ejercicio 2303 Derivada n-ésima de $t^{n-1}\ln(t)$ y $t^{n-1}e^{1/t}$

Calcular $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\ln t\right)$, y $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{n-1}\exp(1/t)\right)$ (probar $n = 1, 2, 3$).

Solución ▼ [003969]

Ejercicio 2304 Derivada n-ésima de $f(x^2)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^n$. Se define $g(x) = f(x^2)$.

1. Demostrar que existen enteros $a_{n,k}$ tales que : $\forall x,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=[(n+1)/2]}^{n} a_{n,k} f^{(k)}(x^2)(2x)^{2k-n}$.
2. Calcular $a_{n,k}$ en función de n y k.

Solución ▼ [003970]

Ejercicio 2305 Derivada n-ésima de $f(\frac{1}{x})$

Sea f una función n veces derivable en un intervalo I que no contiene a 0, y $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Establecer : $g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{x^{2n-p}} C_n^p f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$. [003971]

Ejercicio 2306 Derivadas de e^{-1/x^2}

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ & f(0) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en 0 y $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$. [003972]

Ejercicio 2307 $(f(2t) - f(t))/t$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{f(2t)-f(t)}{t} \to a$ (si $t \to 0$. Demostrar que f es derivable en 0 y $f'(0) = a$.
[003973]

Ejercicio 2308 $\operatorname{sen} x - 3x/\pi + 4x^3/\pi^3 \geqslant 0$

Se establece $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{3x}{\pi} + \frac{4x^3}{\pi^3}$. Demostrar que : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$ (buscar el signo de $f^{(4)}$). [003974]

Ejercicio 2309 Curvas homotéticas

Sea $a > 0,\ a \neq 1$. Se denota $\mathscr{C}$ la curva de ecuación : $y = \ln x$, y $\mathscr{C}'$ el de la ecuación : $y = a \ln x$.

1. Demostrar que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ tienen una y solo una tangente común.
2. Demostrar que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son homotéticos.

Solución ▼ [003975]

Ejercicio 2310 Matexo

Sea f una aplicación derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f'(x) \geqslant 0$. Demostrar que $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ es un intervalo.

Solución ▼ [003976]

Ejercicio 2311 Mines MP 2000

Demostrar que para todo x real, existe $a(x)$ única tal que $\int_x^{a(x)} e^{t^2}\, dt = 1$. Demostrar que a es indefinidamente derivable, y que su gráfico es simétrico con respecto a la segunda bisectriz.

Solución ▼ [003977]

Ejercicio 2312 $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$ (Central MP 2003)

Encontrar todas las funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables tales que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

Solución ▼ [003978]

Ejercicio 2313 $f' = f^{-1}$ (Ens Cachan MP* 2003)

Se denota E el conjunto defunciones f de clase $\mathscr{C}^1$ biyectivas de $]0,+\infty[$ sobre $]0,+\infty[$ tales que $f' = f^{-1}$.

1. Encontrar un elemento de E del tipo $x \mapsto cx^m$, donde c y m son reales.
2. ¿Cuál es el límite en 0 de f ?
3. Demostrar que f es un $\mathscr{C}^\infty$ difeomorfismo de $]0,+\infty[$ sobre $]0,+\infty[$.
4. Demostrar que f admite un único punto fijo.
5. Sea g un segundo elemento de E. Demostrar que g admite el mismo punto fijo que f.

Solución ▼ [003979]

Ejercicio 2314 $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$, Polytechnique MP* 2006

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable tal que $f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1$. Demostrar que f es nula.

Solución ▼ [003980]

Ejercicio 2315 ***

Sea $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Demostrar que f es afín.

Solución ▼ [005407]

Ejercicio 2316 **

Sea f una función convexa en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en I e incluso derivable a la derecha y a la izquierda en todo punto de I.

Solución ▼ [005410]

Ejercicio 2317 *** Desigualdades de convexidad

1. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, n reales positivos o nulos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, n reales estrictamente positivos tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Demostrar que $x_1^{\alpha_1} .. x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Deducir que $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
2. Sean p y q dos reales estrictamente positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Demostrar que, para todos los reales a y b positivos o nulos, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, con igualdad si y solo si $a^p = b^q$.
   (b) Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$, $2n$ números complejos. Demostrar que :
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Desigualdad de HÖLDER).}$$
   (c) Demostrar que la función $x \mapsto x^p$ es convexa y así reencontrar la desigualdad de HÖLDER.
   (d) Encontrar una demostración directa y simple en el caso $p = q = 2$ (desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ).

Solución ▼ [005411]

Ejercicio 2318 ***I

Demostrar que la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y 0 si $x = 0$ es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005414]

Ejercicio 2319 **** Cualquier función derivada verifica el teorema de valores intermedios

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I, con valores en $\mathbb{R}$. Sean a y b dos puntos distintos de I verificando $f'(a) < f'(b)$ y sea en fin un real m tal que $f'(a) < m < f'(b)$.

1. Demostrar que existe $h > 0$ tal que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < m < \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$.
2. Demostrar que existe y en $[a,b]$ tal que $m = \dfrac{f(y+h) - f(y)}{h}$, luego que existe x tal que $f'(x) = m$.

Solución ▼ [005417]

Ejercicio 2320 *IT

Estudiar la derivabilidad del lado derecho en 0 de la función $f: x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Solución ▼ [005419]

Ejercicio 2321 **

Sea P un polinomio real de grado mayor o igual que 2.

1. Demostrar que si P solo tiene raíces simples y reales, es lo mismo con P'.
2. Demostrar que si P se divide en $\mathbb{R}$, es lo mismo con P'.

Solución ▼ [005420]

Ejercicio 2322 **

Sea f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}_+^*$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Solución ▼ [005422]

Ejercicio 2323 ***

Sea f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ verificando para todo x real, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En notando que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, demostrar que f' es constante entonces determinar f.

Solución ▼ [005423]

Ejercicio 2324 ***I

Sea f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ verificando $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Indicación. Considerar $g(x) = e^x f(x)$).

Solución ▼ [005424]

79 125.01 Fórmula de Taylor

Ejercicio 2325

Sea f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calcular $f^{(n)}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001267]

Ejercicio 2326

Sea a un número real y $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2. Se supone f y f'' acotadas ; se establece $M_0 = \sup\limits_{x>a} |f(x)|$ y $M_2 = \sup\limits_{x>a} |f''(x)|$.

1. Aplicando una fórmula de Taylor que relaciona $f(x)$ y $f(x+h)$, demostrar que, para todo $x > a$ y todo $h > 0$, se tiene : $|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2} M_2 + \frac{2}{h} M_0$.
2. Deducir que f' es acotada en $]a, +\infty[$.
3. Establecer el siguiente resultado : sea $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2, con segunda derivada acotada y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001268]

Ejercicio 2327

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que : $a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c = 0$.

1. Aplicando la fórmula de Taylor en $[0,1]$ a la aplicación $\varphi : x \mapsto a\mathrm{e}^x + c\mathrm{e}^{-x}$ demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\theta_n \in]0,1[$ tal que :
$$-b = \frac{a\mathrm{e}^{\theta_n} + (-1)^n c\mathrm{e}^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$
2. Deducir que para n bastante grande $a\mathrm{e}^{\theta_n} + (-1)^n c\mathrm{e}^{-\theta_n} = 0$ ya que $a = b = c = 0$. (Se recuerda que $\mathrm{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.)

[001269]

Ejercicio 2328

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ y $f^{(n)}$ es acotada en $\mathbb{R}$, con $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(x)\right| = o(\frac{n!}{a^n})$, a constante fija. Demostrar que $\forall x \in [-a,a]$, $f(x) = 0$, ya que $f = 0$. [001270]

Ejercicio 2329

Sea $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $P \geqslant 0$. Sea $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$. Demostrar que $Q \geqslant 0$. [001271]

Ejercicio 2330

Sean a y b dos reales tales que $a < b$ y $f \in C^3([a,b], \mathbb{R})$. Demostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c)$ (se puede usar Taylor-Lagrange entre $a, \frac{a+b}{2}, b$). [001272]

Ejercicio 2331

Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Demostrar que
$$\forall x \in [-a,a], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a}|f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{t\in[-a,a]} |f''(t)|.$$
Aplicación : Demostrar que si $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, se tiene $\operatorname{sen} x \geqslant x\cos x - x^2$. [002690]

Ejercicio 2332 Determinando

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tres veces derivable en a. Estudiar $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [004004]

Ejercicio 2333 Derivadas nulas en 0

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0,$$
$$\exists\ \lambda > 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)} \right| \leqslant \lambda^n n!.$$

Demostrar que f es nula en el intervalo $]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}[$, luego en $\mathbb{R}$. [004005]

Ejercicio 2334 Funciones absolutamente monótonas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene $f^{(n)}(x) > 0$. Demostrar que para todo entero n, $\frac{f(x)}{x^n} \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$. [004006]

Ejercicio 2335 Función $\mathscr{C}^\infty$, con soporte compacto

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $f(0) = 1$, y $\forall x \geqslant \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$.

1. Demostrar que $\sup_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| \geqslant 2^n n!$.
2. Demostrar que para $n \geqslant 1$, $\sup_{\mathbb{R}^+} \left| f^{(n)} \right| > 2^n n!$.

Solución ▼ [004007]

Ejercicio 2336 Fórmula de Simpson

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^5$, impar, tal que $f'(0) = 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(5)}(x)| \leqslant M$. Demostrar que existe una constante λ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leqslant \lambda M |x^5|$.
2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^5$ tal que :

$$f'(a) = f'(b) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad \text{y} \qquad \forall x \in [a,b],\ |f^{(5)}(x)| \leqslant M.$$

Demostrar que $\left| f(b) - f(a) \right| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{2880}$.

Solución ▼ [004008]

Ejercicio 2337 $f'(x) - (f(b) - f(a))/(b-a)$

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Se denota $M = \sup |f''|$ y se supone $M > 0$.

1. Demostrar que : $\forall x \in]a,b[$, se tiene $\left| f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| < M \frac{b-a}{2}$.
2. Si $\left| f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| = M \frac{b-a}{2}$, demostrar que f es un polinomial de grado menor o igual que 2.

Solución ▼ [004009]

Ejercicio 2338 Matexo

Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Demostrar que :

$$\forall x \in [-a,a],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup |f''|.$$

Aplicación. Demostrar que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, se tiene $\operatorname{sen} x \geqslant x\cos x - x^2$.

Solución ▼ [004010]

Ejercicio 2339 Límite de θ

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^{n+1}$. Para a fijo, se escribe la fórmula de Taylor-Lagrange :

$$f(a+h) = f(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+h\theta_h).$$

Demostrar que si $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, entonces para h suficientemente pequeño, θ_h es único y $\theta_h \to \frac{1}{n+1}$, cuando $h \to 0$.

Solución ▼ [004011]

Ejercicio 2340 Différences finitas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ y $h > 0$. Se establece :

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h} \qquad \text{y} \qquad \Delta_h^p = \underbrace{\Delta_h \circ \Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h}_{p \text{ veces}}.$$

Por ejemplo, $\Delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$.

1. (a) Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ \theta \in]-1,1[$ tal que $\Delta_h f(x) = f'\left(x + \frac{\theta h}{2}\right)$.

   (b) Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ \theta' \in]-1,1[$ tal que $\Delta_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{24} f^{(3)}\left(x + \frac{\theta' h}{2}\right)$.

2. Demostrar por inducción en p que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\ \theta_p \in]-p,p[\text{ tal que } \Delta_h^p f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{ph^2}{24} f^{(p+2)}\left(x + \frac{\theta_p h}{2}\right).$$

[004012]

Ejercicio 2341 f y f'' están acotadas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^2$. Se supone : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \alpha$ y $|f''(x)| \leqslant \beta$.

1. Demostrar que : $\forall h > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{h} + \frac{h\beta}{2}$.
2. ¿Para qué valor de h se obtiene la mejor desigualdad ?

Solución ▼ [004013]

Ejercicio 2342 Desigualdad en f'

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función de clase $\mathscr{C}^2$. Se supone : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f''(x)| \leqslant M$.

1. Demostrar que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geqslant 0$.
2. Deducir que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$.
3. Se supone que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| = \sqrt{2Mf(x)}$. ¿Qué se puede decir de f ?

Solución ▼ [004014]

Ejercicio 2343 Mayoración de las derivadas de f

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^n$ tal que f y $f^{(n)}$ están acotadas en $\mathbb{R}$. Se quiere demostrar que las derivadas intermediarias son también acotadas sobre $\mathbb{R}$.

1. Caso $n=2$: Utilizar la fórmula de Taylor-Lagrange de orden 2.
2. Caso general : Utilizar el ejercicio 2340.

[004015]

Ejercicio 2344 $f''(x) \geqslant -\frac{k}{x^2}$

Sea $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $f(x)\to\ell\in\mathbb{R}$, cuando $x\to 0^+$, y : $\forall x>0,\ f''(x)\geqslant -\frac{k}{x^2}$. Demostrar que $xf'(x)\to 0$, cuando $x\to 0^+$. (Escribir la fórmula de Taylor-Lagrange de orden 2 entre x y $x+\varepsilon x$).

Solución ▼ [004016]

Ejercicio 2345 Ens PC* 2001

Sean P,Q dos polinomios con coeficientes reales, no constante, de coeficientes dominantes positivos. Se denota $x_1<x_2<\cdots<x_p$ las raíces de P' de multiplicidades $m_1,\dots,m_p$ y $y_1<y_2<\cdots<y_q$ las de Q' de multiplicidades $n_1,\dots,n_q$. Demostrar que existe f, $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo creciente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $P\circ f=Q$ si y solo si :

$$p=q,\ \forall i,\ P(x_i)=Q(y_i),\ \forall i,\ m_i=n_i.$$

Solución ▼ [004017]

Ejercicio 2346 ****

Sea f una función de clase C^3 sobre $\mathbb{R}$ verificando : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y)\leqslant (f(x))^2$. Demostrar que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)f''(x)\leqslant (f'(x))^2$.
(Indicación. Aplicar la fórmula de TAYLOR-LAPLACE entre x y $x+y$, luego entre x y $x-y$).

Solución ▼ [005418]

Ejercicio 2347 ***

Parte principal cuando n tiende a $+\infty$ de $u_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{1}{(n+k)^2}$.

Solución ▼ [005457]

80 125.02 Cálculos

Ejercicio 2348

Dar el desarrollo limitado en 0 de las funciones :

1. $x\mapsto \ln(\cos(x))$ (de orden 6).
2. $x\mapsto \tan(x)$ (de orden 7).
3. $x\mapsto \operatorname{sen}(\tan(x))$ (de orden 7).
4. $x\mapsto (\ln(1+x))^2$ (de orden 4).
5. $x\mapsto \exp(\operatorname{sen}(x))$ (de orden 3).
6. $x\mapsto \operatorname{sen}^6(x)$ (de orden 9.)

Solución ▼ [001237]

Ejercicio 2349

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=0$ si $x\leqslant 0$ y $f(x)=\exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ si no. Calcular, para todo $n\in\mathbb{N}$, el desarrollo limitado de f en 0. ¿Que conclusiones de pueden sacar ?
2. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(0)=0$ y, si $x\neq 0$: $g(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Demostrar que g tiene un desarrollo limitado de orden 2 en 0, pero no tiene segunda derivada (en 0).

[001238]

Ejercicio 2350

Determinar el límite en 0 de $\dfrac{\arctan x-\operatorname{sen} x}{\tan x-\operatorname{arcsen} x}$.

Solución ▼ [001239]

Ejercicio 2351

Hacer un desarrollo limitado o asintótica en a de orden n de :

1. $\ln\cos x$, $n=6$, $a=0$.
2. $\dfrac{\arctan x-x}{\operatorname{sen} x-x}$, $n=2$, $a=0$.
3. $\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, $n=3$, $a=0$.
4. $\ln\operatorname{sen} x$, $n=3$, $a=\frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}$, $n=4$, $a=+\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n=3$, $a=0$.
7. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$, $n=2$, $a=+\infty$.

Solución ▼ [001240]

Ejercicio 2352

Dare los desarrollos limitados en 0 de :

1. $\cos x.\ln(1+x)$ de orden 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ de orden 4.
3. $\operatorname{arcsen}\left(\ln(1+x^2)\right)$ de orden 6.
4. $\dfrac{\sinh x-x}{x^3}$ de orden 4.
5. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ de orden 3.

[001241]

Ejercicio 2353

Para cada una de las siguientes funciones, dar las condiciones de $\varepsilon(x)$, para que estas funciones sean desarrollos limitados en un vecindario de un punto y a un orden que se especifica.

1. $f_1(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+x^2\varepsilon(x)$
2. $f_2(x)=1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\varepsilon(x)$
3. $f_3(x)=(x-2)+\dfrac{(x-2)^2}{5}+(x-2)^3\varepsilon(x)$
4. $f_4(x)=x^2-x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$
5. $f_5(x)=x^3+3x^2-x+1+(x-1)^2\varepsilon(x)$
6. $f_6(x)=(x-2)^2+(x-2)-2+(x-2)\varepsilon(x)$
7. $f_7(x)=(2x+x^2+1+x^2\varepsilon(x))(-x+3+x^2-x^3\varepsilon(x))$.

[001242]

Ejercicio 2354

1. Desarrollo limitado en 1 de orden 3 de $f(x)=\sqrt{x}$.
2. Desarrollo limitado en 1 de orden 3 de $g(x)=e^{\sqrt{x}}$.
3. Desarrollo limitado de orden 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $h(x)=\ln(\operatorname{sen} x)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001243]

Ejercicio 2355

Dar un desarrollo limitado de orden 2 de $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ en 0. Deducir un desarrollo de orden 2 en $+\infty$. Calcular un desarrollo de orden 1 en $-\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001244]

Ejercicio 2356

Dar un desarrollo limitado en 0 de orden 10 de :

1. $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$.
2. $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = F(x^2)-F(x)$, donde F es una primitiva de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

[001245]

Ejercicio 2357

Dar el DL de orden 2 en $+\infty$ de :

$$x \to \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}e^{\frac{x}{x-1}}.$$

[001246]

Ejercicio 2358

Calcular

$$\ell = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x.$$

Dar un equivalente de

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$$

cuando $x \to +\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002657]

Ejercicio 2359

Parte A

1. Sean a y z dos reales. Sea f una función de clase C^{n+1} en el segmento de extremidades a y z y ϕ un polinomio de grado n. Demostrar que para todo t comprendido en el intervalo $[0,1]$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}\left(a+t(z-a)\right)\\&=-(z-a)\phi^{(n)}(t)f'\left(a+t(z-a)\right)+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}\left(a+t(z-a)\right).\end{aligned}$$

2. (a) Demostrar que la función $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}$ es extensible por continuidad en cero, que su extensión es indefinidamente derivable y admite desarrollos limitados en cero de la forma :

$$1-\frac{t}{2}+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_nt^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n+1}),$$

donde los b_i son reales que no se busca determinar. Demostrar que la derivada n-ésima en cero, denotada $\phi_n(z)$, de la función $t\mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ es un polinomio en z de grado n y que

$$\phi_n(z)=z^n-\tfrac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2b_1z^{n-2}+C_n^4b_2z^{n-4}+\cdots+C_n^{2N}b_Nz^{n-2N},$$

donde $N=E(\frac{n-1}{2})$, E denotando la función de parte entera.

(b) Demostrar que $nz^{n-1}=\phi_n(z+1)-\phi_n(z)$

3. Demostrar que :

(i) $\phi_n^{(n-k)}(1)=\phi_n^{(n-k)}(0),\ (2\leqslant k\leqslant n)$, (ii) $\phi_n^{(n-2k-1)}(0)=0,\ (1\leqslant k\leqslant N)$,

(iii) $\phi_n^{(n-2k)}(0)=\frac{n!b_k}{(2k)!},\ (1\leqslant k\leqslant N)$, (iv) $\phi_n^{(n-1)}(0)=-\frac{1}{2}n!$,

(v) $\phi_n^{(n-1)}(1)=+\frac{1}{2}n!$, (vi) $\phi_n^{(n)}=n!$.

4. (a) Se supone f de clase C^{2n+1}. Demostrar que

$$\begin{aligned}0=f(z)-f(a)-\frac{z-a}{2}\left[f'(z)+f'(a)\right]+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z)-f^{(2m)}(a)\right]\\-\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)f^{(2n+1)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt\end{aligned}$$

(b) Inferir que si F es de clase C^{2n} sobre $[a,a+r\omega]$, donde $r\in\mathbb{N}$ y $\omega>0$, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^{a+r\omega}F(x)dx=\omega\Big[\frac{1}{2}F(a)+F(a+\omega)+\cdots+F(a+(r-1)\omega)+\frac{1}{2}F(a+r\omega)\Big]\\-\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+r\omega)-F^{(2m-1)}(a)\right]+R_n,\end{aligned}$$

donde

$$R_n=\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)\sum_{m=0}^{r-1}F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)dt.$$

Parte B

1. Sea $u_k : x>0, \mapsto \ln(x+k)-\ln(k)+x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right),\ (k\in\mathbb{N}^*)$
Demostrar que para todo x estrictamente positivo, la serie $\sum_{k\geqslant 1}u_k(x)$ es convergente. Sea para la sucesión $G(x)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$.

2. Demostrar que G verifica la ecuación funcional

$$\forall x>0,\ \ G(x+1)=G(x)-\ln(x).$$

3. Inferir que $\forall m\in\mathbb{N}$, $\exp(-G(m+1))=m!$

4. Sea x e y dos reales estrictamente positivos. Demostrar que la serie

$$\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$

es convergente y que su suma es $G(y)-G(x)-\ln y+\ln x$.

5. Demostrar usando A que para todos los enteros positivos n y p

$$\sum_{k=0}^{n}\ln(y+k)-\ln(x+k)=\int_0^n f(t)dt+\frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big)$$
$$+\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-f^{(2h-1)}(0)\big)+T_{p,n}(x,y),$$

donde $f:t\mapsto\ln(y+t)-\ln(x+t)$ y $T_{p,n}(x,y)$ es una expresión que se debe precisar.

6. Demostrar que $R_p(x,y)=\lim\limits_{n\to+\infty}T_{p,n}(x,y)$ existe.

7. Sea $g(z)=z\ln z-z-\frac{1}{2}\ln z+\sum\limits_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{z^{2h-1}}$. Demostrar que $G(y)+g(y)=G(x)+g(x)+R_p(x,y)$

8. Demostrar que $R_p(x,y)=O\left(\frac{1}{\left[\inf(x,y)\right]^{2p-1}}\right)$, cuando $\inf(x,y)\to+\infty$.

9. Demostrar usando la fórmula de Stirling que $G(m)+g(m)\to\frac{1}{2}\ln 2\pi$, cuando $m\to+\infty$.

10. Demostrar que

$$G(y)=-y\ln y+y+\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{y^{2h-1}}+O(\frac{1}{y^{2p-1}})$$

11. Dar una expansión asintótica de $\ln(m!)$, cuando m tiende a $+\infty$ a un $O(\frac{1}{m^7})$ cerca.

Solución ▼ [002683]

Ejercicio 2360 Cálculo de DL

Funciones trigonométricas

$$x/\operatorname{sen} x = 1 + x^2/6 + 7x^4/360 + o(x^4)$$
$$1/\cos x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$$
$$\ln(\operatorname{sen} x/x) = -x^2/6 - x^4/180 - x^6/2835 + o(x^6)$$
$$\exp(\operatorname{sen} x/x) = \mathrm{e}(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$$
$$\sqrt{\tan x} = 1 + h + h^2/2 + o(h^2), \;\; h = x - \pi/4$$
$$\operatorname{sen}(x + x^2 + x^3 - x^4) = x + x^2 + 5x^3/6 - 3x^4/2 + o(x^4)$$
$$\ln(x \tan(1/x)) = x^{-2}/3 + 7x^{-4}/90 + o(1/x^4)$$
$$(1 - \cos x)/(\mathrm{e}^x - 1)^2 = 1/2 - x/2 + x^2/6 + o(x^2)$$
$$\operatorname{sen}((\pi \cos x)/2) = 1 - \pi^2 x^4/32 + \pi^2 x^6/192 + o(x^6)$$
$$\cos x \ln(1 + x) = x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^4)$$
$$(\operatorname{sen} x - 1)/(\cos x + 1) = -1/2 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$$
$$\ln(2\cos x + \tan x) = \ln 2 + x/2 - 5x^2/8 + 11x^3/24 - 59x^4/192 + o(x^4)$$
$$\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}(1 - x^2/2 + x^4/6) + o(x^5)$$

Funciones circulares inversas

$$\operatorname{arcsen}^2 x = x^2 + x^4/3 + 8x^6/45 + o(x^6)$$
$$1/\operatorname{arcsen}^2 x = x^{-2} - 1/3 - x^2/15 + o(x^2)$$
$$\arctan \sqrt{(x+1)/(x+2)} = \pi/4 - x^{-1}/4 + 3x^{-2}/8$$
$$\arccos(\operatorname{sen} x/x) = |x|/\sqrt{3}(1 - x^2/90) + o(1/x^3)$$
$$1/\arctan x = x^{-1} + x/3 - 4x^3/45 + 44x^5/945 + o(x^5)$$
$$\operatorname{arcsen} \sqrt{x} = \pi/6 + 1/\sqrt{3}(2h - 4h^2/3 + 32h^3/9) + o(h^3), \;\; h = x - \tfrac{1}{4}$$
$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}^2 x) = x^2 - x^4/3 + 19x^6/90 - 107x^8/630 + o(x^8)$$
$$\arctan(1 + x) = \pi/4 + x/2 - x^2/4 + x^3/12 + o(x^4)$$
$$\operatorname{arcsen} x/(x - x^2) = 1 + x + 7x^2/6 + o(x^2)$$
$$\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x} = \mathrm{e}^{\pi/6}(1 + 2h/\sqrt{3} + 2(1 + \sqrt{3})h^2/(3\sqrt{3})) + o(h^2), \;\; h = x - \tfrac{1}{2}$$
$$\mathrm{e}^{1/x} \arctan x = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)x^{-1} + (\frac{\pi}{4} - 1)x^{-2} + (\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6})x^{-3} + o(1/x^3)$$

Exponencial y logaritmo

$$x/(\mathrm{e}^x - 1) = 1 - x/2 + x^2/12 + o(x^2)$$
$$\ln x/\sqrt{x} = h - h^2 + 23h^3/24 + o(h^3), \;\; h = x - 1$$
$$\ln((2 - x)/(3 - x^2)) = \ln(2/3) - x/2 + 5x^2/24 + o(x^2)$$
$$\ln(1 + x)/(1 - x + x^2) = x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$$
$$\operatorname{ch} x/\ln(1 + x) = x^{-1} + 1/2 + 5x/12 + o(x)$$
$$\ln(\ln(1 + x)/x) = -x/2 + 5x^2/24 - x^3/8 + o(x^3)$$
$$\ln(a^x + b^x) = \ln 2 + x \ln \sqrt{ab} + x^2 \ln^2(a/b)/8 + o(x^2)$$
$$\exp(1/x)/x^2 = \mathrm{e}(1 - 3h + 13h^2/2 - 73h^3/6) + o(h^3), \;\; h = x - 1$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}\operatorname{argth}(\operatorname{sen} x) &= x + x^3/6 + x^5/24 + o(x^5)\\ \operatorname{argsh}(\mathrm{e}^x) &= \ln(1+\sqrt{2}) + 1/\sqrt{2}(x + x^2/4) + o(x^2)\end{aligned}$$

Formas exponenciales

$$\begin{aligned}(1-x+x^2)^{1/x} &= \mathrm{e}^{-1}(1 + x/2 + 19x^2/24) + o(x^2)\\ ((1+x)/(1-x))^{\alpha} &= 1 + 2\alpha x + 2\alpha^2x^2 + 2\alpha(2\alpha^2+1)x^3/3 + o(x^3)\\ (\operatorname{sen} x/x)^{2/x^2} &= \mathrm{e}^{-1/3}(1 - x^2/90) + o(x^3)\\ (\operatorname{sen} x/x)^{3/x^2} &= \mathrm{e}^{-1/2}(1 - x^2/60 - 139x^4/151200) + o(x^4)\\ (1+\operatorname{sen} x)^{1/x} &= \mathrm{e}(1 - x/2 + 7x^2/24) + o(x^2)\\ (1+\operatorname{sen} x + \cos x)^x &= 1 + x\ln 2 + x^2(\ln^2 2 + 1)/2 + o(x^2)\\ (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} &= 1 - h^2/2 + 7h^4/24 + o(h^4),\ \ h = x - \tfrac{\pi}{2}\\ (\tan x)^{\tan 2x} &= \mathrm{e}^{-1}(1 + 2h^2/3 + 4h^4/5) + o(h^4),\ \ h = x - \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Desarrollar primero $\ln((1+x)/(1-x))$.

Radicales

$$\begin{aligned}x\sqrt{(x-1)/(x+1)} &= 1/\sqrt{3}(2 + 5h/3 + h^3/54) + o(h^3),\ \ h = x-2\\ \sqrt{1+\sqrt{1-x}} &= \sqrt{2}(1 - x/8 - 5x^2/128 - 21x^3/1024) + o(x^3)\\ \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} &= |x|/\sqrt{2}(1 + x^2/8 + 7x^4/128) + o(x^5)\\ \mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x} &= x^2 - x^3/3 + 2x^4/3 - 13x^5/15 + o(x^5)\end{aligned}$$

$$(\sqrt[3]{x^3+x^2} + \sqrt[3]{x^3-x^2})/x = 2 - 2x^{-2}/9 + o(1/x^3).$$

[004018]

Ejercicio 2361 EIT 1999

Calcular el desarrollo limitado de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 de orden 3.

Solución ▼ [004019]

Ejercicio 2362 IT

Estudiar la existencia y el valor eventual de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/(2x-\pi)}$
2. $\lim\limits_{x\to\pi/2} |\tan x|^{\cos x}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$
4. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\ln|x|}$
5. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x \cdot \mathrm{e}^{1/(1-\operatorname{sen} x)}$
6. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\tan x}{1+\operatorname{th} x}\right)^{1/\operatorname{sen} x}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to\mathrm{e}\\ x<\mathrm{e}}} (\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1}$

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{(\operatorname{sen}x)^x-x^{\operatorname{sen}x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

13. $\lim\limits_{x\to 1/\sqrt{2}} \dfrac{(\operatorname{arcsen}x)^2-\dfrac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\cos(a+\frac{1}{x})}{\cos a}\right)^x$, donde $\cos a\neq 0$).

Solución ▼ [005426]

Ejercicio 2363 IT

Determinar los desarrollos limitados de orden solicitado en un vecindario de los puntos indicados :

1. $\dfrac{1}{1-x^2-x^3}$, orden 7 en 0
2. $\dfrac{1}{\cos x}$, orden 7 en 0
3. $\arccos\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$, orden 3 en 0
4. $\tan x$, orden 3 en $\frac{\pi}{4}$
5. $(\operatorname{ch}x)^{1/x^2}$, orden 2 en 0
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$, orden 8 en 0
7. $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, orden 3 en 1
8. $\arctan(\cos x)$, orden 5 en 0
9. $\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$, orden 2 en 0
10. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{arcsen}^2 x}$, orden 5 en 0
11. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$, orden 10 en 0
12. $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$, orden 100 en 0
13. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$, orden 3 en π

Solución ▼ [005427]

Ejercicio 2364 ***

Sea $0<a<b$. Hacer el estudio completo de la función $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Solución ▼ [005428]

Ejercicio 2365 **

Hacer el estudio en un vecindario de $+\infty$ de $\sqrt{x^2-3}-\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1}$.

Solución ▼ [005429]

Ejercicio 2366 **

Sea $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$. Calcular $f^{(n)}(0)$ en menos de 10 segundos entonces $f^{(n)}(x)$, para $|x|\neq 1$ en un poco más de tiempo).

Solución ▼ [005430]

Ejercicio 2367 IT

1. Equivalente simple en $+\infty$ y $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1$.
2. Equivalente simple en 0, 1, 2 y $+\infty$ de $3x^2-6x$
3. Equivalente simple en 0 de $(\operatorname{sen}x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\operatorname{sen}x}$.

4. Equivalente simple en $+\infty$ de $x^{\operatorname{th} x}$.
5. Equivalente simple en 0 de $\tan(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(\tan x)$.

Solución ▼ [005431]

Ejercicio 2368 **IT

Desarrollo asintótico de precisión $\frac{1}{n^3}$ de $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$.

Solución ▼ [005432]

Ejercicio 2369 **IT

1. Desarrollo asintótico de precisión x^2 en 0 de $\frac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$.
2. Desarrollo asintótico de precisión $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$ de $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$.

Solución ▼ [005433]

Ejercicio 2370 **

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \mathbb{R}$, se establece $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Equivalente simple cuando n tiende a $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
2. La misma pregunta para $\mathrm{e}^{-a} f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Solución ▼ [005434]

Ejercicio 2371 ***I

1. Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene solución única en el intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$, para n entero natural dado. Se denota x_n esta solución.
2. Encontrar una expansión asintótica de x_n, con precisión $\frac{1}{n^2}$.

Solución ▼ [005437]

Ejercicio 2372

1. Demostrar que la ecuación $x + \ln x = k$ admite, para k real dado, una solución única en $]0, +\infty[$, que se denota x_k.
2. Demostrar que, cuando k tiende a $+\infty$, se tiene : $x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, donde a, b y c son constantes a determinar.

Solución ▼ [005438]

Ejercicio 2373 **

Sea $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ y 1 si $x = 0$.

1. Demostrar que f admite en 0 un desarrollo limitado de orden 2.
2. Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}$.
3. Demostrar que f' no admite en 0 ningún desarrollo limitado del orden que sea.

Solución ▼ [005439]

Ejercicio 2374 **IT

Estudiar en un vecindario de 0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$ la existencia de una tangente.

Solución ▼ [005440]

Ejercicio 2375 **I

1. ¿La función $x \mapsto \arccos x$ admite en 1 (a la izquierda) un desarrollo limitado de orden 0, de orden 1 ?
2. Equivalente simple de $\arccos x$ en 1.

Solución ▼ [005441]

Ejercicio 2376 ***

1. Dar el desarrollo limitado de orden n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
2. Sea a_k el k-ésimo coeficiente. Demostrar que a_k es el número de soluciones en $\mathbb{N}^2$ de la ecuación $p + 2q = k$.

Solución ▼ [005442]

Ejercicio 2377

Dar el desarrollo limitado en 0 de las funciones :

1. $\cos x \cdot \exp x$, de orden 3
2. $(\ln(1+x))^2$, de orden 4
3. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$, de orden 6
4. $\exp\left(\operatorname{sen}(x)\right)$, de orden 4
5. $\operatorname{sen}^6(x)$, de orden 9
6. $\ln\left(\cos(x)\right)$, de orden 6
7. $\frac{1}{\cos x}$, de orden 4
8. $\tan x$, de orden 5 (o 7, para los más valientes)
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$, de orden 3
10. $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$, de orden 6.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006888]

81 125.03 Aplicaciones

Ejercicio 2378

Calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001247]

Ejercicio 2379

Calcular los siguientes límites : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x)+x)}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^3\arctan(x) - x^4}{\cos(x^2)-1}$.

Solución ▼ [001248]

Ejercicio 2380

Estudiar la posición de la gráfica de la aplicación $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$, con respecto en su tangente en 0 y 1.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001249]

Ejercicio 2381

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. [001250]

Ejercicio 2382

Establecer para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ la desigualdad :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{3/2} - x^{3/2} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

[001251]

Ejercicio 2383

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x^2}{2} \leqslant e^x - x - 1 \leqslant \frac{x^2}{2}e^x$. [001252]

Ejercicio 2384

Sea $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$.

1. Demostrar que f es extensible por continuidad en 0.
2. Determinar un DL de f en 0 de orden 2.
3. Estudiar la derivabilidad de la extensión de f.

[001253]

Ejercicio 2385

Estudiar las ramas infinitas de las funciones :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

[001254]

Ejercicio 2386

Sea (1) la ecuación $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe un único $x_n \in [n, n+1[$ solución de (1).
2. Determinar un equivalente de x_n.

3. Hacer un DAS de $x_n - n$ en $+\infty$ en función de $\frac{1}{n}$ de orden 5.

[001255]

Ejercicio 2387

Calcular para $a \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \qquad \lim_{n\to\infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n.$$

[001256]

Ejercicio 2388

Calcular :

$$\ell = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x}\right)^{x\ln x}$$

y dar un equivalente de $\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{x\ln x} - \ell$, cuando $x \to 0$. [001257]

Ejercicio 2389

Sea $x \in \mathbb{R}^+$, se define $(u_n(x))_n$ y $(v_n(x))_n$ por :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)+v_n(x)}{2},\ v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)},\ u_0(x) = 1,\ v_0(x) = x.$$

1. Demostrar que estas dos sucesiones convergen al mismo límite ℓ_x.
2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por : $f(x) = \ell_x$. Calcular $f(1), f(0)$, dar $f(\frac{1}{x})$ en función de $f(x)$ si $x > 0$. Demostrar que f es creciente, deducir el sentido de variaciones de $x \to \frac{f(x)}{x}$.
3. Demostrar que f es derivable en 1 (usar $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$) ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^{+*}$, ya que f es continua en 0.
5. Dar la forma de la gráfica de f, especificar la tangente en 0 así como el comportamiento asintótico en $+\infty$.

[001258]

Ejercicio 2390

Sea $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$, se define :

$$u_n(x) = \left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Determinar $\ell_n = \lim_{x\to 0} u_n(x)$. [001259]

Ejercicio 2391

Determinar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1-\cos 3x)\arctan x}.$$

[001260]

Ejercicio 2392

Sean u, v, f definidas por :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}, \ \ v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \ \ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Dar un equivalente de f en un vecindario de $-\infty$, Deducir $\lim\limits_{-\infty} f$.
2. Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) - x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) + x$. Deducir la ecuación de una asíntota recta a la gráfica de f en $-\infty$ y posicionar f, con respecto a esta asíntota.
3. Mismo estudio en $+\infty$.

[001261]

Ejercicio 2393

Sea g la función $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\operatorname{sen} x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Dar el dominio de definición de g.
2. Demostrar que se extiende por continuidad en 0 en una función derivable.
3. Determinar la tangente en 0 en la gráfica de esta función y la posición de esta gráfica con respecto a esta.

Solución ▼ [001262]

Ejercicio 2394

Sean $f : x \mapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ y $g : x \mapsto (x+1)\exp(\frac{1}{x-1})$ dos funciones. Determinar si sus respectivas gráficas tienen asíntotas, luego la posición de las gráficas respecto a dichas asíntotas. [001263]

Ejercicio 2395

Demostrar que, para todo x real verificando $|x| \leqslant 1$:

$$\left| \frac{x + \operatorname{sen} 2x}{x^9 + x^2 - 3} \right| \leqslant 2.$$

[001264]

Ejercicio 2396

Determinar :

1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$ (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001265]

Ejercicio 2397

1. Sea g la función definida por :
$$g(x) = \frac{x+1}{1+x^2} + \arctan x.$$
   (a) ¿Cuál es el dominio de la definición de g ?
   (b) Estudiar sus variaciones.
   (c) Demostrar que g se anula una vez y solo una vez en $\mathbb{R}$ en un punto α comprendido entre -1 y 0 (no se pide especificar el valor de α).
   (d) Dibujar la gráfica de g.
2. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por :
$$f(x) = (x+1)\arctan x.$$
   (a) Calcular la derivada de f y establecer su tabla de variación.
   (b) ¿El gráfico de f tiene puntos de inflexión ? Si es sí, dar las coordenadas de este (o estos) point(s).
3. Dar la ecuación de la tangente en el punto de abscisas $x = 0$ al gráfico de f y la posición del gráfico con respecto a este tangente (en un vecindario de este punto).
4. Usando los resultados del ejercicio **? ?**, demostrar que :
   (a) $\frac{f(x)}{x} = (1+\frac{1}{x})(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x})$ si $x > 0$.
   (b) $\frac{f(x)}{x} = (1+\frac{1}{x})(-\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x})$ si $x < 0$.
5. Deducir la existencia de una función ε tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ y, para todo $x > 0$, se tiene :
$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + (\frac{\pi}{2} - 1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
   Establecer un resultado análogo para $x < 0$.
6. ¿Cuáles son las asíntotas de la gráfica de f ? Especificar la posición de este gráfico con respecto a estas asíntotas.
7. Dibujar la gráfica de f.

`[001266]`

Ejercicio 2398 Funciones circulares e hiperbólicas

---

1. $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \to \frac{2}{3}$, cuando $x \to 0$.
2. $\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sh} x - \tan x \operatorname{th} x}{\operatorname{sh}^4 x - \operatorname{th}^4 x} \to -\frac{1}{12}$, cuando $x \to 0$.
3. $(\operatorname{ch} x)^\alpha - (\operatorname{sh} x)^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$ cuando $x \to +\infty$
4. $\frac{\exp(x^2) - \operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{(\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{ch} 2x - \cos 2x)} \to \frac{1}{12}$, cuando $x \to 0$.
5. $(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x \to \frac{1}{\pi}$, cuando $x \to \frac{1}{2}$.
6. $\frac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} \to \frac{\pi}{12}$, cuando $x \to \frac{3}{2}$.

7. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{1-2\cos x} \to -\sqrt{3}$, cuando $x \to \frac{\pi}{3}$.
8. $\dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x} \to 1$, cuando $x \to 0$.
9. $\frac{1}{x} \ln \operatorname{ch} x \to 1$, cuando $x \to +\infty$.

[004020]

Ejercicio 2399 Logaritmo y exponencial

---

1. $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \to \frac{1}{2}$. cuando $x \to 0$
2. $\dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \to \pm\infty$, cuando $x \to 1$.
3. $\dfrac{x^a - a^x}{\log_a(x) - \log_x(a)} \to \dfrac{a^{a+1} \ln a(1 - \ln a)}{2}$, cuando $x \to a$.
4. $\left(\dfrac{a^x + b^x}{1 + c^x}\right)^{1/x} \to \exp\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)$, cuando $x \to 0$.
5. $\dfrac{x^{x^x}}{x^x - 1} \to 0$, cuando $x \to 0^+$.

[004021]

Ejercicio 2400 Exponentes variables

---

1. $x^{\arcsen x} \to 1$, cuando $x \to 0^+$.
2. $\dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} - 1}{x^x - 1} \to 1$, cuando $x \to 0^+$.
3. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to e^{2/\pi}$, cuando $x \to 1$.
4. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)} \to 1$, cuando $x \to 2^-$.
5. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x} \to e$, cuando $x \to 0$.
6. $(\cos 2x - 2\operatorname{sen} x)^{1/x} \to e^{-2}$. cuando $x \to 0$
7. $(\operatorname{sen} x)^{\tan x} \to 1$. cuando $x \to \pi/2$
8. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to e^{-1/\sqrt{2}}$, cuando $x \to \pi/4$.
9. $(\tan x)^{\cos x/\cos 2x} \to 1$, cuando $x \to (\pi/2)^-$.
10. $(\operatorname{sen} x)^{1/\ln x} \to e$, cuando $x \to 0^+$.
11. $(\ln x)^{x-1} \to 1$, cuando $x \to 1^+$.
12. $(\ln x)^{\ln(e-x)} \to - > 1$, cuando $x \to e^-$.

[004022]

Ejercicio 2401 Radicales

---

1. $\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\pi x/4)} \to 0$, cuando $x \to 1$.
2. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x} \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$.
3. $\dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{\operatorname{sen} x} \to 1$, cuando $x \to 0$.

[004023]

Ejercicio 2402 Sumas de cotangentes

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dar una CNS para que $\sum_{k=1}^{n} a_k \cot(kx)$ tenga un límite finito en 0.

Solución ▼

[004024]

Ejercicio 2403 $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$

Se establece $u_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$. Encontrar : $v_p = \lim_{n\to\infty} u_{n,p}$, $v = \lim_{p\to\infty} v_p$, $w_n = \lim_{p\to\infty} u_{n,p}$ y $w = \lim_{n\to\infty} w_n$.

Solución ▼ [004025]

Ejercicio 2404 Ensi P 91

Calcular $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{k}{n^2}$, luego $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, donde f es una función de clase $\mathscr{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ verificando $f(0)=0$.

Solución ▼ [004026]

Ejercicio 2405 Búsqueda de tangentes

Para cada una de las siguientes curvas, determinar la tangente para $x=0$ y la posición de la curva con respecto a esta tangente.

1. $y = \frac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{x}$.
2. $y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}$.
3. $y = \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x}$.
4. $y = (2e^x - e^{-x})^{1/x}$.
5. $y = \frac{2}{e^{2x}-1} - \frac{1}{x}$.
6. $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

Solución ▼ [004027]

Ejercicio 2406 Comparación de funciones

Se establece : $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\operatorname{sen} x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$. Precisar los positions relatives de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}_k$ en un vecindario de 0.

Solución ▼ [004028]

Ejercicio 2407 Búsqueda de asíntotas

Encontrar si las siguientes curvas admiten una asíntota en $+\infty$ y determinar la posición, si la hay :

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
2. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
3. $y = (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
4. $y = (x+1)\arctan(1+2/x)$.
5. $y = x.\arctan x.e^{1/x}.2$
6. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.
7. $y = \sqrt{x^2-x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Solución ▼ [004029]

82 125.04 Desarrollos limitados implícitos

Ejercicio 2408 $\tan(x) = x$

1. Demostrar que la ecuación $\tan x = x$ tiene una solución única x_n en $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $(n \in \mathbb{N})$.
2. ¿Qué relación tienen x_n y $\arctan(x_n)$?
3. Dar un DL de x_n en función de n de orden 0, para $n \to \infty$.
4. Tomando la relación encontrada en 2, obtener un DL de x_n de orden 2.

Solución ▼ Vidéo ■ [004037]

Ejercicio 2409 máximo de $x\cos^n x$

Se denota $f_n(x) = x\cos^n x$. Sea $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f_n(x_n)$ sea maximal.

1. Probar la existencia y unicidad de x_n.
2. Determinar $\lim_{n\to\infty} x_n$.
3. Demostrar que $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$ $(n \to \infty)$.
4. Encontrar un equivalente de $f_n(x_n)$.

Solución ▼ [004038]

Ejercicio 2410 Desarrollo asintótico

Sea $f : x \mapsto \frac{x+1}{x}\mathrm{e}^x$.

1. Dibujar la curva $\mathscr{C}$ representativa de f.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si λ es bastante grande, la recta de ecuación $y = \lambda$ corta $\mathscr{C}$ en dos puntos de abscisas $a < b$.
   (a) Demostrar que $a \sim \frac{1}{\lambda}$, y $\mathrm{e}^b \sim \lambda$, para $\lambda \to +\infty$.
   (b) Encontrar el límite de b^a, cuando λ tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [004039]

Ejercicio 2411 Polytechnique MP* 2000

Sea $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe un único x_n verificando $f(x_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Encontrar el límite y un equivalente de la sucesión (x_n) en $+\infty$.

Solución ▼ [004040]

Ejercicio 2412

Sea u_n una sucesión real tal que para todo n se tiene $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Encontrar un desarrollo asintótico de dos términos de u_n.

Solución ▼ [004041]

Ejercicio 2413 Mines MP 2001

Demostrar que para n entero $(n > 0)$ la ecuación $\mathrm{e}^x = n - x$ admite una única solución positiva x_n. Determinar los tres primeros términos del desarrollo asintótico de x_n en función de n.

Solución ▼ [004042]

Ejercicio 2414 Central MP 2001

Para todo n entero natural no nulo, se da $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$.

1. Demostrar que f_n admite una única raíz positiva denotada x_n.
2. Demostrar que la sucesión (x_n) converge a un límite ℓ y encontrar un equivalente de $x_n - \ell$.

Solución ▼ [004043]

83 125.05 Equivalentes

Ejercicio 2415 Búsqueda de equivalentes

Dar equivalentes simples para las siguientes funciones :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\operatorname{sen} x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0.

Solución ▼ Vidéo ■ [004044]

Ejercicio 2416 Aproximación de cos

Encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

sea un $o(x^n)$ en 0, con n maximal.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [004045]

Ejercicio 2417 Aproximación del sen

Encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen} x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ sea infinitamente pequeño de orden maximal.

Solución ▼ [004046]

Ejercicio 2418 Equivalente a $\arccos x$ en 1

Simplificar $\arccos(1-2x^2)$, encontrar un equivalente para $x \to 0$, luego dar un equivalente de $\arccos(u)$, para $u \to 1^-$. [004047]

Ejercicio 2419 $\operatorname{arcsen} \circ \arctan - \arctan \circ \operatorname{arcsen}$

1. Sean $P(X) = X + aX^3 + bX^5 + cX^7$ y $Q(X) = X + \alpha X^3 + \beta X^5 + \gamma X^7$. Hallar la parte de grado menor o igual que 7 de $P \circ Q - Q \circ P$.
2. Aplicación : Dar el DL de orden 7 en 0 de $\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)$.

Solución ▼ [004048]

Ejercicio 2420 $(u^v - v^u)/(u-v)$

Sean u, v dos funciones positivas, $u \sim v$, $u \to 0$. Demostrar que $\frac{u^v - v^u}{u-v} \sim -\ln(v)$. (Escribir $u = v + w$, con $w/v \to 0$) [004049]

Ejercicio 2421 Desarrollo asintótico de un recíproco

Sea $f : [-1,+\infty[\to [-\mathrm{e}^{-1},+\infty[, x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Demostrar que f es biyectiva y $f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. [004050]

Ejercicio 2422 Equivalente de $x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$

Determinar un equivalente simple en 0^+ de $f_k(x) = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$ (k veces x).

Solución ▼ [004051]

Ejercicio 2423 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$

Sea $\alpha \in]0,1[$.

1. Demostrar que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.
2. Deducir que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$, para $n \to \infty$.

[004052]

Ejercicio 2424 $(1+a_n/n)^n$

1. Sea $f(x) = \ln(1+x) - x$.
   (a) Estudiar f.
   (b) Encontrar un equivalente simple de f en 0.
   (c) Sea (x_n) una sucesión de reales tal que $f(x_n) = o(1/n)$. Demostrar que $nx_n^2 \to 0$, cuando $n \to \infty$.
2. Aplicación : Sea (a_n) una sucesión de reales. Demostrar que las siguientes dos propiedades son equivalentes :
   (a) $a_n = o(\sqrt{n})$.
   (b) $\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}^{a_n}$.

[004053]

84 125.99 Otro

Ejercicio 2425 DL de $(\mathrm{ch}\,x)^(1/x)$

1. Demostrar que $\frac{1}{x}\ln(\mathrm{ch}\,x)$ admite en $+\infty$ un desarrollo limitado generalizado a cualquier orden.
2. Deducir el desarrollo limitado de $(\mathrm{ch}\,x)^{1/x}$ en $+\infty$ de orden n cualquiera.

Solución ▼ [004030]

Ejercicio 2426 Teorema de división

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^n$. Sea $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Se supone que $f(x) = o(x^n)$.
   (a) Demostrar que : $\forall p \leqslant n,\ f^{(p)}(x) = o(x^{n-p})$, y : $\forall p < n,\ g^{(p)}(x) = o(x^{n-p-1})$.
   (b) Deducir que g es de clase $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0.
2. Demostrar el mismo resultado en el caso general.
3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones $\mathscr{C}^\infty$ tales que $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$. Demostrar que f/g se extiende a una función $\mathscr{C}^\infty$ en un vecindario de 0.

[004031]

Ejercicio 2427 DL de f^{-1}

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ de valuación 1. Demostrar que para todo entero $n \in \mathbb{N}$, existen dos polinomios Q_n y R_n únicas tales que :

$$\begin{cases} X = Q_n \circ P + R_n \\ \operatorname{grad} Q_n \leqslant n < \operatorname{v}(R_n). \end{cases}$$

Aplicación : Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva tal que $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, con $a_1 \neq 0$. Demostrar que f^{-1} admite un desarrollo limitado en 0 de orden n, y dar los dos primeros términos.

Solución ▼ [004032]

Ejercicio 2428 DL de $(1 - e^x)^n$

Desarrollar de dos modos $(1 - e^x)^n$ en 0 de orden $n+2$. Deducir $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^p$, para $p = 0, 1, \ldots, n+2$.

Solución ▼ [004033]

Ejercicio 2429 Aproximación de f''

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Determinar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$. [004034]

Ejercicio 2430 Derivación de un DL de orden 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa derivable tal que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h^2)$. Demostrar que f es dos veces derivable en a y $f''(a) = 0$ (comparar $f'(a+h)$ a tasas de crecimiento de f entre a y $a+h$, y entre $a+h$ y $a+2h$). Estudiar el caso donde $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{Lh^2}{2} + o(h^2)$. [004035]

Ejercicio 2431 $f(x+y)f(x-y) \leqslant f^2(x)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) \leqslant f^2(x)$. Demostrar que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)f''(t) \leqslant f'^2(t)$. [004036]

---

85 126.01 Funciones circulares inversas

Ejercicio 2432

Escribir bajo la forma $\frac{m}{n}\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $|m|$ y n primos entre sí, $\arcsin(\operatorname{sen}\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ y $\arctan(\tan\alpha)$ en los casos : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$. [000741]

Ejercicio 2433

Resolver las siguientes ecuaciones :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\operatorname{arcsen}(2x) - \operatorname{arcsen}(x\sqrt{3}) = \operatorname{arcsen}(x)$.

[000742]

Ejercicio 2434

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

[000743]

Ejercicio 2435

Sean las funciones $f : x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ y $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplificar las expresiones de $f(x)$ y $g(x)$.
2. Construir las gráficas de f y g.

[000744]

Ejercicio 2436

Una estatua de altura s se coloca en un pedestal de altura p.

1. ¿A qué distancia x_0 debe colocarse un observador (cuyo tamaño se supone despreciable) para ver la estatua desde un ángulo máximo α_0 ?
2. Verificar que $\alpha_0 = \arctan \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.
3. Aplicación a la Estatua de la Libertad : altura de 46 metros con un pedestal de 47 metros.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000745]

Ejercicio 2437

Demostrar las siguientes desigualdades :

$$\operatorname{arcsen} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \text{ si } 0 < a < 1; \qquad \arctan a > \frac{a}{1+a^2}c \text{ si } a > 0.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000746]

Ejercicio 2438

Escribir como una expresión algebraica

1. $\operatorname{sen}(\arccos x)$, $\cos(\operatorname{arcsen} x)$, $\cos(2 \operatorname{arcsen} x)$.
2. $\operatorname{sen}(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\operatorname{sen}(3 \arctan x)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000747]

Ejercicio 2439

Trazar las curvas representativas de las funciones

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x), \qquad x \mapsto f(x) = \operatorname{arcsen}((\operatorname{sen} x).$$

[000748]

Ejercicio 2440

Resolver las siguientes ecuaciones :

1. $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$.
2. $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} \frac{2}{5} + \operatorname{arcsen} \frac{3}{5}$.
3. $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000749]

Ejercicio 2441

Calcular $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$. [000750]

Ejercicio 2442

Simplificar las siguientes expresiones :

$$\arctan(\tan x), \ (-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{3\pi}{2}), \qquad \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \ (0 < x < 2\pi), \qquad \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

[000751]

Ejercicio 2443

Verificar

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\tfrac{\pi}{2}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000752]

Ejercicio 2444

Demostrar que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (se demuestra que $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{5}) \leqslant \frac{\pi}{8}$ y $0 \leqslant \arctan(\frac{1}{239}) \leqslant \frac{\pi}{2}$). [000753]

Ejercicio 2445

Estudiar la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2-k+1}.$$

Se quiere demostrar que converge (a ℓ) y se evalúa $\lim_{n\to\infty} n(u_n - \ell)$.

Indicación : ¿cuánto vale $\arctan a - \arctan b$? [000754]

Ejercicio 2446

Estudiar la función :

$$\phi : x \to \operatorname{arcsen} \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

[000755]

Ejercicio 2447

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación de incógnita x :

$$\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

[000756]

Ejercicio 2448 arcsen y arccos a partir de arctan

El lenguaje “Pascal” no tiene funciones arcsen y arccos. Definir $\operatorname{arcsen} x$ y $\arccos x$ usando la función arctan.

Solución ▼ [003914]

Ejercicio 2449 Fórmulas de adición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Simplificar $\arctan a + \arctan b$.

Solución ▼ [003915]

Ejercicio 2450 $\operatorname{arcsen} x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$

Resolver la ecuación : $\operatorname{arcsen} x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$.

Solución ▼ [003916]

Ejercicio 2451 $\operatorname{arcsen} \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Sea $x = \operatorname{arcsen} \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calcular $\cos 4x$ y deducir x.

Solución ▼ [003917]

Ejercicio 2452 arcotangentes

1. Simplificar $\arctan \frac{1-x}{1+x}$.
2. Simplificar $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
3. Simplificar $\arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
4. Simplificar $\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.
5. Simplificar $\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

Solución ▼ [003918]

Ejercicio 2453 $2\arcsen x+\arcsen f(x)=\frac{\pi}{6}$

¿Existe una función $f:D\to\mathbb{R}$ tal que : $\forall x\in D,\ 2\arcsen x+\arcsen f(x)=\frac{\pi}{6}$?

Solución ▼ [003919]

Ejercicio 2454 $\cos(3\arctan x)$ y $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Simplificar $\cos(3\arctan x)$ y $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$.

Solución ▼ [003920]

Ejercicio 2455 $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$

Simplificar $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$, para $x\in[0,2\pi]$.

Solución ▼ [003921]

Ejercicio 2456 Ecuación

Resolver : $2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsen\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Solución ▼ [003922]

Ejercicio 2457 $\frac{x}{2}-\arcsen\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{2}}$

Simplificar $\frac{x}{2}-\arcsen\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{2}}$, para $x\in[-\pi,\pi]$.

Solución ▼ [003923]

Ejercicio 2458 $\cos(\arctan(\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{x})))$

Simplificar $\cos(\arctan(\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{x})))$.

Solución ▼ [003924]

Ejercicio 2459 Ecuaciones con arctan

Resolver :

1. $\arctan 2x+\arctan 3x=\frac{\pi}{4}$.
2. $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$.
3. $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$.
4. $\arctan(x-3)+\arctan(x)+\arctan(x+3)=\frac{5\pi}{4}$.

Solución ▼ [003925]

Ejercicio 2460 Sumas notables

1. Demostrar que : $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.
2. Demostrar que : $\arcsen\frac{4}{5}+\arcsen\frac{5}{13}+\arcsen\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

[003926]

Ejercicio 2461 Sumas notables

1. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. Demostrar que : $\forall x \in \left]0,1\right],\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \operatorname{arcsen}(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

[003927]

Ejercicio 2462 $\arctan((x-\operatorname{sen} a)/\cos a)$

Sean $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2(x-\operatorname{sen} a)\cos a}{x^2-2x\operatorname{sen} a+1}\right)$ y $g(x) = \arctan\left(\frac{x-\operatorname{sen} a}{\cos a}\right)$. Verificar que f está bien definida, calcular $\operatorname{sen}\big(2g(x)\big)$ y comparar $f(x)$ y $g(x)$.

Solución ▼ [003928]

Ejercicio 2463 Polinomios de Chebicheff

Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ y $g_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Demostrar que f_n y g_n son funciones polinómicas. [003929]

Ejercicio 2464 Equivalente de $\arccos(1-x)$

Con la ayuda de un juicioso cambio de variable, encontrar $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$. [003930]

Ejercicio 2465 Matexo

Demostrar que : $\forall x \in \left]-1,1\right[,\ |\operatorname{arcsen}(x)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$. [003931]

Ejercicio 2466 ***IT

Dar el dominio de definición y calcular las siguientes funciones :

1. $x \mapsto \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$, 2. $x \mapsto \operatorname{arcsen}((\operatorname{sen} x)$, 3. $x \mapsto \cos(\arccos x)$,
4. $x \mapsto \arccos(\cos x)$, 5. $x \mapsto \tan(\arctan x)$, 6. $x \mapsto \arctan(\tan x)$.

Solución ▼ [005084]

Ejercicio 2467 ***IT

1. Calcular $\arccos x + \operatorname{arcsen} x$, para x elemento de $[-1,1]$.
2. Calcular $\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$, para x real no nulo.
3. Calcular $\cos(\arctan a)$ y $\operatorname{sen}(\arctan a)$, para a real dado.
4. Calcular, para a y b reales tales que $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$ en función de $\arctan\frac{a+b}{1-ab}$ (se estudia primero $\cos(\arctan a + \arctan b)$ y se distinguen los casos $ab < 1$, $ab > 1$ y $a > 0$, $ab > 1$ y $a < 0$).

Solución ▼ [005085]

Ejercicio 2468 ***I

Existencia y cálculo de $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

Solución ▼ [005087]

Ejercicio 2469 **

Simplificar las siguientes expresiones :

1. $f_1(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
2. $f_2(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
3. $f_3(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} - \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.
4. $f_4(x) = \arctan\dfrac{1}{2x^2} - \arctan\dfrac{x}{x+1} + \arctan\dfrac{x-1}{x}$.

Solución ▼ [005088]

Ejercicio 2470 **I

Calcular $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Solución ▼ [005089]

Ejercicio 2471 ***I

Calcular $u_n = \arctan\frac{2}{1^2} + \arctan\frac{2}{2^2} + \cdots + \arctan\frac{2}{n^2}$, para n entero natural no nulo dado, luego determinar $\lim_{n\to+\infty} u_n$. (Utilizar el ejercicio 2467 4))

Solución ▼ [005090]

Ejercicio 2472 ** Mines de DOUAI 1984

Se considera la función numérica f tal que :

$$f(x) = (x^2-1)\arctan\frac{1}{2x-1},$$

y se llama $(\mathscr{C})$ su curva representativa en un marco ortonormado.

1. ¿Cuál es el conjunto de definiciones $\mathscr{D}$ de f?
2. Expresar, sobre $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la derivada de f bajo la forma : $f'(x) = 2xg(x)$.
3. Demostrar que : $\forall x\in\mathbb{R},\ 2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$ y deducir la tabla de variación de g.
4. Elaborar la tabla de variación de f.

Solución ▼ [005092]

Ejercicio 2473 **

Simplificar las siguientes expresiones

1. $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}x)$,
2. $\cos(2\arccos x)$,
3. $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\arccos x}{2}\right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
5. $\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$,
6. $\operatorname{argch}(2x^2-1)$,
7. $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)$,
8. $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Solución ▼ [005095]

Ejercicio 2474 **

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones :

1. $\operatorname{ch} x = 2$, 2. $\operatorname{arcsen}((2x) = \operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen}((x\sqrt{2})$, 3. $2\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}((2x\sqrt{1-x^2})$.

Solución ▼ [005096]

Ejercicio 2475 ***

Demostrar que $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}) = n(n-1)$. (Indicación. Expresar $x_k = \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$, luego encontrar un polinomio en que los x_k son las raíces.)

Solución ▼ [005315]

Ejercicio 2476 *** I

Dar un desarrollo de precisión $\frac{1}{n^2}$ de la n-ésima raíz positiva x_n de la ecuación $\tan x = x$.

Solución ▼ [005852]

Ejercicio 2477 *** I

Sea z un número complejo. Determinar $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Solución ▼ [005853]

Ejercicio 2478

Demostrar que para todo $x > 0$, se tiene

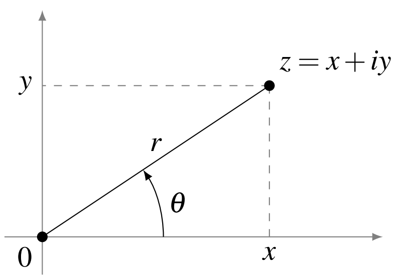
$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Deducir una expresión de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ y calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006973]

Ejercicio 2479

Sea $z = x + iy$ un número complejo, donde $x = \operatorname{Re} z$ y $y = \operatorname{Im} z$. Se sabe que si z es no nulo, se puede escribir de forma única en la forma $z = x + iy = re^{i\theta}$, donde $\theta \in]-\pi,\pi]$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$.



1. Demostrar que si $x > 0$, entonces $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.
2. Demostrar que si $\theta \in]-\pi, \pi[$, entonces $\theta = 2 \arctan \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)$.
3. Deducir que si z no es real negativo o cero, se tiene la igualdad

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006974]

86 126.02 Funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

Ejercicio 2480

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) = (\cos x + \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{ch} y).$$

Discutir y determinar según $p \in \mathbb{R}$ la imagen inversa de $(4, p)$. Se expresa y usando un logaritmo. Determinar esta imagen inversa numéricamente si $p = -2$. [000757]

Ejercicio 2481

1. Demostrar que no existe función $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ verificando $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch} x) = e^x$.
2. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(e^x) = \operatorname{ch} x$. Precisar el número de soluciones.
3. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(e^x) = \operatorname{ch} x$. Especificar el número de soluciones ; ¿hay soluciones continuas en $\mathbb{R}^+$?

Indicación ▼ Solución ▼ [000758]

Ejercicio 2482

Calcular :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Indicación ▼ Solución ▼ [000759]

Ejercicio 2483

Dar una expresión más simple de :

$$y = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

[000760]

Ejercicio 2484

Calcular para $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

[000761]

Ejercicio 2485

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, resolver el sistema $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y = b. \end{cases}$ [000762]

Ejercicio 2486

Demostrar que : $\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z = \operatorname{argth} u$ y determinar u. [000763]

Ejercicio 2487

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

1. Establecer relaciones

$$\tan t = \operatorname{sh} x \qquad \frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sen} t = \operatorname{th} x$$

2. Demostrar que $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000764]

Ejercicio 2488

Demostrar que $\operatorname{ch} nx$ y $\operatorname{sh} nx$ se puede expresar como polinomios en $\operatorname{ch} x$ y $\operatorname{sh} x$. Calcular $\operatorname{ch} 3x$ y $\operatorname{sh} 3x$ en función de $\operatorname{ch} x$ y $\operatorname{sh} x$. Deducir $\operatorname{th} 3x$ en función de $\operatorname{th} x$. [000765]

Ejercicio 2489

Expresar $\operatorname{ch}^n x$ y $\operatorname{sh}^n x$ por medio de $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px;\ 1 \leqslant p \leqslant n\}$. Explicitar $\operatorname{ch}^5 x$ y $\operatorname{sh}^5 x$. [000766]

Ejercicio 2490

Calcular las sumas

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{y} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

[000767]

Ejercicio 2491

Simplificar

$$\operatorname{argth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

[000768]

Ejercicio 2492

Verificar las igualdades

$$2\,\mathrm{argth}\tan x = \mathrm{argth}\,\mathrm{sen}\,2x, \qquad \mathrm{argsh}(3x+4x^3) = 3\,\mathrm{argsh}\,x.$$

[000769]

Ejercicio 2493

Explicitar usando la función logaritmo $\mathrm{argch}\,\frac{1}{x}$ y $\mathrm{argsh}\,\frac{1}{x}$. [000770]

Ejercicio 2494

Resolver

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}; \qquad xy = a^2,\ \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2}\ln^2 a.$$

[000771]

Ejercicio 2495

Especificar los comportamientos de

$$x \mapsto \frac{x^2 - \mathrm{e}^x}{x - \mathrm{e}}, \text{ cuando } x \to \mathrm{e}, \qquad x \mapsto \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}, \text{ cuando } x \to +\infty,$$

$$x \mapsto \frac{a^x - b^x}{x}, \text{ cuando } x \to 0.$$

[000772]

Ejercicio 2496

Demostrar las desigualdades :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), \text{ para } x > 0 \quad \text{y} \quad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Solución ▼ [000773]

Ejercicio 2497

Determinar $\lim\limits_{+\infty}(x - \ln(\mathrm{ch}\,x))$. [000774]

Ejercicio 2498

Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(2x) = 1 + 2\mathrm{sh}^2 x$. Deducir un equivalente de $\mathrm{ch}\,x - 1$ en 0. [000775]

Ejercicio 2499

Resolver la ecuación $x^y = y^x$, donde x e y son enteros positivos no nulos.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [000776]

Ejercicio 2500

Resolver la ecuación $\tan(3\arcsin x) = 1$. Se expresan las tres soluciones por medio de radicales. [000777]

Ejercicio 2501 *IT

Establecer para ch, sh y th las fórmulas de suma, de duplicación y linealización.

Solución ▼ [005086]

Ejercicio 2502 *

Estudiar $f:\ x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

Solución ▼ [005091]

Ejercicio 2503 **

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación $\operatorname{sh}(2+x)+\operatorname{sh}(2+2x)+\cdots+\operatorname{sh}(2+100x)=0$.

Solución ▼ [005093]

Ejercicio 2504 **I

1. Demostrar que para todo real x no nulo, se tiene : $\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$.
2. Deducir el valor de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + \cdots + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$, para n entero natural no nulo y x real no nulo dado, luego calcular el límite de (u_n).

Solución ▼ [005094]

Ejercicio 2505

Simplificar la expresión $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}(2x)}{x-\ln(\operatorname{ch} x)-\ln 2}$ y establecer sus límites en $-\infty$ y $+\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006975]

Ejercicio 2506

Sea x un real fijo. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(kx) \quad \text{y} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

Calcular C_n y S_n.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006976]

Ejercicio 2507

Sea a y b dos reales positivos tales que $a^2 - b^2 = 1$. Resolver el sistema $\begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y) = 2a \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y) = 2b. \end{cases}$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006977]

Ejercicio 2508

Simplificar las siguientes expresiones :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$, $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$, $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$.
2. $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$, $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$, $\operatorname{ch}(3\operatorname{argch} x)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [006978]

Ejercicio 2509

Estudiar el dominio de definición de la función f definida por

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$$

y simplificar su expresión cuando tiene sentido.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006979]

Ejercicio 2510

Demostrar que la ecuación $\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$ admite una única solución y determinarla.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006980]

87 126.99 Otro

88 127.01 Teoría

Ejercicio 2511

Determinar las funciones f de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$. [000778]

Ejercicio 2512

Sean $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ y $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(nt)dt$.

1. Usando integración por partes, demostrar que $I_n \to 0$.
2. Demostrar que es aún cierto si f es escalonada.
3. Deducir que el resultado se cumple para f continua a trozos.

[000779]

Ejercicio 2513

Sean $0 < a \leqslant b$. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. [000780]

Ejercicio 2514

Sea $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Demostrar que existe $a \in]0,1[$ tal que $f(a) = a$. [000781]

Ejercicio 2515

Sea $f \in C^0(\mathbb{R})$. Se define $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Demostrar que g se extiende por continuidad en 0.
2. Demostrar que si f es periódica, g admite un límite en $+\infty$.

[000782]

Ejercicio 2516

Sea f continua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tales que :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \; ; \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Demostrar que f admitir al menos $n+1$ ceros distintos en $]0,1[$. [000783]

Ejercicio 2517

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicación continua estrictamente creciente tal que :

$$f(0) = 0, \; f(1) = 1.$$

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

[000784]

Ejercicio 2518

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicación continua, que solo admite un número finito de ceros en $[0,1]$, y tal que $f(0) = 0, f(1) = 1$. Demostrar que :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 \mathrm{e}^{nt} f(t)dt \right| = +\infty.$$

[000785]

Ejercicio 2519 Irracionalidad de π

1. Sea $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar que el polinomio $P_n = \dfrac{X^n(bX-a)^n}{n!}$ y sus derivadas sucesivas toman, en 0 y $\frac{a}{b}$, de valores enteros.
2. Demostrar que :
$$I_n = \int_0^\pi P_n(t)\,\mathrm{sen}(t)dt \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$
3. Demostrar por reducción al absurdo que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

[000786]

Ejercicio 2520

Sea f continua en $[0,\pi]$ tal que $\displaystyle\int_0^\pi f(u)\cos(u)du = \int_0^\pi f(u)\,\mathrm{sen}(u)du = 0$, demostrar que f se anula al menos dos veces en $]0,\pi[$. [000787]

Ejercicio 2521

Sea $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tal que :

$$\forall g \in E([0,1],\mathbb{R}), \qquad \int_0^1 fg = 0.$$

Demostrar que $f = 0$. [000788]

Ejercicio 2522

Sea f una función C^1 sobre $[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$. Se supone $f(a) = 0$. Demostrar que :

$$\int_a^b f^2(u)du \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

[000789]

Ejercicio 2523

Sea f continua en $[0,1]$, con valores en $[a,b]$. Se supone $a < 0 < b$ y $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Demostrar que :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -ab.$$

[000790]

Ejercicio 2524

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, y f continua positiva de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

[000791]

Ejercicio 2525

Calcular sin usar una primitiva, para $a < b$:

$$\int_a^b \mathrm{e}^t dt.$$

[000792]

Ejercicio 2526

Sea f continua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 f^n(u)du$ solo toma un número finito de valores cuando n recorre $\mathbb{N}$. Demostrar que $f = -1$ o $f = 0$ o $f = 1$. [000793]

Ejercicio 2527

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n} dt.$$

Eventualmente, dar un dl en $\frac{1}{n}$. [000795]

Ejercicio 2528

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}dx.$$

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una aplicación continua ; calcular :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx.$$

[000796]

Ejercicio 2529

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una aplicación continua por partes, continua en 0, encontrar una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en escaleras tales que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

[000797]

Ejercicio 2530

Decir (con justificación) si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Toda función integrable en $[a,b]$ es continua.
2. Si f es integrable en $[a,b]$, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, para todo x de $[a,b]$.
3. Sea f una función en $[a,b]$ verificando la propiedad : para todo $\varepsilon>0$, existe g_ε integrable en $[a,b]$ tal que $\forall x\in[a,b],\ |f(x)-g_\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon$; entonces f es integrable.
4. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$.
5. Si $|f|$ es integrable en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.
6. Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$, entonces la función fg es integrable en $[a,b]$.
7. Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, entonces la función fg es continua en $[a,b]$, y $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\cdot\int_a^b g(t)\,dt$.
8. Sea f la función definida en $[0,1]$ por

$$\begin{cases} f\equiv\lambda_n & \text{sobre }]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}] \text{ para todo entero } n\geqslant 1,\\ f(0)=\mu, \end{cases}$$

   donde (λ_n) es una sucesión acotada de números reales, y μ un número real. Entonces f es integrable.
9. Sea f acotada en $[0,1]$, continua excepto en el punto $\frac{1}{3}$; entonces f es integrable en $[0,1]$.
10. Existe $f\geqslant 0$ continua en $[0,1]$, con $f(\frac{1}{2})>0$, y tal que $\int_0^1 f(t)\,dt=0$.
11. Sea f integrable en $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\,dt>0$, entonces $f\geqslant 0$ sobre $[a,b]$.

12. Si f es creciente en $[a,b]$, se puede integrar en $[a,b]$ y además $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es creciente.

13. Si $f\leqslant 0$ es continua en $[a,b]$, entonces $G(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ es creciente en $[a,b]$.

14. Si f es continua en $[0,1]$, $H(x)=\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ es derivable en $[0,1]$, y $\forall x\in[0,1],\ H'(x)=f(x^2)$.

[000798]

Ejercicio 2531

Sea φ una función acotada en $[a,b]$; comparar las siguientes afirmaciones [1] :

1. φ tiene una primitiva en $[a,b]$.
2. φ es integrable en $[a,b]$.
3. φ es continua en $[a,b]$.
4. φ es derivable en $[a,b]$.

[000799]

Ejercicio 2532

Sea f una función continua y estrictamente creciente de $[a,b]$ sobre $[\alpha,\beta]$. Se denota g la función recíproca de f. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta g(x)\,dx=b\beta-a\alpha$$

[000800]

Ejercicio 2533

Sea f y g dos funciones integrables en $[a,b]$. Se supone que f es monótona en $[a,b]$ y que g es positiva en $[a,b]$. Demostrar que existe $c\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(a)\int_a^c g(t)\,dt+f(b)\int_c^b g(t)\,dt.$$

(Considerar $\varphi(x)=f(a)\int_a^x g(t)\,dt+f(b)\int_x^b g(t)\,dt$). [000801]

Ejercicio 2534

Sea f una función derivable en $[0,1]$, verificando :

i) $0\leqslant f'\leqslant 2$; ii) f' es decreciente ; iii) $f(0)=0$ y $f(1)=1$.

Encontrar el número más grande M y el número más pequeño m tales que se tiene $m\leqslant\int_0^1 f(t)\,dt\leqslant M$. ¿Puede haber igualdad ? [000802]

Ejercicio 2535

1. Una de las implicaciones a estudiar es muy difícil ; se puede admitir luego de haber tratado todos los demás que el que queda es falsa.

Sea f definida y continua en $[0,+\infty[$, verificando $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = l$ (dado $\varepsilon > 0$, escoger A suficientemente grande para que en $[A,+\infty[$ se tenga $l-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant l+\varepsilon$; entonces encuadrar $\frac{1}{x}\int_A^x f(t)\,dt$, para $x > A$; estimar el error... y hacer un dibujo !). Para $x \geqslant 0$, se establece $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{1+t^2}}\,dt$. Estudiar la rama infinita del gráfico de F, cuando $x \to +\infty$. [000803]

Ejercicio 2536 Método trapezoidal

---

1. Sea f dos veces derivable en $[a,b]$, verificando $|f''| \leqslant M$ sobre $[a,b]$. Sea
$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - A(b-t)(t-a).$$
Sea $x \in]a,b[$; se escoge $A = A(x)$, para que $\varphi(x) = 0$ (diseñar !). Demostrar que existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $c_1 < c_2$ y $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$, luego que existe $c \in [a,b]$ tal que $\varphi''(c) = 0$. Deducir una mayoración de $|A|$, para $x \in [a,b]$. Es conveniente escribir $A(a) = A(b) = 0$.

2. Se denota E el error cometido al reemplazar $\int_a^b f(x)\,dx$ por el área del trapecio definida por el eje de las x, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la cuerda de la gráfica que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (diseñar !). Demostrar que $E = \int_a^b A(x)(b-x)(x-a)\,dx$, y comprobar que la integral tiene sentido. Deducir que $|E| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$. (Utilizar 1)).

3. Para $n \geqslant 1$ se establece $I_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\right]$, donde $x_p = a + p\frac{b-a}{n}$, para $p = 1, 2, \ldots, n-1$. Demostrar que I_n es la suma de las áreas de los trapecios construidos en los puntos de abscisas $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ y las cuerdas correspondientes de la gráfica de f (diseñar !). Demostrar que
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - In\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

4. Se toma $[a,b] = [0,1]$ y $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Calcular $M = \sup_{[0,1]} |f''|$. Determinar n de modo que el método del trapecio con n intervalos da un número que se aproxima $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ con un error de 10^{-2}. Deducir un encuadramiento para esta integral.

[000804]

Ejercicio 2537

Sea f la función definida en $[0,4]$ por
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calcular $\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Sea $x \in [0,4]$, calcular $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3. Demostrar que F es una función continua en $[0,4]$. ¿La función F es derivable en $[0,4]$?

Solución ▼ Vidéo ■ [002081]

Ejercicio 2538

Sean las funciones definidas en $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x^2 \text{ y } \qquad h(x) = \mathrm{e}^x,$$

Justificar que son integrables en todo intervalo acotado cerrado de $\mathbb{R}$. Usando las sumas de Riemann, calcular las integrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ y $\int_0^x h(t)dt$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002082]

Ejercicio 2539

Calcular la integral de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como límite de las sumas de Riemann-Darboux en los siguientes casos :

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ sobre $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0,1,\dots,n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sobre $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ y $x_k = aq^k$, $k = 0,1,\dots,n$ (q es a determinar),
3. $h(x) = \alpha^x$ sobre $[a,b]$, $\alpha > 0$, y $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002083]

Ejercicio 2540

¿Son integrables las siguientes funciones en el sentido de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sobre $[0,2]$
2. $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

Solución ▼ [002084]

Ejercicio 2541

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, $(a < b)$.

1. Se supone que $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [a,b]$, y que $f(x_0) > 0$ en un punto $x_0 \in [a,b]$. Demostrar que $\int_a^b f(x)dx > 0$. Deducir que : «si f es una función continua positiva en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces f es idénticamente nula».
2. Se supone que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

3. Aplicación : Se supone que f es una función continua en $[0,1]$ tal que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Demostrar que existe $d \in [0,1]$ tal que $f(d) = d$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002085]

Ejercicio 2542

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, positiva ; se establece $m = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = m.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002086]

Ejercicio 2543

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente creciente tal que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002087]

Ejercicio 2544

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ y $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Responder verdadero o falso a las siguientes afirmaciones :

1. F es continua en $\mathbb{R}$.
2. F es derivable en $\mathbb{R}$ de derivada f.
3. Si f es creciente en $\mathbb{R}$, entonces F es creciente en $\mathbb{R}$.
4. Si f es positiva en $\mathbb{R}$, entonces F es positiva en $\mathbb{R}$.
5. Si f es positiva en $\mathbb{R}$, entonces F es creciente en $\mathbb{R}$.
6. Si f es T-periódica sobre $\mathbb{R}$, entonces F es T-periódica sobre $\mathbb{R}$.
7. Si f es par, entonces F es impar.

Solución ▼ Vidéo ■ [002091]

Ejercicio 2545

Sean u y v dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ y f una función continua en $\mathbb{R}$.

1. Se define $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Demostrar que F es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.
2. Calcular la derivada de $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002092]

Ejercicio 2546

Sea $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

1. ¿Cuál es el conjunto de definición de F ? ¿F es continua, derivable en su conjunto de definición ?
2. Determinar $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ comparando F a $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002093]

Ejercicio 2547

1. Sea f una función continua definida en un intervalo acotado $[a,b]\subset\mathbb{R}$, tal que
$$\int_a^b f(t)\,dt=(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x).$$
Demostrar que f es constante.
2. Sean u, v, dos funciones continuas en $[a,b]$, con valores en $\mathbb{C}$. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz
$$\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt\leqslant\left(\int_a^b |u(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b |v(t)|^2\right)^{1/2}.$$
Indicación : Definir para $\lambda\in\mathbb{C}$ arbitrario, $f_\lambda(t)=|\lambda u(t)+v(t)|^2$ y aplicar la pregunta anterior.
3. ¿En qué casos esta desigualdad es una igualdad ?
4. Sea $C([a,b])$ el espacio de funciones continuas en $[a,b]$, con valores reales. Demostrar que
$$u\in C([a,b])\mapsto\left(\int_a^b u(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$
es una norma en $C([a,b])$.

[002315]

Ejercicio 2548

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, con valores en $]0,+\infty[$. Demostrar que
$$\int_a^b f(t)\,dt\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,dt\geqslant(b-a)^2.$$
¿En qué casos hay igualdad ? (Se puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.) [002316]

Ejercicio 2549

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua.

1. Usando la fórmula de la media, demostrar que
$$\forall a\in[0,1[,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^a f(t^n)\,dt=af(0).$$
2. Demostrar que existe $M>0$, tal que
$$\forall a\in[0,1[,\quad\left|(a-1)f(0)+\int_a^1 f(t^n)\,dt\right|\leqslant 2M(1-a).$$
Inferir que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)\,dt=f(0).$$

[002317]

Ejercicio 2550

Sean f y g dos funciones reales periódicas de periodo T continua en $\mathbb{R}$. Se llama *producto de convolución* de f y g la función h denotada $f \star g$ y definida por

$$h(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(x-t)\, dt.$$

1. Demostrar que h es una función periódica de período T.
2. Demostrar
$$h(x) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)g(x-t)\, dt, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$
3. Deducir que $f \star g = g \star f$.

[002324]

Ejercicio 2551 Densidad de funciones escalonadas

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que para toda función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalera, $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$. Demostrar que $f = 0$.

[004220]

Ejercicio 2552 Cambio de signo

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua no idénticamente nula, tal que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$. Demostrar, por recurrencia, que f cambia al menos n veces de signo en $]a,b[$. (Razonar por contradicción).

[004221]

Ejercicio 2553 Fórmula de la media generalizada

Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, f positiva.

1. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$.
2. Si f no se anula, demostrar que $c \in \,]a,b[$.
3. Aplicación : Sea f continúa alrededor 0. Determinar $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} | \int_0^x t f(t)\,dt$.

Solución ▼

[004222]

Ejercicio 2554 Desigualdad de Jensen

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua convexa.

Demostrar que $g\left(\frac{1}{b-a} | \int_a^b f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))\,dt$.

[004223]

Ejercicio 2555 $\sqrt{1+f^2}$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua positiva. Sea $A = \int_0^1 f(t)\,dt$. Demostrar que $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt \leqslant 1+A$.

[004224]

Ejercicio 2556 Cálculo del límite

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos t\,\ln(1+t^2)}{\operatorname{sen}^2 t\,\operatorname{sh} t}\,dt.$ [004225]

Ejercicio 2557 Cálculo del límite

Para $0<a<b$, determinar $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{1-\cos u}{u^3}\,du.$

Solución ▼ [004226]

Ejercicio 2558 $\int f+\int f^{-1}$

Sea $f:[a,b]\to[c,d]$ continua, biyectiva, estrictamente creciente. Calcular $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt+\int_{u=c}^{d} f^{-1}(u)\,du$. (Hacer un diseño, y empezar con el caso donde f es de clase $\mathscr{C}^1$). [004227]

Ejercicio 2559 Máximo-mínimo

Sean $a,b\in\mathbb{R}$. Estudiar la convergencia de las sucesiones (a_n), (b_n) definidas por :

$$a_0=a,\ b_0=b,\qquad a_{n+1}=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\min(x,b_n)\,dx,\ b_{n+1}=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\max(x,a_n)\,dx.$$

Solución ▼ [004232]

Ejercicio 2560 Integral de $|f|$

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se establece $I_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt\right|$, donde $a_k=a+k\frac{b-a}{n}$. Demostrar que $I_n\to\displaystyle\int_a^b|f(t)|\,dt$, cuando $n\to\infty$. [004234]

Ejercicio 2561 Uso de simetría

Sea $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{t\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\,dt$. Efectuar en I el cambio de variable $u=\pi-t$, y deducir el valor de I.

Solución ▼ [004235]

Ejercicio 2562 Uso de simetría

Calcular $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{t}{1+\operatorname{sen} t}\,dt.$

Solución ▼ [004236]

Ejercicio 2563 Uso de simetría

Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)\,dt$. Se observa que $\cos t+\operatorname{sen} t=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$. [004237]

Ejercicio 2564 ****

Sean f y g dos funciones continuas y estrictamente positivas sobre $[a,b]$. Para n entero natural no nulo dado, se establece $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}$. Demostrar que la sucesión (u_n) converge y determinar su límite. (Empezar con el caso $g = 1$).

Solución ▼ [005444]

Ejercicio 2565 ***T

Sea E el conjunto de funciones continuas estrictamente positivas en $[a,b]$.

Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ $\quad$.

$$f \mapsto \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right)$$

1. Demostrar que $\varphi(E)$ no es mayorada.
2. Demostrar que $\varphi(E)$ es minorada. Encontrar $m = \inf\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Demostrar que se alcanza este límite inferior y encontrar todos los f de E tales que $\varphi(f) = m$.

Solución ▼ [005449]

Ejercicio 2566

Usando la definición de una función integrable en el sentido de Riemann, demostrar las siguientes propiedades :

1. Si f y g son Riemann-integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.
2. Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces λf es Riemann-integrable en $[a,b]$.
3. Si f y g son dos funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ tales que, para todo $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.
4. Un límite uniforme de funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Solución ▼ [005917]

Ejercicio 2567

Demostrar que una función *monótona* sobre $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Solución ▼ [005918]

Ejercicio 2568

Demostrar que una función *continua* sobre $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Solución ▼ [005919]

Ejercicio 2569

1. Demostrar que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   no es Riemann integrable en $[0,1]$.

2. Demostrar que la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ primos entre sí} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ o } x = 0 \end{cases}$$

es Riemann-integrable en $[0,1]$.

Solución ▼ [005920]

Ejercicio 2570

Se dice que una parte A de $\mathbb{R}$ es *despreciable* si, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos $I_n =]a_n, b_n[$ tales que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon.$$

1. Demostrar que una unión numerable de conjuntos despreciables es un conjunto despreciable.
2. Demostrar que una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Riemann en $[a,b]$ si y solo si el conjunto de puntos donde f no es continua es *despreciable*.

Solución ▼ [005921]

Ejercicio 2571

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ por : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplemente a una función f sobre $]0,1]$, pero que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Verificar que la convergencia de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia f no es *uniforme* sobre $]0,1]$.

Solución ▼ [005922]

Ejercicio 2572

Demostrar que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en el sentido de Riemann, se tiene :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Deducir los siguientes límites :

$a)$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n}$ $\qquad b)$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ $\qquad c)$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$

Solución ▼ [005923]

Ejercicio 2573

1. Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. Calcular (utilizando 1.) las siguientes integrales :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan x\right)dx.$$

Recordar que : $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

Solución ▼ [005924]

89 127.02 Sumas de Riemann

Ejercicio 2574

Sean f y g de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ crecientes. Demostrar que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\int_0^x f\right)\left(\int_0^x g\right) \leqslant x \int_0^x fg.$$

Indicación : Se establece primero que, si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ y $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, entonces :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Se observa que :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0.$$

[000794]

Ejercicio 2575

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

[000840]

Ejercicio 2576

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}; \qquad \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}; \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}; \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión real definida por :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calcular :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

y dar un equivalente de $u_n - \ell$. [000841]

Ejercicio 2577

Sean f y g continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

[000842]

Ejercicio 2578

Calcular :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

[000843]

Ejercicio 2579

Calcular los siguientes límites :

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln \frac{(3n+6p-4)(n+2p)^2}{3n^3}$.

[000844]

Ejercicio 2580

Calcular el límite de las siguientes sucesiones :

1. $u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$.
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002100]

Ejercicio 2581 Sumas de Riemann

1. Encontrar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}$, para k entero mayor o igual que 2 fijado.
2. Encontrar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)}+\sqrt{2(n-2)}+\cdots+\sqrt{(n-1)1}\right)$.
3. Encontrar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.
4. Encontrar $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2+\cos(3k\pi/n)}$.
5. Dar un equivalente para $n\to\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

6. Sea $A_1A_2\ldots A_n$ un polígono regular inscrito en un círculo de radio 1. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n}A_1A_k$.

Solución ▼ [004228]

Ejercicio 2582 Cálculo del límite

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}f\left(\frac{e}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$. [004229]

Ejercicio 2583 Media geométrica

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\left(1+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\right)\left(1+\frac{1}{n}f(\frac{2}{n})\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}f(\frac{n}{n})\right)\to\exp\int_0^1 f(t)\,dt$, cuando $n\to\infty$. (Se puede utilizar : $\forall x\geqslant-\frac{1}{2},\ x-x^2\leqslant\ln x\leqslant x$). [004230]

Ejercicio 2584

1. Demostrar que : $\forall x\geqslant 0,\ x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$.
2. Encontrar $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2+n^2}\right)^n$.

Solución ▼ [004231]

Ejercicio 2585 Integral de $\ln|x-e^{it}|$

Para $x\in\mathbb{R},\ x\neq\pm1$, se establece $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln|x-e^{it}|\,dt$. Usando las sumas de Riemann, calcular I. [004233]

Ejercicio 2586 ***IT

Límites de

1) $\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$ 2) $(\frac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(a+k))^{1/n}\ (a>0)$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ 4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}E(\sqrt{k})$ 6) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 7) $\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ 8) $n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Solución ▼ [005446]

Ejercicio 2587 ***I

Sea f una función de clase C^2 sobre $[0,1]$. Determinar el real a tal que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})\underset{n\to+\infty}{=}\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n}).$$

Solución ▼ [005447]

90 127.03 Longitud, área, volumen

Ejercicio 2588

Construir la curva paramétrica

$$(C)\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1+\lambda\cos t} \\ y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\lambda\cos t}, \end{cases}$$

donde λ es un parámetro perteneciente a $[0,1[$. Calcular el área S limitada por C de dos maneras :

- — Volviendo al cálculo de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda\cos t)^2}$.
- — Reconociendo la naturaleza geométrica de C.

Solución ▼ [000805]

Ejercicio 2589

Representar la curva definida por su ecuación polar $\rho = a\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}$. Calcular su longitud L y las áreas A_1 y A_2 limitado por los dos bucles que forma.

Solución ▼ [000806]

Ejercicio 2590

Se llama *toro* la cifra obtenida por revolución de un círculo de radio r alrededor de una recta de su plano que pasa a una distancia R de su centro (se supone $r < R$). Calcular el área A del toro, y su volumen V.

Solución ▼ [000807]

Ejercicio 2591

Se llama *cicloide* la curva descrita por un punto en un círculo de radio R, ligado a este círculo, cuando rueda sin resbalar en línea recta, permaneciendo en un plano fijo. Demostrar que en un sistema de referencia bien elegido, el cicloide admite la representación paramétrica : $\begin{cases} x = R(t-\operatorname{sen} t) \\ y = R(1-\cos t). \end{cases}$

Representar la cicloide y calcular : la longitud L de un arco, el área A de la superficie S comprendida entre este arco y la recta fija (Ox), los volúmenes V_1 y V_2 obtenidos por revolución de S alrededor de Ox y Oy respectivamente, áreas A_1 y A_2 obtenidos por revolución de un arco de la cicloide alrededor Ox y Oy respectivamente.

Solución ▼ [000808]

Ejercicio 2592

Se llama *epicicloide* la curva descrita por un punto en un círculo de radio r, ligado a este círculo, cuando rueda sin resbalar en un círculo de radio R mientras permanece tangente externamente a este último, y en su plano. Se define $n = R/r$. Demostrar que en un sistema de referencia que se debe especificar, el epicicloide admite la representación paramétrica :

$$\begin{cases} x &= r\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y &= r\big((n+1)\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(n+1)t\big). \end{cases}$$

Representar la curva para $n = 1,2,3$. Suponiendo n entero, calcular la longitud L de la curva y el área A limitada por ella. En el caso $n = 1$ (*cardioide*), calcular además el área S de la superficie de revolución obtenida al rotar la curva alrededor de su eje de simetría, así como el volumen V limitado por esta superficie.

Solución ▼ [000809]

Ejercicio 2593

Sea C un círculo fijo de radio R. Un círculo C' del mismo radio rueda sin resbalar en C permanecer en un plano (variable) perpendicular al de C. Un punto M ligado al círculo C' recorre una curva Γ. Demostrar que siguiente un sistema de referencia convenientemente escogido, Γ admite la representación paramétrica :

$$\begin{cases} x &= R(\cos t + \operatorname{sen}^2 t) \\ y &= R \operatorname{sen} t(1-\cos t) \\ z &= R(1-\cos t). \end{cases}$$

Deducir la longitud L de Γ. Representar las proyecciones de Γ en cada uno de los tres planos de coordenadas.

Solución ▼ [000810]

Ejercicio 2594

Calcular $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$ (se define $\theta = \arcsin \frac{x}{R}$) y deducir el área de un disco de radio R.

Solución ▼ [002098]

Ejercicio 2595

Calcular el área de la región delimitada por las curvas de la ecuación $y = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002099]

Ejercicio 2596 Aproximación de rectángulos para una función de Lipchitz

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, K-lipschitziana. Demostrar que $\left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leqslant \frac{K(b-a)^2}{2n}$. [004241]

Ejercicio 2597 Aproximación de tangentes

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Se fija $n \in \mathbb{N}^*$ y se denota : $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $a_{k+\frac{1}{2}} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$. Sea $I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+\frac{1}{2}})$.

1. Dar una interpretación geométrica de I_n.
2. Demostrar que $\left| \int_a^b f(t)\, dt - I_n \right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$, donde $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$.

[004242]

Ejercicio 2598 Aproximación de trapecios

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$.

1. Demostrar que $\int_a^b f(t)\, dt = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \dfrac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\, dt$.
2. Aplicación : Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $I = \int_a^b f(t)\, dt$, y I_n el valor aproximado de I obtenido por el método del trapecio con n intervalos. Demostrar que $|I - I_n| \leqslant \dfrac{\sup|f''|(b-a)^3}{12n^2}$.

[004243]

Ejercicio 2599 Área bajo una cuerda

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que $f(a)=f(b)=0$. Se define $M'=\|f'\|_\infty$.

1. Mayorando f por una función afín a trozos, demostrar que $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leqslant M'\frac{(b-a)^2}{4}$.
2. ¿Cuándo hay igualdad ?

[004245]

Ejercicio 2600

Calcular el área interior de una elipse de ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Indicaciones. Se puede calcular solo la parte de la elipse correspondiente a $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Luego expresar y en función de x. Finalmente, calcular una integral.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006863]

91 127.04 Integración mediante una función auxiliar

Ejercicio 2601

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int\frac{dx}{x^2+5};\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}};\qquad \int e^x\operatorname{sen}(e^x)dx;\qquad \int\tan^3 x\,dx;$$
$$\int\frac{1}{\tan^3 x}dx;\qquad \int\frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx,\ m\in\mathbb{N};\qquad \int\frac{\ln x}{x}dx;\qquad \int\frac{\operatorname{ch}x\,dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

[000811]

92 127.05 Cambio de variables

Ejercicio 2602

Se considera la integral

$$I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

Efectuar el cambio de variable $u=\sqrt{e^x-1}$ y calcular I.

Resultado : $I=2-\frac{\pi}{2}$. [000812]

Ejercicio 2603

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y continuamente derivable. Se consideran los dos integrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ y $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.

1. Recordar por qué f admite una función inversa f^{-1}.
2. Hacer el cambio de variable $t = f(u)$ en la integral I_2.
3. Calcular I_2 en función de I_1.
4. Hacer un dibujo haciendo aparecer f y f^{-1}, e interpretar este resultado geométricamente.

[000813]

Ejercicio 2604

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx,\ \ (t=\sqrt[6]{2+x}); \qquad \int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx,\ \ (\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ o } \coth u);$$

$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx; \qquad \int x^2\sqrt{1+x^3}dx.$$

[000814]

Ejercicio 2605

Sin calcular las integrales, demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

[002318]

Ejercicio 2606

Calcular las siguientes integrales :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \qquad \int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt, \qquad \int_0^\pi t^2 \operatorname{sen} t\,dt, \qquad \int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos\sqrt{1-t}\,dt.$$

[002321]

Ejercicio 2607

Calcular las siguientes integrales :

$$\int_0^\pi \frac{dt}{(2+\cos^2 t)^2}, \qquad \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \cos 3t \sqrt{\cos 2t}\,dt, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1-t^2}}.$$

[002322]

Ejercicio 2608

Sea f una función continua en $[0,\pi]$. Demostrar, usando un cambio de variable, que se tiene

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx.$$

Deducir el valor de
$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$
[002323]

Ejercicio 2609

Calcular las siguientes integrales :
$$\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln^4 t\, dt,\ n \neq -1, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}, \quad \int_a^b \sqrt{(t-a)(t-b)}\, dt, \quad \int_0^1 2^t \cdot 3^{2t} \cdot 5^{3t}\, dt,$$
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+2x+5}}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt, \quad \int_0^1 t^7 \arctan t\, dt.$$
[002326]

Ejercicio 2610

Sea $x > 0$ un real. Calcular los valores de
$$I(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \qquad \text{y} \qquad J(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{(1+t)^2} dt.$$
¿Cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$? [002329]

Ejercicio 2611

Encontrar las primitivas de las siguientes funciones :
$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad (4x^2+4x+5)^{-1/2}, \quad \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}, \quad \frac{\arctan x}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}.$$
[002335]

Ejercicio 2612

Calcular las siguientes integrales (a, b reales dados, p y q enteros naturales dados)

1) $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\ (0 < a)$ 2) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\, dx, \int_0^{\pi} 2\cos(px)\operatorname{sen}(qx)\, dx, \int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}(qx)\, dx$

3) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$ 4) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\, dx$

5) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \arctan x\, dx$ 6) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+|x(1-x)|}\, dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$ 8) $\displaystyle\int_1^x (\ln t)^n\, dt\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Solución ▼ [005470]

Ejercicio 2613

Calcular las siguientes primitivas por cambio de variable.

1. $\displaystyle\int (\cos x)^{1234} \operatorname{sen} x\, dx,$ 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx,$ 3. $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx,$ 4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx,$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006865]

93 127.06 Integración por partes

Ejercicio 2614

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int e^x \cos x dx; \qquad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \; n \in \mathbb{N}; \qquad \int x \operatorname{Arctan} x dx; \qquad \int (x^2+x+1) e^x dx.$$

[000815]

Ejercicio 2615

Sea $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Establecer una relación de recurrencia entre I_n y I_{n+1}.
2. Calcular I_n.
3. Deducir $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

[000816]

Ejercicio 2616

Sea $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$.

1. Demostrar que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(a-x)(b-x)dx$.
2. Deducir un encuadramiento de $\int_a^b f(t)dt$, si $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

[000817]

Ejercicio 2617 Integrales de Wallis

Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t dt$.

1. Establecer una relación de recurrencia entre I_n y I_{n+2}.
2. Deducir I_{2p} y I_{2p+1}.
3. Demostrar que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y estrictamente positiva.
4. Deducir que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calcular nI_nI_{n+1}.
6. Dar entonces un equivalente simple de I_n.

Solución ▼ [000818]

Ejercicio 2618

Sea $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Al mayorar la función integrada, demostrar que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calcular $I_n + I_{n+1}$.

3. Determinar $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

[000819]

Ejercicio 2619

Calcular por recurrencia :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

[000820]

Ejercicio 2620

Calcular por recurrencia :

$$J_n = \int_1^{e} \log(u)^n du.$$

[000821]

Ejercicio 2621

Para todos n, p en $\mathbb{N}$, se define

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t \cos^p t \, dt.$$

Encontrar relaciones de recurrencia que enlacen $J_{n,p}$ y $J_{n,p-2}$, así como $J_{n,p}$ y $J_{n-2,p}$. Deducir el valor de $J_{n,p}$.

[002336]

Ejercicio 2622

calcular las siguientes primitivas por integración por partes.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$, 2. $\int x \arctan x \, dx$, 3. $\int \ln x \, dx$, luego $\int (\ln x)^2 \, dx$, 4. $\int \cos x \exp x \, dx$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■

[006864]

---

94 127.07 Polinomio en sen, cos o en sh, ch

Ejercicio 2623

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int (\cos x \cos 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x) dx; \quad \int \cos x \operatorname{sen}^4 x dx; \quad \int \cos^6 x dx$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx; \quad \int \operatorname{sen}^4 x dx; \quad \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx; \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx; \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x dx.$$

[000822]

Ejercicio 2624

Determinar intervalos de estudio y calcular primitivas de las funciones :

$$x\cos^2 x, \qquad \cos(2x)\cos^2 x.$$

[000823]

Ejercicio 2625

Calcular las siguientes primitivas, precisando si es necesario el intervalo de validez de los cálculos :

a) $\int \operatorname{sen}^8 x\cos^3 x dx$ b) $\int \cos^4 x dx$ c) $\int \cos^{2003} x \operatorname{sen} x dx$ d) $\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x+\cos x} dx$

e) $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx$ f) $\int \frac{1}{\cos x} dx$ g) $\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x+3\tan x} dx$ h) $\int \frac{1}{7+\tan x} dx.$

Solución ▼ [002090]

Ejercicio 2626 Integrales de Wallis

Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^n dx$, para $n \in \mathbb{N}$.

1. Demostrar que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. Explicitar I_n. Deducir $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$.
2. Demostrar que $(I_n)_n$ es positiva decreciente. Demostrar que $I_n \sim I_{n+1}$.
3. Simplificar $I_n \cdot I_{n+1}$. Demostrar que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Deducir $\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002096]

Ejercicio 2627 Integrales de WALLIS

Para n entero natural, se establece $W_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx$.

1. Calcular W_0 y W_1. Determinar una relación entre W_n y W_{n+2} y deducir W_{2n} y W_{2n+1} en función de n.
2. Estudiar las variaciones de la sucesión (W_n) y deducir $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Demostrar que la sucesión $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ es constante. Deducir $\lim_{n\to+\infty} W_n$, luego un equivalente simple de W_n. Escribiendo $\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi/2}$, encontrar directamente $\lim_{n\to+\infty} W_n$.
4. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2 = \frac{1}{\pi}$. (Fórmula de WALLIS)

[005474]

Ejercicio 2628

Para n entero natural, se establece $In = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$.

1. Calcular I_0 y I_1. Encontrar una relación entre I_n y I_{n+2}. Deducir I_n en función de n.
2. Demostrar que I_n tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, y deducir los límites de las sucesiones (u_n) y (v_n) definidas por : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ y $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Solución ▼ [005475]

95 127.08 Fracción racional

Ejercicio 2629

Descomponer las siguientes fracciones racionales ; calcular las primitivas.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$.
8. $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.
9. $\dfrac{1}{t^3+1}$.
10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.
14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$.
15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Solución ▼ [000824]

Ejercicio 2630

Calcular las siguientes integrales de fracciones racionales.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$.
2. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$.
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx$.
6. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}\,dx$.
11. $\displaystyle\int_0^a \frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}\,dx$, para $a\in\mathbb{R}$.
¿Existe límite cuando $a\to+\infty$?
12. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^4+1}$.

Solución ▼ [000825]

Ejercicio 2631

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}dx; \qquad \int \frac{dx}{(x^4+1)^2}; \qquad \int \frac{xdx}{x^4+x^2+1}; \qquad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-2x-2)^2}.$$

[000826]

Ejercicio 2632

Determinar intervalos de estudio y calcular primitivas de las funciones :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}, \qquad \frac{2x}{(1-x+x^2)^2}, \qquad \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}, \qquad \frac{1}{(1+x^3)^3}.$$

[000827]

Ejercicio 2633

Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$

1. Al mayorar la función integrada, demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calcular $I_n + I_{n+1}$.
3. Determinar $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002097]

Ejercicio 2634 Fracciones racionales

$\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$
$\frac{1}{(x^3-1)^2}$	$-\frac{2}{9}\ln\lvert x-1\rvert + \frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{x}{3(x^3-1)}$
$\frac{1}{x^3(1+x^3)}$	$-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6}\ln\left[\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$
$\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$	$-\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
$\frac{1}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x^2}{1+x^4}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(1+x\sqrt{2}) - \arctan(1-x\sqrt{2})\right]$
$\frac{x}{(x^4+1)^2}$	$\frac{\arctan x^2}{4} + \frac{x^2}{4(x^4+1)}$
$\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-4}$	$\frac{7}{10}\ln\lvert x-2\rvert + \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+2) - \frac{1}{10}\arctan(x+1)$
$\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2}$	$\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2-1)} + \frac{11}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
$\frac{1}{x^{20}-1}$	$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{1}{2}\cos k\alpha\ln(x^2-2x\cos k\alpha+1) - \operatorname{sen} k\alpha\arctan\left(\frac{x-\cos k\alpha}{\operatorname{sen} k\alpha}\right)\right] + \frac{1}{20}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert, \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$
$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)}$	$\frac{1}{(b-a)^n}\ln\left\lvert\frac{x-b}{x-a}\right\rvert + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(b-a)^{n-k}(x-a)^k}$

[004263]

Ejercicio 2635

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^5 x}dx; \qquad \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos x}dx; \qquad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x};$$
$$\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} 2x}dx; \qquad \int \frac{\tan x-\tan a}{\tan x+\tan a}dx; \qquad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}dx.$$

[000828]

Ejercicio 2636

Determinar intervalos de estudio y calcular primitivas de las funciones :

$$\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \frac{1}{1+\tan x}, \qquad \frac{1}{\operatorname{th}^2 x}.$$

[000829]

Ejercicio 2637

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx \quad \text{y} \quad \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}dx.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002089]

Ejercicio 2638

Calcular las siguientes integrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}dx.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002095]

Ejercicio 2639 Funciones trigonométricas

$\frac{1}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 4x}$	$-\frac{1}{4\operatorname{sen} x}+\frac{1}{8}\ln\left\lvert\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right\rvert-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x}{1+\sqrt{2}\operatorname{sen} x}\right\rvert$
$\frac{\tan x}{1+\tan x}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\lvert\cos x+\operatorname{sen} x\rvert$
$\cos x\sqrt{\cos 2x}$	$\frac{\operatorname{sen} x\sqrt{\cos 2x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}((\sqrt{2}\operatorname{sen} x)$
$\frac{1}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x}$	$\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)+\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{2}{3}\ln\lvert 1+2\cos x\rvert$
$\frac{1}{\cos x \cos 2x}$	$\sqrt{2}\operatorname{argth}(\sqrt{2}\operatorname{sen} x)-\operatorname{argth}(\operatorname{sen} x)$
$\frac{1}{\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x)}}$	$-2\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x}}$ (usar $u=1/\operatorname{sen} x$)
$\frac{a\operatorname{sen} x}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-a^2\operatorname{sen}^2 x}}$	$-\arctan\left(\frac{\sqrt{\cos^2 x-a^2\operatorname{sen}^2 x}}{a}\right).$

[004264]

97 127.10 Integral abeliana

Ejercicio 2640

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}}dx; \quad \int \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x+2}dx; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx.$$

[000830]

Ejercicio 2641

Determinar intervalos de estudio y calcular primitivas de las funciones :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}} \qquad \sqrt{x^2-1} \qquad \frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}$$

[000831]

Ejercicio 2642 Radicales

$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\lvert 2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right\rvert$
$\frac{4x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}$	$-\sqrt{-4x^2+12x-5}+\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}((x-3/2)$
$\frac{1}{2x-x^2+\sqrt{2x-x^2}}$	$\frac{1-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$
$\frac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$	$\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}-\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{2}\right)$ (usar $x=1+2\cos\varphi$)
$\frac{2+\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+4}}$	$(\sqrt{x+3}+4)(\sqrt{x+4}-2)-4\ln(1+\sqrt{x+4})+\ln(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4})$
$x+\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^2}{4}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$(x+\sqrt{a^2+x^2})^n$	$\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n+1}}{2(n+1)}+a^2\frac{(x+\sqrt{a^2+x^2})^{n-1}}{2(n-1)}$ $(n\neq 1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$\frac{1}{6}\ln\left[\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}, u=\sqrt[3]{1+1/x^3}$ (usar $v=1/x^3$)

[004265]

98 127.11 Primitivas diversas

Ejercicio 2643

Calcular las siguientes primitivas.

1. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x\, dx.$

2. $\displaystyle\int \cos^5 t\, dt\,;\ \int \cosh^3 t\, dt\,;\ \int \cos^4 t\, dt\,;\ \int \sinh^4 t\, dt.$

3. $\displaystyle\int x^3 e^x\, dx.$

4. $\displaystyle\int \ln x\, dx;\ \int x \ln x\, dx;\ \int \operatorname{arcsen} x\, dx.$

5. $\displaystyle\int \cosh t \operatorname{sen} t\, dt.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$

7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx.$

9. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx;\ \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx.$

10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\, dx$, para $0 < x < 1$.

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3}.$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$, con $0 < x < a$.

14. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\cosh x + \sinh x}\, dx.$

Solución ▼ [000832]

Ejercicio 2644

Calcular las siguientes primitivas :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}};\qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx;\qquad \int \frac{1+\cos 2x}{1-\tan^2 x} dx;\qquad \int \frac{\operatorname{sen} ax + \cos bx}{e^x} dx;\qquad \int \frac{x(2+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$$

[000833]

Ejercicio 2645

Determinar intervalos de estudio y calcular primitivas de las funciones :

$\operatorname{ch} x \operatorname{sen}(2x)$, $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$ $\qquad (x^2+2x+2)\cos(2x)$,

$x^2 \cos x$ y $x^2 \operatorname{sen} x$ utilizando complejos $\qquad \dfrac{1}{(x^2-1)^3}$ y $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$.

[000834]

Ejercicio 2646

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)$. [000835]

Ejercicio 2647

Determinar $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\Big).$ [000836]

Ejercicio 2648

Calcular $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. [000837]

Ejercicio 2649

Sean $I=\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$ y $J=\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx$. 1. Calcular I y $I+J$. 2. Deducir J. [000838]

Ejercicio 2650

Sea $a_n=\int_0^1 t^n e^t\,dt$. 1. Calcular $a_0,\dots,a_4$. 2. Estudiar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [000839]

Ejercicio 2651

Calcular las siguientes primitivas, precisando si es necesario los intervalos de validez de los cálculos :

a) $\int \arctan x\,dx$ b) $\int \tan^2 x\,dx$ c) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

e) $\int \mathrm{arcsen}\, x\,dx$ f) $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$ g) $\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ h) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx$ j) $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ k) $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$ l) $\int \cos x \exp x\,dx$.

Solución ▼ [002088]

Ejercicio 2652

Calcular las siguientes integrales :

a) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ b) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan\,x\,dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$

d) $\int_{-1}^{1}(\arccos x)^2\,dx$ e) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ f) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

g) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$ h) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+4x+7}dx$ i) $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$.

Solución ▼ [002094]

Ejercicio 2653

Calcular las primitivas de las siguientes funciones :

$t\mapsto t^2\exp(t^3)$, $t\mapsto \frac{\mathrm{sen}^3 t}{1+\cos^2 t}$, $t\mapsto \frac{1}{1-t^2+2\sqrt{1-t^2}}$, $t\mapsto \frac{\sinh^2 t}{\cosh t}$,

$t\mapsto \frac{\cos t}{\cos 2t}$, $t\mapsto \frac{1}{1+\mathrm{th}^2 t}$.

[002319]

Ejercicio 2654

Calcular las primitivas de las siguientes funciones :

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t - \cos t}, \qquad t \mapsto \frac{t^2}{(\cos t + t \operatorname{sen} t)^2}, \qquad t \mapsto \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad t \mapsto \frac{1}{t^8+t^4+1}.$$

[002320]

Ejercicio 2655

Calcular las primitivas de las siguientes funciones :

$$t \mapsto \tan t, \qquad t \mapsto \operatorname{arg\,sinh} t, \qquad t \mapsto \frac{\tan^3 t}{\cos^6 t}, \qquad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} \qquad t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}+\sqrt{t+2}},$$

$$t \mapsto t\sqrt[n]{1+t}, \qquad t \mapsto \cosh^3 t, \qquad t \mapsto \frac{t^3}{(a^2-t^2)^{3/2}}, \qquad t \mapsto \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}, \qquad t \mapsto \sqrt{t\sqrt{t\sqrt{t}}},$$

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}.$$

[002325]

Ejercicio 2656 Función Gama

Para todo $x > 0$, se establece

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(Se admite que la integral converge). Demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calcular el valor de $\Gamma(1)$. Deducir la de $\Gamma(n)$, para todo entero $n > 0$.

1. Sea $a > 0$ un real, y $n > 0$ un entero. Demostrar que

$$\int \frac{dt}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2n-2}\theta d\theta, \text{ donde } \theta = \arctan\frac{x}{a}.$$

Deducir la primitiva de $\dfrac{x+4}{(x^2+2x+2)^3}$.

2. Sean x e y dos reales verifican $1 > y > x > 0$. Calcular

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \int_x^y \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} dt.$$

3. Sea f una función continua y positiva en $[0,+\infty[$. Sea para todo $x > 0$ y todo entero $n > 0$

$$u_n(x) = \left[\int_0^x f(t)^n \, dt\right]^{1/n}$$

y

$$M(x) = \sup_{t\in[0,x]} |f(t)|.$$

(a) Demostrar que $u_n(x) \leqslant M(x)x^{1/n}$.

(b) Usando la continuidad de f, demostrar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $u_n(x) \geqslant \delta^{1/n}[M(x)-\varepsilon]$.

(c) Deducir que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = M(x).$$

[002330]

Ejercicio 2657 Diversas primitivas

$x^k \ln x$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right)$
$\ln(1+x^2)$	$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$
$\frac{x^2+a}{x^2+1}\arctan x$	$\frac{1}{2}\big((2x+(a-1)\arctan x)\arctan x - \ln(1+x^2)\big)$
$\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}$	$x\mathrm{e}^{1/x}$
$\frac{x}{\cos^2 x}$	$x\tan x + \ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$	$2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$
$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$	$(x+2)\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \ln\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\big)$
$\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$	$x\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$
$\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}$	$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{2}\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}$
$x(\cos^2 x)\mathrm{e}^{-x}$	$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{50}\big((3-5x)\cos 2x + (4+10x)\operatorname{sen} 2x - 25(x+1)\big)$
$(x^2+x+1)\mathrm{e}^{2x}\cos x$	$(\frac{2x^2}{5}+\frac{4x}{25}+\frac{39}{125})\mathrm{e}^{2x}\cos x + (\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{25}+\frac{27}{125})\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} x.$

[004266]

Ejercicio 2658 Integrales definidas

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\pi/2} t^2\cos t\,dt = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t+\cos t}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\int_0^1 t\ln t\,dt = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^3\frac{2t}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^t-1}\,dt = 2-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1\frac{t\mathrm{e}^t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\,dt = 4\sqrt{2}-2\sqrt{\mathrm{e}+1}+4\ln\left[\frac{\sqrt{\mathrm{e}+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right]-2$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 t\cos^3 t\,dt = \frac{4}{15}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2\operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt = 0$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\operatorname{sen} t} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{1-a\operatorname{sen} t}}\,dt = \frac{4(2-(a+2)\sqrt{1-a})}{3a^2}$$

$$\int_0^1\operatorname{arcsen} t\,dt = \frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^1\frac{t^2\arctan t}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\sqrt{2}$$

$$\int_4^9\frac{dt}{\sqrt{t}-1} = 2+2\ln 2$$

$$\int_0^1\frac{\ln(1-a^2t^2)}{t^2}\,dt = a\ln\left|\frac{1-a}{1+a}\right| - \ln(1-a^2)$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6}(3-\frac{4}{\sqrt{3}}) \qquad \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}.$$

[004267]

Ejercicio 2659 ***

Hacer el estudio completo de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt$.

Solución ▼ [005450]

Ejercicio 2660 ***

Para x real, se establece $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt$.

1. Demostrar que f es impar y de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que f es solución de la ecuación diferencial $y' + 2xy = 1$.
3. Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Sea $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}f'(x)$. Demostrar que g es estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$ y que g admite en $]0,+\infty[$ un solo cero denotado x_0 verificando además $0 < x_0 < 1$.
5. Hacer la tabla de variaciones de f.

Solución ▼ [005451]

Ejercicio 2661 ****

Sea $f(t) = \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$ si $t \neq 0$ y 0 si $t = 0$.

1. Verificar que f es continua en $\mathbb{R}$.
2. Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Demostrar que F tiene un límite real ℓ, cuando x tiende a $+\infty$ ya que $\ell = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$.

Solución ▼ [005465]

Ejercicio 2662

Calcular las primitivas de las siguientes funciones precisando el o los intervalos considerados :

1) $\frac{1}{x^3+1}$ 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$ 3) $\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$ 4) $\frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$ 5) $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$

6) $\frac{x^2+x}{x^6+1}$ 7) $\frac{1}{x^4+1}$ 8) $\frac{1}{(x^4+1)^2}$ 9) $\frac{1}{x^8+x^4+1}$ 10) $\frac{x}{(x^4+1)^3}$

11) $\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$

Solución ▼ [005466]

Ejercicio 2663

Calcular las primitivas de las siguientes funciones precisando el o los intervalos considerados :

1) $\dfrac{1}{\cos x}$ y $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ 2) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ 3) $\dfrac{1}{\tan x}$ y $\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ 4) $\dfrac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x-\operatorname{sen} x}$

5) $\dfrac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}$ 6) $\dfrac{\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x}$ 7) $\dfrac{\cos(3x)}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(3x)}$ 8) $\dfrac{1}{\cos^4 x+\operatorname{sen}^4 x}$

9) $\dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+1}$ 10) $\dfrac{\tan x}{1+\operatorname{sen}(3x)}$ 11) $\dfrac{\cos x+2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$ 12) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos(3x)}$

13) $\dfrac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\operatorname{sen}^2 x}$ 14) $\dfrac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$ 15) $\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$ 16) $\dfrac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$

17) $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$ 18) $\dfrac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

Solución ▼ [005467]

Ejercicio 2664

Calcular las primitivas de las siguientes funciones precisando el o los intervalos considerados :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ y $\sqrt{x^2+2x+5}$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ 4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

5) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 6) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$ 7) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$ 8) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$

9) $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$ y $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ 10) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Solución ▼ [005468]

Ejercicio 2665

Calcular las primitivas de las siguientes funciones precisando el o los intervalos considerados :

1) $\frac{1}{x\ln x}$ 2) $\arcsin x$ 3) $\arctan x$ 4) $\arccos x$

5) $\operatorname{argsh} x$ 6) $\operatorname{argch} x$ 7) $\operatorname{argth} x$ 8) $\ln(1+x^2)$

9) $e^{\arccos x}$ 10) $\cos x\ln(1+\cos x)$ 11) $\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$ 12) $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

13) $(\frac{x}{e})^x\ln x$ 14) $x^n\ln x$ $(n\in\mathbb{N})$ 15) $e^{ax}\cos(\alpha x)$ $(a,\alpha\in\mathbb{R}^*)$ 16) $\operatorname{sen}(\ln x)$ y $\cos(\ln x)$

17) $\frac{\sqrt{x^n+1}}{x}$ 18) $x^2e^x\operatorname{sen} x$

Solución ▼ [005469]

Ejercicio 2666

Condición necesaria y suficiente en a, b, c y d, para que las primitivas de $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ sean racionales (a, b, c y d reales dados).

Solución ▼ [005471]

Ejercicio 2667

Calcular las siguientes primitivas, precisando si es necesario el o los intervalos de validez de los cálculos :

1. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^8 x\cos^3 x\,dx$ 4. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x+3\tan x}\,dx$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006866]

Ejercicio 2668

Calcular las siguientes integrales :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} x\,dx$ (integración por partes).
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ (usando un simple cambio de variable).
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ (cambio de variable $x=\tan t$).
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$ (descomposición en elementos simples).
5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ (cambio de variable $u=\frac{1}{x}$).

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006867]

99 127.12 Integral impropia

Ejercicio 2669

Dar la naturaleza de las siguientes integrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx. \qquad \int_1^{\infty} x^x dx. \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx.$$

Naturaleza y cálculo de las integrales siguientes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx. \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx. \qquad \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx. \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(bile)}d(bile).$$

Solución ▼ [001280]

Ejercicio 2670

1. Demostrar que $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leqslant x$.
2. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Demostrar que $\forall x\in[0,n]$, $(1-\frac{x}{n})^n\leqslant e^{-x}\leqslant(1+\frac{x}{n})^{-n}$.

3. Deducir que :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$
Recordar (integrales de Wallis) : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe y vale I_{2n-2}.
5. Demostrar que $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ existe y vale $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

[001281]

Ejercicio 2671

Estudio de : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\quad x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t} dt$ Dar un equivalente de f en 0 y en $+\infty$. [001282]

Ejercicio 2672

Sea f una aplicación C^2 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f+f'' \geqslant 0$. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)+f(x+\pi) \geqslant 0$. [001283]

Ejercicio 2673

Sea f una aplicación continua de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y F de $\mathbb{R}^{+*}$ en $\mathbb{R}$ definida por :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},' \;\; F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$
1. Demostrar que si f admite un límite ℓ en $+\infty$, entonces F tiene también el límite ℓ en $+\infty$.
2. Dar un ejemplo donde f no tiene límite en $+\infty$, pero donde F tiende a 0.
3. Demostrar que si $f \to \infty$, cuando $x \to \infty$, entonces $F \to \infty$, cuando $x \to \infty$.

[001284]

Ejercicio 2674

Estudiar la función :
$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$
Dominio de definición, continuidad y derivabilidad, cuadro de variaciones, límites en la frontera de este dominio, y $\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, eventualmente convexidad. [001285]

Ejercicio 2675

Dar un ejemplo de una función continua positiva tal que :
$$\int_0^{\infty} f(u)du$$

existe pero tal que no se tiene :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dar un ejemplo de una función continua positiva tal que :

$$\int_0^\infty f(u)du$$

existe pero tal que :

$$\int_0^\infty f^2(u)du$$

no existe. [001286]

Ejercicio 2676

Sea f una función positiva decreciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, tal que $\int_0^\infty f$ existe. Demostrar que :

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

cuando $x \to \infty$. [001287]

Ejercicio 2677

Sea f una aplicación continua por partes de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ teniendo un límite ℓ en $+\infty$, tal que $\int_0^\infty f$ existe ; demostrar que $\ell = 0$. Sea f una aplicación uniformemente continua de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^\infty f$ existe. Demostrar que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

[001288]

Ejercicio 2678

Sea f una aplicación continua de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^\infty f^2$ existe. Demostrar que cuando $x \to \infty$:

$$\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x}).$$

[001289]

Ejercicio 2679

Estudiar la naturaleza de

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^\alpha} dt$$

según $\alpha \in \mathbb{R}$. [001290]

Ejercicio 2680

Convergencia y cálculo de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2}, \qquad \int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt, \qquad \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n}dt.$$

Solución ▼ [001291]

Ejercicio 2681

Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$ continua tal que

$$\int_1^\infty f(t)dt$$

converge. Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_1^x t f(t)dt = 0.$$

[001292]

Ejercicio 2682

Sea $f \in C([1, \infty[, \mathbb{R}^+)$ decreciente, se establece :

$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)dt.$$

1. Demostrar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Demostrar que la sucesión $S_n = \sum\limits_{k=1}^n f(k)$ tiene un límite cuando $n \to \infty$ si y solo si $\displaystyle\int_1^\infty f$ converge, y que en este caso :
$$\int_{n+1}^\infty f \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^m f(k) \leqslant \int_n^\infty f.$$
3. Demostrar que si $\displaystyle\int_1^\infty f$ diverge, se tiene : $S_n \backsim \displaystyle\int_1^n f$, cuando $n \to \infty$.

[001293]

Ejercicio 2683

Sea $f :]0; 1] \to \mathbb{R}$ continua y monótona, tal que $\displaystyle\int_0^1 f$ existe. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

[001294]

Ejercicio 2684

Demostrar que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces

$$\int_0^\infty \exp(if(t))dt$$

no existe. [001295]

Ejercicio 2685

Naturaleza de :

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \frac{1}{t} dt, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}{t} dt, \qquad \int_2^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t} + \operatorname{sen} t} dt, \qquad \int_0^1 \cos \ln t dt, \qquad \int_0^{\infty} \cos \exp t dt.$$

[001296]

Ejercicio 2686

Naturaleza y cálculo de :

$$\int_0^{\infty} \ln t \ln \left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt, a > 0; \qquad \int_0^{\infty} \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right) dt, n \in \mathbb{N}^*; \qquad \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})\right) dt.$$

[001297]

Ejercicio 2687

Convergencia y cálculo de :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \cosh^2 x}, \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sinh x}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t}.$$

[001298]

Ejercicio 2688

Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ tales que $f \geqslant 0, g \geqslant 0, g = o(f)$ en $+\infty$, y $\int_0^{\infty} f$ no existe. Demostrar entonces :

$$\int_0^x g(u) du = o\left(\int_0^x f(u) du\right)$$

cuando $x \to \infty$. [001299]

Ejercicio 2689

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua, tendiendo a ℓ en $+\infty$, demostrar entonces :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(t)n}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2}\ell.$$

[001300]

Ejercicio 2690

Calcular :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan t}{t^2} dt, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1-x} dx.$$

[001301]

Ejercicio 2691

Sea $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe, demostrar que $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos tx dt$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. [001302]

Ejercicio 2692

Sin calcularlos, decir si las siguientes integrales son convergentes o divergentes :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}, \qquad \int_0^{\pi/2} \tan t \; dt, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{arcsen} t}\ln(1-t)}.$$

[002331]

Ejercicio 2693

Sin calcularlos, decir si las siguientes integrales son convergentes o divergentes :

$$\int_0^\infty \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5-2t^3+t^2+1}\; dt, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\ln\frac{t-1}{t+1}\; dt, \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{t \operatorname{arg\,cosh} t}, \qquad \int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{t}\; dt,$$

[002332]

Ejercicio 2694

Sea $n \geqslant 0$ un entero. Demostrar que la integral

$$I_n = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2) dt$$

es convergente. Calcularla en función de n, sabiendo que $I_0 = \sqrt{\pi}/2$. [002333]

Ejercicio 2695

Se define

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\; dt$$

y para todo $n \in \mathbb{N}$, se denota

$$u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

1. Demostrar que $F(x)$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Demostrar que si $k \geqslant 1$, entonces

$$\frac{2}{(2k+1)\pi} < u_{2k} < \frac{1}{k\pi}.$$

   Encontrar una desigualdad similar para u_{2k+1}, luego para $u_{2k} + u_{2k+1}$.
3. Demostrar que la sucesión de términos generales $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ admite un límite finito. Deducir que

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\; dt$$

   es convergente.

[002334]

Ejercicio 2696

Sea φ la función definida en $[0,1[$ por

$$\varphi(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}.$$

Demostrar que $\varphi(x)$ tiene un límite cuando x tiende a 1 y calcularlo.

(Indicación : Comparar con $\displaystyle\int_x^{x^2} 1/(t\ln t)\,dt$). [002337]

Ejercicio 2697

Decir si las siguientes integrales son convergentes (discutiendo eventualmente según el valor de los parámetros) :

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt[3]{1-t}},\quad \int_0^{\pi/2}\tan t\,dt,\quad \int_0^1\frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta},\quad \int_0^1\cos(\ln t)\,dt,$$
$$\int_0^1\operatorname{sen}\frac{1}{t}\,dt,\quad \int_0^\infty\frac{t^2+t-1}{\sqrt{t}\,(t^3-2t^2+3t-6)}\,dt,\quad \int_0^\infty t^\alpha\,[1-\mathrm{e}^{-1/\sqrt{t}}]\,dt,\quad \int_0^\infty\frac{\ln t-\ln(1-\mathrm{e}^{-t})}{t}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt.$$

[002338]

Ejercicio 2698

Demostrar la convergencia de las siguientes integrales y luego calcularlas :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos\alpha\cos t+1},\quad \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}},\quad \int_a^b\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},$$
$$\int_{-\infty}^0\frac{dt}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t-6},\quad \int_a^\infty\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+a^2}},\ (a>0),\quad \int_1^{+\infty}\frac{t^3-t^2-1}{t^6+2t^4+t^2}\,dt.$$

[002339]

Ejercicio 2699 Estudio de convergencia

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^{-t}}\quad\text{(cv)}$$
$$\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{\ln t}\,dt\ \text{(cv si y solo si } \alpha>-1)$$
$$\int_0^{+\infty}\ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)\,dt\ \text{(dv)}$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt\ \text{(cv si y solo si } \alpha>1)$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{(t+1)^\alpha-t^\alpha}{t^\beta}\,dt\ \text{(cv si y solo si } 0<\beta-\alpha<1 \text{ o } \alpha=0)$$
$$\int_0^1\frac{dt}{\arccos t}\ \text{(cv)}$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+1/t)\,dt}{(t^2-1)^\alpha}\ \text{(cv si y solo si } 0<\alpha<1)$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}{t}\,dt\quad\text{(dv)}$$
$$\int_{\mathrm{e}^2}^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}\ \text{(dv)}$$
$$\int_0^{+\infty}\Big(2+(t+3)\ln\Big(\frac{t+2}{t+4}\Big)\Big)dt\ \text{(cv)}$$
$$\int_0^1\frac{dt}{1-\sqrt{t}}\ \text{(dv)}$$
$$\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}(t^2)\,dt\ \text{(cv)}$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,dt\ \text{(dv)}$$
$$\int_0^1\frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,dt\ \text{(cv si y solo si } \alpha<\beta+1)$$

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\big(1-\mathrm{e}^{-1}\sqrt{t}\big)\,dt \text{ (cv si y solo si } -1<\alpha<-\tfrac{1}{2}) \qquad \int_0^1 \operatorname{sen}\big(\frac{1}{t}\big)\mathrm{e}^{-1}tt^{-k}\,dt \text{ (cv)}$$

[004268]

Ejercicio 2700 Fracciones racionales

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{\pi}{4} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2t+2}=\pi$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^4}=\frac{5\pi}{32} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)(t^2-2t\cos\alpha+1)}=\frac{\pi}{2|\operatorname{sen}\alpha|}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{3\pi}{4} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2+a^2)}=\frac{\pi}{1+|a|}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^6(1+t^{10})}=\frac{4-\pi}{20}.$$

[004269]

Ejercicio 2701 Funciones trigonométricas

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\operatorname{sen}t}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2dt}{2+\operatorname{sen}t+\cos t}=2\pi\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,dt=\int_0 +\infty\frac{2t^2\,dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{3\tan t+2}=\frac{\pi+3\ln(3/2)}{13}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(a\operatorname{sen}^2 t+b\cos^2 t)^2}=\frac{\pi(a+b)}{2\sqrt{ab}^3} \qquad \int_0^{\pi/4}\cos t\ln(\tan t)\,dt=-\ln(1+\sqrt{2}).$$

[004270]

Ejercicio 2702 Radicales

$$\int_0^1\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt=\frac{\pi}{2} \qquad \int_1^{10}\frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}}=\frac{9}{2}$$

$$\int_a^b\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}=\pi \qquad \int_0^1\frac{t^5\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{8}{15}$$

$$\int_{-1}^1\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \int_0^1\frac{dt}{(4-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

$$\int_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{3} \qquad \int_0^1\frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2-t^3}}=\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$$

$$\int_0^1\arctan\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^{10}+t^5+1}}=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

[004271]

Ejercicio 2703 Exponenciales

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(e^{2t}-5e^t+6)(e^t-1)} = \ln\left(\frac{e^2-2}{\sqrt{e^4-4e^2+3}}\right), \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^4 t+\operatorname{sh}^4 t} = \frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}.$$

[004272]

Ejercicio 2704 Diversos

$$\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}}\,dt = 12$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = -2\ln 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} t\,dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0,\ (u = 1/t)$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\int_0^{+\infty} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \frac{t\,dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{2|a|(a^2+1)}.$$

$$\int_0^1 \arcsen t\,dt = \frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^3}\,dt = -\frac{1}{32}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = 4\ln 2-4,\ (u=\sqrt{1-t})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\,dt = \ln 2-\frac{\pi}{2},\ \left(u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{t^2}\right) dt = a\pi$$

[004273]

Ejercicio 2705 Central PC 1999

Sea (a_k) una sucesión de reales tal que $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(a_k t) \frac{dt}{t}$.

[004274]

Ejercicio 2706 Chimie P 91

Existencia y cálculo de $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x\cos t}$.

Solución ▼

[004275]

Ejercicio 2707 Chimie P 1996

Convergencia y cálculo de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{\operatorname{sh} t}$ (se puede descomponer el integrando en la suma de una serie de funciones).

Solución ▼

[004276]

Ejercicio 2708 Cálculo por recurrencia

Se establece $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2nt)\ln(\operatorname{sen} t)\,dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Calcular $2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$ y deducir I_n en función de n.

Solución ▼ [004277]

Ejercicio 2709 Cálculo por recurrencia

Sea $\alpha \in]0,\pi[$ y $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nt\,dt}{1-\operatorname{sen}\alpha\cos t}$. Calcular $I_n + I_{n+2}$ en función de I_{n+1}, luego expresar I_n en función de α y n.

Solución ▼ [004278]

Ejercicio 2710 Cálculo por recurrencia

Calcular por recurrencia : $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{t^n\,dt}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$.

Solución ▼ [004279]

Ejercicio 2711 Mines-Ponts 1999

Calcular $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$.

Solución ▼ [004280]

Ejercicio 2712 Cálculo de $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t/t\,dt$

1. Usando integración por partes, demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt$.
2. Demostrar que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 nt}{t^2}\,dt$ está incluida entre $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 nt}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt$ y $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{cotan}^2 t \operatorname{sen}^2 nt\,dt$.
3. Calcular $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ y $A_n - B_n$. Deducir los valores de A_n y B_n en función de n.
4. Cuando $n \to \infty$ demostrar que $\frac{I_n}{n} \to J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\,dt$ y dar el valor de esta última integral.

Solución ▼ [004281]

Ejercicio 2713 $\displaystyle\int_0^{\infty}$ periódica$/t\,dt$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, periódica de período $T > 0$. Se denota $m = \frac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T} f(t)\,dt$. Demostrar que $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge si y solo si $m = 0$. [004282]

Ejercicio 2714 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)/t\,dt$

Sea f una aplicación continua de $[1,+\infty[$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que si la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, lo mismo ocurre con la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$. Se puede introducir la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,dt$. [004283]

Ejercicio 2715 Polinomio$\times$e^{-t}

Sea $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (a_0,\dots,a_n)$, con $a_k = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P(t)\,dt$.

1. Justificar la existencia de φ.
2. Demostrar que φ es un isomorfismo de espacio vectorial.

[004284]

Ejercicio 2716 Constante de Euler

Calcular $\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^2}\,dt$ en función de la constante de Euler.

Solución ▼ [004285]

Ejercicio 2717 Constante de Euler

Sea γ la constante de Euler. Demostrar que ...

1. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt = -\gamma$.
2. $\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,dt = \gamma$.
3. $\int_0^1 \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln(1-t)}\right)dt = \gamma$.

Solución ▼ [004286]

Ejercicio 2718 Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continua creciente. Sea $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

1. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, demostrar que $S_n \to \int_a^b f(t)dt$, cuando $n\to\infty$.
2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, demostrar que $S_n \to +\infty$, cuando $n\to\infty$.

[004287]

Ejercicio 2719 Sumas de Riemann

Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.

Solución ▼ [004288]

Ejercicio 2720 Comparación serie-integral

Sea $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua decreciente tal que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converger y encuadrar el resto : $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ utilizando integrales de f.
2. Aplicación : Para $\alpha > 1$, dar un equivalente para $n\to\infty$ de $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

[004289]

Ejercicio 2721 Comparación de series integrales

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Sea, sujeto a la convergencia, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$, para $t > 0$.

1. Si f es monótona e integrable, demostrar que $g(t)$ existe para todo $t > 0$ y que se tiene $tg(t) \to \int_0^{+\infty} f(u)\,du$, cuando $t \to 0^+$.
2. La misma pregunta suponiendo f de clase $\mathscr{C}^1$ y f, f' integrables.
3. Se supone ahora f de clase $\mathscr{C}^2$ y f, f', f'' integrables. Demostrar que $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(u)\,du + \dfrac{f(0)}{2} + O_{t\to 0^+}(t)$.

Solución ▼ [004290]

Ejercicio 2722 Valor medio de una variable aleatoria con densidad

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continua tal que $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge. Sea $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$.

1. Justificar la existencia de $F(x)$, y demostrar que $F(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \to +\infty$.
2. Demostrar que $\int_0^{+\infty} F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

[004291]

Ejercicio 2723 $\int_0^{\infty} f(t)/t^2\,dt$

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ verificando : $\exists\ \alpha > 0$ tal que $\forall x \geqslant 0,\ f'(x) \geqslant \alpha$. Demostrar que $\int_1^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,dt$ diverge. [004292]

Ejercicio 2724 $x(f(x) - f(x+1))$

Sea $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ una función decreciente tal que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Demostrar que $xf(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$, luego que $\int_1^{+\infty} t(f(t) - f(t+1))\,dt$ converge, y calcular el valor de esta integral.

Solución ▼ [004293]

Ejercicio 2725 $f(|t - 1/t|)$

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Demostrar que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f\left(\left|u - \frac{1}{u}\right|\right)du$. [004294]

Ejercicio 2726 $(f(ax) - f(x))/x$

1. Sea $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\begin{cases} f(x) \to \ell \text{ si } x \to 0^+ \\ f(x) \to L \text{ si } x \to +\infty. \end{cases}$

Para $a > 0$, establecer la convergencia y calcular el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t}\, dt$.

2. Aplicación : Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$.

Solución ▼ [004295]

Ejercicio 2727 $f(t+a) - f(t)$, Ensi PC 1999

1. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua que tiene un límite finito en $+\infty$. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t+a) - f(t))\, dt$ converge.
2. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt$.

Solución ▼ [004296]

Ejercicio 2728 Valor medio

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a trozos tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge. Se define $F(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt$. Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$. Demostrar el mismo resultado suponiendo solamente la convergencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$.

Solución ▼ [004297]

Ejercicio 2729 $(\int t f(t)\, dt)/x$

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. Demostrar que $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Solución ▼ [004298]

Ejercicio 2730 f uniformemente continua

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformemente continua tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. Demostrar que $f(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$. (Razonar por contradicción).
2. Si f es positiva, demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt$ converge.
3. Dar un contraejemplo si f no es de signo constante.

[004299]

Ejercicio 2731 f decreciente $\Rightarrow x f(x) \to 0$

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. Si $f(x) \to L$, cuando $x \to +\infty$, ¿cuánto vale L?
2. Dar un ejemplo donde f no tiene límite en $+\infty$.

3. Si f es decreciente, demostrar que $xf(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

[004300]

Ejercicio 2732 $\int \mathrm{e}^{-t}/t, dt$

Se establece $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt$.

1. Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Usando integración por partes, dar un equivalente de $f(x)$, para $x \to +\infty$.
3. Dar un equivalente de $f(x)$, para $x \to 0^+$.

Solución ▼ [004301]

Ejercicio 2733 Integral de Gauss

1. Demostrar que para $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ se tiene : $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ y para x cualquiera : $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
2. Calcular las integrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ y $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ en función de las integrales : $K_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p t\, dt$.
3. Se admite que $K_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$, cuando $p \to \infty$. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

Solución ▼ [004302]

Ejercicio 2734 Integrales de Gauss

Se admite que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calcular las integrales : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n}\, dt$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [004303]

Ejercicio 2735 Mines-Ponts MP 2005

Naturaleza y cálculo de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-(x - \frac{1}{x})^2\right) dx$?

Solución ▼ [004304]

Ejercicio 2736

Existencia de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^4 + x^2 + x)\, dx$.

Solución ▼ [004305]

Ejercicio 2737 $\cos(P(t))$

Sea P un polinomio con coeficientes reales de grado mayor o igual a 2. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\, dt$ converge.

Solución ▼ [004306]

Ejercicio 2738 Ensi PC 1999

Sean $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ y $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n\,du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Demostrar que estas integrales convergen, que son iguales y calcularlas.

Solución ▼ [004307]

Ejercicio 2739 f y f'' de cuadrados sumables

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,dt$ convergen. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,dt$ converge. [004308]

Ejercicio 2740 $f' \leqslant 1$, Ulm 1999

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de clase $\mathscr{C}^1$, integrable.

1. Se supone $f' \leqslant 1$. Demostrar que $f(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.
2. ¿Es aún esto cierto si solo asumimos $f' \leqslant 1+g$, con g integrable ?

[004309]

Ejercicio 2741 Integrales anidadas

Establecer la convergencia y calcular el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,dx$.

Solución ▼ [004310]

Ejercicio 2742 Central MP 2001

Sea f de clase $\mathscr{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^+$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que f^2 y f''^2 son integrables en $\mathbb{R}^+$. Demostrar que ff'' y f'^2 son integrables en $\mathbb{R}^+$, que f es uniformemente continua y tiende a cero en $+\infty$.

Solución ▼ [004311]

Ejercicio 2743 X MP* 2000

Dar un equivalente para $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt$.

Solución ▼ [004312]

Ejercicio 2744

Estudiar la existencia de las siguientes integrales

1) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$ 2) (**) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)dx$ 3) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^x}\,dx$

4) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}dx$ 5) (**) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ 6) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{-\ln x}\,dx$

7) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x^{5/3}}\,dx$ 8) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ 9) (**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

10) (**) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 11) (**) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx$ 12) (***) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\arccos(1-x)}\,dx.$

Solución ▼ [005713]

Ejercicio 2745

Estudiar la existencia de las siguientes integrales.

1) (***) I $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\,dx$ (Integrales de BERTRAND) 2) (**) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\tan x)^a\,dx$

3) (**) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)dx$ 4) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x^b)}\,dx.$

Solución ▼ [005714]

Ejercicio 2746

(Fuera del programa) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias :

1. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx$ 2. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^a}\,dx$ 3. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ix^2}\,dx$

4. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^3\operatorname{sen}(x^8)\,dx$ 5. (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(\mathrm{e}^x)\,dx$ 6. (****) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

Solución ▼ [005715]

Ejercicio 2747

Existencia y cálculo de :

1) (** I) $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (muy largo) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$

3) (** I) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I muy largo) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$, (cálculo para $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$, $(0<a<b)$

Solución ▼ [005716]

Ejercicio 2748

Dos cálculos de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$.

1) (** I) Utilizando $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$, calcular I (y J).

2) (*** I) Calcular $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2n}$. (Comenzar por P_n^2) y deducir I.

Solución ▼ [005717]

Ejercicio 2749 ** I

Utilizando un desarrollo de $\frac{1}{1-t}$, calcular $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt$.

Solución ▼ [005718]

Ejercicio 2750 *** I

Calcular $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$. (Escribir $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$).

Solución ▼ [005719]

Ejercicio 2751

1) (** I) Encontrar un equivalente simple cuando x tiende a $+\infty$ de $\mathrm{e}^{x^2} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

2) (***) Demostrar que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \underset{a\to 0}{\sim} -\ln a$.

3) (*) Demostrar que $\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\, dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

Solución ▼ [005720]

Ejercicio 2752 ***

Estudio completo de $f:\ x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Solución ▼ [005721]

Ejercicio 2753 ***

(Fuera del programa) Convergencia y cálculo de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$.

Solución ▼ [005722]

Ejercicio 2754 ***

Sea f definida, continua, positiva y decreciente en $[1,+\infty[$, integrable en $[1,+\infty[$.

1. Demostrar que $xf(x)$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.
2. Existencia y cálculo de $\int_1^{+\infty} x(f(x+1)-f(x))dx$.

Solución ▼ [005723]

Ejercicio 2755 ***

1. Sea f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^+$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge en $+\infty$. Demostrar que $\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ converge en $+\infty$ si y solo si $f(x)$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.
2. (a) Se supone que f es una función de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^+$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que f y f'' admite límites reales cuando x tiende a $+\infty$. Demostrar que f' tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.

   (b) Deducir que si las integrales $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ y $\int_0^{+\infty} f''(x)\, dx$ convergen, entonces f tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [005724]

Ejercicio 2756 ***

Sea f de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que f^2 y $(f'')^2$ sean integrables en $\mathbb{R}$. Demostrar que f'^2 es integrable en $\mathbb{R}$ y que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\, dx\right)$. ¿Caso de igualdad?

Solución ▼ [005725]

Ejercicio 2757

1. *El propósito de esta pregunta es demostrar que* $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ *no es absolutamente convergente.* Para $n \in \mathbb{N}$, se establece :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\, dt.$$

   Demostrar que para $n \geqslant 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leqslant u_n$. Deducir que $\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\, dt$ es divergente.
2. *Segunda fórmula de la media.* Sean f y g dos funciones Riemann-integrables en $[a,b]$, admitiendo primitivas denotadas F y G respectivamente. Se supone que F es positiva y decreciente. Demostrar que existe $y \in [a,b]$ tal que :

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx.$$

3. Deducir que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ es convergente.
4. *El propósito de esta pregunta es calcular el valor de esta integral.* Para todo número real $\lambda \geqslant 0$, se establece :

$$\begin{cases} f(t,\lambda) = e^{-\lambda t} \frac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{para} \quad t > 0 \\ f(0,\lambda) = 1. \end{cases}$$

   (a) Para $0 < x \leqslant y$, demostrar que se tiene :

$$\left| \int_x^y f(t,\lambda)\, dt \right| \leqslant \frac{2}{x} e^{-\lambda x}.$$

(b) Deducir que las integrales generalizadas $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt$, son convergentes, uniformemente para $\lambda \geqslant 0$. Sea, para $\lambda \geqslant 0$,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Demostrar que la función F es continua en $\lambda \geqslant 0$.

(c) Demostrar que la función F es derivable para $\lambda > 0$ y que su derivada es igual a la integral generalizada convergente

$$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \operatorname{sen} t\,dt.$$

(d) Calcular esta última integral generalizada, por ejemplo integrando por partes en $[0,x]$ y calculando el límite cuando $x \to +\infty$.

(e) Deducir el valor de $F(\lambda)$, para $\lambda \geqslant 0$ salvo una constante aditiva. Demostrar que $F(\lambda) \to 0$, cuando $\lambda \to +\infty$. Deducir el valor de la constante aditiva, luego el valor de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$.

Solución ▼ [005925]

100 127.99 Otro

Ejercicio 2758

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(nt) f(t)dt = 0$. [001273]

Ejercicio 2759

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = 0$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt = 0.$$

Generalizar al caso donde $f(0)$ es cualquiera. [001274]

Ejercicio 2760

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable.

1. Demostrar que f es acotada. Sea $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
2. Sean x y $y \in [a,b]$ Demostrar que $|\int_x^y f(t)dt| \leqslant M|x-y|$. Deducir que la aplicación $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$.
3. Sea $x_0 \in [a,b]$. Demostrar que si f es continua en x_0, entonces F es derivable en x_0.

[001275]

Ejercicio 2761

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nt^n f(t^n)dt=\int_0^1 f(t)dt.$$

(Se puede hacer el cambio de variable $u=t^n$). [001276]

Ejercicio 2762

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(a)=f(b)=0$. Sea $M=\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$. Demostrar que $|\int_a^b f(t)dt|\leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$.

(Indicación : Hacer los desarrollos limitados de $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ y $x\mapsto\int_x^b f(t)dt$). [001277]

Ejercicio 2763

Sea f continua en $[0,1]$, con $f(1)\neq 0$, demostrar :

$$\int_0^1 x^n f(t)dt\sim\frac{f(1)}{n}.$$

Deducir :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-2t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

Se define $u=1-\frac{1}{n}$, luego $v=u\mathrm{e}^{2(u-1)}$. [001278]

Ejercicio 2764

Dar un desarrollo :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}dt=a+\frac{b}{n}+o(\frac{1}{n}).$$

[001279]

Ejercicio 2765

Calcular las integrales

$$I=\int_0^x \exp 2t\cos 3t\ dt \qquad \text{y} \qquad J=\int_0^x \exp 2t\operatorname{sen} 3t\ dt.$$

[002327]

Ejercicio 2766

Sean $a\neq 0$ un real, y $y>x>0$.

1. Calcular el valor de
$$I(x,y)=\int_x^y \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dt.$$
2. Demostrar que $I(x,y)$ tiene un límite $I_0(y)$, cuando x tiende a cero y calcularlo.
3. Demostrar que $I_0(y)$ tiene un límite cuando y tiende a $+\infty$ y calcularlo.

[002328]

Ejercicio 2767 Escuela aérea 94

Se denota $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2-\cos x}\,dx$, $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\,dx$.
Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $I_n = J_n + (-1)^n K_n$ y $I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1}$. Deducir I_n en función de n.

Solución ▼ [004238]

Ejercicio 2768 Cálculo de integral

Calcular para todo $n \in \mathbb{N}^* : I_n = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$.

Solución ▼ [004239]

Ejercicio 2769 arcsen y arccos

Simplificar $\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

Solución ▼ [004240]

Ejercicio 2770 Cálculo del límite

Estudiar el límite de la sucesión definida por $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Solución ▼ [004244]

Ejercicio 2771 Intercambio de decimales

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$ (intercambio de los dos $1^{\text{ères}}$ decimales).
Demostrar que f es continua a trozos y calcular $\int_0^1 f(t)\,dt$. [004246]

Ejercicio 2772 $\int f(t)\cos(t)\,dt$

Sea $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ convexa de clase $\mathscr{C}^2$. ¿Cuál es el signo de $I = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt$?

Solución ▼ [004247]

Ejercicio 2773 Convexidad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa y $g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Demostrar que g es convexa. [004248]

Ejercicio 2774 Expresión de una primitiva n-ésima de f

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$. Demostrar que $g^{(n)} = f$. [004249]

Ejercicio 2775 Teorema de división

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^{n+p}$ tal que $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. Sea $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$, para $x\neq 0$ y $g(0)=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Escribir $g(x)$ en forma de integral.
2. Deducir que g es de clase $\mathscr{C}^p$ y $|g^{(p)}(x)|\leqslant \dfrac{p!}{(p+n)!}\sup\{|f^{(n+p)}(tx)|$ tal que $0\leqslant t\leqslant 1\}$.

[004250]

Ejercicio 2776 Función absolutamente monótona

Sea $f:[0,a[\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que f y todas sus derivadas son positivas en $[0,a[$.

1. Demostrar que la función $g_n : x\longmapsto \frac{1}{x^n}\left(f(x)-f(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right)$ es creciente.
2. Se fija $r\in\,]0,a[$. Demostrar que la serie de Taylor de f converge a f sobre $[0,r[$.

Solución ▼ [004251]

Ejercicio 2777 Segunda fórmula de la media

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas, f positiva decreciente. Se denota $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$, y

$$M=\sup\{G(x),\ x\in[a,b]\}\qquad m=\inf\{G(x),\ x\in[a,b]\}.$$

1. Se supone aquí que f es de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que $mf(a)\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leqslant Mf(a)$.
2. Demostrar la misma desigualdad si f es solo continua, admitiendo que es un límite uniforme de funciones de clase $\mathscr{C}^1$ decrecientes.
3. Demostrar en fin que existe $c\in[a,b]$ tal que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(a)\int_a^c g(t)\,dt$.

[004252]

Ejercicio 2778 Desigualdad de la media

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas, f decreciente, y $0\leqslant g\leqslant 1$. Se denota $G(x)=a+\int_a^x g(t)\,dt$. Demostrar que $\int_a^b fg(t)\,dt\leqslant\int_a^{G(b)} f(t)\,dt$.

[004253]

Ejercicio 2779 Una desigualdad

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que $f(a)=0$ y $\forall t\in[a,b],\ 0\leqslant f'(t)\leqslant 1$. Comparar $\int_a^b f^3(t)\,dt$ y $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2$. Introducir las funciones : $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $G(x)=\int_a^x f^3(t)\,dt$, y $H=F^2-G$.

Solución ▼ [004254]

Ejercicio 2780 Integrales de Wallis

Se denota $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$.

1. Comparar I_n y $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t\,dt$.
2. Cortando $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0,\alpha]$ y $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, demostrar que $I_n \to 0$, para $n \to \infty$.
3. Encontrar una relación de recurrencia entre I_n y I_{n+2}. Deducir I_{2k} y I_{2k+1} en función de k.
4. Demostrar que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5. Demostrar que $I_n \sim I_{n-1}$ y deducir un equivalente simple de I_n, luego de C_{2n}^n, para $n \to \infty$.

[004255]

Ejercicio 2781 Norme L^∞

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continua no idénticamente nula. Sea establece que $I_n = \displaystyle\int_a^b f^n(t)\,dt$ y $u_n = \sqrt[n]{I_n}$. Sea $M = \max\{f(x) \text{ tal que } a \leqslant x \leqslant b\}$ y $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = M$.

1. Comparar M y u_n.
2. Usando la continuidad de f en c, demostrar que : $\forall \varepsilon \in]0,M[$ existe $\delta > 0$ tal que $I_n \geqslant \delta(M-\varepsilon)^n$.
3. Deducir $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

[004256]

Ejercicio 2782 Lema de Lebesgue

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$, (cuando $n \to \infty$) ...

1. si f es de clase $\mathscr{C}^1$.
2. si f es escalonada.
3. si f es continua.

[004257]

Ejercicio 2783 Mayor función convexa minorando f

1. Sea (f_i) una familia de funciones convexas en un intervalo I. Se supone que : $\forall x \in I,\ f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Demostrar que f es convexa.
2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ minorada. Demostrar que existe una función más grande convexa minorando f. Se denota esta función $\tilde{f}$.
3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ creciente. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$. (Iniciar con el caso donde f es escalonada).

[004258]

Ejercicio 2784 Central PC 1998

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continua.

1. Demostrar que existe una subdivisión de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que :
$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Estudiar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Solución ▼ [004259]

Ejercicio 2785 Mines MP 2000

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1$, 2π periódica, que no se anula. Demostrar que $I(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}$ es un entero.

Solución ▼ [004260]

Ejercicio 2786 Funciones afines

Sea $E = \mathscr{C}([a,b])$, y $F = \{f \in \mathscr{C}^2([a,b]),$ tal que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\}$.

1. Sea $f \in E$. Demostrar que existe $g \in F$ verificando $g'' = f$ si y solo si $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x f(x)\,dx = 0$.
2. Sea $f \in E$ tal que $\int_a^b f(x) g''(x)\,dx = 0$, para toda función $g \in F$. Demostrar que f es afín.

Solución ▼ [004261]

Ejercicio 2787 Mines MP 2001

Sea $a < 0 < b$ y f continua en $[0,1]$, con valores en $[a,b]$ tal que $\int_0^1 f = 0$. Demostrar que $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

Solución ▼ [004262]

Ejercicio 2788 **I

1. Sea f una aplicación de clase C^1 sobre $[0,1]$ tal que $f(1) \neq 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, luego determinar un equivalente simple de u_n, cuando n tiende a $+\infty$ (Estudiar $\lim_{n\to+\infty} n u_n$).
2. Las mismas preguntas suponiendo que f es de clase C^2 sobre $[0,1]$ y que $f(1) = 0$ y $f'(1) \neq 0$.

Solución ▼ [005445]

Ejercicio 2789 **I El lema de LEBESGUE

1. Se supone que f es una función de clase C^1 sobre $[a,b]$. Demostrar que $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \operatorname{sen}(\lambda t) f(t)\,dt = 0$.
2. (***) Redemostrar el mismo resultado suponiendo simplemente que f es continua a trozos en $[a,b]$. (Empezar con el caso de las funciones escalonadas).

Solución ▼ [005448]

Ejercicio 2790 ***

Sea f una función de clase C^1 sobre $[0,1]$ tal que $f(0) = 0$. Demostrar que $2\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^1 f'^2(t)\,dt$.

Solución ▼ [005452]

Ejercicio 2791 ***

Sea a un real estrictamente positivo y f una aplicación de clase C^1 y estrictamente creciente en $[0,a]$ tal que $f(0)=0$. Demostrar que $\forall x \in [0,a]$, $\forall y \in [0, f(a)]$, $xy \leqslant \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$.

Solución ▼ [005454]

Ejercicio 2792 **

Sea f continua en $[0,1]$ tal que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Demostrar que f admite un punto fijo.

Solución ▼ [005455]

Ejercicio 2793 **

Sean f y g dos funciones continuas por pedazos y positivas en $[0,1]$ tales que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. Demostrar que $(\int_0^1 f(t)\,dt)(\int_0^1 g(t)\,dt) \geqslant 1$.

Solución ▼ [005456]

Ejercicio 2794 ***

Encontrar todas las aplicaciones continuas en $\mathbb{R}$ verificando : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.

Solución ▼ [005461]

Ejercicio 2795 ***

Sea f una función de clase C^1 sobre $[a,b]$ tal que $f(a)=f(b)=0$ y sea $M = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a,b]\}$. Demostrar que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Solución ▼ [005462]

Ejercicio 2796 **

Determinar las funciones f continua en $[0,1]$ verificando $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Solución ▼ [005463]

101 140.01 Distancia, norma, producto escalar

102 140.02 Rectas

103 141.01 Producto escalar, producto vectorial, determinante

104 141.02 Área, volumen

105 141.03 Planos

106 141.04 Rectas del espacio

107 141.05 Distancia

108 200.01 Forma multilineal

Ejercicio 2797

Se considera el espacio $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices cuadradas $n \times n$, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Se recuerda que la *traza* $\operatorname{tr}(A)$ de una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ es la suma de sus coeficientes diagonales. Para una matriz M dada, se denota α_M la aplicación definida por

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M(X) = \operatorname{tr}(MX).$$

1. Verificar que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha_M \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$.
   Se denota ϕ la aplicación siguiente : $\begin{array}{l} \phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ \qquad\qquad M \mapsto \alpha_M. \end{array}$
2. Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de ϕ.
3. Deducir que para toda forma lineal $\alpha \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$, existe una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tal que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha(X) = \operatorname{tr}(AX).$$

4. Determinar todas las formas lineales $\alpha \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^*$ tales que

$$\forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \alpha(XY) = \alpha(YX).$$

[001107]

Ejercicio 2798

Se denota $\mathbb{R}_n[X]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, se denota α_i la aplicación $\begin{array}{l} \alpha_i : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ \qquad P \mapsto P(x_i). \end{array}$

1. Verificar que cada α_i es una forma lineal en $\mathbb{R}_n[X]$
2. Se denota G el espacio generado por $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Determinar G°. Deducir que la familia $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ es una base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
3. Demostrar que la familia $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ es una base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

4. Demostrar que existen números reales $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tales que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$.
5. Demostrar que $\exists!$ familia de polinomios $(P_0, \dots, P_n)$ de $R_n[X]$ tal que $\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2$, $P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
6. Deducir que para toda función continua f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, existe un polinomio P de grado n, que interpola f en cada punto x_i, es decir que satisface :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i).$$

[001108]

Ejercicio 2799

En cada uno de los casos a continuación, decir si la aplicación ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, es multilineal.

$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + y_2 + z_3$ $\quad\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$

$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$ $\quad\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$

$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$ $\quad\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$

$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$.

[001109]

Ejercicio 2800

Demostrar que el espacio de formas bilineales en $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial. Dar una base. [001110]

Ejercicio 2801

Dar todas las formas trilineales alternas en $\mathbb{R}^2$. Más generalmente, ¿qué pasa con las formas m-lineales alternadas en un espacio de dimensión n, cuando $m > n$? [001111]

Ejercicio 2802

Sea $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Se considera la aplicación Φ_A siguiente : $\begin{array}{rcl} \Phi_A : (\mathbb{R}^n)^n & \to & \mathbb{R} \\ M = (C_1, \dots, C_n) & \mapsto & \det(AM). \end{array}$

Demostrar que Φ_A es n-lineal. Calcular $A \times \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{n-2} \end{array}\right)$.

Deducir que $\Phi_A(e_2, e_1, e_3, \dots, e_n) = -\Phi_A(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$.

Más generalmente, demostrar que Φ_A es alternada. Demostrar que $\Phi_A(M) = \det(A)\det(M)$. Inferir que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \ \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

[001112]

Ejercicio 2803

En $\mathbb{R}^3$ dotado con su base canónica, se considera las aplicaciones ω y α siguientes :

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &\mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto x_3 \end{aligned}$$

1. Demostrar que ω es antisimétrica y bilineal. Con ayuda de ω y α, se define una nueva aplicación, denotada $\omega \wedge \alpha$, de la manera siguiente :

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (X,Y,Z) &\mapsto \omega(X,Y)\alpha(Z) + \omega(Y,Z)\alpha(X) + \omega(Z,X)\alpha(Y) \end{aligned}$$

2. Demostrar que $\omega \wedge \alpha$ es alternada.
3. Demostrar que $\omega \wedge \alpha$ es trilineal.
4. Calcular $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$. Deducir que $\forall (X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $\omega \wedge \alpha(X,Y,Z) = \det(X,Y,Z)$.

[001113]

Ejercicio 2804 Cambios de signo

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ y $A' = ((-1)^{i+j} a_{ij})$. Comparar $\det A$ y $\det A'$.

Solución ▼ [003427]

Ejercicio 2805 Suma de columnas, Matexo

Sea M una matriz cuadrada de orden n, y M' la matriz deducida de M reemplazando, para todo j, la j-ésima columna por la suma de las columnas de M de diferentes índices de j. Comparar los determinantes de M y M'.

[003428]

Ejercicio 2806 Traza de un endomorfismo

Sea E un ev de dimensión n, $f \in \mathscr{L}(E)$, y $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$, n vectores de E. Se denota det el determinante en una base fija de E. Demostrar que :

$$\det(f(\overrightarrow{u}_1), \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n) + \det(\overrightarrow{u}_1, f(\overrightarrow{u}_2), \overrightarrow{u}_3, \dots, \overrightarrow{u}_n) + \dots + \det(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, f(\overrightarrow{u}_n)) = \det(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n)\operatorname{tr}(f).$$

Solución ▼ [003438]

Ejercicio 2807 **

Sean $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ una matriz cuadrada y $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, donde $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calcular $\det(B)$ en función del $\det(A)$.

Solución ▼ [005635]

Ejercicio 2808 ***I

Se define por bloques una matriz A por $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, donde A, B y C son matrices cuadradas de tamaños respectivos n, p y q, con $p+q=n$. Demostrar que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

Solución ▼ [005636]

109 200.02 Cálculo de determinantes

Ejercicio 2809

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}.$$

[001114]

Ejercicio 2810

Calcular, para todo $t \in \mathbb{R}$ el rango de matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ y $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [001115]

Ejercicio 2811

1. Sean $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ y $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. Calcular (en función de $\det(A)$ y $\det(B)$) el determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. (Para esto se puede descomponer M como el producto de dos matrices de determinante evidente y usar la multiplicatividad del determinante.)
2. Sean $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ y $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Calcular el determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. (Generalizar el método de 1.)

[001116]

Ejercicio 2812

Sin cálculo, demostrar que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es divisible por 17. [001117]

Ejercicio 2813

Sea $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de tamaño $n = 2$ o 3, con $a_{i,j}$ funciones derivables.

1. Demostrar que $\Delta'(x)$ es la suma de los n determinantes obtenidos, reemplazando sucesivamente en $\Delta(x)$ cada columna por su derivada.
2. Calcular $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

[001118]

Ejercicio 2814

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ y determinar la condición de invertibilidad de la matriz. [001119]

Ejercicio 2815

¿La familia $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ es libre ? [001120]

Ejercicio 2816

Calcular $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. [001121]

Ejercicio 2817

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & \operatorname{sen} y & \cos y \\ 1 & \operatorname{sen} z & \cos z \end{vmatrix}$ [001122]

Ejercicio 2818

Sea n un entero superior o igual que 3. Se sitúa en $\mathbb{R}^n$. Se denota e_i el vector de $\mathbb{R}^n$ cuya i-ésima componente es igual a 1 y todos los demás son nulos. Escribir la matriz $n \times n$ cuya vectores columnas C_i son dados por $C_i = e_i + e_n$, para $1 \leqslant i \leqslant n-1$ y $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calcular entonces su determinante. [001123]

Ejercicio 2819

Se denotan a, b, c reales. Calcular los siguientes determinantes.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Generalizar el cálculo de D_2 a un determinante $n \times n$ del mismo tipo. [001124]

Ejercicio 2820

Se denota $a_1, \dots, a_n$ de reales. Calcular los determinantes $n \times n$ siguientes.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

[001125]

Ejercicio 2821

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \operatorname{sen} a & \operatorname{sen} b & \operatorname{sen} c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(c-b)+\operatorname{sen}(b-a)+\operatorname{sen}(a-c) = 4\operatorname{sen}\frac{c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b-a}{2}\operatorname{sen}\frac{a-c}{2}$$

[001126]

Ejercicio 2822

Sean a, b dos reales distintos. Calcular el determinante siguiente.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

[001127]

Ejercicio 2823

Calcular el determinante de la siguiente matriz :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calcular entonces, según el valor del parámetro m, el rango de esta matriz. [001128]

Ejercicio 2824

Calcular el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ -4 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en función de n. (Verificar que -1 es raíz de X^3-3X^2+4). [001129]

Ejercicio 2825

Calcular los siguientes determinantes :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

[001130]

Ejercicio 2826

Sea $(a,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, se denota A_n el determinante siguiente :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$. Deducir una expresión de A_n en función de n, a, x y y.
[001131]

Ejercicio 2827

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, con $a \neq b$. Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, se denota B_n el determinante siguiente :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$. Demostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

[001132]

Ejercicio 2828

Interesan las sucesiones reales $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaciendo la relación de recurrencia

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n. \tag{$\star$}$$

1. Determinar todas las sucesiones complejas que satisfacen la relación $(\star)$.
2. Determinar todas las sucesiones reales que satisfacen la relación $(\star)$. Se considera ahora el determinante de orden n siguiente :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calcular Δ_{n+2} en función de Δ_{n+1} y Δ_n, para $n \in \mathbb{N}$ (se establece $\Delta_0 = 1$). Deducir el valor de Δ_n en función de n.

[001133]

Ejercicio 2829

calcular los siguientes determinantes :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

[001134]

Ejercicio 2830

Calcular los siguientes determinantes :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

[001135]

Ejercicio 2831

Los números 119, 153 y 289 son todos divisibles por 17. Demostrar, sin desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ es divisible por 17.

[001136]

Ejercicio 2832

Calcular los siguientes determinantes :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}.$$

[001137]

Ejercicio 2833

Para $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, se denota $A_{(a_0 \dots a_n)}$ la matriz

$$A_{(a_0 \dots a_{n-1})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

y a $\lambda \in \mathbb{R}$, se asocia $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda) = \det(A_{(a_0 \dots a_{n-1})} - \lambda \, \mathrm{Id})$. Calcular $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ en función de $\Delta_{(a_1 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ y a_0. Deducir $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$.

[001138]

Ejercicio 2834

Calcular los siguientes determinantes :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q & & \text{\Large 0} \\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q \\ \text{\Large 0} & & 1 & p \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

[001139]

Ejercicio 2835

Sea $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathscr{M}_{m,m}(\mathbb{R})$. Se considera la aplicación ϕ siguiente :

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estudiar la multilinealidad de ϕ, con respecto a las columnas de A. Calcular $\phi(\mathrm{Id})$. Deducir que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Sea $M = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ una matriz triangular de bloques. Demostrar que $\det(M) = \det(A_1)\cdots\det(A_k)$.

[001140]

Ejercicio 2836

Calcular el siguiente determinante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{45} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \end{vmatrix}.$$

¿Cómo generalizar este resultado a una dimensión más grande ? [001141]

Ejercicio 2837

Calcular los siguientes determinantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

[001142]

Ejercicio 2838

Sea $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$, $x\in\mathbb{C}$. Calcular

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x & 0 & & a_0\\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & x & a_{n-2}\\ 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1}\end{vmatrix}$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001143]

Ejercicio 2839

Sea $(a_1,a_2,a_3)\in(\mathbb{K})^3$. Se denota $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, y se consideran las siguientes dos matrices :

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix}.$$

Calcular el producto AV, luego $\det(AV)$ en función de $\det(V)$, y deducir $\det(A)$. [001144]

Ejercicio 2840

Sea a un real. Se denota Δ_n el determinante siguiente :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1\\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2\\ 0 & \cdots & 0 & a & 1\\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a\end{vmatrix}.$$

1. Calcular Δ_n en función de Δ_{n-1}.
2. Demostrar que : $\forall n\geqslant 2\quad \Delta_n=a^n-a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}i^2$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001145]

Ejercicio 2841

Sea a un real diferente de 1. Para $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, se denota

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0\\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots\\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a\\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2\end{vmatrix}.$$

Calcular D_n en función de D_{n-1} y D_{n-2}. Demostrar que $D_n=\frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. ¿Cuántos vale D_n si $a=1$? [001146]

Ejercicio 2842

Sean a, b, c tres reales y Δ_n el determinante de tamaño n siguiente :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Sea $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. Se supone que $a^2 = 4bc$. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = (n+1)\dfrac{a^n}{2^n}$.

[001147]

Ejercicio 2843

Calcular el siguiente determinante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}.$$

[001148]

Ejercicio 2844

Sea Δ_n el determinante de tamaño n siguiente :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$, (con la convención $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).
2. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

[001149]

Ejercicio 2845

Sea u la aplicación de $\mathbb{R}_n[X]$ en $\mathbb{R}_n[X]$ definida por $u(P) = P + P'$. Calcular $\det u$. La misma pregunta cuando $u(P) = XP' + P(1)$.

[001150]

Ejercicio 2846

Calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}.$$

[002448]

Ejercicio 2847

Calcular por inducción el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

[002452]

Ejercicio 2848 Determinante de Vandermonde

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_j - t_i)$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [002453]

Ejercicio 2849

Sea M una matriz cuadrada de orden n, y M' la matriz deducida de M reemplazando, para todo j, la j-ésima columna por la suma de las columnas de M de diferentes índices de j. Demostrar que $\det M' = (-1)^{n-1}(n-1)\det M$. [002454]

Ejercicio 2850

Calcular el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[002455]

Ejercicio 2851

Calcular el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+2 \end{vmatrix}.$$

[002456]

Ejercicio 2852

Sea E el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n reales, y $A \in E$ fija. Se define una aplicación u_A de E en E por $u_A(B) = AB$. Demostrar que es un endomorfismo de E y que $\det u_A = (\det A)^n$. [002458]

Ejercicio 2853

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular $\det A$.
2. Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base canónica es A. ¿Para qué valores de m es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$?
3. Si $m = 1$, encontrar una base del núcleo de u.

[002466]

Ejercicio 2854

Sean a, b, c de reales verificando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y P la matriz real 3×3 siguiente :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular el determinante de P.
2. Determinar los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ y $\operatorname{Im} P$.
3. Sea $Q = I - P$, calcular P^2, PQ, QP y Q^2.
4. Caracterizar geométricamente P y Q.

Solución ▼ [002578]

Ejercicio 2855

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular el determinante de A y determinar para qué valores de a la matriz es invertible.
2. Calcular A^{-1}, cuando A es invertible.

Solución ▼ [002582]

Ejercicio 2856

1. Calcular el área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calcular el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Demostrar que el volumen de un paralelepípedo cuyos vértices son puntos de $\mathbb{R}^3$, con coeficientes enteros, es un entero.

Solución ▼ Vidéo ■ [002753]

Ejercicio 2857

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[002754]

Ejercicio 2858

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[002755]

Ejercicio 2859

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002756]

Ejercicio 2860

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & k & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & k & l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix}.$$

[002757]

Ejercicio 2861

Sea $M = (m_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n. Se construye a partir de M la matriz $N = (n_{ij})$ de la siguiente manera : para todo par de índices i, j, se denota M_{ij} la matriz obtenida a partir de M cruzando la recta i y la columna j; entonces $n_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ji})$. Demostrar que $MN = NM = \det(M)I$, donde I

denota la matriz identidad. Deducir un método de inversión de matrices usando el cálculo de determinantes, y aplicarla a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[002758]

Ejercicio 2862

Calcular las inversas de las siguientes matrices de dos maneras diferentes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[002759]

Ejercicio 2863

Usando el determinante demostrar que cada uno de los siguientes sistemas admite una solución única. Resolver cada uno de estos sistemas invirtiendo la matriz de sus coeficientes :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ y + 4z = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+t = 1 \\ x+y-z-t = 0 \\ x-y-z+t = 2 \\ x-y+z-t = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y- z = -1 \\ x + y - 3z = 1 \\ 3x+2y = 0. \end{cases}$$

[002760]

Ejercicio 2864 Cálculo de determinantes

Calcular los determinantes siguientes :

1. $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \cdots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \cdots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & \cdots & a_1-b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 3)$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Para 2864 : Encontrar una relación de orden de recurrencia lineal 2. Se denota α y β las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación característica, y se expresa el determinante en función de α y β.

Solución ▼ [003451]

Ejercicio 2865 Factorización de polinomios

Determinar los casos de anulación de los siguientes determinantes, luego se calculan :

1. $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & (1) \\ \vdots & 1-x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (1) & \cdots & \cdots & n-x \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & z \\ b & b & c & \cdots & z \\ c & c & c & \cdots & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & z \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [003452]

Ejercicio 2866 Cálculo por derivación

1. Sean $a,b,c,d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables y $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$. Demostrar que f es derivable y que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Generalizar a un determinante $n \times n$.
3. Aplicación : Calcular $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \operatorname{sen}(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \operatorname{sen}(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [003453]

Ejercicio 2867 $\det(A+(\alpha))$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Demostrar que : $\det(A+\alpha U) = \det A + \alpha \sum \text{cofactores de } A$.

2. Deducir el valor de $D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$: (a) para $b \neq c$. (b) para $b = c$.

Solución ▼ [003454]

Ejercicio 2868 Determinante tridiagonal, Matexo

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ y $(c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}) \in (\mathbb{R}_-^*)^{n-1}$. Demostrar que el determinante de la matriz siguiente es estrictamente positivo :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

[003455]

Ejercicio 2869 Determinantes de Vandermonde

Sean $a_1,\ldots,a_n \in K$. El determinante de Vandermonde asociada en la a_i es : $V(a_1,\ldots,a_n) = \det\left(a_i^{j-1}\right)$.

1. Calcular y factorizar $V(a,b)$ y $V(a,b,c)$.
2. Para $x \in K$, demostrar que $V(a_1,\ldots,a_n,x) = V(a_1,\ldots,a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.
3. Deducir la expresión general de $V(a_1,\ldots,a_n)$.

[003456]

Ejercicio 2870 Raíces de la unidad

Se denota $\omega = e^{2i\pi/n}$, $\alpha = e^{i\pi/n}$ y D el determinante $n \times n$: $D = \det\left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)$.

1. Calcular D^2.
2. Demostrar que $D = \prod_{k<\ell}(\omega^\ell - \omega^k) = \prod_{k<\ell}\left(\alpha^{k+\ell}\cdot 2i\operatorname{sen}\frac{\ell-k}{n}\pi\right)$.
3. Expresar D en forma trigonométrica.

Solución ▼ [003457]

Ejercicio 2871 Cosinus

Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. Expresar el determinante $\det\left(\cos((j-1)\alpha_i)\right)$ en forma de un determinante de Vandermonde.

Solución ▼ [003458]

Ejercicio 2872 $(x_i+y_j)^k$

Sea $k \leqslant n-1$ y $M = \left((x_i+y_j)^k\right)$. Escribir M como el producto de dos matrices y calcular $\det M$.

Solución ▼ [003459]

Ejercicio 2873 $P(i+j)$

Sea $P \in K_{n-1}[X]$ y $A = \left(P(i+j)\right) \in \mathscr{M}_n(K)$. Desarrollar $P(i+j)$ por la fórmula de Taylor y escribir A como producto de dos matrices. Deducir $\det A$.

Solución ▼ [003460]

Ejercicio 2874 **

Demostrar que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

Solución ▼ [005362]

Ejercicio 2875 **

Para a, b y c dos a dos distintos dados, factorizar $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005363]

Ejercicio 2876 ***

Calcular :

1. $\det(|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
2. $\det(\operatorname{sen}(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $(a_1,\dots,a_n$ es n reales dados$)$
3. $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & ⋰ & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & ⋰ & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$
5. $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}$
6. $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -X & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005364]

Ejercicio 2877 **** Determinante de CAUCHY y determinante de HILBERT

Sea $A = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, donde $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ son $2n$ reales tales que todas las sumas $a_i + b_j$ sean no nulas. Calcular $\det A$ (generalizando la idea de calcular un determinante de VANDERMONDE por el uso de una fracción racional) y dar una escritura condensada en el caso $a_i = b_i = i$.

Solución ▼ [005365]

Ejercicio 2878 ****

Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, donde, para todo i y todo j, $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Demostrar que $\det A$ es un entero divisible por 2^{n-1}.

Solución ▼ [005366]

Ejercicio 2879 **I

Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ y $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, con $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Demostrar que $\det B = \det A$.

Solución ▼ [005369]

Ejercicio 2880 **** Determinante circulante

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ y $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$, donde $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$. Calcular P^2 y PA.

Deducir $\det A$.

Solución ▼ [005371]

Ejercicio 2881 ***I

Calcular $\det(\mathrm{com} A)$ en función de $\det A$, luego estudiar el rango de $\mathrm{com} A$ en función del rango de A.

Solución ▼ [005372]

Ejercicio 2882 ***I Derivada de un determinante

Sean $a_{i,j}$ ((i,j) elemento de $\{1, \dots, n\}^2$) n^2 funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivables en $\mathbb{R}$ y $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calcular la derivada de la función $x \mapsto \det(A(x))$.

Aplicaciones. Calcular

1. $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$,

2. $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & \cdots & x & x+a_n \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005373]

Ejercicio 2883 ***I

Calcular

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

2. $\det((i+j-1)^2)$,

3. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \cdots & \cdots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \cdots & \cdots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$,

   b, c, complejos distintos

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005374]

Ejercicio 2884

Dar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ definido por :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [005376]

Ejercicio 2885 ***I Determinantes de VANDERMONDE

Sean $x_0, \ldots, x_{n-1}$, n números complejos. Calcular $\mathrm{Van}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Solución ▼ [005637]

Ejercicio 2886 ****I Determinante de CAUCHY

Sean $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $2n$ números complejos tales que todas las sumas $a_i + b_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sean no nulas. Calcular $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Caso particular : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$ (determinante de HILBERT).

Solución ▼ [005638]

Ejercicio 2887 **

Calcular $\det\left(\operatorname{sen}(a_i+a_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, donde $a_1,\dots,a_n$ son n reales dados ($n \geqslant 2$).

Solución ▼ [005640]

Ejercicio 2888 **

Calcular $\det\left(a_i+b_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, donde $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ son $2n$ complejos dados.

Solución ▼ [005641]

Ejercicio 2889 **

Calcular $\det\left((a+i+j)^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, donde a es un complejo dado.

Solución ▼ [005642]

Ejercicio 2890 ****

Sean $x_1,\dots,x_n$, n enteros naturales tales que $x_1<\dots<x_n$. Utilizando el cálculo de $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, demostrar que $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i}$ es un número natural.

Solución ▼ [005643]

Ejercicio 2891 **** Determinantes circulantes

Sean a_0,...,a_{n-1}, n números complejos. Calcular $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Para esto, se calcula primero $A\Omega$, donde $\Omega=\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$, con $\omega=e^{2i\pi/n}$.

Solución ▼ [005644]

Ejercicio 2892 **I

1. Sean $a_{i,j}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, n^2 funciones derivables en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{C}$. Sea $d=\det\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Demostrar que d es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular d'.
2. Aplicación : Calcular $d_n(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005645]

Ejercicio 2893 ***

Sean A y B dos matrices cuadradas reales de tamaño n. Demostrar que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de tamaño $2n$ es un real positivo.

Solución ▼ [005646]

Ejercicio 2894 ***

Sean A, B, C y D cuatro matrices cuadradas de tamaño n. Demostrar que si C y D conmutan y si D es invertible entonces $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Demostrar que el resultado válido si D no es invertible.

Solución ▼ [005647]

Ejercicio 2895 **I

Sean $a_0, \ldots, a_{n-1}$, n números complejos y $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calcular $\det(A - xI_n)$.

Solución ▼ [005649]

Ejercicio 2896 **

Calcular los siguientes determinantes :

1. $\det A$, donde $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ es tal que $a_{i,i} = a$ y $a_{i,2n+1-i} = b$ y $a_{i,j} = 0$ si no.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 2)$

4. (I) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$, $(n \geqslant 2)$.

Solución ▼ [005650]

Ejercicio 2897

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006885]

Ejercicio 2898

Calcular los determinantes de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006886]

Ejercicio 2899

Calcular los siguientes determinantes :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a+b & a \\ a & \cdots & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006887]

110 200.03 Sistema lineal, rango

Ejercicio 2900

Resolver los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y+2z=a \\ -x+2y-3z=b \\ x+2y+z=c. \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [001163]

Ejercicio 2901

Sin tratar de resolver los siguientes sistemas, discutir la naturaleza de sus conjuntos de soluciones :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=3. \end{cases}$$

[001164]

Ejercicio 2902

Sean $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n+1$ reales distintos, y $y_0, y_1, \dots, y_n$, $n+1$ reales (distintos o no). Demostrar que existe un único polinomio P tal que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\},\ \ P(x_i) = y_i.$$

[001165]

Ejercicio 2903

Resolver, según los valores de m :

$$(S_1)\ \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3. \end{cases}$$

Solución ▼ [001166]

Ejercicio 2904

Escribir las condiciones, relativas a los reales a, b, c, para que los siguientes sistemas admitan soluciones no nulas y explicitar estas soluciones.

$$(S_1)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} x - a(y+z) & = & 0 \\ y - b(x+z) & = & 0 \\ z - c(x+y) & = & 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [001167]

Ejercicio 2905

Resolver y discutir según los valores de b_1, b_2, b_3 y b_4 :

$$(S_1)\ \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t = b_1 \\ x + 3y + 4z + 5t = b_2 \\ x + 3y + 3z + 2t = b_3 \\ x + y + z + t = b_4 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} x + 3y + 5z + 3t = b_1 \\ x + 4y + 7z + 3t = b_2 \\ y + 2z = b_3 \\ x + 2y + 3z + 2t = b_4 \end{cases}$$

$$(S_3)\ \begin{cases} x + y + 2z - t = b_1 \\ -x + 3y + t = b_2 \\ 2x - 2y + 2z - 2t = b_3 \\ 2y + z = b_4 \end{cases} \qquad (S_4)\ \begin{cases} x + 2y + z + 2t = b_1 \\ -2x - 4y - 2z - 4t = b_2 \\ -x - 2y - z - 2t = b_3 \\ 3x + 6y + 3z + 6t = b_4. \end{cases}$$

Solución ▼ [001168]

Ejercicio 2906

Comentar y resolver según los valores de los reales λ, a, b, c, d el sistema :

$$(S)\ \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [001169]

Ejercicio 2907

Comentar y resolver según los valores de los reales λ y a :

$$(S)\begin{cases} 3x+2y-z+t=\lambda \\ 2x+y-z=\lambda-1 \\ 5x+4y-2z=2\lambda \\ (\lambda+2)x+(\lambda+2)y-z=3\lambda+a \\ 3x-z+3t=-\lambda^2 \end{cases}$$

Solución ▼ [001170]

Ejercicio 2908

Expresar en forma matricial y resolver los sistemas siguientes.

1. $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y-z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ x-y+2z-3t &= 2 \\ 2x+4z+4t &= 3 \\ 2x+2y+3z+8t &= 2 \\ 5x+3y+9z+19t &= 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y+z+t &= 1 \\ x+2y+3z+4t &= 2 \\ 3x-y-3z+2t &= 5 \\ 5y+9z-t &= -6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+z+t &= 5 \\ 2x+3y+4z+5t &= 8 \\ 3x+y-z+t &= 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 0 \\ 3x+y+2z &= 0. \end{cases}$

[001171]

Ejercicio 2909

Calcular los siguientes determinantes.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},\ D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix},\ D_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

[001172]

Ejercicio 2910

Resolver y discutir el siguiente sistema lineal :

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5=b_1 \\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5=b_2 \\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5=b_3 \\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5=b_4. \end{cases}$$

[001173]

Ejercicio 2911

Se considera la aplicación f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$ que a un elemento $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ asocia el elemento $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, definido por :

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5=y_1\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5=y_2\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5=y_3\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5=y_4.\end{cases}$$

1. Demostrar que f es lineal.
2. Se considera A el conjunto de soluciones de (S_H).

$$(S_H)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+10x_4+x_5=0\\ x_1+2x_2+x_3+4x_4+7x_5=0\\ x_1+3x_2+4x_3+13x_4+8x_5=0\\ x_1+4x_2+2x_3+7x_4+14x_5=0.\end{cases}$$

¿Cuál es la naturaleza de A ? ¿Qué representa A, para la aplicación f ? Dar una base de A ; ¿cuál es la dimensión de A ? Dar un sistema minimal de ecuaciones que definen A.

3. En el espacio $\mathbb{R}^4$, se consideran los cinco vectores : $V_1=(1,1,1,1)$, $V_2=(1,2,3,4)$, $V_3=(3,1,4,2)$, $V_4=(10,4,13,7)$, $V_5=(1,7,8,14)$. ¿Qué representan estas vectores para la aplicación f ? Encontrar una base de $\operatorname{Im} f$.
4. Se considera el sistema (S), donde las incógnitas son los x_i, y donde los y_j son parámetros. ¿Cómo interpretar las condiciones de posibilidades de este sistema del punto de vue de f ?
5. Dar una interpretación del teorema de rango relativo a este sistema. ¿Cuál es la relación entre el rango de f y el rango del sistema ?

[001174]

Ejercicio 2912

Para todo a real, se considera la matriz A y el sistema lineal (S) definidos por :

$$A=\begin{pmatrix} a&1&1&1\\ 1&a&1&1\\ 1&1&a&1\\ 1&1&1&a\end{pmatrix},\qquad (S)\begin{cases} ax+y+z+t=1\\ x+ay+z+t=1\\ x+y+az+t=1\\ x+y+z+at=1\end{cases}$$

en las incógnitas reales x,y,z,t.

1. Discutir el rango de A según los valores de a.
2. ¿Para qué valores de a el sistema (S) es de Cramer ? ¿Compatible ? ¿Incompatible ?
3. Cuando es de Cramer, resolver (S), con un mínimo de operaciones. (Primero se puede demostrar que necesariamente se tiene $x=y=z=t$.).
4. Reencontrar 3. por aplicación de las fórmulas de Cramer.

[001175]

Ejercicio 2913

Determinar el núcleo de la matriz $\begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&1&1\\ 2&3&7\end{pmatrix}$. [001176]

Ejercicio 2914

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar el $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\exists X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que $AX = \lambda X$. Para cada λ determinar $E_\lambda = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\right\}$. [001177]

Ejercicio 2915

Encontrar las soluciones de

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [001178]

Ejercicio 2916

Resolver según los valores de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ a^2 x + y + az = 0 \\ ax + a^2 y + z = 0. \end{cases}$ [001179]

Ejercicio 2917

Resolver según los valores de a y $\mu \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3. \end{cases}$ [001180]

Ejercicio 2918

Usando un sistema lineal invertir la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. [001181]

Ejercicio 2919

Resolver $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^2. \end{cases}$ [001182]

Ejercicio 2920

Resolver $\begin{cases} -cy+bz=\alpha \\ cx-az=\beta \\ -bx+ay=\gamma. \end{cases}$ [001183]

Ejercicio 2921

Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de elementos (x,y,z,t) que satisfacen :

$$\begin{cases} x+y+z+3t=0 \\ \quad 2x+3y+4t=0 \\ \quad 2x+5y-4z=0. \end{cases}$$

Dar una base de F y su dimensión. [001184]

Ejercicio 2922

Se considera el sistema

$$(S):\begin{cases} x+y+z+t \quad =0 \\ x-y-2z+2t=0 \\ 2x+y+z \qquad =0. \end{cases}$$

1. Resolver el sistema (S), luego indicar su rango.
2. Demostrar que el conjunto de soluciones de (S) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, indicar su dimensión y dar una base.

[001185]

Ejercicio 2923

El objetivo de este problema es resolver el enigma del pastor :
Un pastor tiene un rebaño de 101 oveja y nota por casualidad la siguiente propiedad : por cada oveja, se puede encontrar una manera de dividir el rebaño de las otras 100 ovejas en dos rebaños de 50 ovejas con el mismo peso total. Deducir que todas las ovejas tienen el mismo peso. ¿Como lo hizo ? Demostrar, en principio, un resultado útil para la demostración final.

1. (a) Demostrar por inducción que el determinante de toda matriz cuadrada, cuyos elementos diagonales son números impares, y todos los otros son números pares, es un número impar.
   (b) Deducir que una matriz de esta forma es invertible.

2. El objetivo de esta pregunta es resolver el enigma del pastor. Se denota B la matriz cuadrada de tamaño 101 construida de la siguiente manera :
   Se numeran las ovejas 1 a 101. Cuando el pastor quita la oveja del rebaño, luego divide el resto de la rebaño en dos rebaños iguales (rebaño A, rebaño B) de igual peso. Se denota entonces $B_{i,j}$ los coeficientes de la i-ésima fila de la matriz B obtenida de la manera siguiente :

$$B_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si la j-ésima obeja se encuentra en el rebaño A} \\ 2 & \text{si el j-ésima obeja se encuentra en el rebaño B .} \end{cases}$$

Se denota X la matriz de tamaño 101×1 constituida por los pesos de las ovejas

$$X = \begin{pmatrix} \text{peso de la oveja 1} \\ \text{peso de la oveja 2} \\ \vdots \\ \text{peso de la oveja 100} \\ \text{peso de la oveja 101} \end{pmatrix}.$$

Se denota M el peso total del rebaño.

(a) Calcular
$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcular
$$BX.$$

(c) Demostrar que B es invertible.

(d) Deducir X y resolver el enigma del pastor.

[001186]

Ejercicio 2924

¿Para qué valores de a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}.$$
es invertible ? Calcular en este caso su inversa. [001187]

Ejercicio 2925

Sean a y b dos reales, y A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$. ¿Para qué valores de a y b se tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$? [001188]

Ejercicio 2926

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dos vectores independientes de $\mathbb{R}^3$. Dar, como una ecuación, una condición necesaria y suficiente para que un vector $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertenece al espacio vectorial generado por v_1 y v_2. La misma pregunta para un plano generado por dos vectores de $\mathbb{R}^4$. [001189]

Ejercicio 2927

Sea u un endomorfismo de E, y $\mathscr{B}$ una base de E. Discutir en cada uno de los casos a continuación la dimensión del núcleo de u.

$$M_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad M_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \quad M_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 & 3 \\ -9 & -5-\lambda & 3 \\ -12 & -8 & 9-\lambda \end{pmatrix}.$$

[001190]

Ejercicio 2928

Discutir el rango de la siguiente matriz de acuerdo con los parámetros reales x e y :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[001191]

Ejercicio 2929

Sin tratar de resolverlo, discutir la naturaleza de las soluciones del siguiente sistema, en función de α, a, b y c :

$$\begin{cases} x-\ y-\alpha z=a \\ x+2y+\ z\ =b \\ x+\ y-\ z\ =c. \end{cases}$$

[001192]

Ejercicio 2930

Sistemas lineales.

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x+\ y+\ z= & 3 \\ x-\ y+3z= & 8 \\ x+2y-\ z= & -3. \end{cases}$$

2. ¿El siguiente sistema admite soluciones en $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x+\ y+\ z= & 3 \\ x-\ y+3z= & 8 \\ x+2y-\ z= & -3 \\ x+\ y+2z= & -1? \end{cases}$$

3. Se considera el sistema anterior, pero cuyos coeficientes e incógnitas están en el cuerpo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Resolver este sistema.

[002462]

Ejercicio 2931

Determinar los valores de m, para los cuales el siguiente sistema admite soluciones diferentes de $x = y = z = t = 0$:

$$\begin{cases} mx + \quad y + \quad z + t = 0 \\ x + (1+m)y + \quad z + t = 0 \\ x + \quad y + (2+m)z + t = 0 \\ x + \quad y + \quad z + t = 0. \end{cases}$$

[002463]

Ejercicio 2932

Sea a, b dos reales diferentes. Demostrar que el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = c_1 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = c_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = c_n. \end{cases}$$

admite una solución única que se debe calcular. [002464]

Ejercicio 2933

Sea A una matriz cuadrada de orden n tridiagonal, es decir tal que $a_{i,j} = 0$, si $|i-j| > 1$. Demostrar que existe una matriz triangular inferior L verificando $l_{i,j} = 0$ si $j > i+1$ y un triangular superior U verificando $u_{i,i} = 1$ y $u_{i,j} = 0$ si $i > j+1$ tales que $A = LU$, y que estas matrices son únicas. Deducir la solución del sistema lineal $Ax = b$, donde b es un vector dado en $\mathbb{R}^n$. [002465]

Ejercicio 2934

Resolver

$$S_1 \begin{cases} x + \cosh a\, y + \cosh 2a\, z = \cosh 3a \\ \cosh a\, x + \cosh 2a\, y + \cosh 3a\, z = \cosh 4a \\ \cosh 2a\, x + \cosh 3a\, y + \cosh 4a\, z = \cosh 5a, \end{cases}$$

y

$$S_2 \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \\ x_1 + 2^2x_2 + \cdots + n^2x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_1 + 2^{n-1}x_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [002478]

Ejercicio 2935

Decidir, para cada uno de los sistemas de ecuaciones con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y a los parámetros s, t, si es lineal :

$$a)\begin{cases} x_1 \operatorname{sen}(t) + \ \ x_2 = 3 \\ \ \ x_1 e^t \quad + 3x_2 = t^2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n} = n! \\ x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n} = \frac{1}{n!} \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} \sqrt{(x_1+sx_2+t)^2 - 4sx_2(x_1+t)} = 0 \\ x_1 \ln s - \pi x_2 + e^t x_n \qquad = 0 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} (1+sx_1)(3+tx_2) - (2+tx_1)(5+sx_2) = 8 \\ (x_3+s)^2 - (x_3-s)^2 + x_2 \qquad = 0. \end{cases}$$

[002731]

Ejercicio 2936

Aplicando el algoritmo de Gauss, resolver el siguiente sistema lineal :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x_1 + \ 4x_2 \ - \ 6x_3 \ - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + \ 6x_2 \ - \ 7x_3 \ + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 = 3. \end{cases}$$

[002732]

Ejercicio 2937

Resolver el sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002733]

Ejercicio 2938

Resolver el sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[002734]

Ejercicio 2939

Sea a un número real. Se estudia el siguiente sistema lineal :

$$\mathscr{S}_a : \begin{cases} x \ - 2y + 3z = 2 \\ x \ + 3y - 2z = 5 \\ 2x - \ y \ + az = 1. \end{cases}$$

1. En función de los valores del parámetro a, determinar si el sistema $\mathscr{S}_a$ puede :
   (i) no admitir ninguna solución ;
   (ii) admitir exactamente una solución ;

(iii) admitir una infinidad de soluciones.

2. Resolver el sistema $\mathscr{S}_a$ cuando admite una(s) solución(es).

[002735]

Ejercicio 2940

Los vectores complejos (z,w) y (z',w') están ligados por la fórmula $(z',w') = (z+iw,(1+i)z+(1-2i)w)$. Un estudiante al que no le gustan los números complejos plantea $z = x+iy$, $w = u+iv$, $z' = x'+iy'$ y $w' = u'+iv'$.

1. Expresar (x',y',u',v') en función de (x,y,u,v).
2. Resolver el sistema $(x',y',u',v') = (1,2,3,4)$.

[002736]

Ejercicio 2941

Un ciclista entrena todos los domingos yendo y viniendo de Issy a Labat. La ruta Issy-Labat no es plana : hay subidas, descensos y llanos. En subida, el ciclista va a quince kilómetros por hora, en plano veinte, en descenso treinta. El viaje de ida le toma dos horas y el viaje de regreso tres. En la parte de la ruta que no es plana, la pendiente promedio es cinco por ciento.

1. ¿Cuál es la distancia de Issy a Labat ? ¿Cuál es la más alta de estas dos ciudades, y cuál es su diferencia de altitud ?
2. Otro ciclista, más deportivo, hace veinte kilómetros por hora subiendo, treinta en llano y cuarenta cuesta abajo. Sabiendo que el viaje de ida y vuelta de Issy-Labat le toma tres horas y cuarenta, determinar las tres longitudes : de la parte del camino que sube, de la parte que desciende, de la parte que es plana.

[002737]

Ejercicio 2942

Sean a, b, y c tres números reales.

1. ¿Qué relación deben satisfacer los parámetros a, b y c, para que el siguiente sistema tenga al menos una solución ?
$$\mathscr{S}_{abc} : \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c. \end{cases}$$
2. ¿El sistema $\mathscr{S}_{abc}$ puede tener una solución única ?

[002738]

Ejercicio 2943

Resolver, según los valores de m :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases}$$
$$\mathscr{S}_2 : \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3. \end{cases}$$

[002739]

Ejercicio 2944

1. Resolver el siguiente sistema de cuatro maneras diferentes (por sustitución, por el método del pivote de Gauss, invirtiendo la matriz de coeficientes, por la fórmula de Cramer) :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2. \end{cases}$$

2. Escoger el método que le parezca más rápido de resolver, según los valores de a, los sistemas siguientes :

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1. \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [002768]

Ejercicio 2945

Resolver el siguiente sistema de 5 ecuaciones a 6 incógnitas :

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2u + 3v - w = 1 \\ 3x + 2y + 2z - 3u + 5v - 3w = 4 \\ 2x + 2y + 2z - 2u + 4v - 4w = 6 \\ x + y + z - u + 2v - 2w = 3 \\ 3x - 3u + 3v + 3w = -6. \end{cases}$$

[002769]

Ejercicio 2946 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

Solución ▼ [003408]

Ejercicio 2947 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$$

Solución ▼ [003409]

Ejercicio 2948 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

Solución ▼ [003410]

Ejercicio 2949 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [003411]

Ejercicio 2950 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1). \end{cases}$$

Solución ▼ [003412]

Ejercicio 2951 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d. \end{cases}$$

Solución ▼ [003413]

Ejercicio 2952 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = a \\ x + 4y + 3z + 2t = b \\ 2x + y + 4z + 3t = c \\ 3x + 2y + z + 4t = d. \end{cases}$$

Solución ▼ [003414]

Ejercicio 2953 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} x\cos 2\alpha + y\cos\alpha + z = a \\ x\cos 2\beta + y\cos\beta + z = b \\ x\cos 2\gamma + y\cos\gamma + z = c. \end{cases}$$

Solución ▼ [003415]

Ejercicio 2954 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{cases}$$

Solución ▼ [003416]

Ejercicio 2955

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} ax + \ \ by + \ \ z = 1 \\ \ \ x + aby + \ \ z = b \\ \ \ x + \ \ by + az = 1. \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [003417]

Ejercicio 2956 Sistema con parámetro

Estudiar la existencia de soluciones del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1+a} + \dfrac{y}{1+2a} + \dfrac{z}{1+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{2+a} + \dfrac{y}{2+2a} + \dfrac{z}{2+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{3+a} + \dfrac{y}{3+2a} + \dfrac{z}{3+3a} = 1. \end{cases}$$

Solución ▼ [003418]

Ejercicio 2957 Sistema incompatible

Sea $(S) \iff AX = B$ un sistema lineal incompatible. Demostrar que las filas de A son ld. [003419]

Ejercicio 2958 Combinación de formas lineales

Sean $f, f_1, \ldots, f_p$ formas lineales en K^n linealmente independientes. Demostrar que f es combinación lineal de $f_1, \ldots, f_p$ si y solo si $\ker f \supset \ker f_1 \cap \cdots \cap \ker f_p$. Indicación : Estudiar el sistema

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_p(x) = 0 \\ f(x) \ = 1. \end{cases}$$

¿Es aún cierto el resultado si no se supone que $(f_1, \ldots, f_p)$ es libre ? [003420]

Ejercicio 2959 base antidual

Sean $f_1, \ldots, f_n$, n formas lineales independientes en un ev E de dimensión n. Demostrar que existe una base $(\overrightarrow{e}_i)$ de E tal que $f_i = \overrightarrow{e}_i^{\,*}$. [003421]

Ejercicio 2960 Ortogonal de un sev

Sea E un K-ev de dimensión n y F un sev de E^* dimensión p. Se denota $F^{\perp} = \{\overrightarrow{x} \in E / \forall f \in F \text{ se tiene } f(\overrightarrow{x}) = 0\}$. Determinar $\dim F^{\perp}$. [003422]

Ejercicio 2961 Sistema de Vandermonde

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n escalares distintos y M la matriz $\left(\alpha_i^{j-1}\right)$ (matriz de Vandermonde). Demostrar que M es invertible interpretando el sistema $MX = 0$ en $K_{n-1}[x]$. [003423]

Ejercicio 2962 Fórmula de integración numérica

Encontrar tres reales α, β, γ tales que para todo polinomio de grado $\leqslant 3$ se tiene :

$$\int_2^4 P(x)\, dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [003424]

Ejercicio 2963 Sistema no lineal

Resolver el sistema :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3. \end{cases}$$

1. Cuando x, y, z son reales estrictamente positivos.
2. Cuando $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Solución ▼ [003425]

Ejercicio 2964 Comatriz, Ensi P 91

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Estudiar el rango de $\mathrm{com}(A)$ en función del rango de A.

Solución ▼ [003431]

Ejercicio 2965 Comatriz

Sea $n \geqslant 2$ y $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Calcular $\mathrm{com}\,(\mathrm{com} A)$ en el caso donde A es invertible.
2. Si $\mathrm{rg} A \leqslant n-2$, demostrar que $\mathrm{com} A = 0$.
3. Si $\mathrm{rg} A = n-1$, demostrar que $\mathrm{rg}(\mathrm{com} A) = 1$.
4. En el caso general, demostrar que $\mathrm{com}\,(\mathrm{com} A) = (\det A)^{n-2} A$.

[003432]

Ejercicio 2966 Cálculo de rango

Encontrar los rangos de las siguientes matrices :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003461]

Ejercicio 2967 Cálculo de rango

Determinar el rg $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función de $m \in \mathbb{C}$. [003462]

Ejercicio 2968 Cálculo de rango

Determinar el rg $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ y llegado el caso, dar una relación de dependencia lineal entre filas.

Solución ▼ [003463]

Ejercicio 2969 Cálculo de rango

Determinar el rg $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$ en función de a y b.

Solución ▼ [003464]

Ejercicio 2970 Matriz con huecos

Sean $A \in \mathscr{M}_{3,2}(K)$, $B \in \mathscr{M}_{2,2}(K)$, $C \in \mathscr{M}_{2,3}(K)$ tales que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar x.

Solución ▼ [003465]

Ejercicio 2971 Factorización, Central P' 1996

Sea la matriz cuadrada de orden n, I_p ($p \leqslant n$), tal que el i-ésimo término diagonal vale 1 si i está comprendido entre p y n, todos los demás coeficientes son nulos. ¿Cuáles son las condiciones sobre A (matriz cuadrada de orden n) para que exista B tal que $AB = I_p$?

Solución ▼ [003466]

Ejercicio 2972 Intercambio de rectas

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ invertible y B la matriz obtenida al intercambiar en A las columnas i y j. Demostrar que B es también invertible. ¿Cómo se pasa de A^{-1} a B^{-1} ?

Solución ▼ [003467]

Ejercicio 2973 Matrices de rango 1

Sea $M \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que : $\quad \operatorname{rg}(M) = 1 \iff$ existe C, columna y L, línea, no nulas, tales que $M = CL$.

[003468]

Ejercicio 2974 Matrices de proyección de rango 1

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ de rango 1. Demostrar que A es una matriz de proyección si y solo si $\operatorname{tr} A = 1$. [003469]

Ejercicio 2975 Cálculo de rango

Sean $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots y_p \in K$. Se denotan A, B matrices de términos generales $x_i + y_j$ y $(x_i + y_j)^2$. Encontrar los rangos de A y B.

Solución ▼ [003470]

Ejercicio 2976 Yuxtaposición de matrices

Sean $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ y $B \in \mathscr{M}_{n,q}(K)$. Se considera $C = (A\ B) \in \mathscr{M}_{n,p+q}(K)$. Demostrar que : $\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(A) \Leftrightarrow \exists\ P \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ tal que $B = AP$. [003471]

Ejercicio 2977 $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^tAA)$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, y $B = {}^tAA$.

1. Demostrar que : $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYY = 0 \Leftrightarrow Y = 0$.
2. Demostrar que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
3. Deducir que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.
4. Encontrar una matriz $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}({}^tAA)$.

Solución ▼ [003472]

Ejercicio 2978 Rango de $\operatorname{Re}(M)$

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rango 1. Se escribe $M = P + iQ$, con $P, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $\operatorname{rg}(P) \leqslant 2$. [003473]

Ejercicio 2979 Cálculo de rango

Sea $M = \big(\cos(i+j-1)\theta\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Determinar $\operatorname{rg} M$ en función de θ.

Solución ▼ [003474]

Ejercicio 2980 Descomposición en bloques

Sea $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada dividida en bloques. Se supone que A es invertible. Demostrar que $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(D - CA^{-1}B)$. [003475]

Ejercicio 2981 $MA = 0$, Chimie P' 90

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $MA = 0\}$. ¿Cuál es la estructura de E, su dimensión ?

Solución ▼ [003476]

Ejercicio 2982 Rango de las aplicaciones $X \mapsto AX, XB, AXB$

Sean $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ y $B \in \mathscr{M}_{q,r}(K)$. Encontrar el rango de las aplicaciones :

$$f : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,q}(K),\ X \mapsto AX, \qquad g : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{p,r}(K),\ X \mapsto XB,$$
$$h : \mathscr{M}_{p,q}(K) \to \mathscr{M}_{n,r}(K),\ X \mapsto AXB.$$

(Transformar A y B en matrices canónicas equivalentes) [003477]

Ejercicio 2983 Rango de $X \mapsto AX - XA$

Sea $A \in \mathscr{M}_2(K)$. Encontrar el rango de la aplicación $\mathscr{M}_2(K) \to \mathscr{M}_2(K)$, $M \mapsto AM - MA$. [003478]

Ejercicio 2984 Matriz antisimétrica 3×3

Sea $M \in \mathscr{M}_3(K)$ antisimétrica. ¿Cuál es el rango de M ?

Solución ▼ [003479]

Ejercicio 2985 Matrices antisimétricas

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ antisimétrica.

1. Se supone $a_{12} \neq 0$, y se descompone A bajo la forma : $A = \begin{pmatrix} J & U \\ -{}^tU & V \end{pmatrix}$, con $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$.

   Sea $P = \begin{pmatrix} I_2 & -J^{-1}U \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.
   (a) Demostrar que P existe y es invertible.
   (b) Calcular AP.
   (c) Deducir que $\mathrm{rg}(A) = 2 + \mathrm{rg}({}^tUJ^{-1}U + V)$.
2. En el caso general, demostrar que $\mathrm{rg}(A)$ es par.

[003480]

Ejercicio 2986 Matriz de diagonal dominante

Sea $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que M es *a diagonal dominante* si : $\forall i,\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Se transforma M en $M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ por el método de pivote. Demostrar que M_1 es a diagonal dominante.
2. Deducir que M es invertible.

[003481]

Ejercicio 2987 Rango por bloques, Matexo

Sea una matriz M de rango r tal que :

$$M = \begin{pmatrix} M_r & M_2 \\ M_1 & M_3 \end{pmatrix},$$

donde la matriz M_r es cuadrada de rango r y de tamaño r. Demostrar que $M_3 = M_1 M_r^{-1} M_2$. [003482]

Ejercicio 2988 rg(BC), Central MP 2006

1. Sean dos matrices $B \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ del mismo rango r. Demostrar que $A = BC$ es de rango r.
2. Recíprocamente, sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rango $r \geqslant 1$. Demostrar que existen matrices B y C como previamente tales que $A = BC$.
3. Determinar explícitamente tal descomposición para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
4. Se supone además A simétrica. Demostrar que CB es también de rango r.

Solución ▼ [003483]

Ejercicio 2989 PA nilpotente

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que A es no invertible si y solo si existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tal que PA es nilpotente. [003484]

Ejercicio 2990 ***

Resolver el sistema $MX = U$, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & \cdots & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005367]

Ejercicio 2991

Resolver (discutiendo según los diferentes parámetros) los sistemas siguientes :

1) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + my + z = 3m \\ x - (2m+1)y + 2z = 4 \\ 5x - y + 4z = 3m - 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y + 3z + mt = m - 1 \\ 2x + y + mz + 3t = 1 \\ 3x + my + z + 2t = 0 \\ mx + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} mx + y + z = m + 2 \\ -x - y + mz = m - 2 \\ -mx + y + mz = -m \\ x - y - mz = m - 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = m \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{m} \end{cases}$

7) $\begin{cases} (b+c)^2 x + b^2 y + c^2 z = 1 \\ a^2 x + (c+a)^2 y + c^2 z = 1 \\ a^2 x + b^2 y + (a+b)^2 z = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} ax + by + cz = p \\ cx + ay + bz = q \\ bx + cy + az = r \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 2 \\ a^2 x + b^2 y + c^2 z = 3 \end{cases}$
(donde a, b, y c son las raíces de la ecuación $t^3 - t + 1 = 0$).

Solución ▼ [005375]

Ejercicio 2992

Resolver el sistema : $x_1+x_2=0$, $x_{k-1}+x_k+x_{k+1}=0$, para $k=2,\dots,n-1$, $x_{n-1}+x_n=0$.

Solución ▼ [005378]

Ejercicio 2993

Sean $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$, $2n$ números complejos dos a dos distintos tales que las sumas a_i+b_j son todos no nulos. Resolver el sistema $\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_i+b_j}=1$, para todo $i=1,\dots,n$ (usando la descomposición en elementos simples de $R=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X+b_j}$).

Solución ▼ [005381]

Ejercicio 2994 **

Resolver el sistema $MX=U$, donde $M=(j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $U=(\delta_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ y X es un vector columna desconocido.

Solución ▼ [005639]

Ejercicio 2995

Resolver los siguientes sistemas, precisando previamente el dominio de resolución.

$$\begin{cases}\frac{x+2}{x}=\frac{y+1}{y-2}\\ \frac{5x+1}{5x-2}=\frac{y-1}{y-2}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{(x+3)^2+(y-1)^2}{x^2+y^2}=1\\ 3x+2y=73\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{(x-1)^2-(x-5)^2}{(y+1)^2-(y-1)^2}=1\\ 2y-x=45\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=18\\ \frac{3}{x}-\frac{7}{y}=-55\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=9\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{1-2x}{x}+\frac{3}{y}=0\\ \frac{1-x}{x}+\frac{3-y}{y}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{3}{4(x-2)}+\frac{7}{3(y-1)}=41\\ \frac{5}{2(x-2)}-\frac{3}{5(y-1)}=11\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{9}{x-y}+\frac{10}{x+y}=75\\ \frac{12}{x-y}+\frac{25}{x+y}=135.\end{cases}$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007026]

Ejercicio 2996

La suma de dos números x e y es 29. La diferencia de sus cuadrados es 145. ¿Cuáles son estos números ?

Solución ▼ [007027]

Ejercicio 2997

Encontrar las dimensiones de un triángulo recto de hipotenusa 13 cm y área 30 cm^2.

Indicación ▼ Solución ▼ [007028]

Ejercicio 2998

En una estación de metro, los usuarios tienen a su disposición una cinta transportadora 300m de largo. Un peatón caminando a velocidad constante hace ida y vuelta en la cinta rodante. A la salida, establece 1 minuto y 30 segundos. A la vuelta, a contra sentido, establece 4 minutos y 30 segundos. Determinar la velocidad del peatón y la de la cinta rodante. [007029]

Ejercicio 2999

Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{R}_+^*$ y luego en el dominio definición maximal :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2. \end{cases}$$

Indicación ▼ Solución ▼ [007030]

Ejercicio 3000

Resolver en $\mathbb{R}_+^*$ el sistema siguiente :

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$$

Solución ▼ [007031]

Ejercicio 3001

Sean a, b, c tres reales y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, : x \mapsto ae^x + bx + c$. Se supone que la gráfica de f contiene el punto de coordenadas $(0,1)$, y que su tangente en este punto también contiene el punto con coordenadas $(2,3)$. Se supone finalmente que la gráfica admite una tangente horizontal en el punto de abscisas $\ln(3)$. Determinar a, b, c. [007032]

Ejercicio 3002

Sean $a_1, \ldots, a_n$ de puntos del plano complejo. Determinar bajo cuál(es) condición(es) existe al menos un polígono de n vértices $z_1, \ldots, z_n$ tal que (a_i es el punto medio de $[z_i, z_{i+1}]$ y a_n es el punto medio de $[z_n, z_1]$.)

Solución ▼ [007033]

Ejercicio 3003

Resolver el sistema siguiente :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y. \end{cases}$$

Solución ▼ [007034]

111 200.04 Aplicaciones

Ejercicio 3004

Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita n y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\varphi^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Dar ejemplos de tales aplicaciones en el caso $n = 2$ o 4.
2. Demostrar que tales aplicaciones existen si y solo si n es par.

Solución ▼ [001151]

Ejercicio 3005

Invertir las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ así como sus productos. [001152]

Ejercicio 3006 Resultante

Sean $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, y $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$, con $a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$.
El resultado de P y Q es :

$$\operatorname{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_p & \ddots & \ddots\ a_0 & b_{q-1} & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots\ a_1 & b_q & \ddots & \vdots \\ & & \ddots\ \vdots & & \ddots & b_{q-1} \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{q}\quad\underbrace{\qquad\quad}_{p}$$

las posiciones vacantes corresponden a ceros.

Considerar la aplicación $\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X]$, $(U,V) \mapsto UP + VQ$, demostrar que $\operatorname{Res}(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.
Aplicación : CNS de modo que el polinomio $P = X^4 + aX + b$ pueda tener una raíz multiple.
Solución ▼ [003443]

Ejercicio 3007 Sistema unisolvente

Sean E un conjunto cualquiera y $f_1, \ldots, f_n : E \to K$ funciones. Demostrar por inducción en n que la familia $(f_1, \ldots, f_n)$ es libre en K^E si y solo si existen elementos $x_1, \ldots, x_n$ de E tales que $\det\bigl(f_i(x_j)\bigr) \neq 0$. [003444]

Ejercicio 3008 $\prod a_{i\sigma(i)} = \text{cte}$

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que existe $a \neq 0$ tal que : $\forall \sigma \in S_n$, $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = a$. Demostrar que $\operatorname{rg} A = 1$. [003445]

Ejercicio 3009 Combinación lineal de soluciones

Sea $(S) \iff AX = B$ un sistema lineal de n ecuaciones a n incógnitas de Cramer. Demostrar que para todos los escalares $c_1, \ldots, c_n$, se tiene :

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = -\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ c_1 & \ldots & c_n & 0 \end{vmatrix}.$$

[003446]

Ejercicio 3010 Problema de interpolación de Lagrange

Sea A un *anillo* conmutativo, $x_1,\dots,x_n \in A$. Demostrar la equivalencia entre las proposiciones siguientes :

a) El determinante de Vandermonde de $x_1,\dots,x_n$ es un elemento invertible de A ;

b) Para todos $y_1,\dots,y_n \in A$, existe un único polinomio $P \in A_{n-1}[X]$ tal que $P(x_i) = y_i$, para $i = 1,\dots,n$. Dar un ejemplo de un anillo A y un problema de interpolación en A (en los puntos x_i distintos) no tiene solución.

Solución ▼ [003447]

Ejercicio 3011 Polytechnique MP 2002

Sea p un número primo y $a_0,\dots,a_{p-1} \in \mathbb{Z}$. Demostrar que el determinante de la matriz $A = (a_{j-i \bmod p}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{Z})$ verifica $\det(A) \equiv a_0 + \cdots + a_{p-1} \bmod p$.

Indicación : Escribir $A = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k J^k$ *y calcular* A^p.

Solución ▼ [003448]

Ejercicio 3012 Central MP 2002

Se considera un determinante simétrico real de orden impar cuyos coeficientes son enteros, las diagonales son además pares. Demostrar que este determinante es par.

Solución ▼ [003449]

Ejercicio 3013 Fórmula de Cauchy-Binet

Sea $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{np}(K)$ y $q \in [\![1,\min(n,p)]\!]$. Para $X = \{x_1,\dots,x_q\}$ y $Y = \{y_1,\dots,y_q\}$, con $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_q \leqslant n$ y $1 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_q \leqslant p$ se denota $\Delta_{X,Y}(M)$ el determinante de la matriz $q \times q$ de término general a_{x_i,y_j}.

1. Sean $M \in \mathscr{M}_{np}(K)$ y $N \in \mathscr{M}_{pn}(K)$, con $n \leqslant p$. Demostrar que
$$\det(MN) = \sum_{\substack{X\subset[\![1,p]\!]\\ \operatorname{card} X=n}} \Delta_{[\![1,n]\!],X}(M)\Delta_{X,[\![1,n]\!]}(N).$$
(Considerar los dos miembros como funciones de las columnas de N).
2. Dar una fórmula para $\det(MN)$, cuando $n > p$.
3. Sean $M \in \mathscr{M}_{np}(K)$, $N \in \mathscr{M}_{pq}(K)$ y $r \in [\![1,\min(n,q)]\!]$. Demostrar, para $X \subset [\![1,n]\!]$ y $Y \subset [\![1,q]\!]$, con $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) = r$: $\Delta_{X,Y}(MN) = \sum\limits_{\substack{Z\subset[\![1,p]\!]\\ \operatorname{card}(Z)=r}} \Delta_{X,Z}(M)\Delta_{Z,Y}(N)$.

[003450]

Ejercicio 3014

En el plano, se dan n puntos $A_1,\dots,A_n$. ¿Existe n puntos $M_1,\dots,M_n$ tales que A_1 es el punto medio de $[M_1,M_2]$, A_2 es el punto medio de $[M_2,M_3],\dots,A_{n-1}$ es el punto medio de $[M_{n-1},M_n]$ y A_n es el punto medio de $[M_n,M_1]$.

Solución ▼ [005377]

112 200.99 Otro

Ejercicio 3015

Demostrar que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sin desarrollarlo. [001153]

Ejercicio 3016

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, se dice triangular superior cuando para todo $i > j$: $a_{ij} = 0$.

1. Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.
2. Demostrar que $\det(A) = a_{11}\cdots a_{nn}$.
3. Sea E un espacio vectorial, $\varepsilon = \{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Se denota E_i el espacio vectorial generado por $\{e_1,\ldots,e_i\}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Demostrar que $\mathrm{Mat}(\varphi,\varepsilon)$ es triangular superior si y solo si $\varphi(E_i) \subset E_i$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Demostrar que la inversa de una matriz triangular superior es una matriz triangular superior.

[001154]

Ejercicio 3017

Se consideran las matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = I + N.$$

1. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ calcular $\det(A^n)$.
2. Calcular N^2 y N^3.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ dar el rango de N^n y el de A^n.
4. Utilizando 1., dar, en función de $n \in \mathbb{N}^*$, la expresión de la matriz $M(n) = A^n$.
5. Para $n \in \mathbb{N}^*$, justificar la fórmula $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Explicar y justificar la escritura : $A^n = M(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

[001155]

Ejercicio 3018

Sea S la matriz 5×5, con coeficientes reales : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcular $\det(S)$. Determinar (preferiblemente sin cálculo) S^{-1}.
2. Demostrar que existen dos subespacios vectoriales E_1 y E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimensión respectiva 2 y 3 tales que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ y $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.

3. Demostrar que existe $x \in E_2$ tales que $Sx = x$. Deducir que la descomposición precedente no es única.

[001156]

Ejercicio 3019

Sea $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ antisimétrica. Calcular $\det(A)$. ¿Es aún válido este resultado para $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Solución ▼ [001157]

Ejercicio 3020

Sean $n = 2$ o 3 y $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$.

1. Demostrar que si $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$, $\det(A+X) = \det(X)$, entonces $A = 0$.
2. Sea $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ tal que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$, $\det(A+X) = \det(B+X)$. Demostrar que $A = B$.

[001158]

Ejercicio 3021

Sea $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tal que $A^2 + B^2 = AB$ y $AB - BA$ invertible. Demostrar que 3 divide n. [001159]

Ejercicio 3022

Demostrar que si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, se tiene :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

[001160]

Ejercicio 3023

Demostrar que si $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n;\\
&\mathrm{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1;\\
&\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.
\end{aligned}$$

[001161]

Ejercicio 3024

Sea $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1, \qquad \forall (i,j) in \{1,\ldots,n\}^2,\ a_{i,j} \in [0,1[.$$

Demostrar que $|\det(A)| < 1$. [001162]

Ejercicio 3025

Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz compleja cuyos coeficientes verifican $|a_{i,j}| \leqslant 1$. Demostrar que $|\det A| \leqslant 1$.
[002451]

Ejercicio 3026

Sea A, B dos matrices cuadradas de orden n, A invertible.

1. Demostrar que $\det(A+\lambda B)$ es un polinomio en λ de grado n. ¿Cuáles son sus términos de mayor y menor grado?
2. Deducir que si A es una matriz invertible, para toda matriz B, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A+\varepsilon B$ es también invertible, $\forall\, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

[002457]

Ejercicio 3027 $\det(I-AB) = \det(I-BA)$

Sean $A \in \mathscr{M}_{p,q}(K)$ y $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Demostrar que $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$. (Comenzar por el caso donde A es la matriz canónica de rango r) [003426]

Ejercicio 3028 $\det(A^2+B^2)$

1. Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $AB = BA$. Demostrar que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
2. Determinar A, B no conmutan tales que $\det(A^2+B^2) < 0$.

Solución ▼ [003429]

Ejercicio 3029 Determinantes por bloques

Sean $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(K)$, con A invertible y $AC = CA$. Se considera $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(K)$. Demostrar que $\det M = \det(AD - CB)$. [003430]

Ejercicio 3030 Sistema lineal homogéneo

Se considera un sistema lineal homogéneo : $(S) \iff AX = 0$, con $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$, $n < p$ y $\operatorname{rg} A = n$.

1. Demostrar que se puede completar A en una matriz $B = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ invertible.
2. Demostrar que las columnas $n+1$ a p de ${}^t\operatorname{com} B$ constituyen una base para las soluciones de (S).
3. Considerar el siguiente ejemplo :

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [003434]

Ejercicio 3031 Desigualdad

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $|\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. ¿Cuando hay igualdad?

Solución ▼ [003435]

Ejercicio 3032 Determinantes 2×2 impuestos

Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ cuatro vectores de un ev E de dimensión 2. Se denota det el determinante en una base fija de E.

1. Demostrar que $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) + \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) \det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) + \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) \det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$.

   (Comenzar por el caso donde $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ es libre)

2. Se dan seis escalares : $d_{ab}, d_{ac}, d_{ad}, d_{cd}, d_{db}, d_{bc}$ tales que $d_{ab}d_{cd} + d_{ac}d_{db} + d_{ad}d_{bc} = 0$.

   Demostrar que existen vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ tales que $\forall x, y,\ d_{xy} = \frac{1}{2}xy$.

Solución ▼ [003436]

Ejercicio 3033 Descomposición de un vector en dimensión 3

Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ cuatro vectores de un ev E de dimensión 3. Se denota : det el determinante en una base fija de E. Demostrar que : $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{d} = \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} + \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} + \det(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$.

Solución ▼ [003437]

Ejercicio 3034 $\det(u+n)$

Sean $u, n \in \mathscr{L}(E)$ dos endomorfismos de un $\mathbb{C}$-ev de dimensión finita, u invertible, n nilpotente, con $u \circ n = n \circ u$.

1. Demostrar que $\det n = 0$.
2. Encontrar el polinomio característico de n. Inferir que $\det(\mathrm{Id}_E + n) = 1$.
3. Demostrar que $\det(u+n) = \det u$.

[003439]

Ejercicio 3035 sev estables

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que existen dos sev F, G suplementarios y estables por f.
Demostrar que $\det f = (\det f_{|F})(\det f_{|G})$. [003440]

Ejercicio 3036 Grupo $SL_n(K)$

Se denota $SL_n(K) = \{M \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $\det M = 1\}$.

1. (a) Demostrar que $SL_n(K)$ es un grupo para el producto matricial.
   (b) Demostrar que $SL_n(K)$ es generado por las matrices : $I + \lambda E_{ij}$, $(j \neq i)$, donde (E_{ij}) es la base canónica de $\mathscr{M}_n(K)$, y $\lambda \in K$ (transformar una matriz $M \in SL_n(K)$ en I por operaciones elementales).
2. (a) Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Demostrar que M tiene una inversa en $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si y solo si $\det M = \pm 1$.
   (b) Demostrar que el grupo $SL_n(\mathbb{Z})$ es generado por las matrices $I + E_{ij}$, $(j \neq i)$.

Solución ▼ [003441]

Ejercicio 3037 Determinante de $X \mapsto AX$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ y $f_A : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K), X \mapsto AX$. Calcular $\det f_A$.

Solución ▼ [003442]

Ejercicio 3038 ***I

Sea $(A,B)\in(M_n(\mathbb{R}))^2$ y $C=\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Demostrar que $\det C\geqslant 0$.

Solución ▼ [005368]

Ejercicio 3039 ***I

Determinar las matrices A, cuadrados de orden n, tales que para toda matriz cuadrada B de orden n se tiene $\det(A+B)=\det A+\det B$.

Solución ▼ [005370]

Ejercicio 3040

Sea E un conjunto que contiene al menos n elementos y $(f_1,f_2...,f_n)$ un n-tuple de funciones de E en $\mathbb{C}$. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes :

1. la familia $(f_1,\dots,f_n)$ es libre ;
2. existe n elementos $a_1,a_2,\dots,a_n$ en E tales que $\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$.

Solución ▼ [005379]

Ejercicio 3041

Determinar la inversa de $A=(a_{i,j})$ tal que $a_{i,i+1}=a_{i,i-1}=1$ y $a_{i,j}=0$ si no.

Solución ▼ [005380]

Ejercicio 3042 **I

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Calcular el determinante de su comatriz.

Solución ▼ [005614]

Ejercicio 3043 ***I

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Estudiar el rango de $\mathrm{com}A$ en función del rango de A.

Solución ▼ [005615]

Ejercicio 3044 ***

Resolver en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la ecuación $M=\mathrm{com}M$, $(n\geqslant 2)$.

Solución ▼ [005616]

Ejercicio 3045 ***

Sea A una matriz cuadrada compleja de tamaño n, $(n\geqslant 2)$ tal que para todo elemento M de $M_n(\mathbb{C})$, se tiene $\det(A+M)=\det A+\det M$. Demostrar que $A=0$.

Solución ▼ [005648]

113 201.01 Valor propio, vector propio

Ejercicio 3046

Sea $m \in \mathbb{R}$ y $A_m \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calcular los valores propios de A_m y una base de vectores propios.
2. Determinar según los valores de m el rango de A_m. Determinar cuando sea posible A_m^{-1}.
3. Cuando A_m no es invertible determinar el núcleo y la imagen de A_m.

[001597]

Ejercicio 3047

Sea $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que si -1 no es valor propio de A, entonces existe una matriz Q antisimétrico (i.e. ${}^tQ = -Q$) tal que $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$ y que se tiene $A \in \mathscr{S}\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. ¿Recíproco?
[001598]

Ejercicio 3048

Sean E un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que si λ es valor propio de $g \circ f$, entonces λ es valor propio de $f \circ g$ (se distinguera los casos $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$). [001599]

Ejercicio 3049

1. Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial E de dimensión n sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, teniendo cada uno n valores propios distintas en K. Demostrar que
$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ y } g \text{ tienen los mismos valores propios.}$$
2. Se supone ahora que $K = \mathbb{C}$ y que $f \circ g = g \circ f$. Si u es un endomorfismo se dice que un espacio vectorial F es $u-$estable si $u(F) \subset F$. Demostrar que todo subespacio propio de f es $g-$estable.
Observación : Podemos demostrar por inducción sobre n que existe un vector propio común a f y g. Se admite este resultado.
3. Se consideran f y g dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica son respectivamente
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
— Verificar que $f \circ g = g \circ f$ y determinar los subespacios propios de M y N.
— Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que las matrices de f y g son diagonales.

[001600]

Ejercicio 3050

Sean $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ y $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Sea f l'endomorfismo asociada a la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Únicamente* examinando la matriz A, encontrar dos valores propios y un vector propio de A, luego dos subespacios $f-$estables.
2. ¿Qué representa la matriz B?

[001601]

Ejercicio 3051

Sea $u \in \mathrm{End}(E)$. Se denota $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Demostrar que

$$a_0 = \det(u) \qquad \text{y} \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(u).$$

[001602]

Ejercicio 3052

Sean u y v dos endomorfismos de E. Demostrar que $u \circ v$ y $v \circ u$ tienen los mismos valores propios. [001603]

Ejercicio 3053

Sean u y v dos endomorfismos de E que conmutan, es decir tal que $u \circ v = v \circ u$. Se supone que v admite n valores propios distintos. Demostrar que existe una base de E, formada por vectores propios comunes a u y a v. Deducir que existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tal que $u = a_0\,\mathrm{Id} + a_1 v + \cdots + a_{n-1}v^{n-1}$. [001604]

Ejercicio 3054

Se consideran las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

con el menor número de cálculos posible.

1. Demostrar que $\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$ y determinar las dimensiones respectivas de $\ker A$ y $\ker A^2$.
2. Determinar un vector e_1 tal que $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \mathrm{vect}(e_1)$.
3. Demostrar que (e_1, Ae_1, A^2e_1) es una familia libre.
4. Demostrar que $Ae_1 \in \ker A^2$, y que $\ker A^2 = \ker A \oplus \mathrm{vect}(Ae_1)$.
5. Demostrar que $A^2e_1 \in \ker A$ y determinar un vector e_2 tal que $\ker A = \mathrm{vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{vect}(e_2)$.
6. Demostrar que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) es una base de $\mathbb{R}^4$.
7. Sea P la matriz de pasaje de la base canónica a la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calcular $P^{-1}AP$.

Adaptar este trabajo al estudio de B y C [001605]

Ejercicio 3055

Sea J la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Encontrar una relación entre J y J^2.
2. Deducir los valores propios de J y calcular sus multiplicidades.
3. Dar el polinomio característico de J.

[001606]

Ejercicio 3056

Sean A y B dos matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $AB - BA = A$.
El propósito de esto ejercicio es de demostrar que A es nilpotente, es decir $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$.
Se denota E l'espacio vectorial $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y se considera la aplicación $\begin{aligned}\psi : E &\to E \\ M &\mapsto MB - BM.\end{aligned}$

1. Demostrar que ψ es lineal de E en E.
2. Demostrar por inducción que : $\forall k \in \mathbb{N}, \psi(A^k) = kA^k$.
3. Se supone que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Demostrar que ψ tiene un número infinito de valores propios.
4. Concluir.

[001607]

Ejercicio 3057

Sea M la matriz siguiente $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el polinomio característico de M. Deducir M^{-1}.

[001608]

Ejercicio 3058

Sea f un endomorfismo de $E = \mathbb{C}^n$. Sea $\pi_1, \ldots, \pi_N$ de los endomorfismos todos no nulos de E y $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, N números complejos distintos. Se supone que $\forall m \in \mathbb{N}, f^m = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^m \pi_k$.

1. Demostrar que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(f) = \sum_{k=1}^{N} P(\lambda_k)\pi_k$.

   Se considera el polinomio $Q = \prod_{1 \leqslant k \leqslant N} (X - \lambda_k)$ y para cada $p \in \{1, \ldots, N\}$ los siguientes polinomios :

$$Q_p = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant N \\ k \neq p}} (X - \lambda_k) \qquad \text{y} \qquad \tilde{Q}_p = \frac{1}{Q_p(\lambda_p)} Q_p.$$

2. Calcular $Q(f)$. ¿Qué se deduce para f?
3. Demostrar que $Sp(f) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$.
4. Demostrar que $\tilde{Q}_p(f) = \pi_p$. Verificar entonces que $\pi_p \circ \pi_q = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi_p & \text{si } p = q. \end{cases}$
5. Calcular $f \circ \pi_p$. Deducir que $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$. Se denota E_p el espacio propio asociado al valor propio λ_p.
6. Demostrar que $\operatorname{Im} \pi_p \subset E_p$. Recíprocamente, para $x \in E_p$, demostrar que $x \in \ker \pi_q$, para $q \neq p$ (se calcula por ejemplo $\pi_q \circ f(x)$ de dos maneras diferentes) ya que $x = \pi_p(x)$. Deducir que $E_p \subset \operatorname{Im} \pi_p$.

7. Deducir que $\operatorname{Im}\pi_p = E_p$ y que $\ker\pi_p = \bigoplus_{q\neq p} E_q$. Describir geométricamente π_p.

[001609]

Ejercicio 3059

Se considera la siguiente aplicación : $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$$P \mapsto (X^2-1)P' - 2(nX+a)P.$$

Verificar que esta aplicación está bien definida. Determinar sus valores propios, y espacios propios asociados.

[001610]

Ejercicio 3060

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y u un endomorfismo de E teniendo n valores propios distintos $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

1. Demostrar que el conjunto $\mathrm{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E)/uv = vu\}$ de endomorfismos de E que conmutan con u es un espacio vectorial.
2. (a) Sea v un elemento de Com. Demostrar que v preserva los espacios propios de u (es decir que si E_λ es un espacio propio de u asociada al valor propio λ, se tiene $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$).
   (b) Dar la dimensión de los espacios propios de u y demostrar que si x es un vector propio de u, entonces es también un vector propio de v.
   (c) Con la ayuda de una base elegida adecuadamente, describir todos los elementos de Com, y demostrar que Com es de dimensión n.
3. Demostrar que $\mathrm{vect}(\mathrm{Id},u,u^2,\dots,u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.
4. Ahora se quiere estudiar la independencia lineal de la familia $\{\mathrm{Id},u,u^2,\dots,u^{n-1}\}$. Para esto, se consideran n reales $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$ tales que $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i u^i = 0$.
   (a) Demostrar que los (α_i) son solución del sistema :
   $$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}=0\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_2^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1}=0\\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_n+\alpha_2\lambda_n^2+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1}=0. \end{cases}$$
   (b) Se recuerda que : $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)$. Deducir el conjunto de soluciones del sistema $(*)$ y concluir.
5. Demostrar que $\mathrm{Com} = \mathrm{vect}(\mathrm{Id},u,u^2,\dots,u^{n-1})$.

Solución ▼

[001611]

Ejercicio 3061

Dar los valores propios, vectores propios y matriz de diagonalización eventual de las siguientes matrices en $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3\\ -8 & 6\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3062

Sea $\mathbb{K}$ el campo de los reales o complejos, y u el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ teniendo como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estudiar, en los dos casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si u es diagonalizable. Dar una forma diagonalizada en una base para la cual se dará la matriz de pasaje con respecto a la base canónica. [002468]

Ejercicio 3063

Sea M una matriz de $M_n(\mathbb{C})$; se supone que existe un entero p tal que $M^p = I$. Demostrar que si ω es una raíz p-ésima de la unidad, es un valor propio de M o entonces M verifica

$$M^{p-1} + \omega M^{p-2} + \cdots + \omega^{p-2} M + \omega^{p-1} I = 0.$$

[002470]

Ejercicio 3064

Sea E un espacio vectorial de dimensión n en un cuerpo K, u un endomorfismo de E y $P \in K[X]$. Se supone que u verifica la ecuación $P(u) = 0$.

1. Demostrar que si λ es un valor propio de u, entonces $P(\lambda) = 0$.
2. Se supone que P es de la forma

   $$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i), \quad \text{con } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j.$$

   Demostrar que las únicas matrices que satisfacen $P(M) = 0$ son de la forma $Q^{-1}DQ$, con Q matriz invertible cualquiera y D matriz diagonal que se debe especificar. ¿Cuántas matrices diagonales hay de este tipo ?

[002471]

Ejercicio 3065

Sean u, v dos endomorfismos de un espacio vectorial complejo E. Se supone que existen a, b complejos tales que $u \circ v = au + bv$. Demostrar que u y v tienen un vector propio común. [002472]

Ejercicio 3066

Sea E el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Sea u la aplicación que a todo polinomio P de E hace corresponder $u(P) = P(X-1)$.

1. Verificar que u es un endomorfismo de E. ¿Es inyectivo o sobreyectivo ?
2. Encontrar los valores propios y los vectores propios de u así como una base en la que u es diagonalizable.

Ejercicio 3067

Sea A, B dos matrices cuadradas de orden n, con coeficientes complejos que conmutan ($AB = BA$). Se supone además que todos los valores propios de B son distintos.

1. Demostrar que todo vector propio de B es un vector propio de A.
2. Demostrar que A es de la forma $A = P(B)$, donde P es un polinomio de $\mathbb{C}[X]$ de grado menor o igual que $n-1$.

[002474]

Ejercicio 3068

Sea E el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n. Dados dos reales a, b, se denota u la aplicación que a todo polinomio P de E hace corresponder

$$u(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

1. Verificar que u es un endomorfismo de E.
2. Encontrar los valores propios y los vectores propios de u.
3. Encontrar el núcleo de u, así como el conjunto de polinomios que satisfacen $u(P) = 1$.

[002476]

Ejercicio 3069

Se considera la matriz $N \times N$

$$M = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son tres números complejos, con $c \neq 0$. Se denota V un vector propio asociado al valor propio λ de M. Escribir las relaciones entre las componentes de V. Determinar todos los valores propios de M.

Solución ▼ [002479]

Ejercicio 3070

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se supone que A es invertible y que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A.

1. Demostrar que $\lambda \neq 0$.
2. Demostrar que si $\vec{x}$ es un vector propio de A, para el valor propio λ, entonces es un vector propio de A^{-1} de valor propio λ^{-1}.

Solución ▼ [002570]

Ejercicio 3071

Sea f un endomorfismo de E verificando $f^2 = \text{mathrmId}_E$.

1. Demostrar que los únicos valores propios posibles de f son 1 y -1.
2. Verificar que para todo $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene

$$f(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) = -(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) \text{ y } f(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) = (\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}))$$

   y deducir que f siempre admite un valor propio.
3. Demostrar que si 1 y -1 son valores propios, entonces E es la suma directa de los subespacios propios correspondientes.
4. Traducir geométricamente en un dibujo en el caso $n = 2$.

Solución ▼ [002571]

Ejercicio 3072

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y u un endomorfismo de E. Se supone u nilpotente, es decir que existe un entero estrictamente positivo n tal que $u^n = 0$.

1. Demostrar que u no es invertible.
2. Determinar los valores propios de u y los subespacios propios asociados.

Solución ▼ [002579]

Ejercicio 3073

Sea M la matriz de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los valores propios de M y sus subespacios propios.
2. Demostrar que M es diagonalizable.
3. Determinar una base de vectores propios y P la matriz de pasaje.
4. Se tiene $D = P^{-1}MP$, para $k \in \mathbb{N}$ expresar M^k en función de D^k, luego calcular M^k.

Solución ▼ [002580]

Ejercicio 3074

Sea A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar y factorizar el polinomio característico de A.
2. Demostrar que A es diagonalizable y determinar una matriz D diagonal y una matriz P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.
3. Dar justificando, pero sin cálculos, el polinomio minimal de A.
4. Calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [002594]

Ejercicio 3075

Sea A la matriz siguiente
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular el polinomio característico y determinar los valores propios de A.
2. Se denota $\lambda_1 > \lambda_2$ valores propios de A, E_1 y E_2 los subespacios propios asociados. Determinar una base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2})$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{\varepsilon_1} \in E_1$, $\overrightarrow{\varepsilon_2} \in E_2$, los dos vectores teniendo coordenadas de la forma $(1, y)$.
3. Sea $\overrightarrow{x}$ un vector de $\mathbb{R}^2$, se denota (α, β) sus coordenadas en la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2})$. Demostrar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene
$$A^n \overrightarrow{x} = \alpha \lambda_1^n \overrightarrow{\varepsilon_1} + \beta \lambda_2^n \overrightarrow{\varepsilon_2}$$
4. Denotemos $A^n \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Expresar a_n y b_n en función de α, β, λ_1 y λ_2. Deducir que, si $\alpha \neq 0$, la sucesión $\frac{b_n}{a_n}$ tiende a $\sqrt{2}$, cuando n tiende a $+\infty$.
5. Explicar, sin cálculo, cómo obtener de las preguntas anteriores una aproximación de $\sqrt{2}$ por una sucesión de números racionales.

Solución ▼ [002595]

Ejercicio 3076

Sea $P(X)$ un polinomio de $\mathbb{C}[X]$, sea A una matriz de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Se denota B la matriz $B = P(A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Demostrar que si $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A de valor propio λ, entonces $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de B de valor propio $P(\lambda)$.
2. El propósito de esta pregunta es demostrar que los valores propios de B son todos de la forma $P(\lambda)$, con λ valor propio de A. Sea $\mu \in \mathbb{C}$, se descompone el polinomio $P(X) - \mu$ como producto de factores de grado 1 :
$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r).$$
   (a) Demostrar que
$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n).$$
   (b) Deducir que si μ es valor propio de B, entonces existe un valor propio λ de A tal que $\mu = P(\lambda)$.
3. Se denota S_A el conjunto de valores propios de A, demostrar que
$$S_B = \{P(\lambda) /\ \lambda \in S_A\}.$$
4. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ valores propios de A y sea $Q(X)$ el polinomio :
$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$
   se denota C la matriz $C = Q(A)$.
   (a) Demostrar que $S_C = \{0\}$.
   (b) Deducir que el polinomio característico de C es $(-1)^n X^n$ y que $C^n = 0$.

Solución ▼ [002596]

Ejercicio 3077

1. (a) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}.$$

   (b) Escribir la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Se denota A.

   (c) Demostrar que el vector $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de f. ¿Cuál es el valor propio asociado?

   (d) Demostrar que el vector $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es igualmente un vector propio de f. ¿Cuál es el valor propio asociado?

   (e) Calcular gráficamente la imagen del vector $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encontrar este resultado calculando.

   (f) Demostrar que la familia $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ formar una base de $\mathbb{R}^2$.

   (g) ¿Cuál es la matriz de f en la base $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$? Se denota D.

   (h) Sea P la matriz donde la primera columna es el vector $\overrightarrow{v}_1$ y cuya segunda columna es el vector $\overrightarrow{v}_2$. Calcular P^{-1}.

   (i) ¿Cuál es la relación entre A, P, P^{-1} y D?

   (j) Calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

2. Hace el mismo ejercicio con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y los vectores $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

[002761]

Ejercicio 3078

Determinar el polinomio característico de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002762]

Ejercicio 3079

Encontrar los valores propios y los vectores propios de las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad (a \neq 0).$$

[002763]

Ejercicio 3080

Encontrar una matriz cuadrada invertible P tal que $B = PAP^{-1}$ sea diagonal, y escribir la matriz B obtenida, para las matrices A siguientes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[002764]

Ejercicio 3081 DS mai 2008

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

que representa f, un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

1. (a) Demostrar que los valores propios de A son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$.
   (b) Deducir que se puede diagonalizar A.
2. (a) Determinar una base $\mathscr{B}' = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ de vectores propios tales que la matriz de f en la base $\mathscr{B}'$ sea
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
   (b) Especificar la matriz de pasaje P de la base $\mathscr{B}$ en la base $\mathscr{B}'$; ¿cuál es la relación entre las matrices A, P, P^{-1} y D ?
3. Demostrar que para todo entero $n \in \mathbb{N}$, se tiene $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Después de haber dado D^n, calcular A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[002765]

Ejercicio 3082 DS mai 2008

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcular los valores propios de A.
2. (a) Dar una base y la dimensión de cada subespacio propio de A.
   (b) A es diagonalizable ; justificar esta afirmación y diagonalizar A.

[002766]

Ejercicio 3083

Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}.$$
¿Cuáles condiciones deben satisfacer las incógnitas para que esta matriz sea diagonalizable ? Con estas condiciones satisfechas, proporcionar una base de vectores propios para A. [002767]

Ejercicio 3084

1. Calcular los valores propios y vectores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Calcular A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[002777]

Ejercicio 3085 Valores propios de AB y BA

Sean $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ y $B \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$. Se denota $C = I_n - AB$ y $D = I_p - BA$. ($I_n, I_p =$ matrices unidad de orden n y p)

1. Demostrar que si C es invertible, entonces D, lo es también (resolver $DX = 0$).
2. Si es necesario, expresar D^{-1} en función de A, B, C^{-1}.
3. Deducir que AB y BA tienen los mismos valores propios no nulos. Examinar el caso del valor propio 0, si $n = p$.

Solución ▼ [003379]

Ejercicio 3086 Cálculo de valores propios

Determinar valores propios de matrices :

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}2\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003499]

Ejercicio 3087 Cálculo de valores propios

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Encontrar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Se distinguen los casos :

1. $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$.

2. $(a_1,\ldots,a_{n-1}) = (0,\ldots,0)$.

Solución ▼ [003500]

Ejercicio 3088 Polinomios de Tchebychev

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calcular $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ por recurrencia.
2. Deducir valores propios de A.

Solución ▼ [003501]

Ejercicio 3089 Matriz tridiagonal

Determinar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [003502]

Ejercicio 3090 Esem 91

Sea $C_{p,q} = \begin{pmatrix} U_{pq} & (0) & U_{pq} \\ (0) & (0) & (0) \\ U_{pq} & (0) & U_{pq} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donde U_{pq} es la matriz $p \times q$, donde todos los coeficientes valen 1. Encontrar los elementos propios de $C_{p,q}$.

Solución ▼ [003506]

Ejercicio 3091 Sumas por filas o columnas constantes

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que la suma de los coeficientes por fila es constante ($= S$). Demostrar que S es un valor propio de A. La misma pregunta para la suma coeficientes por columna. [003508]

Ejercicio 3092 Matrices estocásticas

Sea $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que : $\begin{cases} \forall i,j,\ m_{ij} \geqslant 0 \\ \forall i,\ m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = 1. \end{cases}$ (*matriz estocástica*)

1. Demostrar que 1 es valor propio de M.
2. Sea λ un valor propio complejo de M. Demostrar que $|\lambda| \leqslant 1$ (si $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio asociado, considerar el coeficiente x_k de módulo más grande). Demostrar que si todos los coeficientes m_{ij} son estrictamente positivos entonces $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.

[003509]

Ejercicio 3093 $(X-a)P'$

Sea $E = K_n[X]$ y $u : E \to E, P \mapsto (X-a)P'$. Encontrar los valores propios y los vectores propios de u.
[003511]

Ejercicio 3094 $X(X-1)P' - 2nXP$

Sea $E = K_{2n}[X]$ y $u : E \to E$, $P \mapsto X(X-1)P' - 2nXP$. Encontrar los valores propios y los vectores propios de u.

Solución ▼ [003512]

Ejercicio 3095 X^3P mod $(X-a)(X-b)(X-c)$

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in K$ distintos, y $\varphi : K_2[X] \to K_2[X]$, $P \mapsto R$, donde R es el resto de la división euclidiana de X^3P por $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Encontrar los valores y los vectores propios de φ.

Solución ▼ [003513]

Ejercicio 3096 $P(2-X)$

Determinar los elementos propios del endomorfismo $\theta : K[X] \to K[X]$, $P \mapsto P(2-X)$.

Solución ▼ [003514]

Ejercicio 3097 $P(X+1) - P'$

Determinar los elementos propios del endomorfismo $\theta : K[X] \to K[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P'$.

Solución ▼ [003515]

Ejercicio 3098 Eivp 91

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ que a P asociada $(X-a)P' + P - P(a)$. Dar la matriz de f en la base $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Determinar $\operatorname{Im} f$, $\ker f$ y los elementos propios de f.

Solución ▼ [003516]

Ejercicio 3099 ***

Sea $E = \mathbb{R}_3[X]$. Para P elemento de E, sea $f(P)$ el resto de la división euclidiana de AP por B, donde $A = X^4 - 1$ y $B = X^4 - X$. Verificar que f es un endomorfismo de E, luego determinar $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ y los valores propios y autovectores de f.

Solución ▼ [005655]

Ejercicio 3100 ****

Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita no nula. Sean u y v dos endomorfismos de E tales que $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / \ uv - vu = \alpha u + \beta v$. Demostrar que u y v tienen un vector propio en común.

Solución ▼ [005660]

Ejercicio 3101 ***

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Para f elemento de E, $\varphi(f)$ es la aplicación definida por :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \text{ si } x \neq 0 \text{ y } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1. Demostrar que φ es un endomorfismo de E.
2. Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de φ.
3. Determinar los elementos propios de φ.

Solución ▼ [005674]

114 201.02 Diagonalización

Ejercicio 3102

Sean tres vectores e_1, e_2, e_3 formando una base de $\mathbb{R}^3$. Se denota T la aplicación lineal definida por $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ y $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Determinar el núcleo de esta aplicación lineal. Dar la matriz A de T en la base dada.
2. Se define $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calcular e_1, e_2, e_3 en función de f_1, f_2, f_3. ¿Los vectores f_1, f_2, f_3 forman una base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calcular $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en función de f_1, f_2, f_3. Escribir la matriz B de T en esta nueva base.
4. Se define $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que P es invertible y calcular P^{-1}. ¿Qué relación tienen A, B, P y P^{-1}?

[001612]

Ejercicio 3103

Sea E un espacio vectorial de dimensión 3 y de base (e_1, e_2, e_3). Se designa por I_E la aplicación de identidad E. Sea f una aplicación lineal de E en E tal que $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Dar la matriz de f en la base (e_1, e_2, e_3).
2. Dar la dimensión y una base de $\ker(f - I_E)$.
3. Dar la dimensión y una base de $\ker(f^2 + I_E)$.
4. Demostrar que la unión de las bases anteriores constituye una base de E. ¿Cuál es la matriz de f en esta nueva base? ¿Y la de f^2?

[001613]

Ejercicio 3104

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y f una aplicación lineal de E en E.

1. Demostrar que la condición $f^2 = 0$ es equivalente a $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. ¿Qué condición satisface entonces el rango de f? Se supone en lo que sigue $f^2 = 0$.
2. Sea F un suplemento de $\ker f$ en E y sea $(e_1, \ldots, e_r)$ una base de F. Demostrar que la familia de vectores $(e_1, \ldots, e_r, f(e_1), \ldots, f(e_r))$ es libre. Demostrar cómo completarlo si es necesario con vectores del $\ker f$, para obtener una base de E. ¿Cuál es la matriz de f en esta base?
3. ¿Bajo qué condición necesaria y suficiente se tiene $\operatorname{Im} f = \ker f$?

4. Ejemplo. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ de matriz en la base canónica $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Demostrar que $f^2 = 0$. Determinar una nueva base en la que la matriz de f tiene la forma indicada en la pregunta 2).

[001614]

Ejercicio 3105

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar los valores propios de A y los subespacios propios correspondientes. Deducir una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. [001615]

Ejercicio 3106

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, diagonalizar A. [001616]

Ejercicio 3107

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar, sin calcular el polinomio característico, valores propios de A. ¿Es esta matriz diagonalizable ? [001617]

Ejercicio 3108

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Son estas matrices diagonalizables ? Si es sí, reducirlas. [001618]

Ejercicio 3109

Sea n un entero estrictamente superior a 1. Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A^n = 0$ y $A^{n-1} \neq 0$. Sea x_0 un vector de $\mathbb{R}^n$ tal que $A^{n-1}x_0 \neq 0$. Demostrar que $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \ldots, A^{n-1}x_0)$ es una base de $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo escribir la matriz A en esta base ?

Aplicación : se establece $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular A^3 y dar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que A tiene una forma sencilla. [001619]

Ejercicio 3110

Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es diagonalizable ? Justificar. Escribir entonces M en una forma más simple. [001620]

Ejercicio 3111

Sea T la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por su matriz A en la base canónica (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Dar una base de $\ker T$ y $\operatorname{Im} T$.
2. (a) Calcular el polinomio característico de T, luego sus valores propios.
   (b) Justificar, sin cálculo, que T sea diagonalizable y escribir una matriz diagonal semejante a A.
   (c) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de T.
3. Sean $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ y $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justificar que (f_1, f_2, f_3) es una base de $\mathbb{R}^3$ y escribir la matriz P pasando desde la base (e_1, e_2, e_3) en la base (f_1, f_2, f_3).
   (b) Calcular P^{-1}.
   (c) Escribir la matriz D de T en la base (f_1, f_2, f_3).
4. ¿Qué relación conecta A^3, D^3, P y P^{-1} ? Deducir A^3.

[001621]

Ejercicio 3112

Cuando sea posible, diagonalizar las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

[001622]

Ejercicio 3113

¿Para qué valores de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ? No se busca reducir explícitamente A. [001623]

Ejercicio 3114

Sea u la aplicación siguiente :

$$u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

Demostrar que u está bien definida y es lineal. Determinar los valores propios de u, y, si es posible, diagonalizar u. [001624]

Ejercicio 3115

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que si λ es un valor propio complejo de A, entonces $\bar{\lambda}$ es también un valor propio de A. Igualmente, demostrar que si x es un vector propio complejo de A, entonces $\bar{x}$ (donde $\bar{x}$ designa el vector cuyas componentes son los conjugados de las componentes de x) es también un vector propio complejo de A. Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. [001625]

Ejercicio 3116

Sea A_t la matriz $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$. Sin calcular el polinomio característico de A_t, demostrar que $(t-1)$ es valor propio. Determinar el espacio propio asociado. ¿Qué pasa con la multiplicidad del valor propio $(t-1)$? Deducir el espectro de A_t. ¿A_t es diagonalizable ? [001626]

Ejercicio 3117

¿Para qué valores de a, b y c son las siguientes matrices diagonalizables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

[001627]

Ejercicio 3118

Sean u y v dos endomorfismos diagonalizables de E, que conmutan (es decir, tal que $u \circ v = v \circ u$). Se denota $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) valores propios de u (resp. de v), y $F_1, \dots, F_p$ espacios propios asociados (resp. $G_1, \dots, G_q$).

1. Demostrar que cada G_j (resp. F_i) es estable por u (resp. v) (es decir que $u(G_j) \subset G_j$).
2. Se define $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Sea $i \in \{1, \dots, p\}$. Demostrar que F_i es la suma directa de los espacios $(H_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant q}$.
3. Deducir el siguiente enunciado : *Cuando dos endomorfismos diagonalizables u y v conmutan, existe una base formada por vectores propios comunes a u y a v (en otros términos, u y v son diagonalizables simultáneamente en la misma base).*

[001628]

Ejercicio 3119

¿Las matrices siguientes son diagonalizables, triangularizables ? Si es sí, reducirlas.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

[001629]

Ejercicio 3120

Sea f un endomorfismo diagonalizable de un espacio vectorial E y P un polinomio. Demostrar que $P(f)$ es diagonalizable. [001630]

Ejercicio 3121

Sea P_0 un polinomio de $\mathbb{R}_n[X]$, y f la aplicación siguiente :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto R = \text{ resto de la división euclidiana de } P \text{ por } P_0 \end{aligned}$$

Con la ayuda de un polinomio anulador de f, demostrar que f es diagonalizable. [001631]

Ejercicio 3122

Sea α y β dos reales, y A la matriz siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Bajo qué condiciones sobre α y β, A es diagonalizable ?
Se supone $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Verificar que $A(A-I) = 0$. Deducir A^n y $(A+I)^{-1}$. [001632]

Ejercicio 3123

las matrices siguientes son diagonalizables, triangularizables, sobre $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$?
Cuando son diagonalizables, dar una matriz diagonal similar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Reducir explícitamente A y C. [001633]

Ejercicio 3124

Se considera un endomorfismo f de un $\mathbb{C}$ espacio vectorial E de dimensión finita n, tal que f^2 es diagonalizable. El propósito de este ejercicio es demostrar que :

$$f \text{ es diagonalizable } \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2.$$

1. Se supone que f es diagonalizable. Se denotan $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ los valores propios (distintos) de A, y $E_1, \dots, E_r$ los espacios propios asociados.
   (a) Demostrar que si $\ker f = \{0\}$, entonces $\ker f^2 = \{0\}$.
   (b) Se supone ahora que $\ker f \neq \{0\}$. Se denotan $\alpha_{\alpha_1}, \dots, \alpha_{\alpha_r}$ los otros valores propios de f, y $E_0, \dots, E_r$ sus espacios propios. Utilizando que $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$, demostrar que si $f^2(x) = 0$, entonces $f(x) = 0$. Deducir que $\ker f = \ker f^2$.
2. Se supone que $\ker f = \ker f^2$.
   (a) Demostrar que si μ es un valor propio de f, entonces μ^2 es un valor propio de f^2.
      i. Sea λ un valor propio no nulo de f^2, y μ y $-\mu$ sus dos raíces complejas. Demostrar que
      $$\ker(f - \mu\,\mathrm{Id}) \subset \ker(f^2 - \lambda\,\mathrm{Id}) \quad \text{y que} \quad \ker(f + \mu\,\mathrm{Id}) \subset \ker(f^2 - \lambda\,\mathrm{Id}).$$
      ii. Demostrar que
      $$\ker(f^2 - \lambda\,\mathrm{Id}) = \ker(f - \mu\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mu\,\mathrm{Id}).$$
      (Remarquer que $\forall y \in \ker f^2$, $y = \frac{1}{2\mu}((f + \mu\,\mathrm{Id})(y) - (f - \mu\,\mathrm{Id})(y))$).
   (b) Demostrar (con cuidado) que f es diagonalizable.

[001634]

Ejercicio 3125

¿La matriz siguiente es diagonalizable, triangularizable ? Efectuar explícitamente la reducción.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [001635]

Ejercicio 3126

Sea $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$. Calcular A^2, luego A^3. Usando un polinomio anulador de A, demostrar que A es diagonalizable. Sin tratar de calcular el polinomio característico de A, dar un conjunto finito que contiene todos los valores propios de A, luego dar los valores propios así como sus multiplicidades. Deducir el polinomio característico de A.

Solución ▼ [001636]

Ejercicio 3127

Se considera una matriz $A \in \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C})$ y la aplicación ϕ_A definida por :

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C}) &\to \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{C}) \\ B &\mapsto AB. \end{aligned}$$

1. Demostrar que ϕ_A es lineal. El propósito del ejercicio es demostrar que ϕ_A es diagonalizable si y solo si A es diagonalizable.
2. Calcular $\phi_A^2(B)$, luego $\phi_A^k(B)$, para $k \in \mathbb{N}$. Deducir que si P es un polinomio, entonces $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$.
3. Deducir que P es un polinomio anulador de A si y solo si P es un polinomio anulador de ϕ_A.

4. Demostrar que ϕ_A es diagonalizable si y solo si A es.

[001637]

Ejercicio 3128

A los n números complejos $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$, con $a_2\neq 0$, se asocia la matriz $A_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$.

1. ¿Cuál es el rango de A_n ? ¿Qué se deduce del polinomio característico χ_n de A_n ?
2. Calcular χ_2, χ_3.
3. Se define $b_n=a_2^2+\cdots+a_n^2$. Por recurrencia, demostrar que $\chi_n=(-X)^{n-2}(X^2-a_1X-b_n)$.
4. ¿Si $b_n=0$, A_n es diagonalizable ?
5. ¿Si $b_n\neq 0$, bajo qué condición A_n es diagonalizable ?

[001638]

Ejercicio 3129

Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular ${}^tA$. ¿La matriz A es diagonalizable ?
Encontrar una matriz P ortogonal tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

[001639]

Ejercicio 3130

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y u un endomorfismo de E tal que $u^p=0$, para cierto entero p. ¿Cuáles son los valores propios de u ? ¿Bajo qué condición u es diagonalizable ? Demostrar que $u^n=0$.

[001640]

Ejercicio 3131

Determinar los valores propios de las siguientes matrices. ¿Son diagonalizables, triangularizables ?

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando el polinomio característico de B, calcular B^{-1}.

Solución ▼

[001641]

Ejercicio 3132

Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcular ${}^tA$. ¿La matriz A es diagonalizable ?
2. Diagonalizar A.

3. Diagonalizar A en una base ortonormada (para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$).

Solución ▼ [001642]

Ejercicio 3133

En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[X]$, se considera la siguiente aplicación lineal :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \tfrac{1}{2}P''(0)X + \tfrac{1}{6}P'''(0). \end{aligned}$$

1. Escribir la matriz A de u en la base canónica. Calcular A^2.
2. ¿u es diagonalizable ? Si es así, dar una base de $\mathbb{R}^3[X]$ formada por vectores propios de u.

[001643]

Ejercicio 3134

Se considera un real α y la aplicación T_α siguiente :

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P'. \end{aligned}$$

1. Demostrar que para todo entero $n > 0$, la restricción de T_α a $\mathbb{R}_n[X]$ define un endomorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Se supone para esta pregunta que $n = 3$.
   (a) Escribir la matriz de T_α en la base $(1, X, X^2, X^3)$.
   (b) Determinar los valores propios de T_α. Se les denota $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
   (c) Determinar los valores de α, para los cuales T_α tiene valores propios múltiples.
   (d) Dar un vector propio de T_α, para cada valor propio, cuando $\alpha = -1$, luego $\alpha = -4$. ¿El endomorfismo T_{-4} es diagonalizable ?
3. Se supone ahora $n > 3$.
   (a) Escribir la matriz de T_α en la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
   (b) Determinar los valores propios de T_α. Se les denota $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   (c) Determinar los valores de α, para los cuales T_α tiene valores propios múltiples. En cada caso, dar la lista de los valores propios con sus multiplicidades
   (d) Determinar la dimensión de $\ker T_\alpha$ y de $\operatorname{Im} T_\alpha$, cuando $\alpha \notin \{1-n, \dots, -1, 0\}$.
   (e) Determinar $\ker T_\alpha$, para $\alpha = -1$, luego $\alpha = 0$. ¿El endomorfismo T_0 es diagonalizable ?
   (f) Cuando $\alpha = p-1$, con $p \in \{1, \dots, n\}$, dar un polinomio P de grado menor o igual que n tal que $T_\alpha(P) = 0$. Deducir $\ker T_\alpha$. Especificar la dimensión.
   (g) Sea λ_k un valor propio simple de T_α. Dar un vector propio de T_α asociada a λ_k.

[001644]

Ejercicio 3135

Sean $\mathbb{R}^n$ euclidiana, $f \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que f es diagonalizable si y solo si f es una simetría ortogonal.
[001645]

Ejercicio 3136

Diagonalizar en una base ortonormada las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \ a_i \in \mathbb{R}; \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \ a,b \in \mathbb{R}.$$

¿Se pueden determinar a,b tales que B ya sea la matriz de un producto escalar? [001646]

Ejercicio 3137

Demostrar que si A es una matriz simétrica real, entonces $A+iI$ es invertible. [001647]

Ejercicio 3138

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ cuya matriz con respecto a la base canónica es :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ donde } k \in \mathbb{C}.$$

(a) Determinar, según los valores de k, la dimensión del núcleo de f.
(b) Demostrar que M admite un valor propio real entero independiente de k, y calcular todos los valores propios de M.
(c) Indicar todos los valores de k, para los cuales se tienen los valores propios múltiples. ¿Para qué valores de k la matriz M es semejante a una matriz diagonal? [001648]

Ejercicio 3139

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I$.

1. Demostrar que n es par, $n = 2p$.
2. Calcular $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ y demostrar $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{i,-i\}$. ¿Por qué razón A es diagonalizable en $\mathbb{C}$?
3. Demostrar que si $\{y_1,\dots,y_k\}$ es una base de E_i, entonces $\{\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_k\}$ es una base de E_{-i}. ¿Cuál es entonces el valor de k?
4. Demostrar que A es semejante (en $M_n(\mathbb{R})$) a una matriz diagonal de bloques en la que cada uno de los bloques diagonales es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Se puede usar la pregunta 3.)

[001649]

Ejercicio 3140

Sean M y $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Se denota $\varphi_M \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ la aplicación $N \mapsto MN - NM$.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalizar A y demostrar que B no es diagonalizable.
2. Demostrar que si N es un vector propio asociado a un valor propio no nula λ de φ_M, entonces N es nilpotente. (Se puede establecer que para todo $k \in \mathbb{N}$, $MN^k - N^kM = k\lambda N^k$.)

3. Demostrar que la identidad no pertenece a la imagen de φ_M. (Utilizar la traza.)
4. Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Diagonalizar φ_D, luego φ_A. Demostrar que φ_B no es diagonalizable.
5. Demostrar que si M es diagonalizable, φ_M es diagonalizable.
6. Establecer la recíproca cuando M tiene al menos un valor propio.

[001650]

Ejercicio 3141

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una aplicación $p \in \mathscr{L}(E)$ se denomina proyector cuando $p^2 = p$.

1. Demostrar que si p es un proyector $1-p$ es un proyector. Demostrar que $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$.
2. Se supone que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sean p y q dos proyectores tales que $p+q$ sea también un proyector. Demostrar que :
   (a) $pq = qp = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   (c) $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.
   Se supone ahora E de dimensión finita y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. Demostrar que todo proyector es diagonalizable y que dos proyectores son semejantes si y solo si tienen la misma traza.
4. Demostrar que toda matriz diagonalizable es una combinación lineal de proyectores.

[001651]

Ejercicio 3142

Sean E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $P \in \mathbb{K}[X]$ y $u \in \mathscr{L}(E)$. Se denota $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$.

1. Se supone que u es diagonalizable. Demostrar que $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$.
2. Demostrar, en el caso general, $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$.
3. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ demostrar que $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$. ¿Es cierto este resultado cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

[001652]

Ejercicio 3143

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que f^2 sea diagonalizable. Demostrar que f es diagonalizable si y solo si $\ker(f) = \ker(f^2)$. [001653]

Ejercicio 3144

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ determinada por su matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

1. Demostrar que M es diagonalizable.
2. Demostrar que la restricción de f a todo subespacio estable es diagonalizable.
3. Deducir todos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ estables por f.

[001654]

Ejercicio 3145

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ y $\varphi_M \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}))$ la aplicación $N \mapsto MN$. Demostrar que φ_M es diagonalizable si y solo si M es diagonalizable. (Usar el polinomio minimal.) [001655]

Ejercicio 3146

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalizable. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :
(i) La familia $\{id, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\}$ es libre.
(ii) Existe $x \in E : \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ engendra E.
(iii) Los valores propios de f son simples. [001656]

Ejercicio 3147

Sea ρ la aplicación de $\mathbb{R}_4[X]$ en $\mathbb{R}_4[X]$ que a un polinomio P asocia el resto de la división euclidiana de P por (X^2-1).

1. Demostrar que ρ es lineal.
2. Demostrar que $\rho^2 = \rho$. Deducir que ρ es diagonalizable.
3. Determinar (preferiblemente sin cálculo) una base de vectores propios para ρ.

[001657]

Ejercicio 3148

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores propios de A. ¿El endomorfismo f es diagonalizable ?
2. Calcular $(A-I)^2$. Deducir A^n, utilizando la fórmula binomial de Newton.
3. Sean $P(X) = (X-1)^2$ y $Q \in \mathbb{R}[X]$. Expresar el resto de la división euclidiana de Q por P en función de $Q(1)$ y $Q'(1)$, donde Q' es el polinomio derivada de Q.
   Observando que $P(A) = 0$ (se dice entonces que P es un polinomio anulador de A) y usando el resultado anterior con una elección cuidadosa del polinomio Q, reencontrar A^n.
4. Demostrar que la imagen de $\mathbb{R}^3$ por el endomorfismo $(A-I)$ es un subespacio de dimensión 1, donde se denota una base por ε_2. Determinar entonces un vector ε_3 tal que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Sea finalmente ε_1, un vector propio de f, no colineal con ε_2. Se escribe $\tilde{A}$, la matriz de f en la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, así como la matriz de pasaje P y su inversa P^{-1}. Encontrar A^n.

[001658]

Ejercicio 3149

Sea f un automorfismo de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial E de dimensión finita. Demostrar que f es diagonalizable si y solo si f^2 es diagonalizable. [001659]

Ejercicio 3150

Las preguntas son independientes. K designa $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, E es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ es una base fija de E y f un endomorfismo de E.

1. ¿Cuáles son los valores propios del endomorfismo nulo de E ?
2. Se supone que la matriz de f en $\mathscr{B}$ es $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) ¿2 es valor propio de f ?
   (b) ¿El vector $2e_1 + e_2 + e_3$ es un vector propio de f ?
3. ¿Por qué un vector de E no puede ser un vector propio relativo a dos valores propios distintos ?
4. (a) ¿Es cierto que si λ es un valor propio de f y si P es un polinomio anulador de f, entonces λ es raíz de P ?
   (b) ¿Es cierto que si λ es una raíz de un polinomio anulador de f, entonces λ es un valor propio de f ?
5. Demostrar que si $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$, entonces 1 es valor propio de f.
6. Demostrar que siempre existe al menos un escalar α tal que $f - \alpha\,\mathrm{Id}_E$ es biyectiva.
7. Dar un ejemplo de endomorfismo f de E, con $n = 2$ tal que la suma de dos vectores propios de f no es un vector propio de f.
8. Se supone que $E = E_1 \oplus E_2$ y que si $x \in E$ se escribe $x_1 + x_2$, con $x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$, entonces $f(x) = 2x_1 - 3x_2$.
   (a) ¿Qué resultado asegura la existencia de tal endomorfismo ?
   (b) Demostrar que f es diagonalizable.
9. ¿La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ?
10. Si el endomorfismo f admite 0 por valor propio y es diagonalizable, ¿Qué se puede decir de la dimensión del núcleo de f ?

[001660]

Ejercicio 3151

Estudiar el caracter diagonalizable de las siguientes matrices y, si procede, diagonalizarlas :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$,
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}), k \in \mathbb{C}$.

[001661]

Ejercicio 3152

Sean $A \in \mathscr{M}_n(K)$ tal que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ y $f : \mathscr{M}_n(K) \to \mathscr{M}_n(K)$, $M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

1. Demostrar que f es un endomorfismo de $\mathscr{M}_n(K)$.
2. Demostrar que $\mathscr{T} = \{M \in \mathscr{M}_n(K) : \operatorname{tr}(M) = 0\}$ y $\operatorname{vect}(A)$ son subespacios propios de f.
3. Deducir que f es diagonalizable y escribir la matriz reducida de f.

[001662]

Ejercicio 3153

Demostrar que si el polinomio minimal de un endomorfismo f de un K-espacio vectorial de dimensión finita admite una raíz $\lambda \in K$, entonces λ es valor propio de f. [001663]

Ejercicio 3154

Estudiar el carácter diagonalizable de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ n \geqslant 2.$

[001664]

Ejercicio 3155

Sean E un K-espacio vectorial de dimensión n y f un endomorfismo de E de rango 1.

1. Demostrar que si f es diagonalizable entonces $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
2. Demostrar que existe $\lambda \in K$ tal que el polinomio característico de f se escribe
$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$
3. (a) Demostrar que f es diagonalizable si y solo si $\operatorname{tr}(f) \neq 0$.
   (b) Reducir la matriz sin cálculo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ y dar sin calcular los subespacios vectoriales propios.

[001665]

Ejercicio 3156

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Sea $Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $Y^2 = D$.
   (a) Demostrar que Y y D conmutan.
   (b) Deducir que Y es diagonal y determinar Y.
2. (a) Demostrar que A es diagonalizable.
   (b) Deducir las soluciones $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la ecuación $X^2 = A$.

[001666]

Ejercicio 3157

Sean E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n y f un endomorfismo de E.

1. Demostrar que si f es diagonalizable entonces f^2 es diagonalizable y $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
2. Sea $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que $\ker(f^2 - \mu^2 \,\mathrm{Id}_E) = \ker(f - \mu \,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \,\mathrm{Id}_E)$.
3. Se supone $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.
   (a) Demostrar que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
   (b) Se supone además que f^2 es diagonalizable. Demostrar que f es diagonalizable.

[001667]

Ejercicio 3158

Se considera la matriz de bloques $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calcular A^2.
2. Encontrar los elementos apropiados de A. ¿La matriz A es diagonalizable ?

[001668]

Ejercicio 3159

Se designa por E el espacio vectorial de polinomios s, con coeficientes reales, y por E_n, el subespacio de polinomios s de grado como máximo n.

1. Demostrar que para todo x en $\mathbb{R}$, $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$ define una aplicación lineal de E en E. ¿Cuál es el grado de ΔP, cuando P pertenece a E_n ?
2. Se considera Δ_2, la restricción de Δ en el subespacio E_2. Determinar los valores propios de Δ_2. ¿El endomorfismo Δ_2 es diagonalizable ? ¿Es Δ_2 un isomorfismo ?
3. Usando la definición de valores propios, calcular los valores propios y los polinomios propios de Δ.

[001669]

Ejercicio 3160

Para todo elemento no nulo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se considera el endomorfismo u de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz en la base canónica $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ es la matriz $A = (\alpha_{i,j})$, donde $\alpha_{i,j} = a_i a_j$.

1. Determinar el núcleo y la imagen de u.
2. Deducir los subespacios propios de u. Determinar los valores propios de u. ¿El endomorfismo u es diagonalizable ?
3. ¿Cuál es el polinomio característico de u ?

[001670]

Ejercicio 3161

Sea B una matriz diagonalizable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Se define su radio espectral por

$$\rho(B) = \max\{|\lambda| \text{ con } \lambda \text{ es un valor propio de } B\}.$$

1. Demostrar que $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = 0$.
2. Deducir que $I - B$ es invertible y que $(I-B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$.

Ejercicio 3162 Endomorfismo diagonalizable de $\mathbb{R}^2$

Se considera el endomorfismo a de $E=\mathbb{R}^2$ cuya matriz representativa $A=[a]_e^e$ en la base canónica e es $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. Calcular la traza, el determinante, el polinomio característico y el espectro de a. ¿Qué teorema del curso garantiza la existencia de una base $f=(\overrightarrow{f}_1,\overrightarrow{f}_2)$ de vectores propios ? Escoger entonces f tal que $[\mathrm{Id}_E]_f^e$ y $[\mathrm{Id}_E]_e^f$ sean coeficientes enteros. Dibujar $\overrightarrow{f}_1$ y $\overrightarrow{f}_2$, tomando unidades de eje bastante pequeñas. Dibujar algunos vectores $\overrightarrow{x}$ y sus imágenes $a(\overrightarrow{x})$, con ayuda de f. Encontrar dos matrices P y D cuadrados de orden 2 tales que D sea diagonal, P invertible y $A=PDP^{-1}$. Calcular $[a^{50}]_f^f$, $[a^{50}]_e^e$ y A^{50}. Calcular $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n}}a^{2n}$.

Solución ▼ [001672]

Ejercicio 3163 Endomorfismo de un espacio de matrices

Sea K un cuerpo conmutativo cualquiera, y sea $F=\mathscr{M}_n(K)$ el espacio vectorial en K de matrices cuadradas de orden n, con coeficientes en K. Si i y j son enteros comprendidos entre 1 y n, se denota F_{ij} el elemento de F cuyo coeficiente (i,j) es 1 y cuyos otros coeficientes son nulos. Demostrar que los F_{ij} forman una base de F. ¿Cuál es la dimensión de F ? Sea D en F y diagonal. Sean α y β en K y sea el endomorfismo Φ de F que a la matriz x hace corresponder la matriz $\Phi(X)=\alpha XD+\beta DX$. Calcular $\Phi(F_{ij})$. ¿Φ es un endomorfismo diagonalizable ? Dar su polinomio característico en función de los coeficientes de D y de α y β.

Solución ▼ [001673]

Ejercicio 3164

Sea $\theta\in]0,\pi[$. Se consideran las dos matrices de orden n :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Demostrar por inducción que $\det B=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. (Método : Desarrollar con respecto a la última fila). Demostrar que $\det B$ se anula por n valores distintos de θ de $]0,\pi[$, y determinarlos.

Si P_A es el polinomio característico de A, calcular $P_A(-2\cos\theta)$ y deducir de lo anterior los valores propios de A. Demostrar que los valores propios de las matrices $2I_n+A$ y $2I_n-A$ son estrictamente positivos.

Solución ▼ [001674]

Ejercicio 3165

Sea a,b,c tres reales y u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ teniendo como matriz

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Discutir la posibilidad de diagonalizar según los valores de a,b,c. [002469]

Ejercicio 3166

Sea A una matriz cuadrada real de orden n no nula y nilpotente.

1. Demostrar que $I-A$ no es diagonalizable.
2. Generalizar demostrando que si B es una matriz diagonalizable cuyos valores propios son todos iguales, entonces $B+A$ no es diagonalizable.
3. Demostrar que existe A,B en $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ nilpotente y B diagonalizable, tales que $A+B$ sea diagonalizable.

[002477]

Ejercicio 3167

Sea M la matriz real 3×3 siguiente :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los valores propios de M.
2. Demostrar que M es diagonalizable.
3. Determinar una base de vectores propios y P la matriz de pasaje.
4. Se tiene $D = P^{-1}MP$, para $k \in \mathbb{N}$ expresar M^k en función de D^k, luego calcular M^k.

Solución ▼ [002563]

Ejercicio 3168

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que A es diagonalizable y encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Solución ▼ [002566]

Ejercicio 3169

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factorizar el polinomio característico de A. ¿La matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$?

Solución ▼ [002567]

Ejercicio 3170

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Demostrar que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [002568]

Ejercicio 3171

(*9 puntos*) Sea A la matriz de $M_3(\mathbb{R})$ siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que los valores propios de A son 1 y 2.
2. Determinar los subespacios propios de A. ¿La matriz A es diagonalizable ?
3. Determinar los subespacios característicos de A.
4. Determinar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz del endomorfismo asociado con A es

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Deducir la descomposición de Dunford de B.
5. Resolver el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + z. \end{cases}$$

[002572]

Ejercicio 3172

(*7 puntos*) Se considera la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

1. Determinar una matriz $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tal que para todo $n \geqslant 1$ se tiene

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

   Justificar.
2. Determinar el polinomio característico $P_A(X)$ de A y calcular sus raíces λ_1 y λ_2.
3. Sea $R_n(X) = a_n X + b_n$ el resto de la división euclidiana de X^n por $P_A(X)$. Calcular a_n y b_n (se pueden usar las raíces λ_1 y λ_2).
4. Demostrar que $A^n = a_n A + b_n I_2$, deducir que la matriz A^n converge cuando n tiende a $+\infty$ a un límite A_∞ que se va a determinar. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

[002573]

Ejercicio 3173

(*5 puntos*) Sea A una matriz cuadrada, $A \in \mathscr{M}_n(K)$, ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se recuerda que la traza de una matriz es la suma de sus coeficientes diagonales y que $\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr} A$. Demostrar que $\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$ en los siguientes casos :

1. A diagonalizable.
2. A triangular superior que tiene una diagonal de ceros.
3. A trigonalizable.
4. A arbitraria.

[002574]

Ejercicio 3174

(*4 puntos*) Se supone que una población x de conejos y una población y de lobos se rigen por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

1. Diagonalizar la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Expresar el sistema (S) y sus soluciones en una base de vectores propios de A.
3. Representar gráficamente las trayectorias de (S) en el sistema de referencia (Oxy).
4. Discutir gráficamente la evolución de la población de conejos en función de las condiciones iniciales.

Solución ▼ [002575]

Ejercicio 3175

(*9 puntos*) Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los valores propios de A. ¿El endomorfismo u es diagonalizable ?
2. Calcular $(A-I)^2$. Demostrar que $A^n = nA + (1-n)I$ utilizando la fórmula binomial de Newton.
3. Sean $P(X) = (X-1)^2$ y $Q \in \mathbb{R}[X]$. Expresar el resto de la división euclidiana de Q por P en función de $Q(1)$ y $Q'(1)$, donde Q' es el polinomio derivado de Q. Notando que $P(A) = 0$ y usando el resultado anterior con una elección cuidadosa del polinomio Q, reencontrar A^n.
4. (a) Demostrar que la imagen de $\mathbb{R}^3$ por el endomorfismo $u - \mathrm{Id}$ es un subespacio vectorial de dimensión 1, se denota ε_2 una base.
   (b) Determinar un vector ε_3 tal que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Determinar un vector propio ε_1 de u no colineal con ε_2.
   (c) Demostrar que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Escribir la matriz de u en esta base, así como las matrices de paso.
   (d) Encontrar A^n.

Solución ▼ [002576]

Ejercicio 3176

(*7 puntos*) Sean M y A dos matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $MA = AM$. Se supone que M admite n valores propios distintos.

1. Sea x un vector propio de M de valor propio λ, demostrar que $MAx = \lambda Ax$, deducir que los vectores x y Ax son colineales, luego que todo vector propio de M es un vector propio de A.
2. Se denotan ahora $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valores propios de M y $\mu_1, \ldots, \mu_n$ los de A.
   (a) Demostrar por inducción en n la igualdad siguiente :

   $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j).$$

   Deducir que el siguiente sistema

   $$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \quad\vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{cases}$$

   admite una única solución $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Sean M' y A' las siguientes matrices diagonales :

   $$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que existen reales $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tales que

   $$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

   y deducir que existen reales $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ tales que

   $$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Solución ▼ [002577]

Ejercicio 3177

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar y factorizar el polinomio característico de A.
2. Demostrar que los valores propios de A son -1 y 2. Determinar los subespacios propios asociados.
3. Demostrar que A es diagonalizable y dar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de u es diagonal.
4. Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Solución ▼ [002581]

Ejercicio 3178

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Explicar sin cálculo por qué la matriz A no es diagonalizable.

Solución ▼ [002583]

Ejercicio 3179

Sea A una matriz 2×2, con coeficientes reales. Se supone que en cada columna de A la suma de los coeficientes es igual a 1.

1. Sean (x_1, x_2), (y_1, y_2) dos vectores de $\mathbb{R}^2$, se supone que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que entonces
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Sea el vector $\varepsilon = (1, -1)$, Demostrar que es un vector propio de A. Se denota λ su propio valor.
3. Demostrar que si v es un vector propio de A no colineal con ε, entonces el valor propio asociado con v es igual a 1.
4. Sea $e_1 = (1, 0)$. Demostrar que la matriz, en la base (e_1, ε), del endomorfismo asociado con A es de la forma
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$
donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Deducir que si $\lambda \neq 1$, entonces A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [002584]

Ejercicio 3180

I

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A_\alpha \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz siguiente
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Primera parte :

1. Factorizar el polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ como producto de factores de primer grado.
2. Determinar según el valor del parámetro α los valores propios distintos de A_α y su multiplicidad.
3. Determinar los valores de α, para los cuales la matriz A_α es diagonalizable.
4. Determinar según el valor de α el polinomio minimal de A_α.

Segunda parte :

Se supone ahora que $\alpha = 0$, se denota $A = A_0$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz A.

1. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
2. Demostrar que f admite un plano estable (es decir f-invariante).
3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.

4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).
5. Para $t \in \mathbb{R}$, calcular $\exp(tB)$ y expresar $\exp(tA)$, con ayuda de P y $\exp(tB)$.
6. Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $Y' = BY$ y $X' = AX$.

II

Se recuerda que una matriz $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ se dice nilpotente de orden m si $N^m = 0$, y si para todo k en $\mathbb{N}$, $k < m$, se tiene $N^k \neq 0$. Sean $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente de orden m y $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz tal que $AN = NA$.

1. Determinar un polinomio anulador de N. Deducir el polinomio minimal y el polinomio característico de N.
2. Determinar los valores propios de N.
3. Demostrar que $\det(I+N) = 1$.
4. Se supone A invertible. Demostrar que las matrices AN y NA^{-1} son nilpotentes. Deducir que

$$\det(A+N) = \det A.$$

5. Se supone A no invertible. Expresando $(A+N)^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\det(A+N) = 0.$$

Solución ▼ [002586]

Ejercicio 3181

Sea $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, demostrar que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [002587]

Ejercicio 3182

Sea $a \in \mathbb{R}$, se denota A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

Se define una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, al dar u_0 y u_1 y la siguiente relación de recurrencia, para $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. ¿Para qué valores de a la matriz A es diagonalizable ?

2. Cuando A es diagonalizable, calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.
3. Se supone A diagonalizable. Se denota U_n el vector $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, expresar U_{n+1} en función de U_n y de A, luego U_n en función de U_0 y de A.

Solución ▼ [002591]

Ejercicio 3183

Sea A la matriz de $M_3(\mathbb{R})$ siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ¿La matriz A es diagonalizable?
2. Calcular $(A-2I_3)^2$, luego $(A-2I_3)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducir A^n.

Solución ▼ [002592]

Ejercicio 3184

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que 1 y 2 son valores propios de f.
2. Determinar los vectores propios de f.
3. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector propio de f, para el valor propio 2. Determinar los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tales que

$$f(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \quad \text{y} \quad f(\overrightarrow{w}) = 2\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.$$

4. Sea $\overrightarrow{e}$ un vector propio de f, para el valor propio 1. Demostrar que $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Dar la matriz de f en esta base.
5. ¿La matriz A es diagonalizable?

Solución ▼ [002593]

Ejercicio 3185

Sea $m \in \mathbb{R}$, y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Factorizar el polinomio característico de A y demostrar que los valores propios de A son -1 y 1.
2. ¿Para qué valores de m es diagonalizable la matriz? (Justificar). Determinar según los valores de m el polinomio minimal de A. (Justificar).

Solución ▼ [002599]

Ejercicio 3186

1. Dar un ejemplo de una matriz en $M_2(\mathbb{R})$, diagonalizable en $\mathbb{C}$, pero no diagonalizable en $\mathbb{R}$. (Justificar).
2. Dar un ejemplo de una matriz en $M_2(\mathbb{R})$ no diagonalizable, ni en $\mathbb{C}$, ni en $\mathbb{R}$. (Justificar).

Solución ▼ [002600]

Ejercicio 3187

Sea A la matriz siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonalizar la matriz A.
2. Expresar las soluciones del sistema diferencial $X' = AX$ en una base de vectores propios y trazar sus trayectorias.

Solución ▼ [002601]

Ejercicio 3188

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calcular el determinante de A y determinar para qué valores de a la matriz es invertible.
2. Calcular A^{-1}, cuando A es invertible.

Solución ▼ [002603]

Ejercicio 3189

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es la siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Cuál es la naturaleza geométrica de este endomorfismo ?
2. Demostrar que, para todo $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la matriz A admite un valor propio real único. ¿Cuál es el subespacio propio asociado ? ¿Qué sucede si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$?

Solución ▼ [002604]

Ejercicio 3190

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar y factorizar el polinomio característico de A.
2. Demostrar que los valores propios de A son 1 y -2. Determinar los subespacios propios asociados.
3. Demostrar que A es diagonalizable y dar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de u es diagonal.
4. Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Solución ▼ [002605]

Ejercicio 3191

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los valores propios de A. ¿El endomorfismo u es diagonalizable? (Justificar).
2. Calcular $(A-I)^2$. Demostrar que $A^n = nA + (1-n)I$.

Solución ▼ [002606]

Ejercicio 3192

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

1. Determinar los valores propios de A.
2. Determinar, sin cálculos, de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ y $f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u}$.
3. Sea $\vec{e}$ tal que $f(\vec{e}) = \vec{e}$. Demostrar que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v})$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escribir la matriz de f en esta base.
4. La matriz A ¿es diagonalizable? (Justificar.)

Solución ▼ [002607]

Ejercicio 3193

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociado.

1. Factorizar el polinomio característico de A.
2. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar una matriz P invertible tal que $AP = PB$ (o $A = PBP^{-1}$).

4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).
5. Para $t \in \mathbb{R}$, calcular $\exp(tB)$.
6. Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $y' = By$ y $x' = Ax$, donde x e y denotan las funciones reales con valores en $\mathbb{R}^3$.

Solución ▼ [002608]

Ejercicio 3194

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Para qué valores de a la matriz A es diagonalizable ?
   Cuando A es diagonalizable, determinar una base de vectores propios de A.
2. Sea E el espacio vectorial de las soluciones del sistema $x' = Ax$, donde x es una función de la variable real t, con valores en $\mathbb{R}^3$.
   (a) Cuando A es diagonalizable, dar una base de E en función de los vectores propios y los valores propios de A. Escribir la solución general del sistema.
   (b) Cuando A no es diagonalizable, integrar directamente el sistema $x' = Ax$.
3. Sea E_0 el conjunto de elementos s de E tales que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \overrightarrow{0}$. Demostrar que E_0 es un subespacio vectorial de E. (fuera de escala) Determinar su dimensión en función de a.
4. Sea F el conjunto de elementos s de E acotados en $[0, +\infty[$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de E. (Fuera de escala). Determinar su dimensión en función de a.

Solución ▼ [002609]

Ejercicio 3195

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matriz siguiente
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

I

1. Factorizar el polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ como producto de factores de primer grado.
2. Determinar según el valor del parámetro α los valores propios distintos de A_α y su multiplicidad.
3. Determinar los valores de α, para los cuales la matriz A_α es diagonalizable.
4. Determinar según el valor de α el polinomio minimal de A_α.

II

Se supone, en esta parte, que $\alpha = 0$, se denota $A = A_0$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz A.

1. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
2. Demostrar que el subespacio vectorial $\ker(A+I)^2$ es un plano estable por f.

3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$ $(AP = PB)$.

4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).
5. Para $t \in \mathbb{R}$, calcular $\exp(tB)$ y expresar $\exp(tA)$, con ayuda de P y $\exp(tB)$.
6. Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $Y' = BY$ y $X' = AX$.

III

Se supone, en esta parte, que $\alpha = -1$, se denota $A = A_{-1}$.

1. Verificar que la matriz A es diagonalizable.
2. Diagonalizar la matriz A.
3. Dar las soluciones del sistema diferencial $X' = A.X$.

IV

Se supone, en esta parte, que $\alpha = 1$, se denota $A = A_1$.

1. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
2. Trigonalizar la matriz A.

Solución ▼ [002610]

Ejercicio 3196

Sea A una matriz 2×2, con coeficientes reales.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se supone $a + c = b + d = 1$ y $a - b \neq 1$.

1. Sean (x_1, x_2), (y_1, y_2) dos vectores de $\mathbb{R}^2$, tales que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

demostrar entonces que

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Sea el vector $\overrightarrow{x} = (1, -1)$, verificar que $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A, y determinar su valor propio.
3. Determinar el polinomio característico de A y calcular sus raíces.
4. Determinar un vector propio, $\overrightarrow{y}$, de A no colineal con $\overrightarrow{x}$ y expresar la matriz del endomorfismo definido por A en la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

Solución ▼ [002611]

Ejercicio 3197

Sea E un espacio vectorial de dimensión 3. Se denota $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ una base de E, si $\overrightarrow{u}$ es un vector de E se denota (x,y,z) sus coordenadas en la base $\mathscr{B}$. Sea f una aplicación lineal de E en E, definida por

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Dar la matriz A de f en la base $\mathscr{B}$.
2. Determinar los subespacios $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$.
3. Sean $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,2,0)$ y $\overrightarrow{u}_3 = (0,1,1)$. Demostrar que $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ es una base de E.
4. Calcular $f(\overrightarrow{u}_1)$, $f(\overrightarrow{u}_2)$ y $f(\overrightarrow{u}_3)$ y determinar la matriz B de f en la base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$.
5. Determinar los valores propios de f y sus vectores propios asociados.

Solución ▼ [002612]

Ejercicio 3198

Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Se quiere encontrar una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n. Se denota f el endomorfismo de E de matriz A en la base canónica.

1. Demostrar que la existencia de tal matriz implica la paridad de n.
2. Se supone ahora que $n = 4$.
   (a) Demostrar que para todo $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} \neq 0$, los vectores $\overrightarrow{x}$ y $f(\overrightarrow{x})$ son linealmente independientes.
   (b) Sea $\overrightarrow{x}_1 \neq 0$, se denota F el subespacio vectorial de E generado por los vectores $\overrightarrow{x}_1$ y $f(\overrightarrow{x}_1)$.
      i. Demostrar que F es estable por f.
      ii. Sea $\overrightarrow{x}_2 \in E$, se supone que $\overrightarrow{x}_2 \notin F$, demostrar que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}_1, f(\overrightarrow{x}_1), \overrightarrow{x}_2, f(\overrightarrow{x}_2))$ es una base de E.
   (c) Escribir la matriz A de f en la base $\mathscr{B}$.
   (d) Calcular $\det f$ y $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - f)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (e) ¿El endomorfismo f admite valores propios reales ?

Solución ▼ [002613]

Ejercicio 3199

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y A la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Dar los valores de a y de b, para los cuales la descomposición de Dunford de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se supone en lo que sigue $b = 1$ y $a \neq 0$

(a) Determinar los subespacios propios y los subespacios característicos de A.

(b) Encontrar D diagonalizable y N nilpotente tales que D conmuta con N y

$$A = D + N.$$

3. Sea el siguiente sistema diferencial :

$$\mathscr{E}: \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t). \end{cases}$$

Determinar las soluciones de $\mathscr{E}$.

Solución ▼ [002614]

Ejercicio 3200

Preguntas preliminares :

(a) Sean E un espacio vectorial real de dimensión n y u un endomorfismo de E. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio. Sea λ un valor propio de u y $\overrightarrow{x}$ un vector propio asociado a λ. Demostrar que $\overrightarrow{x}$ es vector propio del endomorfismo $P(u)$, para el valor propio $P(\lambda)$.

(b) Enunciar el teorema de Cayley-Hamilton.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los valores propios de A. Dar una base de vectores propios de A y diagonalizar A.
2. Se busca encontrar una matriz B tal que $B^3 = A$.
   (a) Demostrar que si λ es un valor propio de B, entonces λ^3 es un valor propio de A.
   (b) Determinar los valores propios de B y su multiplicidad.
   (c) Escribir el polinomio característico de B.
   (d) Determinar B tal que $B^3 = A$.

Solución ▼ [002615]

Ejercicio 3201 Diagonalización en dimensión 2

---

diagonalizar las matrices siguientes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$, 4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003496]

Ejercicio 3202 Diagonalización en dimensión 3

Diagonalizar las matrices siguientes :

$$1.\ A=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&2&-6\\-2&2&-6\end{pmatrix},\qquad 2.\ A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix},\qquad 3.\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$4.\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&-4\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad 5.\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\4&2&0\end{pmatrix},\qquad 6.\ A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$7.\ A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\qquad 8.\ A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix},\qquad 9.\ A=\begin{pmatrix}7&-12&-2\\3&-4&0\\-2&0&-2\end{pmatrix},$$

$$10.\ A=\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [003497]

Ejercicio 3203 Diagonalización en dimensión 4

Diagonalizar las matrices siguientes :

$$1.\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad 2.\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\qquad 3.\ \begin{pmatrix}0&2&-2&2\\-2&0&2&2\\-2&2&0&2\\2&2&-2&0\end{pmatrix},$$

$$4.\ \begin{pmatrix}-5&2&0&0\\0&-11&5&0\\0&7&-9&0\\0&3&1&2\end{pmatrix},\qquad 5.\ \begin{pmatrix}2&0&3&4\\3&1&2&1\\0&0&3&0\\0&0&4&-1\end{pmatrix},\qquad 6.\ \begin{pmatrix}1&-3&0&3\\-2&-6&0&13\\0&-3&1&3\\-1&-4&0&8\end{pmatrix},$$

$$7.\ \begin{pmatrix}3&-1&1&-7\\9&-3&-7&-1\\0&0&4&-8\\0&0&2&-4\end{pmatrix},\qquad 8.\ \begin{pmatrix}0&0&2&3\\0&0&-2&-3\\2&-2&0&-1\\3&-3&-1&-3\end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [003498]

Ejercicio 3204 Diagonalización

Diagonalizar $M=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\\vdots&\iddots&\iddots&0\\0&\iddots&\iddots&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(K)$.

Solución ▼ [003503]

Ejercicio 3205 Diagonalización

Diagonalizar $M = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Solución ▼ [003504]

Ejercicio 3206 Engees 93

Diagonalizar la matriz $M = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [003505]

Ejercicio 3207 matriz triangular

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Bajo qué condición A es diagonalizable ? [003507]

Ejercicio 3208 $(X^2-1)P''+(2X+1)P'$

Sea $E = K_n[X]$ y $u : E \to E$, $P \mapsto (X^2-1)P''+(2X+1)P'$.

1. Encontrar la matriz de u en la base canónica de $K_n[X]$.
2. Demostrar que u es diagonalizable.

Solución ▼ [003510]

Ejercicio 3209 $\mathrm{tr}(A)M+\mathrm{tr}(M)A$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. ¿El endomorfismo f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ definido por $f(M) = \mathrm{tr}(A)M+\mathrm{tr}(M)A$ es diagonalizable ?

Solución ▼ [003517]

Ejercicio 3210 ***

Sea f que a P elemento de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ asociada $f(P) = (X^2-1)P'-2nXP$. Verificar que f es un endomorfismo de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, luego determinar los valores propios y los vectores propios de f. ¿f es diagonalizable ?

Solución ▼ [005654]

Ejercicio 3211 ****

Sean A un elemento de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ y M el elemento de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ definido por bloques por $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$. Calcular $\det M$. Determinar los elementos propios de M, luego demostrar que M es diagonalizable si y solo si A es diagonalizable.

Solución ▼ [005663]

Ejercicio 3212 **

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que A es diagonalizable.

Solución ▼ [005667]

Ejercicio 3213 ***

Sea A una matriz cuadrada de tamaño 2 tal que A^2 es diagonalizable y $\text{tr}A \neq 0$. Demostrar que A es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

Solución ▼ [005673]

Ejercicio 3214 ***I

Sobre E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se dan tres endomorfismos f, u y v tales que existen dos números reales λ y μ de modo que para $k \in \{1,2,3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Demostrar que f es diagonalizable.

Solución ▼ [005675]

Ejercicio 3215 **

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son n números complejos ($n \geqslant 2$). ¿A es diagonalizable?

Solución ▼ [005682]

---

115 201.03 Polinomio característico, teorema de Cayley-Hamilton

Ejercicio 3216 Fórmulas para una matriz 3×3

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Verificar que $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\text{tr}A)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A)$.
2. Sea λ un valor propio de A y L_1, L_2 dos líneas no proporcionales de $A - \lambda I$ (si existe). Se calcula $L = L_1 \wedge L_2$ (producto vectorial) y $X = {}^tL$. Demostrar que X es un vector propio de A, para el valor propio λ.

[003524]

Ejercicio 3217 Búsqueda de vectores propios para un valor propio simple

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ y $\lambda \in K$ un valor propio de A tal que $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 1$.

1. ¿Cuál es la dimensión del subespacio propio E_λ ?
2. Demostrar que las columnas de ${}^t\text{com}(A - \lambda I)$ generan E_λ.
3. Ejemplo : Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003525]

Ejercicio 3218 Elementos propios de C^tC

Sea $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ y $M = C^tC$.

1. Encontrar el rango de M.
2. Deducir el polinomio característico de M.
3. ¿M es diagonalizable ?

Solución ▼ [003526]

Ejercicio 3219 Ensi Chimie P 94

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = \frac{i}{j}$. ¿A es diagonalizable ?

Solución ▼ [003527]

Ejercicio 3220 Ensi Chimie P 93

Se considera el polinomio definido por : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$, con $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geqslant 0$, para $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

1. Demostrar que existe una raíz única en $\mathbb{R}^{+*}$, para P_n.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que A admite un único valor propio real estrictamente positivo.

Solución ▼ [003528]

Ejercicio 3221 Ensi Physique 93

Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Calcular $\Delta_n = \det(I + (x_i y_j))$.

Solución ▼ [003529]

Ejercicio 3222 Central MP 2000

Se considera la matriz de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq b$.

1. Demostrar que el polinomio característico de A es $\frac{(-1)^n}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
2. Demostrar que, en general, los valores propios de A están en un círculo.

Solución ▼ [003530]

Ejercicio 3223 Central MP 2000

Sea $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ y $A_n=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \vdots & b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{pmatrix}$

1. Calcular $\det A_n$.
2. Calcular χ_A el polinomio característico de A.
3. Se supone $a_1<a_2<\dots<a_n$ y, para todo i, $b_i>0$. Demostrar que A_n es diagonalizable. (Se puede usar $\chi_A(t)/\prod_{i=1}^{n}(a_i-t)$).
4. ¿El resultado sigue siendo cierto si se supone $a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$ y, para todo i, $b_i>0$?

Solución ▼ [003531]

Ejercicio 3224 Polinomios característicos

Sea $A\in\mathscr{M}_n(K)$ invertible y $B=A^{-1}$, $C=A^2$. Expresar los polinomios característicos χ_B y χ_C en función de χ_A.

Solución ▼ [003532]

Ejercicio 3225 Matriz compañera

Sea $P=a_0+a_1X+\dots+a_{n-1}X^{n-1}-X^n\in K_n[X]$. La matriz compañera de P es $M=\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{gen}(0) & a_0 & \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Sea E un K-ev de dimensión n, $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e}_1,\dots,\overrightarrow{e}_n)$ una base de E y φ el endomorfismo de E de matriz M en $\mathscr{B}$.

1. Determinar el polinomio característico de M.
2. Calcular $\varphi^k(\overrightarrow{e}_1)$, para $0\leqslant k\leqslant n$.
3. Deducir que $P(M)=0$.

[003533]

Ejercicio 3226 Matexo

Sean $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que $\operatorname{spec}(A)\cap\operatorname{spec}(B)=\varnothing$ si y solo si $\chi_A(B)$ es invertible.
Aplicación : Sean A,B,P tres matrices cuadradas complejas con $P\neq 0$ tales que $AP=PB$. Demostrar que A y B tienen un valor propio común. [003534]

Ejercicio 3227 Matrices de espectros disjuntos

Sean $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar la equivalencia entre las siguientes propiedades :
(a) : $\forall C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, existe un único $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $AX-XB=C$.

(b) : $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ se tiene $AX = XB \Rightarrow X = 0$.
(c) : $\chi_B(A)$ es invertible.
(d) : A y B no tienen valores propios en común.

Solución ▼ [003535]

Ejercicio 3228 AB y BA tienen el mismo polinomio característico

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. Demostrar que AB y BA tienen los mismos valores propios.
2. Demostrar que si A o B es invertible, entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico.
3. En el caso general, se denota $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M, N, P \in \mathscr{M}_{2n}(K))$. Verificar que $MP = PN$, demostrar que P es invertible, y concluir.

[003536]

Ejercicio 3229 $\det(I + A\overline{A}) \geqslant 0$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio no nulo de $A\overline{A}$, y X un vector propio asociado. Demostrar que $A\overline{X}$ es también vector propio de $A\overline{A}$.
2. Cuando $\lambda \notin \mathbb{R}^+$, demostrar que X y $A\overline{X}$ son linealmente independientes.
3. Deducir que $\det(I + A\overline{A}) \in \mathbb{R}^+$.

[003537]

Ejercicio 3230 Central PC 1999

Sea la aplicación $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM$. Calcular su traza de una forma sencilla.

Solución ▼ [003538]

Ejercicio 3231 Multiplicidad de un valor propio

Sea E un K-ev de dimensión finita, $u \in \mathscr{L}(E)$ y $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Demostrar que la multiplicidad de λ en el polinomio minimal de u es igual al número de factores invariantes de u teniendo λ por raíz. [003539]

Ejercicio 3232 Fermat para la traza, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Sea p primo y $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Demostrar que $\mathrm{tr}(A^p) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod p$.

Solución ▼ [003540]

Ejercicio 3233 ***

Sea A una matriz rectangular de tamaño (p, q) y B una matriz de tamaño (q, p). Comparar los polinomios característicos de AB y BA.

Solución ▼ [005656]

Ejercicio 3234 *** I

Sean u y v dos endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita. Se supone que u y v conmutan y que v es nilpotente. Demostrar que $\det(u + v) = \det u$.

Solución ▼ [005657]

Ejercicio 3235 **

Sea A una matriz antisimétrica real. Estudiar la paridad de su polinomio característico.

Solución ▼ [005666]

Ejercicio 3236 **

Sean A y B dos matrices cuadradas complejas de tamaño n. Demostrar que A y B no tiene valores propios comunes si y solo si la matriz $\chi_A(B)$ es invertible.

Solución ▼ [005678]

Ejercicio 3237 **

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y P un polinomio. Demostrar que $P(f)$ es invertible si y solo si P y χ_f son primos entre sí.

Solución ▼ [005679]

116 201.04 Subespacio estable

Ejercicio 3238

Sea el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociado a la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿El plano P de ecuación $y+z=0$ es estable por f? ¿La recta $\operatorname{vect}\{(1,1,1)\}$ es estable por f? [001675]

Ejercicio 3239

Sea $f : E \to E$ una aplicación tal que $f^3 + f^2 + f = 0$, donde E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $F = \operatorname{Im} f$.

1. (a) Demostrar que F es un subespacio vectorial estable por f.
   (b) Demostrar que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   (c) Deducir que la restricción g de f a F es un automorfismo de F.
2. (a) Demostrar que si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$, entonces $\lambda = 0$.
   (b) Deducir que el rango de f es par. (Razonar por reducción al absurdo y estudiar las raíces reales del polinomio característico de g).

[001676]

Ejercicio 3240

Sean $f \in \mathscr{L}(E)$ y $a \in E$.

1. Demostrar que el subespacio vectorial más pequeño de E conteniendo a y estable por f es $F_a = \operatorname{vect}\{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\}$.
2. Demostrar que si $\dim(E) = n$, entonces $F_a = \operatorname{vect}\{f^k(a) : k = 0, \ldots, n-1\}$.
3. Sea el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Demostrar que no existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $F_a = \mathbb{R}^3$. Generalizar a un endomorfismo diagonalizable.

Ejercicio 3241

Sean $f \in \mathscr{L}(E)$, F un subespacio vectorial de E estable por f y g el endomorfismo de G inducido por f.

1. Demostrar que si $P \in K[X]$ verifica $P(f) = 0$, entonces $P(g) = 0$.
2. Deducir que si f es diagonalizable entonces g es diagonalizable.
3. Aplicación : Encontrar todos los subespacios vectoriales estables por el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociado a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001678]

Ejercicio 3242

1. Demostrar que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ es trigonalizable. ¿A es diagonalizable ? Reducir A y encontrar su polinomio minimal.
2. La misma pregunta para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

[001679]

Ejercicio 3243

¿Cuál es el polinomio característico de un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial $\mathbb{C}$ de dimensión finita ? [001680]

Ejercicio 3244

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios complejos. Expresar $\operatorname{tr}(A^p)$, en función de los λ_j, $j = 1, \dots, n$, donde $p \in \mathbb{N}$. [001681]

Ejercicio 3245

Sean f y g dos endomorfismos de E tales que $fg = gf$.

1. Sea $x \in E$. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = g(x)$, entonces $f^n(x) = g^n(x)$.
   En lo que sigue, se supone g nilpotente.
2. (a) Deducir de 1. que si f es invertible, entonces $f + g$ es invertible.
   (b) Deducir de (a) que si $f + g$ es invertible, entonces f es invertible.
3. (a) Sea $h \in \mathscr{L}(E)$ nilpotente. Demostrar que $\det(h + \mathrm{Id}_E) = 1$.
   (b) Demostrar que $\det(f + g) = \det(f)$. (Se distingue según que f sea invertible o no y se utilizan las preguntas anteriores).

[001682]

Ejercicio 3246

Sean E un K-espacio vectorial, f y g de endomorfismos de E tales que $f \circ g = g \circ f$ y P un polinomio de $K[X]$.

1. Demostrar que $P(g)$ y f conmutan.

2. Demostrar que el núcleo y la imagen del endomorfismo $P(g)$ son estables por f. Dar casos particulares de esta situación.

[001683]

Ejercicio 3247

Sean E un K-espacio vectorial de dimensión finita, f un endomorfismo de E y F un subespacio vectorial de E estable por f. Se designa por g el endomorfismo de F inducido por f sobre F.

1. Demostrar que $\mathrm{Sp}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(f)$.
2. Demostrar que si $P(f) = 0$, entonces $P(g) = 0$. Deducir que el polinomio minimal de g divide el de f.

[001684]

Ejercicio 3248

Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, f un endomorfismo de E. Demostrar que si f admite un subespacio vectorial propio de dimensión $p \geqslant 2$, entonces admite una infinidad de subespacios vectoriales estables para f. [001685]

Ejercicio 3249 Rectas e hiperplanos estables

Sea E un $\mathbb{C}$-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que existe una recta vectorial estable por u.
2. Demostrar que existe un hiperplano estable por u. (Considerar $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$, donde λ es un valor propio de u).
3. Dar un ejemplo en que estas propiedades sean predeterminadas por un $\mathbb{R}$-ev.

[003609]

Ejercicio 3250 Plano estable para valores propios no reales

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda = a + ib$ un valor propio no real de M ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). Se denota X un vector propio complejo de M.

1. Demostrar que $\overline{X}$ es también vector propio de M.
2. Demostrar que $(X, \overline{X})$ es libre en $\mathbb{C}^n$.
3. Sean $U = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. Demostrar que (U, V) es libre en $\mathbb{R}^n$.

[003610]

Ejercicio 3251 Planos estables

Sea E un K-ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Sea F un plano vectorial. Demostrar que si F es estable por f, entonces existe $P \in K_2[x]$ no nulo tal que $F \subset \ker P(f)$.
2. Recíprocamente, si $P \in K_2[x]$ es irreducible, demostrar que $\ker P(f)$ contiene un plano estable por f.
3. Si $K = \mathbb{R}$ demostrar que f siempre admite una recta o plano estable.

Ejercicio 3252 Búsqueda de sev estables

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Determinar los sev de $\mathbb{R}^3$ estables para el endomorfismo asociado a A.
2. ¿Cuáles son las matrices reales que conmutan con A ?

Solución ▼ [003612]

Ejercicio 3253 u diagonalizable $\Rightarrow$ diagonalizable en un sev estable

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalizable. Demostrar que si F es un sev estable por u, entonces $u_{|F}$ es diagonalizable. [003613]

Ejercicio 3254 Plano afín estable

Sea $E = \mathbb{R}^3$ y $H : x+2y+3z = 1$ un plano *afín* de E. Demostrar que si H es estable por $f \in \mathscr{L}(E)$, entonces 1 es valor propio de f.

Solución ▼ [003614]

Ejercicio 3255 Endomorfismo cíclico

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo cíclico y F un subespacio vectorial estable por f. Demostrar que $f_{|F}$ es también cíclico. [003615]

Ejercicio 3256 Endomorfismos semisimples.

Un endomorfismo f se dice semisimple si todo subespacio es estable por f admite un suplementario estable por f. Demostrar que un endomorfismo de un $\mathbb{C}$-ev de dimensión finita es semisimple si y solo si es diagonalizable. [003616]

Ejercicio 3257 χ_u irreducible

Sea u un endomorfismo de E, espacio vectorial de dimensión n en el cuerpo K. Demostrar que solo $\{0\}$ y E son estables por u si y solo si χ_u es irreducible en K.

Solución ▼ [003617]

Ejercicio 3258 Polytechnique MP* 2000

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, f un endomorfismo de E tal que todo subespacio de E admite un suplementario estable para f. ¿Qué se puede decir de f ? ¿Recíproco ?

Solución ▼ [003618]

Ejercicio 3259 Subespacios estables (Central MP 2003)

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ teniendo como matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Determinar los subespacios de $\mathbb{R}^3$ estable por f.

Solución ▼ [003619]

Ejercicio 3260 ***

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es A. Encontrar los subespacios estables por f en cada uno de los casos siguientes :

$$1.\, A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad 2.\, A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix},\qquad 3.\, A=\begin{pmatrix}6&-6&5\\-4&-1&10\\7&-6&4\end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [005683]

Ejercicio 3261 **

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita no nula y F un subespacio no nulo de E estable por f. Se supone que f es diagonalizable. Demostrar que la restricción de f a F es un endomorfismo diagonalizable de F.

Solución ▼ [005686]

117 201.05 Trigonalización

Ejercicio 3262

Trigonalizar las siguientes matrices reales :

1. $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\8&1&-5\\4&3&-3\end{pmatrix}$,
2. $B=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

[001686]

Ejercicio 3263

Expresar las siguientes matrices en forma triangular :

$$\begin{pmatrix}4&2&-2\\1&5&-1\\1&3&1\end{pmatrix};\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&3&-1\\-1&3&3\end{pmatrix}.$$

[001687]

Ejercicio 3264

Sean las siguientes matrices con coeficientes reales

$$A=\begin{pmatrix}-2&-3&2\\1&2&-2\\2&4&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&-1&2&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&0&2\\-3&0&4&0\\0&1&0&3\\-1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

1. Trigonalizar las matrices A, B y C.
2. Determinar el polinomio minimal de A, B y C.

[001688]

Ejercicio 3265

Sea f el endomorfismo del espacio vectorial canónico $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica $\mathscr{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$.
2. Encontrar una base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathrm{mat}(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $g^2 = f$. Demostrar que $\ker f^2$ es estable por g. Deducir que tal endomorfismo g no puede existir.

[001689]

Ejercicio 3266

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ y f el endomorfismo lineal de $\mathbb{R}^3$ teniendo como matriz A en la base canónica ε de $\mathbb{R}^3$.

1. Calcular el polinomio característico de A.
2. Encontrar una base $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Sea $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorfismo tal que $f \circ g = g \circ f$. Demostrar que $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ y $\ker(f - \mathrm{Id})^2$ quedan estables por g. Deducir que la matriz de g en ε' es de la forma $\mathrm{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$, con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Precisar los valores posibles de a, b, c y d.
4. Sea $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$. Calcular su tamaño. (Se puede usar la pregunta 3.).

[001690]

Ejercicio 3267

Las preguntas son independientes. K designa $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, E es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base fija de E y f. un endomorfismo de E.

1. Dar un ejemplo de una matriz de $M_2(K)$ no trigonalizable.
2. Dar un ejemplo de una matriz de $M_n(K)$ a la vez no diagonalizable y trigonalizable.
3. Determinar sin cálculos los valores propios complejos de f si su matriz en $\mathscr{B}$ es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Se supone que $n=3$ y que la matriz de f en la base $\mathscr{B}$ es $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Demostrar que el plano de ecuación $x+2z=0$ es estable por f.
5. ¿Qué se puede decir de un vector generador de una recta estable por f?
6. Demostrar que si el endomorfismo f es trigonalizable, entonces admite al menos un subespacio vectorial estable por f y de dimensión $k \in [0,n]$ fija.

[001691]

Ejercicio 3268 Trigonalización de matrices

Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y φ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ canónicamente asociada a A.

1. Verificar que A no es diagonalizable.
2. Encontrar dos vectores propios de A linealmente independientes.
3. Completar estos vectores en una base de $\mathbb{R}^3$.
4. Escribir la matriz de φ en esta base.
5. Resolver el sistema diferencial : $X' = AX$.

Solución ▼ [003578]

Ejercicio 3269 $AB = 0$

Sean $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AB = 0$. Demostrar que A y B son simultáneamente trigonalizables. [003620]

Ejercicio 3270 Producto de matrices nilpotentes

Sean $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{M}_n(K)$ nilpotentes y conmutando dos a dos. Demostrar que $A_1 \cdots A_n = 0$. [003621]

Ejercicio 3271 Matrices nilpotentes

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que A es nilpotente si y solo si para todo $k \in \mathbb{N}^*$ se tiene $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Solución ▼ [003622]

Ejercicio 3272 Mines MP 2003

Sea E un ev de dimensión finita y (u_n) una sucesión de endomorfismos diagonalizables que convergen a $u \in \mathscr{L}(E)$. ¿Es u diagonalizable ?

Solución ▼ [003623]

Ejercicio 3273 Mines-Ponts MP 2005

Se da una matriz cuadrada real M de orden n. Sean α, β los multiplicidades de cero en χ_M y μ_M. Demostrar que $\dim(\ker M) = \alpha$ si y solo si $\beta = 1$.

Solución ▼ [003624]

Ejercicio 3274 ***

Sean f y g dos endomorfismos de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita no nula que conmutan. Demostrar que f y g son simultáneamente trigonalizables.

Solución ▼ [005677]

118 201.06 Reducción de Jordan

Ejercicio 3275

Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4. Sea :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz de un endomorfismo u de E en la base canónica de E.

1. Calcular el polinomio característico de u. Determinar los subespacios propios E_1 y E_2. ¿Por qué u es no diagonalizable ? ¿Es triangularizable ?
2. Determinar los subespacios característicos F_1 y F_2. Para $k = 1,2$, dar el orden β_k de la aplicación nilpotente $(u - \lambda_k \operatorname{Id}_E)|_{F_k}$, $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2)$.
3. Si $v \in F_2$ y $v \notin \ker(u-2\operatorname{Id}_E)^{\beta_2-1}$, demostrar que $f_1 = (u-2\operatorname{Id}_E)^{\beta_2-1}(v)$, $f_1 = (u-2\operatorname{Id}_E)^{\beta_2-2}(v), \dots,$ $f_{\beta_2} = v$ forman una base de F_2.
4. Se denota $f = \{f_1, \dots, f_4\}$ la completada de la base anterior por una base de F_1. Verificar que $T = [u]_f^f$ es triangular. Descomponer T bajo la forma $D+N$, donde D es diagonal, N es nilpotente, y $DN = ND$. Calcular T^5.

[001692]

Ejercicio 3276

¿Cuál es el polinomio característico de un endomorfismo nilpotente de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita ? [001693]

Ejercicio 3277

Dar todas las reducciones de Jordan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de endomorfismos nilpotentes para $1 \leqslant n \leqslant 4$. [001694]

Ejercicio 3278

Sea ρ la aplicación de $\mathbb{R}_4[X]$ en $\mathbb{R}_4[X]$ que a un polinomio P asocia el resto de la división euclidiana de P por (X^2-1).

1. Demostrar que ρ es lineal.
2. Demostrar que $\rho^2 = \rho$. Deducir que ρ es diagonalizable.
3. Determinar (preferiblemente sin cálculo) una base de vectores propios para ρ.

[001695]

Ejercicio 3279

¿Las matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ tienen una raíz cuadrada ? [001696]

Ejercicio 3280

Reducir en forma de Jordan las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

[001697]

Ejercicio 3281

Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo nilpotente de índice N (el entero más pequeño p tal que $f^p = 0$). Demostrar que

$$N = n \Leftrightarrow \operatorname{rango} f = n - 1.$$

[001698]

Ejercicio 3282

Se considera la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

1. Factorizar el polinomio característico de A.
2. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f se escribe

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).

Solución ▼ [002589]

Ejercicio 3283

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

3. Factorizar el polinomio característico de A.
2. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.
4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).
5. Calcular $\exp B$.

Solución ▼ [002602]

Ejercicio 3284 Descomposición de Dunford

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que existen dos matrices D,N tales que $A = D+N$, D es diagonalizable, N es nilpotente, $DN = ND$. [003581]

Ejercicio 3285 M y ${}^tM$ son semejantes

Demostrar que una matriz compañera es semejante a su transpuesta. Deducir que para toda $M \in \mathscr{M}_n(K)$ las matrices M y ${}^tM$ son semejantes. [003582]

Ejercicio 3286 Reducción de Jordan (Mines MP 2003)

Sea $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{Spec}(f) = \{\lambda\}$ y $\dim(\ker(f - \lambda\operatorname{Id})) = 2$. Demostrar que existe una base $\mathscr{B}$ en la que $\operatorname{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003583]

Ejercicio 3287 *** Descomposición de DUNFORD

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita no nul0 y f un endomorfismo de E cuyo polinomio característico se divide en $\mathbb{K}$. Demostrar que existe un par de endomorfismos (d,n) y solo uno tal que d es diagonalizable, n es nilpotente y $f = d+n$.

Solución ▼ [005670]

---

119 201.07 Aplicaciones

Ejercicio 3288

Sea $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dar un polinomio anulador de A de grado lo más pequeño posible. Deducir A^{-1}, A^3, y A^5. [001703]

Ejercicio 3289

Resolver los siguientes sistemas diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z. \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - y - 2z. \end{cases}$$

[001704]

Ejercicio 3290

Determinar todas las sucesiones (u_n) tales que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ du_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0. \end{cases}$$

Resolver la ecuación diferencial :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0. \end{cases}$$

[001705]

Ejercicio 3291

Resolver el siguiente sistema diferencial :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} = -x(t) - y(t) - z(t). \end{cases}$$

Dar todas las soluciones que satisfacen $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$. [001706]

Ejercicio 3292

Reducir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(es decir, estudiar la diagonalizabilidad o la triangularizabilidad de A, y dar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ *sea lo más simple posible).*

Aplicación : Determinar todas las funciones derivables x, y, z de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ satisfaciendo las condiciones :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y \\ z' = x - 3y + 4z \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

(Se recuerda que no sirve para calcular P^{-1}...) [001707]

Ejercicio 3293

Determinar todas las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con valores complejos tales que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} + 2u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Demostrar que las sucesiones reales que satisfacen esta relación son sucesiones de la forma :

$$u_n = A(-1)^n + B\cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \phi\right),$$

donde A, B y ϕ son reales. [001708]

Ejercicio 3294

Dados cuatro números reales (u_0, v_0, w_0, x_0), se definen cuatro nuevos números (u_1, v_1, w_1, x_1) calculando los promedios siguientes : $u_1 = \frac{2u_0 + v_0 + w_0 + x_0}{5}$, $v_1 = \frac{u_0 + 2v_0 + w_0 + x_0}{5}$, $w_1 = \frac{u_0 + v_0 + 2w_0 + x_0}{5}$, y $x_1 = \frac{u_0 + v_0 + w_0 + 2x_0}{5}$. Iterando este procedimiento, se definen cuatro sucesiones (u_n), (v_n), (w_n), y (x_n) tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n). \end{cases}$$

1. Escribir la matriz A asociada a esta relación de recurrencia, y la matriz $B = 5A$. ¿Qué pasa con la diagonalizabilidad de B ?
2. Sin calcular el polinomio característico de B, demostrar que 1 es valor propio de B. ¿Cuál es la dimensión del espacio propio asociado ? ¿Qué pasa con la multiplicidad de 1 como valor propio de B ?
3. Utilizando la traza de B, determinar todos los valores propios de B.
4. Dar un polinomio anulador de B de grado 2.
5. Deducir la existencia de dos reales a_n y b_n, que se debe calcular, tales que $B^n = a_n B + b_n I$.
6. Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{5^n}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{5^n}$. Deducir que la sucesión de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y dar su límite. *(Recordar que una sucesión de matrices M_n se dice convergente si cada sucesión de coeficientes es convergente. Se puede usar sin demostración la continuidad de las operaciones elementales sobre las matrices para esta noción de límite, es decir que :*
   – si (λ_n) es una sucesión convergente, entonces para toda matriz M, la sucesión $(\lambda_n M)$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n M) = (\lim_{n\to\infty} \lambda_n)M$.
   – si (M_n) es una sucesión de matrices convergentes , entonces para todo vector X, la sucesión de vectores $(M_n X)$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(M_n X) = (\lim_{n\to\infty} M_n)X$.)
7. Deducir que las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, y dar su límite.

[001709]

Ejercicio 3295

Dar todas las sucesiones (x_n), (y_n) y (z_n) tales que : *(se denota* $\omega = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ *)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n + x_n. \end{cases}$$

Entre las soluciones de este sistema, dar la que satisface $x_0 = 2$ y $y_0 = z_0 = 1$.

Solución ▼ [001710]

Ejercicio 3296

Sea a un real. Se considera el sistema en n ecuaciones y n incógnitas siguiente :

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 = 0 \\ -x_{p-1} + ax_p - x_{p+1} = 0 \quad (2 \leqslant p \leqslant n-1) \\ -x_{n-1} + ax_n = 0. \end{cases}$$

Escribir la matriz A_n asociada a este sistema. Se denota $D_n = \det A_n$. Calcular D_n en función de D_{n-1} y D_{n-2}

[001711]

Ejercicio 3297

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, con $(b,c,d) \neq (0,0,0)$.

1. Calcular A^tA. ¿Cuánto vale $\det A$ módulo el signo ?
2. Estudiando el signo del término en a^4 en el determinante de A, demostrar que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Sin cálculo adicional, deducir que el polinomio característico de A es $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
3. ¿A es diagonalizable en $\mathbb{R}$? (Justificar)
4. Se está ahora en el caso en que $a = 1$, $b = c = d = -1$. Verificar que $(i\sqrt{3},1,1,1)$ y $(-1,i\sqrt{3},-1,1)$ son vectores propios de A, luego diagonalizar A sobre $\mathbb{C}$.
5. Aplicación : Resolver el siguiente sistema recurrente (no es necesario calcular la inversa de la matriz de paso de la pregunta anterior). Se denota $\omega = 1/2 + i\sqrt{3}/2 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$.

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n + h_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n - w_n + h_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n - h_n \\ h_{n+1} = -u_n - v_n + w_n + h_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ h_0 = 0. \end{cases}$$

Solución ▼ [001712]

Ejercicio 3298

Resolver el sistema diferencial $X' = AX$, donde A es la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 3299

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Por diferentes métodos, calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la fórmula obtenida tiene un significado para $n \in \mathbb{Z}$ y dar varios métodos para establecer su validez en este caso. [001714]

Ejercicio 3300

Sea el endomorfismo $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar todas las rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$ estables por f.
2. Determinar todos los planos vectoriales P de $\mathbb{R}^3$ estables por f (se comienza estudiando el polinomio característico de la restricción de f a P).
3. Dar la lista de todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ estables por f.

[001715]

Ejercicio 3301

Calcular las potencias y la exponencial ($\mathrm{e}^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) de las matrices siguientes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[001716]

Ejercicio 3302

Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita n. Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalizable. Dar una condición necesaria y suficiente para que exista $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que $g^2 = f$. En el caso de existencia de g, dar el número exacto de g tal que $g^2 = f$.

Aplicación Sea :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que existe $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $N^2 = M$. Determinar N. [001717]

Ejercicio 3303

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que M y ${}^tM$ son semejantes.
Indicación : Demostrar primero para los bloques de Jordan que tienen solo 1's encima de la diagonal. [001718]

Ejercicio 3304

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Dar una condición necesaria y suficiente en M, para que M y $2M$ sean semejantes. [001719]

Ejercicio 3305

Sea $a \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo de un K-espacio vectorial de dimensión n, teniendo n valores propios distintos. Se define

$$\mathscr{C} = \{u \in \mathscr{L}(E) : au = ua\}.$$

1. Sea $u \in \mathscr{C}$.
   (a) Demostrar que todo subespacio vectorial propio de a es estable por u.
   (b) Deducir que u es diagonalizable.
2. (a) Demostrar que $\mathscr{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}(E)$ y que $\dim \mathscr{C} = n$.
   (b) Demostrar que la familia $(\mathrm{Id}_E, a, \ldots, a^{n-1})$ es una familia libre de $\mathscr{L}(E)$ (razonar por reducción al absurdo y usar el polinomio minimal de a.)
   (c) Deducir que $\mathscr{C} = \{P(u) : P \in K[X]\}$.

[001720]

Ejercicio 3306

Sean $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo y $a \in E$ tales que la familia $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ es una base de E.

1. Sea $P \in K[X] \setminus \{0\}$ un polinomio anulador de f. Demostrar que $\mathrm{grad}(P) \geqslant n$ (razonar por contradicción).
2. Deducir que el polinomio minimal de f es (módulo el signo) el polinomio característico de f.

[001721]

Ejercicio 3307

Dar un ejemplo de dos matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ teniendo el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal y sin embargo, no son semejantes. ¿Qué sucede para dos matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? [001722]

Ejercicio 3308

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial

$$\mathscr{S} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geqslant 3, u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\right\}.$$

1. Demostrar que la aplicación

$$f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^3, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$

   es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo canónicamente asociado con A y, para $n \geqslant 2$, $U_n = (u_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^3$. Demostrar que $\sigma(U_{n-1}) = U_n$ y deducir una base de $\mathscr{S}$.

[001723]

Ejercicio 3309

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones de números reales que satisfacen las relaciones de recurrencia :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n. \end{cases}$$

Calcular los valores de x_n, y_n y z_n en función de x_0, y_0 y z_0. [001724]

Ejercicio 3310

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f^2 = f$. ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f_t = \mathrm{Id} + tf$ es invertible ? Calcular f_t^{-1}. [001725]

Ejercicio 3311

Estudiar las soluciones (según A) en $M_2(\mathbb{C})$ de la ecuación $X^2 = A$. [001726]

Ejercicio 3312

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Se denota $C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}); AB = BA\}$.

1. Se supone que A tiene valores propios simples. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :

   i) $B \in C(A)$.

   ii) B tiene una base de vectores propios en común con A.

   iii) Existe $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tal que $B = P(A)$.

   iv) Existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tal que $B = P(A)$.

2. Se supone que $n = 3$ (para simplificar) y que A es diagonalizable con un valor propio doble. Determinar $C(A)$.

[001727]

Ejercicio 3313

Las partes I, II, III y IV pueden ser tratadas independientemente unos de otros.

Sean $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ una matriz que depende de un parámetro real a y f_a el endomorfismo lineal de $\mathbb{R}^3$ teniendo como matriz M_a en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Se nombra *raíz cuadrada* de una matriz $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ toda matriz $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $N^2 = M$.

Se designa por I la matriz identidad y, para toda base ε de $\mathbb{R}^3$, se denota $\mathrm{Mat}(f_a, \varepsilon)$ la matriz que representa el endomorfismo f_a en la base ε.

I

1. Calcular los valores propios de M_a en función de a. ¿Por qué razón la matriz M_a es triangularizable ?

2. ¿Para qué valores del parámetro a la matriz M_a es diagonalizable ?

II

Se supone ahora (preguntas 3 y 4) $a = 2$.

3. Diagonalizar M_2. Determinar una raíz cuadrada A de M_2.
4. (a) Sea $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $g^2 = f_2$. Demostrar que g es diagonalizable (se puede determinar el polinomio minimal de f_2). Demostrar que los subespacios propios de f_2 quedan estables por g.

   (b) Demostrar que la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ tiene infinitas raíces cuadradas. Deducir la existencia de una infinidad de raíces cuadrado de M_2.

III

5. Sea $a = 1$. Demostrar que $M_1 = 2I + N$, con N nilpotente (tal que $N^2 = 0$). Deducir el valor de $(M_1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Determinar dos números reales α y β tales que $\alpha I + \beta N$ sea una raíz cuadrada de M_1.

IV

Se supone ahora (preguntas 6 y 7) $a = 0$.

6. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = \ker(f_0^2) \oplus \ker(f_0 - 2I)$. Determinar una base ε de $\mathbb{R}^3$ tal que se tiene : $\mathrm{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Sea $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorfismo tal que $g^2 = f_0$. Demostrar que $\ker(f_0^2)$ se mantiene estable por g. Deducir que f_0 no tiene raíz cuadrada.

[001728]

Ejercicio 3314

La sucesión de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ es la sucesión $(F_n)_{n \geqslant 0}$ definida por la relación de recurrencia $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para $n \geqslant 1$, con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

1. Determinar una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que, para todo $n \geqslant 1$,
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$
2. Demostrar que A admite dos valores propios reales distintos que denotamos λ_1 y λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. Encontrar los vectores propios ε_1 y ε_2 asociados a los valores propios λ_1 y λ_2, bajo la forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Determinar las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ en la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, se denotan x_1 y x_2.
5. Demostrar que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$. Deducir que
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$
6. Dar un equivalente de F_n, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [002590]

Ejercicio 3315

Sea A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

1. Factorizar el polinomio característico de A.
2. Determinar los subespacios propios y característicos de A.
3. Demostrar que existe una base para $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.
4. Escribir la descomposición de Dunford de B. (Justificar).
5. Para $t \in \mathbb{R}$, calcular $\exp(tB)$.
6. Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $Y' = BY$ y $X' = AX$.

Solución ▼ [002597]

Ejercicio 3316

1. Se denota $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Dar sin cálculo los valores propios de A y una base de vectores propios.
2. Se busca determinar, si existe, las matrices B tales que $\exp B = A$.
   (a) Demostrar que si $A = \exp B$, entonces $AB = BA$.
   (b) Deducir que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es una base de vectores propios de B.
   (c) Determinar todas las matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ tales que $\exp B = A$. Justificar.
3. Sea la matriz C,
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que no existe matriz $D \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C = \exp D$.
4. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de C.
5. Se supone que existe una matriz $E \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $E^2 = C$. Denotar $Q_E(X)$ su polinomio minimal y $Q_C(X)$ el polinomio minimal de C.
   (a) Demostrar que $Q_E(X)$ divide $Q_C(X^2)$.

(b) Deducir que $E^3 = 0$ y que $C^2 = 0$.

(c) Deducir de lo anterior que no existe matriz E tal que $E^2 = C$.

6. Sean F y G de matrices de $M_3(\mathbb{R})$ tales que $F = \exp G$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe una matriz H tal que $H^n = F$.

Solución ▼ [002598]

Ejercicio 3317 Ensi PC 1999

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calcular A^n.
2. Sea $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y (U_n) definido por la relación : $U_{n+1} = AU_n$. Calcular U_n en función de n.
3. Sea $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Resolver $\frac{dX}{dt} = AX$.

Solución ▼ [003585]

Ejercicio 3318 Potencias de A

Sea $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ teniendo para valores propios $1, -2, 2$, y $n \in \mathbb{N}$.

1. Demostrar que A^n se puede escribir en la forma : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$, con $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
2. Se considera el polinomio $P = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Demostrar que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.
3. Deducir los coeficientes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Solución ▼ [003586]

Ejercicio 3319 Sucesiones recurrentes lineales

Sea (u_n) una sucesión real que satisface la ecuación de recurrencia : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

1. Sea $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Demostrar que existe una matriz $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonalizar A. Deducir u_n en función de u_0, u_1, u_2 y n.

Solución ▼ [003587]

Ejercicio 3320 Central P' 1996

Sea f, endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n.

1. Se supone que para todo sub-ev D de dimensión 1 existe $x \in D$ tal que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. ¿Qué se puede decir de E y f?
2. Se supone que existe $x \in E$ tal que $E = \mathrm{vect}(x, f(x), f^2(x), \dots)$. Demostrar que si f es diagonalizable entonces sus valores propios son todos distintos. Demostrar que si f es nilpotente, entonces $f^{n-1} \neq 0$.

Solución ▼ [003588]

Ejercicio 3321 Chimie P' 1996

Sea (M_n) una sucesión de puntos en el plano, de coordenadas (x_n, y_n) definidas por la relación de recurrencia :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 4y_n. \end{cases}$$

1. Demostrar que, cualquiera que sea M_0, los puntos M_n están alineados.
2. Estudiar la sucesión (M_n), cuando n tiende a infinito.
3. ¿Cuál es el límite de y_n/x_n (utilizar un método geométrico) ?

Solución ▼ [003589]

Ejercicio 3322 Conmutante de una matriz con valores propios distintos

1. Sea $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una matriz diagonal con valores propios distintos.
   (a) Demostrar que una matriz M conmuta con D si y solo si M es diagonal.
   (b) Demostrar que para toda matriz M diagonal, existe un polinomio $P \in K_{n-1}[X]$ única tal que $M = P(D)$.
2. Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ una matriz con valores propios distintos. Demostrar que las matrices M que conmutan con A son los polinomios en A.

[003590]

Ejercicio 3323 $XY = YX = A$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. ¿A es diagonalizable ?
2. Encontrar todas las matrices $X, Y \in \mathscr{M}_2(K)$ tales que $XY = YX = A$.

Solución ▼ [003591]

Ejercicio 3324 Racine cuadrado

Sea $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar las matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tales que $M^2 = A$.

Solución ▼ [003592]

Ejercicio 3325 Ensi Physique 93

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}$. Encontrar una matriz B diferente de A y $-A$ tal que $B^2 = A$.

Solución ▼ [003593]

Ejercicio 3326 Esigelec 91

Encontrar el conmutante de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003594]

Ejercicio 3327 Central MP 2000

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, se denota $C(A)$ el conmutante de A.

1. Para $n = 2$, demostrar que $C(A)$ es de dimensión 2 o 4, dar una base.
2. Para $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar que $C(A)$ es de dimensión $\geqslant n$ (tratar primero el caso en que A es diagonalizable).

Solución ▼ [003595]

Ejercicio 3328 Ulm MP* 2001

Moviéndose solo en los bordes de un cubo lateral 1, ¿cuántos caminos existen de longitud n, para ir de un punto a otro ?

Solución ▼ [003596]

Ejercicio 3329 **

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Para n entero relativo dado, calcular A^n por tres métodos diferentes.

Solución ▼ [005651]

Ejercicio 3330 **

Resolver en $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la ecuación $X^2 = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005652]

Ejercicio 3331 **

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Verificar que A no es diagonalizable.
2. Determinar $\ker(A-I)^2$.
3. Demostrar que A es semejante a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4. Calcular A^n, para n entero natural dado.

Solución ▼ [005653]

Ejercicio 3332 ***

Sean a y b dos reales tales que $|a| \neq |b|$. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que las imágenes en el plano complejo de los valores propios de A son cocíclicos.

(Indicación : Para calcular χ_A, considerar $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \cdots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \cdots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.)

Solución ▼ [005664]

Ejercicio 3333 ***I Matrices estocásticas

Sea $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in [0,1]$ y $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Demostrar que 1 es valor propio de A.
2. Sea λ un valor propio de A.
   (a) Demostrar que $|\lambda| \leqslant 1$.
   (b) Demostrar que existe un real ω de $[0,1]$ tal que $|\lambda - \omega| \leqslant 1 - \omega$. ¿Consecuencia geométrica?

Solución ▼ [005665]

Ejercicio 3334 ***I Determinante circulante

1. Sea $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (de tamaño $n \geqslant 3$). Diagonalizar J_n.
2. Deducir el valor de $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005668]

Ejercicio 3335 ***I Matrices de permutación

Para $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, se define la matriz P_σ por $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calcular $\det(P_\sigma)$, para todo $\sigma \in S_n$.
2. (a) Demostrar que $\forall (\sigma,\sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.
   (b) Sea $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Demostrar que $(G,\times)$ es un grupo isomorfo a S_n.
3. Sea $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calcular AP_σ.

4. Encontrar los valores propios de una matriz de permutación (se puede usar el resultado fuera del programa : toda permutación se descompone unívocamente hasta el orden de los factores en el producto de ciclos con soportes disjuntos).

Solución ▼ [005669]

Ejercicio 3336 **

Encontrar una matriz cuadrada A verificando $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$.

Solución ▼ [005671]

Ejercicio 3337 **I

Calcular $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

Solución ▼ [005672]

Ejercicio 3338 **I

Resolver en $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ la ecuación $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005676]

Ejercicio 3339 ** (ESTP1994)

Sea $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Se pueden encontrar dos matrices distintas semejantes entre las cuatro matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ y $M_{1,1}$?

Solución ▼ [005680]

Ejercicio 3340 ***

Resolver en $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ la ecuación $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005684]

Ejercicio 3341

Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005685]

120 201.08 Polinomio anulador

Ejercicio 3342

Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el polinomio minimal de A. Deducir A^{-1}, A^3 y A^5. [001574]

Ejercicio 3343

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ tal que $P(0) = 0$ y $P'(0) \neq 0$. Sea E un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $P(f) = 0$. Demostrar que $\ker(f) = \ker(f^2)$. Deducir $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$. [001575]

Ejercicio 3344

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\operatorname{rg}(f - \operatorname{Id}) = 1$. Se denota $H = \ker(f - \operatorname{Id})$.

1. Sea $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base de H y $e_n \notin H$. Demostrar que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de E y dar la forma de la matriz de f en esta base.
2. Demostrar que el polinomio $(X-1)(X-\det(f))$ anula f. Dar una condición necesaria y suficiente para que f sea diagonalizable.

[001576]

Ejercicio 3345

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, y u un endomorfismo de E nilpotente, es decir tal que $\exists m \in \mathbb{N}, u^m = 0$. Demostrar que $u^n = 0$ [001577]

Ejercicio 3346

Determinar todas las matrices A de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tales que

$$A^2 - 3A + 2\operatorname{Id} = 0$$

La misma pregunta para

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18\operatorname{Id} = 0$$

[001578]

Ejercicio 3347

Enunciar el teorema de Cayley-Hamilton. Demostrar el teorema en el caso particular donde el polinomio característico se divide con raíces simples.

Solución ▼ [001579]

Ejercicio 3348

1. Reducir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Dar un polinomio anulador de A de grado 2.
3. Deducir que existen coeficientes a_n y b_n tales que $A^n = a_nA + b_n$ y calcularlos en función de n.

[001580]

Ejercicio 3349

Sea $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de traza no nula. Demostrar que toda matriz $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ que conmuta con A^2 conmuta también con A. (*Indicación :* Utilizar Cayley-Hamilton.) [001581]

Ejercicio 3350

¿Qué se puede decir de un endomorfismo de un K-espacio vectorial de dimensión finita anulado por los polinomios $P = 1 - X^3$ y $Q = X^2 - 2X + 1$? [001582]

Ejercicio 3351

Sean E un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Se supone que el polinomio minimal de f es $P = (X-2)(X-1)^2$. ¿Cuál es el polinomio minimal de $f + \mathrm{Id}_E$? [001583]

Ejercicio 3352

Sea $M \in \mathscr{M}_n(K)$ una matriz diagonal. Si $P \in K[X]$, calcular $P(M)$ y deducir el polinomio minimal de M. [001584]

Ejercicio 3353

Aplicando el método usado en el curso para demostrar la existencia de un polinomio anulador de un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita, determinar el polinomio minimal de la matriz $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. [001585]

Ejercicio 3354

¿Cuál es el polinomio minimal de un endomorfismo de una recta vectorial ? [001586]

Ejercicio 3355

Sean E un espacio vectorial de dimensión $n \geqslant 2$ y f un endomorfismo de E de rango 1. Demostrar que el polinomio minimal de f es de la forma $X(X - \lambda)$. [001587]

Ejercicio 3356

Determinar los endomorfismos de un K-espacio vectorial E de dimensión finita n cuyo polinomio minimal es de grado 1. [001588]

Ejercicio 3357

1. Demostrar que $P = (X-1)^2(X-2)$ es un polinomio anulador de la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ y deducir el polinomio minimal de la matriz A.
2. Sea $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Calcular explícitamente $B^2 - \mathrm{tr}(B)B + \det(B)I_2$. Deducir el polinomio minimal de la matriz $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

[001589]

Ejercicio 3358

Sean E un K-espacio vectorial de dimensión finita, $f \in \mathscr{L}(E)$ y P su polinomio minimal. Demostrar que f es biyectiva si y solo si $P(0) \neq 0$. [001590]

Ejercicio 3359

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E de dimensión 3. Demostrar que f admite un plano estable (se discute en función del carácter trigonalizable de f). [001591]

Ejercicio 3360

Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial E de dimensión finita tal que $f^4 = f^2 + f$.

1. Demostrar que $\ker(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. (a) Demostrar que $\operatorname{Im} f \subseteq \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.
   (b) Deducir que $\operatorname{Im} f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

[001592]

Ejercicio 3361

Determinar el polinomio minimal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. [001593]

Ejercicio 3362

Sean $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y la siguiente matriz de bloques con coeficientes reales

$$M = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calcular M^2 y M^3 y deducir que M es diagonalizable.
2. Determinar el polinomio característico y el polinomio minimal de M.

[001594]

Ejercicio 3363

Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcular su polinomio característico, calcular A^2 y deducir de estos cálculos y del teorema de Cayley-Hamilton la inversa de A. [001595]

Ejercicio 3364

Se sitúa en $E=\mathbb{C}^4$ dotado con su base canónica $b=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Se designa por j el endomorfismo de E cuya matriz en b es la matriz siguiente

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Determinar la imagen de b por j, j^2, j^3, y j^4.
2. Deducir J^2, J^3 y J^4.
3. Determinar un polinomio anulador no nulo de J.
4. Demostrar que si $P\in\mathbb{C}[X]$, con $\deg(P)\leqslant 3$ verifica $P(J)=0$, entonces $P=0$.
5. Deducir el polinomio minimal de J.
6. Demostrar que J es diagonalizable.
7. Determinar los valores propios de J.

[001596]

Ejercicio 3365

Sea A la matriz siguiente

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Calcular A^2 y comprobar que $A^2=A+2I_3$. Deducir que A es invertible y dar su inversa en función de A.

Solución ▼ [002569]

Ejercicio 3366

Sea N una matriz nilpotente, existe $q\in\mathbb{N}$ tal que $N^q=0$. Demostrar que la matriz $I-N$ es invertible y expresar su inversa en función de N.

Solución ▼ [002588]

Ejercicio 3367 Estudio de una matriz

Sea $A=\begin{pmatrix}a_1&1&&(0)\\a_2&0&\ddots&\\\vdots&&\ddots&1\\a_n&(0)&&0\end{pmatrix}$, donde los a_i son reales positivos o nulos, con $a_1a_n>0$

1. ¿Cuál es el polinomio característico de A ?
2. Demostrar que A admite un valor propio único $r>0$ y que se tiene $r<1+\max(a_1,\dots,a_n)$.
3. Sea λ un valor propio complejo de A. Demostrar que $|\lambda|\leqslant r$ y $|\lambda|=r\Rightarrow\lambda=r$.
4. Demostrar que existe un entero k tal que A^k tiene todos sus coeficientes estrictamente positivos.

Solución ▼ [003518]

Ejercicio 3368 Matriz bitriangular

Dar una CNS en $a,b\in\mathbb{C}$, para que la matriz $M=\begin{pmatrix} 0 & & (a) \\ & \ddots & \\ (b) & & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

Solución ▼ [003541]

Ejercicio 3369 $A^2=A$ y $\mathrm{tr}(A)=0$

Encontrar las matrices $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $A^2=A$ y $\mathrm{tr}(A)=0$. [003542]

Ejercicio 3370 Matexo

Sean E una ev de dimensión finita en $\mathbb{C}$ y u un endomorfismo de E. Se supone que $u^3=u^2, u\neq \mathrm{Id}, u^2\neq 0, u^2\neq u$.

1. Demostrar que un valor propio de u solo puede ser 0 o 1.
2. Demostrar que 1 y 0 son de hecho valores propios de u.
3. Demostrar que u *no es* diagonalizable.
4. Demostrar que $E=\mathrm{Im}(u^2)\oplus\mathrm{Ker}(u^2)$.
5. Demostrar que $u|_F$, con $F=\mathrm{Im}(u^2)$ es la identidad.

[003543]

Ejercicio 3371 INT gestion 94

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calcular $\det A$.
2. Calcular $(A-xI)({}^tA-xI)$ y deducir $\chi_A(x)$.
3. Demostrar que A es $\mathbb{C}$-diagonalizable.

Solución ▼ [003544]

Ejercicio 3372 $X^nP(1/X)$

Sea $E=K_n[X]$ y $u:E\to E, P\mapsto X^nP(1/X)$.

1. Determinar $u\circ u$. Deducir que u es diagonalizable.
2. Dar una base de vectores propios de u.

[003545]

Ejercicio 3373 TPE 93

Sea $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A=A^{-1}$. ¿A es diagonalizable ? Calcular e^A. ($\mathrm{e}^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$)

Solución ▼ [003546]

Ejercicio 3374 Ensi Physique 93

Sea E un ev de dimensión finita y $u\in\mathscr{L}(E)$ tal que $\mathrm{rg}(u)=1$. Demostrar que :

$$\mathrm{Im}\,u\subset\ker u\Leftrightarrow u \text{ no es diagonalizable.}$$

Solución ▼ [003547]

Ejercicio 3375 u^2 diagonalizable

Sea E un $\mathbb{C}$-ev de dimensión finita y $u \in \mathrm{GL}(E)$ tal que u^2 es diagonalizable. Demostrar que u es diagonalizable. [003548]

Ejercicio 3376 Ensi PC 1999

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ invertible diagonalizable y $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$ tales que $B^p = A$.

1. Demostrar que B es diagonalizable.
2. ¿Si A no es invertible se mantiene la conclusión ?

Solución ▼ [003549]

Ejercicio 3377 Ensi P 90

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y $p \in \mathscr{L}(E)$ tal que p^2 es un proyector. ¿Cuáles son los posibles valores propios de p ? Demostrar que p es diagonalizable si y solo si $p^3 = p$.

Solución ▼ [003550]

Ejercicio 3378 $A^3 = A + I$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = A + I$. Demostrar que $\det(A) > 0$.

Solución ▼ [003551]

Ejercicio 3379 Mines-Ponts PC 1999

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 + A^2 + A = 0$. Demostrar que $\mathrm{rg}\, A$ es par. [003552]

Ejercicio 3380 Esem 91

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^n = I$ y $(I, A, \dots, A^{n-1})$ es libre. Demostrar que entonces se tiene $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Solución ▼ [003553]

Ejercicio 3381 $A^p = I$ y $\mathrm{spec}(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow A^2 = I$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Se supone que los valores propios de A son reales y que existe $p \geqslant 1$ tal que $A^p = I$. Demostrar que $A^2 = I$.

Solución ▼ [003554]

Ejercicio 3382 $P(u) = \sum P(\lambda_i) u_i$

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Se supone u diagonalizable y se denotan $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sus valores propios distintos.
   (a) Demostrar que existen endomorfismos $u_1, \dots, u_p$ tales que para todo polinomio $P \in K[X]$, se tiene :
   $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$.
   (b) Demostrar que existe un polinomio P_i tal que $u_i = P_i(u)$.

2. Recíprocamente, sea $u, u_1, \ldots, u_p \in \mathscr{L}(E)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tales que para todo $P \in K[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) u_i$. Demostrar que u es diagonalizable y $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

[003555]

Ejercicio 3383 Mines PSI 1998

Sea f un endomorfismo diagonalizable de un ev E de dimensión finita, λ un valor propio de f y p_λ el proyector en el subespacio propio asociado paralelamente a la suma de los otros subespacios propios. Demostrar que p_λ es un polinomio en f.

Solución ▼ [003556]

Ejercicio 3384 Endomorfismos anticommutantes (Central MP 2003)

Sea E un $\mathbb{C}$-ev de dimensión $n \in \mathbb{N}^*$ y $u_1, \ldots, u_p$ ($p \geqslant 2$) de endomorfismos de E verificando :

$$\forall k,\ u_k^2 = -\mathrm{Id}_E, \quad \forall k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Demostrar que los u_k son automorfismos y que son diagonalizables.
2. Demostrar que n es par.
3. Dar el espectro de cada u_k.
4. Dar los órdenes de multiplicidad de los valores propios de los u_k.
5. Calcular $\det(u_k)$.

Solución ▼ [003557]

Ejercicio 3385 Ensi PC 1999

Sea E un ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $u \circ u = 0$.

1. ¿Cuál es la relación entre $\ker u$ y $\operatorname{Im} u$? Demostrar que $2 \operatorname{rg} u \leqslant \dim E$.
2. Se supone aquí $\dim E = 4$ y $\operatorname{rg} u = 2$. Demostrar que existe una base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ de E tal que $u(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$, $u(\vec{e_2}) = \vec{0}$, $u(\vec{e_3}) = \vec{e_4}$, $u(\vec{e_4}) = \vec{0}$.
3. Se supone $\dim E = n$ y $\operatorname{Im} u = \ker u$. ¿$u$ es diagonalizable ?

[003558]

Ejercicio 3386 Reducción de M tal que $M^3 = I$

Sea $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $M \neq I$, y $M^3 = I$.

1. ¿Cuáles son los valores propios complejos de M ? (Se verifica que estos son efectivamente valores propios de M)
2. Demostrar que M es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

[003559]

Ejercicio 3387 Central PSI 1998

Sean u, v, h tres endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ tales que :

$$u \circ v = v \circ u, \quad u \circ h - h \circ u = -2u, \quad v \circ h - h \circ v = -2v.$$

1. Caso particular, $n=3$, $\operatorname{Mat}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Determinar si v y h existen y si es sí, darlos.

2. Caso general.

   (a) ¿Qué se puede decir de $\operatorname{tr}(u)$ y $\operatorname{tr}(v)$?

   (b) Demostrar que u y v no son invertibles. Demostrar que $\ker u$ y $\ker v$ son estables por h.

   (c) Determinar $u^k \circ h - h \circ u^k$, para $k \in \mathbb{N}$. Determinar $P(u)\circ h - h\circ P(u)$, para $P \in \mathbb{R}[X]$.

   (d) ¿Cuál es el polinomio minimal de u ?

Solución ▼ [003560]

Ejercicio 3388 Independencia del polinomio minimal con respecto al campo

Sean $K \subset L$ dos cuerpos y $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Se denota $\mu_K(A)$ y $\mu_L(A)$ los polinomios mínimos de A en tanto que matriz de coeficientes en K o en L. Demostrar que estos polinomios son iguales. [003561]

Ejercicio 3389 Polinomio minimal y característico

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Demostrar que χ_A y μ_A tienen los mismos factores irreducibles. [003562]

Ejercicio 3390 X MP* 2004

Caracterizar los polinomios P tales que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(P(A)=0) \Rightarrow (\operatorname{tr}(A)\in\mathbb{Z})$.

Solución ▼ [003563]

Ejercicio 3391 TPE MP 2005

Sean $A,B,C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $AC=CB$ y $\operatorname{rg}(C)=r$. Demostrar que A y B tienen al menos r valores propios comunes.

Solución ▼ [003564]

Ejercicio 3392 Polinomio minimal impuesto, Central MP 2005

¿Puede el polinomio $X^4+X^3+2X^2+X+1$ ser el polinomio minimal de una matriz de $M_5(\mathbb{R})$?

Solución ▼ [003565]

Ejercicio 3393 $\ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$, Polytechnique MP* 2006

Sea E un K-ev de dimensión n. Sea $u \in \mathscr{L}(E)$, P su polinomio minimal y p el menor exponente de X en la escritura de P.

1. Si $p=0$, ¿qué se puede decir de u ?
2. Si $p=1$, demostrar que $E=\operatorname{Im} u \oplus \ker u$.
3. En el caso general, demostrar que $E=\ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

Solución ▼ [003566]

Ejercicio 3394 ****

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Demostrar que A es nilpotente si y solo si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{tr}(A^k)=0$.

Solución ▼ [005658]

Ejercicio 3395 *** I

Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita verifican $fg - gf = f$. Demostrar que f es nilpotente.

Solución ▼ [005659]

121 201.99 Otro

Ejercicio 3396

Sea $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ de matriz en la base canónica :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar el polinomio característico P_u de u. Encontrar los valores propios y los subespacios característicos F_i.
2. Dar una base según la cual la matriz de u se descompone en dos bloques diagonales.
3. Dar las proyecciones p_i de $\mathbb{R}^4$ sobre F_i.

[001699]

Ejercicio 3397

Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = -A$ y $A \neq 0$. Demostrar que A es semejante a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. [001700]

Ejercicio 3398

Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y f el endomorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2n}$ cuya matriz en la base canónica es la matriz de bloques $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Determinar el polinomio característico de M.
2. (a) Determinar el núcleo de f.
   (b) Demostrar que f es diagonalizable.

[001701]

Ejercicio 3399

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n, y u un endomorfismo de E. Sea $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Se denota $x_k = u^k(x_0)$ y F el subespacio vectorial generado por la familia $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, es decir el conjunto de combinaciones lineales finitas de vectores de $x_k, k \in \mathbb{N}$:

$$F = \left\{ x \in E \ / \ \exists N \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0 \dots \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1},\ x = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x_i \right\}$$

1. Demostrar que F es estable por u, es decir que $\forall x \in F, u(x) \in F$.
2. Demostrar que existe un entero $k \leqslant n$ tal que $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ es libre y $(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1})$ ya es l.d. Demostrar que existen escalares $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ tales que
$$x_{k+1} = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k.$$
3. Inferir que el polinomio $P_0 = X^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ satisface $\big(P_0(u)\big)(x_0) = 0$.
4. Demostrar que para todo x de F, existe un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $x = \big(P(u)\big)(x_0)$.
5. Usando las preguntas (3) y (4), demostrar que $\forall x \in F, \exists R \in \mathbb{R}_k[X], x = \big(R(u)\big)(x_0)$. *(Se puede realizar la división euclidiana de P por P_0)*
6. Inferir que $(x_0 \ldots x_k)$ es una base de F.
7. Escribir la matriz de la restricción $u_{|_F}$ de u a F en esta base. ¿Cuál es el polinomio característico de $\tilde{u}$?
8. Demostrar que existe una base $\mathscr{B}$ de E en la que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$
donde las matrices C_i son matrices compañeras.

Solución ▼ [001702]

Ejercicio 3400 $f \mapsto f(2x)$

Sea $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tal que $f(x) \to 0$, cuando $x \to \pm\infty\}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ y $u : E \to E, f \mapsto f \circ \varphi$. Demostrar que u no tiene valores propios. (Si $u(f) = \lambda f$, estudiar los límites de f en 0 o $\pm\infty$). [003519]

Ejercicio 3401 Ensi Physique P 94

Sea E el subespacio vectorial de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ funciones que tienen un límite finito en $+\infty$. Sea $T \in \mathscr{L}(E)$ definido por $T(f)(x) = f(x+1)$. Encontrar los valores propios de T.

Solución ▼ [003520]

Ejercicio 3402 Ecuación integral

Sea $E = \mathscr{C}([0, +\infty[\to \mathbb{R})$ y $u : E \to E, f \mapsto \tilde{f}$, con $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$.

1. Demostrar que $\tilde{f}$ puede extenderse a una función continua en $[0, +\infty[$.
2. Encontrar los valores propios y los vectores propios de u.

Solución ▼ [003521]

Ejercicio 3403 Endomorfismo en las sucesiones

Sea E el espacio vectorial de sucesiones reales $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ y f el endomorfismo de E definido por :
$$(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}.$$

¿Cuáles son los valores propios de f ?

Solución ▼ [003522]

Ejercicio 3404 Operador integral

Sea $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ y $f : E \to E, u\tilde{u}$, con $\tilde{u}(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)u(t)\,dt$. Determinar valores propios y los vectores propios de f.

Solución ▼ [003523]

Ejercicio 3405 Suma de proyectores

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que u es diagonalizable si y solo si existen proyectores $p_1,\dots,p_k \in \mathscr{L}(E)$ y los escalares $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ tales que : $\begin{cases} u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k \\ \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0. \end{cases}$ [003579]

Ejercicio 3406 A^3 es semejante a A^4

¿Cuáles son las matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ tales que A^3 es semejante a A^4 ? Se estudia por separado los casos :

1. A tiene 3 valores propios distintos.
2. A tiene 2 valores propios distintos
3. A tiene un solo valor propio.

Solución ▼ [003580]

Ejercicio 3407 A y $2A$ son semejantes

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Demostrar que A y $2A$ son semejantes.

Solución ▼ [003584]

Ejercicio 3408 Matriz bloque

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$ y $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2N}(K)$.

1. Comparar los valores propios de A y M.
2. Sea $P \in K[X]$ y $Q = XP'$. Demostrar que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ Q(A) & P(A) \end{pmatrix}$.
3. ¿En qué condición sobre A, M es diagonalizable ?

Solución ▼ [003597]

Ejercicio 3409 Ensi P 90

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalizable. Sea $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$. ¿La matriz A es diagonalizable ?

Solución ▼ [003598]

Ejercicio 3410 Matriz bloque

Sea $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Demostrar que M es diagonalizable si y solo si A es. (Encontrar los subespacios propios de M en función de los de A)

Solución ▼ [003599]

Ejercicio 3411 Matriz bloque

Sea $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(K)$ diagonalizable con A cuadrada de orden p. Sea λ un valor propio de M de multiplicidad m. Demostrar que si $p > n-m$, entonces λ es valor propio de A. [003600]

Ejercicio 3412 Reducción por bloques (Central MP 2003)

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Determinar $\mathrm{Spec}(B)$ en función del $\mathrm{Spec}(A)$.

Solución ▼ [003601]

Ejercicio 3413 $A^m \to 0$, cuando $m \to \infty$ (Mines MP 2003)

Sea $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Representar en un plano el conjunto de los pares (a,b) tales que $A^m \to 0$, cuando $m \to \infty$.

Solución ▼ [003602]

Ejercicio 3414 Chimie P 1996

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y f un endomorfismo de E.¿Es verdadero que f es diagonalizable $\Leftrightarrow \ker f + \mathrm{Im}\, f = E$? [003603]

Ejercicio 3415 u diagonalizable $\Rightarrow \ker(u-\lambda\,\mathrm{Id}) + Im(u-\lambda\,\mathrm{Id})$ es directa

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalizable. Para $\lambda \in \mathrm{spec}(u)$, se denota $E_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id})$ y $F_\lambda = \mathrm{Im}(u-\lambda\,\mathrm{Id})$. Demostrar que $E_\lambda \oplus F_\lambda = E$. [003604]

Ejercicio 3416 $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$

Sea E un K-ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Se supone que existe $P \in K[X]$ tal que $P(f) = 0$ y $P'(0) \neq 0$. Demostrar que $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

Solución ▼ [003605]

Ejercicio 3417 $\mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$

Sea E un $\mathbb{C}$-ev de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que f es diagonalizable si y solo si para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $rg(f-\lambda\,\mathrm{Id}) = rg(f-\lambda\,\mathrm{Id})^2$. [003606]

Ejercicio 3418 Número de núcleos e imágenes

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que los conjuntos $\mathscr{K} = \{\ker(P(u)),\ P \in K[X]\}$ y $\mathscr{I} = \{\mathrm{Im}(P(u)),\ P \in K[X]\}$ son finitos y tienen igual cardinal.

Solución ▼ [003607]

Ejercicio 3419 $\dim(\ker f^2) = 2\dim(\ker f)$, Mines-Ponts MP 2005

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\dim(\ker f^2) = 2\dim(\ker f) = 2d$. Demostrar que si existe $g \in \mathscr{L}(E)$ y $k \in \mathbb{N}^*$ tales que $g^k = f$, entonces k divide d.

Solución ▼ [003608]

Ejercicio 3420 ***

Sea $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$matrices cuadradas de tamaño 2 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y de determinante 1$\}$.

1. Demostrar que $(E, \times)$ es un grupo
2. Sea A un elemento de E tal que $\exists\, p \in \mathbb{N}^* /\ A^p = I_2$. Demostrar que $A^{12} = I_2$.

Solución ▼ [005661]

Ejercicio 3421 ****

Demostrar que toda matriz de traza nula es semejante a una matriz de diagonal cero.

Solución ▼ [005662]

Ejercicio 3422 ****

Encontrar A en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que la comatriz de A sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [005681]

Ejercicio 3423 **I

Sea A una matriz cuadrada real de tamaño $n \geqslant 2$ verificando $A^3 + A^2 + A = 0$. Demostrar que el rango de A es un entero par.

Solución ▼ [005687]

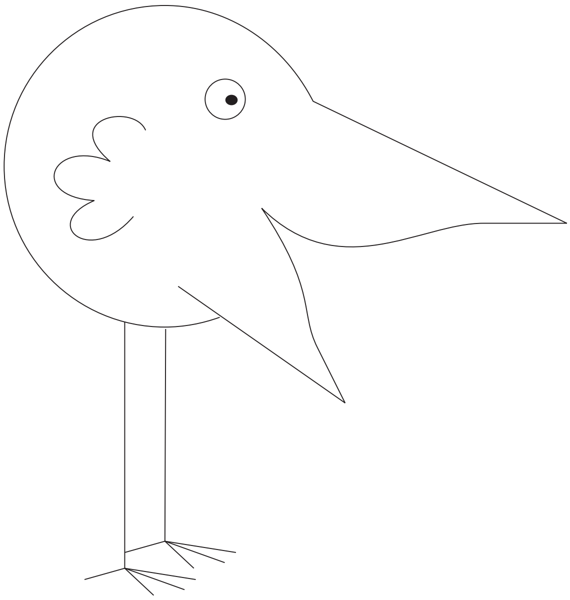
122 202.01 Endomorfismo del plano

Ejercicio 3424

Dibujar el aspecto de Shadock a continuación luego de haber sufrido la acción del endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

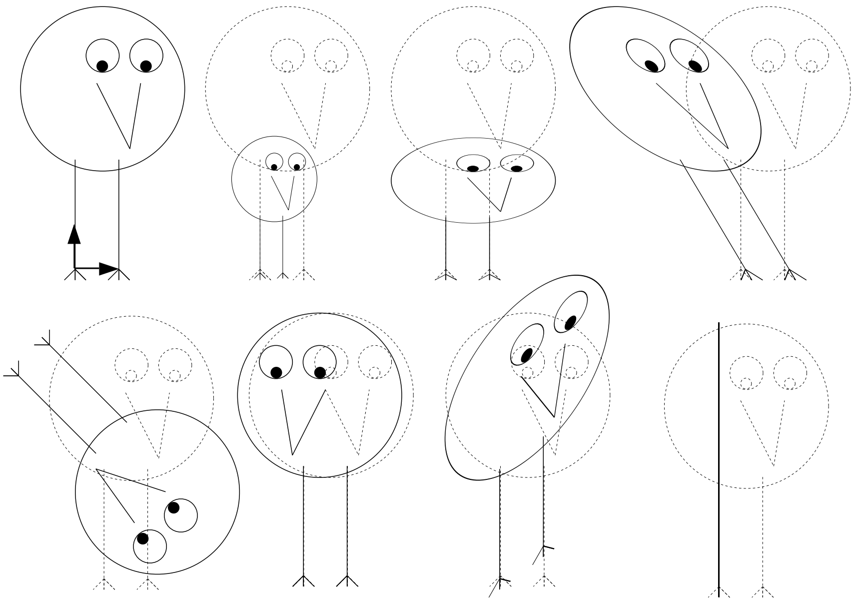
Escribir la matriz de la última transformación en la base $((2,1),(-1,1))$.



[001517]

Ejercicio 3425

Encontrar la matriz (en la base indicada en el primer dibujo) de la transformación sufrida por cada uno de los Shadocks [2] abajo.



[001518]

---

2. La serie francesa relata las diferentes historias y desventuras de los Shadocks, criaturas antropomórficas con aspecto de pájaros regordetes, largas patas filiformes, diminutas alas prensiles y un cabello poco común.

Ejercicio 3426

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se llama *proyector* un endomorfismo p de E verificando $p \circ p = p$. Sea p un proyector.

1. Demostrar que $\mathrm{Id}_E - p$ es un proyector, calcular $p \circ (\mathrm{Id}_E - p)$ y $(\mathrm{Id}_E - p) \circ p$.
2. Demostrar que para todo $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p$, se tiene $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.
3. Deducir que $\operatorname{Im} p$ y $\ker p$ son suplementarios.
4. Demostrar que el rango de p es igual a la traza de p. (Se recuerda que la traza de la matriz de un endomorfismo no depende de la base en que expresa esta matriz.)

Solución ▼ [002564]

123 202.02 Endomorfismo autoadjunto

Ejercicio 3427

Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio euclidiano y $p \in \mathscr{L}(E)$ un proyector. Demostrar que p es ortogonal si y solo si $p = p^*$. [001525]

Ejercicio 3428

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Sea F un subespacio vectorial de E.

1. Sea F un subespacio vectorial de E. Demostrar que si $\varphi = \varphi^*$ y $\varphi(F) \subset F$, entonces $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.
2. Sea F un espacio propio de φ. Demostrar que si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$, entonces $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$.

[001526]

Ejercicio 3429

Sean A y B dos matrices simétricas positivas. Sea $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Demostrar que todo vector propio de A^k es un vector propio de A.
2. Si $A^k = B^k$, entonces $A = B$.
3. ¿Qué sucede sin la hipótesis A y B simétricas positivas ?

[001527]

Ejercicio 3430

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que $\varphi^* \circ \varphi$ es simétrica y $\mathrm{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Se denotan respectivamente λ y μ el mayor y el menor valor propio de $\varphi^* \circ \varphi$. Demostrar, para todo $x \in E$, la desigualdad :
$$\mu \|x\|^2 \leqslant \|\varphi(x)\|^2 \leqslant \lambda \|x\|^2.$$

[001528]

Ejercicio 3431

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que si $\varphi = \varphi^*$ y $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x) \rangle = 0$, entonces $\varphi = 0$.
2. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :

   i) $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

   ii) $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle$.

   iii) $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.
3. Si $\dim(E) = 2$ y si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$, entonces la matriz de φ en una base ortonormada es simétrica, o de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.
4. Se supone ahora que $\dim(E) = 3$ y que $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.
   (a) Demostrar que φ tiene al menos un valor propio real que se denota λ. Demostrar que E_λ y $E_\lambda^\perp$ quedan estables por φ y φ^*.
   (b) Demostrar que si φ no es simétrica, existe una base ortonormada ε de E y dos reales a y b (con $b \neq 0$) tales que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

[001529]

Ejercicio 3432

Sea E un espacio euclidiano de dimensión 3.

1. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormada de E. Sean $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ y $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ dos vectores de E. Calcular $\langle x, y \rangle$ en función de los coeficientes x_i y y_i (para $i \in \{1, 2, 3\}$).
2. Se considera $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo autoadjunto. Se denota λ su valor propio más pequeño y λ' su mayor valor propio. Demostrar que se tiene, para todo x perteneciendo a E, las desigualdades :
$$\lambda \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \leqslant \lambda' \|x\|^2.$$
   (Utilizar una base ortonormada adecuada.)
3. Sea $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo cualquiera. Demostrar que $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$ es auto-adjunto. Sean μ un valor propio de v, λ el valor propio más pequeño de u y λ' el valor propio más grande de u. Demostrar que $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda'$.

[001530]

Ejercicio 3433

1. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $S = {}^tA \cdot A$ es una matriz simétrica cuyos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son positivos. Demostrar la igualdad : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$.
2. Sea $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. ¿Existe una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $S = {}^tA \cdot A$? Dar una condición necesaria y suficiente en S, para que A sea invertible. Aplicación a $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[001531]

Ejercicio 3434

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano de dimensión p. A cada n-tuple $(x_1, \dots, x_n)$ de elementos de E se asocia el número (determinante de Gram)

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}.$$

1. Demostrar que $x_1, \dots, x_n$ están ligados si y solo si $G(x_1, \dots, x_n) = 0$; demostrar que si $x_1, \dots, x_n$ son independientes, se tiene $G(x_1, \dots, x_n) > 0$.
2. Demostrar que, para toda permutación σ de $\{1, \dots, n\}$, se tiene $G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n)$, y que el valor de $G(x_1, \dots, x_n)$ no se modifica si le sumamos a uno de los vectores, sea x_i, una combinación lineal de los otros vectores $x_j (j \neq i)$. Calcular $G(\alpha x_1, \dots, x_n)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. Se supone $x_1, \dots, x_n$ independientes. Sea $x \in E$, y sea $d(x, H)$ la distancia de x en el hiperplano $H = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Demostrar que $d(x,H)^2 = \dfrac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}$.

[001532]

Ejercicio 3435

Diagonalizar rápidamente la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

[001533]

Ejercicio 3436

Demostrar que el endomorfismo del espacio vectorial euclidiana canónica $\mathbb{R}^3$ de matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

es un automorfismo ortogonal. [001534]

Ejercicio 3437

Sean E un espacio vectorial euclidiano y f un endomorfismo de E tal que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Sea $x \in E$ tal que $f^*(x) = x$. Demostrar que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) Deducir que $\ker(f^* - \text{Id}) \subseteq \ker(f - \text{Id})$.
2. Sea h un endomorfismo de E. Demostrar que $(\text{Im}\, h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. Deducir que los subespacios vectoriales $\ker(f - \text{Id})$ y $\text{Im}\,(f - \text{Id})$ son suplementarios y ortogonales.

[001535]

Ejercicio 3438

Sea E un espacio euclidiano de dimensión 3.

1. Sea (e_1, e_2, e_3) una base ortonormada de E. Sean $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ y $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ dos vectores de E. Calcular $\langle x, y \rangle$ en función de los coeficientes x_i y y_i (para $i \in \{1, 2, 3\}$).

2. Se considera $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo autoadjunto. Se denota λ_1 su valor propio más pequeño y λ_2 su mayor valor propio. Demostrar que se tiene, para todo x perteneciendo a E las desigualdades :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_2 \|x\|^2.$$

(Utilizar una base ortonormada adecuada.)

3. Sea $v \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo cualquiera. Demostrar que $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$ es auto-adjunto. Sean λ un valor propio de v, λ_1 el valor propio más pequeño de u y λ_2 el valor propio más grande de u. Demostrar que $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

[001536]

Ejercicio 3439

---

1. Sean E un espacio vectorial euclidiano, $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo simétrico positivo. Demostrar que si $x \in E$, entonces $(f(x)|x) \geqslant 0$.
2. Sea $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica positiva. Demostrar que para todo $i = 1,..,n$, $m_{ii} \geqslant 0$ y $\operatorname{tr}(M) \geqslant 0$
3. Sean A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas positivas.
   (a) Demostrar que existe $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonal y $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simetría positiva tal que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(DM)$.
   (b) Deducir que $\operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

[001537]

Ejercicio 3440

Sea $(E, \langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo autoadjunto. Demostrar que las tres propiedades siguientes son equivalentes :

1. $\forall x \in E, \langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
2. Existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f = g^* g$.
3. Existe $h \in \mathscr{L}(E)$ tal que $h = h^*$ y $f = h^2$.

[001538]

Ejercicio 3441

Sea $(E, \langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo. Demostrar que $\|f\| = \|f^*\|$. [001539]

Ejercicio 3442

Sea $(E, \langle,\rangle)$ un espacio euclidiano (de dimensión finita) y $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo autoadjunto. Se denota $X = \{x \in E; \langle f(x), x\rangle \leqslant 1\}$. Demostrar que X es compacto si y solo si todos los valores propios de f son estrictamente positivos. [001540]

---

124 202.03 Otros endomorfismos normales

Ejercicio 3443

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano. Un endomorfismo $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ se dice antisimétrica cuando $\varphi^* = -\varphi$.

1. Demostrar que φ es antisimétrica si y solo si $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x\rangle = 0$. (se puede notar que $\varphi + \varphi^*$ es autoadjunta.)
2. Demostrar que si φ es antisimétrica, entonces $(\ker(\varphi))^\perp = \operatorname{Im}(\varphi)$ ya que $\operatorname{rg}(\varphi)$ es par.

[001541]

Ejercicio 3444

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano. Sea $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ un endomorfismo antisimétrico, es decir tal que $\varphi^* = -\varphi$.

1. Demostrar que si $\lambda \in Sp(\varphi)$, entonces $\lambda = 0$. Demostrar que $(\ker(\varphi))^\perp$ es estable por φ.
2. (a) Demostrar que φ^2 es simétrica.
   (b) Demostrar que si x es un vector propio asociado a un valor propio μ de φ^2, entonces $E_x = \operatorname{vect}\{x, \varphi(x)\}$ y $E_x^\perp$ quedan estables por φ.
   (c) Demostrar que $\mu > 0$. Determinar una base $\{e_1, e_2\}$ de E_x tal que la matriz de la restricción de φ a E_x en $\{e_1, e_2\}$ sea $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Demostrar que E es la suma directa ortogonal de $\ker(\varphi)$ y planos estables.

[001542]

125 202.04 Endomorfismo ortogonal

Ejercicio 3445

Sea f una transformación ortogonal de un espacio euclidiano E. Demostrar que

$$\ker(f - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp.$$

Inferir que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$, entonces $f = \mathrm{Id}$. [001543]

Ejercicio 3446

Determinar la naturaleza de las transformaciones de $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica son las siguientes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[001544]

Ejercicio 3447

Diagonalizar en una base ortonormal (para el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^3$) la matriz siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpretar geométricamente la transformación de $\mathbb{R}^3$ representada por esta matriz. [001545]

Ejercicio 3448

Diagonalizar las matrices siguientes en bases ortonormadas :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[001546]

Ejercicio 3449

Sea $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ una matriz simétrica real. Demostrar que sus propios valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verifican

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2$$

[001547]

Ejercicio 3450

Sea $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortogonal de un espacio euclidiano E. Se dice que un endomorfismo f de E conserva la ortogonalidad de $\mathscr{B}$ si y solo si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ es una familia ortogonal. Demostrar que f conserva la ortogonalidad de $\mathscr{B}$ si y solo si $\mathscr{B}$ es una base de vectores propios de ${}^t f f$. Demostrar que para todo endomorfismo f de E, existe una base ortogonal de la cual f conserva la ortogonalidad. [001548]

Ejercicio 3451 Descomposición polar

1. Sea r un endomorfismo simétrico de un espacio euclidiano E. Se dice que r es positivo, si todos sus valores propios son positivos. Demostrar que si r es definida positiva, existe uno y solo un endomorfismo simétrico s positivo tal que $s^2 = r$. Se llama s raíz cuadrada positiva de r. Se dice que r es definida positiva si y solo si todas sus raíces son estrictamente positivas. Demostrar que si r es definida positiva, entonces su raíz positiva también.
2. Sea f un endomorfismo de E. Demostrar que ${}^t f f$ es simétrica y positiva. Demostrar que si además f es biyectiva, ${}^t f f$ es definida positiva.
3. Se supone ahora que f es una biyección. Sea s la raíz cuadrada positiva de ${}^t f f$. Demostrar que $u = f \circ s^{-1}$ es una transformación ortogonal. Deducir que todo endomorfismo biyectivo de E se puede escribir en la forma :
$$f = u \circ s$$
donde u y una transformación ortogonal, y s es definida positiva simétrica. Demostrar que esta descomposición, llamada descomposición polar de f es única.

4. ¿Qué sucede si f no es biyectiva?

[001549]

Ejercicio 3452

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado de su producto escalar canónico, se considera el endomorfismo f cuya matriz en la base canónica es :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (\textit{cuidado con } \tfrac{1}{7}\textit{...})$$

1. Sin cálculos, decir por qué f es diagonalizable en una base ortonormada.
2. Demostrar que f es ortogonal. Deducir los únicos valores propios posibles para f.
3. Sin calcular el polinomio característico de f, determinar usando la traza el orden de multiplicidad de los valores propios de f. Deducir el polinomio característico de f.
4. Determinar el espacio propio E_1 asociada al valor propio 1. Dar una base, luego aplicar el proceso de Schmidt para obtener una base ortonormada de E_1.
5. Demostrar que el espacio propio E_{-1} asociada al valor propio -1 satisface $E_{-1} = (E_1)^{\perp}$. Usando la ecuación que caracteriza E_1, deducir un vector generador de E_{-1}.
6. Dar una base ortonormada en la que la matriz de f es diagonal. Dar una interpretación geométrica de f.

[001550]

Ejercicio 3453

A — Sea E un espacio vectorial y u y v dos endomorfismos de E diagonalizables que conmutan (es decir que satisfacen $u \circ v = v \circ u$). Se denota $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los valores propios de u y $E_1, \dots, E_k$ los espacios propios asociados.

1. Demostrar que $v(E_i) \subset E_i$.
2. Se denota $v_i = v_{|E_i}$ la restricción de v a E_i. Sea $P \in \mathbb{C}[X]$, demostrar que $P(v_i) = P(v)_{|E_i}$.
3. Deducir que v_i es diagonalizable. Sea B_i una base de E_i formada por vectores propios de v_i. Demostrar que $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ es una base de E formada por vectores propios a la vez por u y para v.
4. Deducir que u y v son diagonalizables en la misma base. Demostrar que $u - v$ es diagonalizable.

B — *Aplicación :* Se considera ahora una matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, y se le asocia el endomorfismo $w_A \in \mathrm{End}(M_{n,n}(\mathbb{R}))$ siguiente :

$$w : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad M \mapsto AM - MA.$$

El propósito del ejercicio es demostrar que si A es diagonalizable, w_A, lo es también. Se denota

$$u_A : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad M \mapsto AM \qquad \text{y} \qquad v_A : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad M \mapsto MA.$$

1. Demostrar que $\forall k \in \mathbb{N}, (u_A)^k = u_{A^k}$. Deducir que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(u_A) = u_{P(A)}$, luego que todo polinomio anulador de A es un polinomio anulador de u_A.

2. Demostrar que
$$A \text{ diagonalizable } \Rightarrow u_A \text{ diagonalizable.}$$
Se admite sin prueba que el mismo resultado es cierto para v_A :
$$A \text{ diagonalizable } \Rightarrow v_A \text{ diagonalizable.}$$
3. Demostrar que $u_A \circ v_A = v_A \circ u_A$.
4. Deducir que
$$A \text{ diagonalizable } \Rightarrow w_A \text{ diagonalizable.}$$

[001551]

Ejercicio 3454

En un espacio euclidiano $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, se considera un vector v no nulo, un escalar λ y el endomorfismo :
$$\begin{aligned} u : E &\to E \\ x &\mapsto x + \lambda \langle x, v\rangle\, v. \end{aligned}$$

1. Para $x \in E$, calcular $\|u(x)\|^2$.
2. Dar una condición necesaria y suficiente en λ y v, para que u sea una transformación ortogonal.
3. Cuando u es ortogonal, decir a priori cuáles son los posibles valores propios de u, luego diga si de hecho son valores propios estudiando los espacios propios asociados.
4. Cuando u es ortogonal, dar una interpretación geométrica de u.

[001552]

Ejercicio 3455

Se considera un espacio euclidiano $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Se dice que un endomorfismo u de E es una similitud de E si y solo si existe un real $\lambda > 0$ tal que
$$u^* u = \lambda \operatorname{Id}.$$
Demostrar que las siguientes tres afirmaciones son equivalentes :

(i) u es una similitud

(ii) u es colineal con una transformación ortogonal, es decir
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists v \in O(E)\ /\ u = \alpha v$$

(iii) u conserva la ortogonalidad, es decir :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$

Para (i)⇔(ii), se puede empezar demostrando que (ii)⇒(i). Para (i)⇒(iii), se comienza con demostrar que x y $u^*u(x)$ son siempre colineales, es decir que $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x / u^*u(x) = \lambda_x x$, luego se demuestra que λ_x es independiente de x.

[001553]

Ejercicio 3456

En un espacio euclidiano E, se considera un vector unitario a, y a un real $k \neq -1$ se asocia el endomorfismo u_k de E definido por :
$$u_k(x) = k \langle x, a\rangle\, a + x.$$

1. Demostrar que u_k es un isomorfismo. Determinar u_k^{-1}. *(Se puede empezar por calcular $\langle u_k(x), a\rangle$).*
2. Recordar la caracterización del adjunto de un endomorfismo, y demostrar que u es autoadjunto.
3. ¿Para qué valores de k, u es ortogonal ? Interpretar entonces geométricamente esta transformación.
4. Determinar los valores propios y los vectores propios de u_k.

Solución ▼ [001554]

Ejercicio 3457

1. Sean E un espacio vectorial euclidiano, f un endomorfismo de E y $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz de f en una base ortonormal dada $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, expresar a_{ij} en función de f y de vectores e_i y e_j.
2. Sean $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ y $S = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$.
   (a) Demostrar que existe $u \in E$ tal que $S = (u|f(u))$.
   (b) Deducir que $|S| \leqslant n$.

[001555]

Ejercicio 3458

Sean $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ y A_{ij} el cofactor (i, j) de A. Demostrar que $\det A > 0$ si y solo si a_{ij} y A_{ij} son del mismo signo. [001556]

Ejercicio 3459

¿Qué se puede decir de una matriz cuadrada real a la vez simétrica y ortogonal ? Determinar la naturaleza y los elementos característicos del endomorfismo del espacio vectorial euclidiano canónico $\mathbb{R}^3$ de matriz $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. [001557]

Ejercicio 3460

¿Cuáles son las isometrías vectoriales de un espacio vectorial euclidiano que son diagonalizables ? [001558]

Ejercicio 3461

Sean E un espacio vectorial euclidiano y f un endomorfismo de E tal que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. (a) Sea $x \in E$ tal que $f^*(x) = x$. Demostrar que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.
   (b) Deducir que $\ker(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \ker(f - \mathrm{Id})$.
2. Sea h un endomorfismo de E. Demostrar que $(\operatorname{Im} h)^\perp \subseteq \ker h^*$.
3. Deducir que los subespacios vectoriales $\ker(f - \mathrm{Id})$ y $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$ son suplementarios y ortogonales.

[001559]

Ejercicio 3462

Determinar una matriz diagonal $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ y una matriz ortogonal $U \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ tales que $UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
[001560]

Ejercicio 3463

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $u \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :
i) $u^* = u^{-1}$.
ii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
iii) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
iv) La imagen por u de una base ortonormada de E es una base ortonormada de E.
v) La imagen por u de todo base ortonormada de E es una base ortonormada de E. [001561]

Ejercicio 3464

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $\varphi \in \mathscr{O}(E)$. Sea F un subespacio vectorial de E. Demostrar que si $\varphi(F) \subset F$, entonces $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$. ¿Tenemos igualdad ? [001562]

Ejercicio 3465

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano de dimensión 3 y $u \in \mathscr{O}^-(E)$. Sea $F = \ker(u + \mathrm{Id})$.

1. Demostrar que $F \neq \{0\}$. Demostrar que F y $f^\perp$ son estables por u. ¿Por qué razón $\dim(F) \neq 2$?
2. Se supone $E \neq F$. Demostrar que la restricción de u a $F^\perp$ es una rotación.
3. Deducir que existe $\theta \in \mathbb{R}$ y una base ε de E tales que :

$$\mathrm{Mat}(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[001563]

Ejercicio 3466

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano de dimensión 4 y $\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_4\}$ una base ortonormada de E. Sea A la matriz $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ y $u \in \mathscr{L}(E)$ el endomorfismo determinado por $\mathrm{Mat}(u, \varepsilon) = A$.

1. Demostrar que $u \in \mathscr{O}^+(E)$.
2. Demostrar que el espacio vectorial F generado por e_1 y $u(e_1)$ es estable por u. Demostrar que la restricción de u a F es una rotación.
3. Demostrar que $F^\perp$ es estable por u y es generado por e_4 y $u(e_4)$. ¿La restricción de u a $F^\perp$ es una rotación ?

[001564]

Ejercicio 3467

Sea $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{O}(n, \mathbb{R})$. Demostrar para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ la igualdad $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$. Deducir que si A es triangular superior es diagonal. [001565]

Ejercicio 3468

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $u \in \mathscr{O}(E)$. Sea $v = \mathrm{Id} - u$.

1. Demostrar que $\ker(v) = \mathrm{Im}(v)^{\perp}$.
2. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$ es la proyección ortogonal de x sobre $\ker(v)$.

[001566]

Ejercicio 3469

Sea $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano y $s \in \mathscr{L}(E)$ tal que $s^2 = \mathrm{Id}$.

1. Demostrar que $E = \ker(s - \mathrm{Id}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id})$.
2. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :
   i) $s \in \mathscr{O}(E)$.
   ii) $\ker(s - \mathrm{Id}) \perp \ker(s + \mathrm{Id})$. iii) $s = s^*$.
3. Se denota ahora s_F la única simetría $s \in \mathscr{O}(E)$ tal que $F = \ker(s + \mathrm{Id})$. Demostrar que para todo $u \in \mathscr{O}(E)$ se tiene $us_Fu^{-1} = s_{u(F)}$.
4. Demostrar que si f es una aplicación de E en E dejando estables todas las rectas vectoriales (es decir que para todo $x \in E$ existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \lambda_x x$) entonces f es lineal.
5. Deducir que $Z(\mathscr{O}(E)) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ y que si $n \geqslant 3$, entonces $Z(\mathscr{O}^+(E)) = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\} \cap \mathscr{O}^+(E)$. (Aplicar 3.) en el caso donde F es una recta o un plano.)
6. ¿Qué pasa cuando $n = 1$ y $n = 2$.

[001567]

Ejercicio 3470

Sea E un espacio euclidiano y $u \in O(E)$ tal que $\ker(u - \mathrm{Id}) \neq E$. Sea $x \in E$ tal que $u(x) \neq x$. Se define $y = u(x)$. Entonces sabemos que existe una única reflexión r tal que $r(y) = x$.

1. Demostrar que $\ker(u - \mathrm{Id}) \subset \ker(r - \mathrm{Id})$.
2. Demostrar que $\dim\ker(r \circ u - \mathrm{Id}) > \dim\ker(u - \mathrm{Id})$.
3. Demostrar por inducción que toda isometría vectorial es la composición de reflexiones.

[001568]

Ejercicio 3471

Sea $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $\forall\,(i,j)\ \left|a_{i,j}\right| \leqslant 1$ y que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n$. [001569]

Ejercicio 3472

Sea E euclidiana, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \ldots, x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tales que :

$$\forall\,(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j)\,.$$

Demostrar que existe un endomorfismo ortogonal f de E tal que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, f(x_i) = y_i.$$

[001570]

126 202.99 Otro

Ejercicio 3473

Se considera la siguiente aplicación :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t)dt. \end{aligned}$$

Demostrar que α es una forma lineal en $\mathbb{R}_n[X]$. Para $i \in \{0, \ldots, n\}$, se denota α_i la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha_i : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P(i/n). \end{aligned}$$

Demostrar que α_i es una forma lineal en $\mathbb{R}_n[X]$, y demostrar que la familia $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ es una base de $\mathbb{R}_n[X]^*$. Deducir que :

$$\exists (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(i/n)$$

[001519]

Ejercicio 3474

Se considera la aplicación u siguiente :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Calcular ${}^t u(\alpha)$ cuando : $\alpha : P \mapsto P(0), \qquad \alpha : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt.$ [001520]

Ejercicio 3475

Se llama *traza* de una matriz A, y se denota $\mathrm{tr}(A)$, la suma de sus coeficientes diagonales.

1. Demostrar que la aplicación $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$ es una forma lineal en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Demostrar que : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza.
3. ¿Hay dos matrices A y B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $AB - BA = I$?

[001521]

Ejercicio 3476

Sean E y F dos espacios vectoriales y sea $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Demostrar que $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \ker {}^t f$. Deducir que f es sobreyectiva si y solo si ${}^t f$ es inyectiva. Cuando E y F son de dimensión finita, demostrar que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}({}^t f)$. Deducir que para toda matriz $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se tiene $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^t(A))$. [001522]

Ejercicio 3477

Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $f^2 = 0$. Demostrar que existe $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^*$ y $v \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \;\; f(x) = \alpha(x)\, v.$$

(Indicación : Comenzar por demostrar que $\operatorname{rg}(f) \leqslant 1$). [001523]

Ejercicio 3478

Se considera un espacio euclidiano $(E, \langle\;,\;\rangle)$. Se recuerda que la adjunta u^* de un endomorfismo u es el endomorfismo caracterizado por :

$$\forall (x,y) \in E^2, \;\; \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle\,.$$

Se dice que un endomorfismo u de E es una similitud de E si y solo si u es la composición de una homotecia y una isometría, es decir si y solo si :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\; \exists\, v \in O(E) \;/\; u = \alpha v.$$

1. Redemostrar la equivalencia entre las siguientes tres caracterizaciones de isometrías :

$$\begin{aligned} v \text{ es una isometría} &\Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \|v(x)\| = \|x\| \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\; \langle v(x), v(y)\rangle = \langle x,y\rangle \\ &\Leftrightarrow v^* v = \mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

   Se quiere demostrar la equivalencia de las siguientes afirmaciones :
   (i) u es una similitud
   (ii) existe un real $\lambda > 0$ tal que
   $$u^* u = \lambda\, \mathrm{Id}\,.$$
   (iii) u conserva la ortogonalidad, es decir :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\; \langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u(x), u(y)\rangle = 0.$$
2. Demostrar que (i)$\Rightarrow$ (ii), ya que (ii)$\Rightarrow$(i).
3. Demostrar que (i)$\Rightarrow$(iii).
4. Se supone (iii).
   (a) Sea $x \in E$, $x \neq 0$. Demostrar que
   $$\forall y \in E,\;\; x \perp y \Leftrightarrow u^* u(x) \perp y.$$
   (b) Deducir que $u^* u(x)$ pertenece a la recta generada por x. Se denota λ_x el real tal que $u^* u(x) = \lambda_x x$.
   (c) Demostrar que : $\forall t \in \mathbb{R},\; \lambda_{tx} = \lambda_x$
   (d) Demostrar que, para todo par (x,y) de vectores linealmente independientes de E, se tiene $\lambda_x = \lambda_y$.

(e) Deducir que la aplicación $x \mapsto \lambda_x$ es constante.

Concluir.

[001524]

Ejercicio 3479 Ecuación $AM = \lambda M$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Determinar los escalares λ y las matrices $M \in \mathscr{M}_n(K)$ tales que $AM = \lambda M$. [003567]

Ejercicio 3480 $v \mapsto v \circ u$ (Central MP 2003)

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Se considera la aplicación Φ_u que a $v \in \mathscr{L}(E)$ asociada $v \circ u$.

1. Demostrar que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
2. Demostrar la equivalencia : (u es diagonalizable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u es diagonalizable)...
   (a) Considerando los polinomios anuladores de u y de Φ_u.
   (b) Considerando los espectros y los subespacios propios de u y de Φ_u.

Solución ▼ [003568]

Ejercicio 3481 Matexo

Sea E un K-espacio vectorial de dimensión n, (F,G) dos subespacios vectoriales de E tales que $E = F \oplus G$. Se denota p la proyección sobre F, paralelamente a G. Sea $E_p = \{f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f \circ p = p \circ f\}$. ¿Cuál es la dimensión de E_p ? [003569]

Ejercicio 3482 $f \mapsto p \circ f \circ p$

Sea $p \in \mathscr{L}(E)$ una proyección y $\Phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$, $f \mapsto p \circ f \circ p$. Determinar los elementos propios de Φ.

Solución ▼ [003570]

Ejercicio 3483 $f \mapsto u \circ f$ y $f \mapsto f \circ u$

Sea E un K-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalizable. Se considera las aplicaciones $\mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ $\varphi : f \mapsto u \circ f$ $\psi : f \mapsto f \circ u$

1. Demostrar que φ y ψ son diagonalizables.
2. Demostrar que $\varphi - \psi$ es diagonalizable.

[003571]

Ejercicio 3484 $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}$

Sean u, v dos endomorfismos de un espacio vectorial E no nulo tal que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Simplificar $u^k \circ v - v \circ u^k$, para $k \in \mathbb{N}$, luego $P(u) \circ v - v \circ P(u)$, para $P \in K[X]$.
2. Demostrar que u y v no tienen polinomios minimales.

Solución ▼ [003572]

Ejercicio 3485 Ensi PC 1999

Sea E un ev real de dimensión finita y $f, g \in \mathscr{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tales que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Probar que para todo natural n, $f^n \circ g - g \circ f^n = \alpha n f^n$.
2. Demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = 0$. (Razonar por reducción al absurdo y considerar la aplicación $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathscr{L}(E)$ en $\mathscr{L}(E)$).

[003573]

Ejercicio 3486 X MP* 2001

Sea f un endomorfismo de E (ev de dimensión finita en K) tal que χ_f sea irreducible. Demostrar que para ningún endomorfismo g el corchete de Lie $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ no es de rango uno.

Solución ▼ [003574]

Ejercicio 3487 $\frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$ (Mines MP 2003)

Sea E un espacio vectorial de dimensión n finita, p un proyector de rango r y $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E), u \mapsto \frac{1}{2}(p \circ u + u \circ p)$.

1. ¿Es φ diagonalizable ?
2. Determinar los valores propios de φ y las dimensiones de los subespacios propios.

Solución ▼ [003575]

Ejercicio 3488 Corchete de Lie (Ens Cachan MP* 2003)

Sea $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un automorfismo de ev tal que $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi([A,B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$, donde $[X,Y] = XY - YX$. Demostrar que $\forall D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, ($D$ es diagonalizable) $\Leftrightarrow$ ($\Phi(D)$ es diagonalizable).
Indicación : Considerar $\phi_D : X \mapsto [D,X]$ y demostrar que (D es diagonalizable) $\Leftrightarrow$ (ϕ_D es diagonalizable).

Solución ▼ [003576]

Ejercicio 3489 Base de $(K^3)^*$

En K^3 se consideran las formas lineales $f_1(\overrightarrow{x}) = x+y-z$, $f_2(\overrightarrow{x}) = x-y+z$, $f_3(\overrightarrow{x}) = x+y+z$.

1. Demostrar que (f_1, f_2, f_3) es una base de $(K^3)^*$.
2. Encontrar la base dual.

[003625]

Ejercicio 3490 Base de $(K^3)^*$

En K^3 se consideran las formas lineales : $f_1(\overrightarrow{x}) = x+2y+3z$, $f_2(\overrightarrow{x}) = 2x+3y+4z$, $f_3(\overrightarrow{x}) = 3x+4y+6z$.

1. Demostrar que (f_1, f_2, f_3) es una base de $(K^3)^*$.
2. Encontrar la base dual.

Solución ▼ [003626]

Ejercicio 3491 Base de $(K^n)^*$

Para $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ se establece $f_i(\overrightarrow{x}) = x_i + x_{i+1}$ y $f_n(\overrightarrow{x}) = x_n + x_1$. Determinar si $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ es una base de $(K^n)^*$ y determinar la base dual.

Solución ▼ [003627]

Ejercicio 3492 Bases duales de polinomios

Sea $E = K_n[X]$. Demostrar que la familia $\mathscr{F} = (f_0, \dots, f_n)$ es una base de E^* y dar la base dual cuando ...

1. $f_i(P) = P(x_i)$, donde $x_0, \dots, x_n$ son escalares distintos.
2. $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.
3. $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$, donde $x_0, \dots, x_n$ son escalares cualesquiera. (No buscar la base dual para este ejemplo)

[003628]

Ejercicio 3493 Base dual de polinomios

Sea $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, y $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distintos. Se denota :

$$\begin{aligned} \phi_i : E &\to \mathbb{R}, \\ P &\mapsto P(x_i) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \psi_i : E &\to \mathbb{R}, \\ P &\mapsto P'(x_i). \end{aligned}$$

1. Demostrar que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ es una base de E^*.
2. Encontrar la base dual. Se denota $P_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ y $d_i = P_i'(x_i)$.

Solución ▼ [003629]

Ejercicio 3494 Integral

Sea $E = \mathbb{R}_3[X]$, se consideran las formas lineales : $f_i : P \mapsto \int_{-1}^{1} t^i P(t)\, dt$.

1. Demostrar que (f_0, f_1, f_2, f_3) es una base de E^*.
2. Encontrar la base dual.

Solución ▼ [003630]

Ejercicio 3495 Evaluaciones e integrales

Sea $E = \mathbb{R}_3[X]$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ distintos. Se consideran las formas lineales en E :

$$f_a : P \mapsto P(a), \quad f_b : P \mapsto P(b), \quad f_c : P \mapsto P(c), \quad \varphi : \ P \mapsto \int_a^b P(t)\, dt.$$

Estudiar la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Solución ▼ [003631]

Ejercicio 3496 Base dual de $(1, X, X(X-1), \dots)$

Sea $E = K_n[X]$. Se denota $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$, para $i \geqslant 1$, y $f_i : P \mapsto P(i)$.

1. Demostrar que $(P_0, \dots, P_n)$ es una base de E y $\mathscr{B} = (f_0, \dots, f_n)$ es una base de E^*.
2. Descomponer la forma lineal P_n^* en la base $\mathscr{B}$. (Se pueden usar los polinomios : $Q_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - j)$.)
3. Descomponer de la misma manera las otras formas lineales P_k^*.

Solución ▼ [003632]

Ejercicio 3497 Base dual de $((X-a)^k(X-b)^{n-k})$

Sea $E = K_n[X]$ y $a, b \in K$ distintos. Se establece $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$.

1. Demostrar que $(P_0, \dots, P_n)$ es una base de E.
2. Se supone $n = 2$ y se toma como base $E^* : \mathscr{B} = (f_a, f_c, f_b)$, donde $f_x(P) = P(x)$ y $c = \frac{a+b}{2}$. Expresar las formas lineales (P_0^*, P_1^*, P_2^*) en $\mathscr{B}$.

Solución ▼ [003633]

Ejercicio 3498 Formas lineales ld

Sean $f_1, \dots, f_n$ formas lineales en K^n tales que existe $\overrightarrow{x} \in K^n$ no nulo tal que $f_1(\overrightarrow{x}) = \dots = f_n(\overrightarrow{x}) = 0$. Demostrar que $(f_1, \dots, f_n)$ es l.d. [003634]

Ejercicio 3499 $(P(X), \dots, P(X+n))$ es una base de los polinomios

Sea $E = K_n[X]$, $Q \in E$ de grado n y $Q_i = Q(X+i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

1. Demostrar que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ es libre.
2. Demostrar que toda forma lineal en E se puede escribir en la forma :
   $f : P \mapsto \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \dots + \alpha_n P^{(n)}(0)$.
3. Sea $f \in E^*$ tal que $f(Q_0) = \dots = f(Q_n) = 0$. Demostrar que $f = 0$.
   (Considerar el polinomio $P = \alpha_0 Q + \dots + \alpha_n Q^{(n)}$)
4. Demostrar que $(Q_0, \dots, Q_n)$ es una base de E.

[003635]

Ejercicio 3500 $\varphi((X-a)P) = 0$

Sea $E = K_n[X]$. Sea $\varphi \in E^*$ tal que : $\forall P \in K_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$. Demostrar que existe $\lambda \in K$ tal que : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$. [003636]

Ejercicio 3501 Forma lineal en polinomios

Demostrar la existencia y unicidad de una forma lineal Φ sobre $\mathbb{R}_n[X]$ tal que : $\Phi(1) = 0$, $\Phi(X) = 1$ y $\Phi(P) = 0$, para todo polinomio $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $P(0) = P(1) = 0$. [003637]

Ejercicio 3502 Sistema unisolvente

Sean $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n funciones linealmente independientes. Se establece $E = \mathrm{vect}(f_1, \dots, f_n)$ y para $x \in \mathbb{R}$, $\delta_x : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$.

1. Demostrar que la familia $(\delta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ engendra E^*.
2. Deducir que existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que $\det M \neq 0$, donde M es la matriz de término general $f_i(x_j)$.

[003638]

Ejercicio 3503 Polinomios de dos variables

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que f es polinomial si es de la forma : $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$, la suma de un número finito de términos. El grado de f es entonces $\max(i+j$ tal que $a_{ij} \neq 0)$. Se denota E_k el conjunto de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinomiales de grado menor o igual que k.

1. Demostrar que E_k es un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita y dar su dimensión.
2. Sean $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$. Demostrar que las formas lineales $f \mapsto f(A)$, $f \mapsto f(B)$, $f \mapsto f(C)$ constituyen una base de E_1^*.
3. Determinar igualmente una base de E_2^*.
4. Sea T el triángulo completo ABC y $f \in E_1$. Demostrar que $\iint_T f(x,y)\,dxdy = \dfrac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.
5. Encontrar una fórmula análoga para $f \in E_2$.

Solución ▼ [003639]

Ejercicio 3504 Polinomios trigonométricos

Se denota $f_n(x) = \cos nx$ y $g_n(x) = \operatorname{sen} nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$). Sea E_n el espacio generado por la familia $\mathscr{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1. Demostrar que para $k \geqslant 1$, (f_k, g_k) es libre.
2. Sea $\varphi : E_n \to E_n, f \mapsto f''$. Encontrar los subespacios propios de φ. Inferir que $\mathscr{F}_n$ es libre.
3. Se denota $a_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ y $\varphi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(a_k)$.

   Demostrar que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ es una base de E_n^*. (Utilizar la función $f : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} (\cos x - \cos a_k)$)
4. Sea $N \in \mathbb{N}^*$. Se denota $b_k = \frac{2k\pi}{N}$ y $\psi_k : E_n \to \mathbb{R}, f \mapsto f(b_k)$. Demostrar que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ es libre si y solo si $N \leqslant 2n+1$, y engendra E_n^* si y solo si $N \geqslant 2n+1$.

Solución ▼ [003640]

Ejercicio 3505 traza en $\mathscr{M}_n(K)$

Sea $E = \mathscr{M}_n(K)$. Para $A \in \mathscr{M}_n(K)$, se denota $\phi_A : E \to K, M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

1. Demostrar que $E^* = \{\phi_A$ tal que $A \in E\}$.
2. Se denota $\mathscr{S}$ el conjunto de matrices simétricas y $\mathscr{A}$ el conjunto de matrices antisimétricas. Demostrar que $\mathscr{S}^\circ = \{\phi_A$ tal que $A \in \mathscr{A}\}$ y $\mathscr{A}^\circ = \{\phi_A$ tal que $A \in \mathscr{S}\}$.

[003641]

Ejercicio 3506 Sucesiones de Fibonacci

Sea E el conjunto de sucesiones $u = (u_n)$, con términos reales tales que para todo $n : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Demostrar que E es un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita.
2. Sean $f_0 : E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_0$ y $f_1 : E \to \mathbb{R}$, $u \mapsto u_1$. Encontrar la base dual de (f_0, f_1).

Solución ▼ [003642]

Ejercicio 3507 Combinación de formas lineales

Sea E un K-ev de dimensión finita y $f, f_1, \dots, f_p \in E^*$. Demostrar que f es combinación lineal de $f_1, \dots, f_p$ si y solo si $\ker f \supset \ker f_1 \cap \ldots \cap \ker f_p$. [003643]

Ejercicio 3508 Combinación de formas lineales

Sea E un K-ev de dimensión finita y $f_1,\ldots,f_p \in E^*$. Se considera la aplicación :

$$\Phi : E \to K^p, \vec{x} \mapsto \Big(f_1(\vec{x}),\ldots,f_p(\vec{x})\Big)$$

Demostrar que Φ es sobreyectiva si y solo si $(f_1,\ldots,f_p)$ es libre. [003644]

Ejercicio 3509 Ortogonales de una suma directa

Sea E un K-ev de dimensión finita y F,G dos sev de E tales que $F \oplus G = E$.

1. Demostrar que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.
2. Demostrar que F° es naturalmente isomorfo a G^* y G° a F^*.

[003645]

Ejercicio 3510 $f(u) \neq 0$ y $g(u) \neq 0$

Sea E un K-ev de dimensión finita y $f,g \in E^*$ ambas no nulas. Demostrar que existe un vector $\vec{u} \in E$ tal que $f(\vec{u}) \neq 0$ y $g(\vec{u}) \neq 0$. [003646]

Ejercicio 3511 p formas lineales

Sea E un K-ev. Se supone que existe p formas lineales $f_1,\ldots,f_p$ tales que :

$$\forall \vec{x} \in E,\ (f_1(\vec{x}) = \cdots = f_p(\vec{x}) = 0) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{0}).$$

Demostrar que E es de dimensión finita menor o igual que p. [003647]

Ejercicio 3512 $\det(f_i(u_j)) \neq 0$

Sea E un K-ev de dimensión finita n, $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n \in E$ y $f_1,\ldots,f_n \in E^*$. Sea M la matriz de término general $f_i(\vec{u}_j)$. Demostrar que si $\det M \neq 0$, entonces $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ es una base de E y $(f_1,\ldots,f_n)$ es una base de E^*. [003648]

Ejercicio 3513 e_n^* impuesto

Sea E un K-ev de dimensión finita n, $\mathscr{F} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n-1})$ una familia libre de E y $f \in E^* \setminus \{0\}$. Demostrar que se puede completar $\mathscr{F}$ en una base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ tal que $f = e_n^*$ si y solo si $f(\vec{e}_1) = \cdots = f(\vec{e}_{n-1}) = 0$. ¿Y hay unicidad de $\vec{e}_n$? [003649]

Ejercicio 3514 Modificación elemental

Sea E un K-ev de dimensión finita n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ una base de E, y $\mathscr{B}' = (\vec{e}_1{}',\ldots,\vec{e}_n{}')$ deducido de $\mathscr{B}$ por una operación elemental (intercambio de dos vectores, multiplicación de un vector por un escalar no nulo, adición a un vector de un múltiplo de otro). Estudiar cómo se pasa de la base dual $\mathscr{B}^*$ a $\mathscr{B}'^*$ en función de la operación realizada.

Solución ▼ [003650]

Ejercicio 3515 Separación

Sea E un K-ev de dimensión finita.

1. Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$, con $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$. Demostrar que existe $f \in E^*$ tal que $f(\overrightarrow{x}) \neq f(\overrightarrow{y})$.
2. Sea V un sev de E^* teniendo la propiedad : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y} \Rightarrow \exists\ f \in V$ tal que $f(\overrightarrow{x}) \neq f(\overrightarrow{y})$. Demostrar que $V = E^*$.

[003651]

127 203.01 Grupo, subgrupo

Ejercicio 3516

Sea ABC un triángulo equilátero del plano.

1. Determinar el conjunto de rotaciones que dejan invariante $\{A,B,C\}$.
2. Demostrar que es un grupo por la ley $\circ$.
3. Hacer lo mismo con un cuadrado.

[001303]

Ejercicio 3517 Enteros módulo n

Dado un entero natural n, se llama clase a un entero relativo p módulo n el conjunto $\overline{p} = \{p+kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. El conjunto de clases módulo n es denotado $\mathbb{Z}_n$.

1. Escribir la lista de elementos distintos de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_5$.
2. Demostrar que si $x \in \overline{p}$ y $y \in \overline{q}$, entonces $x+y \in \overline{p+q}$ y $xy \in \overline{pq}$.
3. Usando$\overline{p}+\overline{q} = \overline{p+q}$ y $\overline{p}\cdot\overline{q} = \overline{pq}$, se definen dos leyes de composición, sumas y multiplicaciones en $\mathbb{Z}_n$. Escribir la tabla de adición y multiplicación de $\mathbb{Z}_4$.

La misma pregunta para $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, y $\mathbb{Z}_5$. [001304]

Ejercicio 3518

1. Demostrar que las transformaciones geométricas que conservan globalmente un rectángulo forman un grupo. Hacer el estudio de este grupo.
2. Estudiar el grupo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que solo existen dos tipos de grupos de cuatro elementos.

[001305]

Ejercicio 3519

1. Estudiar el conjunto de isometrías del cuadrado.
2. Escribir la lista de elementos del grupo $\mathfrak{S}_4$ de permutaciones de cuatro letras. Encontrar los subgrupos de este grupo isomorfos a los grupos del rectángulo, del triángulo equilátero, del cuadrado.

[001306]

Ejercicio 3520 Permutaciones de un conjunto de n elementos

1. Una permutación del conjunto de n elementos $\{1,2,\ldots,n\}$ es una biyección de este conjunto en sí mismo. Es conveniente designar un tal permutación s por la siguiente tabla de valores :
$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}.$$
Se denota $\mathfrak{S}_n$ el conjunto de estas permutaciones para n dado.
2. Escribir los elementos de $\mathfrak{S}_2$ y de $\mathfrak{S}_3$.
3. Establecer las tablas de composición de estos dos conjuntos.
4. De la tabla de $\mathfrak{S}_3$ se pueden extraer las partes *estables* involucrando solo ciertos elementos ; ¿cuáles ? ¿Se puede encontrar todos ?
5. ¿Se ven analogías (totales o parciales) entre estas tablas y las situaciones encontradas anteriormente ?
6. Se pueden obtener todos los elementos de $\mathfrak{S}_3$ a partir de la composición de algunos de ellos ; ¿cuáles ?
7. ¿Cuántos elementos tiene $\mathfrak{S}_n$? ¿Cuántas cajas contiene la tabla de composición de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5,\ldots$? ¿Se puede estudiar $\mathfrak{S}_4$ y $\mathfrak{S}_5$ a partir de estas tablas ?

[001307]

Ejercicio 3521

Sean las cuatro funciones de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$
$$f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\frac{1}{x} \qquad f_3(x)=-x \qquad f_4(x)=-\frac{1}{x}$$
Demostrar que $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ es un grupo por la ley $\circ$. [001308]

Ejercicio 3522

Demostrar que solo existe una tabla posible para un grupo de orden 3. ¿Es cierto para 4 ? [001309]

Ejercicio 3523

Demostrar que si X contiene al menos tres elementos, entonces $\sigma(X)$ no es abeliano. [001310]

Ejercicio 3524

¿Los siguientes conjuntos, por las leyes consideradas, son grupos ?

1. $]-1,1[$ dotado de la ley definida por $x\star y=\frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$, para la multiplicación usual ;
3. $\mathbb{R}_+$, para la multiplicación usual ;
4. $\{x\in\mathbb{R}\mapsto ax+b : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R}\}$, para la ley de composición de aplicaciones.

Solución ▼ [001311]

Ejercicio 3525

Sea $K=\{\mathrm{Id},f_1,f_2,f_3\}$, donde f_1, f_2, y f_3 son las permutaciones de $E=\{1,2,3,4\}$ definidas por
$$f_1=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{smallmatrix}\right), f_2=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{smallmatrix}\right), f_3=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{smallmatrix}\right).$$

Demostrar que K es un subgrupo de $\mathscr{S}_4$. [001312]

Ejercicio 3526

Sea el conjunto

$$\mathscr{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Demostrar que, dotado de la multiplicación de matrices usual, $\mathscr{J}$ es un grupo abeliano. [001313]

Ejercicio 3527

Para la multiplicación usual de matrices cuadradas, son los siguientes conjuntos grupos :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\} \ ?$$

Solución ▼ [001314]

Ejercicio 3528

Sea G un conjunto provisto de una ley de composición interna asociativa, admitiendo un elemento neutro a la derecha y tal que cada elemento de G admite un simétrico a la derecha. Demostrar que G es un grupo. [001315]

Ejercicio 3529

Sean $(G,\cdot)$ un grupo y $a,b \in G$. Se supone que

$$(1) : ab^2 = b^3 a \quad \text{y} \quad (2) : ba^2 = a^3 b.$$

1. Demostrar, usando solo (1), que $a^2 b^8 a^{-2} = b^{18}$ ya que $a^3 b^8 a^{-3} = b^{27}$.
2. Deducir, utilizando (2), que $a^3 b^8 a^{-3} = b^{18}$ y finalmente que $a = b = 1$.

[001316]

Ejercicio 3530

1. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ provisto de la ley $\star$ definida por $\forall a,b \in \mathbb{R}, a \star b = a + b + ab$ ¿es un grupo ?
2. El conjunto $E = \{-1, 1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$ dotado de la ley usual de multiplicación en $\mathbb{C}$, ¿es un grupo ?
3. ¿El conjunto $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ dotado de la ley de multiplicación usual de las matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, es un grupo ?
4. ¿El conjunto $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ de matrices simétricas reales de orden 2 dotado de la ley de multiplicación usual de las matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ es un grupo ?

[001317]

Ejercicio 3531

Sean $(G,\star)$ y $(H,\triangle)$ dos grupos. Se define en $G \times H$ la ley $\heartsuit$ por $(x,y)\heartsuit(x',y') = (x \star x', y \triangle y')$.

1. Demostrar que $(G \times H, \heartsuit)$ es un grupo.
2. Si G es de cardinal 2, hacer la tabla de $G \times G$ y reconocerla entre los ejemplos de los ejercicios anteriores.

[001318]

Ejercicio 3532

Demostrar que si H y K son subgrupos de G, entonces $H \cap K$ es un subgrupo de G. ¿Es cierto para $H \cup K$?

[001319]

Ejercicio 3533

Si G es un grupo, se llama el centro de G y se denota $Z(G)$ el conjunto $\{x \in G / \forall y \in G, xy = yx\}$.

1. Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo de G.
2. Demostrar que G es conmutativo si y solo si $Z(G) = G$.
3. Calcular $Z(\sigma_3)$.

[001320]

Ejercicio 3534

Se nombra $M_n(\mathbb{Z})$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$, con coeficientes enteros relativos.
– Sea $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Demostrar que para que M admite un elemento inverso de $M_n(\mathbb{Z})$ es necesario y suficiente que $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
– Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z}); \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. [001321]

Ejercicio 3535

1. ¿El conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?
2. ¿El conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}^*$ y $b \in \mathbb{R}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?
3. ¿Existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto de matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $a \leqslant M$ forma un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Solución ▼ [001322]

Ejercicio 3536

Sea G un grupo, H y K dos subgrupos de G. Demostrar que $H \cup K$ es un subgrupo de G si y solo si $H \subset K$ o $K \subset H$.

Solución ▼ [001323]

Ejercicio 3537

Determinar el subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por los enteros 24, 36 y -54. [001324]

Ejercicio 3538

Las preguntas son independientes. Sea j el número complejo $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Determinar el subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ generado por i y j.

2. Determinar el subgrupo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ generado por i y j.

[001325]

Ejercicio 3539

Sea G un grupo generado por a y b. Demostrar que $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq Z(G)$, donde $Z(G)$ designa el centro de G.

Solución ▼ [001326]

Ejercicio 3540

Sea G un subgrupo de $(\mathbb{R},+)$, con $G \neq \{0\}$.

1. Demostrar la existencia de $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$.
2. Si $\alpha > 0$, demostrar que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Si $\alpha = 0$, demostrar que G es denso en $\mathbb{R}$.

[001327]

Ejercicio 3541

Sea G un grupo. Demostrar que el conjunto $\operatorname{Aut}(G)$ de los automorfismos de G es un grupo para la ley de composición. Sea H un subgrupo de $\operatorname{Aut}(G)$, y $\pi : G \to \wp(G)$ definida por $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Demostrar que $\pi(G)$ es una partición de G. [001328]

Ejercicio 3542

Sea E un conjunto provisto de una ley interna $\star$. Se llama traslación a la derecha (resp. a la izquierda) por $a \in E$, la aplicación d_a (resp. g_a) de E en E definida por $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

1. Demostrar que en un grupo las traslaciones derecha e izquierda son biyecciones.
2. Recíprocamente, si la ley $\star$ de E es asociativa, y que las traslaciones derecha e izquierda son biyecciones, se va a demostrar que $(E,\star)$ es un grupo.
   (a) Demostrar que para todo $x \in E$, existe un único elemento $e_x \in E$ (resp. $f_x \in E$) tal que $e_x \star x = x$ (resp. $x \star f_x = x$).
   (b) Si $x, y \in E$, demostrar que $e_x = e_y$ (denotado e de ahora en adelante) y $f_x = f_y$ (denotado f de ahora en adelante).
   (c) Demostrar que $e = f$ (denotado e de ahora en adelante).
   (d) Demostrar que para todo $x \in E$, existe un único elemento $\bar{x} \in E$ (resp. $\bar{\bar{x}} \in E$) tal que $\bar{x} \star x = e$ (resp. $x \star \bar{\bar{x}} = e$).
   (e) Demostrar que $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.
   (f) Concluir.

[001329]

Ejercicio 3543

Si K es un subgrupo de H y H un subgrupo de G, demostrar que K es un subgrupo de G. [001330]

Ejercicio 3544

1. Sea $(G,\cdot)$ un grupo. Demostrar la equivalencia de :

   i) G es abeliano.

   ii) Para todo $a,b \in G$, se tiene $(ab)^2 = a^2b^2$.

   iii) Para todo $a,b \in G$, se tiene $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

   iv) La aplicación f de G en G definida por $f(x) = x^{-1}$ es un automorfismo.
2. Deducir que si para todo $x \in G$, $x^2 = e$, entonces G es abeliano.

[001331]

Ejercicio 3545

1. ¿Los conjuntos $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*,\mathbb{C},\mathbb{C}^*$ dotados de las leyes $+$ o $\times$ son grupos ? Cuando es el caso, buscar subgrupos no triviales.
2. ¿$\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax+b : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ dotado de la ley de composición de aplicaciones es un grupo ?

[001332]

Ejercicio 3546

¿Cuál es el subgrupo más pequeño de $(\mathbb{R},+)$ (resp de $(\mathbb{R}^*,\times)$) que contiene 1 ? ¿Que contiene 2 ? [001333]

Ejercicio 3547

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ fijado. Demostrar que $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{C},\times)$. ¿Para qué valores de λ se encuentran subgrupos bien conocidos ? ¿Cómo son las curvas S_λ ? ¿Qué se puede decir, en términos de morfismo, de la aplicación $t \mapsto \exp(i\lambda t)$? [001334]

Ejercicio 3548

Describir todos los homomorfismos de grupo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Determinar cuáles son inyectivas y cuáles sobreyectivas.

Solución ▼ [001343]

Ejercicio 3549

Para todo par (a,b) de $\mathbb{R}^2$, se escribe la matriz $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Sea $\mathscr{S} = \{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$. Sea la aplicación $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}, M_{a,b} \mapsto a^2+b^2$.

1. Demostrar que $\mathscr{S}$ es un grupo para la ley de multiplicación usual de matrices cuadradas.
2. Demostrar que f es un morfismo del grupo $(\mathscr{S},\times)$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$.

[001344]

Ejercicio 3550

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ la aplicación que a todo $x \in \mathbb{R}$ asociada $\mathrm{e}^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Demostrar que f es un homomorfismo de grupos. Calcular su núcleo y su imagen. ¿f es inyectiva ?

Solución ▼ [001345]

Ejercicio 3551

Traducir en términos de homomorfismo de grupos las siguientes propiedades tradicionales :

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; 2. $\det(MM') = \det(M)\det(M')$; 3. $|zz'| = |z||z'|$;
4. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$; 5. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'}$; 6. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

[001346]

Ejercicio 3552

Para todo par (a,b) de $\mathbb{R}^2$, se establece $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\mathscr{S} = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ y $\mathscr{S}^* = \mathscr{S} \setminus \{M_{0,0}\}$. Sea la aplicación $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, $M_{a,b} \mapsto a + ib$.

1. (a) Demostrar que $\mathscr{S}$ es un subgrupo del grupo aditivo usual $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Demostrar que $\mathscr{S}^*$ es un subgrupo multiplicativo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Demostrar que f es un isomorfismo del grupo $(\mathscr{S}, +)$ en el grupo aditivo $\mathbb{C}$.
3. (a) Demostrar que f define un homomorfismo del grupo $(\mathscr{S}^*, \times)$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$.
   (b) Determinar el núcleo y el rango de este homomorfismo.
4. Demostrar que $\Omega = \left\{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1\right\}$ es un subgrupo normal del grupo multiplicativo $\mathscr{S}^*$.

[001347]

Ejercicio 3553

Sea G un grupo. Demostrar que la aplicación $x \to x^{-1}$ es un morfismo si y solo si G es conmutativo. Se supone G finito ; sea ϕ un morfismo involutivo de G cuyo único punto fijo es e, demostrar que :

$$\forall z \in G,\ \exists t \in G,\ z = t(\phi(t))^{-1}.$$

Deducir ϕ ya que G es conmutativo. [001348]

Ejercicio 3554

Demostrar que los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ son isomorfos. [001349]

Ejercicio 3555

Demostrar que $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$ es isomorfo a $\mathbb{U}_6$. ¿Es $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ isomorfo a $\mathbb{U}_4$? ¿Se puede determinar bajo qué condición $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ es isomorfo a $\mathbb{U}_{nm}$? [001350]

Ejercicio 3556

Sea G un grupo.

1. Demostrar que el conjunto de automorfismos de G dotado de la ley de composición de aplicaciones es un grupo. Este grupo es denotado $\mathrm{Aut}\,(G)$.
2. Verificar que la aplicación $\phi : G \to \mathrm{Aut}\,(G)$ que se asocia con $g \in G$ la aplicación $\phi_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ es un morfismo de grupos. Determinar su núcleo $Z(G)$, llamado *centro* de G.
3. Determinar $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q})$ y $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$.

[001351]

Ejercicio 3557

Sea $(G, \cdot)$ un grupo, se llama conjugación por $a \in G$, la aplicación f_a de G en G definida por $f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$.

1. Demostrar que f_a es un automorfismo de G.
2. Sea $\Gamma = \{f_a : a \in G\}$. Demostrar que $(\Gamma, \circ)$ es un grupo.
3. Sea $\Phi : G \to \Gamma, a \mapsto f_a$. Verificar que Φ es un morfismo. ¿Es inyectivo ? (Indicación : especificar este morfismo cuando G es abeliano).

[001352]

Ejercicio 3558

1. ¿Los subgrupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son isomorfos ?
2. ¿Los subgrupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ son isomorfos ?

[001353]

Ejercicio 3559

Demostrar que los grupos multiplicativos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no son isomorfos.

Solución ▼ [001354]

Ejercicio 3560

1. Se supone que φ es un isomorfismo de $(G, *)$ sobre $(G', \diamond)$. Si e es el elemento neutro de G, que se puede decir de $\varphi(e)$? Si x' es la inversa de x en G, ¿que se puede decir de $\varphi(x')$? Si G es de orden n, ¿qué se puede decir del orden de G' ?
2. ¿Se puede dar ejemplos de grupos, de grupos isomorfos ?
3. Si $(G, *)$ es un grupo finito y si establece la tabla de la ley $*$, ¿se puede encontrar el mismo elemento dos veces en la misma fila, en la misma columna ? Establecer posibles tablas de composición para grupos a 2, 3, 4 elementos. ¿Se pueden dar ejemplos de grupos correspondientes a estas tablas ? Eventualmente, encontrar los grupos isomorfos.

[001385]

Ejercicio 3561

Sean p un número primo y G un grupo de orden p. Demostrar que G es cíclico y dar la lista de generadores de G.

Solución ▼ [001386]

Ejercicio 3562

Sea G un grupo de orden pn, con p primero.

1. Se consideran dos subgrupos H y H' de G de orden p, con $H \neq H'$. Demostrar que $H \cap H' = \{e\}$.
2. Deducir que el número de elementos de orden p en G es múltiplo de $p - 1$.

Solución ▼ [001387]

Ejercicio 3563

Determinar (módulo isomorfismo) todos los grupos de orden 4. [001388]

Ejercicio 3564

1. Sea G un grupo en el que todo elemento (distinto del elemento neutro) es de orden 2. Demostrar que G es conmutativo.
2. Sea G un grupo de orden par. Demostrar que G contiene al menos un elemento de orden 2.

Solución ▼ [001389]

Ejercicio 3565

Demostrar que todo morfismo de grupos de $\mathbb{Q}$ en un grupo finito G es trivial. [001390]

Ejercicio 3566

Sea G un grupo y H una parte finita no vacía de G. Se supone que H es estable para la ley de G. Demostrar H es un subgrupo de G. [001391]

Ejercicio 3567

Sea G un grupo finito de cardinal $2n$ ($n \geqslant 2$), teniendo dos subgrupos H y H' tales que :

$$\mathrm{card}(H) = \mathrm{card}(H') = n \ \text{ y } \ H \cap H' = \{e\}.$$

1. Demostrar que $G \setminus (H \cup H')$ es un punto aislado, denotado $\{a\}$.
2. Sea $h \in H \setminus \{e\}$, demostrar que $hH' \subset \{h, a\}$, deducir que $hH' = \{h, a\}$ ya que $n = 2$.
3. Se escribe $G = \{a, e, h, h'\}$, dar la tabla de G (luego un ejemplo de tal grupo).

[001392]

Ejercicio 3568

Sea G el conjunto de matrices de orden 2 invertibles.

1. Demostrar que G es un grupo para el producto matricial. ¿Es conmutativo?
2. Demostrar que si $A \in G, B \in G$ verifican $A^2 = B^2 = ABAB = I$, entonces $A = A^{-1}, B = B^{-1}$ y $AB = BA$.
3. Encontrar dos elementos de G verificando $A^2 = B^2 = I$ y $AB \neq BA$.

[002438]

Ejercicio 3569

Sea G el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que es un grupo multiplicativo isomorfo al grupo aditivo real. [002439]

Ejercicio 3570

Sea G el grupo multiplicativo de matrices complejas de orden n. Entre los siguientes subconjuntos de G, ¿cuáles son subgrupos?

- las matrices con coeficientes reales;
- las matrices invertibles;
- las matrices reales invertibles con coeficientes positivos;

– las matrices diagonales invertibles ;
– las matrices verificando $a_{i,i} \neq 0$, $\forall i$, y triángulos superiores ($a_{i,j} = 0$, si $i > j$).
– las matrices verificando $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$, $\forall i, j$.

[002440]

Ejercicio 3571

Se provee el conjunto $G = \{a,b,c,d\}$ de una ley de composición interna cuya tabla pitagórica es

$\star$	a	b	c	d
a	c	a	c	a
b	a	d	c	b
c	c	c	c	c
d	a	b	c	d

(La primera línea se lee $a \star a = a$, $a \star b = a$, $a \star c = c, \ldots$.)

1. ¿Tiene esta ley un elemento neutro ?
2. ¿Es esta ley conmutativa ?
3. ¿Es esta ley asociativa ?
4. ¿Es una ley de grupo ?

[002727]

Ejercicio 3572

Se define una permutación σ del conjunto $\{1,2,\ldots,15\}$ por la sucesión finita de enteros $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(15)$. Por ejemplo,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 7 & 1 & 14 & 3 & 12 & 8 & 9 & 6 & 15 & 13 & 4 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

significa $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 7$, etc. ... Sean

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 & 2 & 15 & 4 & 11 & 13 & 10 & 12 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 15 & 2 & 14 & 3 & 13 & 4 & 12 & 5 & 11 & 6 & 10 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Para $i = 1, \ldots, 4$,
   — descomponer σ_i en ciclos con soportes disjuntos.
   — Determinar el orden de σ_i
   — Determinar el signo de σ_i.
2. Calcular las potencias sucesivas del ciclo $\sigma = (10\ 15\ 11\ 13)$. ¿Cuál es la inversa de σ_1 ?
3. Calcular σ_2^{2008}.
4. Determinar, sin fatiga excesiva, el signo de
$$\sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-4} \circ \sigma_4^3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4^{-6}.$$
5. ¿Cuántas permutaciones g hay de $\{1,\ldots,15\}$ tales que $\sigma_1 \circ g = g \circ \sigma_1$?

Ejercicio 3573

1. Demostrar que los conjuntos G siguientes, dotados de las leyes $\star$ dadas, son grupos. Especificar cuál es el elemento neutro de G y cuál es la inversa de un elemento cualquiera $x \in G$.
   (a) $G = \mathbb{Z}$, $\star =$ la suma de los números ;
   (b) $G = \mathbb{Q}^*$ (conjunto de racionales no nulos), $\star =$ la multiplicación de números ;
   (c) $G = \mathbb{Q}^{+*}$ (conjunto de racionales estrictamente positivos), $\star =$ la multiplicación de números ;
   (d) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ la suma de los números ;
   (e) $G = \mathbb{R}^{+*}$, $\star =$ la multiplicación de números ;
   (f) $G = \mathbb{C}$, $\star =$ la suma de los números ;
   (g) $G = \mathbb{C}^*$, $\star =$ la multiplicación de números ;
   (h) $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $\star =$ la multiplicación de números ;
   (i) $G = \{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $\star =$ la multiplicación de números (n es un entero fijo) ;
   (j) $G =$ el conjunto de biyecciones de un conjunto no vacío E, $\star =$ la composición de las aplicaciones ;
   (k) G = el conjunto de isometrías del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ (dotado del producto escalar estándar), $\star =$ la composición de las aplicaciones ;
   (l) G = el conjunto de isometrías del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ (dotado del producto escalar estándar) que conservan una figura dada, $\star =$ la composición de las aplicaciones.
2. Dar un morfismo de grupos entre $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$;
3. Dar un morfismo de grupos entre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$;
4. Dar un morfismo de grupo sobreyectivo entre $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;

[002729]

Ejercicio 3574

¿Decir por cuál(es) razón(es) las operaciones $\star$ siguientes no proporcionan a los conjuntos G dados una estructura de grupo ?

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ la suma de los números ;
(b) $G = \mathbb{N}^*$, $\star =$ la multiplicación de números ;
(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ la multiplicación de números ;

[002730]

Ejercicio 3575 Grupo producto

Sean G, H dos grupos de multiplicación. Se provee $G \times H$ con la operación :

$$\forall g, g' \in G,\ \forall h, h' \in H, \qquad (g,h)\cdot(g',h') = (gg', hh').$$

Demostrar que $\cdot$ define una ley de grupo sobre $G \times H$. [002965]

Ejercicio 3576 Ensayo de tablas

¿Son las siguientes operaciones leyes de grupos ?

1.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Solución ▼ [002966]

Ejercicio 3577 Traslaciones sobreyectivas

Sea G un conjunto no vacío con una operación interna $\cdot$ asociativa tal que :

$$\forall a,b \in G,\ \exists\ x,y \in G \text{ tal que } a = x\cdot b = b\cdot y.$$

Demostrar que $(G,\cdot)$ es un grupo. [002967]

Ejercicio 3578 Transporte de estructuras

Sea G un grupo multiplicativo, E un conjunto, y $\phi : G \to E$ una biyección. Se define una operación $\star$ sobre E por :

$$\forall x,y \in E,\ x\star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

Demostrar que $\star$ es una ley de grupo y que los grupos G y E son isomorfos. [002968]

Ejercicio 3579 Transporte de estructuras

Para todo $x,y \in \mathbb{R}$, se establece $x\star y = x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$.

1. Verificar que $\sqrt{1+(x\star y)^2} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy$.
2. Demostrar que $(\mathbb{R},\star)$ es un grupo.
3. Demostrar que la aplicación sh es un isomorfismo entre $(\mathbb{R},+)$ y $(\mathbb{R},\star)$.

[002969]

Ejercicio 3580 Transporte de estructuras

Para todo $x,y \in \mathbb{R}$, se establece $x\star y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Demostrar que $(\mathbb{R},\star)$ es un grupo isomorfo a $(\mathbb{R},+)$. [002970]

Ejercicio 3581 Ley asociativa regular

Sea E un conjunto finito equipado con una operación interna $*$ asociativa por la cual cada elemento es regular a la derecha y a la izquierda. Demostrar que E es un grupo. [002971]

Ejercicio 3582 Parte finita estable por producto

Sea G un grupo multiplicativo y H una parte finita de G no vacío, estable por multiplicación. Demostrar que H es un subgrupo de G. [002972]

Ejercicio 3583 Centro de un grupo y conmutación

Sea G un grupo multiplicativo. Se denota $Z(G) = \{a \in G$ tal que $\forall\, b \in G$, se tiene $ab = ba\}$ (*centro de G*), y para $a \in G$: $C(a) = \{b \in G$ tal que $ab = ba\}$ (*conmutante de a*). Demostrar que $Z(G)$ y $C(a)$ son subgrupos de G. [002973]

Ejercicio 3584 Ley Δ

Sea E un conjunto y $G = \mathscr{P}(E)$.

1. Demostrar que (G, Δ) es un grupo conmutativo.
2. Para $a \in E$, se denota $\phi_a : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definida por $\begin{cases} \dot{0} & \text{si } a \notin X \\ \dot{1} & \text{si } a \in X. \end{cases}$

   Demostrar que ϕ_a es un morfismo de grupos.
3. Se toma $E = \{1, \ldots, n\}$ y se denota $\Phi : G \to \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^n$,
   $X \mapsto (\phi_1(X), \ldots, \phi_n(X))$.

   Demostrar que Φ es un isomorfismo de grupos.

[002974]

Ejercicio 3585 Subgrupos anidados

Sea G un grupo aditivo, y H, K, L tres subgrupos de G verificando : $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$, $H + L = K + L$. Demostrar que $H = K$. [002975]

Ejercicio 3586 $\operatorname{card}(HK)$

Sea G un grupo finito y H, K dos subgrupos de G. Se considera la aplicación $\phi : H \times K \to G, (h,k) \mapsto hk$

1. ¿Es ϕ un morfismo de grupos ?
2. Sea $z \in HK$, $z = h_0 k_0$, con $h_0 \in H$ y $k_0 \in K$. Demostrar que los antecedentes de z por ϕ son los pares $(h_0 t, t^{-1} k_0)$, con $t \in H \cap K$.
3. Deducir que $\operatorname{card}(HK) \operatorname{card}(H \cap K) = \operatorname{card}(H) \operatorname{card}(K)$.
4. Demostrar que : (HK es un subgrupo de G) $\iff$ ($HK \subset KH$) $\iff$ ($HK = KH$).

[002976]

Ejercicio 3587 Subgrupos de un grupo cíclico

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $d = k \wedge n$.

1. Determinar el orden de $\dot{k}$ en G.
2. Demostrar que $\dot{k}$ y $\dot{d}$ generan el mismo subgrupo de G.
3. ¿Cuáles son todos los subgrupos de G ?

[002978]

Ejercicio 3588

1. Sea $(G, \star)$ un grupo. Dar la definición del subgrupo generado por una parte P de G.
2. Sea $(G, \star)$ un grupo. Describir el subgrupo generado por un elemento g de G.
3. Describir el subgrupo generado por un elemento n de $(\mathbb{Z}, +)$.

Ejercicio 3589

1. Decir si los siguientes pares son grupos : $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{C}^*,+)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. Determinar una ley de composición interna para la cual $\{-1,1\}$ es un grupo. La misma pregunta para $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
3. Sea $(G,\star)$ un grupo y E un conjunto. Demostrar que el conjunto $\mathscr{A}(E,G)$ de las aplicaciones de E en G se puede dotar de una estructura natural de grupo.
4. El conjunto $\{a,b,c\}$ dotado con la ley de composición interna definida por la tabla

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	b	a

   ¿admite un elemento neutro ?, ¿es conmutativo ?, ¿todo elemento admite un simétrico ?, ¿es un grupo ?
5. ¿La unión de dos subgrupos de un grupo G es un subgrupo ? ¿Y la intersección ?
6. Dar un ejemplo de un conjunto con una ley de composición interna sin un elemento neutro.

[007291]

Ejercicio 3590

Sea $(E,\star)$ un conjunto dotado de una ley asociativa interna con un elemento neutro, denotado ε.

1. Demostrar que el elemento neutro es único.
2. Sea x un elemento que admite un simétrico x'. Demostrar que el simétrico es único.
3. Sean x e y en E que admiten un simétrico. Determinar un simétrico de $x\star y$.

[007292]

Ejercicio 3591

1. Sea H un subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ conteniendo $\{2,7\}$. Demostrar que 1 está en H.
2. Demostrar que 1 está en el subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ generado por $\{2,7\}$.
3. ¿Cuál es el subgrupo generado por $\{2,7\}$?

[007293]

Ejercicio 3592

Sea a y b dos enteros no todos nulos y $\langle a,b\rangle$ el subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ generado por $\{a,b\}$.

1. Demostrar que $a\mathbb{Z}$ está incluido en $\langle a,b\rangle$.
2. Demostrar que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ está incluido en $\langle a,b\rangle$.
3. Demostrar que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$, conteniendo $\{a,b\}$.
4. Demostrar que $\langle a,b\rangle$ está incluido en $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.

5. Demostrar que $\langle a,b\rangle$ es $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.
6. Demostrar que $\langle a,b\rangle = a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \mathrm{mcd}(a,b)\mathbb{Z}$.

[007294]

Ejercicio 3593

1. Determinar $45\mathbb{Z}\cap 60\mathbb{Z}$.
2. Determinar $56\mathbb{Z}+63\mathbb{Z}$.
3. Encontrar los subgrupos de $\mathbb{Z}$ conteniendo $48\mathbb{Z}$ y dar las relaciones de inclusión existentes entre ellos.

[007295]

Ejercicio 3594

1. La aplicación $F:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$, $n\mapsto 1$ ¿es un morfismo de grupo ?
2. Determinar dos morfismos de grupo de $(\mathbb{R},+)$ a $(\mathbb{R}_+^\star,\times)$.

[007296]

Ejercicio 3595

1. Sea F un morfismo de grupos de $(\mathbb{Z},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$. Demostrar que es suficiente conocer $F(1)$, para conocer la imagen de cada entero por F.
2. ¿Existe un morfismo de grupos de $(\mathbb{Z},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$ tal que $F(2)=3$?
3. Determinar todos los morfismos de grupo de $(\mathbb{Z},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$ tales que $F(2)=\ 4$.
4. Demostrar que una condición necesaria y suficiente en $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, para que exista un morfismo de grupos de $(\mathbb{Z},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$ tal que $F(2)=a$ y $F(5)=b$ es $5a=2b$.

[007297]

Ejercicio 3596

Sea $E=\{a,b\}$ un conjunto de dos elementos. Se busca determinar todas las estructuras de grupo en este conjunto.

1. Si a es el elemento neutro, ¿cuál debe ser el simétrico de b ? Deducir la tabla de multiplicar en este caso.
2. ¿Cuántas estructuras de grupo diferentes hay en E ?

[007298]

Ejercicio 3597

Sea $E=\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\}$, y $\star$ la ley de composición interna definida por :

$$(x,y)\star(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx').$$

¿Es $(E,\star)$ un grupo ?, ¿es conmutativo ? [007299]

Ejercicio 3598

Sea E un conjunto, se denota $\mathscr{P}(E)$ el conjunto de partes de E. Si $A,B \in \mathscr{P}(E)$, se denota $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ la *diferencia simétrica* de A y B. Demostrar que para toda parte A de E, $A^2 = A$ y que el triplete $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$ forma un anillo conmutativo. [007300]

Ejercicio 3599

Sea G un grupo tal que $\forall x \in G, x\star x = e_G$. Demostrar que todo elemento de G es su propia inversa. Calcular para todo $(a,b)\in G^2$, el producto $a\star b\star a^{-1}\star b^{-1}$ y demostrar que G es abeliano. [007301]

Ejercicio 3600

Aquí hay una la tabla de un grupo G.

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	d	j	g		h	i		e	f	b		k
b		g	j		l	e	d	i	k	a	h	
c	b	a	d			k	j	l	e	g	f	h
d			c	d				h	i			l
e		f		e	d	b	l	j	c	h	a	g
f	i	l	h			d	e	c	a	k	j	b
g	j	d		g	f	l		k	h	c	i	e
h	l	i		h	a	j	k	b		e	d	c
i	f		e	i	c	a	h		d	l	b	j
j		c	b	j	k		a	f	l	d	e	i
k	e	h	l	k	j	c	i	d			g	a
l		e	k	l	b	g		a	j	i	c	d

1. Completarla.
2. ¿El grupo es conmutativo ?
3. Determinar el orden de b.

[007343]

Ejercicio 3601

Se considera el grupo $(\mathbb{F}_{53})^{\times}$. ¿Cuáles son los posibles órdenes de un elemento de este grupo ? ¿Cuántos elementos de cada orden tiene este grupo ? Determinar justificando un generador de este grupo. [007344]

Ejercicio 3602

Demostrar que todo grupo cíclico de orden n es isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [007354]

Ejercicio 3603

Demostrar que las dos permutaciones $\tau = (1,2)$ y $c = (1,2,3)$ generan el grupo simétrico $\mathscr{S}_3$. Se puede construir un árbol cuyo Id es la raíz y tal que en cada nodo comienzan dos ramas, uno marcado τ, el otro c. [007355]

Ejercicio 3604

1. Dar la lista de las permutaciones del grupo simétrico $\mathscr{S}_4$.
2. ¿Las dos permutaciones $\tau = (1,3)$ y $c = (1,2,3,4)$ generan el grupo simétrico $\mathscr{S}_3$?

[007356]

Ejercicio 3605

1. Construir un hexágono regular con regla y compás E.
2. ¿Una traslación de vector no nula puede preservar globalmente el hexágono E ?
3. ¿Cuáles son los centros y ángulos de las rotaciones del plano euclidiano orientado que conserva globalmente el hexágono E ?
4. ¿Cuáles son las simetrías ortogonales del plano euclidiano orientado que conservan globalmente el hexágono E ?
5. ¿Cuáles son las simetrías ortogonales deslizadas del plano euclidiano orientado que conservan globalmente el hexágono E ?
6. Sea r una rotación de ángulo minimal no nula que conserva globalmente el hexágono E y s una simetría ortogonal que conserva globalmente E. ¿Cuál es el orden de r?, ¿y el de s?
7. Escribir r como compuesta de s seguida de otra simetría ortogonal. Determinar la naturaleza y los elementos característicos (centro, eje, ángulo...) de la isometría rs.
8. Dar la lista los elementos del grupo D_{12} de isometrías del plano euclidiano orientado que conservan globalmente el hexágono E. Se usa en las notaciones solo una rotación r y una simetría s.
9. Utilizando la escritura de r como composición de dos simetrías, calcular sr.
10. Deducir los productos $rsrs$, rsr^2s, r^3sr^4s.

[007357]

Ejercicio 3606

1. Demostrar que el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ de matrices invertibles de tamaño 2×2, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es un grupo de cardinal $(2^2-1)(2^2-2) = 6$.
2. Sea ha visto en el curso que todo grupo de orden 6 es isomorfo ya sea al grupo cíclico $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ya sea al grupo simétrico $\mathscr{S}_3$ y que estos dos grupos no son isomorfos. ¿A cuál de estos dos grupos, el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ es isomorfo ?

[007358]

Ejercicio 3607

1. Enunciar el teorema de Lagrange.
2. Dar un ejemplo de dos grupos finitos no isomorfos del mismo orden. Justificar el hecho de que los dos grupos escogidos no son isomorfos.
3. Dar la definición de un subgrupo *normal*.
4. ¿El anillo $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z},+,\times)$ es íntegro ? Justificar.
5. Efectuar la división euclidiana de X^3+2X^2-5X+8 por X^2-1 en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

6. Efectuar la división euclidiana de X^3+2X^2-5X+8 por $2X^2-1$ en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

[007359]

Ejercicio 3608

1. Calcular los productos en $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ y $(1,2)(2,3)(1,2)$.
2. ¿El conjunto de transposiciones de $\mathscr{S}_7$ es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$?

Solución ▼ [007360]

Ejercicio 3609

1. Demostrar que 1 está en el subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ generado por $\{3,8\}$.
2. ¿Cuál es el subgrupo generado por $\{3,8\}$?
3. ¿Cuál es el subgrupo generado por $\{3,8,15\}$?

[007361]

Ejercicio 3610

1. ¿El subconjunto $28\mathbb{Z}+18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$? Si es sí, determinarlo.
2. ¿El subconjunto $28\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$? Si es sí, determinarlo.
3. ¿El subconjunto $28\mathbb{Z}\cap 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$? Si es sí, determinarlo.
4. Dar un ejemplo de un grupo conmutativo no cíclico.
5. Dar un ejemplo de un grupo infinito no conmutativo.
6. Dar la definición de anillo.
7. Demostrar que todo grupo finito de orden primo es cíclico.

[007362]

Ejercicio 3611

1. ¿Cuáles son los posibles órdenes de los elementos de un grupo de orden 6 ?
2. ¿Cuáles son los elementos invertibles de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\times)$?
3. Escribir la tabla de multiplicar de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$.
4. Determinar si existe un generador de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$.
5. ¿Cuántos $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$ hay generadores ?
6. ¿El grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ es cíclico ?
7. ¿El grupo de los invertibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ es cíclico ?

Solución ▼ [007363]

Ejercicio 3612

En el grupo $\mathscr{S}_7$ de permutaciones del conjunto finito $\{1,2,\ldots,7\}$ se consideran las dos permutaciones

$$\alpha=(157)(43) \quad \text{y} \quad \beta=(26).$$

1. Demostrar que $\alpha\beta = \beta\alpha$.
2. Determinar el orden de α y de β.
3. Calcular α^{-1} y β^{-1}.
4. Demostrar que $S = \{\alpha^i\beta^j, 0 \leqslant i \leqslant 5, 0 \leqslant j \leqslant 1\}$ es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$.
5. Calcular el orden de S.
6. Demostrar que todo subgrupo de $\mathscr{S}_7$ que contiene α y β contiene S.
7. ¿Qué se puede deducir de las preguntas 4. y 6. precedentes ?
8. Determinar el orden de $\alpha\beta$.
9. ¿El subgrupo S es cíclico ?

Solución ▼ [007364]

Ejercicio 3613

---

1. Calcular los productos de matrices ADA^{-1} y BDB^{-1} en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. El subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ de matrices diagonales invertibles es normal en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$?
3. Calcular el producto de matrices AB en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.
4. ¿La aplicación traza de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ en $(\mathbb{R},+)$ es un morfismo de grupo ?

Solución ▼ [007365]

Ejercicio 3614

---

1. Descomponer en producto de ciclos con soportes disjuntos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar su orden.
3. Escribir su potencia σ^6.
4. Escribir su inversa como producto de ciclos con soportes disjuntos.
5. Descomponerla en un producto de menos de 7 transposiciones.

[007366]

Ejercicio 3615

---

1. ¿Cuáles son los elementos invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$?
2. Determinar un generador g del grupo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ de los invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.
3. Escribir cada elemento de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ como potencia de g.

[007367]

128 203.02 Orden de un elemento

Ejercicio 3616

Se llama *orden de un elemento* de un grupo finito $(G,*)$ el orden del subgrupo generado en G por este elemento.

1. Demostrar que si x es de orden p, p es el entero más pequeño tal que $x^p = e$.
2. Determinar el orden de los elementos de los grupos encontrados en 1.
3. Sea $(G,*)$ un grupo finito, a un elemento de G, H un subgrupo de orden p de G; se denota aH el conjunto $\{a * y \mid y \in H\}$.
   a) Demostrar que para todo $a \in G$, aH tiene p elementos.
   b) Demostrar que si $a \in G$ y $b \in G$, $(aH = bH)$ o $(aH \cap bH = \varnothing)$.
   c) Deducir que el orden de H divide el orden de G.
4. Demostrar que si G es un grupo finito de orden n, los órdenes de todos sus elementos dividen n.
5. Encontrar los subgrupos de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$.
6. Si G es un grupo de orden 5, ¿qué se puede decir del orden de sus elementos ? Deducir las posibles tablas de composición para un grupo de orden 5. ¿Qué se puede decir de dos grupos cualesquiera de orden 5 ? Las mismas preguntas para grupos de orden 23. Generalizar.

[001335]

Ejercicio 3617

Sea H un grupo abeliano. Un elemento $x \in H$ se dice de orden finito cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la suma $x + \cdots + x$ (n-vez) sea igual a 0. Demostrar que el conjunto de elementos de orden finito de H es un subgrupo abeliano de H.

Solución ▼ [001336]

Ejercicio 3618

Sea G un grupo, e su elemento neutro. Un elemento g de G se dice *de orden* $n \in \mathbb{N}$ si $g^n = e$ y $g^k \neq e$, para todo entero $k < n$. g se dice *de orden finito* si es de orden n, para un n cualquiera.

1. Demostrar que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ contiene elementos de orden 2 y elementos que no son de orden finito.
2. Sea φ un homomorfismo de G, con valores en H y g un elemento de G de orden n. Demostrar que :
   – $\varphi(g)$ es de orden finito inferior o igual a n.
   – Si φ es inyectiva, el orden de $\varphi(g)$ es igual a n.
3. Demostrar que si G solo tiene un número finito de elementos, todos sus elementos tienen un orden finito.

Solución ▼ [001337]

Ejercicio 3619

Sea el grupo $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Determinar el subgrupo H de G generado por $\overline{6}$ y $\overline{8}$ y determinar su orden.
2. Caracterizar los generadores de G.
3. ¿Cuál es el orden del elemento $\overline{9}$?

[001338]

Ejercicio 3620

Sean E un espacio vectorial real de dimensión 2 y (e_1,e_2) una base de E. Se consideran los endomorfismos de E definidos por

$$s(e_1)=e_1,\quad s(e_2)=-e_2,\quad r(e_1)=e_2,\quad r(e_2)=-e_1.$$

1. Demostrar que r y s son automorfismos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial E.
2. Determinar el orden de s y el orden de r.
3. (a) Demostrar que $sr=-rs$.
   (b) Deducir que $G:=\{\mathrm{Id}_E,s,r,sr,-\mathrm{Id}_E,-s,-r,-s\}$ es un subgrupo del grupo lineal de E.
   (c) Demostrar que G es el subgrupo del grupo lineal $\mathrm{GL}(E)$ generado por s y t.

[001339]

Ejercicio 3621

Sean G un grupo y $x\in G$ un elemento de orden n. ¿Cuál es el orden de x^2?

Solución ▼ [001340]

Ejercicio 3622

1. Sean G un grupo y $x,y\in G$ de elementos que conmutan y de órdenes respectivos m y n primos entre sí. Demostrar que xy es de orden mn. Demostrar que la hipótesis m y n *primos entre sí* es esencial.
2. Demostrar que $A:=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ y $B:=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&-1\end{smallmatrix}\right)$ son los elementos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ de órdenes finitos y que AB no es de orden finito.

Solución ▼ [001341]

Ejercicio 3623

¿El grupo $(\mathbb{Q},+)$ es monogénico?

Solución ▼ [001342]

Ejercicio 3624 Subgrupos finitos de $\mathbb{C}^*$

Determinar todos los subgrupos finitos de $(\mathbb{C}^*,\times)$. [002982]

Ejercicio 3625 Orden de un elemento

1. Sean G y G' dos grupos y f un morfismo de G en G'. Para $a\in G$, comparar el orden de a y el de $f(a)$.
2. Sean $a,b\in G$. Comparar los órdenes de a y de bab^{-1}.
3. Sean $a,b\in G$. Comparar los órdenes de ab y de ba.

[002983]

Ejercicio 3626 Ordre de ab

Sean a,b dos elementos de un grupo multiplicativo G tales que : $\begin{cases} a \text{ es de orden } \alpha \\ b \text{ es de orden } \beta \\ \alpha \wedge \beta = 1 \\ ab = ba. \end{cases}$

Determinar el orden de ab. [002984]

Ejercicio 3627 Descomposición de un elemento de orden finito

Sea G un grupo multiplicativo y $a \in G$ de orden np, con $n \wedge p = 1$.
Demostrar que existen $b,c \in G$ únicas tales que b es de orden n, c es de orden p, $a = bc = cb$.

Indicación ▼ [002985]

129 203.03 Morfismo, isomorfismo

Ejercicio 3628 Grupo de automorfismos

Sea G un grupo multiplicativo. Se denota $\operatorname{Aut}(G)$ el conjunto de los isomorfismos $\phi : G \to G$.

1. Demostrar que $\operatorname{Aut}(G)$ es un grupo por la ley $\circ$.
2. Determinar $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Para $a \in G$ se denota $\phi_a : G \to G, x \mapsto axa^{-1}$. Demostrar que $\phi_a \in \operatorname{Aut}(G)$, y que la aplicación $a \mapsto \phi_a$ es un morfismo de grupos.

[002977]

Ejercicio 3629 Imágenes directas y recíprocas

Sea G un grupo aditivo y $f : G \to G'$ un morfismo de grupos.

1. Demostrar que para todo subgrupo H de G se tiene : $f^{-1}(f(H)) = H + \ker f$.
2. Demostrar que para todo subgrupo H' de G' se tiene : $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \operatorname{Im} f$.

[002979]

Ejercicio 3630 Morfismos entre dos grupos cíclicos

Sea G un grupo cíclico generado por a de orden n, G' un segundo grupo, y $a' \in G'$. Demostrar que existe un morfismo $\phi : G \to G'$ tal que $\phi(a) = a'$ si y solo si a' es de orden finito dividiendo n.
Aplicación : Determinar todos los morfismos : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*, \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. [002980]

Ejercicio 3631 Morfismos de $\mathbb{Q}$ aditivo

Determinar todos los morfismos de

1. $(\mathbb{Q},+)$ en $(\mathbb{Q},+)$.
2. $(\mathbb{Q},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$.
3. $(\mathbb{Q},+)$ en $(\mathbb{Q}^*,\times)$.

Solución ▼ [002981]

130 203.04 Anillo

Ejercicio 3632

Sean $a,b \in \mathbb{C}$. ¿La aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz - \overline{z}$ es un (endo)morfismo...

1. ...del grupo $\mathbb{C}$?
2. ...del anillo $\mathbb{C}$?
3. ...del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$?

[001355]

Ejercicio 3633

Sean los conjuntos

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Estudiar si, dotados con las leyes usuales, L y M son anillos, cuerpos. [001356]

Ejercicio 3634

1. Sea $D = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = 0\}$. Demostrar que D no es un ideal del anillo $\mathbb{R}[X]$ y que es un subanillo del anillo $\mathbb{R}[X]$.
2. Sea $E = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = f'(0) = 0\}$. Demostrar que D no es un subanillo del anillo $\mathbb{R}[X]$ y que es un ideal del anillo $\mathbb{R}[X]$ del cual se debe dar un generador.

[001357]

Ejercicio 3635

Se define sobre $\mathbb{R}$ las dos leyes $\oplus$ y $\otimes$ por $x \oplus y = x + y - 1$ y $x \otimes y = x + y - xy$. Demostrar que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ es un cuerpo. [001358]

Ejercicio 3636

Sea $(G,+)$ un grupo conmutativo. Se denota $\mathrm{End}(G)$ el conjunto de endomorfismos de G en el que se define la ley $+$ por $f + g : G \to G, x \mapsto f(x) + g(x)$.
Demostrar que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ es un anillo. [001359]

Ejercicio 3637

Sea $(A, +, \times)$ un anillo. Se dice que $x \in A$ es nilpotente si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

1. Demostrar que si x es nilpotente entonces $1 - x$ es invertible.
2. Demostrar que si x e y son nilpotentes y conmutan, entonces xy y $x + y$ son nilpotentes.
3. ¿Admite un cuerpo elementos nilpotentes ?

[001360]

Ejercicio 3638

Sea $(A,+,\times)$ un anillo. Se llama centro de A el conjunto $C=\{x\in A/\forall y\in A, xy=yx\}$. Demostrar que C es un subanillo de A. [001361]

Ejercicio 3639

Sean A y B dos anillos. Se define en $A\times B$ las leyes

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'), \qquad (x,y)(x',y')=(xx',yy')$$

1. Demostrar que $A\times B$, entonces es un anillo.
2. ¿Si A y B son cuerpos, también lo es $A\times B$?

[001362]

Ejercicio 3640

Demostrar que si $A_1,\dots,A_n$ son subanillos de A, entonces $A_1\cap\dots\cap A_n$ es un subanillo de A. [001363]

Ejercicio 3641

Sea $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+ib,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Demostrar que $\mathbb{Z}[i]$ es un anillo conmutativo para las leyes usuales de $\mathbb{C}$.
2. Determinar los invertibles de $\mathbb{Z}[i]$.

[001364]

Ejercicio 3642

Sea A un anillo conmutativo. Se dice que $a\in A$ es nilpotente si existe $n\in\mathbb{N}^*$ tal que $a^n=0$. Sea $\mathscr{N}(A)=\{a\in A: a \text{ es nilpotente}\}$.

1. En este problema, $A=\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Demostrar que $\overline{6}\in\mathscr{N}(A)$ ya que $\mathscr{N}(A)=\left\{\lambda\overline{6}:\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. ¿Qué se puede decir de $\mathscr{N}(A)$ si A es íntegro?
3. Demostrar que $\mathscr{N}(A)$ es un ideal de A.

[001365]

Ejercicio 3643 Extraído del examen de junio 1994

En el conjunto $\mathbb{R}^2$, se define la ley $\star$ por

$$(x_1,x_2)\star(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_1y_2+x_2y_1).$$

1. (a) Demostrar que $(\mathbb{R}^2,+,\star)$ es un anillo conmutativo denotado A.
   (b) Encontrar los divisores de 0 del anillo A.
2. Se considera la aplicación

$$f:\mathbb{R}[X]\to A,\ \ P\mapsto(P(0),\ P'(0)).$$

   (a) Demostrar que f es un homomorfismo de anillos.
   (b) ¿f es sobreyectiva?
   (c) Determinar el núcleo de f.

Ejercicio 3644 Extraído del examen de enero 1994

Se define $A = \{a + jb : a,b \in \mathbb{Z}\}$, donde $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1. Demostrar que A es un subanillo de $\mathbb{C}$. Se designa por $\mathscr{U}(A)$ el grupo de elementos invertibles de A y enfin, se establece, para todo $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.
2. (a) Demostrar que si $z \in A$, entonces $N(z) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Sea $z \in A$. Demostrar que $z \in \mathscr{U}(A)$ si y solo si $N(z) = 1$.
   (c) Sean a y b enteros. Demostrar que si $N(a + jb) = 1$, entonces $a,b \in \{-1,0,1\}$.
3. Describir el grupo $\mathscr{U}(A)$ y determinar los elementos de orden 3.
4. Sea $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C},\ P \mapsto P(j)$.
   (a) Demostrar que Φ es un homomorfismo de anillos.
   (b) Determinar el núcleo de Φ (se puede notar que $j^2 + j + 1 = 0$).
   (c) Demostrar que $\operatorname{Im}\Phi = \{a + jb : a,b \in \mathbb{Q}\}$ y que es un sub-cuerpo de $\mathbb{C}$.

[001367]

Ejercicio 3645 Según examen junio 94

1. Demostrar que $\overline{k}$ es invertible en el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si y solo si los enteros k y n son primos entre sí.
2. Sea $n = 10$ y sea G el grupo de elementos invertibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   (a) Dar la lista de los elementos de G.
   (b) ¿Cuál es el orden de $\overline{3}$? ¿G es cíclico?

[001369]

Ejercicio 3646 Bac 1978

Sea el anillo $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

1. Determinar los divisores cero del anillo A.
2. Resolver en A la ecuación $x^2 + \overline{2}x - \overline{3} = \overline{0}$.

[001370]

Ejercicio 3647

Demostrar que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un anillo principal. [001372]

Ejercicio 3648

Sea A un anillo finito conmutativo íntegro (i.e. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$). Demostrar que es un cuerpo, i.e. que todo elemento no nulo es invertible. [001373]

Ejercicio 3649

Sea A un anillo, se dice que $x \in A$ es nilpotente si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

1. Demostrar que si x es nilpotente entonces $(1 - x)$ es invertible.

2. Demostrar que si x e y son nilpotentes y conmutan, luego xy y $x+y$ son nilpotentes.
3. ¿Admite un cuerpo elementos nilpotentes ?

[001374]

Ejercicio 3650 Anillo de Boole

Sea E un conjunto finito y $A = \mathscr{P}(E)$.

1. Demostrar que $(A, \Delta, \cap)$ es un anillo conmutativo. ¿Es íntegro ?
2. Sea I un ideal de A. Demostrar que : $\begin{cases} \forall X \in I,\ \forall Y \subset X, \text{ se tiene } Y \in I \\ \forall X, Y \in I, \text{ se tiene } X \cup Y \in I. \end{cases}$
3. Deducir que $I = \mathscr{P}(E')$, con $E' \subset E$.
4. Estudiar el recíproco.
5. Si E es infinito, demostrar que $I = \{\text{partes finitas de } E\}$ es un ideal que no es de la forma $\mathscr{P}(E')$.

[003005]

Ejercicio 3651 Ideales triviales

Sea A un anillo conmutativo no nulo cuyos únicos ideales son $\{0\}$ y A. Demostrar que A es un cuerpo. [003006]

Ejercicio 3652 Ideales primos

Un ideal I de un anillo A se dice primo si : $\forall x, y \in A,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ o $y \in I$.

1. ¿Cuáles son los ideales primos de $\mathbb{Z}$?
2. Demostrar que si A es conmutativo no nulo y si todos los ideales de A son primos, entonces A es un cuerpo.

Solución ▼ [003007]

Ejercicio 3653 Teorema de Gauss

Sea A un anillo conmutativo y $a, b \in A$. Se dice que : $\begin{cases} a \text{ divide } b \text{ si } b \in aA \\ a \text{ es primo a } b \text{ si } aA + bA = A. \end{cases}$

Demostrar que si a es primo a b y a divide bc, entonces a divide c. [003008]

Ejercicio 3654 Característica

Sea A un anillo. Se llama *característico de A* el orden de 1 en el grupo aditivo $(A, +)$. Se supone A de característica finita, n.

1. Demostrar que : $\forall x \in A,\ nx = 0$.
2. Si A es íntegro, demostrar que n es un número primo.
3. Si A es íntegro y conmutativo, demostrar que $x \mapsto x^n$ es un morfismo de anillo.

[003009]

Ejercicio 3655 Anillo de características 2

Sea A un anillo no nulo tal que : $\forall x \in A,\ x^2 = x$.

1. Dar un ejemplo de tal anillo.
2. ¿Cuáles son los elementos invertibles de A ?
3. Demostrar que $\forall x \in A$, $x+x=0$. Inferir que A es conmutativo.
4. Para $x, y \in A$ se establece : $x \leqslant y \iff \exists\ a \in A$ tal que $x = ay$. Demostrar que es una relación de orden.

Solución ▼ [003010]

Ejercicio 3656 Elementos nilpotentes

Sea A un anillo conmutativo, y $a \in A$. Se dice que a es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.

1. Ejemplo : Determinar los elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
2. Demostrar que el conjunto de elementos nilpotentes es un ideal de A.
3. Sea a nilpotente. Demostrar que $1-a$ es invertible (Se observa que $1 = 1^n - a^n$).
4. Sean a nilpotente y b invertible. Demostrar que $a+b$ es invertible.

[003011]

Ejercicio 3657 $1-ab$ y $1-ba$

Sea A un anillo y $a, b \in A$. Demostrar que $1-ab \in A^* \Leftrightarrow 1-ba \in A^*$.

Solución ▼ [003012]

Ejercicio 3658 Radical de un ideal

Sea A un anillo conmutativo e I un ideal de A. Se denota $\sqrt{I} = \{x \in A \text{ tal que } \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in I\}$ (radical de I).

1. Demostrar que $\sqrt{I}$ es un ideal de A.
2. Demostrar que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Demostrar que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ y $\sqrt{I+J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Ejemplo : $A = \mathbb{Z}$, $I = 3648\mathbb{Z}$. Encontrar $\sqrt{I}$.

Solución ▼ [003013]

Ejercicio 3659 Producto de dos ideales

Sea A un anillo conmutativo y I, J dos ideales de A. Se denota $IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \text{ tal que } a_i \in I,\ b_i \in J\}$.

1. Demostrar que IJ es un ideal de A.
2. Demostrar que $I(J+K) = IJ + IK$.
3. Se supone $I+J = A$. Demostrar que $IJ = I \cap J$.
4. ¿Para $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = p\mathbb{Z}$, qué es IJ ?

[003014]

Ejercicio 3660 Relación de equivalencia compatible con las operaciones de anillo

Sea A un anillo conmutativo.

1. Sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia compatible con sumas y multiplicaciones en A. Se denota I la clase de 0. Demostrar que I es un ideal de A.

2. Recíprocamente, sea J un ideal de A. Se establece $x \sim y \iff x - y \in J$. Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia compatible con $+$ y $\times$.

[003015]

Ejercicio 3661 Estudio del anillo $\mathbb{Z}^2$

1. Sea $d \in \mathbb{N}$. Sea $A_d = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } x \equiv y \pmod{d}\}$, ($x = y$, para $d = 0$). Demostrar que A_d es un subanillo de $\mathbb{Z}^2$.
2. Demostrar que así se obtienen todos los subanillos de $\mathbb{Z}^2$.
3. Sea I un ideal de $\mathbb{Z}^2$. Se denota : $\begin{cases} I_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (x,0) \in I\} \\ I_2 = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (0,y) \in I\}. \end{cases}$
   Demostrar que I_1 y I_2 son ideales de $\mathbb{Z}$, y que $I = I_1 \times I_2$.
4. Deducir que I es un ideal principal.

[003016]

Ejercicio 3662 ideales de K^E

Sea K un cuerpo, E un conjunto finito, y $A = K^E$. Para $e \in E$, se establece :

$$I_e = \{f \in A \text{ tal que } f(e) = 0\}, \qquad \chi_e : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = e \\ 0 & \text{si } x \neq e. \end{cases}$$

1. Demostrar que I_e es un ideal principal de A.
2. Sea $f \in A$. Verificar que $f = \sum_{e \in E} f(e)\chi_e$.
3. Sea I un ideal cualquiera de A, y $F = \{e \in E \text{ tal que } \exists\ f \in I \text{ tal que } f(e) \neq 0\}$.
   Demostrar que I es un ideal principal generado por $\sum_{e \in F} \chi_e$.

[003017]

Ejercicio 3663 Funciones trigonométricas

Sea $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de la forma } f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\}$.

1. Demostrar que A es un subanillo de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Sea $f \in A$. Demostrar que si $f = 0$, entonces los coeficientes $a_k = 0$. $\left(\text{calcular } \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\right)$.
3. Deducir que A es íntegro.

[003018]

Ejercicio 3664 Sucesiones crecientes de ideales

Sea A un anillo conmutativo y (I_n) una sucesión creciente de ideales de A. Se establece $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

1. Demostrar que I es un ideal de A.
2. Se supone que A es principal. Demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I = I_{n_0}$.

3. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es principal.

[003019]

Ejercicio 3665 Endomorfismos de un grupo conmutativo

Sea G un grupo aditivo y $A = \{f : G \to G \text{ morfismos}\}$.

1. Demostrar que $(A, +, \circ)$ es un anillo.
2. Se toma $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Demostrar que A es el conjunto de aplicaciones $G \to G, x \mapsto kx$, con $k \in G$, y que A es isomorfo al anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[003020]

Ejercicio 3666 Entiers 2-ádicas

Sea $A = \{m/n \in \mathbb{Q} \text{ tal que } n \text{ es impar}\}$.

1. Demostrar que A es un subanillo de $\mathbb{Q}$.
2. Encontrar los elementos invertibles en A.
3. Demostrar que los ideales de A son todos principales generados por números de la forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

[003021]

Ejercicio 3667 Morfismos $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$

Encontrar los morfismos de anillos : $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.

Solución ▼ [003022]

Ejercicio 3668 Sucesiones estacionarias

Sea $A = \{\text{sucesiones estacionarias de enteros relativos}\}$ provisto de las operaciones usuales.

1. Demostrar que A es un anillo.
2. Encontrar los morfismos de anillos : $A \to \mathbb{Z}$.
3. Sea $I = \{\text{sucesiones casi nulas}\}$. Demostrar que es un ideal no principal.

Solución ▼ [003023]

Ejercicio 3669 Enteros de Gauss

Sea $A = \{a + bi \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Demostrar que A es un subanillo de $\mathbb{C}$. ¿Cuáles son los elementos invertibles ?
2. Sean $u, v \in A$, con $v \neq 0$. Demostrar que existe $q, r \in A$ tales que $u = qv + r$ y $|r| < |v|$. ¿Se tiene unicidad ?
3. Demostrar que A es principal.

Solución ▼ [003024]

Ejercicio 3670 Ejercicio en el curso

1. Escribir las tablas de operaciones en el anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Sea p un número primo, y sea $(G, \star)$ un grupo de orden p. Demostrar que G es cíclico.

3. Demostrar que el núcleo de un morfismo de anillo conmutativo es un ideal.
4. ¿La aplicación $f : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ construida de la siguiente manera está bien definida ? Para un elemento c de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, se elige un representante x y se define $f(c) := [x]_3$.

[007302]

Ejercicio 3671

1. Demostrar que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se puede dotar de una estructura natural de anillo.
2. Demostrar que $\mathbb{R}[X]$ es un anillo, y eso para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$I_a = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(a) = 0\}$$

es un ideal de $\mathbb{R}[X]$.

[007303]

Ejercicio 3672

1. Determinar el orden de $\overline{2}$ en $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$.
2. Demostrar que $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
3. Explicitar un subgrupo de orden 6 de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
4. ¿Cuáles son los órdenes posibles de los subgrupos de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?
5. Sean n un entero natural no nulo. El propósito de esta pregunta es determinar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sea d un divisor de n.
   (a) Explicitar un subgrupo G_d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de orden d.
   (b) Sea H un subgrupo de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de orden d. Demostrar que para todo $\overline{x} \in H$, $d \cdot \overline{x} = 0$. ¿Cuántos elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ verifican esta ecuación ? Deducir que $H = G_d$.
   (c) Concluir.
6. Dar la lista de todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

[007304]

Ejercicio 3673

Determinar las potencias de 2 módulo 9. ¿Que se puede decir del grupo $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$? [007305]

Ejercicio 3674

1. Sea m y n dos enteros naturales coprimos no nulos. Sea ha visto cómo encontrar una relación de Bézout $um + vn = 1$. Demostrar entonces que la aplicación

$$\begin{array}{rl} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \to \mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto umy + vnx, \end{array}$$

está bien definida y es un isomorfismo. Determinar su isomorfismo inverso.
2. Encontrar el entero entre 0 y 100 congruente a 9 módulo 11 y a 3 módulo 13.

[007306]

Ejercicio 3675

A menudo es importante calcular a^t módulo n, con a,t,n grandes. (Calcular a^t en $\mathbb{Z}$ no es lo más conveniente).
Método : Escribir t en binario : $t = \Sigma t_i 2^i$ (donde $t^i \in \{0,1\}$). Los a^{2^i} se calculan fácilmente por elevaciones cuadradas sucesivas módulo n, y a^t módulo n es el producto (módulo n) de los a^{2^i}, para los cuales $t^i = 1$.
Calcular 3^{2025} módulo 50. [007307]

Ejercicio 3676

Esta es la tabla de un grupo finito. Determinar el orden de a.

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

[007308]

Ejercicio 3677

El objetivo de este ejercicio es determinar todos los morfismos de anillos de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ en un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Demostrar que todo morfismo de grupos de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ en un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ está determinado por la imagen de $[1]_{10}$.
2. ¿Cuáles son los valores posibles para la imagen de $[1]_{10}$ por un morfismo de anillo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ en un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
3. Determinar todos los morfismos de anillo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ en un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[007309]

Ejercicio 3678

1. ¿La ecuación $x^3+x+1=0$ tiene soluciones en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. ¿La ecuación $x^3+x+1=0$ tiene soluciones en $\mathbb{Z}$?

[007310]

Ejercicio 3679

1. ¿Qué operación hace de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un grupo?
2. ¿Este grupo es finito?
3. ¿Cuál es el orden de $7/12$ en este grupo?
4. Demostrar que todos los elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son de orden finito.

[007311]

Ejercicio 3680

1. Sea p un número primo impar. ¿Cuáles elementos de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ son su propio inverso?
2. Demostrar el teorema de Wilson. Teorema de Wilson : Sea n un entero natural superior a 3. Entonces n es primo si y solo si, $(n-1)! = -1 \pmod n$.

[007312]

Ejercicio 3681

1. En el anillo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, calcular $(a+b)^3$, donde a y b son dos elementos.
2. En el anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, calcular $(a+b)^6$, donde a y b son dos elementos.
3. En el anillo $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, calcular $(a+b)^7$, donde a y b son dos elementos.

[007313]

Ejercicio 3682

1. ¿20606 pertenece a $14443+3079\mathbb{Z}$?
2. Calcular elemento 2169 en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 12.
3. Se considera una aplicación $f : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, que envía x sobre x^3. ¿Es inyectiva?
4. ¿$[2]_{26}$ es un divisor de $[0]$ en $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$?
5. $187489 = 433^2$, donde 433 es un número primo. ¿Cuántos divisores de cero existen en $\mathbb{Z}/187489\mathbb{Z}$?
6. Determinar las potencias de 2 módulo 9. ¿Que se puede decir del grupo $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$?

[007314]

Ejercicio 3683

Sea $D:\ \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la aplicación derivación. ¿Es un morfismo de grupos? Un morfismo de anillo? Una aplicación lineal? [007315]

Ejercicio 3684

Determinar el mcd y mcm de los polinomios $X^5-3X^4+X^3+2X^2-6X+2$ y X^4-3X^3+3X-1, elementos de $\mathbb{Q}[X]$. [007316]

Ejercicio 3685

Sean $P = X^3-1$ y $Q = X^2-3X+2$ de elementos de $\mathbb{R}[X]$. ¿Cuál es el ideal de $\mathbb{R}[X]$ generado por P? ¿El ideal generado por P y Q? ¿El ideal $(P)\cap(Q)$? [007317]

Ejercicio 3686

Sea K un cuerpo, y $P \in K[X]$. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas?

1. Si P no tiene raíz en K, entonces P es irreducible.
2. Si P es irreducible, entonces P no tiene raíz en K.

[007318]

Ejercicio 3687

Sea $P = X^4+1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. ¿De qué forma son los polinomios irreducibles de $\mathbb{C}[X]$? Factorizar P como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$.
2. ¿De qué forma son los polinomios irreducibles de $\mathbb{R}[X]$? Factorizar P como producto de irreducibles en $\mathbb{R}[X]$.
3. Demostrar que P no se puede factorizar en el producto de dos polinomios de grado 2 con coeficientes racionales. (Se puede suponer que es posible, y escribir la división euclidiana de P por uno de estos factores). Deducir que P es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

[007319]

Ejercicio 3688

1. Sea n un entero natural no nulo y d un divisor de n. Demostrar que $X^d - 1$ divide $X^n - 1$.
2. Sea n un entero natural no nulo. Sea d un entero natural no nulo y r el resto de la división euclidiana de n por d. Demostrar que $X^r - 1$ es el resto de la división euclidiana de $X^n - 1$ por $X^d - 1$.
3. Sean $m, n \in \mathbb{N}^*$, y $d = \operatorname{mcd}(m,n)$. Demostrar que $\operatorname{mcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1$.

[007320]

Ejercicio 3689

Determinar las raíces de $X^2 - 1$ en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Comparar su número con el grado del polinomio. ¿Cómo explicar este fenómeno ? [007321]

Ejercicio 3690

Sea $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. Se quiere determinar si P tiene raíces racionales.

1. Se supone que P tiene una raíz racional no nula x, con $x = \frac{p}{q}$ y $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$. Demostrar que p divide a_0 y q divide a_n.
2. ¿El polinomio $7X^3 - 5X^2 - 9X + 4$ tiene raíces racionales ? ¿Y $X^4 - 2X^2 - 3$?
3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $\sqrt{n}$ es ya sea un entero, sea un irracional.

[007322]

Ejercicio 3691

Demostrar que $X^2 + 4$ es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$, pero reducible en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. [007323]

Ejercicio 3692

1. Sea $p = 13$. Encontrar una raíz c de -1 módulo 13.
2. Representar la red $\mathscr{R}$ de $\mathbb{Z}^2$ generado por $(c,1)$ y $(p,0)$ y demostrar que todos sus elementos tienen una norma múltiplo de p.
3. Encontrar dos enteros x e y tales que $p = x^2 + y^2$.

[007333]

Ejercicio 3693

1. ¿El número 101 es primo? ¿Se puede escribir como suma de dos cuadrados.
2. Determinar una raíz c de -1 módulo 101.
3. Calcular el $\operatorname{mcd}(101, c+i)$ en $\mathbb{Z}[i]$.
4. Escribir 101 como suma de dos cuadrados.
5. Responder las mismas preguntas con 2011.

[007334]

Ejercicio 3694

1. ¿Qué identidad se tiene cuando se escribe que la norma de $(a+ib)(c+id)$ en $\mathbb{Z}[i]$ es el producto de la norma de $(a+ib)$ y el de $(c+id)$?
2. Escribir $2425 = 5^2 \cdot 97$ y $754 = 2 \cdot 13 \cdot 29$ como sumas de dos cuadrados.
3. ¿Todos los números naturales son sumas de tres cuadrados?

[007335]

Ejercicio 3695

Se considera el anillo $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, los subanillos de $\mathbb{C}$ generado por $i\sqrt{3}$.

1. Demostrar que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] := \{a + bi\sqrt{3},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
2. A todo elemento $x = a + bi\sqrt{3}$ de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ se asocia su conjugado $\bar{x} = a - bi\sqrt{3}$. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ se tiene
$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{y} \quad \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}.$$
3. Considerando la aplicación $N : \mathbf{Z}[i\sqrt{3}] \to \mathbf{Z}, x \mapsto x\bar{x}$, Demostrar que los elementos invertibles de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ son exactamente los elementos de norma 1. Dar la lista de elementos invertibles.
4. ¿Cuáles son las posibles normas de un divisor de $1 + i\sqrt{3}$ en $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$?
5. Demostrar que los elementos 2, $1 + i\sqrt{3}$ son primos entre sí en $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. ¿Se puede escribir un par de Bézout?
6. Dar dos factorizaciones diferentes de 4 en $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. El lema de Euclides es válido en el anillo $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$?

[007336]

Ejercicio 3696

Los polinomios simétricos elementales en n indeterminadas son por definición

$$\begin{aligned}
s_1(t_1, t_2, \ldots, t_n) &:= t_1 + t_2 + \cdots + t_n \\
s_2(t_1, t_2, \ldots, t_n) &:= t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_2t_3 + t_2t_4 + \cdots + \cdots t_{n-1}t_n \\
&\vdots \\
s_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) &:= t_1t_2 \cdots t_n.
\end{aligned}$$

1. Sea $F(X) = a(X - t_1)(X - t_2) \cdots (X - t_n)$. Desarrollar $F(X)$ en potencias de X.
2. Escribir $t_1^3 + t_2^3$ como un polinomio con coeficientes enteros de s_1, s_2.
3. Escribir $t_1^4 + t_2^4$ como un polinomio con coeficientes enteros de s_1, s_2.
4. Escribir $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3$ como un polinomio con coeficientes enteros de s_1, s_2, s_3.

5. Escribir $f(t_1,t_2,t_3) = t_1^2t_2 + t_1^2t_3 + t_2^2t_1 + t_2^2t_3 + t_3^2t_1 + t_3^2t_2$, como un polinomio con coeficientes enteros en los polinomios simétricos elementales.

[007337]

Ejercicio 3697

Escribir en base 10 el número cuya escritura hexadecimal es $DA582$. [007338]

Ejercicio 3698

Calcular $P(2)$, donde $P = 3x^4 - x^2 - 16x - 14$ por el método de Hörner. Efectuar la división euclidiana de P por $x - 2$. [007339]

Ejercicio 3699

El objetivo del ejercicio es factorizar el polinomio $x^4 + 4x^3 - 81x^2 - 16x + 308$.

1. Verificar que 2 es raíz de P y factorizar P por $x - 2$, con el método de Hörner.
2. Verificar que -2 es la raíz del cociente obtenido en la pregunta anterior y se factoriza por $x + 2$ por el método de Hörner.
3. Concluir.

[007340]

Ejercicio 3700

Sea $P = 3x^5 - 6x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 4$.

1. Efectuar la división euclidiana de P por $x - 1$.
2. Presentar los resultados según el método de Hörner.
3. Escribir P en la base $1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^5$.

[007341]

Ejercicio 3701

El propósito del ejercicio es determinar un valor aproximado de la raíz cúbica real c de 17. Se considera el polinomio $P(x) = x^3 - 17$.

1. Demostrar que $2 < c < 3$.
2. Determinar por el método de Hörner el polinomio $R(z) := 10^3 P(2 + \frac{z}{10})$ en la variable z.
3. Determinar un valor aproximado de c con una precisión de 10^{-1}.
4. Determinar un valor aproximado de c con una precisión de 10^{-2}.

[007342]

Ejercicio 3702

1. ¿El entero 256 pertenece a $115 + 247\mathbb{Z}$?
2. ¿El entero -601 es un representante de la clase $[-738]_{28}$ de $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$?
3. Calcular elemento 589 en $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 22.

4. Calcular elemento 13^{923} en $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 10.

[007345]

Ejercicio 3703

1. Demostrar que el polinomio $X^9 - 1$ de $\mathbb{F}_3[X]$ vale $(X-1)^9$. Se considera el código ternario C de longitud 9 asociada al polinomio $g = (X-1)^5$.
2. Determinar el alfabeto, la longitud de las palabras, la dimensión del código, el número de palabras de código. ¿El código es cíclico ?
3. Dar una matriz generadora de C.
4. Determinar un elemento de peso 3 de código.
5. Determinar una matriz de control H de este código.
6. Determinar la distancia de este código. ¿Cuántos errores puede detectar este código ? ¿Cuántos errores se pueden corregir ?
7. Se recibe la palabra $r = 121102210$. Calcular su imagen por H. ¿La palabra r es una palabra de código ?
8. Corregir la palabra r suponiendo que hubo como máximo un error de transmisión.

[007346]

Ejercicio 3704

1. ¿El número 101 es primo ? ¿Se puede escribir como suma de dos cuadrados.
2. Determinar una raíz c de -1 módulo 101.
3. Calcular el $mcd(101, c-i)$ en $\mathbb{Z}[i]$.
4. Escribir 101 como suma de dos cuadrados.

[007347]

Ejercicio 3705 Sobre el número de soluciones de una ecuación de grado dos

El propósito de este problema es demostrar que la ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ puede tener un número, arbitrariamente grande de soluciones en los anillos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Para un número primo p, se denota $\mathbb{F}_p$ el cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Se recuerda que el grupo $(\mathbb{F}_p^\times, \times)$ de invertibles de $\mathbb{F}_p$ es cíclico.
Se puede admitir el resultado de una pregunta para continuar.

1. Si p es un número primo, ¿cuántas soluciones tienen a lo sumo la ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ en el anillo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
2. Determinar las soluciones de la ecuación $X^2 + X + 1 = 0$:

   a) en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. b) en $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. c) en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

   d) Usando las preguntas anteriores, determinar las soluciones de la ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.
3. Sea p es un número primo mayor que 5. Demostrar que la ecuación $X^2 + X + 1 = 0$ admite una solución en el cuerpo $\mathbb{F}_p$ si y solo si la ecuación $X^3 = 1$ admite una solución *diferente de* 1 en $\mathbb{F}_p$.

4. Sea p es un número primo mayor que 5. Demostrar que la ecuación $X^2+X+1=0$ admite una solución en el cuerpo $\mathbb{F}_p$ si y solo si $(\mathbb{F}_p)^\times$ tiene un elemento de orden 3.
5. Sea p es un número primo mayor que 5. Demostrar que la ecuación $X^2+X+1=0$ admite una solución en el cuerpo $\mathbb{F}_p$ si y solo si p es congruente a 1 módulo 3.
6. Sea p es un número primo mayor que 5. Demostrar que si la ecuación $X^2+X+1=0$ admite una solución a en el cuerpo $\mathbb{F}_p$ admite otra solución distinta $-1-a$.
7. Se supone que existe un infinito número de primos congruentes con 1 módulo 3. Demostrar que la ecuación $X^2+X+1=0$ puede tener un número, arbitrariamente grande de soluciones en los anillos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[007368]

Ejercicio 3706

1. Sea G un grupo, e su elemento neutro y a un elemento de G y m un entero natural tal $a^m=e$. ¿Qué se puede decir del orden del elemento a ?
2. Dar la definición de un ideal en un anillo conmutativo.
3. ¿Cuáles son los ideales del anillo $(\mathbb{Z},+,\times)$?
4. ¿El subconjunto $28\mathbb{Z}\cap 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es un ideal de $\mathbb{Z}$? Si es sí, determinarlo.
5. Dar un ejemplo de dos grupos finitos no isomorfos del mismo orden. Justificar el hecho de que los dos grupos escogidos no son isomorfos.
6. ¿El grupo $\mathscr{S}_4$ de permutaciones de $\{1,2,3,4\}$ es cíclico ? (Justificar)

Solución ▼ [007369]

Ejercicio 3707

1. El entero -1601 ¿es un representante de la clase $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?
2. Calcular elemento 11^{329} en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 12.
3. La clase $[51]$ ¿es invertible en el anillo $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Si es sí, calcular su inversa en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 130.

Solución ▼ [007370]

Ejercicio 3708

1. Escribir una relación de Bézout entre X^2+X+1 y X^3+X+1 en $\mathbb{R}[X]$.
2. ¿La clase del polinomio X^2+X+1 es invertible en el anillo cociente $\mathbb{R}[X]/(X^3+X+1)$? Si es sí, dar su inversa.

Solución ▼ [007371]

Ejercicio 3709

1. ¿Cuáles son los elementos invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$?
2. ¿A qué grupo, el grupo $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ es isomorfo ?

Solución ▼ [007372]

Ejercicio 3710

Considerar la tabla de un grupo G. ¿Cuál es el orden de G? ¿El grupo G es necesariamente conmutativo? Completar la tabla indicando con precisión las propiedades utilizadas.

$*$	a	b	c	d	e
a			d		c
b	e		a		d
c		a			
d				d	e
e			b		a

Solución ▼ [007373]

Ejercicio 3711

1. Calcular los productos en $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ y $(1,2)(2,3)(1,2)$.
2. ¿El conjunto de transposiciones de $\mathscr{S}_7$ es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$?

Solución ▼ [007374]

131 203.05 Ideal

Ejercicio 3712

1. ¿$\mathscr{J} = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal del anillo $\mathbb{Z}^2$?
2. ¿$\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ es un ideal de $\mathbb{R}[X]$?

[001368]

Ejercicio 3713

Sea $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$.

1. (a) Demostrar que $\mathscr{J}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Demostrar que $\mathscr{J}$ es generado por los polinomios 2 y X.
2. Observando que $2 \in \mathscr{J}$, demostrar que la hipótesis "$\mathscr{J}$ es un ideal principal de $\mathbb{Z}[X]$" es absurda.

[001371]

Ejercicio 3714

Sea $(A,+,\times)$ un anillo conmutativo, se dice que $I \subset A$ es un ideal de A si y solo si : I es un subgrupo de $(A,+)$ y además : $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

1. ¿Cuáles son los ideales de $\mathbb{Z}$?
2. Se llama radical de I, el conjunto $\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}, : x^n \in I\}$. Demostrar que $\sqrt{I}$ es un ideal de Aconteniendo I. Estudiar el caso $A = Z$.

3. Demostrar que si I y J son dos ideales de A tales que $I \subset J$, entonces $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.Deducir $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
4. Demostrar que si I y Json dos ideales de A, $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$æ.

[001375]

Ejercicio 3715

A se denomina ideal de A cuando para todo $x \in J$ y todo $a \in A$ el producto ax pertenece a J.

1. Encontrar todos los ideales de un cuerpo $\mathbb{K}$.
2. Demostrar que todo ideal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $a\mathbb{Z}$, donde $a \in \mathbb{Z}$.
3. Se denota D el conjunto de racionales x tales que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x10^k \in \mathbb{Z}$. Demostrar que todo ideal de D es de la forma aD, donde $a \in D$.

[001376]

Ejercicio 3716

Demostrar que un ideal de $K[X]$ es distinto de $K[X]$ si y solo si no contiene ningún polinomio constante no nulo. [001571]

Ejercicio 3717

Sean los polinomios $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ y $Q = X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$. Determinar $\operatorname{mcd}(P, Q)$, luego la suma y la intersección de los ideales principales (P) y (Q) de $\mathbb{R}[X]$. [001572]

Ejercicio 3718

¿Las partes $\mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$ y $\mathscr{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$ son ideales de $\mathbb{R}[X]$? En caso afirmativo, dar un generador. [001573]

---

132 203.06 Álgebra, cuerpo

Ejercicio 3719

Determinar los automorfismos del cuerpo $\mathbb{Q}$. [001377]

Ejercicio 3720

Sea σ un automorfismo de $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que si $x \geqslant 0$, entonces $\sigma(x) \geqslant 0$.
2. Demostrar que σ es creciente.
3. Determinar σ.

[001378]

Ejercicio 3721

Sean $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $C = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Demostrar que C es un subespacio vectorial de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ y determinar una base.

2. Demostrar que, por las leyes usuales, C es una $\mathbb{R}$-álgebra.

[001379]

Ejercicio 3722

Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $u^2 = u$. Se define

$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Demostrar que, dotado de las leyes usuales sobre $\mathscr{L}(E)$, es una $\mathbb{R}$-álgebra.
2. Demostrar que esta álgebra es de dimensión finita y discutir su dimensión en términos de u.
3. ¿El anillo $\mathbb{R}[u]$ es un cuerpo?

[001380]

Ejercicio 3723

Sea $M = \{aI_2 + bJ \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : a,b \in \mathbb{R}\}$, donde $I_2 = \left(2 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right), J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcular J^2 y demostrar que si $a,b \in \mathbb{R}$ y $aI_2 + bJ = O$, entonces $a = b = 0$.
2. Demostrar que, dotado de las leyes usuales sobre $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, M es un anillo. ¿Este anillo es conmutativo, íntegro?
3. ¿M es un cuerpo, una $\mathbb{R}$-álgebra?

[001381]

Ejercicio 3724

Demostrar que el conjunto S de sucesiones reales convergentes es una $\mathbb{R}$-álgebra. ¿La aplicación $S \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \lim u$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras? ¿El anillo S es íntegro? [001382]

Ejercicio 3725

Sean E un $\mathbb{R}$-ev y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $u^2 = u$. Se define

$$\mathbb{R}[u] = \{a\,\mathrm{Id}_E + bu : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que, dotado de las leyes usuales sobre $\mathscr{L}(E)$, es una $\mathbb{R}$-álgebra. ¿El anillo $\mathbb{R}[u]$ es un cuerpo? [001383]

Ejercicio 3726

Un automorfismo de un cuerpo $\mathbb{K}$ es una aplicación biyectiva φ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ tal que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = 0$ y, para todo $a,b \in \mathbb{K}$, se tiene $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ y $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

1. Sea φ un automorfismo de $\mathbb{R}$. Demostrar que la aplicación $x \mapsto \varphi(x)$ es creciente. Deducir que la identidad es el único automorfismo de $\mathbb{R}$.
2. Sea ψ un automorfismo *continuo* de $\mathbb{C}$, demostrar $\psi(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Deducir todos los automorfismos *continuos* de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3727 Anillo íntegro finito

Sea A un anillo no nulo, conmutativo e íntegro.

1. Demostrar que si A es finito, entonces es un cuerpo.
2. Demostrar que si A tiene un número finito de ideales, entonces es un cuerpo. (Considerar los ideales $I_n = x^n A$, para $x \in A$ no nulo).

[003025]

Ejercicio 3728 Corps $\mathbb{F}_4$

Determinar las estructuras de cuerpo con 4 elementos.

Solución ▼ [003026]

Ejercicio 3729 Grupo multiplicativo de un cuerpo finito

Sea K un cuerpo finito. Para $x \in K^*$ se denota $O(x)$ el orden multiplicativo de x y n el mcm de los órdenes de los elementos de K^*.

1. Sean $a,b \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que existe $a',b' \in \mathbb{N}^*$ tales que $a'|a$, $b'|b$, $a' \wedge b' = 1$ y $a'b' = a \vee b$.
2. Sean $x,y \in K^*$ de órdenes a y b. Demostrar que existe u,v enteros tales que $O(x^u y^v) = a \vee b$. Deducir que existe $z \in K^*$ de orden n.
3. Demostrar que $n = \operatorname{card}(K^*)$ (ceci prueba que K^* es cíclico).

[003027]

Ejercicio 3730 Grupo multiplicativo de un cuerpo finito

Sea K un campo finito de cardinal n. Si $a,b \in \mathbb{N}$ son tales que $ab = n-1$, se considera la aplicación $f_a : K^* \to K^*, x \mapsto x^a$. (Se observa que f_a es un morfismo de grupo). Se denota $N_a = \operatorname{card}(\ker f_a)$.

1. Explicar por qué $N_a \leqslant a$.
2. Demostrar que $\operatorname{Im}(f_a) \subset \ker f_b$. Deducir que $N_a = a$ y $N_b = b$.
3. Sea φ el indicador de Euler. Demostrar por inducción en a, divisor de $n-1$, que el número de elementos de K^* de orden a es igual a $\varphi(a)$. (Esto prueba que K^* es cíclico).

[003028]

Ejercicio 3731 Teorema de Wedderburn

Se dice que K es un cuerpo izquierdo, si $(K,+,\times)$ es un anillo y si $(K \setminus \{0\}, \times)$ es un grupo (no necesariamente conmutativo). Se verifica rápidamente que la teoría de los espacios vectoriales no cambia si se reemplaza el cuerpo base con un cuerpo izquierdo. El objetivo del ejercicio es de demostrar el teorema de Wedderburn : *todo campo izquierdo finito es conmutativo.*

Para $n \in \mathbb{N}^*$, sea $\mathscr{P}_n$ el conjunto de raíces n-ésimas primitivas de la unidad en $\mathbb{C}$. Sea $\Phi_1(X) = X - 1$ y $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mathscr{P}_n} (X - \zeta)$. Φ_n es llamado *el n-ésimo polinomio ciclotómico*. (Su grado es $\phi(n)$, donde ϕ es el indicador de Euler).

1. Demostrar : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. Deducir, por recurrencia, que $\Phi_n(X)$ tiene todos sus coeficientes en $\mathbb{Z}$.

2. Calcular explícitamente $\Phi_n(X)$, para $n \leqslant 16$.
3. Demostrar que, para p primo y $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{p^\alpha}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^{kp^{\alpha-1}}$.
4. Calcular el término constante de cada Φ_n.
5. Demostrar que, si $d < n$ y d divide n, entonces $X^d - 1$ divide $X^n - 1$ en $\mathbb{Z}[X]$, ya que $\Phi_n(X)$ divide $X^n - 1$ y $\frac{X^n-1}{X^d-1}$ en $\mathbb{Z}[X]$.
   Se considera K un cuerpo izquierdo finito y $Z(K)$ su centro, de cardinal q.
6. Demostrar que $Z(K)$ es un cuerpo conmutativo.
7. Demostrar que K es un $Z(K)$-espacio vectorial de dimensión finita, denotada n. Dar entonces el cardinal de K en función de q y n.
8. Sea $a \in K \setminus \{0\}$. Se denota $C_a = \{x \in K \,|\, ax = xa\}$.
   Demostrar que C_a es un cuerpo izquierdo, luego que es un $Z(K)$-espacio vectorial de dimensión finita d dividiendo n (Demostrar para esto que K es un C_a-espacio vectorial y estudiar su dimensión).
9. Se hace operar el grupo multiplicativo K^* sobre K^* por automorfismos internos.
   Considerando las órbitas según esta operación demostrar que se tiene :
   $$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{q^n-1}{q^{d_i}-1}, \text{ con } d_i | n, \text{ para todo } i.$$
10. Deducir que $\Phi_n(q)$ divide $q-1$.
11. Estudiando $|\Phi_n(q)|$ demostrar que $n = 1$.

[003029]

Ejercicio 3732 Elementos algebraicos

Sean $K, \mathbb{L}$ dos cuerpos con $K \subset \mathbb{L}$. Un elemento $\alpha \in \mathbb{L}$ se dice algebraicamente en K si existe un polinomio no nulo $P \in K[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

1. Demostrar que α es algebraico en K si y solo si $K[\alpha]$ es un K-ev de dimensión finita.
2. Se supone que α y β son algebraicos en K. Demostrar que $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ son algebraicos en K. (Estudiar $K[\alpha, \beta]$).

[003324]

Ejercicio 3733 Cuerpos anidados

Sean $H \subset K \subset L$ tres sub-cuerpos de $\mathbb{C}$.

1. Demostrar que K y L son los H-ev y L es un K-ev.
2. Demostrar que L es de dimensión finita en H si y solo si K es de dimensión finita en H y L es de dimensión finita en K.
3. Aplicación : Demostrar que $\overline{\mathbb{Q}}$, el cierre algebraico de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$, es un cuerpo algebraicamente cerrado. (Si $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$, considerar el sub-cuerpo de $\mathbb{C}$ generado por los coeficientes de P).

[003325]

Ejercicio 3734 Sobre-cuerpos de $\mathbb{R}$

Sea $\mathbb{A}$ una $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa, íntegra y de dimensión finita.

1. Demostrar que $\mathbb{A}$ es un cuerpo.
2. Si $\dim \mathbb{A} > 1$ demostrar que todo elemento de $\mathbb{A}$ es algebraico de grado 1 o 2 sobre $\mathbb{R}$. Deducir que entonces $\mathbb{A}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

[003326]

Ejercicio 3735 Sub-álgebras

Sea E un ev de dimensión finita y $\mathscr{A}$ una sub-álgebra de $\mathscr{L}(E)$. Demostrar que si $f \in \mathscr{A}$ y f es biyectiva, entonces $f^{-1} \in \mathscr{A}$.
Estudiar la aplicación $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $g \mapsto f \circ g$. [003352]

Ejercicio 3736

1. Dar la definición de grupo.
2. Decir si los siguientes pares son grupos : $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{C}^*,+)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$. Cuando la respuesta es "no", se indica una propiedad de los grupos que faltan (no se pide justificación cuando la respuesta es "sí").
3. ¿Cuáles son los ideales del anillo $(\mathbb{Z},+,\times)$?
4. ¿Cuáles son los ideales del anillo $(\mathbb{R}[X],+,\times)$?

[007324]

Ejercicio 3737

1. ¿El entero 51606 pertenece a $2569+247\mathbb{Z}$?
2. ¿El entero -1601 es un representante de la clase $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?
3. Calcular elemento 2169 en $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 16.
4. Calcular elemento 11^{329} en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 12.

[007325]

Ejercicio 3738

Se denota $\mathbb{F}_{11}$ el cuerpo finito $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Se considera el grupo $(\mathbb{F}_{11})^{\times}$. ¿Cuáles son los posibles órdenes de un elemento de este grupo ? ¿Cuántos elementos de cada orden tiene este grupo ? Determinar todos los generadores de este grupo. [007326]

Ejercicio 3739

1. Dar la lista de invertibles de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Determinar el orden de cada elemento en $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times}$.
2. Dar la lista de invertibles de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Determinar el orden de cada elemento en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$.
3. Dar un isomorfismo de grupos de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times}$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$.

[007327]

Ejercicio 3740

1. ¿El polinomio $(X^2+X+1)^3$ es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$?
2. Dar la lista de los polinomios irreducibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de grado 2 y 3.
3. Dar un polinomio irreducible de grado 4 de $\mathbb{F}_2[X]$.
4. Escribir en $\mathbb{F}_2[X]$, una relación de Bézout para X^3+X^2+1 y X^2+X+1.

[007328]

Ejercicio 3741

1. ¿Cuántos elementos tiene el cuerpo $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$?
2. Determinar la lista de elementos y la tabla de multiplicar del anillo cociente $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$.
3. Multiplicar $[X^5+X^4+6X]$ por $[X^4+7X^5+9X^3+4X^2]$ en $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ y dar el resultado con un representante de la lista anterior.
4. Determinar un inverso de $[X^3+X^2+1]$ en $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$.

[007329]

Ejercicio 3742

Resolver en $\mathbb{R}[X]$ el sistema de congruencias $\begin{cases} P = X \ \ [X^2+X+1] \\ P = 3 \ \ [X^2+X]. \end{cases}$ [007330]

Ejercicio 3743

1. ¿El polinomio X^2+1 es irreducible en $\mathbb{F}_3[X]$?
2. ¿Cuál es entonces la estructura del conjunto cociente $A = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$?
3. ¿Qué relación verifica la clase α del polinomio X en este cociente ?
4. Dar la lista de los elementos de A.
5. Determinar el orden multiplicativo de α en $A^\times$.
6. Determinar el orden multiplicativo de $a := \alpha+2$ en $A^\times$.
7. Establecer la tabla de potencias de a.
8. Calcular $(2+a)(2+2a)$.
9. Calcular a^3+a^2 como potencia de a.
10. Calcular $(1+2a)^{-1}$.

[007331]

Ejercicio 3744

1. Demostrar que el polinomio X^3+X+1 es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$.
2. ¿Cuál es entonces la estructura del conjunto cociente $A = \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$?
3. ¿Cuál es la cardinalidad de A ? Sea α la clase del polinomio X en este cociente A. Dar la lista de los elementos de A.
4. Sin cálculos, pero justificando la respuesta, decir cuanto valen las siguientes cantidades

$$\alpha+\alpha, \ \ \alpha^3+\alpha+1, \quad \alpha^7.$$

5. Determinar el orden multiplicativo de α en $A^\times$.
6. Establecer la tabla de potencias de α.
7. Calcular $(1+\alpha)(1+\alpha^2)$.
8. Calcular $\alpha^3+\alpha^2$ como potencia de α.
9. Calcular $(1+\alpha)^{-1}$.

[007332]

Ejercicio 3745

Alice y Bernard deciden usar el algoritmo de El Gamal. El utiliza el cuerpo $\mathbb{F}_{19}$, con el elemento $G=15$.

1. Determinar el orden de 15 en $\mathbb{F}_{19}^\times$.
2. Bernard elige su clave privada $c=4$. Determinar su clave pública $C=G^c$.
3. Alice elige una clave privada temporal $d=5$. ¿Cuál es su clave pública D ? Ella quiere enviar el mensaje $m=17$. Lo encripta usando la clave pública C de Bernard por $(M_1,M_2)=(D,mC^d)$. Calcular este mensaje encriptado.
4. ¿Cómo Bernard encuentra el mensaje m ?
5. En un segundo envío, Bernard recibe $(8,3)$. ¿Cuál es el mensaje m enviado esta vez por Alice ? ¿Qué clave privada usó esta vez ?

[007348]

---

133 203.07 Grupo de permutación

Ejercicio 3746

1. Determinar $\operatorname{card}(S_3)$ y escribir todos los elementos de S_3, luego escribir la tabla de S_3 y deducir todos los subgrupos de S_3.
2. Se considera T un triángulo equilátero del plano, de vértices A,B,C.
   (a) Demostrar que las isometrías del plano que conservan T forman un grupo por la ley $\circ$, que se denota G.
   (b) Demostrar que un elemento de G induce una permutación del conjunto $\{A,B,C\}$. Se construye así una aplicación ϕ de G en S_3.
   (c) Demostrar que ϕ es un isomorfismo.

[001402]

Ejercicio 3747

Se considera el grupo simétrico S_n.

1. Determinar $\operatorname{card}(S_n)$.
2. Calcular $(34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23)$.
3. Recordar que la permutación $\sigma=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ es un ciclo de longitud k, que se denota $(a_1\ a_2\cdots a_k)$. Si $\tau\in S_n$, demostrar que $\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(a_1)\ \tau(a_2)\cdots\tau(a_k))$.

4. Recordar que toda permutación se descompone en un producto de ciclos con soportes disjuntos, y esta descomposición es única, módulo el orden. Descomponer las permutaciones siguientes en productos de ciclos con soportes disjuntos :
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&1&2&3&4&5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&7&8&1&3&4\end{pmatrix}$
5. Recordar que existe un único morfismo de S_n en $(\{-1,1\},\times)$ no trivial, llamado signo, y denotado ε. Una manera de calcular $\varepsilon(\tau)$ (donde $\tau \in S_n$) cosiste en descomponer τ en producto de p transposiciones (i.e. decir ciclos de longitud 2) : entonces $\varepsilon(\tau) = (-1)^p$. Demostrar que el signo de un ciclo de longitud k vale $(-1)^{k-1}$. Deducir cómo se calcula el signo de una permutación a partir de su descomposición en producto de ciclos disjuntos.

[001403]

Ejercicio 3748

¿Cómo pasar de 1234 a 2314 cambiando solo dos dígitos en cada paso ? ¿Hay varias formas de lograrlo ? La misma pregunta para 1234 y 4312.
¿Se puede obtener cualquier permutación de las cifras 1234 por este proceso ? [001404]

Ejercicio 3749

Representar gráficamente las siguientes permutaciones. Descomponerlas en productos de ciclos con soportes disjuntos, luego en productos de transposiciones.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1234567\\1425376\end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix}1234567\\2471635\end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1234567\\3261547\end{pmatrix}, \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix}1234567\\7146253\end{pmatrix}.$$

Calcular el signo de las permutaciones arriba. Calcular el producto $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ y su signo. Comparar este resultado con los anteriores. [001405]

Ejercicio 3750

Sean a,b,c tres elementos distintos de $\{1,\dots,n\}$. Calcular el producto $(ab)(bc)(ab)$. Deducir que $\mathscr{S}_n$ es generado por las permutaciones $\{(1,i)\}_{2\leqslant,i\leqslant n}$, es decir que toda permutación se escribe como producto de transposiciones de esta forma. Demostrar que $\mathscr{S}_n$ es generado por (12) y $(123...n)$. [001406]

Ejercicio 3751

Describir todos los morfismos de grupo de $(\mathscr{S}_n,\circ) \to (\{+1,-1\},\cdot)$, son las aplicaciones $\phi : \mathscr{S}_n \to \{+1,-1\}$ satisfaciendo :

$$\forall(\sigma,\sigma') \in \mathscr{S}_n^2, \quad \phi(\sigma\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma').$$

Indicación : Comenzar mostrando que todas las transposiciones tienen la misma imagen. [001407]

Ejercicio 3752

En $\mathbb{R}^n$, se designa por $(e_1,\dots,e_n)$ la base canónica. A una permutación $\sigma \in \mathscr{S}_n$, se asocia el endomorfismo u_σ de $\mathbb{R}^n$ siguiente $u_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_{\sigma(1)}\\\vdots\\x_{\sigma(n)}\end{pmatrix}.$$

1. Sea $\tau = (i\,j)$ una transposición. Escribir la matriz de u_τ en la base canónica. Demostrar que $\det(u_\tau) = -1$.
2. Demostrar que $\forall \sigma, \sigma' \in \mathscr{S}_n$, $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}$.
3. Inferir que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n,\ \det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$, donde ε designa el signo.

[001408]

Ejercicio 3753

Se denota $\mathscr{S}_n$ el grupo simétrico de permutaciones en n elementos. Sea ρ un *morfismo de grupos* de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ en $(\{-1,1\}, \cdot)$, es decir una aplicación de $\mathscr{S}_n$ en $\{-1,1\}$ satisfaciendo

$$\forall (\sigma, \tau) \in \mathscr{S}_n,\ \ \rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau).$$

1. Calcular $\rho(\mathrm{Id})$. Para todo ciclo γ de longitud p, calcular γ^p. Deducir que cuando p es impar, $\rho(\gamma) = 1$.
2. Se supone que para toda transposición τ, $\rho(\tau) = 1$. Demostrar que $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n,\ \rho(\sigma) = 1$
3. Se supone ahora que existe una transposición $\tau_0 = (a,b)$, para la cual $\rho(\tau_0) = -1$.
   (a) Para un elemento $c \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a,b\}$, calcular $(a,b)(a,c)$. Deducir que $\rho(a,c) = -1$.
   (b) Para dos elementos distintos c y d de $\{1,\dots,n\}$, calcular $(a,c)(a,d)(a,c)$. Deducir que $\rho(c,d) = -1$.
   (c) Deducir que para toda transposición τ, $\rho(\tau) = -1$, luego demostrar que para toda permutación $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\rho(\sigma)$ es el signo de σ.
4. ¿Cuáles son todos los morfismos de grupo de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ en $(\{-1,1\}, \cdot)$?
5. Se considera la aplicación φ siguiente $\varphi : \mathscr{S}_n \to \{-1,1\}$
$$\sigma \mapsto \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}.$$
   Demostrar que $\forall (\sigma,\tau) \in \mathscr{S}_n,\ \varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$. Deducir que
$$\forall \sigma \in \mathscr{S}_n,\ \ \varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j},$$
   donde $\varepsilon(\sigma)$ designa el signo de σ.

[001409]

Ejercicio 3754

Sea G un grupo de orden $2n$ y H un subgrupo de G de orden n (H es de índice dos en G).

1. Demostrar que si $g \in G$ y $g \notin H$, se tiene $H \cap gH = \varnothing$ ya que $G = H \cup gH$.
2. Deducir que para todo $g \in G$, $g^2 \in H$.
3. Se supone ahora $G = \mathscr{A}_4$ el grupo de permutaciones pares del conjunto $\{1,2,3,4\}$. Sea $\sigma = (a,b,c)$ un 3-ciclo. Demostrar que σ puede escribirse como el cuadrado de una permutación par, es decir existe $\varphi \in \mathscr{A}_4$ tal que $\varphi^2 = \sigma$. Deducir que $\mathscr{A}_4$ no tiene un subgrupo de orden 6.

[001410]

Ejercicio 3755

Determinar todos los elementos $\sigma \in S_n$ tales que $\sigma^2 = \sigma$. [001411]

Ejercicio 3756

1. Recordar $|S_3|$. Demostrar que S_3 no contiene un elemento de orden 6.
2. Demostrar que S_3 contiene un único subgrupo de orden 3. Determinar todos los subgrupos de orden 2 de S_3.
3. Deducir de lo anterior todos los subgrupos de S_3.

Solución ▼ [001412]

Ejercicio 3757 Examen de junio 1999

Sea $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices invertibles 2×2, con coeficientes reales. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ está naturalmente dotado de una estructura de grupo por la multiplicación usual de matrices. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que A y B pertenecen a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. ¿Cuáles son las órdenes de A y B ?
3. Demostrar que $AB = -BA$ y deducir que :
   (a) $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$ es un grupo (para la ley multiplicativa de matrices ; I es la matriz identidad) ;
   (b) G es el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ generado por $\{A, B\}$.
4. Se provee $\mathbb{R}^2$ de su estructura euclidiana canónicamente orientada.
   (a) Demostrar que G está incluido en $O_2(\mathbb{R})$ (el grupo ortogonal).
   (b) Determinar la intersección de G y de $SO_2(\mathbb{R})$ (el grupo especial ortogonal).
   (c) Determinar la naturaleza geométrica de los 8 elementos de G.

[001413]

Ejercicio 3758 Examen de junio 1999

I

Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Se define el centro $\mathscr{Z}(G)$ de G por :

$$\mathscr{Z}(G) = \{x \in G \,/\, \forall a \in G,\ \ ax = xa\}.$$

Demostrar que $\mathscr{Z}(G)$ es un subgrupo de G. ¿Qué se puede decir de $\mathscr{Z}(G)$, si G es abeliano ?

II

Se designa por $\mathscr{A}_n$ el grupo alternado de orden n (Recordar : Es el subgrupo de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ formado por las permutaciones de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ de signo $+1$.)
Se propone determinar el centro de $\mathscr{A}_n$, para $n \geqslant 3$.

1. Dar la lista de los elementos de $\mathscr{A}_3$ y de $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_3)$.

2. Se supone ahora que $n \geqslant 4$. En esta pregunta se fijan i, j, k, tres elementos distintos de E_n.
   (a) Verificar que el 3-ciclo (i, j, k) está en $\mathscr{A}_n$.
   (b) Sea $s \in \mathscr{S}_n$, demostrar que $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$.
   (c) Deducir que si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$, entonces la imagen de $\{i, j, k\}$ por s es $\{i, j, k\}$.
3. Para $n = 4$, se denota $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$. Si $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_4)$ demostrar que $s(\ell) = \ell$. Deducir $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_4) = \{\mathrm{Id}\}$.
4. Para $n \geqslant 5$, sea $s \in \mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$, sea i, j, k, ℓ, m cinco elementos distintos de E_n. Se consideran los conjuntos $\{i, j, k\}$ y $\{i, \ell, m\}$, demostrar que $s = \mathrm{Id}$ y determinar $\mathscr{Z}(\mathscr{A}_n)$
5. Sea H un subgrupo de G. ¿Se tiene $\mathscr{Z}(H) \subset \mathscr{Z}(G)$?

[001414]

Ejercicio 3759

¿Cuál es el orden máximo de un elemento de S_4 ? ¿De S_5 ? ¿De A_5 ? [001415]

Ejercicio 3760

Se designa por K el subconjunto $\{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ de S_4.

1. Demostrar que K es un subgrupo normal de S_4 y de A_4.
2. ¿Por qué razón K es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Calcular el cociente A_4/K.
3. Demostrar que el cociente S_4/K es isomorfo a S_3.
4. Dar un ejemplo de un subgrupo normal de K y no de S_4. ¿Qué conclusión se puede sacar ?

[001416]

Ejercicio 3761

Calcular $Z(S_n)$ según los valores de $n \in \mathbb{N}$. [001417]

Ejercicio 3762

Encontrar la descomposición del producto de ciclos con soportes disjuntos, el signo, el orden y una descomposición en producto de transposiciones de las permutaciones siguientes de $\mathscr{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad \varphi = (10,3,4,1)\,(8,7)\,(4,7)\,(5,6)\,(2,6)\,(2,9)\,.$$

Calcular σ^{1998} y φ^{1998}.

Solución ▼ [001418]

Ejercicio 3763

$\mathscr{A}_4$ designa el grupo de permutaciones pares en el conjunto $E = \{1,2,3,4\}$.

1. ¿Cuáles son los órdenes de los elementos de $\mathscr{A}_4$? Deducir la lista de estos elementos en forma desglosada en producto de ciclos con soportes disjuntos.
2. Demostrar que las permutaciones $s = (1\ 2)(3\ 4)$ y $r = (1\ 2\ 3)$ generan $\mathscr{A}_4$.
3. Demostrar que $\mathscr{A}_4$ admite un único subgrupo H de orden 4. (Examinar primero los órdenes de los elementos de un tal subgrupo) y que este subgrupo es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_4$.

[001419]

Ejercicio 3764

¿El grupo $G = \mathscr{S}_3 \times \mathscr{S}_3$ es abeliano ? Determinar todos los subgrupos de G de orden 4. [001420]

Ejercicio 3765

¿Cuál es el número de k-ciclos en $\mathscr{S}_k$ y luego en $\mathscr{S}_n$, donde $k \leqslant n$? [001421]

Ejercicio 3766

Sea G un subgrupo de $\mathscr{S}_n$.

1. Demostrar que si G es de orden impar, entonces G no contiene permutaciones impares.
2. Demostrar que si G contiene al menos una permutación impar, entonces G contiene tantas permutaciones pares como permutaciones impares.

[001422]

Ejercicio 3767

Sean $a = (1,2)(3,4)$, $b = (1,3)(2,4)$, $c = (1,4)(2,3) \in \mathscr{A}_4$, $X = \{a,b,c\}$, $V = \{a,b,c,\mathrm{Id}\}$ y $\Phi : \mathscr{S}_4 \to \mathscr{S}(X), g \in G \mapsto \Phi_g = \left[x \mapsto gxg^{-1}\right]$.

1. (a) Demostrar que V es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_4$. (Se puede estudiar el orden de los elementos de $\mathscr{A}_4$).
   (b) Demostrar que $\langle a \rangle$ es un subgrupo normal de V y no es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_4$.
2. Demostrar que Φ es un homomorfismo de grupos.
3. (a) Calcular $\Phi(g)$, para $g = (1,2)$, luego $g = (1,2,3)$.
   (b) Deducir que Φ es sobreyectiva.
4. Demostrar que $\mathscr{S}_4/V$ es isomorfo a $\mathscr{S}_3$.
5. Escribir la descomposición de $\mathscr{A}_4$ según las clases módulo V.

[001423]

Ejercicio 3768

1. Determinar el centro del grupo $\mathscr{S}_n$.
2. (a) Demostrar que un grupo $G_1 \times G_2$ contiene un subgrupo normal isomorfo a G_1.
   (b) Demostrar que los grupos $\mathscr{S}_n$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathscr{A}_n$ no son isomorfos si $n \geqslant 3$.

[001424]

Ejercicio 3769

1. Demostrar que en $\mathscr{S}_n$ se tiene $f \circ (a,b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$.
2. Demostrar que las permutaciones $(1,\ldots,n)$ y $(1,2)$ generan $\mathscr{S}_n$ (se recuerda que las transposiciones generan $\mathscr{S}_n$).

[001425]

Ejercicio 3770

1. Demostrar que $\mathscr{S}_n$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathscr{A}_{n+2}$.
2. Demostrar que $\mathscr{S}_4$ no es isomorfo a un subgrupo de $\mathscr{A}_5$.
3. Demostrar que $\mathscr{S}_5$ no es isomorfo a un subgrupo de $\mathscr{A}_6$.

Solución ▼ [001426]

Ejercicio 3771

Demostrar que todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de S_n (grupo simétrico) para cierto n. [001427]

Ejercicio 3772 Generadores de $\mathscr{S}_n$

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $\mathscr{S}_n$ es generado por los siguientes subconjuntos :

1. $A = \{(i, i+1) \text{ tal que } 1 \leqslant i < n\}$.
2. $B = \{(1\ i) \text{ tal que } 2 \leqslant i \leqslant n\}$.
3. $C = \{(1\ 2), (1\ 2\ \cdots\ n)\}$.

[003074]

Ejercicio 3773 Generadores de $\mathscr{S}_n$

Demostrar que todo permutación de $\mathscr{S}_n$ se escribe de manera única : $\sigma = c_2^{\alpha_2} \circ c_3^{\alpha_3} \circ \cdots \circ c_n^{\alpha_n}$, donde $c_i = (1\ 2\ \cdots\ i)$ y $0 \leqslant \alpha_i < i$. [003075]

Ejercicio 3774 $\mathscr{A}_n$ es generado por los 3-ciclos

1. Calcular $(a\,b\,c) \circ (b\,c\,d)$.
2. Demostrar que el subgrupo alternado $\mathscr{A}_n$ es generado por los 3-ciclos ($n \geqslant 3$).

Solución ▼ [003076]

Ejercicio 3775 $\mathscr{A}_n$ es generado por los 3-ciclos

Sea $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$.

1. Sea $i, j \in \{3, \dots, n\}\ i \neq j$.
   Descomponer en ciclos con soportes disjuntos la permutación : $\sigma = (1\ i\ 2) \circ (1\ 2\ j) \circ (1\ i\ 2)$.
2. Se denota $\mathscr{H}$ el subgrupo de $\mathscr{A}_n$ generado por los 3-ciclos $(1\ 2\ k)$, $\quad 3 \leqslant k \leqslant n$.
   (a) Demostrar que : $\forall i, j \geqslant 3$, con $i \neq j$, $\mathscr{H}$ contiene $(1\ 2) \circ (i\ j)$ y $(i\ j) \circ (1\ 2)$.
   (b) Demostrar que : $\forall j \geqslant 3$, $\mathscr{H}$ contiene $(1\ 2) \circ (1\ j)$ y $(1\ 2) \circ (2\ j)$.
   (c) Demostrar que : $\forall i \neq j, \forall k \neq l, \quad (i\ j) \circ (k\ l) \in \mathscr{H}$.
   (d) Demostrar que $\mathscr{H} = \mathscr{A}_n$.

Solución ▼ [003077]

Ejercicio 3776 Signo en función del número de órbitas

Sea $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Se denota c el número de ciclos con soportes disjuntos que constituyen σ, y f el número de puntos fijos. Calcular $\varepsilon(\sigma)$ en función de n, c, y f.

Solución ▼ [003078]

Ejercicio 3777 Número de transposiciones para generar un ciclo

Sea $\sigma \in S_n$. Se llama *órbita de* σ toda parte x de $\{1,\dots,n\}$ en la cual σ induce una permutación circular. (Las órbitas son los soportes de los ciclos de σ, y los puntos aislados constituidos puntos fijos).
Se denota $N(\sigma)$ el número de órbitas de σ.

1. Demostrar que si τ es una transposición, entonces $N(\tau\circ\sigma) = N(\sigma)\pm 1$.
2. Aplicación : ¿Cuál es el número mínimo de transposiciones necesarias para obtener un n-ciclo ?

[003079]

Ejercicio 3778 Conjugación

Sean $\sigma,\sigma' \in \mathscr{S}_n$. Se dice que σ y σ' son conjugados si existe $\rho \in \mathscr{S}_n$ tal que $\sigma' = \rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$.

1. Demostrar que todo conjugado de un k-ciclo es aún un k-ciclo.
2. Demostrar que σ y σ' son conjugados si y solo si ciclos con soportes disjuntos de σ y σ' tienen dos a dos la misma longitud.

[003080]

Ejercicio 3779 Caracterización del signo

Sea E un conjunto finito y $f : \mathscr{S}_E \to \mathbb{C}^*$ un morfismo de grupos.

1. Si σ es una transposición, ¿qué se puede decir de $f(\sigma)$?
2. Demostrar que dos permutaciones conjugadas tienen la misma imagen mediante f.
3. Deducir que f es la función constante 1, o bien f es el signo.

[003081]

Ejercicio 3780 Cálculo de signo

Sea
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$
Calcular $\varepsilon(\sigma)$.

Solución ▼ [003082]

Ejercicio 3781 Centro de $\mathscr{S}_E$

Sea E un conjunto teniendo al menos tres elementos.

1. Para $a,b \in E$ distintos y $\sigma \in \mathscr{S}_E$, simplificar $\sigma\circ(a\ b)\circ\sigma^{-1}$.
2. ¿Cuáles son las permutaciones σ que conmutan con $(a\ b)$?
3. Deducir que el centro de $\mathscr{S}_E$ se reduce a $\{\mathrm{Id}_E\}$.

[003083]

Ejercicio 3782 Conmutante de un n-ciclo

Sea $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n) \in \mathscr{S}_n$. Encontrar todas las permutaciones $\rho \in \mathscr{S}_n$ conmutante con σ. (Reconocer $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$)

Solución ▼ [003084]

Ejercicio 3783 Conmutante un producto de 5-ciclos

¿En $\mathscr{S}_{10}$, cuáles son las permutaciones que conmutan con $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

Solución ▼ [003085]

Ejercicio 3784 Potencias de un k-ciclo

Sea σ un k-ciclo de $\mathscr{S}_n$ y $p \in \mathbb{Z}$.

1. Si $p \mid k$, demostrar que σ^p es el producto de p ciclos de soporte disjuntos de longitud $\frac{k}{p}$.
2. Demostrar que para $p \wedge k = 1$, σ^p es un k-ciclo (usar la igualdad de Bézout).
3. En el caso general, estudiar la descomposición en ciclos de σ^p.

[003086]

Ejercicio 3785 Orden maximal

Encontrar el orden maximal de una permutación de $\mathscr{S}_{10}$.

Solución ▼ [003087]

Ejercicio 3786 Subgrupo de índice 2 en $\mathscr{S}_n$

Sea H un subgrupo de $\mathscr{S}_n$ de orden $\frac{n!}{2}$. Se denota $K = \mathscr{S}_n \setminus H$.

1. Para $\sigma \in H$, demostrar que $\sigma H = H$ y $\sigma K = K$.
2. Sea $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Determinar los conjuntos σH, σK, $H\sigma$, $K\sigma$ dependiendo de que $\sigma \in H$ o $\sigma \in K$.
3. Deducir que si dos permutaciones son conjugadas, entonces las dos están en H o las dos están en K.
4. Demostrar finalmente que $H = \mathscr{A}_n$.

[003088]

Ejercicio 3787 Numeración

¿Cuántas permutaciones de $\mathscr{S}_{26}$ hay que tienen tres puntos fijos, dos 3-ciclos, un 5-ciclo, y dos 6-ciclos ?

Solución ▼ [003089]

Ejercicio 3788 **IT

Sea σ el elemento de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

1. ¿Cuántos σ tienen inversiones ? ¿Cuánto vale su signo ?
2. Descomponer σ como producto de transposiciones. Encontrar su signo.
3. Determinar las órbitas de σ.
4. Determinar σ^{2005}.

Solución ▼ [005353]

Ejercicio 3789 ***IT

Demostrar que S_n es generado por $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \ldots, \tau_{1,n}$.

Solución ▼ [005354]

Ejercicio 3790 ***IT

Demostrar que A_n es generado por los ciclos de longitud 3 (para $n \geqslant 3$).

Solución ▼ [005355]

Ejercicio 3791 ***I

Demostrar que S_n es generado por $\tau_{1,2}$ y el ciclo $(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)$.

Solución ▼ [005356]

Ejercicio 3792 ***I

Sea $(G,\times)$ un grupo. Demostrar que $(G,\times)$ es isomorfo a un subgrupo de $(S(G),\circ)$ y que, en particular, todo grupo finito de orden n es isomorfo a un subgrupo de S_n. (Teorema de CAYLEY).
(Indicación : Demostrar que para cada x de G, la aplicación $y \mapsto xy$ es una permutación de G.)

Solución ▼ [005357]

Ejercicio 3793 ***

Sea σ una permutación de $\{1,\ldots,n\}$ y k el número de órbitas de σ. Demostrar que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Solución ▼ [005358]

Ejercicio 3794 ***I

σ es una permutación dada de $\{1,\ldots,n\}$, se define la matriz cuadrada denotada P_σ, de orden n, cuyo término línea i columna j es $\delta_{i,\sigma(j)}$ (donde $\delta_{i,j}$ es el símbolo de KRONECKER. Se denota G el conjunto de las P_σ, donde σ recorre S_n.

1. (a) σ y σ' son dos elementos de S_n, calcular $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
   (b) Deducir que $(G,\times)$ es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorfo a $(S_n,\circ)$ (las matrices P_σ son llamados « matrices de permutación »).
2. (Una utilización de los P_σ) A es una matriz cuadrada dada, calcular AP_σ y $P_\sigma A$. ¿Qué se constata ?

Solución ▼ [005359]

Ejercicio 3795 ***I

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ son p matrices cuadradas de orden n, dos a dos distintas e invertibles. Se supone que $\{A_1,\ldots,A_p\}$ es estable para $\times$. Demostrar que $\{A_1,\ldots,A_p\}$ es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$.

Solución ▼ [005360]

Ejercicio 3796 ***

En $E = \mathbb{R}^n$, se considera el hiperplano H de ecuación $x_1 + \cdots + x_n = 0$ en la base canónica $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E. Para $\sigma \in S_n$ dada, se considera el endomorfismo f_σ de E definido por : $\forall i \in E,\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Se define así $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Demostrar que p es una proyección cuya imagen y dirección serán determinadas.

Solución ▼ [005361]

134 203.99 Otro

Ejercicio 3797 $x + y - xy$

1. Sobre $E = [0, 1]$, se define la operación : $x * y = x + y - xy$. Verificar que $*$ es interno, y estudiar sus propiedades (conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, elementos simetrisables, elementos regulares).
2. Las mismas preguntas con $E =]-\infty, 1[$.

Solución ▼ [002960]

Ejercicio 3798 $x \mapsto axa$ sobreyectiva

Sea $*$ una operación asociativa en E, y $a \in E$ tal que la aplicación $E \to E, x \mapsto a * x * a$ sea sobreyectiva. Demostrar que existe un elemento neutro, y que a es simetrisable.

Solución ▼ [002961]

Ejercicio 3799 Operación inducida en las partes

Sea $*$ una operación en E. Para $A, B \subset E$, se establece $A * B = \{a * b$ tal que $a \in A,\ b \in B\}$.

1. Estudiar las propiedades de $*$ sobre $\mathscr{P}(E)$ en función de las de $*$ sobre E (conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, elementos simetrisables).
2. ¿Es $*$ distributiva con respecto a $\cup$?

Solución ▼ [002962]

Ejercicio 3800 Ley en $\mathbb{Z}^2$

Se define la operación en $\mathbb{Z}^2$: $(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$.

1. Estudiar las propiedades de esta operación.
2. Para $z \in \mathbb{Z}$, se establece $f_{a,b}(z) = az + b$. Demostrar que $\phi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, (a, b) \mapsto f_{a,b}$ es un morfismo para $*$ y $\circ$.
3. ¿Es un isomorfismo ?

Solución ▼ [002963]

Ejercicio 3801 Composición de las relaciones

Sea E un conjunto, y $\mathscr{F}$ el conjunto de relaciones binarias en E. Para $R, S \in \mathscr{F}$, se define la relación $R * S$ por :

$$x(R * S)y \iff \exists\ z \in E \text{ tal que } xRz \text{ y } zSy.$$

A toda función $f : E \to E$, se asocia la relación $yR_f x \iff y = f(x)$.

1. Demostrar que $*$ es asociativa, pero no conmutativa en general.

2. Simplificar $R_f * R_g$.
3. ¿Admite $*$ un elemento neutro ?

[002964]

Ejercicio 3802 Grupo sin subgrupo no trivial

Sea G un grupo que no tiene un subgrupo no trivial. Demostrar que G es monogénico, finito, y que card G es un número primo. [002986]

Ejercicio 3803 Grupo diedro

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Se denota $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$ y :

$$f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \omega^k z; \qquad g_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \omega^k \bar{z}, \qquad (0 \leqslant k < n).$$

1. Demostrar que $G = \{f_0, \dots, f_{n-1}, g_0, \dots, g_{n-1}\}$ es un grupo para la composición de las aplicaciones.
2. Sea $a > 0$ y A_k el punto del plano de afijo $a\omega^k$. Demostrar que G representa el conjunto de isometrías del polígono $A_0 \dots A_{n-1}$.
3. ¿G es cíclico ?
4. Demostrar que G es generado por aplicaciones f_1 y g_0 y que se tiene $f_1 \circ g_0 = g_0 \circ f_1^{-1}$.
5. Sea H un grupo cualquiera generado por dos elementos ρ y σ tales que $\begin{cases} \rho \text{ es de orden } n \\ \sigma \text{ es de orden } 2 \\ \rho\sigma = \sigma\rho^{-1}. \end{cases}$

   Demostrar que G y H son isomorfos.

[002987]

Ejercicio 3804 Grupo de orden par

Sea G un grupo finito de cardinal par. Demostrar que existe un elemento de orden 2.

Indicación ▼ [002988]

Ejercicio 3805 Grupo de orden impar

Sea G un grupo finito de cardinal impar. Demostrar que : $\forall x \in G,\ \exists!\ y \in G$ tal que $x = y^2$. [002989]

Ejercicio 3806 Grupo de expositores 2

Sea G un grupo finito tal que : $\forall x \in G,\ x^2 = e$.

1. Demostrar que G es conmutativo (considerar $(xy)(xy)$).
2. Sea H un subgrupo de G y $x \in G \setminus H$. Se denota K el subgrupo generado por $H \cup \{x\}$. Demostrar que card $K = 2$ card H.
3. Deducir que card G es una potencia de 2.

[002990]

Ejercicio 3807 Grupos de orden 6

Determinar todos los grupos finitos de cardinal 6 (se admite que en tal grupo, existe un elemento a de orden 2, y un elemento b de orden 3). [002991]

Ejercicio 3808 Grupo de homografías

Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, y $f : E \to E, x \mapsto \frac{1}{x}$; $g : E \to E, x \mapsto 1-x$
Verificar que f y g son las biyecciones y determinar el grupo generado por f y g por la ley $\circ$. [002992]

Ejercicio 3809 Grupos de similitudes

Para $\alpha \in \mathbb{C}^*$ y $\beta \in \mathbb{C}$, se denota $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \alpha z + \beta$.

1. Demostrar que el conjunto de funciones $f_{\alpha,\beta}$ es un grupo por la ley $\circ$. ¿Es conmutativo ?
2. ¿Bajo qué condiciones sobre α, β, $f_{\alpha,\beta}$ es de orden finito ?

[002993]

Ejercicio 3810 Teorema de Lagrange

Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. Se define una relación en G por :

$$\forall x,y \in G,\ x \sim y \iff \exists\ h \in H \text{ tal que } x = hy.$$

1. Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia. ¿Cuál es la clase de e ?
2. Sea $a \in G$. Demostrar que $\dot{a}$ es equipotente a H.
3. Deducir que card H divide card G (*Teorema de Lagrange*).

[002994]

Ejercicio 3811 Relación de equivalencia con dos subgrupos

Sean H,K dos subgrupos de un grupo G. Para $x,y \in G$, se establece :

$$x \sim y \iff \exists\ h \in H,\ \exists\ k \in K \text{ tal que } y = hxk.$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia.
2. Para $x \in G$, sea $G_x = \{(h,k) \in H \times K \text{ tal que } hxk^{-1} = x\}$. Demostrar que G_x es un subgrupo de $H \times K$.
3. Si H y K son finitos, demostrar que cada clase de equivalencia es finita con cardinal dividiendo card(H)card(K).

[002995]

Ejercicio 3812 Grupo de orden *ab*

Sea G un grupo conmutativo finito de orden $n = ab$, con $a \wedge b = 1$. Se define $A = \{x \in G \text{ tal que } x^a = e\}$ y $B = \{x \in G \text{ tal que } x^b = e\}$.

1. Demostrar que A y B son subgrupos de G.
2. Demostrar que $A \cap B = \{e\}$ y $AB = G$.

Solución ▼ [002996]

Ejercicio 3813 Subgrupos de tipo finito de $\mathbb{Q}$

---

1. Sea H un subgrupo aditivo de $\mathbb{Q}$ generado por un número finito de elementos. Demostrar que H es monogénico.
2. Encontrar un subgrupo no trivial de $\mathbb{Q}$ que no es engendrado por una familia finita.

[002997]

Ejercicio 3814 $(\mathbb{Q},+)$ y $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ no son isomorfos

Demostrar que los grupos $(\mathbb{Q},+)$ y $(\mathbb{Q}^{+*},\times)$ no son isomorfos (pensar en $\sqrt{2}$). [002998]

Ejercicio 3815 Subgrupo infinito de $\mathbb{C}^*$

Sea p un entero natural primo. Se llama G el conjunto de los $z\in\mathbb{C}$, para los cuales existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $z^{p^n}=1$.

1. Demostrar que G es un grupo multiplicativo infinito donde cada elemento es de orden finito.
2. Demostrar que todo subgrupo H de G, distinto de G, es cíclico (se puede considerar un elemento z_0 de $G\setminus H$ y demostrar que el orden de elementos de H no supera la de z_0).

[002999]

Ejercicio 3816 Teorema del rango

Sea $f:G\to G'$ un morfismo de grupos donde G es un grupo finito. Demostrar que $\operatorname{card}(\ker f)\times\operatorname{card}(\operatorname{Im} f)=\operatorname{card}(G)$. [003000]

Ejercicio 3817 Centro de un p-grupo

Sea G un grupo finito de cardinal p^k, donde p es un número primo y $k\in\mathbb{N}^*$. Se denota Z el centro de G.

1. Se considera la acción de G sobre G por automorfismos internos, demostrar que $\operatorname{card}(Z)\equiv 0 \bmod p$.
2. Deducir que todo grupo de orden p^2, p primo, es conmutativo y es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ o a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

[003001]

Ejercicio 3818 Subgrupos y generadores de $\mathbb{Z}^2$

Se considera el grupo $G=\mathbb{Z}^2$. Una *base* de G es una familia $(\alpha=(a,a'),\beta=(b,b'))$ engendrando G.

1. (a) Demostrar que (α,β) es una base de G si y solo si $\det(\alpha,\beta)=\pm 1$.
   (b) Demostrar que $\alpha=(a,a')$ pertenece a una base de G si y solo si $a\wedge a'=1$.
2. Sea H un subgrupo no trivial de G. Se denota $H'=\{ux+vy \text{ tal que } u\in\mathbb{Z},\ v\in\mathbb{Z},(x,y)\in H\}$, n el elemento más pequeño de H' estrictamente positivo y $u\in\mathbb{Z}$, $v\in\mathbb{Z}$, $(x,y)\in H$ tales que $ux+vy=n$.
   (a) Demostrar que $u\wedge v=1$ y que x e y son divisibles por n.
   (b) Sea $\alpha=(x/n,y/n)$ y $\beta=(-v,u)$. Demostrar que (α,β) es una base de G y que existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $(n\alpha,np\beta)$ engendra H.

[003002]

Ejercicio 3819 Parte generando un grupo finito

Sea G un grupo finito de cardinal n. Demostrar que existe una parte generadora de G de cardinal inferior o igual a $\log_2(n)$.

Solución ▼ [003003]

Ejercicio 3820 Grupo finito

Sea G un grupo que tiene un número finito de subgrupos. Demostrar que G es finito.

Solución ▼ [003004]

Ejercicio 3821 Preguntas del curso

1. Sea $(E,\star)$ un conjunto provisto de una ley de composición interna asociativa con un elemento neutro, denotado ε. Sea x e y dos elementos de E que admite una simetría. Determinar una simetría de $x\star y$.
2. Encontrar la caracterización de la inyectividad de un morfismo a partir de su núcleo.

[007349]

Ejercicio 3822

Se considera el grupo $(\mathbb{Z},+)$. El subconjunto $4\mathbb{Z}$ es por definición el conjunto de múltiplos enteros de 4, dicho de otro modo

$$4\mathbb{Z} = \{p\in\mathbb{Z}, \exists m\in\mathbb{Z},\ p=4m\}.$$

1. ¿Los subconjuntos $4\mathbb{Z}$ y $6\mathbb{Z}$ son estables para la ley $+$? ¿Son entonces subgrupo ?
2. ¿El subconjunto $4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$ es un subgrupo ? (Indicación : Se puede enumerar sus primeros elementos positivos)
3. ¿El subconjunto $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ es un subgrupo ?

[007350]

Ejercicio 3823 Intersección-Unión

Sea E un conjunto y $\mathscr{P}(E)$ el conjunto de sus partes.

1. Determinar las propiedades de la ley $(\mathscr{P}(E),\cup)$ (conmutatividad, asociatividad, existencia y unicidad del elemento neutro, elementos simetrisables).
2. Determinar las propiedades de la ley $(\mathscr{P}(E),\cap)$.
3. ¿La Ley $\cup$ es distributiva con respecto a la ley $\cap$?

[007351]

Ejercicio 3824 En un conjunto de dos elementos

Sea $E=\{a,b\}$ un conjunto de dos elementos. Se busca determinar todas las estructuras de grupo en este conjunto.

1. Si a es el elemento neutro, ¿cuál debe ser la simetría de b? Deducir la tabla de multiplicar en este caso.
2. ¿Cuántas estructuras de grupo diferentes hay en E?

[007352]

Ejercicio 3825 Grupos ordenados

Sea G un conjunto dotado de una relación de orden $\leqslant$ y de una estructura de grupo $\star$. Se dice que $(G, \star, \leqslant)$ es un *grupo ordenado* si

$$\forall a \in G,\ \forall (x,y) \in G^2,\ \ (x \leqslant y \Rightarrow (a \star x \leqslant a \star y \quad \text{y} \quad x \star a \leqslant y \star a))\,.$$

1. ¿$(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ existe un grupo ordenado ?
2. ¿$(\mathbb{R}^\star, \times, \leqslant)$ existe un grupo ordenado ?

[007353]

Ejercicio 3826

1. ¿Qué ley hace el conjunto de invertibles del anillo $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ un grupo ? ¿Este grupo es cíclico ?
2. ¿Cuántos generadores tiene un grupo cíclico de orden 91 ?
3. Descomponer en productos de ciclos con soportes disjuntos, la permutación

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Descomponer en productos de transposiciones, la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. ¿El polinomio $P(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1$ en cuatro variables es simétrica ?

Solución ▼ [007375]

Ejercicio 3827

1. ¿Cuántos el anillo $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ ¿tiene elementos invertibles ?
2. Dar un isomorfismo entre $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ y un grupo producto.
3. ¿El grupo de los convertibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ es cíclico ? Si es sí, ¿cuántos generadores hay ?

Solución ▼ [007376]

Ejercicio 3828

1. Factorizar 221 como producto de números primos.
2. Determinar el conjunto de soluciones enteras de la ecuación

$$(X-3)(X-5) = 0, \quad (\text{mod } 221).$$

Solución ▼ [007377]

Ejercicio 3829

1. Sobre el círculo unitario, hemos marcado los elementos del grupo de las raíces de la unidad de orden 8. Sea $\zeta = \exp(2i\pi/8)$. Representar sobre un círculo unidad los elementos del subgrupo generado por ζ^3.

2. Sea la raíz de la unidad $z = \exp(16i\pi/11)$. Determinar su orden en el grupo $\mathbb{C}^\star$. Determinar el orden de z^8. Determinar el argumento de z^8.

Solución ▼ [007378]

Ejercicio 3830

1. Calcular, con el algoritmo de Hörner aplicado al polinomio $P(x) = x^2 - 7$, un valor aproximado de $\sqrt{7}$ con una precisión 10^{-1}.
2. Calcular con el algoritmo de Hörner un valor aproximado con una precisión 10^{-2} de $\sqrt{7}$.

Solución ▼ [007379]

Ejercicio 3831

1. ¿Cuántos elementos invertibles tiene el anillo $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$?
2. ¿Cuál ley hace del conjunto de invertibles del anillo $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ un grupo ?
3. ¿El grupo de los invertibles de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ es cíclico ? Si es sí, ¿cuántos generadores hay ?
4. ¿Cuántos generadores tiene un grupo cíclico de orden 91 ?
5. Descomponer en productos de ciclos con soportes disjuntos la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 1 & 3 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Descomponer en productos de transposiciones la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

[007380]

Ejercicio 3832

1. Dar un isomorfismo entre $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ y un grupo producto.
2. ¿El grupo de los convertibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ es cíclico ? Si es sí, ¿cuántos generadores hay ?

[007381]

Ejercicio 3833

1. Factorizar 221 como producto de números primos.
2. Determinar el conjunto de soluciones de la ecuación

$$(X-3)(X-5) = 0, \quad (\text{mod } 221).$$

[007382]

Ejercicio 3834

1. Dar la definición de un ideal en un anillo conmutativo.

2. Sea I un ideal del anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos. Demostrar que existe un entero de Gauss a tal que I sea el conjunto de múltiplos de a.

[007383]

Ejercicio 3835

Esta es la tabla de un grupo G. ¿Cuál es el orden de G? ¿El grupo G es necesariamente conmutativo? Completar la tabla indicando con precisión las propiedades utilizadas.

$*$	a	b	c	d	e	f
a	e	d		b	a	
b		e		f		d
c	b	f		e		
d	f		e	c		b
e		b				
f	d	c	b			e

¿El grupo es cíclico?

[007384]

Ejercicio 3836

Se recuerda que $\mathbb{F}_5$ designa el cuerpo $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ de cinco elementos.

1. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{F}_{25} := \mathbb{F}_5[X]/(X^2+2X+1)$ es un cuerpo. ¿Cuántos elementos tiene?
2. Si a es un elemento no nulo de $\mathbb{F}_{25}$, ¿cuánto valen $5a$, a^2+2a+1 y a^{24}?
3. Sea x un elemento de $\mathbb{F}_{25}$ tal que $x^2+3x+3=0$. ¿Cuál es el orden multiplicativo de x?

[007385]

Ejercicio 3837

1. ¿Cuáles son los órdenes posibles de los elementos de $((F_{19})^{\times}, \times)$?
2. ¿El grupo $((F_{19})^{\times}, \times)$ es cíclico? Si es sí, ¿cuántos generadores hay?
3. ¿Cuál es el orden multiplicativo del elemento 12 del cuerpo F_{19}?

[007386]

Ejercicio 3838

Se admite que 271 y 281 son dos números primos.

1. ¿Se puede escribir 271 como suma de dos cuadrados? Si es sí, hacerlo. Se puede encontrar una raíz c de -1 módulo 271, luego calcular el $\mathrm{mcd}(271, c+i)$ en el anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos.
2. ¿Se puede escribir 281 como suma de dos cuadrados? Si es sí, hacerlo. Se puede encontrar una raíz c de -1 módulo 281, luego calcular el $\mathrm{mcd}(281, c+i)$ en el anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos.

[007387]

Ejercicio 3839

1. Recordar la lista de isomorfismos de los grupos de orden 4.
2. Recordar la lista de isomorfismos de los grupos de orden 5.
3. ¿El número primo 173 puede escribirse como suma de dos cuadrados ?
4. ¿Cuál ley hace de $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$ un grupo ? ¿Cuántos generadores tiene el grupo $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$?

[007388]

Ejercicio 3840

1. Dar la definición de un ideal en un anillo conmutativo.
2. Sea I un ideal del anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos. Demostrar que existe un entero de Gauss a tal que I sea el conjunto de múltiplos de a.

[007389]

Ejercicio 3841

Se admite que 281 es un número primo.

1. ¿Se puede escribir 281 como suma de dos cuadrados ? Si es sí, hacerlo.
2. Factorizar 280. Se escoge $x = 3$. Se admite que $3^{35} = 60[281]$. Determinar una raíz c de -1 módulo 281.
3. Calcular el $\mathrm{mcd}(281, c+i)$ en el anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos.

Solución ▼ [007390]

Ejercicio 3842

1. Dar la definición de grupo.
2. Decir si los siguientes pares son grupos : $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{C}^*,+)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$. Cuando la respuesta es “no”, indicar una propiedad de los grupos que faltan (no se pide justificación cuando la respuesta es “sí”).
3. ¿Cuáles son los ideales del anillo $(\mathbb{Z},+,\times)$?
4. ¿Cuáles son los ideales del anillo $(\mathbb{R}[X],+,\times)$?

[007391]

Ejercicio 3843

1. ¿El entero 51606 pertenece a $2569+247\mathbb{Z}$?
2. ¿El entero -1601 es un representante de la clase $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?
3. Calcular elemento 2169 en $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 16.
4. Calcular elemento 11^{329} en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 12.

[007392]

Ejercicio 3844

Esta es la tabla de un grupo G. ¿Cuál es el orden de G ? ¿El grupo G es necesariamente conmutativo ? Completar la tabla indicando con precisión las propiedades utilizadas.

$*$	a	b	c	d	e
a			d		c
b	e		a		d
c		a			
d				d	e
e			b		a

[007393]

Ejercicio 3845

Se considera el grupo $(\mathbb{F}_{41})^{\times}$. ¿Cuáles son los posibles órdenes de un elemento de este grupo ? ¿Cuántos elementos de cada orden tiene este grupo ? Determinar justificando un generador de este grupo. [007394]

Ejercicio 3846

1. Demostrar que el polinomio X^3+X+1 es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$.
2. ¿Cuál es entonces la estructura del conjunto cociente $A=\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$?
3. ¿Cuál es la cardinalidad de A ? Sea α la clase del polinomio X en este cociente A. Dar la lista de los elementos de A.
4. Sin cálculos, pero justificando la respuesta, decir cuanto valen las siguientes cantidades
$$\alpha+\alpha,\ \ \alpha^3+\alpha+1,\quad \alpha^7.$$
5. Determinar el orden multiplicativo de α en $A^{\times}$.
6. Establecer la tabla de potencias de α.
7. Calcular $(1+\alpha)(1+\alpha^2)$.
8. Calcular $\alpha^3+\alpha^2$ como potencia de α.
9. Calcular $(1+\alpha)^{-1}$.

[007395]

Ejercicio 3847

1. Enunciar el teorema de Lagrange.
2. Sea G un grupo y a un elemento de orden k en G. Sea p un entero natural. ¿Cuál es el orden de a^p ?
3. ¿El grupo $\mathscr{S}_3$ de permutaciones de $\{1,2,3\}$ es cíclico ? (Justificar)
4. Enunciar el teorema de la división euclidiana en $k[X]$.
5. Enunciar el teorema de la división euclidiana en $\mathbb{Z}[i]$.

Solución ▼ [007396]

Ejercicio 3848

1. ¿La clase $[51]$ es invertible en el anillo $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Si es sí, calcular 92×51^{-1} en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. El resultado debe estar representado por un número entre 0 y 130.
2. Encontrar el conjunto de divisores de cero en $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. (En este ejercicio no se considera el 0 como divisor de cero.) Representar cada clase con un número entre 1 y 15.

Solución ▼ [007397]

Ejercicio 3849

1. Se recuerda que el único polinomio irreducible de grado 2 sobre $\mathbb{F}_2$ es X^2+X+1. Demostrar que el polinomio X^4+X+1 es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Se denota $A := \mathbb{F}_2[X]/\langle X^4+X+1\rangle$ el anillo cociente de $\mathbb{F}_2[X]$ por el ideal engendrado por P. ¿La clase de $3X^5+X^2+X+7$ es nula en A ? ¿El anillo A es un cuerpo ? ¿Cuántos elementos tiene ?
3. Se denota α la clase del polinomio X en A. Determinar α^4 y α^{15} como polinomios de grado a lo sumo 3 en α.
4. ¿EL polinomio $X^{15}-1$ es un múltiplo de X^4+X+1 en $\mathbb{F}_2[X]$?

Solución ▼ [007398]

Ejercicio 3850

1. Se considera el código binario, lineal generada por la matriz

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

   ¿Cuál es su alfabeto ? ¿Su longitud ? ¿Su dimensión ? ¿Un polinomio generador ? ¿Su número de palabras ?
2. ¿El código es cíclico ?
3. Escribir una matriz de control. Demostrar que la distancia del código es al menos 3. ¿Cuántos errores podemos entonces detectar ? ¿Cuántos errores se pueden entonces corregir ?
4. ¿La palabra $(0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1)$ es una palabra clave ? Si no, suponiendo que solo tiene un error, escribir la palabra clave de la que proviene.

Solución ▼ [007399]

Ejercicio 3851

1. ¿El número 613 es primo ?

2. ¿Se puede escribir como la suma de dos cuadrados ?
3. Calcular 35^2 módulo 613.
4. Efectuar la división euclidiana de 613 por $35+i$ en el anillo $\mathbb{Z}[i]$ enteros gaussianos.
5. Escribir 613 como suma de dos cuadrados.

Solución ▼ [007400]

Ejercicio 3852

1. Enunciar el teorema de la división euclidiana en $k[X]$.
2. Enunciar el teorema de la división euclidiana en $\mathbb{Z}[i]$.
3. Sea G un grupo y a un elemento de G de orden n. Sea k un entero natural. ¿Cuál es el orden de a^k ?
4. Demostrar que todo grupo de orden 13 es conmutativo.
5. Dar un ejemplo de un número primo que no se puede escribir como la suma de dos cuadrados.

Solución ▼ [007401]

Ejercicio 3853

1. ¿Los grupos $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son isomorfos ?
2. ¿Los grupos $\mathbb{F}_7$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son isomorfos ? Justificar.
3. ¿Los grupos $(\mathbb{F}_7)^\star$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son isomorfos ? Justificar.

Solución ▼ [007402]

Ejercicio 3854

1. Se recuerda que el único polinomio irreducible de grado 2 sobre $\mathbb{F}_2$ es X^2+X+1. Demostrar que el polinomio X^4+X^3+1 es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Se denota $A := \mathbb{F}_2[X]/(X^4+X^3+1)$ el anillo cociente de$\mathbb{F}_2[X]$ por el ideal engendrado por P.El anillo A ¿es un cuerpo ? ¿Cuántos elementos tiene ?
3. Se denota α la clase del polinomio X en A. Determinar α^4 y α^{15} como polinomios de grado a lo sumo 3 en α.
4. Determinar todas las potencias de α, α hasta α^{15}, como polinomios de grado a lo sumo 3 en α.
5. Determinar $\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9$ como polinomios de grado a lo sumo 3 en α.
6. Escribir el inverso de $1+\alpha+\alpha^3$ como potencia de α.

Solución ▼ [007403]

Ejercicio 3855

Alice y Bernard deciden usar el algoritmo de El Gamal. El utiliza el cuerpo $\mathbb{F}_{13}$, con el elemento $G=2$.

1. ¿Cuáles son los órdenes posibles de los elementos de $\mathbb{F}_{19}^\times$. Determinar el orden de 2 en $\mathbb{F}_{19}^\times$.
2. Bernard elige su clave privada $c=3$. Determinar su clave pública $C=G^c$.
3. Alice elige una clave privada temporal $d=7$. ¿Cuál es su clave pública D ? Ella quiere envía el mensaje $m=11$. Lo encripta usando la clave pública C de Bernard por $(M_1,M_2)=(D,mC^d)$. Explicitar este mensaje encriptado.

4. ¿Cómo Bernard encuentra el mensaje m ?
5. En un segundo envío, Bernard recibe $(8,3)$. ¿Cuál es el mensaje m enviado esta vez por Alice ? ¿Qué clave privada usó esta vez ?

Solución ▼ [007404]

Ejercicio 3856 Preguntas del curso

1. Enunciar el teorema de Lagrange.
2. Dar un ejemplo de dos grupos finitos no isomorfos del mismo orden. Justificar el hecho de que los dos grupos elegidos no son isomorfos.
3. Dar la definición de un subgrupo *normal*.
4. ¿El anillo $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z},+,\times)$ es íntegro ? Justificar.
5. Efectuar la división euclidiana de X^3+2X^2-5X+8 por X^2-1 en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.
6. Efectuar la división euclidiana de X^3+2X^2-5X+8 por $2X^2-1$ en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

[007405]

Ejercicio 3857

1. Calcular los productos en $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ y $(1,2)(2,3)(1,2)$.
2. ¿El conjunto de transposiciones de $\mathscr{S}_7$ es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$?

[007406]

Ejercicio 3858

1. Demostrar que 1 está en el subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$ generado por $\{3,8\}$.
2. ¿Cuál es el subgrupo generado por $\{3,8\}$?
3. ¿Cuál es el subgrupo generado por $\{3,8,15\}$?

[007407]

Ejercicio 3859

1. Descomponer en producto de ciclos con soportes disjuntos la permutación
$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&3&1&4&2&5\end{pmatrix}.$$
2. Determinar su orden.
3. Escribir su potencia σ^6.
4. Escribir su inversa como producto de ciclos con soportes disjuntos.
5. Descomponerla en un producto de menos de 7 transposiciones.

[007408]

Ejercicio 3860

1. ¿Cuáles son los elementos invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$?
2. Determinar un generador g del grupo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ invertibles del anillo $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.
3. Escribir cada elemento de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ como potencia de g.

[007409]

135 204.01 Producto escalar, norma

Ejercicio 3861

tiene dos polinomios $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ y $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, se asocia

$$< P,Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Demostrar que el se trata de un producto escalar. [001450]

Ejercicio 3862

¿Para qué valores de λ las siguientes formas bilineales definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

[001451]

Ejercicio 3863

Verificar que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida a continuación es una forma bilineal simétrica y determinar la forma cuadrática que está asociada :

$$\phi\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.$$

¿Se trata de un producto escalar ?
Verificar que la aplicación $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida a continuación es una forma cuadrática y determinar la forma bilineal simétrica asociada :

$$q\big((x,y,z)\big) = x^2 + 3(x + y - z)^2 + (z - y)^2.$$

¿Se trata de una norma euclidiana ? [001452]

Ejercicio 3864

Sobre $\mathbb{R}_3[X]$ se consideran las siguientes formas bilineales. Decir cuáles son productos escalares.

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt, \qquad \phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)dt,$$

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0).$$

[001453]

Ejercicio 3865

¿Para qué valores de λ las siguientes formas bilineales definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4. $i(x,y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

[001454]

Ejercicio 3866

Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ perteneciendo a $\mathbb{R}^2$. ¿Para qué valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la aplicación $f(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$? [001455]

Ejercicio 3867

Sean x, y y z tres números reales tales que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$. Demostrar la desigualdad : $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$. (Se puede por ejemplo aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a ciertos vectores de $\mathbb{R}^3$, para un producto escalar bien elegido.) [001456]

Ejercicio 3868

Sean x, y y z tres números reales tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Demostrar que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$. [001457]

Ejercicio 3869

Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial no nulo, φ un producto escalar en E, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\psi(x,y) = a\varphi(x,x) + b\varphi(x,y) + c\varphi(y,y)$. Encontrar una condición necesaria y suficiente en (a,b,c), para que ψ sea un producto escalar en E. [001458]

Ejercicio 3870

1. Sean $(E, \langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y $\|\cdot\|$ la norma asociada; $n \in \mathbb{N}^*$, y $v_1, \dots, v_n \in E$. Demostrar la desigualdad $\|\sum_{i=1}^{n} v_i\|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.
2. Sean $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Estudiar el caso de la igualdad.

[001459]

Ejercicio 3871

Demostrar que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estudiar el caso de la igualdad. Sea f y g dos aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que :

$$\forall (f,g) \in C^0([0,1],\mathbb{R}), \quad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Estudiar el caso de la igualdad. Sea f una aplicación continua de un intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que :

$$\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}), \quad \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)dt.$$

Estudiar el caso de igualdad. [001460]

Ejercicio 3872

Recordar el enunciado de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Demostrar que para toda función continua de un segmento $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, se tiene

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \Big(f(t)\Big)^2 dt.$$

¿Para qué funciones se tiene la igualdad ? [001461]

Ejercicio 3873

Sea $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua 2π-periódica$\}$. Demostrar que $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ es un producto escalar en E. [001462]

Ejercicio 3874

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$. Demostrar que $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ es un producto escalar en E. [001463]

Ejercicio 3875

Sea E un espacio euclidiano y f y g dos funciones de E en E que verifica $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$. Demostrar que f y g son lineales. [001464]

Ejercicio 3876

Sean $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n$ de reales positivos. Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} a_kb_kc_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2c_k$. [001465]

Ejercicio 3877

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n y $x_1,\dots,x_p$ de vectores de E tales que si $i \neq j$, entonces $\langle x_i|x_j\rangle < 0$. Demostrar por inducción en n que $p \leqslant n+1$. [001466]

Ejercicio 3878

Sea E un espacio euclidiano, y $(e_1,\dots,e_n)$ de los vectores unitarios verificando :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle^2.$$

Demostrar que $(e_1,\ldots,e_n)$ es una base ortonormal (i.e. una base que es también una familia ortonormal). (NB : no se asume que la dimensión del espacio es n.) [001467]

Ejercicio 3879

1. Demostrar que en $M_n(\mathbb{R})$ la aplicación $(A,B) \to tr({}^tAB)$, es un producto escalar.
2. Sea N la norma asociada, demostrar que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
3. Demostrar que $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A)$.

[001468]

Ejercicio 3880

Sea E un espacio euclidiano y f y g dos funciones de E en E tales que $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x),y\rangle = \langle x,g(y)\rangle$. Demostrar que f y g son lineales. [001469]

Ejercicio 3881

Sea E un espacio euclidiano, demostrar que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2+1 \leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

[001470]

Ejercicio 3882

Sea E un espacio euclidiano y $f : E \to E$ tal que $f(0) = 0$ y :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|.$$

Demostrar que f es lineal. [001471]

Ejercicio 3883

Se provee $\mathbb{R}[X]$ del producto escalar :

$$(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

¿Existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tal que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \text{ ?}$$

[001472]

Ejercicio 3884

Sea E un espacio euclidiano y f un endomorfismo de E, tal que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Demostrar :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y).$$

Ejercicio 3885

Sea $(E,\langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorfismo tal que $\forall x,y\in E$ tales que $\langle x,y\rangle=0$, se tiene $\langle f(x),f(y)\rangle=0$. Demostrar que existe $k\in\mathbb{R}_+$ tal que, para todo $x\in E$ $\|f(x)\|=k\|x\|$. [001474]

Ejercicio 3886

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$,($n\geqslant 2$), y $p\geqslant 1$ un número real. Se define la aplicación

$$N_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto N_p(x)=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Demostrar que N_p es una norma en $\mathbb{R}_n$; se denota así $\|\cdot\|_p$. En los casos donde $p\neq 1$, $p\neq 2$, se puede usar la siguiente relación (admitida) :

$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}},\qquad \forall a,b\in\mathbb{R}^n.$$

2. Se define, para todo $x\in\mathbb{R}^n$, $N_\infty(x)=\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p$. Demostrar que este límite existe para todo x, y que $N_\infty(x)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Demostrar que se trata también una norma en $\mathbb{R}^n$; se denota así $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dibujar las “bolas” $\{x\in\mathbb{R}^2,\ N_p(x)\leqslant 1\}$ en los casos donde $p=1$, $p=2$, $p=\infty$. ¿Cómo se ven los casos de valores intermedios ?

[002426]

Ejercicio 3887 Identidad del paralelogramo

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado.

1. Se supone que la norma de E verifica la relación

$$\forall x,y\in E,\quad 2\big(\|x\|^2+\|y\|^2\big)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2. \qquad (E)$$

   Se define $p:E\times E\to\mathbb{R}$ por

$$p(x,y)=\tfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\big).$$

   Demostrar que p es un producto escalar en E.
2. Recíprocamente, si E es un espacio euclidiano cuyo producto escalar se denota $\langle x,y\rangle$. Demostrar que la norma euclidiana (definida por $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$) verifica (E), y que $\langle x,y\rangle=p(x,y)$.
3. En el caso donde $E=\mathbb{R}^n$, ¿para cuáles valores de $q\geqslant 1$ las normas $\|\cdot\|_q$ verifican (E) ?

[002460]

Ejercicio 3888

Sea $E=\mathbb{R}[X]$ el espacio de polinomios con coeficientes reales. Se define $p:E\times E\to\mathbb{R}$ por

$$p(u,v)=\int_{-1}^1 u(t)v(t)\,dt.$$

1. Demostrar que p es un producto escalar en E, y que $u \mapsto \sqrt{p(u,u)}$ es una norma en E.
2. Sea $E_2 \subset E$ el subespacio de polinomios de grado $\leqslant 2$, y $u \in E$ definido por $u(t) = t^4$. Determinar la proyección ortogonal u_0 de u sobre E_2. Deducir el valor de
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2 \, dt.$$

[002461]

Ejercicio 3889

1. En el espacio $\mathbb{R}^n$, definir una distancia d, tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene $d(x,y) \leqslant 1$. ¿Es posible elegir d de manera que, además, $x \mapsto \sqrt{d(x,0)}$ sea una norma ?
2. Se considera el conjunto S constituido por los puntos de $\mathbb{R}^3$, con norma euclidiana igual a 1 ("esfera unitaria"). Si x, y, son dos elementos de S, existe al menos un círculo de radio 1 trazado en S y pasando por estos puntos (¿en qué casos existen varios ?) ; se denota $d(x,y)$ la longitud del arco más corto de este círculo uniendo x e y ("distancia geodésica" — comparar con la distancia en la esfera terrestre). Demostrar que d es una distancia en S ; ¿por qué $x \mapsto \sqrt{d(x,0)}$ no es una norma ?

[002671]

Ejercicio 3890 Productos escalares

Decir si las siguientes aplicaciones son productos escalares :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $(x,x') \mid (y,y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (Estudiar $(1,t) \mid (1,t)$, $t \in \mathbb{R}$).
2. $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n) \mid (y_1,\dots,y_n) = a\sum_i x_i y_i + b \sum_{i\neq j} x_i y_j$ (Demostrar que $(\sum x_i)^2 \leqslant n \sum x_i^2$).
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Solución ▼ [003660]

Ejercicio 3891 Base de Schmidt

Encontrar una base ortonormada de $\mathbb{R}_3[X]$, para el producto escalar $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

Solución ▼ [003661]

Ejercicio 3892 Base de Schmidt

Sea $E = \mathbb{R}_2[X]$ dotado del producto escalar : $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$. Determinar una base ortonormada de E.

Solución ▼ [003662]

Ejercicio 3893 inversión

Sea E un espacio vectorial euclidiano. Se define para $\vec{x} \neq \vec{0}$: $i(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Demostrar que i es una involución y conserva los ángulos de los vectores.
2. Verificar que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

3. Determinar la imagen por i :
   (a) de un hiperplano afín que no pasa por $\overrightarrow{0}$.
   (b) de una esfera que pasa por $\overrightarrow{0}$.
   (c) de una esfera que no pasa por $\overrightarrow{0}$.

Solución ▼ [003663]

Ejercicio 3894 Desigualdad de Ptolomeo

Sea E un espacio euclidiano.

1. Para $\overrightarrow{x} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, se establece $f(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|^2}$. Demostrar que : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, $\|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y})\| = \frac{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|}{\|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|}$.
2. Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in E$. Demostrar que $\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}\| \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d}\| \leqslant \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| \|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\| + \|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\| \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d}\|$.

   Indicación : Llevar al caso $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ y usa la aplicación f.

Solución ▼ [003664]

Ejercicio 3895 Cálculo de distancia

Se provee $E = \mathbb{R}_n[X]$ con el producto escalar : Para $P = \sum_i a_i X^i$ y $Q = \sum_i b_i X^i$, $(P \mid Q) = \sum_i a_i b_i$. Sea $H = \{P \in E$ tal que $P(1) = 0\}$.

1. Encontrar una base ortonormal de H.
2. Calcular $d(X, H)$.

Solución ▼ [003665]

Ejercicio 3896 Expresión analítica

Sea E un espacio euclidiano de dimensión 4, $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_4)$ una base ortonormada de E, y F el subespacio vectorial de ecuaciones en $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0. \end{cases}$$

1. Encontrar una base ortonormada de F.
2. Dar la matriz en $\mathscr{B}$ de la proyección ortogonal sobre F.
3. Calcular $d(\overrightarrow{e}_1, F)$.

Solución ▼ [003666]

Ejercicio 3897 Proyección sobre un hiperplano

Se provee $\mathbb{R}^n$ del producto escalar usual. Sea $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, \dots, a_n$ son números reales dados no todos nulos. Encontrar la matriz en la base canónica de la proyección ortogonal en H.

Solución ▼ [003667]

Ejercicio 3898 Caracterización de proyecciones ortogonales

Sea E un espacio vectorial euclidiano y $p \in \mathscr{L}(E)$ una proyección. Demostrar que :

$$p \text{ es una proyección ortogonal} \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ (\overrightarrow{x} \mid p(\overrightarrow{y})) = (p(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E,\ \|p(\overrightarrow{x})\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\|.$$

(Para la segunda caracterización, considerar $\overrightarrow{x} \in (\ker p)^\perp$ y hacer un dibujo). [003668]

Ejercicio 3899 Proyección en un subespacio vectorial de dimensión finita

Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar (de dimensión eventualmente infinita) y $(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ una familia ortonormada de E. Se denota $F = \text{vect}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$.

1. Demostrar que $F \oplus F^\perp = E$ y $(F^\perp)^\perp = F$. (Utilizar la proyección asociada a los $\overrightarrow{u}_i$).
2. Sea $\overrightarrow{x} \in E$. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{u}_i)^2 \leqslant \|\overrightarrow{x}\|^2$. ¿Cuándo hay igualdad?
3. Aplicación : Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua. Se llaman *coeficientes de Fourier de* f los reales :
$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \quad \text{y} \quad s_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\text{sen}(kt)\,dt.$$
Demostrar la desigualdad de Bessel : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \geqslant \frac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)^2 + s_k(f)^2}{\pi}$.

[003669]

Ejercicio 3900 Composición de proyectores

Sean F, G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial euclidiano E tales que $F^\perp \perp G^\perp$. Se denota p_F y p_G las proyecciones ortogonales sobre F y en G. Demostrar que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \text{Id}_E$ y $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$. [003670]

Ejercicio 3901 Proyectores conmutantes

Sea E un espacio vectorial euclidiano y p, q dos proyecciones ortogonales. Demostrar que p y q conmutan si y solo si $(\text{Im}\, p \cap \text{Im}\, q)^\perp \cap \text{Im}\, p$ y $(\text{Im}\, p \cap \text{Im}\, q)^\perp \cap \text{Im}\, q$ son ortogonales.

Solución ▼ [003671]

Ejercicio 3902 Caracterización de bases ortonormales

Sea E un espacio vectorial euclidiano, y $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$ de vectores unitarios tales que $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e}_i)^2$.

1. Demostrar que $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ es una base ortonormada de E.
2. Se reemplaza la hipótesis $\overrightarrow{e}_i$ unitario por $\dim E = n$.
   (a) Demostrar que $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ es una base de E.
   (b) Demostrar que $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$, $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{e}_i)(\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{e}_i)$.
   (c) Se denota G la matriz de Gram de $\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n$. Demostrar que $G^2 = G$ y concluir.

Solución ▼ [003672]

Ejercicio 3903 Matriz de Gram

Sean $\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n$ de vectores de un espacio vectorial euclidiano E, y G su matriz Gram.

1. Demostrar que $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg}(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n)$.
2. Demostrar que $\det G$ no cambia si reemplazamos $\overrightarrow{x}_k$ por $\overrightarrow{x}_k - \sum\limits_{i \neq k} \lambda_i \overrightarrow{x}_i$.
3. Sea $F = \operatorname{vect}(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n)$ y $\overrightarrow{x} \in E$. Se denota $d(\overrightarrow{x}, F) = \min(\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|, \overrightarrow{y} \in F)$.

   Demostrar que $d(\overrightarrow{x}, F)^2 = \dfrac{\operatorname{Gram}(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n, \overrightarrow{x})}{\operatorname{Gram}(\overrightarrow{x}_1, \dots, \overrightarrow{x}_n)}$.

[003673]

Ejercicio 3904 $\operatorname{Gram}(u(e_i))$

Sea E un espacio vectorial euclidiano, $u \in \mathscr{L}(E)$ y $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base cualquiera de E. Se denota G determinante de Gram. Demostrar que $G(u(\overrightarrow{e}_1), \dots, u(\overrightarrow{e}_n)) = (\det u)^2 G(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$. [003674]

Ejercicio 3905 Ecuación del segundo grado

Sean E espacio vectorial euclidiano, $\overrightarrow{a} \in E$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Resolver la ecuación $\alpha(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}) + \beta(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{a}) + \gamma = 0$.

Solución ▼ [003675]

Ejercicio 3906 Vector definido por sus productos escalares

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas. ¿Existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\forall i$, $\displaystyle\int_0^1 f(t) f_i(t)\, dt = 1$?

[003676]

Ejercicio 3907 Descomposición QR

1. Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ invertible. Demostrar que existe una matriz ortogonal, P, y una matriz triangular superior con coeficientes diagonales positivos, T, únicas tales que $M = PT$.
2. Aplicación : Desigualdad de Hadamard. Sea E un espacio vectorial euclidiano, $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base ortonormada, y $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$ de vectores cualesquiera. Demostrar que $|\det_{(\overrightarrow{e}_i)}(\overrightarrow{u}_j)| \leqslant \prod\limits_j \|\overrightarrow{u}_j\|$.

   Estudiar los casos de igualdad.

[003677]

Ejercicio 3908 Coeficientes diagonales en el método de Schmidt

Sea E un espacio euclidiano, $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ una base de E y $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ la base ortonormada deducida de $\mathscr{B}$ por el método de Schmidt. Se denota P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Demostrar que $P_{ii} \times d(\overrightarrow{u}_i, \operatorname{vect}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_{i-1})) = 1$. [003678]

Ejercicio 3909 Coordenadas de los vectores de Schmidt

Sea E un espacio euclidiano, $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ una base de E y $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ la base ortonormada deducida de $\mathscr{B}$ por el método de Schmidt. Se denota G_n el determinante de Gram de $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$, y $\Delta_{i,n}$ el cofactor de $(\overrightarrow{u}_i \mid \overrightarrow{u}_n)$ en G_n. Demostrar que $\overrightarrow{e}_n = \frac{1}{\sqrt{G_{n-1}G_n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,n} \overrightarrow{u}_i$.

Solución ▼ [003679]

Ejercicio 3910 $\det({}^tAA)$

Sea $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Demostrar que $\det({}^tAA) \geqslant 0$. [003680]

Ejercicio 3911 Ángulos $> 2\pi/3$

Sea E un espacio euclidiano de dimensión superior o igual a 3. ¿Hay tres vectores $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ unitarios formando entre ellos dos a dos ángulos estrictamente mayores a $\frac{2\pi}{3}$?

Solución ▼ [003681]

Ejercicio 3912 Polinomios ortogonales

Sea $E = \mathbb{R}[X]$. Se define $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Demostrar que $(\ \mid\ )$ es un producto escalar en E.
2. Demostrar que existe una única familia $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polinomios verificando :

$$\begin{cases} \operatorname{grad} P_i = i \\ \text{el coeficiente dominante de } P_i \text{ es estrictamente positivo} \\ \text{la familia } (P_i) \text{ es ortonormada.} \end{cases}$$

[003682]

Ejercicio 3913 Central PSI 1997

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$ y $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Demostrar que E, provisto de $(\ \mid\ )$, es un espacio euclidiano.
2. Sea $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ y $P \in K \setminus \{0\}$. ¿Cuál es el grado de P ?
3. Sea $\Phi : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x\,dt$. Demostrar que Φ es una función racional.
4. Encontrar Φ salvo una constante multiplicativa.
5. Deducir los coeficientes de P.
6. Deducir una base ortogonal de E.

Solución ▼ [003683]

Ejercicio 3914 Reducción en cuadrados de una forma cuadrática

Sean $f_1, \dots, f_p$, p formas lineales en $\mathbb{R}^n$ tales que $\operatorname{rg}(f_1, \dots, f_p) = n$. Considerando el producto escalar $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{p} f_i(\overrightarrow{x}) f_i(\overrightarrow{y})$, demostrar que existe n formas lineales $g_1, \dots, g_n$ tales que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{p} f_i(\overrightarrow{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i(\overrightarrow{x})^2.$$

Ejemplo : Reducir $x^2+(x+y)^2+(x+2y)^2$

Solución ▼ [003684]

Ejercicio 3915 Familia de vectores unitarios equidistantes

Sea E un espacio vectorial euclidiano, y $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ una familia libre. Demostrar que existe una familia $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ verificando :

$$\begin{cases} \vec{u}_i \text{ es unitario} \\ \|\vec{u}_i-\vec{u}_j\|=1 \\ \operatorname{vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_i)=\operatorname{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i). \end{cases}$$

Demostrar que toda familia $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ verificando las dos primeras propiedades es libre. [003685]

Ejercicio 3916 Familia obtusángula

Sea E un espacio vectorial euclidiano y $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ una familia de vectores verificando : $\forall i\neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j)<0$.

1. Se supone $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ libre. Sea $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la familia de Schmidt asociada y M la matriz de pasaje de $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ a $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$. Demostrar que M es de coeficientes positivos.
2. En el caso general, demostrar por inducción en n que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)\geqslant n-1$.
3. Si $\operatorname{rg}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)=n-1$, demostrar que toda familia de $n-1$ vectores extraídos de $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ es libre, y que las componentes de esta familia del vector eliminado son estrictamente negativos.

[003686]

Ejercicio 3917 $F+F^\perp\neq E$

Sea $E=\mathscr{C}([0,1])$ dotado del producto escalar : $(f\mid g)=\int_0^1 fg(t)\,dt$, y $F=\{f\in E \text{ tal que } f(0)=0\}$. Demostrar que $F^\perp=\{0\}$.

Solución ▼ [003687]

Ejercicio 3918 Forma lineal en polinomios

Se provee $\mathbb{R}_2[X]$ del producto escalar : $(P\mid Q)=\int_0^1 PQ(t)\,dt$.

1. Verificar que efectivamente es un producto escalar.
2. Sea $\varphi:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}, P\mapsto P(0)$. Encontrar el polinomio A tal que : $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P)=(A\mid P)$.

Solución ▼ [003688]

Ejercicio 3919 Norma uniforme sobre los polinomios

Sea $P\in\mathbb{R}[X]$ de grado menor o igual que 3 tal que $\int_{-1}^1 P^2(t)\,dt=1$. Demostrar que $\sup\{|P(x)| \text{ tal que } -1\leqslant x\leqslant 1\}\leqslant 2\sqrt{2}$.

Indicaciones : Para $a\in\mathbb{R}$ demostrar que existe $P_a\in\mathbb{R}_3[X]$ tal que : $\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\ P(a)=\int_{-1}^1 P(t)P_a(t)\,dt$. Calcular explícitamente P_a, y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución ▼ [003689]

Ejercicio 3920 Central MP 2000

Sea $E=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ y $\varphi(f,g)=\displaystyle\int_{[0,1]} fg+f'g'$.

1. Demostrar que φ es un producto escalar.
2. Sea $V=\{f\in E\,|\,f(0)=f(1)=0\}$ y $W=\{f\in E\,|\,f''=f\}$. Demostrar que V y W son ortogonales suplementarias y expresan la proyección ortogonal sobre W.
3. Sea $E_{\alpha\beta}=\{f\in E\,|\,f(0)=\alpha \text{ y } f(1)=\beta\}$. Determinar $\displaystyle\inf_{f\in E_{\alpha\beta}}\int_{[0,1]} f^2+f'^2$.

Solución ▼ [003690]

Ejercicio 3921 Polytechnique MP* 2000

Sea H un espacio euclidiano, $(y_j)_{j\in I}$ una familia de vectores de H tal que existe A y B comprobación estrictamente positiva :

$$\forall x\in H,\ A\|x\|^2\leqslant\sum_{j\in I}(x\,|\,y_j)^2\leqslant B\|x\|^2.$$

1. Demostrar que $(y_j)_{j\in I}$ engendra H.
2. Se escoge $H=\mathbb{R}^2$. Demostrar que $y_1=\binom{0}{1}$, $y_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix}$, $y_3=y_2$ sirven.
3. Si $A=B=1$ y $\|y_j\|=1$, para todo j, demostrar que $(y_j)_{j\in I}$ es una base ortonormal.
4. Si $A=B$, demostrar que para todo $x\in H$, $x=\frac{1}{A}\sum\limits_{j\in I}(x\,|\,y_j)y_j$.

Solución ▼ [003691]

Ejercicio 3922 $\|u(x)\|\leqslant\|x\|$

Sea E un espacio euclidiano y $u\in\mathscr{L}(E)$ tal que $\forall x\in E$, $\|u(x)\|\leqslant\|x\|$. Demostrar que $E=\ker(u-\mathrm{Id})\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$.

Solución ▼ [003692]

Ejercicio 3923 X MP* 2000

Sea E un espacio euclidiano de dimensión $n>1$. Encontrar todas las funciones f de E en $\mathbb{R}$ continuas tales que $u\perp v\Rightarrow f(u+v)=f(u)+f(v)$.

Solución ▼ [003693]

Ejercicio 3924 ***

Para $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A)=\mathrm{tr}({}^tAA)$. Demostrar que N es una norma que verifica además $N(AB)\leqslant N(A)N(B)$, para todas las matrices cuadradas A y B. ¿N es asociada a un producto escalar ?

Solución ▼ [005482]

Ejercicio 3925 ***

Sea E un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión finita. Sea $\|\ \|$ una norma en E verificando la identidad del paralelogramo, es decir : $\forall(x,y)\in E^2$, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

Se propone demostrar que $\|\ \|$ está asociada a un producto escalar. Se define sobre E^2 una aplicación f por : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

1. Demostrar que para todo (x,y,z) de E^3, se tiene $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2f(x,y)$.
2. Demostrar que para todo (x,y) de E^2, se tiene $f(2x,y) = 2f(x,y)$.
3. Demostrar que para todo (x,y) de E^2 y todo racional r, se tiene $f(rx,y) = rf(x,y)$. Se admite que para todo real λ y todo (x,y) de E^2 se tiene $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$. (Este resultado proviene de la continuidad de f).
4. Demostrar que para todo (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Demostrar que f es bilineal.
6. Demostrar que $\|\ \|$ es una norma euclidiana.

Solución ▼ [005483]

Ejercicio 3926 **

Sobre $\mathbb{R}[X]$, se establece $P|Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. ¿Existe A elemento de $\mathbb{R}[X]$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P|A = P(0)$?

Solución ▼ [005485]

Ejercicio 3927 ***

Sea $(e_1,\dots,e_n)$ una base cualquiera de E euclidiana. Sean $a_1,\dots,a_n$, n reales dados. Demostrar que existe un único vector x tal que $\forall i \in \{1,\dots,\}$, $x|e_i = a_i$.

Solución ▼ [005495]

Ejercicio 3928 ****

Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión $n \geqslant 1$. Una familia de p vectores $(x_1,\dots,x_p)$ se dice obtusángulo si y solo si para todo (i,j) tal que $i \neq j$, $x_i|x_j < 0$. Demostrar que se tiene necesariamente $p \leqslant n+1$.

Solución ▼ [005496]

Ejercicio 3929 **I

1. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $E = \mathbb{C}_n[X]$. Para $a \in \mathbb{C}$, se define la aplicación φ_a por $\forall P \in E$, $\varphi_a(P) = P(a)$. Demostrar que para todo $a \in E$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Sean $a_0, a_1,\dots,a_n$, $n+1$ números complejos dos a dos distintos. Demostrar que la familia $(\varphi_{a_0},\dots,\varphi_{a_n})$ es una base de E^* y determinar su predual.
3. Demostrar que existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$, luego dar el valor de los λ_i en forma de integral.

Solución ▼ [005629]

Ejercicio 3930 **

Sobre $E = \mathbb{R}_3[X]$, se define para todo $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ y $\varphi_2(P) = P(1)$, luego $\psi_1(P) = P'(0)$ y $\psi_2(P) = P'(1)$. Demostrar que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ es una base de E^* y encontrar la base de la cual es la dual.

Solución ▼ [005630]

Ejercicio 3931 **

Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y φ y ψ dos formas lineales en E. Se supone que para todo x de E, se tiene $\varphi(x)\psi(x)=0$. Demostrar que $\varphi=0$ o $\psi=0$.

Solución ▼ [005631]

Ejercicio 3932 ***

1. Sean $n\in\mathbb{N}^*$, luego $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ y φ, $n+1$ formas lineales en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E de dimensión finita. Demostrar que : $(\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n/\ \varphi=\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\subset\ker\varphi)$.
2. Significado del resultado anterior : en $\mathbb{R}^3$, dar la ecuación de un plano P conteniendo $D: \begin{cases} x+y+z=0\\ 2x+3z=0\end{cases}$ y el vector $u=(1,1,1)$.

Solución ▼ [005632]

Ejercicio 3933 ***

Sean $n\in\mathbb{N}^*$, luego $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, n formas lineales en un $\mathbb{K}$-espacio E de dimensión n. Demostrar que la familia $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ es ld si y solo si existe un vector x no nulo tal que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x)=0$.

Solución ▼ [005633]

Ejercicio 3934 **

¿Cuál es el rango del sistema de formas lineales en $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f_1&=x_1+2x_2-x_3-2x_4,\\ f_2&=x_1+x_2+mx_3+x_4,\\ f_3&=x_1+x_3+(m+4)x_4,\\ f_4&=x_2-3x_3-mx_4? \end{aligned}$$

Solución ▼ [005634]

Ejercicio 3935 *** I

Sea $E=\mathbb{R}[X]$. Para $(P,Q)\in E^2$, se establece $\varphi(P,Q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$. Para $n\in\mathbb{N}$, se establece $h_n=(X^n\mathrm{e}^{-X})^{(n)}\mathrm{e}^X$.

1. Demostrar que φ es un producto escalar en E.
2. (a) Para $n\in\mathbb{N}$, especificar los coeficientes de h_n. Demostrar que la familia $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de E.
   (b) Demostrar que la familia $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal del espacio pre-hilbertiano (E,φ).
   (c) Para $n\in\mathbb{N}$, determinar $\|h_n\|$. Deducir una base ortonormada del espacio prehilbertiano (E,φ).

Solución ▼ [005773]

Ejercicio 3936 ** I Polinomios de TCHEBYCHEV

Sea $E = \mathbb{R}[X]$. Para $(P,Q) \in E^2$, se establece $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Para $n \in \mathbb{N}$, se denota T_n el n-ésimo polinomio de TCHEBYCHEV del primer tipo, es decir el único polinomio tal que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Demostrar que φ es un producto escalar en E.
2. (a) Demostrar que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal del espacio pre-hilbertiano (E,φ).
   (b) Para $n \in \mathbb{N}$, determinar $\|T_n\|$.

Solución ▼ [005774]

Ejercicio 3937 ** I

Se denota E el conjunto de sucesiones reales de cuadrados sumables, es decir las sucesiones reales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$.

1. Demostrar que E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
2. Para $(u,v) \in E^2$, se establece $\varphi(u,v) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Demostrar que φ es un producto escalar en E.

Solución ▼ [005775]

Ejercicio 3938 * I

Sea Φ la aplicación que a dos matrices cuadradas reales A y B de tamaño n asociada $\mathrm{tr}({}^tA \times B)$. Demostrar que Φ es un producto escalar en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. ¿Es Φ un producto escalar en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Solución ▼ [005776]

Ejercicio 3939 ****

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial dotado de una norma, denotada $\|\ \|$, verificando la identidad del paralelogramo. Demostrar que esta norma es hilbertiana.

Solución ▼ [005777]

Ejercicio 3940 **

Sea E un espacio prehilbertiano real y $(e_1,\dots,e_n)$ una familia de n vectores unitarios de E ($n \in \mathbb{N}^*$) tal que para todo vector x de E, se tiene $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Demostrar que la familia $(e_1,\dots,e_n)$ es una base ortonormada de E.

Solución ▼ [005778]

Ejercicio 3941 **** I

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n no nula. Sea $(x_1,\dots,x_p)$ una familia de p vectores de E ($p \geqslant 2$). Se dice que la familia $(x_1,\dots,x_p)$ es una familia obtusángula si y solo si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Demostrar que si la familia $(x_1,\dots,x_p)$ es una familia obtusángula entonces $p \leqslant n+1$.

Solución ▼ [005788]

---

136 204.02 Forma cuadrática

Ejercicio 3942

Sean E un K-espacio vectorial (donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de dimensión finita $n > 0$ y q una forma cuadrática en E.

1. ¿q puede ser inyectiva ?
2. Encontrar una condición necesaria y suficiente en q, para que sea sobreyectiva.

[001509]

Ejercicio 3943 examen de junio 1999

Sea a un número real. Sea q la forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^3$ por

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

para $v = (x,y,z)$. Sea f la forma bilineal simétrica asociada con q.

1. Determinar una descomposición de q en combinación lineal de cuadrados de formas lineales independientes.
2. Dar el rango y el signo de q según los valores de a.
3. ¿Para qué valores de a, define f un producto escalar ?

[001510]

Ejercicio 3944

Sea q la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ de matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en la base canónica $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Dar la expresión analítica de q en $\mathscr{B}$ y explicitar su forma polar f.
2. Verificar que $\mathscr{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ es una base $\mathbb{R}^3$ y dar la matriz de q en esta base. Explicitar q en esta base.
3. Encontrar el rango y el signo de q.

[001511]

Ejercicio 3945

Sean $E = \mathbb{R}_2[X]$ y q la aplicación de E en $\mathbb{R}$ definida por $q(P) = P(0)P(1)$.

1. (a) Demostrar que q es una forma cuadrática en E.
   (b) Determinar la matriz de q en la base canónica de E.
   (c) ¿La forma q es positiva, negativa ?
2. Sea $P := X^2 + X + 1$ y $V = \mathrm{vect}(P)$. Determinar $V^\perp$ y $(V^\perp)^\perp$.
3. Determinar el rango de q, luego su núcleo.
4. Determinar el cono isotrópico $C(q)$ de q y construir una base de E formada por vectores isotrópicos. ¿$C(q)$ es un subespacio vectorial de E ?
5. Determinar una base (P_0, P_1, P_2) de E tal que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ y dar el signo de q.

[001512]

Ejercicio 3946

Sea q una forma cuadrática en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E, que se supone definido (*i.e.* su cono isotrópico es $\{0\}$). Demostrar que q garde un signo constante sobre E. (Razonar por reducción al absurdo y considerar $q(a+tb)$, donde a y b son vectores bien elegidos y $t \in \mathbb{R}$). [001513]

Ejercicio 3947

1. Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Sea q la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ de matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Utilizar la pregunta anterior para encontrar una base q-ortogonal, determinar el signo de q y una descomposición de q en combinación lineal de cuadrados de formas lineales independientes.

[001514]

Ejercicio 3948

Determinar el signo de la forma cuadrática

$$q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y-z)^2 - (3x-y+2z)^2 + (5y-7z)^2 .$$

[001515]

Ejercicio 3949

Sea la forma cuadrática q definida por

$$q : (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3 .$$

1. Demostrar sin reducir q, que existe una base q-ortonormal de $\mathbb{C}^4$.
2. Explicitar una.

[001516]

Ejercicio 3950 Estudio del signo

Determinar si las siguientes formas cuadráticas son positivas :

1. $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.
2. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha)$.
3. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Solución ▼ [003713]

Ejercicio 3951 Ensi PC 1999

¿La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz de producto escalar ?

Solución ▼ [003714]

Ejercicio 3952 Cálculo de signo

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, con coeficientes estrictamente positivos. Determinar el signo de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$ definida por : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

Solución ▼ [003715]

Ejercicio 3953 Signo de ${}^tAA$

Sea $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que ${}^tAA$ es la matriz de una forma cuadrática positiva en $\mathbb{R}^p$.
2. Determinar su signo en función de $\operatorname{rg} A$.

[003716]

Ejercicio 3954 Descomposición en cuadrados

Descomponer en cuadrados la forma cuadrática definida en $\mathbb{R}^n$ por $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1} x_i\right)^2$. Sea $y_i = x_i + (x_{i+1}+\cdots+x_n)/(i+1)$.

Solución ▼ [003717]

Ejercicio 3955 Rango de una descomposición en cuadrados

Sea q una forma cuadrática en un espacio vectorial E de dimensión finita y $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tales que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$. Demostrar que $\operatorname{rg}(f_1,\dots,f_p) \geqslant \operatorname{rg}(q)$. [003718]

Ejercicio 3956 Diferencial de una forma cuadrática

Sea q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ y f la forma bilineal simétrica asociada. Demostrar que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x},\vec{y})$. [003719]

Ejercicio 3957 $q(a)q(x) - f^2(a,x)$

Sea f una forma bilineal simétrica en E y q la forma cuadrática asociada.
Sea define para $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1. Demostrar que φ es una forma cuadrática en E.
2. Si E es de dimensión finita, comparar los rangos de φ y q.
3. En el caso general, determinar el núcleo de la forma polar de φ en función de la de f y de a.

Solución ▼ [003720]

Ejercicio 3958 $\operatorname{tr}(A^2)$

Sea para $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $q(A) = \operatorname{tr}(A^2)$. Demostrar que q es una forma cuadrática en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y determinar su signo. (Indicación : Estudiar las restricciones de q a los subespacios vectoriales de las matrices simétricas y antisimétricas). [003721]

Ejercicio 3959 Adjunta

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y f una forma bilineal simétrica no degenerada en E.

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ demostrar que existe un único endomorfismo $v \in \mathscr{L}(E)$ tal que :
$$\forall x, y \in E,\ f(u(x), y) = f(x, v(y)).$$
Se denota $v = u^*$.
2. Demostrar que la aplicación $u \mapsto u^*$ es un anti-isomorfismo involutivo del álgebra $\mathscr{L}(E)$ (es decir, un isomorfismo lineal tal que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ y $u^{**} = u$).

[003722]

Ejercicio 3960 Restricción de una forma cuadrática a un subespacio vectorial

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \geqslant 1$ y q una forma cuadrática en E de signo $(n-1,1)$. Sea H un subespacio vectorial de E de dimensión $d \geqslant 1$.

1. Se supone que existe $x \in H$ tal que $q(x) < 0$. Demostrar que el signo de $q_{|H}$ es $(d-1,1)$.
2. Se supone que $q_{|H}$ es positiva, ¿cuál es su signo ?

Solución ▼ [003723]

Ejercicio 3961 Menores principales

Sea $n \geqslant 2$ y A una matriz real simétrica $n \times n$ representando una forma cuadrática q. Se llaman menores principales de A los determinantes :
$$\Delta_k(A) = \det\big((a_{i,j})_{i,j \leqslant k}\big).$$
Se supone que todos los menores principales de A son no nulos, demostrar que el signo de q es (r,s), donde s es el número de cambios de signo en la sucesión $(1, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ y $r = n - s$.

Solución ▼ [003724]

Ejercicio 3962 Diagonal dominante

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrico. Se dice que A es con diagonal débilmente dominante si para todo i se tiene $a_{ii} \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ y que A es a diagonal fuertemente dominante si para todo i se tiene $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Demostrar que si A es con diagonal fuertemente dominante, entonces A es definida positiva y si A es a diagonal débilmente dominante, entonces A es positiva.

Solución ▼ [003725]

Ejercicio 3963 Formas cuadráticas de signo dado

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, se nota :

$\mathrm{Quad}(E)$ l'conjunto de las formas cuadráticas sobre E ;
$\mathrm{Quad}^*(E)$ l'conjunto de las formas cuadráticas sobre E de rango n ;
$\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ l'conjunto de las formas cuadráticas sobre E de signo (p,q).

1. Demostrar que $\mathrm{Quad}^*(E)$ es denso en $\mathrm{Quad}(E)$.
2. Demostrar que si $p+q=n$, entonces $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ es abierto en $\mathrm{Quad}(E)$.
3. Demostrar que $\mathrm{Quad}_{p,q}(E)$ es conexo por arcos.

Solución ▼ [003726]

Ejercicio 3964 $1/(\lambda_i+\lambda_j)$

1. Sea $f_1,\ldots,f_n : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas de cuadrados integrables en el intervalo I. Se define $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$. Demostrar que la matriz $(a_{i,j})$ es definida positiva si y solo si la familia $(f_1,\ldots,f_n)$ es libre.
2. Deducir que si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son números reales positivos distintos, entonces la matriz del término general $1/(\lambda_i+\lambda_j)$ es definida positiva.

[003727]

Ejercicio 3965 Matriz de inversas

Sea $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, con todos los coeficientes no nulos. Se denota A' la matriz de coeficiente general $1/a_{i,j}$.

1. Encontrar las matrices A tales que A y A' son simétricas, definidas positivas (examinar los casos $n=1$, $n=2$, $n=n$).
2. Encontrar las matrices A tales que A y A' son simétricas positivas (examinar los casos $n=2$, $n=3$, $n=n$).

Solución ▼ [003728]

Ejercicio 3966 Central MP 2000

Sea S una matriz cuadrada de orden n, con coeficientes reales, simétrica, definida positiva. Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Demostrar que $q : X \mapsto \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{vmatrix}$ es definida negativa.

Solución ▼ [003729]

Ejercicio 3967 Polytechnique MP* 2000

Se considera sobre $\mathbb{R}^n$ la forma cuadrática $q(x) = \alpha\|x\|^2 + \beta(x|a)^2$, donde $\alpha > 0$, β real y $a \in \mathbb{R}^n$. Discutir del signo y del rango de q.

Solución ▼ [003730]

Ejercicio 3968 Ensae MP* 2000

Sea q una forma cuadrática no nula en $M_2(\mathbb{C})$ tal que $q(AB) = q(A)q(B)$. Determinar q.

Solución ▼ [003731]

Ejercicio 3969 Determinante de Gram, X MP* 2005

Sea E un espacio vectorial real de cualquier dimensión, $(x_1,\ldots,x_n)$ y $(y_1,\ldots,y_n)$ dos familias de vectores de E y ϕ una forma bilineal simétrica positiva. Demostrar que $(\det[\phi(x_i,y_j)])^2 \leqslant \det[\phi(x_i,x_j)] \times \det[\phi(y_i,y_j)]$.

Solución ▼ [003732]

Ejercicio 3970 **

Sea $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, sea $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Se define $\forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, $Q(f) = \lambda \operatorname{tr}(f^2) + \mu \det(f)$.

1. Verificar que Q es una forma cuadrática en E.
2. Determinar en función de λ y μ el rango y el signo de Q. Analizar en particular los casos $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ y $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

Solución ▼ [005807]

Ejercicio 3971 **

Sea Q una forma cuadrática en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E. Se denota φ su forma polar. Se supone que φ es no degenerada, pero no definida. Demostrar que Q no es de signo constante.

Solución ▼ [005808]

Ejercicio 3972 *** I

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$, n funciones continuas en $[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$. Para $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, se establece $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt$, luego para $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j} x_i x_j$.

1. Demostrar que Q es una forma cuadrática positiva.
2. Demostrar que Q es definida positiva si y solo si la familia $(f_1, \dots, f_n)$ es libre.
3. Escribir la matriz de Q en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ en el caso particular : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [a,b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

Solución ▼ [005809]

Ejercicio 3973 ***

Sea S una matriz simétrica real, definida positiva. Para $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se establece

$$Q((x_1, \dots, x_n)) = -\det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Demostrar que Q es una forma cuadrática definida positiva.

Solución ▼ [005810]

137 204.03 Espacio ortogonal

Ejercicio 3974

Demostrar que la aplicación $(A,B) \mapsto tr({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$, con valores en $\mathbb{R}$ es un producto escalar. Calcular la ortogonal del conjunto de matrices diagonales, luego el de matrices simétricas. [001475]

Ejercicio 3975

Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio euclidiano, F y G dos subespacios vectoriales de E. Demostrar que :

1. Si $F \subset G$, entonces $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
2. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
3. $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
4. Si $\dim(E)$ es finita, entonces $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

[001476]

Ejercicio 3976 **

Se provee $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dotado del producto escalar usual.

1. Determinar la ortogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Calcular la distancia de la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio vectorial de matrices antisimétricas.

Solución ▼ [005792]

---

138 204.04 Proyección, simetría

Ejercicio 3977

Determinar la matriz en base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la proyección ortogonal en el plano de ecuación $x+2y-3z = 0$. Deducir la matriz de la simetría ortogonal con respecto a este plano.
En un espacio euclidiano de dimensión n, se considera un subespacio F de dimensión r y $(f_1, \dots, f_r)$ una base ortonormada de este espacio. Se denota p_F la proyección ortogonal en F, es decir la proyección sobre F asociada a la descomposición $E = F \oplus F^{\perp}$. Demostrar que :

$$\forall v \in F, \qquad p_F(v) = \langle v, f_1\rangle f_1 + \langle v, f_2\rangle f_2 + \cdots + \langle v, f_r\rangle f_r.$$

[001477]

Ejercicio 3978

En $\mathbb{R}^3$ dotado de su producto escalar canónico, determinar la proyección ortogonal en el plano de ecuación $x+y+z=0$ de $(1,0,0)$, y más generalmente de un vector (x,y,z) cualquiera. Dar la matriz de esta proyección así como la simetría ortogonal con respecto a este plano.
En un espacio euclidiano de dimensión n, se considera un subespacio F de dimensión r y $(f_1, \dots, f_r)$ una base ortonormada de este espacio. Se denota p_F la proyección ortogonal en F, es decir la proyección sobre F asociada a la descomposición $E = F \oplus F^{\perp}$. Demostrar que :

$$\forall v \in F, \ p_F(v) = \langle v, f_1\rangle f_1 + \langle v, f_2\rangle f_2 + \cdots + \langle v, f_r\rangle f_r.$$

[001478]

Ejercicio 3979

Sea $(E, \langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y $p \in \mathscr{L}(E)$ un proyector. Demostrar que p es ortogonal (es decir $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si y solo si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. [001479]

Ejercicio 3980

Sea $(E,\langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y F un subespacio vectorial de E. Se denota p la proyección ortogonal en F y se pone, para todo $x \in E: d(x,F)=\inf_{y\in F}\|x-y\|$. Sea $z \in F$.

1. Demostrar que para todo $x \in F$, las tres condiciones son equivalentes :
   (i) $d(x,F)=\|x-z\|$. (ii) $z=p(x)$. (iii) $\forall y \in F, y \perp (x-z)$.
2. Deducir $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2 dx$.

[001480]

Ejercicio 3981

Sea $(E,\langle,\rangle)$ un espacio euclidiano de dimensión superior o igual a 2. Sean x y $y \in E$. Demostrar que :

1. Si $\|x\|=\|y\|$, entonces existe un hiperplano H de E tal que $y=s(x)$, donde s es la simetría ortogonal con respecto a H.
2. Si $\langle x,y\rangle=\|y\|^2$, entonces existe un hiperplano H de E tal que $y=p(x)$, donde p es la proyección ortogonal sobre H.

[001481]

Ejercicio 3982

En $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar euclidiano canónico, dar la matriz de la proyección ortogonal en el plano de ecuación $x+2y-3z=0$. Dar la matriz de la simetría ortogonal con respecto a este mismo plano. [001482]

Ejercicio 3983

Sea $(E,\langle,\rangle)$ un espacio euclidiano y F un subespacio vectorial dotado de una base ortonormal $(e_1,\dots,e_m)$. Sea p la proyección ortogonal en F.

1. Demostrar que $\forall x \in E, p(x)=\sum_{i=1}^{m}\langle x,e_i\rangle e_i$.
2. Dar de la misma manera la expresión de la simetría ortogonal con respecto a F y la proyección ortogonal sobre $F^\perp$.

[001483]

Ejercicio 3984

¿Cuál es la transformación de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}$? [001484]

Ejercicio 3985

Determinar la matriz en base canónica de $\mathbb{R}^4$ de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{vect}(v_1,v_2)$, donde $v_1=(1,-1,0,0)$ y $v_2=(0,1,0,1)$. [001485]

Ejercicio 3986

Sean E un espacio euclidiano, u un vector no nulo y $H = u^{\perp}$. Sean p la proyección ortogonal en H y s la simetría ortogonal con respecto a H.

1. Demostrar que $\forall x \in E$, $p(x) = x - \dfrac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u$.
2. Demostrar que $\forall x \in E$, $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u$.
3. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el plano $(\Pi : x - y + z = 0)$. Determinar la matriz en base canónica de la simetría ortogonal con respecto a Π.

[001486]

Ejercicio 3987

Sea $(E, (\ |\ ))$ un espacio vectorial de dimensión n.

1. Sean F y G subespacios vectoriales de E. Demostrar que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
2. Sean $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormal de E y $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ y H el subespacio vectorial de E de ecuación cartesiana $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ en $\mathscr{B}$.
   (a) Determinar la ortogonal de H.
   (b) Determinar la distancia del vector $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de E en el subespacio vectorial H.
3. Sea P el subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ definido por

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

   (a) Determinar una base de $P^{\perp}$, luego una base ortonormal de $P^{\perp}$.
   (b) Deducir una expresión analítica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre P.

[001487]

Ejercicio 3988

Sean E un espacio vectorial euclidiano, F y G dos subespacios vectoriales suplementarios de E y p el proyector de E de eje F y de dirección G.

1. Se supone que $F \perp G$. Demostrar que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Se supone que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Sean $a \in F$ y $b \in G$. Demostrar que $\|a + b\| \geqslant \|a\|$.
   (b) Deducir que $F \perp G$.

[001488]

Ejercicio 3989

Sea $\alpha = \inf \left\{ \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c - |x|\ \right)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Determinar un espacio vectorial euclidiano $(E, |)$, un subespacio vectorial F de E y $v \in E$ tal que $\alpha = \mathrm{d}(v, F)^2$.
2. Determinar $p \in F$ tal que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ y α.

[001489]

Ejercicio 3990

Sea E un espacio euclidiano (de dimensión finita), F y G dos subespacios vectoriales de E. Determinar $(F+G)^\perp$ y $(F\cap G)^\perp$ en función de $F^\perp$ y $G^\perp$. [001490]

Ejercicio 3991

Determinar $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (e^x-(ax+b))^2dx.$ [001491]

Ejercicio 3992

Calcular :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 x^2\,|\ln x-ax-b|^2\,dx.$$

[001492]

Ejercicio 3993 Isometrías afines

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f:E\to E$ una aplicación no necesariamente lineal.

1. Se supone que f conserva el producto escalar. Demostrar que f es lineal.
2. Se supone que f conserva las distancias, es decir : $\forall\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in E,\ \|f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{y})\|=\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|$. Demostrar que $f=f(\overrightarrow{0})+g$, con $g\in\mathscr{O}(E)$.

[003733]

Ejercicio 3994 Proyección sobre vect(u)

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector unitario de matriz U en una base ortonormada $\mathscr{B}$.

1. Demostrar que U^tU es la matriz en $\mathscr{B}$ de la proyección ortogonal sobre vect$(\overrightarrow{u})$.
2. Encontrar la matriz de simetría asociada.

[003734]

Ejercicio 3995 $\overrightarrow{x}+\lambda(\overrightarrow{x}\mid\overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$

Sea $\overrightarrow{v}\in E\setminus\{\overrightarrow{0}\}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Se establece para $\overrightarrow{x}\in E$, $f(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{x}+\lambda(\overrightarrow{x}\mid\overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$. Determinar λ, para que $f\in\mathscr{O}(E)$. Reconocer entonces f.

Solución ▼ [003735]

Ejercicio 3996 Composición de simetrías

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sean F,G dos subespacios de E tales que $F\perp G$. Se denota s_F y s_G las simetrías ortogonales de bases F y G. Demostrar que $s_F\circ s_G=s_G\circ s_F=s_{(F\oplus G)^\perp}$. [003736]

Ejercicio 3997 Composición de simetrías

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sean F, G dos subespacios de E tales que $F \subset G$. Se denota s_F y s_G las simetrías ortogonales de bases F y G. Demostrar que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$. [003737]

Ejercicio 3998 Condición para que dos simetrías conmuten

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sean H, K dos hiperplanos de E, y s_H, s_K Las simetrías asociadas. Demostrar que s_H y s_K conmutan si y solo si $H = K$ o $H^\perp \subset K$. [003738]

Ejercicio 3999 Semejanzas

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ y $\lambda > 0$. Se dice que f es una similitud de razón λ si : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \|f(\overrightarrow{x})\| = \lambda \|\overrightarrow{x}\|$.

1. Demostrar que f es una similitud de razón λ si y solo si $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ (f(\overrightarrow{x}) \mid f(\overrightarrow{y})) = \lambda^2 (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y})$.
2. Caracterizar las similitudes por sus matrices en una base ortonormada.
3. Demostrar que f es una similitud si y solo si f es no nulo y conserva la ortogonalidad, es decir $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) \perp f(\overrightarrow{y})$.

[003739]

Ejercicio 4000 Semejanzas

Se define la aplicación $\varphi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. Encontrar las matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tales que para todo A se tiene $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$.

Solución ▼ [003740]

Ejercicio 4001 Subespacios estables

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $u \in \mathscr{O}(E)$ y F un subespacio vectorial estable por u. Demostrar que $F^\perp$ es también estable por u. [003741]

Ejercicio 4002 Proyección sobre el subespacio invariante

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $u \in \mathscr{O}(E)$. Se denota $v = \mathrm{Id}_E - u$.

1. Demostrar que $\ker v = (\mathrm{Im}\, v)^\perp$.
2. Sea p la proyección ortogonal en $\ker v$. Demostrar que $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(\overrightarrow{x}) \to p(\overrightarrow{x})$, cuando $m \to \infty$.

[003742]

Ejercicio 4003 Endomorfismos ortogonales diagonalizables

¿Cuáles son ? [003743]

Ejercicio 4004 Valores propios de una isometría

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f \in \mathscr{O}(E)$.

1. Se supone n impar y $f \in \mathscr{O}^+(E)$. Demostrar que 1 es valor propio de f. (Comparar $\det(f - \mathrm{Id})$ y $\det(f^{-1} - \mathrm{Id})$)
2. ¿Qué se puede decir cuando n es par ?

3. Sea n cualquier, $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Demostrar que -1 es valor propio de f.

[003744]

Ejercicio 4005 Caracterización de simetrías ortogonales

Sea $M \in \mathscr{O}(n)$.

1. Demostrar que M es la matriz de una simetría ortogonal si y solo si M es simétrica.
2. En este caso, determinar la base y la dirección de esta simetría por función de matrices $I+M$ y $I-M$.

[003745]

Ejercicio 4006 f ortogonal antisimétrica

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f \in \mathscr{O}(E)$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes :

$$f \circ f = -\mathrm{Id}_E \iff \forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(\overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{x} \iff \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ (f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(\overrightarrow{x} \mid f(\overrightarrow{y})).$$

[003746]

Ejercicio 4007 Centro de $O(E)$

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f \in \mathscr{O}(E)$, y s una reflexión con respecto a un hiperplano H. Sea $\overrightarrow{u} \in H^\perp, \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

1. Demostrar que $f \circ s \circ f^{-1}$ es también una simetría y dar la base.
2. Deducir que f y s conmutan si y solo si $\overrightarrow{u}$ es un vector propio de f.
3. ¿Cuál es el centro de $O(E)$?

[003747]

Ejercicio 4008 Número de reflexiones necesarias para generar una aplicación dada

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sea $f \in \mathscr{O}(E)$. Se denota $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ y $p = \mathrm{codim}(F)$.

1. Demostrar que se puede descomponer f en producto de a lo sumo p reflexiones.
2. Inversamente, si f es un producto de k reflexiones, demostrar que $p \leqslant k$.
3. Aplicación : Encontrar $f \in \mathscr{O}(E)$ que se descompone en n reflexiones y nada menos.

[003748]

Ejercicio 4009 Extensión de una transformación ortogonal

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n.

1. Sea F un subespacio vectorial de E y $f : F \to E$ una aplicación ortogonal. Demostrar que se puede prolongar f en una aplicación ortogonal de E en E.
2. Sean $\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n$, $\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n$ de vectores de E tales que $\forall i, j,\ (\overrightarrow{u}_i \mid \overrightarrow{u}_j) = (\overrightarrow{v}_i \mid \overrightarrow{v}_j)$.
   (a) Si $\sum \lambda_i \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0}$, demostrar que $\sum \lambda_i \overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{0}$.
   (b) Deducir que existe $f \in \mathscr{O}(E)$ tal que $\forall i,\ f(\overrightarrow{u}_i) = \overrightarrow{v}_i$.

[003749]

Ejercicio 4010 Acción de $\mathscr{O}(E)$ en subespacios vectoriales

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n. Sean F, G dos subespacios vectoriales de E de misma dimensión.

1. Demostrar que existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tal que $u(F) = G$.
2. $(*)$ Demostrar que existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tal que $u(F) = G$ y $u(G) = F$.

Solución ▼ [003750]

Ejercicio 4011 Transformaciones ortogonales en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dotado del producto escalar : $(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$.

1. Verificar que es un producto escalar.
2. Sea $P \in \mathscr{O}(n)$. Demostrar que las aplicaciones $\begin{cases} \phi_P : A \longmapsto AP \\ \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP \end{cases}$ son ortogonales.
3. Recíprocamente, ¿si ϕ_P o $\psi_P \in \mathscr{O}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, se tiene que $P \in \mathscr{O}(n)$?

Solución ▼ [003751]

Ejercicio 4012 $A = \operatorname{com}(A)$

¿Cuáles son las matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ iguales a su comatriz ?

Solución ▼ [003752]

Ejercicio 4013 $A{}^tA + A + {}^tA = 0$

1. Encontrar las matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que : $A{}^tA + A + {}^tA = 0$.
2. Demostrar que para tal matriz, $|\det A| \leqslant 2^n$.

Solución ▼ [003753]

Ejercicio 4014 Suma de los coeficientes de una matriz ortogonal

Sea $P \in \mathscr{O}(n)$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, demostrar que : $\left|\sum_{i,j} P_{ij}\right| \leqslant n$. ¿Cuándo se tiene igualdad ?

[003754]

Ejercicio 4015 Grupo generado por las reflexiones

Sea E un espacio vectorial hermitiano y G el subgrupo de $U(E)$ generado por las reflexiones.

1. Se supone aquí $\dim E \geqslant 2$. Sean $u, v \in E$. Demostrar que existe una reflexión σ intercambiando u y v si y solo si $\|u\| = \|v\|$ y $(u \mid v) \in \mathbb{R}$.
2. Demostrar que $G = \{f \in U(E) \text{ tal que } \det(f) \in \{-1, 1\}\}$.

Solución ▼ [003755]

Ejercicio 4016 Ortotrigonalización

Demostrar que todo endomorfismo de un espacio vectorial hermitiano es trigonalizable en base ortonormal.
[003756]

Ejercicio 4017 Reducción de endomorfismos ortogonales y unitarios

1. Sea G un subgrupo compacto de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $M \in G$ demostrar que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}$. Deducir que todo elemento de G es diagonalizable.
2. Sea $M \in U_n(\mathbb{C})$. Demostrar que M es diagonalizable y que existe una base ortonormada de $\mathbb{C}^n$ propio para M.
3. Sea $M \in O_n(\mathbb{R})$. Demostrar que existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}MP$ es diagonal por bloques : $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, R_1, \dots, R_k)$, donde cada R_i es una matriz de la forma : $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

[003757]

Ejercicio 4018 Grupos ortogonales iguales

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\| \|_1$, $\| \|_2$ dos normas euclidianas tales que los grupos ortogonales asociados son iguales. ¿Qué se puede decir de estas normas ? [003758]

Ejercicio 4019 Cálculo de norma

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - x_n, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$. Con la estructura euclidiana canónica de $\mathbb{R}^n$, calcular la norma de f.

Solución ▼ [003759]

Ejercicio 4020 Densidad (Ens Ulm MP* 2003)

¿$\mathscr{O}_n(\mathbb{Q})$ es denso en $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

Solución ▼ [003760]

Ejercicio 4021 Central MP 2003

Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz en la base canónica : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Determinar a,b,c de manera que f sea una isometría, y precisarla.

Solución ▼ [003761]

Ejercicio 4022 ***I Matrices y determinantes de Gram

Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión p sobre $\mathbb{R}$ ($p \geqslant 2$). Para $(x_1, \dots, x_n)$ dado dansE^n, se establece $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (matriz de Gram) y $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (determinante de Gram).

1. Demostrar que $\mathrm{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
2. Demostrar que $(x_1, \dots, x_n)$ es ld si y solo si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ y que $(x_1, \dots, x_n)$ es libre si y solo si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.

3. Se supone que $(x_1,\ldots,x_n)$ es libre en E (y entonces $n \leqslant p$). Se define $F = \text{vect}(x_1,\ldots,x_n)$. Para $x \in E$, se denota $p_F(x)$ la proyección ortogonal de x sobre F y $d_F(x)$ la distancia de x a F (es decir $d_F(x) = \|x - p_F(x)\|$). Demostrar que $d_F(x) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)}{\gamma(x_1,\ldots,x_n)}}$.

Solución ▼ [005486]

Ejercicio 4023 **I

Matriz de la proyección ortogonal sobre la recta de ecuaciones $3x = 6y = 2z$ en la base canónica ortonormada de $\mathbb{R}^3$ así como de la simetría ortogonal con respecto a esta misma recta. De manera general, matriz de la proyección ortogonal sobre el vector unitario $u = (a,b,c)$ y de la proyección ortogonal en el plano de ecuación $ax+by+cz = 0$ en la base canónica ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Solución ▼ [005488]

Ejercicio 4024 **I

Existencia, unicidad y cálculo de a y b tales que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$ sea mínimo (encontrar dos pruebas, uno en la mentalidad de la escuela secundaria y otro en la mentalidad de matemáticas universitaria).

Solución ▼ [005494]

Ejercicio 4025 **T

En $\mathbb{R}^3$, espacio vectorial euclidiano orientado con respecto a la base ortonormada directa (i,j,k), determinar la imagen del plano de ecuación $x+y = 0$ por

1. la simetría ortogonal con respecto al plano de ecuación $x - y + z = 0$,
2. la simetría ortogonal con respecto al vector $(1,1,1)$,
3. por la rotación angular $\frac{\pi}{4}$ alrededor de los vectores $(1,1,1)$.

Solución ▼ [005504]

Ejercicio 4026 **T

En $\mathbb{R}^3$, sean (D) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{cases}$ y $(\Delta):\ 6x = 2y = 3z$ y $(P):\ x+3y+2z = 6$. Determinar la proyección de (D) sobre (P), paralela a (Δ).

Solución ▼ [005509]

Ejercicio 4027 **

Sean (D) la recta cuyo sistema de ecuaciones cartesianas es $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-2y-z = 0 \end{cases}$ y (P) el plano de la ecuación cartesiana $x+3y+2z = 6$. Determinar la proyección (ortogonal) de (D) sobre (P).

Solución ▼ [005520]

---

139 204.05 Ortonormalización

Ejercicio 4028

Resolver la ecuación $(1-x)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+z^2=\frac{1}{4}$, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. [001493]

Ejercicio 4029

1. Sea F el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $u=(1,2,3,-1,2)$ y $v=(2,4,7,2,-1)$. Encontrar una base de la ortogonal $F^\perp$ de F.
2. Encontrar una base ortonormal del subespacio E de $\mathbb{C}^3$ generado por $v_1=(1,i,0)$ y $v_2=(1,2,1-i)$.

[001494]

Ejercicio 4030

Sea F un subespacio de un espacio euclidiano E. Demostrar que existe una base ortonormal de F que se incluye en una base ortonormal de E. [001495]

Ejercicio 4031

1. Sea $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Demostrar que A define un producto escalar φ sobre $\mathbb{R}^3$. Construir una base ortonormal para φ.
2. Se considera una base $\{v_1=(1,1,1),v_2=(0,1,1),v_3=(0,0,1)\}$ del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Utilizar el proceso de ortogonalización de Schmidt para transformar $\{v_i\}$ en una base ortonormal.

[001496]

Ejercicio 4032

Sean $E=\mathbb{R}_n[X], I_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$.

1. Demostrar que la integral I_n es convergente. ¿Cuánto vale I_{2p+1} ?

   Sea $\varphi:E\times E\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(P,Q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.
2. Demostrar que φ es un producto escalar.
3. Se supone $n=2$. Escribir la matriz asociada a φ en la base $(1,X,X^2)$. Construir una base ortonormal (P_0,P_1,P_2) por el proceso de ortogonalización de Schmidt aplicado a $(1,X,X^2)$.

[001497]

Ejercicio 4033

Reducir las siguientes formas a una suma de cuadrados independientes :

1. $9x^2-6y^2-8z^2+6xy-14xz+18xw+8yz+12yw-4zw$,
2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3-4x_2x_4$.

[001498]

Ejercicio 4034

$\mathbb{R}^3$ es provisto de la estructura canónica de un espacio vectorial euclidiano. Verificar que los vectores $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,0,2)$ y $e_3 = (1,1,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y determinar el ortonormalizado de Gram-Schmidt. [001499]

Ejercicio 4035

$\mathbb{R}^4$ es provisto de la estructura canónica de un espacio vectorial euclidiano. Sean $e_1 = (1,0,1,0)$ y $e_2 = (1,-1,1,-1)$ y $F = \text{vect}(e_1,e_2)$.

1. Determinar una base ortonormal de F.
2. Determinar la matriz en base canónica de $\mathbb{R}^4$ del proyector ortogonal en F.
3. Determinar la distancia del vector $(1,1,1,1)$ en el subespacio vectorial F.

[001500]

Ejercicio 4036

Se provee el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}_2[X]$ del producto escalar definido por

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Determinar la ortonormalización de Gram-Schmidt de la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Determinar la distancia del polinomio $P = X^2+X+1$ en el subespacio vectorial F de $\mathbb{R}_2[X]$ formado a partir de polinomios f tales que $f'(0) = 0$.

[001501]

Ejercicio 4037

Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera : si $u = (x,y,z)$ y $u' = (x',y',z')$, entonces

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Demostrar que f es un producto punto en el espacio vectorial canónico $\mathbb{R}^3$.
2. Sea P el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuación cartesiana $2x - y + z = 0$.
   (a) Determinar el ortogonal del subespacio vectorial P.
   (b) Determinar un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuyo ortogonal es P.
3. Determinar la ortonormalización de Gram-Schmidt de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, para el producto escalar f.

[001502]

Ejercicio 4038

Ortonormalizar en $\mathbb{R}^3$ la familia $x_1 = (1,-2,2)$, $x_2 = (-1,0,-1)$, $x_3 = (5,-3,7)$. [001503]

Ejercicio 4039

Determinar una base ortonormada de $\mathbb{R}_2[X]$ dotado del producto escalar $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. [001504]

Ejercicio 4040

Se considera la forma bilineal b de $\mathbb{R}^4$ definida por :

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3,$$

donde x_1, x_2, x_3 y y_1, y_2, y_3 son las coordenadas de x e y en la base canónica.

1. Demostrar que se trata de un producto escalar.
2. Escribir la matriz de b en la base canónica.
3. Encontrar una base ortonormada para b.

[001505]

Ejercicio 4041

Se considera un espacio euclidiano $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

1. **Teorema de Pitágoras :**
   Sean u y v dos vectores ortogonales de E. Calcular $\|u+v\|^2$. Ilustrar el resultado obtenido usando un dibujo.
2. **Proyección ortogonal y distancia a un subespacio :**
   Sea F un subespacio de E. Se recuerda que $E = F \oplus F^{\perp}$, y por lo tanto, que todo vector x de E se descompone de forma única en una suma $x = x_1 +_2$, con $x_1 \in F$ y $x_2 \in F^{\perp}$. El vector x_1, entonces se llama proyección ortogonal de x sobre F.
   (a) Demostrar que la aplicación p que a un vector asocia su proyección ortogonal sobre E es una aplicación lineal. Verificar que : $\forall y \in F$, $\langle x - p(x), y\rangle = 0$.
   (b) Se considera ahora un vector x de E. Se llama distancia de x a F el número $\operatorname{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Para $y \in F$, verificar que $x - p(x)$ y $y - p(x)$ son ortogonales. Utilizar entonces la pregunta 1 para demostrar que $\|x-y\|^2 \geqslant \|x - p(x)\|^2$. Ilustrar en un dibujo. Deducir que $\operatorname{dist}(x,F) = \|x - p(x)\|$.
   (c) Sea $(e_1,\ldots,e_r)$ una base ortonormada de F. Demostrar que $p(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle\, e_i$.
3. **Espacio de polinomios :**
   En el espacio $E = \mathbb{R}_3[X]$, se considera la forma bilineal definida por :
   $$\langle P,Q\rangle = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$
   (a) Demostrar que se trata de un producto escalar (se admite que la integral sobre $[-1,1]$ de una función f continua y positiva es nula si y solo si f es nula en $[-1,1]$)
   (b) Usando el proceso de Schmidt aplicado a la base $(1,X,X^2)$, construir una base ortonormada de $\mathbb{R}_2[X]$, para este producto escalar.
   (c) Se considera el polinomio $P_0 = X^3$. Calcular la proyección ortogonal de X^3 sobre $\mathbb{R}_2[X]$. Deducir que para este producto escalar, se tiene :
   $$\operatorname{dist}(X^3, \mathbb{R}^2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$

Ejercicio 4042

Sea $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclidiano, x_0 un punto de E y F un subespacio vectorial de E. Se denota π la proyección ortogonal de E sobre F. Se recuerda que para $x\in E$, $\pi(x)$ se caracteriza por las relaciones :

$$\pi(x)\in F \text{ y } x-\pi(x)\in F^{\perp}.$$

El propósito de esta parte es demostrar que la proyección ortogonal de x_0 sobre F es el punto de F más cercano a x_0.

1. Utilizando que $x_0-y=(x_0-\pi(x_0))+(\pi(x_0)-y)$, demostrar que
$$\|x_0-y\|^2=\|x_0-\pi(x_0)\|^2+\|y-\pi(x_0)\|^2.$$
2. Deducir que $\inf\limits_{y\in F}\|x_0-y\|^2=\|x_0-\pi(x_0)\|^2$, es decir que :
$$\forall y\in F,\ \|x_0-y\|^2\geqslant\|x_0-\pi(x_0)\|^2.$$
¿Bajo qué condiciones se da la igualdad de la relación anterior ?
3. Sea $(e_1,\dots,e_k)$ una base ortonormada de F. Demostrar que $\pi(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{k}\langle e_i,x_0\rangle\, e_i$
4. Deducir de las dos cuestiones anteriores que
$$\inf_{y\in F}\|x_0-y\|^2=\|x_0-\sum_{i=1}^{k}\langle e_i,x_0\rangle\, e_i\|^2=\|x_0\|^2-\sum_{i=1}^{k}\langle e_i,x_0\rangle^2.$$
Aplicación : El objetivo ahora es determinar
$$\alpha=\inf_{a,b\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^t-at-b)^2dt.$$
Se considera a este efecto el espacio $F=\mathbb{R}_1[X]$, como un subespacio de $E=F\oplus\mathbb{R}f_0$, donde f_0 es la función definida por $f_0(t)=\mathrm{e}^t$. Se admite sin demostración que $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt$ es un producto escalar en E.
5. Dar una base ortonormada (P_1,P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$, para este producto escalar.
6. Calcular $\langle f_0,P_1\rangle$, $\langle f_0,P_2\rangle$, y $\|f_0\|^2$. Deducir que
$$\alpha=\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{2}-(2\mathrm{e}^{-1})^2-\Big(\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\Big)^2.$$
7. La misma pregunta para el cálculo de $\alpha'=\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^t-at^2-bt-c)^2dt.$. Comenzar por buscar una base ortonormada de $\mathbb{R}_2[X]$, para el mismo producto escalar, y deducir α'.

[001507]

Ejercicio 4043

tiene dos polinomios P y Q de $\mathbb{R}_n[X]$, se asocia el número

$$\phi(P,Q)=\int_0^1 P'(t)Q'(t)dt+P(0)Q(0)$$

1. Demostrar que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Cuando $n=2$, dar una base ortonormada para este producto escalar.

[001508]

Ejercicio 4044 **IT

En $\mathbb{R}^4$ dotado del producto escalar usual, se establece $V_1=(1,2,-1,1)$ y $V_2=(0,3,1,-1)$. Sea $F=\mathrm{vect}(V_1,V_2)$, determinar una base ortonormal de F y un sistema de ecuaciones de $F^\perp$.

Solución ▼ [005484]

Ejercicio 4045 ****I

Sobre $E=\mathbb{R}_n[X]$, se establece $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$.

1. Demostrar que $(E,(\,|\,))$ es un espacio euclidiano.
2. Para p entero natural entre 0 y n, se establece $L_p=((X^2-1)^p)^{(p)}$. Demostrar que $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es el ortonormalizado de SCHMIDT de la base canónica de E. Determinar $\|Lp\|$.

Solución ▼ [005500]

Ejercicio 4046 *** I Polinomios de LEGENDRE

Sea $E=\mathbb{R}[X]$. Se provee E del producto escalar $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$.

1. Para $n\in\mathbb{N}$, se establece $L_n=\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$.
   (a) Demostrar que la familia $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal del espacio pre-hilbertiano $(E,(\,|\,))$.
   (b) Determinar $\|L_n\|$, para $n\in\mathbb{N}$.
2. Determinar el ortonormalizado de SCHMIDT de la base canónica de E.

Solución ▼ [005772]

Ejercicio 4047 ***

Sea f una función continua en $[0,1]$, no nula con valores reales positivos. Para P y Q polinomios dados, se establece $\Phi(P,Q)=\displaystyle\int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

1. Demostrar que Φ es un producto escalar en $\mathbb{R}[X]$.
2. Demostrar que existe una base ortonormal $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para Φ tal que, para todo entero natural n, $\mathrm{grad}(P_n)=n$.
3. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal base. Demostrar que cada polinomio P_n, $n\in\mathbb{N}^*$, tiene n raíces reales simples.

Solución ▼ [005779]

Ejercicio 4048 **I Desigualdad de HADAMARD

Sea E un espacio euclidiano de dimensión $n\geqslant 1$ y $\mathscr{B}$ una base ortonormada de E. Demostrar que para todo n-tuple de vectores $(x_1,\ldots x_n)$, se tiene $|\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)|\leqslant\|x_1\|\ldots\|x_n\|$. ¿Casos de igualdad?

Solución ▼ [005789]

Ejercicio 4049 **

Demostrar que para toda matriz cuadrada A real de tamaño n, se tiene $|\det A| \leqslant \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Solución ▼ [005790]

Ejercicio 4050 **

Rango y signo de las siguientes formas cuadráticas :

1. $Q((x,y,z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2. $Q((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
3. $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$.
4. $Q((x,y,z,t)) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$.
5. $Q((x_1,\dots,x_5)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.
6. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij x_i x_j$.
7. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{i} x_i x_j$.
8. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \inf(i,j) x_i x_j$.

Solución ▼ [005806]

Ejercicio 4051 **

Sobre $E = \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ dotado de su usual estructura euclidiana, reducir en base ortonormada las siguientes formas cuadráticas :

1. $Q((x,y)) = x^2 + 10xy + y^2$.
2. $Q((x,y)) = 6x2 + 4xy + 9y2$.
3. $Q((x,y,z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz$.

Solución ▼ [005811]

Ejercicio 4052 ***

Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$. Para $P \in E$, se establece $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)\mathrm{e}^{-k}$.

1. Demostrar que Q es una forma cuadrática en E.
2. Determinar su signo.

Solución ▼ [005812]

Ejercicio 4053 Propiedades del producto vectorial

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}$ cuatro vectores de un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3. Demostrar :

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \mid (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t}) = (\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w})(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{t}) - (\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{t})(\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}),\\
&(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{t}) = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\overrightarrow{t} + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}]\overrightarrow{w},\\
&[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\overrightarrow{u} + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{w}]\overrightarrow{v} + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}]\overrightarrow{w} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\overrightarrow{t}.
\end{aligned}$$

[003694]

Ejercicio 4054 División vectorial

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3 y $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ dos vectores dados, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Estudiar la ecuación : $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Se busca una solución particular de la forma $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{y}$.

Solución ▼ [003695]

Ejercicio 4055 $a \wedge b$, $b \wedge c$, $c \wedge a$ dados

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3.
Encontrar $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ conociendo $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}$ (calcular $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$).

Solución ▼ [003696]

Ejercicio 4056 $f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3 y $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que : $[f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{w})] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\,\mathrm{tr}(f)$.
2. Demostrar que existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, se tiene $f(\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge f(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.
3. En una bond expresar la matriz de g en función de la de f.

Solución ▼ [003697]

Ejercicio 4057 Aplicaciones bilineales antisimétricas

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3 y $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal antisimétrica. Demostrar que existe $f \in E^*$ única tal que $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$, $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})$. [003698]

Ejercicio 4058 Volumen de un paralelepípedo

Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tres vectores de un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3. Se da $\|\overrightarrow{u}\| = a$, $\|\overrightarrow{v}\| = b$, $\|\overrightarrow{w}\| = c$, $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \equiv \alpha$, $\overline{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})} \equiv \beta$, $\overline{(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})} \equiv \gamma$. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo construido sobre $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$?

Solución ▼ [003699]

Ejercicio 4059 Aplicaciones que conservan el producto vectorial

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3. Encontrar las aplicaciones $f \in \mathscr{L}(E)$ verificando :

1. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.
2. $f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$.

[003700]

Ejercicio 4060 Expresión de una rotación

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3, $\vec{u} \in E$ unitario, $\alpha \in \mathbb{R}$ y f la rotación alrededor de $\vec{u}$ de ángulo de medida α.

1. Expresar $f(\vec{x})$ en función de $\vec{u}$, $\vec{x}$ y α.
2. Se dan las coordenadas de $\vec{u}$ en una base ortonormada : a, b, c. Calcular la matriz de f en esta base.

Solución ▼ [003701]

Ejercicio 4061 Conjugado de una rotación

Sea ρ una rotación de un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3, y $f \in \mathscr{O}(E)$. Reconocer $f \circ \rho \circ f^{-1}$.
Aplicación : Determinar el centro de $\mathscr{O}^+(E)$. [003702]

Ejercicio 4062 Conjugación en $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$

Sean $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ teniendo el mismo polinomio característico. Demostrar que existe $h \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. ¿Si f y g son positivos, es h positivo ?

Solución ▼ [003703]

Ejercicio 4063 Descomposición de rotaciones

Sean $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ una bond del espacio vectorial euclidiano orientado E, de dimensión 3, y $f \in \mathscr{O}^+(E)$.

1. Se supone $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$. Demostrar que existen r, r' rotaciones alrededor de $\vec{j}$ y $\vec{i}$ tales que $r' \circ r = f$.
2. Deducir que todo $f \in \mathscr{O}^+(E)$ se descompone de dos maneras bajo la forma : $f = r'' \circ r' \circ r$, donde r, r'' son las rotaciones alrededor de $\vec{j}$ y r' es una rotación alrededor de $\vec{i}$.
3. Descomponer $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ y $(x, y, z) \mapsto (x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha, x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha, z)$.

Solución ▼ [003704]

Ejercicio 4064 Subgrupos finitos de $\mathscr{O}^+(3)$

Determinar los subgrupos de $\mathscr{O}^+(3)$ de cardinal 2, 3, o 4. [003705]

Ejercicio 4065 Aplicaciones antisimétricas

Sea E un espacio vectorial euclidiano y $f \in \mathscr{L}(E)$ antisimétrica.

1. Demostrar que $\mathrm{Id}_E + f \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Demostrar que $g = (\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} + f)^{-1} \in \mathscr{O}^+(E)$ y $\mathrm{Id} + g$ es invertible.
3. Recíprocamente, sea $h \in \mathscr{O}^+(E)$ tal que $\mathrm{Id} + h$ sea invertible. Demostrar que existe f antisimétrica tal que $h = (\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} + f)^{-1}$.

Solución ▼ [003706]

Ejercicio 4066 Aplicaciones antisimétricas

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3, $\mathscr{B}$ una base ortonormada directa de E y $f \in \mathscr{L}(E)$ de matriz en $\mathscr{B}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconocer f.
2. Demostrar que $\mathrm{Id}_E + f$ es una biyección y calcular la biyección recíproca.
3. Demostrar que $g = (\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} + f)^{-1}$ es una rotación y especificar el eje y el ángulo.

Solución ▼ [003707]

Ejercicio 4067 Exponencial de una aplicación antisimétrica

Sea E un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión 3 y $\overrightarrow{a} \in E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Se denota $\alpha = \|\overrightarrow{a}\|$. Sea f el endomorfismo de E definido por $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}$.

1. Verificar que $f^3 = -\alpha^2 f$.
2. Sea $g(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\overrightarrow{x})}{k!}$. Simplificar $g(\overrightarrow{x})$ y deducir que g es una rotación.

Solución ▼ [003708]

Ejercicio 4068 Matriz con huecos

1. Completar la matriz $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en una matriz ortogonal positiva.
2. Reconocer la aplicación de matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución ▼ [003709]

Ejercicio 4069 Matriz circulante

Para todo triplete (a,b,c) los reales que planteamos

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes :
   (a) $M(a,b,c)$ es una matriz de rotación ;
   (b) (a,b,c) pertenece al círculo $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$ definido por la intersección de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ y del plano $x+y+z-1=0$;
   (c) a, b y c son las raíces de un polinomio de la forma $P = X^3 - X^2 + \lambda$, con $\lambda \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$.
2. Si $M(a,b,c)$ es una rotación, calcular su eje y su ángulo módulo el signo.
3. Demostrar que el conjunto de matrices de rotación de la forma $M(a,b,c)$ es un subgrupo de $SO(3)$. ¿A qué grupo conocido es isomorfo ?

Solución ▼ [003710]

Ejercicio 4070 Expresiones analíticas

Reconocer los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por las expresiones analíticas en la base canónica :

1. $\begin{cases} 3x' = 2x+2y+z \\ 3y' = -2x+y+2z \\ 3z' = x-2y+2z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 9x' = 8x+y-4z \\ 9y' = -4x+4y-7z \\ 9z' = x+8y+4z. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x' = -2x+2y-z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = -x-2y-2z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x' = -2x-y\sqrt{6}+z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6}+y+3z \\ 4z' = -x\sqrt{6}+3y+z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{z}{\sqrt{6}}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x' = x+2y+2z \\ 3y' = 2x+y-2z \\ 3z' = 2x-2y+z. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7x' = -2x+6y-3z \\ 7y' = 6x+3y+2z \\ 7z' = -3x+2y+6z. \end{cases}$
8. $\begin{cases} 3x' = 2x-2y+z \\ 3y' = -2x-y+2z \\ 3z' = x+2y+2z. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3x' = 2x+y+2z \\ 3y' = 2x-2y-z \\ 3z' = -x-2y+2z. \end{cases}$
10. $\begin{cases} 4x' = -x+3y-z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x-y-z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6}+y\sqrt{6}+2z. \end{cases}$
11. $\begin{cases} 15x' = 5x-10z \\ 15y' = -8x+5y+6z \\ 15z' = 6x-10y+8z. \end{cases}$

Solución ▼ [003711]

Ejercicio 4071 Ensi Physique 92

Determinar la matriz de rotación $\mathscr{R}$ de $\mathbb{R}^3$ en una base ortonormada $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tal que $\mathscr{R}(\vec{u}) = \vec{u}$, con $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\mathscr{R}(\vec{i}) = \vec{k}$. Dar su ángulo de rotación.

Solución ▼ [003712]

Ejercicio 4072 **

$\mathscr{B}$ es una base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$ dada. Demostrar que $\det_{\mathscr{B}}(u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u) = (\det_{\mathscr{B}}(u,v,w))^2$, para todos los vectores u, v y w.

Solución ▼ [005491]

Ejercicio 4073 **

Demostrar que $u\wedge v|w\wedge s = (u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$ y $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s) = [u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Solución ▼ [005493]

Ejercicio 4074 **

Sea (e_1,e_2,e_3) una base ortonormada directa de un espacio euclidiano orientado E de dimensión 3. Matriz de rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor de e_1+e_2.

Solución ▼ [005793]

Ejercicio 4075 ***

Encontrar todos los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ verificando $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$.

Solución ▼ [005797]

Ejercicio 4076 **

Valores propios y vectores propios del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ euclidiana orientada definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = a \wedge (a \wedge x),\ \text{ donde } a \text{ es un vector dado.}$$

Solución ▼ [005801]

Ejercicio 4077 ** I

Sea P el plano de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{cases}$ en una base ortonormada $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dotado de su estructura euclidiana canónica.

1. Determinar las matrices en $\mathscr{B}$ de la proyección ortogonal sobre P y de simetría ortogonal con respecto a P.
2. Calcular la distancia de cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ a P.

Solución ▼ [005803]

141 204.07 Endomorfismos autoadjuntos

Ejercicio 4078 Esem 91

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Se supone ${}^tA = A$ y $A^2 = 0$. Demostrar que $A = 0$. [003762]

Ejercicio 4079 Comatriz de una matriz simétrica

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrico. Demostrar que $\operatorname{com} M$ es también simétrica. ¿El recíproco es cierto? [003763]

Ejercicio 4080 Base no ortonormada

Sea $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base no ortonormada de E, G la matriz de Gram de los $\overrightarrow{e}_i$, $f \in \mathscr{L}(E)$ y M su matriz en $\mathscr{B}$.

1. Demostrar que f es autoadjunta si y solo si ${}^tMG = GM$.
2. Demostrar que f es ortogonal si y solo si ${}^tMGM = G$.

[003764]

Ejercicio 4081 auto-adjunto $\Rightarrow$ lineal

Sea $u : E \to E$ tal que : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ (u(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x} \mid u(\overrightarrow{y}))$. Demostrar que u es lineal. [003765]

Ejercicio 4082 Diagonalización de matrices simétricas

Diagonalizar en una base ortonormada :

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003766]

Ejercicio 4083 Diagonalización de C^tC

Sean $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ y $M = (a_ia_j) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que M es diagonalizable y determinar sus elementos propios.

Solución ▼ [003767]

Ejercicio 4084 Descomposición en proyecciones ortogonales

Sea φ el endomorfismo matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Demostrar que existen proyecciones ortogonales p, q y reales λ, μ tales que :

$$\varphi = \lambda p + \mu q, \qquad p \circ q = 0, \qquad p + q = \mathrm{Id}_E\,.$$

Solución ▼ [003768]

Ejercicio 4085 Ensi Physique 93

Sea $E = \mathbb{R}_n[x]$. Se define para $P, Q \in E$: $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ y se considera

$$u : E \to \mathbb{R}[x], \;\; P(x) \mapsto 2xP'(x) + (x^2-1)P''(x).$$

1. Demostrar que se define un producto escalar y que u es un endomorfismo.
2. Demostrar que u es diagonalizable y que si P_k, P_ℓ son vectores propios de valores propios distintos, entonces $\langle P_k, P_\ell\rangle = 0$.
3. Dar los elementos propios de u, para $n = 3$.

Solución ▼ [003769]

Ejercicio 4086 $(X^2-1)P'' + (2X+1)P'$

Para $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ se establece $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,dt$ y $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.

1. Verificar que $(P \mid Q)$ existe y que se define así un producto escalar en $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Demostrar que para este producto escalar, Φ es auto-adjunto. (Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P''(t)Q(t)\,dt$ por partes).
3. Determinar los valores propios de Φ y demostrar que existe una base adecuada de grados escalonados.

Solución ▼ [003770]

Ejercicio 4087 $\ker u + \operatorname{Im} u = E$

Sea $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjunto. Demostrar que $\ker u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u = E$. [003771]

Ejercicio 4088 $u \circ v$ auto-adjunto

Sean $u, v \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjuntos. Demostrar que $u \circ v$ es autoadjunta si y solo si $u \circ v = v \circ u$. [003772]

Ejercicio 4089 Composición de proyectores

Sean p, q dos proyectores ortogonales.

1. Demostrar que $p \circ q \circ p$ es auto-adjunto.
2. Demostrar que $(\operatorname{Im} p + \ker q) \overset{\perp}{\oplus} (\ker p \cap \operatorname{Im} q) = E$.
3. Deducir que $p \circ q$ es diagonalizable.

Solución ▼ [003773]

Ejercicio 4090 Autoadjunto y ortogonal

¿Cuáles son los endomorfismos de E a la vez autoadjuntos y ortogonales ? [003774]

Ejercicio 4091 Espectro y rango de una matriz antisimétrica

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ canónicamente asociada a M.

1. Demostrar que los valores propios de M son imaginarios puros.
2. Demostrar que $\ker f \perp \operatorname{Im} f$. Deducir que $g = f_{|\operatorname{Im} f}$ es un isomorfismo de $\operatorname{Im} f$.
3. Demostrar que g^2 es diagonalizable. Deducir que $\operatorname{rg}(M)$ es par.

[003775]

Ejercicio 4092 Racine cuadrado

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica definida positiva. Demostrar que existe una única matriz $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica definida positiva tal que $B^2 = A$. Calcular B, cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. [003776]

Ejercicio 4093 $A = {}^tBB$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que A es simétrica, definida positiva si y solo si existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = {}^tBB$. [003777]

Ejercicio 4094 Menores principales positivos

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrico. Para $1 \leqslant p \leqslant n$, se denota Δ_p el determinante de la submatriz $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

1. Demostrar que si A es definida positiva, entonces todos los determinantes Δ_p son estrictamente positivos.
2. Recíproco : Se supone $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. Demostrar que existe una matriz B triangular superior invertible tal $A = {}^tBB$. Deducir que A es definida positiva.

Solución ▼ [003778]

Ejercicio 4095 q positiva $\Rightarrow q(x) = \|u(x)\|^2$

Sea E un espacio euclidiano y q una forma cuadrática positiva. Demostrar que existe un endomorfismo u auto-adjunto tal que : $\forall \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$. [003779]

Ejercicio 4096 A simétrico y $A^k = I$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica tal que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^k = I$. Demostrar que $A^2 = I$. [003780]

Ejercicio 4097 $\sum_{i,j} a_{ij}^2$

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica de valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demostrar que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$. [003781]

Ejercicio 4098 u auto-adjunto y $\mathrm{tr}(u) = 0$

Sea $u \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjunto tal que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Demostrar que existe un vector $\vec{x}$ no nulo tal que $u(\vec{x}) \perp \vec{x}$.
2. Deducir que existe una base ortonormada $(\vec{e}_i)$ tal que : $\forall i,\ (u(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = 0$.

Solución ▼ [003782]

Ejercicio 4099 Matrices simétricas que conmutan

Sea (A_i) una familia de matrices $n \times n$ reales simétricas que conmutan dos a dos. Demostrar que existe una matriz simétrica A y polinomios P_i tales que $\forall i,\ A_i = P_i(A)$. [003783]

Ejercicio 4100 Valores propios de AB

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas, B definida positiva. Demostrar que valores propios de AB son reales.

Solución ▼ [003784]

Ejercicio 4101 $\mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas positivas. Demostrar que $0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.

Solución ▼ [003785]

Ejercicio 4102 $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas definidas positivas. Demostrar que $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$.

Solución ▼ [003786]

Ejercicio 4103 f cualquiera, existe una BON cuya imagen es ortogonal

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que existe una base ortonormada $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ cuya imagen por f es una familia ortogonal.

Solución ▼ [003787]

Ejercicio 4104 Cocientes de Rayleigh

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjunto y $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ sus propios valores.

1. Demostrar que $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\lambda_1 \|\overrightarrow{x}\|^2 \leqslant (f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x}) \leqslant \lambda_n \|\overrightarrow{x}\|^2$.
2. Demostrar que si una de estas dos desigualdades es una igualdad para un vector $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, entonces $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de f.
3. Sea $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base ortonormada de E tal que para todo i, $(f(\overrightarrow{e}_i) \mid \overrightarrow{e}_i) = \lambda_i$. Demostrar que : $\forall i$, $f(\overrightarrow{e}_i) = \lambda_i \overrightarrow{e}_i$.

[003788]

Ejercicio 4105 Spec$(A+B)$

Sean $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas, λ, λ' sus más pequeños valores propios y μ, μ' sus más grandes valores propios. Demostrar que todo valor propio de $A+B$ está incluido entre $\lambda+\lambda'$ y $\mu+\mu'$. [003789]

Ejercicio 4106 Comparación de valores propios

Sean $h \in \mathscr{L}(E)$ auto-adjunto, $\overrightarrow{x}_0 \in E$ unitario, p la proyección ortogonal en vect$(\overrightarrow{x}_0)$, y $f = h + p$. Se denota $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ valores propios de h y $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ estos de f. Demostrar que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n$.

Solución ▼ [003790]

Ejercicio 4107 Mines P' 1996

Sea E un espacio euclidiano y $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar : $\ker f = \operatorname{Im} f \Rightarrow f + f^* \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Demostrar el inverso cuando se tiene $f^2 = 0$.

Solución ▼ [003791]

Ejercicio 4108 Rayon spectral

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que $\|f\|^2 = \max\{|\lambda| \text{ tal que } \lambda \in \mathrm{Sp}(f^* \circ f)\}$. [003792]

Ejercicio 4109 Descomposición polar de un endomorfismo

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Considerando el endomorfismo $f^* \circ f$, demostrar que si f es invertible, entonces f se descompone únicamente bajo la forma $f = u \circ h$, con u unitario y h hermitiano positivo.
2. Si f es no invertible, demostrar que tal descomposición existe pero no es única (se recordar que $U(E)$ es compacto).
3. Demostrar que la aplicación $f \mapsto (u, h)$ es continua en $\mathrm{GL}(E)$.

[003793]

Ejercicio 4110 Endomorfismos normales

Sea E un espacio vectorial hermitiano. Un endomorfismo $u \in \mathscr{L}(E)$ se dice normal si u y u^* conmutan.

1. Sea u normal, demostrar que si F es un subespacio propio de u, entonces $F^\perp$ es estable por u. Deducir que u es diagonalizable en base ortonormal. ¿El recíproco es cierto ?
2. Sea $u \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar la equivalencia entre las siguientes propiedades :

   (1) u es normal.

(2) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(3) Todo subespacio vectorial estable por u es estable por u^*.

(4) Si un subespacio vectorial F es estable por u, entonces $F^\perp$ es estable por u.

(5) Existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tal que $u^* = P(u)$.

[003794]

Ejercicio 4111 $\|u(x)\| = \|v(x)\|$

Sea E un espacio hermitiano no nulo y $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Demostrar la equivalencia :

$$\Big(\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\ w \in\ U(E) \text{ tal que } u = w \circ v\Big).$$

[003795]

Ejercicio 4112 $(u(x) \mid x)$ es real

Sea E un espacio vectorial hermitiano y $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que $u = u^*$ si y solo si para todo $x \in E$, $(u(x) \mid x)$ es real.
2. Se supone u autoadjunto positivo. Demostrar que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|^4 \leqslant (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x))$.

Solución ▼ [003796]

Ejercicio 4113 Serie de auto-adjuntos positivos

Sea H un espacio de Hilbert y (u_n) una sucesión de endomorfismos de H autoadjuntos positivos continuos como la sucesión $(u_0 + \cdots + u_n)$ es acotada en $\mathscr{L}_c(H)$. Demostrar que por todo $x \in H$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ es convergente.

Solución ▼ [003797]

Ejercicio 4114 Mines MP 2000

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = {}^tAA$. ¿A es diagonalizable en $M_n(\mathbb{R})$, en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Solución ▼ [003798]

Ejercicio 4115 Central MP 2000 (con Maple)

Sea E un espacio euclidiano, u y v dos endomorfismos autoadjuntos de E, u es definida positiva.

1. Demostrar que existe un único endomorfismo w tal que $u \circ w + w \circ u = v$. ¿Qué se puede decir de w ?
2. Se supone E de dimensión 3, referido a una base ortonormal en la que u y v tienen como matrices respectivas $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinar w.
3. Se vuelve al caso general. Si v es definida positiva, ¿qué se puede decir de w ? Si w es definida positiva, ¿qué se puede decir de v ?

Solución ▼ [003799]

Ejercicio 4116 Polytechnique MP* 2000

Sea E un espacio euclidiano y s una simetría de E.

1. ¿Qué se puede decir de $s^* \circ s$?
2. Un polinomio P se dice recíproco si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$, para P de grado n.
   Demostrar que $P(X) = \det(X\,\mathrm{Id} + s^* \circ s)$ es un polinomio recíproco.
3. Demostrar que $P(1) \geqslant 2^n$. ¿Bajo qué condiciones existe igualdad ? ¿Hay condiciones sobre s ?
4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, cuadrado, de orden n, simétrica definida positiva, donde A_1 y A_4 son cuadrados de orden respectivo p y q. Demostrar que $\det(A) \leqslant \det(A_1)\det(A_4)$.

Solución ▼ [003800]

Ejercicio 4117 Cachan MP* 2000

Se denota P el conjunto defunciones f polinomiales por partes, continua en $[0,1]$ y revisando $f(0) = f(1) = 0$. Si f y g son funciones de P, se denota $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$.

1. ¿Qué se puede decir de P provisto de esta aplicación ?
2. Demostrar que si $x \in [0,1]$, existe $g_x \in P$ tal que $\forall f \in P,\ (g_x \mid f) = f(x)$.
3. Se consideran n reales verificando $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ y se dan n reales $(\alpha_i)_{i \in [1,n]}$. Se define $\varphi(f) = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \alpha_i)^2$, encontrar el mínimo de φ sobre P.

Solución ▼ [003801]

Ejercicio 4118 Central MP 2002

1. ¿Qué se puede decir sobre el adjunto de un proyector ortogonal de un espacio euclidiano ? ¿Recíproco ?
2. Sea p un proyector de un espacio euclidiano tal que $p \circ p^* = p^* \circ p$. Demostrar que p es un proyector ortogonal.

Solución ▼ [003802]

Ejercicio 4119 IIE MP 2004

Sea $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ dotado del producto escalar definido por $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 fg$. Sean u, v endomorfismos de E definidos por $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f$ y $v(f)(x) = \displaystyle\int_x^1 f$.

1. Demostrar que $(u(f) \mid g) = (f \mid v(g))$.
2. Determinar los valores propios de $u \circ v$.

Solución ▼ [003803]

Ejercicio 4120 Central MP 2004

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n y p endomorfismos autoadjuntos $u_1, \ldots, u_p$. Sea q_i la forma cuadrática asociada con u_i ($q_i(x) = (u_i(x) \mid x)$). Se supone que :

$$\forall x \in E,\ q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_p) = n.$$

1. Demostrar que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{Id}_E$.

2. Demostrar que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(u_p) = E$.
3. Demostrar que los u_i son en realidad proyectores ortogonales y que la suma anterior es ortogonal.

Solución ▼ [003804]

Ejercicio 4121 Mines MP 2005

Sea A matriz real ; demostrar que A es diagonalizable si y solo si existe S simétrica real definida positiva tal que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Solución ▼ [003805]

Ejercicio 4122 Rayon spectral, Central MP 2006

Sean A, B de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \max(\mathrm{Sp}(A + tB))$. Demostrar que f es convexa.

Solución ▼ [003806]

---

142 204.08 Espacios vectoriales hermitianos

Ejercicio 4123 Suma directa ortogonal

Sea E un espacio prehilbertiano y $F_1, \ldots, F_n$ subespacios vectoriales tales que para $i \neq j$, $F_i \perp F_j$. Demostrar que la suma $F_1 + \cdots + F_n$ es directa. [003823]

Ejercicio 4124 Espacio ℓ^2

Sea E el conjunto de sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con términos reales tales que la serie $\sum u_n^2$ converge. Para $u, v \in E$, se establece : $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$.

1. Demostrar que E es un espacio vectorial en $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que $(u \mid v)$ existe.
3. Demostrar que se define así un producto escalar en E.
4. Demostrar que E, dotado con la norma asociada, es completo.

[003824]

Ejercicio 4125 $f(x) \perp x \Rightarrow f = 0$

Sea E un espacio vectorial prehilbertiano complejo y $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que para todo vector $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene $f(\overrightarrow{x}) \perp \overrightarrow{x}$.

1. Demostrar que para todo vector $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$, se tiene $(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = 0$.
2. Demostrar que $f = 0$.
3. Comparar con el caso real.

Solución ▼ [003825]

Ejercicio 4126 Hanh-Banach para una bola

Sea E un espacio prehilbertiano real y B una bola abierta de E no contiene $\overrightarrow{0}$. Demostrar que existe una forma lineal $f \in E^*$ tal que : $\forall \overrightarrow{x} \in B,\ f(\overrightarrow{x}) > 0$. [003826]

Ejercicio 4127 Cálculo de mínimos

Calcular el mínimo sobre $\mathbb{R}^2$ de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (a,b)\mapsto \displaystyle\int_0^\pi (\operatorname{sen} x - ax^2 - bx)^2\,dx$.

Solución ▼ [003827]

Ejercicio 4128 Cálculo de mínimos

1. Sea $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\int_0^1 (1+tx_1+\cdots+t^n x_n)^2\,dt$. Demostrar que φ admite un mínimo absoluto y lo calculamos cuando $n=3$.
2. La misma pregunta para $\psi(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1+tx_1+\cdots+t^n x_n)^2\,dt$.

Solución ▼ [003828]

Ejercicio 4129 Encontrar el producto escalar

Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios de grado escalonados ($\operatorname{grad} P_n = n$). Demostrar que existe un único producto escalar sobre $\mathbb{R}[X]$ por lo que la familia P_n es ortonormada. [003829]

Ejercicio 4130 Descomposición de Cholesky

Sea $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica definida positiva.

1. Demostrar que existe una matriz T triangular superior tal que $A={}^tTT$. Demostrar que T es única si se impone la condición : $\forall i,\ T_{ii}>0$.
2. Aplicación : Demostrar que $\det A\leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^n a_{ii}$.

[003830]

Ejercicio 4131 Cambio de base unitaria

Sea E un espacio vectorial hermitiano y $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ dos bases ortonormadas de E. Se denota P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Demostrar que ${}^t\overline{P}P=I$. ¿Qué se puede decir de $\det P$? [003831]

Ejercicio 4132 Determinante de Gram

Sea E un espacio prehilbertiano y $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\in E$. Se denota $G=(g_{ij})\in\mathscr{M}_n(K)$ la matriz de Gram de estos vectores ($g_{ij}=(\vec{u}_i\mid\vec{u}_j)$).

1. Se supone E de dimensión finita, referido a una base ortonormada $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$. Expresar G en función de $M=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$.
2. Deducir que $\det(G)$ es un real positivo o cero, y nulo si y solo si los vectores $\vec{u}_i$ son ld.
3. Demostrar el mismo resultado sin suponer que E es de dimensión finita.
4. Examinar el caso particular $n=2$.
5. Aplicación : El tetraedro $ABCD$ es tal que $AB=AC=AD=1$ y $(AB,AC)\equiv\frac{\pi}{4}$, $(AB,AD)\equiv\frac{\pi}{3}$, $(AC,AD)\equiv\frac{\pi}{2}$. Calcular su volumen.

Solución ▼ [003832]

Ejercicio 4133 Congruencia de matrices de Gram

Sea E un espacio vectorial hermitiano y $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ dos bases cualesquiera. Se denota P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, y G, G' las matrices de Gram de $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$. ¿Qué relación hay entre P, G y G' ? [003833]

Ejercicio 4134 Normas euclidianas

1. Demostrar que las aplicaciones :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+xy+y^2} \text{ y } N_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{2x^2-xy+y^2}$$

son normas.

2. Demostrar que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha N_2(x,y) \leqslant N_1(x,y) \leqslant \beta N_2(x,y)$.
3. Encontrar las mejores constantes α, β. (Estudiar si $N_1(x,y)^2 - \lambda N_2(x,y)^2$ es positiva, negativa).

Solución ▼ [003834]

Ejercicio 4135 Familia doble de $1, X, X^2, \ldots$

1. Demostrar que existen polinomios $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tales que $\forall i, j \leqslant n$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.
2. Demostrar que no existe una sucesión de polinomios $(P_0, \ldots, P_n, \ldots)$ tales que $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^i P_j(t)\, dt = \delta_{ij}$.

Solución ▼ [003835]

Ejercicio 4136 Desigualdad por Cauchy-Schwarz

Sea E el conjunto de funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{+*}$ continuas y $\Phi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b 1/f$.
Demostrar que $\min\limits_{f \in E} \Phi(f) = (b-a)^2$ y encontrar las funciones alcanzando el mínimo.

Solución ▼ [003836]

Ejercicio 4137 Integral doble

Sea D el disco unitario cerrado de $\mathbb{R}^2$. Se considera el espacio E funciones $f : D \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ nulas en el borde C, de D. Para $f, g \in E$, se establece $(f \mid g) = \displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dx\, dy$. Demostrar que es un producto escalar. [003837]

Ejercicio 4138 Forma cuadrática asociada a la matriz de Gram

Sea E un espacio euclidiano, $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ una base de E, G su matriz de Gram y $G^{-1} = (a_{ij})$. Demostrar que $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\sum\limits_{i,j} a_{ij} (\overrightarrow{e}_i \mid \overrightarrow{x})(\overrightarrow{e}_j \mid \overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\|^2$.

Solución ▼ [003838]

Ejercicio 4139 Ortogonal de polinomios

Sea $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ dotado del producto escalar usual, F el subespacio vectorial de funciones polinómicas y g la función exponencial en $[0,1]$.

1. Demostrar que $g \notin F$.
2. Demostrar que existe una sucesión (f_n) de funciones polinomiales convergentes hacia g, para la norma euclidiana.
3. Deducir que F no tiene suplementario ortogonal.

[003839]

Ejercicio 4140 Ortogonal de un hiperplano

Sea $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ dotado del producto escalar usual y, para $f \in E$, $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt$.

1. Demostrar que φ es continua.
2. Demostrar que $H = \ker\varphi$ es cerrado.
3. Demostrar que $H^\perp = \{0\}$.

Solución ▼ [003840]

Ejercicio 4141 Producto escalar

Sea $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Se define para $f,g \in E$, $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b u(t)f(t)g(t)\,dt$.

1. ¿Bajo qué condición sobre u se define un producto escalar ?
2. Sean u,v dos funciones adecuadas. ¿Bajo qué condiciones las normas asociadas son equivalentes ?

Solución ▼ [003841]

Ejercicio 4142 Producto escalar ?

Sea $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ y (a_n) una sucesión de elementos de $[a,b]$. Para $f,g \in E$, se establece : $(f \mid g) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$.

1. ¿Bajo qué condición sobre la sucesión (a_n) se define un producto escalar ?
2. Sean $a = (a_n)$ y $b = (b_n)$ dos sucesiones tales que los conjuntos $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ son distintos. Demostrar que las normas correspondientes son no equivalentes.
3. Pregunta abierta : ¿Bajo qué condición las normas asociadas a dos sucesiones (a_n) y (b_n) son equivalentes ?
4. Demostrar que no existe sucesión (a_n), para la cual E es completo.

Solución ▼ [003842]

Ejercicio 4143 Ulm MP* 2000

V es un espacio hermitiano y u,v,w tres vectores unitarios. Demostrar que :

$$\sqrt{1-|(u \mid v)|^2} \leqslant \sqrt{1-|(u \mid w)|^2} + \sqrt{1-|(v \mid w)|^2}.$$

Solución ▼ [003843]

Ejercicio 4144 Ulm MP* 2000

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que admite una descomposición $A = UT\,{}^tU$, con U unitario y T triangular superior si y solo si el espectro de $A\overline{A}$ está incluido en $\mathbb{R}^+$.

Solución ▼ [003844]

143 204.09 Problemas de matrices

Ejercicio 4145 $I + a(X^tY - Y^tX)$ invertible

Sean $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ independiente, $a \in \mathbb{R}$ y M la matriz $n \times n$ tal que $m_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. ¿Bajo qué condición $I + aM$ es invertible ?

Solución ▼ [003807]

Ejercicio 4146 Matriz ortogonal para una forma (p,q)

Sea $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$, y $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ tales que ${}^tMJM = J$. Demostrar que A y D son invertibles.

Solución ▼ [003808]

Ejercicio 4147 Cálculo de inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, con a,b,c,d no todos nulos. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

Solución ▼ [003809]

Ejercicio 4148 Matrices normales

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demostrar que $AA^* = A^*A \iff \operatorname{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

Solución ▼ [003810]

Ejercicio 4149 f normal, $f^2 = -\operatorname{Id}$

Sea $f \in \mathscr{L}(E)$ tal que $f \circ f^* = f^* \circ f$ y $f^2 = -\mathrm{id}$. Demostrar que f es ortogonal.

Solución ▼ [003811]

Ejercicio 4150 Chimie P 1996

Sea S, matriz ortogonal de orden impar, de coeficientes función de t derivables. Demostrar que $\frac{dS}{dt}$ no es invertible.

[003812]

Ejercicio 4151 Chimie P 1996

Determinar a, b, c, reales no nulos para que la matriz $M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{c} & \frac{a}{b} \\ \frac{c}{a} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{a} \\ \frac{b}{a} & \frac{a}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ya sea la matriz de una isometría.

Solución ▼ [003813]

Ejercicio 4152 Núcleos de A y ${}^tA$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que para todo $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se tiene $\operatorname{tr}({}^tXAX) \geqslant 0$. Comparar los núcleos de A y ${}^tA$.

Solución ▼ [003814]

Ejercicio 4153 Matrice ortogonal

1. ¿Se puede definir en $\mathbb{R}^2$ una estructura euclidiana tal que el endomorfismo f cuya matriz en la base canónica es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ ya sea una rotación ?
2. Generalizar a una matriz $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ cualquiera.
3. Generalizar a una matriz $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ cualquiera.

Solución ▼ [003815]

Ejercicio 4154 Valores propios de una matriz compleja

Sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ y $\lambda \in \operatorname{spec}(M)$. Demostrar que $\operatorname{Re}(\lambda)$ está entre el mayor y el menor valor propio de $\frac{1}{2}(M+M^*)$. [003816]

Ejercicio 4155 Central MP 2001

1. Demostrar que toda matriz simétrica real positiva tiene sus coeficientes diagonales positivos. Demostrar que si uno de los coeficientes de la diagonal u_{ii} es nulo, así como para todo j se tiene $u_{ij} = 0$.
2. U es una matriz simétrica real positiva de la forma $U = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & B \end{pmatrix}$, con A y B cuadradas. Demostrar que la matriz $U' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Solución ▼ [003817]

Ejercicio 4156 Central MP 2001

1. Para $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ demostrar la existencia de dos matrices ortogonales U y V tales que ${}^tUMV$ sea diagonal.
2. La misma pregunta para $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Determinar U y V, para $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución ▼ [003818]

Ejercicio 4157 X MP* 2001

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I_n$.

1. Demostrar que n es par.
2. Demostrar que A es semejante a $A' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$.
3. Se supone $A \in \mathscr{O}(n)$. Demostrar que A es semejante a la matriz A' precedente con una matriz de pasaje ortogonal.

Solución ▼ [003819]

Ejercicio 4158 X MP* 2001

Sean A y B dos matrices hermitianas y $C = A + B$. Se denota $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ los valores propios de la primera, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ los de la segunda, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n$ los de la tercera. Demostrar que para todo i se tiene $c_i \geqslant a_i + b_n$.
Indicación : Volver al caso $b_n = 0$.

Solución ▼ [003820]

Ejercicio 4159 Central MP 2002

Sean $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $n \times n$ simétricas con coeficientes reales, $S_n^+(\mathbb{R})$ el subconjunto de matrices positivas, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ el subconjunto de matrices definidas positivas y $\phi \in \mathscr{L}(S_n(\mathbb{R}))$. Se supone que $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists\, A \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall \lambda > A$, $M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Demostrar que $\phi \in \mathrm{GL}(S_n(\mathbb{R}))$ y que $\phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Se supone $n = 2$ y $\phi(I_2) = I_2$. Demostrar que $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\phi(M)} = \chi_M$. Demostrar que $\det(\varphi(M)) = \det(M)$ (i.e. ϕ conserva el determinante).

Solución ▼ [003821]

Ejercicio 4160 Mines MP 2002

Determinar $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $M({}^t MM)^2 = I_n\}$.

Solución ▼ [003822]

Ejercicio 4161 **

$E = \mathbb{R}^3$ euclidiana orientada referida a una base ortonormada directa $\mathscr{B}$. Estudiar los endomorfismos de matrices A en $\mathscr{B}$ siguientes :

$$1)\, A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2)\, A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3)\, A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [005489]

Ejercicio 4162 ***

Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, con a, b y c reales. Demostrar que M es la matriz en la base canónica ortonormada directa de R^3 de una rotación si y solo si a, b y c son las soluciones de una ecuación del tipo $x^3 - x^2 + k = 0$, donde $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$. Sea $k = \dfrac{4\operatorname{sen}^2\varphi}{27}$, determinar explícitamente las matrices M correspondientes, así como los ejes y los ángulos de las rotaciones que representan.

Solución ▼ [005490]

Ejercicio 4163 *** I Matrices y determinantes de GRAM

Sea E un espacio prehilbertiano real. Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $(x_1, \dots, x_n)$ en E^n, se establece $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (matriz de GRAM), luego $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (determinante de GRAM).

1. Demostrar que $\operatorname{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
2. Demostrar que la familia $(x_1, \dots, x_n)$ es ld si y solo si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ y que la familia $(x_1, \dots, x_n)$ es libre si y solo si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3. Se supone que la familia $(x_1, \dots, x_n)$ es libre en E. Se define $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_n)$. Para $x \in E$, se denota $p_F(x)$ la proyección ortogonal de x sobre F, luego $d(x,F)$ la distancia de x a F (es decir $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Demostrar que $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$.

Solución ▼ [005780]

Ejercicio 4164 *** I

Demostrar que la matriz de HILBERT $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ es definida positiva.

Solución ▼ [005786]

Ejercicio 4165 *** I

1. Sea A una matriz cuadrada real de tamaño n y $S = {}^tAA$. Demostrar que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Recíprocamente, demostrar que para toda matriz S simétrica positiva, existe una matriz A cuadrada real de tamaño n tal que $S = {}^tAA$. ¿Tenemos la unicidad de A ?
3. Demostrar que S es definida positiva si y solo si A es invertible.
4. Demostrar que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(S)$.
5. (Raíz cuadrada de una matriz simétrica positiva) Sea S una matriz simétrica positiva. Demostrar que existe una y una sola matriz R simetría positiva tal que $R^2 = S$.

Solución ▼ [005787]

Ejercicio 4166 ***

Sea A una matriz ortogonal. Demostrar que el valor absoluto de la suma de los coeficientes de A es inferior o igual a n. ¿Hay igualdad si además todos los coeficientes de A son positivos ?

Solución ▼ [005791]

Ejercicio 4167 ***

Sea A una matriz cuadrada real simétrica positiva de tamaño n. Demostrar que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

Solución ▼ [005794]

Ejercicio 4168 **

Determinar $\operatorname{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Solución ▼ [005795]

Ejercicio 4169 **

Sea A una matriz cuadrada real. Demostrar que las matrices ${}^t\!AA$ y $A^t\!A$ son ortogonalmente semejantes.

Solución ▼ [005798]

Ejercicio 4170 *** I

Demostrar que el producto de dos matrices simétricas reales positivas tiene valores propios reales positivos.

Solución ▼ [005799]

Ejercicio 4171 *** I

Sean A y B dos matrices cuadradas reales simétricas positivas. Demostrar que $\det A + \det B \leqslant \det(A+B)$.

Solución ▼ [005800]

Ejercicio 4172 **

¿La matriz $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ es positiva, definida?

Solución ▼ [005804]

Ejercicio 4173 ***

¿$O_n(\mathbb{R})$ es convexo? ¿$O_n(\mathbb{R})$ contiene tres puntos alineados?

Solución ▼ [005805]

Ejercicio 4174 ** I

Sea A una matriz cuadrada real simétrica definida positiva. Demostrar que existe una matriz triangular invertible T tal que $A = {}^tTT$.

Solución ▼ [005813]

Ejercicio 4175 *** I

Sea A una matriz cuadrada real simétrica definida positiva. Demostrar que el determinante de A es inferior o igual al producto de sus coeficientes diagonales. (Utilizar el ejercicio 4174).

Solución ▼ [005814]

144 204.99 Otro

Ejercicio 4176 **I

Sea a un vector no nulo del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Se define f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ por $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Demostrar que f es lineal, determinar los vectores no nulos colineales a su imagen por f.

Solución ▼ [005487]

Ejercicio 4177 ***I Desigualdad de HADAMARD

Sea $\mathscr{B}$ una base ortonormada de E, espacio euclidiano de dimensión n. Demostrar que :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in E^n,\ |\det_{\mathscr{B}}(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant \|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

precisando los casos de igualdad.

Solución ▼ [005492]

Ejercicio 4178 ***

Sea $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\, dt = 1$. Demostrar que $\sup\{|P(x)|,\ |x| \leqslant 1\} \leqslant 2$. ¿Casos de igualdad ?

Solución ▼ [005497]

Ejercicio 4179 **IT

Sea r la rotación de $\mathbb{R}^3$, euclidiana orientada, cuyo eje está orientado por k unitario y una medida cuyo ángulo es θ. Demostrar que para todo x de $\mathbb{R}^3$, $r(x) = (\cos\theta)x + (\operatorname{sen}\theta)(k \wedge x) + 2(x.k)\operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})k$.
Aplicación : Escribir la matriz en la base canónica (ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$) de la rotación alrededor $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ y de ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Solución ▼ [005498]

Ejercicio 4180 **

Sea f continua estrictamente positiva en $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t)\, dt$. Demostrar que la sucesión $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ es definida y creciente.

Solución ▼ [005499]

Ejercicio 4181

Sea f una aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-lineal.

1. Demostrar que existen dos complejos a y b tales que para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Calcular $\operatorname{tr}(f)$ y $\det(f)$ en función de a y b.
3. Dar CNS para que f ya sea auto-adjunto en $\mathbb{C}$ dotado de su estructura euclidiana canónica.

Solución ▼ [005796]

Ejercicio 4182 *** I

Sea f un endomorfismo de un espacio euclidiano de dimensión n que preserva la ortogonalidad. Demostrar que existe un real positivo k tal que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Solución ▼ [005802]

145 205.01 Aritmética de $\mathbb{Z}$

Ejercicio 4183

El propósito de este ejercicio es demostrar que

$$\forall n \geqslant 3, \quad \pi(2n+1) \geqslant \ln 2 \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)},$$

donde $\pi(x)$ denota el número de enteros primos menores o iguales a x.

a) Calcular $I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$, para p y q enteros naturales.

b) Sea D_n el mcm de $n+1,\ n+2,\dots,\ 2n+1$. Con ayuda de $I_{n,n}$, establecer la desigualdad $D_n \geqslant \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

c) Demostrar que $D_n \leqslant (2n+1)^{\pi(2n+1)}$ y deducir la minoración de $\pi(2n+1)$ anunciado a principio del ejercicio.

Solución ▼ [002658]

Ejercicio 4184 **

Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos, aumentado en 1, es un cuadrado perfecto.

Solución ▼ [005291]

Ejercicio 4185 ***T

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|5n^3+n$.
2. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1$.

Solución ▼ [005292]

Ejercicio 4186 ***IT

Un entero de la forma $8n+7$ no puede ser la suma de tres cuadrados perfectos.

Solución ▼ [005293]

Ejercicio 4187 **IT

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, donde $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Demostrar que $a_n \wedge b_n = 1$.

Solución ▼ [005294]

Ejercicio 4188 ****

Demostrar que, para todo entero natural n, 2^{n+1} divide $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$.

Solución ▼ [005295]

Ejercicio 4189 ***IT

Sean A la suma de las cifras de 4444^{4444} y B la suma de las cifras de A. Encontrar la suma de los dígitos de B. (Comenzar por mayorar la suma de las cifras de $n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^p a_p$.)

Solución ▼ [005296]

Ejercicio 4190 **

Demostrar que si p es primo y $8p^2+1$ es primero entonces $8p^2-1$ es primo.

Solución ▼ [005297]

Ejercicio 4191 **I

1. Demostrar que $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ [k \wedge n = 1 \Rightarrow n | C_n^k]$.
2. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)|C_{2n}^n$.

Solución ▼ [005298]

Ejercicio 4192 **T

Resolver en $(\mathbb{N}^*)^2$ las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones :

1) $\begin{cases} x+y=56 \\ x\vee y=105 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\wedge y = x-y \\ x\vee y=72 \end{cases}$ 3) $x\vee y - x\wedge y = 243$.

Solución ▼ [005299]

Ejercicio 4193 ***

Demostrar que la suma de cinco cuadrados perfectos de enteros consecutivos nunca es un cuadrado perfecto.

Solución ▼ [005300]

Ejercicio 4194 ***IT

Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $F_n = 2^{2^n}+1$ (números de FERMAT). Demostrar que los números de Fermat son dos a dos primos entre sí.

Solución ▼ [005301]

Ejercicio 4195 ***

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $u_0=0$, $u_1=1$ y $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ (sucesión de FIBONACCI).

1. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$ y deducir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \wedge u_{n+1}=1$.
2. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+n}=u_m u_{n+1}+u_{m-1}u_n$ y deducir que $u_m \wedge u_n = u_{m\wedge n}$, para m y n no nulos.

Solución ▼ [005302]

Ejercicio 4196 ***I

Se quiere resolver en $\mathbb{Z}^3$ la ecuación $x^2+y^2=z^2$ (de tales ternas de números enteros se llaman ternas pitagóricas, como por ejemplo $(3,4,5)$).

1. Demostrar que se puede llevar al acaso donde $x\wedge y\wedge z=1$. Demostrar entonces que en este caso, x, y y z son además dos a dos primos entre sí.
2. Se supone que x, y y z son dos a dos primos entre sí. Demostrar que dos de los tres números x, y y z son impares, el tercero es par, luego que z es impar. Se supone de ahora en adelante que x y z son impares y y es par. Se define $y=2y'$, $X=\frac{z+x}{2}$ y $Z=\frac{z-x}{2}$.

3. Demostrar que $X \wedge Z = 1$ y que X y Z son cuadrados perfectos.
4. Deducir que el conjunto de las ternas pitagóricas es el conjunto de las ternas de la forma

$$(d(u^2 - v^2),\ 2duv,\ d(u^2 + v^2))$$

donde $d \in \mathbb{N}$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, salvo una permutación de las dos primeras componentes.

Solución ▼ [005303]

Ejercicio 4197 **

Resolver en $\mathbb{N}^2$ la ecuación $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$.

Solución ▼ [005304]

Ejercicio 4198 ***

Resolver en $(\mathbb{N}^*)^2$ la ecuación de incógnita (x, y) : $\sum_{k=1}^{x} k! = y^2$.

Solución ▼ [005305]

Ejercicio 4199 ***

Demostrar que $n = 4\cdots48\cdots89$ (p cifras 4 y $p-1$ cifras 8 y entonces $2p$ cifras) (en base 10) es un cuadrado perfecto.

Solución ▼ [005306]

Ejercicio 4200 ***I

Demostrar que cualquier número impar no divisible por 5 tiene un múltiplo que solo puede escribirse (en base 10) con 1's. (Por ejemplo, $37 \cdot 1 = 37$, $37 \cdot 2 = 74$, $37 \cdot 3 = 111$).

Solución ▼ [005307]

Ejercicio 4201 ***

Sea $u_n = 10\cdots01_2$. (n cifras iguales a 0). Determinar la forma binaria de :

1. u_n^2, 2. u_n^3, 3. $u_n^3 - u_n^2 + u_n$.

Solución ▼ [005308]

Ejercicio 4202 **I

1. Determinar en función de n entero no nulo, el número de cifras de n en base 10.
2. Sea $\sigma(n)$ la suma de las cifras de n en base 10.
   (a) Demostrar que la sucesión $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ es acotada. ¿Esta sucesión converge ?
   (b) Demostrar que para todo entero natural no nulo n, $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(1 + \log n)$.
   (c) Demostrar que la sucesión $\left(\sqrt[n]{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge y especificar su límite.

Solución ▼ [005309]

Ejercicio 4203 ***I

1. (Fórmula de LEGENDRE) Sea n un entero natural superior o igual a 2 y p un número primo. Establecer que el exponente de p en la descomposición de $n!$ en factores primos es

$$E(\frac{n}{p})+E(\frac{n}{p^2})+E(\frac{n}{p^3})+\cdots$$

2. ¿Con cuántos 0 se termina la escritura en base 10 de 1000! ?

Solución ▼ [005310]

Ejercicio 4204 ***I Pequeño teorema de FERMAT

Sea p un número primo.

1. Demostrar que, para todo entero k tal que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divide C_p^k.
2. Demostrar que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$ (por inducción en a).

Solución ▼ [005311]

Ejercicio 4205 ***I Teorema de WILSON

Sea p un entero superior o igual que 2. Demostrar que $(p-1)! \equiv -1\ (p) \Rightarrow p$ es primo (de hecho, las dos frases son equivalentes, pero se sabe muy poco en aritmética para poder proporcionar una prueba razonablemente breve de lo contrario).

Solución ▼ [005312]

146 205.02 Anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, teorema chino

Ejercicio 4206

Dar la lista de los generadores de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. [001393]

Ejercicio 4207

Sea el grupo G (aditivo) $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$.

1. Sea H el subgrupo de G generado por $\overline{12}$ y $\overline{20}$. Demostrar que H es el subgrupo de G generado por $\overline{4}$ y encontrar su orden.
2. Caracterizar los generadores de G. ¿Cuántos se cuentan ?
3. Determinar el orden de $\overline{15}$.

[001394]

Ejercicio 4208

1. Demostrar que no existe elemento de orden 3 en el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Deducir los morfismos de grupos de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

[001395]

Ejercicio 4209

Sea f un morfismo de grupos de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. Demostrar que f es caracterizado por $f(\overline{1})$.
2. Determinar los posibles órdenes de $f(\overline{1})$.
3. Deducir la lista de morfismos de grupos de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

[001396]

Ejercicio 4210

Sea G el grupo de productos $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. Dar la lista de los elementos de G y determinar el orden de cada uno de ellos. ¿G es cíclico ?
2. Dar la lista de los subgrupos de G y construir la red.

[001397]

Ejercicio 4211

1. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ definida por $f(n) = (\overline{n}, \widetilde{n})$.
   (a) Demostrar que f es un morfismo de grupos.
   (b) Determinar el núcleo de f.
2. Deducir que los grupos $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ y $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ son isomorfos.

[001398]

Ejercicio 4212

¿Los grupos $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ y $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ son isomorfos ? [001399]

Ejercicio 4213

Se denota R_n la rotación del plano de centro O, de ángulo $2\pi/n$, S la simetría con respecto al eje (Ox).

1. Demostrar que $S^2 = id$, $(R_n)^n = id$ y $R_nS = SR_n^{-1}$.
2. Demostrar que el subgrupo de isometrías del plano generado por R_n y S (i.e. el subgrupo más pequeño de las isometrías del plano que contiene R_n y S) es de cardinal $2n$. Se denota D_n el grupo diédrico de orden $2n$.
3. Demostrar que D_n preserva un polígono regular en n lados, centrado en O.
4. Utilizando lo anterior como guía, construir un isomorfismo entre D_3 y S_3.

[001400]

Ejercicio 4214

Sea $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : (z,w) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ el conjunto de cuaterniones. $\mathbb{H}^*$ designa $\mathbb{H}$ privado de la matriz nula. Se denota $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Demostrar que $\mathbb{H}^*$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Demostrar que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
3. Deducir que el subgrupo de $\mathbb{H}^*$ generado por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ es de orden 8. Se denota H_8.

4. Escribir la tabla de H_8.
5. Verificar que los grupos (todos de cardinal 8) H_8, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ y D_4 son 2 a 2 no isomorfos.

[001401]

Ejercicio 4215 Ecuaciones lineales

Resolver en $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

1. $\begin{cases} \dot{3}x+\dot{7}y=\dot{3} \\ \dot{6}x-\dot{7}y=\dot{0}. \end{cases}$

2. $x^2-\dot{\overline{31}}x+\dot{\overline{18}}=\dot{0}.$

Indicación ▼ Solución ▼ [003151]

Ejercicio 4216 Ecuación algebraica

1. Hacer una lista de los cubos en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Sean $x,y,z\in\mathbb{Z}$ tales que $5x^3+11y^3+13z^3=0$. Demostrar que 13 divide x,y,z.
3. ¿La ecuación $5x^3+11y^3+13z^3=0$ tiene soluciones enteras ?

Solución ▼ [003152]

Ejercicio 4217 Orden de un módulo entero n

1. Sean $n,p\geqslant 2$. Demostrar que : $n\wedge p=1 \iff \exists\ k>0$ tal que $n^k\equiv 1 \pmod p$.
2. Sea n un entero impar no divisible por 5. Demostrar que existe un múltiplo de n que se escribe $1\dots 1$ en base 10.

[003153]

Ejercicio 4218 Teorema chino

Sean $n,p\in\mathbb{N}^*$ tales que $n\wedge p=1$. Para $x\in\mathbb{Z}$ se denota $\bar{x}^n$, $\bar{x}^p$ y $\bar{x}^{np}$ las clases de equivalencia de x módulo n, p y np.

1. Demostrar que la aplicación $\phi:\mathbb{Z}/\big(np\mathbb{Z}\big)\to\big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)\times\big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big),\bar{x}^{np}\mapsto(\bar{x}^n,\bar{x}^p)$ es un morfismo de anillo.
2. Deducir que $\varphi(np)=\varphi(n)\varphi(p)$, ($\varphi$ = función de Euler).
3. Verificar que la hipótesis $n\wedge p=1$ es necesario.

[003154]

Ejercicio 4219 Teorema de Wilson

Sea $n\geqslant 2$. Demostrar que n es primo si y solo si $(n-1)!\equiv -1 \pmod n$.

Solución ▼ [003155]

Ejercicio 4220 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$

1. Demostrar que para todo entero a impar y todo $n\geqslant 3$: $a^{2^{n-2}}\equiv 1 \pmod{2^n}$.

2. ¿El grupo $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^*$ es cíclico ?

[003156]

Ejercicio 4221 Ecuación algebraica

1. Demostrar que f es una permutación de E.
2. Determinar el orden de f, para $\circ$.
3. Deducir que el número de puntos fijos de f es congruente a card E módulo 3.
4. Demostrar que este número es menor o igual que 2.
5. ¿Cuántas la ecuación $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$ tiene raíces en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en función de p ?
6. Para $p = 37$, resolver la ecuación.

Solución ▼ [003157]

Ejercicio 4222 Cuadrados en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Sea p un número primo impar. Demostrar que $\dot{k}$ es un cuadrado en el anillo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si y solo si $k^{(p+1)/2} \equiv k \pmod{p}$. [003158]

Ejercicio 4223 Prueba de primalidad de Rabin-Miller

Sea n un entero primo impar superior o igual que 3, $n = q2^p + 1$, con p impar y sea $a \in \mathbb{Z}$ primero a n. Se considera la sucesión $(b_0, b_1, \dots, b_p)$ de enteros comprendidos entre 0 y $n-1$ definida por :

$$b_0 \equiv a^q \pmod{n}, \quad b_1 \equiv b_0^2 \pmod{n}, \dots, \quad b_p \equiv b_{p-1}^2 \pmod{n}.$$

1. Demostrar que $b_p = 1$.
2. Si $b_0 \neq 1$ demostrar que existe un índice i tal que $b_i = n-1$.

[003159]

Ejercicio 4224 Coeficientes binomiales

Sea p un número primo. Demostrar que $\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$.

Solución ▼ [003160]

Ejercicio 4225 Sucesión recurrente (Mines MP 2003)

Se considera la sucesión (x_n), con valores en $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ tal que para todo n se tiene $x_{n+3} = 4(x_{n+2} + x_{n+1} + x_n)$. Determinar los diferentes comportamientos posibles de (x_n).

Solución ▼ [003161]

Ejercicio 4226 ¿-3 es un cuadrado ?

Sea p un número primo impar.

1. Demostrar que una ecuación cuadrática : $x^2 + ax + b = \dot{0}$ admite una solución en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si y solo si su discriminante $a^2 - 4b$ es un cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Se supone que $p \equiv 1 \pmod{3}$: $p = 3q + 1$.

(a) Demostrar que existe $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tal que $a^q \neq \dot{1}$.

(b) Deducir que $-\dot{3}$ es un cuadrado.

3. Recíprocamente, se supone que $-\dot{3}$ es un cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Demostrar que $p \equiv 1 \pmod 3$.

Solución ▼ [003162]

Ejercicio 4227 Indicador de Euler

Sea $n \geqslant 3$. Demostrar que $\varphi(n)$ es par y que $\sum\limits_{\substack{x \wedge n=1 \\ 1 \leqslant x \leqslant n}} x = \frac{n\varphi(n)}{2}$.

Solución ▼ [003163]

---

147 205.03 Grupo finito conmutativo

148 205.04 Aritmética de $K[X]$

149 205.05 Cuerpo finito

150 205.06 Aplicaciones

151 205.99 Otro

152 220.01 Convergencia normal

153 220.02 Criterios de Cauchy y de Alembert

154 220.03 Radio de convergencia

Ejercicio 4228 Verdadero o falso

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Dar una demostración o un contraejemplo.

1. Las series $\sum a_n z^n$ y $\sum (-1)^n a_n z^n$ tienen el mismo radio de convergencia.
2. Las series $\sum a_n z^n$ y $\sum (-1)^n a_n z^n$ tienen el mismo dominio de convergencia.
3. si la serie $\sum a_n z^n$ tiene un radio de convergencia infinito, entonces converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ tiene un radio finito de convergencia $R > 0$, entonces su suma admite un límite infinito en $(-R)^+$ o en R^-.
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ tiene un radio de convergencia infinito y si el a_n son estrictamente positivos, entonces para todo entero p, $\frac{f(x)}{x^p} \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$.

[004564]

Ejercicio 4229 Cálculo de radios

Encontrar el radio de convergencia de la serie entera $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \to \ell \neq 0$, cuando $n \to \infty$.
2. (a_n) es periódica no nula.
3. $a_n = \sum\limits_{d|n} d^2$.
4. $a_n = \frac{n^n}{n!}$.
5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.
6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8. $a_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.
9. $a_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{n!}$.
10. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$.
13. $a_n = \mathrm{C}_{kn}^n$.
14. $a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{(n-1)^2}$.
15. $a_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n \, dt$.
16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17. $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Solución ▼ [004565]

Ejercicio 4230 Central P' 1996

¿Cómo podemos encontrar el radio de convergencia de una serie entera cuya sucesión de coeficientes admite una infinidad de ceros ? [004566]

Ejercicio 4231 Mines MP 2003

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie entera $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \cos^k\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right) x^k$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$?

Solución ▼ [004567]

Ejercicio 4232 Ensi MP 2003

Rayon de convergencia R de la serie entera $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ y estudiar para $x = \pm R$.

Solución ▼ [004568]

Ejercicio 4233 Central MP 2003

Se consideran las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por : $a_n = \dfrac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}$, $b_n = \operatorname{sen}(a_n)$.

1. Determinar los radios de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$.
2. Determinar la naturaleza de $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ en función de x.

Solución ▼ [004569]

Ejercicio 4234 Transformación de radios

Sea $\sum a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia $R > 0$. Determinar los radios de convergencia de series :

1. $\sum a_n^2 z^n$.
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
3. $\sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.

Solución ▼ [004570]

Ejercicio 4235 Series pares e impares

Se supone que las series $\sum a_{2n}z^n$ y $\sum a_{2n+1}z^n$ tienen por radios de convergencia R y R'. Determinar el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$.

Solución ▼ [004571]

Ejercicio 4236 División por $z-\rho$

Sea $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serie entera de radio de convergencia infinito y $\rho > 0$. Se define la serie entera $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de manera que $(z-\rho)b(z) = a(z)$ en caso de convergencia de $b(z)$.

1. Probar la existencia y unicidad de los coeficientes b_n.
2. ¿Cuál es el radio de convergencia de $b(z)$?

Solución ▼ [004572]

Ejercicio 4237 Desarrollar puede ser peligroso

Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ se establece $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1. Determinar el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
2. Desarrollar $u_n(x)$ por la fórmula binomial : $u_n(x) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2\cdot 4^n} a_k x^k$. Demostrar que el radio de convergencia de la serie entera $\sum_{k\geqslant 1} a_k x^k$ es igual a 1 (acordando que los a_k no definidos valen cero).

Solución ▼ [004573]

Ejercicio 4238 **

Determinar el radio de convergencia de la serie entera propuesta en cada uno de los siguientes casos :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n z^n$.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln(n!))^2 z^n$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} z^n$.
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n^n} z^n$.
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n!))^a}{n!^b} z^n$.
7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} z^n$, $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Solución ▼ [005745]

Ejercicio 4239 Cálculo del radio de convergencia

1. Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum 2^{2n} z^{2n}$.
2. Determinar el límite de $\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}$.

[007544]

Ejercicio 4240 Operaciones sobre rayos de convergencia

Sea $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ dos series enteras de radios de convergencia respectivos R_1 y R_2.

1. Demostrar que el radio de convergencia de $\sum(a_n+b_n)z^n$ es superior que $\min(R_1,R_2)$, con igualdad si $R_2 \neq R_1$.
2. Demostrar que el radio de convergencia de $\sum(a_n b_n)z^n$ es superior que $R_1 R_2$.

[007545]

155 220.04 Propiedades de la suma de una serie entera

156 220.05 Cálculo de la suma de una serie entera

Ejercicio 4241 Suma de series enteras

Calcular las sumas de las siguientes series :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n^2-1}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n-1}$, $x \geqslant 0$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \operatorname{ch}(na)$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}^2(n\theta)}{2^n}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n+1} x^n$.
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_1^x \ln^n t \, dt$.
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Solución ▼ [004581]

Ejercicio 4242 Sucesión recurrente lineal

Se define dos sucesiones (u_n) y (v_n) por : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n. \end{cases}$

Determinar el radio de convergencia y la suma de la serie entera $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.

Solución ▼ [004582]

Ejercicio 4243 Serie matricial, Central MP 2000

1. Demostrar la existencia de $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$, para $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.
2. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} k A^k$ converge si y solo si los valores propios de A son de módulo estrictamente inferior a 1.
3. ¿La suma $S = \sum_{k=1}^{\infty} k A^k$ es invertible ?

Solución ▼ [004583]

Ejercicio 4244 Serie de trazas (Central MP 2003)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Demostrar que A es diagonalizable y admite tres valores propios reales cuyas partes enteras se especificarán.
2. Se define $t_n = \operatorname{tr}(A^n)$. Expresar t_n en función de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
3. Determinar el radio de convergencia de la serie entera $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ y calcular su suma.

Solución ▼ [004584]

Ejercicio 4245 Central MP 2000

Calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solución ▼ [004585]

Ejercicio 4246 $\sum P(n)x^n$, Ensi P 91

Radio y suma de $\sum P(n)x^n$, donde P es un polinomio de grado p.

Solución ▼ [004586]

Ejercicio 4247 $\sum e^{en\theta}/2^n$, Ensi P 91

Calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{2^n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n}$.

Solución ▼ [004587]

Ejercicio 4248 Ensae MP* 2000

Sea (u_n) definida por, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$. Encontrar el límite de (u_n).

Solución ▼ [004588]

Ejercicio 4249

Calcular las siguientes sumas en su intervalo abierto de convergencia después de haber definido el radio de convergencia de la serie propuesta.

1) (**) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$ 2) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n$ 3) (** I) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$

4) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}x^n$ 5) (*) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 6) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{ch} n)x^n$

7) (** I) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ 8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n$ 9) (** I) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$

10) (*) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}$ 11) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)2^{n+1}x^n$ 12) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

13) (***) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donde $a_0 = a_1 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

14) (**) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donde a_n es el número de pares (x, y) de números naturales tales que $x + 5y = n$.

Solución ▼ [005746]

Ejercicio 4250 ***

Calcular $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$, para x en $]-1,1[$.

Solución ▼ [005752]

Ejercicio 4251 *** I

Calcular $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$, para x en $]-1,1[$ y deducir las sumas $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Solución ▼ [005753]

Ejercicio 4252 ****

Para n entero natural, se establece $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1}$. Convergencia y suma de la serie (numérica) de término general u_n.

Solución ▼ [005754]

Ejercicio 4253 **

Se define $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$, luego para todo entero natural n, $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}$.

Radios y sumas de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$.

Solución ▼ [005757]

Ejercicio 4254 *** I

Radio de convergencia y suma de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} x^n$.

Solución ▼ [005758]

Ejercicio 4255 ***

Sea I_n el número de involuciones de $[\![1,n]\!]$. Radio de convergencia y suma de la serie entera asociada a la sucesión $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solución ▼ [005763]

157 220.06 Desarrollo en series enteras

Ejercicio 4256 Desarrollos en la serie entera

Desarrollar en serie entera las siguientes funciones :

1. $\ln(1+x+x^2)$.
2. $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.
3. $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
4. $\dfrac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
5. $\dfrac{1}{1+x-2x^3}$.
6. $\dfrac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
7. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
8. $\arctan(x+1)$.
9. $\arctan(x+\sqrt{3})$.
10. $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,dt$.
11. $\left(\dfrac{(1+x)\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$.
12. $\displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.
13. $\mathrm{e}^{-2x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt$.
14. $\dfrac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.
15. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsen} x\right)$.

Solución ▼ [004574]

Ejercicio 4257 Ensi PC 1999

Desarrollar en serie entera $\ln(\sqrt{1-2x\operatorname{ch} a+x^2})$.

Solución ▼ [004575]

Ejercicio 4258 $\mathrm{e}^{x^2}/(1-x)$

Desarrollar en serie entera $\frac{\mathrm{e}^x}{1-x}$, luego $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1-x}$.

Solución ▼ [004576]

Ejercicio 4259 Mines-Ponts MP 2004

Desarrollar en serie entera $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

Solución ▼ [004577]

Ejercicio 4260 DSE de una fracción racional por recurrencia lineal

Desarrollar $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ en serie entera usando la relación : $(1-x-x^2)f(x)=x$.

Solución ▼ [004578]

Ejercicio 4261 Producto de polinomios

¿Cuál es el coeficiente de x^n en $\left(1+x+\cdots+x^n\right)\left(1+2x+\cdots+(n+1)x^n\right)\left(1+4x+\cdots+(n+1)^2x^n\right)$?

Solución ▼ [004579]

Ejercicio 4262 Desarrollo en serie entera de $\zeta(1+x)-1/x$

1. Verificar que para $x\in\,]0,+\infty[$ se tiene : $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+x}}-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)\right)$.
2. Para $p\in\mathbb{N}$ se establece $\gamma_p=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\ln^p(1)}{1}+\cdots+\frac{\ln^p(k)}{k}-\frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\right)$. Justificar la existencia de γ_p y demostrar que $|\gamma_p|\leqslant(p/\mathrm{e})^p$.
3. Demostrar entonces que para $x\in\,]0,1[$ se tiene $\zeta(1+x)-\frac{1}{x}=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\gamma_p}{p!}x^p$.

[004580]

Ejercicio 4263 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n x)$

Sea $q \in]-1,1[$ y $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n x)$.

1. Demostrar que $f(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y que f es desarrollable en serie entera en un vecindario de 0. Se admite que si una función g es DSE entonces e^g también lo es.
2. Usando la relación $f(x) = (1-qx)f(qx)$, calcular los coeficientes del desarrollo de f y el radio de convergencia.

Solución ▼ [004589]

Ejercicio 4264 Función no DSE

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n+n^2 ix}$. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$, pero no es desarrollable en serie entera alrededor de 0.

Solución ▼ [004590]

Ejercicio 4265 Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003

Sea $\alpha > 0$. Se considera la función $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha} \mathrm{e}^{inx}$. Demostrar que f es $\mathscr{C}^\infty$. Dar una CNS en α, para que f sea desarrollable en serie entera en todo punto de $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [004591]

Ejercicio 4266 Teorema de realización de Borel

Sea (a_n) una sucesión compleja dada, En este ejercicio se construye una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que para todo entero n se tiene $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.
Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ verificando $\forall x \in [-1,1],\ \varphi(x) = 1$ y $\forall x \notin [-2,2],\ \varphi(x) = 0$ (la existencia de φ es el objeto de la pregunta 2.).
Se define $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$, $M_n = \max(\|\varphi_n'\|_\infty, \dots, \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)$ y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$, donde (λ_n) es una sucesión de reales estrictamente positivos, tendiendo a $+\infty$ y tal que $\sum |a_n| M_n / \lambda_n$ converge.

1. Demostrar que f está bien definida, es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$ y comprobar $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$.
2. Construcción de φ : usando funciones del tipo $x \mapsto \exp(-1/x)$ construir una función ψ de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $[0,+\infty[$ nula en $[0,1] \cup [2,+\infty[$ y estrictamente positivo en $]1,2[$. Verificar entonces que $\varphi(x) = \int_{|x|}^{+\infty} \psi(t)\,dt \Big/ \int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt$ sirve.

Solución ▼ [004592]

Ejercicio 4267

Desarrollar en serie entera las siguientes funciones :

1) (*) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ 2) (*** I) $\dfrac{1}{x^2-2tx+1}$, $t \in \mathbb{R}$ 3) (*) $\ln(x^2-5x+6)$
4) (**) $\arctan\left(\dfrac{x \operatorname{sen} a}{1-x\cos a}\right)$, $a \in]0,\pi[$ 5) (**) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-p)}$ 6) (*** I) $(\operatorname{arcsen} x)^2$
7) (*) $\int_0^x \cos(t^2)\,dt$ 8) (*** I) $\int_{-\infty}^x \dfrac{dt}{t^4+t^2+1}$ 9) (**) $\cos x \operatorname{ch} x$.

Solución ▼ [005747]

Ejercicio 4268 * I

Para x real, se establece $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$ Demostrar que f es esta clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005748]

Ejercicio 4269 ***

Para x real, se establece $F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt$. Desarrollando F en series enteras por dos métodos diferentes, demostrar que para todo entero natural n,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!}=(-1)^n\frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}.$$

Solución ▼ [005756]

Ejercicio 4270 **** I Desarrollo en series enteras de la función $x\mapsto \tan x$

Para $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, se establece $f(x)=\tan x$.

1. Demostrar que existe una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo entero natural n, $f^{(n)}=P_n\circ f$ y que los P_n tienen coeficientes enteros naturales. (Utilizar $\tan'=1+\tan^2$).
2. Usando la fórmula de TAYLOR-LAPLACE, demostrar que la serie de TAYLOR en el origen de f tiene un radio de convergencia R superior o igual a $\frac{\pi}{2}$.
3. Se denota a_n los coeficientes de la expansión anterior y g la suma de la serie entera asociada con la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar que para todo entero natural no nulo n, $(n+1)a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}$. Deducir que para todo x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x)=g(x)$ y que $R=\frac{\pi}{2}$.
4. Calcular $a_0, a_1, a_2,\dots,a_7$.
5. Verificar que la función $x\mapsto \operatorname{th}x$ es desarrollable en serie entera. Especificar el radio y el valor de los coeficientes en función de los a_n.

Solución ▼ [005761]

Ejercicio 4271 ***

Desarrollar en serie entera $F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)\,dt$ y deducir que para todo real x, $F(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,dt$.

Solución ▼ [005762]

Ejercicio 4272 Cálculos

Expandir si es posible en series enteras en un vecindario de 0 las aplicaciones

1. $f(z)=\operatorname{sen}(z)^2$. 2. $g(z)=\cos(z^2-1)$. 3. $h(z)=\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$.

[007564]

Ejercicio 4273 Integral

Sea a y b dos números complejos tales que $|a| < 1 < |b|$ y m, n dos enteros naturales. Determinar el valor de

$$\int_{\partial\Delta} \frac{d\xi}{(\xi - a)^m (\xi - b)^n}.$$

[007565]

Ejercicio 4274 Ecuación diferencial

Determinar todas las aplicaciones holomorfas f sobre $\mathbb{C}$ tales que $f'' + f = 0$. [007566]

Ejercicio 4275 Extensión

Sea c un punto de $\mathbb{C}^-$.

1. Determinar una expansión en series enteras $\sum\limits_n a_n(z-c)^n$ centrada en c de la rama principal del logaritmo log.
2. Determinar el radio de convergencia del desarrollo anterior.
3. ¿La suma $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$ coincide con log en la intersección de $\mathbb{C}^-$ y su disco de convergencia.

[007567]

Ejercicio 4276 Números de Bernoulli

Se definen los números de Bernoulli como números complejos B_n tales que en el dominio de convergencia

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

1. Demostrar que el radio de convergencia de la serie anterior es 2π.
2. A partir de la relación $\frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z} = 1$, determinar una relación de recurrencia entre los B_n.
3. Expresar $\frac{e^z-1}{z}$ en función de $\frac{\sinh(z/2)}{\cosh(z/2)}$ y deducir que para n impar mayor que 3, $B_n = 0$.
4. Calcular $B_0, B_1 \cdots B_8$.
5. Demostrar que todos los B_n son racionales.
6. ¿La sucesión de los B_n es acotada?

[007568]

158 220.07 Estudio en la frontera

Ejercicio 4277 Estudio del círculo de convergencia

Para $x \in \mathbb{R}$ se establece $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Determinar el radio de convergencia R de esta serie.
2. Estudiar la convergencia de f, para $x = \pm R$.

3. Determinar $\lim_{x\to R^-} f(x)$.

Solución ▼ [004593]

Ejercicio 4278 Coeficientes equivalentes $\Rightarrow$ series equivalentes

Sea (a_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos. Se supone que el radio de convergencia de la serie entera $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es 1 y la serie diverge para $x = 1$.

1. Demostrar que $A(x) \to +\infty$, cuando $x \to 1^-$.
2. Sea (b_n) una sucesión tal que $b_n \sim a_n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Demostrar que $B(x) \sim A(x)$, para $x \to 1^-$.

Solución ▼ [004594]

Ejercicio 4279 Producto Cauchy

Sea (c_n) el producto de Cauchy de la sucesión (a_n) a continuación (b_n). Demostrar que si las tres series $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum c_n$ convergente hacia A,B,C, entonces $C = AB$ (considerar las series enteras $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ y $\sum c_n z^n$).

Solución ▼ [004595]

Ejercicio 4280 Producto Cauchy

Sea (c_n) el producto de Cauchy de la sucesión (a_n) por la sucesión (b_n). Se supone que la serie $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene un radio $R > 0$ y que $b_n/b_{n+1} \to \lambda$, cuando $n \to \infty$, con $|\lambda| < R$. Demostrar que $c_n/b_n \to A(\lambda)$, cuando $n \to \infty$.

Solución ▼ [004596]

159 220.08 Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 4281 Ecuación diferencial

Demostrar que la ecuación $3xy' + (2-5x)y = x$ admite una solución desarrollable en series enteras alrededor 0. Calcular $y(1)$ con una precisión de 5.10^{-5}.

Solución ▼ [004597]

Ejercicio 4282 DSE de tan

1. Usando la relación : $\tan' = 1 + \tan^2$, expresar $\tan^{(n)}$ en función de $\tan, \dots, \tan^{(n-1)}$. Inferir que $\forall x \in [0, \pi/2[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.
2. Demostrar que la serie de Taylor de tan en 0 converge en $]-\pi/2, \pi/2[$.
3. Sea f la suma de la serie anterior. Demostrar que $f' = 1 + f^2$ y deducir que $f = \tan$.
4. Probar que el radio de convergencia es exactamente $\pi/2$.

Solución ▼ [004598]

Ejercicio 4283 DSE de $(\operatorname{arcsen} x)^2$

Se establece $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Demostrar que f admite una expansión en serie entera en un vecindario de 0 y especificar el radio de convergencia.
2. Encontrar una ecuación diferencial de orden 1 verificada por f. Deducir los coeficientes del desarrollo en serie entera de f.
3. Dar el desarrollo en serie entera de $\operatorname{arcsen}^2 x$.

Solución ▼ [004599]

Ejercicio 4284 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^{n}}$

Se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{C_{2n}^{n}}$.

1. Determinar el radio de convergencia y demostrar que f verifica la ecuación : $x(4-x)y' - (x+2)y = -2$.
2. Resolver la ecuación anterior para $x > 0$. (Usar el DL de f en 0 de orden 1 para fijar la constante) y deducir la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^{n}}$.

Solución ▼ [004600]

Ejercicio 4285 Cálculo de sumas

Se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$.

1. Determinar el radio de convergencia.
2. Estudiar la convergencia en los límites del intervalo de convergencia.
3. Calcular $f(x)$.

Solución ▼ [004601]

Ejercicio 4286 Función generatriz de número de particiones

Se denota T_n el número de particiones de un conjunto para n elementos.

1. Demostrar que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.
2. Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$.

Solución ▼ [004602]

Ejercicio 4287 Sucesión recurrente

Sea (a_n) la sucesión real definida por $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. Se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Demostrar que el radio de convergencia es no nulo.
2. Calcular $f(x)$.
3. Deducir a_n en función de n.

Solución ▼ [004603]

Ejercicio 4288 Función ζ

Para $|x|<1$ se establece : $Z(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)x^n$. Demostrar que Z verifica la ecuación diferencial $2xZ'(x)-2Z^2(x)+Z(x)=3x\zeta(2)$ (escribir $Z(x)$ como la suma de una serie doble, invertir las sumas, reemplazar y ... simplificar). Deducir la relación de recurrencia $\forall n\geqslant 2,\ (n+\frac{1}{2})\zeta(2n)=\sum\limits_{p=1}^{n-1}\zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Solución ▼ [004604]

Ejercicio 4289 DSE de tan

Se denota $\zeta_i(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^n}$ y $Z_i(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_i(2n)x^n$. En s'inspirant del ejercicio 4288 demostrar que Z_i verifica la ecuación diferencial : $2xZ_i'(x)-2Z_i^2(x)-Z_i(x)=x\zeta_i(2)$. Determinar entonces dos reales α y β tales que $T(x)=Z_i(x^2)/x$ sea igual a $\alpha\tan\beta x$ sobre $]-1,1[$.

Solución ▼ [004605]

Ejercicio 4290 DSE de $\tan x$.

1. Para $a,b\in\mathbb{R}$, con $b\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$, verificar la siguiente identidad : $\frac{(1+ia)-\mathrm{e}^{ib}(1-ia)}{1-\mathrm{e}^{ib}}=1-\frac{a}{\tan(b/2)}$.
2. Para $a,b\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}^*$, verificar la siguiente identidad : $a^n+b^n=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a-b\mathrm{e}^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}})$.
3. Para $x\in\mathbb{R}$ y $p\in\mathbb{N}^*$, verificar la siguiente identidad : $\frac{\left(1+\frac{ix}{2p}\right)^{2p}+\left(1-\frac{ix}{2p}\right)^{2p}}{2}=\prod\limits_{k=0}^{p-1}\left(1-\frac{x^2}{4p^2\tan^2\frac{(2k+1)\pi}{4p}}\right)$.
4. Demostrar entonces : $\forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \ln(\cos x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)$.
5. Deducir : $\forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2-4x^2}$.
6. Para $n\in\mathbb{N}$, con $n\geqslant 2$, verificar la siguiente identidad : $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^n}=\frac{2^n-1}{2^n}\zeta(n)$.
7. Demostrar en fin $\forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}$.

[004606]

160 220.09 Integrales

Ejercicio 4291 $\int_0^1 t^t\,dt$

1. Usando una expansión de series enteras, demostrar que $\int_0^1 t^t\,dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.
2. Calcular el valor común de los dos miembros con una precisión de 10^{-5}.

Solución ▼ [004607]

Ejercicio 4292 $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,dt$

Se admite que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calcular $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,dt$.

Solución ▼ [004608]

Ejercicio 4293 Central PSI 1997

Establecer la convergencia y luego calcular el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004609]

Ejercicio 4294 $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

Demostrar que para $x \in]-1,1[$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. Deducir el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$. [004610]

Ejercicio 4295 Integral elíptica

Demostrar que la longitud de una elipse de semi-ejes a,b es : $L = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{2p} \frac{C_{4p}^{2p}C_{2p}^{p}}{4^{3p}(1-4p)}$.

[004611]

Ejercicio 4296 Norme L^2

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de radio $R > 0$. Demostrar, para $0 \leqslant r < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$.

[004612]

Ejercicio 4297 *** I

Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$. Radio de convergencia y suma de la serie entera asociada a la sucesión $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución ▼ [005751]

161 220.10 Analiticidad

Ejercicio 4298 Serie de valores reales

Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ una serie de radio $R > 0$ tal que para todo $z \in \mathring{D}(0,R)$ se tiene $f(z) \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es constante. [004613]

Ejercicio 4299 Fórmulas por Cauchy

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ conteniendo 0 y $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Se denota $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ todo el desarrollo de la serie de f en 0, R su radio y d la distancia de 0 à $\mathrm{fr}(U)$ ($d = +\infty$ si $U = \mathbb{C}$).

1. Demostrar, para $0 < r < \min(R,d)$ y $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{en\theta}} \, d\theta$.
2. Demostrar que la aplicación $r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{en\theta}} \, d\theta$ es analítica en $[0,d[$ (minorar el radio de convergencia de los DSE de f en $r_0 e^{i\theta}$ y mayorar en módulo los coeficientes cuando θ recorre $[0,2\pi]$ y r_0 es fijo en $[0,d[$, con ayuda de un recubrimiento abierto de $[0,2\pi]$). Deducir que la igualdad de la pregunta 1. tiene lugar para todo $r \in [0,d[$.
3. Para $0 < r < d$ y $|z| < r$ se establece $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} re^{i\theta} \, d\theta$. Demostrar que g es la suma de una serie entera de radio superior o igual a r y que g coincide con f sobre $\mathring{D}(0,r)$.
   Aplicaciones :
4. $R \geqslant d$.
5. Si $U = \mathbb{C}$ y f es acotada entonces f es constante (el teorema de Liouville).
6. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ no se anula entonces P es constante (teorema de d'Alembert-Gauss).
7. Si (f_n) es una sucesión de funciones analíticas uniformemente convergentes sobre U a una función f, entonces f es analítica en U (teorema de Weierstrass, comparar con el caso real).
8. La composición de dos funciones analíticas es analítica.

Solución ▼ [004614]

Ejercicio 4300 Fórmula de residuos

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ teniendo por raíces $z_1, \ldots, z_k$ de multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$ y $r \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{|z_1|, \ldots, |z_k|\}$. Demostrar : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta} \, d\theta = \sum\limits_{|z_j| < r} m_j$. [004615]

Ejercicio 4301 Crecimiento de f en función de los coeficientes

Sea $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia infinito. Demostrar la equivalencia entre las siguientes propiedades :
1 : Para todo $a > 0$, la función $z \mapsto f(z) e^{-a|z|}$ es acotada en $\mathbb{C}$.
2 : $\sqrt[n]{n!\,|a_n|} \to 0$, cuando $n \to \infty$.
Se utiliza las fórmulas de Cauchy (cf. Ejercicio 4299).

Solución ▼ [004616]

Ejercicio 4302 Central MP 2000

Sea (a_n) una sucesión real con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Se denota $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se supone que f es inyectiva y el radio de convergencia de la serie entera es igual a 1. Se considera $\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ y $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Demostrar que, para todo $z \in D$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.
2. Demostrar que $f(D \cap \Omega^+) \subset \Omega^+$.

3. Demostrar que, para todo $|r| < 1$, $a_n = \dfrac{2}{\pi r^n} \displaystyle\int_0^\pi \operatorname{Im}(f(re^{i\theta})) \operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta$.
4. Demostrar que $|\operatorname{sen}(n\theta)| \leqslant n|\operatorname{sen}\theta|$. Deducir que $|a_n| \leqslant n$.

Solución ▼ [004617]

---

162 220.99 Otro

Ejercicio 4303 Anillo de la serie entera

Sea A el conjunto de sucesiones (a_n) de complejos tales que la serie entera $\sum a_n z^n$ tiene un radio no nulo. Se equipa A de la suma término a término y del producto de Cauchy denotado $*$.

1. Verificar que A es un anillo íntegro. ¿Cuáles son los elementos de A invertibles?
2. Sea $I_k = \{a = (a_n) \in A$ tal que $a_0 = \cdots = a_k = 0\}$. Demostrar que los ideales de A son $\{0\}$, A y los I_k, $k \in \mathbb{N}$.
3. Sea $f(x) = 2 - \sqrt{\dfrac{1-2x}{1-x}}$. Demostrar que f es desarrollable en serie entera en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ y que si $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, entonces la sucesión (u_n) verifica la relación de recurrencia $2u_{n+1} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} u_k u_{n+1-k}$.
4. Sea $a = (a_n) \in A$, con $a_0 = 1$ y $|a_n| \leqslant 1$, para todo n. Demostrar que existe una única sucesión $b = (b_n) \in A$ tal que $b_0 = 1$ y $b * b = a$. Para demostrar que el radio de convergencia de b es no nulo se establece por inducción que $|b_n| \leqslant u_n$.
5. Para $a \in A$ cualquier, estudiar la ecuación $b * b = a$ de incógnita $b \in A$.

[004618]

Ejercicio 4304 Ulm MP* 2000

Sea $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$, $p_1, \ldots, p_p \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{p} p_i = 1$, y $\omega \in \mathbb{R}$. Para $n > p$ se establece $z_n = e^{i\omega} \sum\limits_{j=1}^{p} z_{n-j} p_j$. Estudiar la sucesión (z_n).

Solución ▼ [004619]

Ejercicio 4305 X MP* 2001

Sea D el disco abierto de $\mathbb{C}$ de centro 0 y radio 1.

1. Sea $\varphi(z) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ una serie entera de radio $R \geqslant 1$ y $r \in]0,1[$. Demostrar que
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$
2. Sea E el conjunto de funciones de $\overline{D}$ en $\mathbb{C}$ continuas y cuya restricción a D es la suma de una serie entera. Demostrar que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ define una norma en E y que para esta norma E es completo.
3. Demostrar que el conjunto de polinomios con coeficientes complejos es denso en E.

Solución ▼ [004620]

Ejercicio 4306 Central MP 2002

---

1. Desarrollar en serie entera $f : z \mapsto z(1-z)^{-2}$. Demostrar que f es inyectiva en $\mathring{D}(0,1)$.
2. Sea $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ la suma de una serie entera de radio de convergencia de al menos 1, con coeficientes reales. Se supone f inyectiva en $\mathring{D}(0,1)$ y se quiere demostrar : $\forall n \geqslant 1, |a_n| \leqslant n$.
   (a) Demostrar para $|z| < 1$ que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ y deducir $\operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) \geqslant 0$.
   (b) Para $0 < r < 1$ calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{Im}(f(re^{it})) \operatorname{sen} nt\, dt$. Deducir $|a_n| r^n \leqslant n|a_1|r$ y concluir.

Solución ▼ [004621]

Ejercicio 4307 *** I

Sean $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ y $R > 0$ dado. Demostrar que para n suficientemente grande, P_n no tiene raíz en el disco cerrado de centro 0 y de radio R.

Solución ▼ [005749]

Ejercicio 4308 **** Inversa de serie entera

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie entera de radio $R > 0$ y tal que $a_0 = 1$ (o más generalmente $a_0 \neq 0$).

1. Demostrar que existe una y solo una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \delta_{0,n}$.
2. Demostrar que la serie entera $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ tiene un radio estrictamente positivo.

Solución ▼ [005750]

Ejercicio 4309 ***

Sea A una matriz cuadrada compleja de tamaño $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergencia y suma en función de χ_A de la serie entera $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n) z^n$.

Solución ▼ [005755]

Ejercicio 4310 *** I

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales estrictamente positivos tales que la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite real k. (En particular $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ si $k = 0$ y $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ si $k = 1$). Se supone además que la serie entera asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un radio de convergencia igual a 1 y que la serie de término general a_n diverge.

1. Demostrar que $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = k$.
2. **Aplicaciones.**
   (a) Equivalente simple cuando x tiende a 1 de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.
   (b) Determinar $\lim_{x\to 1} (1-x)^p \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n$, donde p es un entero natural dado no nulo.

Solución ▼ [005759]

Ejercicio 4311

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores en $\{-1,1\}$. Para x real se escribe $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$. Se supone que para todo entero natural p y todo real positivo x, $|f^{(p)}(x)|\leqslant 1$. Determinar f.

Solución ▼ [005760]

Ejercicio 4312 *** I Enumeración de paréntesis

1. Sea E un conjunto no vacío dotado de una ley interna y a_n el número de paréntesis posibles de un producto de n elementos de E (($a_1=1$ convencionalmente), $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=5$,...). Demostrar que para todo $n\geqslant 2$, $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$.
2. Sea f la serie entera asociada a la sucesión (a_n). Se supone momentáneamente el radio R de esta serie estrictamente positiva. Demostrar que para todo x de $]-R,R[$, $(f(x))^2-f(x)+x=0$.
3. Calcular R y f.
4. Deducir a_n.

Solución ▼ [005764]

Ejercicio 4313 Estimaciones de restos

Demostrar que para todo $N\in\mathbb{N}$, y todo $z\in\Delta$,

$$\left|\exp(z)-\sum_0^N\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\frac{2}{(N+1)!}.$$

[007546]

Ejercicio 4314 Derivación

Demostrar que para todo entero natural k y todo $z\in\Delta$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}z^{n-k}.$$

[007547]

163 221.01 Cálculo de coeficientes

Ejercicio 4315

Sea f la función 2π-periódica sobre $\mathbb{R}$ tal que $f(x)=|x|$ si $|x|\leqslant\pi$.

1. Determinar la serie de Fourier de f.
2. Calcular $\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2dx$. Deducir el valor de $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$.

3. Calcular $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

4. Demostrar que $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$. Deducir los valores de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, luego $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solución ▼ [001951]

Ejercicio 4316

Sea f la función 2π-periódica sobre $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Determinar la serie de Fourier de f.
2. Calcular $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$. Deducir el valor de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Demostrar que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$. Deducir $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

[001952]

Ejercicio 4317

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$.

1. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R} : xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} tx}{(1+t^2)^2} dt$.
2. Demostrar que f es de clase C^2 después, derivando la expresión anterior, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = f(x)$.
3. Dar una expresión de f sobre $\mathbb{R}_+^*$, luego en $\mathbb{R}$.

[001955]

Ejercicio 4318 Desarrollos

Calcular el desarrollo de las funciones f 2π-periódicas tales que :

1. $f(x) = \pi - |x|$ sobre $]-\pi, \pi[$.
2. $f(x) = \pi - x$ sobre $]0, 2\pi[$.
3. $f(x) = x^2$ sobre $]0, 2\pi[$.
4. $f(x) = \max(0, \operatorname{sen} x)$.
5. $f(x) = |\operatorname{sen} x|^3$.

Solución ▼ [004622]

Ejercicio 4319 Chimie P' 1996

Establecer la convergencia y luego calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\operatorname{sen} t} dt$. Deducir los coeficientes de Fourier de f : $f(t) = \ln|\tan(t/2)|$.

Solución ▼ [004623]

Ejercicio 4320 Chimie P 1996

Desarrollar en serie de Fourier $f : t \mapsto \frac{1}{1 - \cos\alpha \cos t}$, con $0 < \alpha < \pi$.
Indicación : Usar una relación de recurrencia entre los coeficientes de $(1 - \cos\alpha \cos t) f(t) = 1$.

Solución ▼ [004624]

Ejercicio 4321 Mines MP 2002

Sea $a \in]-1,1[$ y $g : x \mapsto \dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

1. Demostrar : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$.
2. ¿Cuál es el modo de convergencia de la serie ?
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua a trozos y 2π-periódica. Demostrar que $h : x \mapsto \int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt$ es la suma de una serie trigonométrica uniformemente convergente. ¿Qué se puede deducir para h ?
4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas a trozos y 2π-periódicas tales que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

Solución ▼ [004625]

Ejercicio 4322 Uso de una serie entera

1. ¿Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que los coeficientes de Fourier son : $a_n = \frac{1}{2^n}$ y $b_n = 0$?
2. Aplicación : calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{5-4\cos t}$.

Solución ▼ [004626]

Ejercicio 4323 $1/(\cos x + \operatorname{ch} a)$

Sea $a > 0$.

1. Desarrollar en serie entera : $f(x) = \dfrac{1}{x+e^a}$.
2. Deducir la expansión en serie de Fourier de $g(x) = \dfrac{1}{\cos x + \operatorname{ch} a}$.

Solución ▼ [004627]

Ejercicio 4324 Descomposición en sen^2

Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\operatorname{sen} x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 nx}{4n^2-1}$. [004628]

Ejercicio 4325 DSF de $f * g$, Mines PSI 1998

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas 2π-periódicas. Se define para $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$.

1. Demostrar que h es 2π-periódica, continua, y calcular los coeficientes de Fourier exponenciales de h en función de los de f y de g.
2. Para g fija, determinar los valores propios y los vectores propios de $f \mapsto h$.

Solución ▼ [004629]

Ejercicio 4326 DSF de una serie

Se establece $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-2n\pi)^2}$. Demostrar que f se define en $\mathbb{R}$, 2π-periódica y de clase $\mathscr{C}^1$. Determinar su serie de Fourier.

Solución ▼ [004630]

Ejercicio 4327 Cálculo de series

Sea f la función 2π-periódica tal que $\forall x\in[-\pi,\pi[,\ f(x)=\mathrm{e}^x$.

1. Encontrar la expansión de la serie de Fourier de f.
2. Deducir las sumas de la serie $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ y $S'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Solución ▼ [004631]

Ejercicio 4328 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n^2+a^2}$ (Central MP 2003)

1. Sea $a\in\mathbb{R}$. Desarrollar en serie de Fourier la función 2π-periódica valiendo e^{ax} sobre $]0,2\pi]$. Sea $a\in\mathbb{R}$ y sea $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}}\operatorname{sen}(au)\,du$.
2. Expresar $I(a)$ en forma de serie sin integral.
3. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\operatorname{sen}(au)\,du$.
4. Concluir.

Solución ▼ [004632]

Ejercicio 4329 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n^2+a^2}$ (Central MP 2000)

1. Dar el desarrollo en serie de Fourier de la función 2π-periódica definida en $]0,2\pi[$ por $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$, con $a\neq 0$.
2. Calcular $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a}{a^2+n^2}$. Deducir $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$.
3. ¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{a\to+\infty}\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{a}{a^2+n^2}$?

Solución ▼ [004633]

Ejercicio 4330 Cálculo de series, Matexo

Se considera la función 2π-periódica sobre $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, si $0\leqslant x<2\pi$.

1. Calcular los coeficientes de Fourier de f.
2. ¿Cuál es la naturaleza de la serie de Fourier S_f de f?
3. Deducir la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

Solución ▼ [004634]

Ejercicio 4331 $\operatorname{sen}(\pi a)/\pi a$

Sea $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

1. Desarrollar en serie de Fourier la función definida en $[-\pi,\pi]$ por : $f(x)=\cos(ax)$.
2. Sea $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)$. Justificar la existencia y derivabilidad de g y calcularla.

Solución ▼ [004635]

Ejercicio 4332 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$

---

1. Desarrollar en serie de Fourier la función f, 2π-periódica tal que $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, para $0\leqslant x<2\pi$.
2. Dar los desarrollos en serie de Fourier de $f(x+1)$ y $f(x-1)$.
3. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$.

Solución ▼ [004636]

Ejercicio 4333 $f(x+\pi)$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periódica continua a trozos. ¿Qué se puede decir coeficientes de Fourier de f si se tiene :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi)=f(x)$?
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\pi)=-f(x)$?

Solución ▼ [004637]

Ejercicio 4334 ¿f es π-periódica ?

Sea $f\in\mathscr{D}$. Se denota c_k los coeficientes exponenciales de Fourier de f. Demostrar que f es π-periódica si y solo si c_k es nulo para todo k impar. (Notar que la serie de Fourier de f no puede converger a f). [004638]

Ejercicio 4335 DSF de f'

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, 2π-periódica de clase $\mathscr{C}^1$ por trozos. Se denota a_k, b_k los coeficientes de Fourier de f. Calcular los coeficientes de Fourier de f' en función de los de f. Deducir que $ka_k\to 0$ y $kb_k\to 0$, cuando $k\to\infty$.

Solución ▼ [004639]

Ejercicio 4336 DSF de f'

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$. Se considera la función g, 2π-periódica coincidiendo con f sobre $[0,2\pi[$. Sean a_n,b_n los coeficientes de Fourier de g.

1. Demostrar que $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ y $b_n=\frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Dar el desarrollo de la serie de Fourier de g'.

Solución ▼ [004640]

Ejercicio 4337 DSF de una primitiva de f

Sea f continua 2π-periódica, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, a_n, b_n los coeficientes trigonométricos de Fourier de f y $C = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t)\,dt$. Demostrar :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{a_0 x}{2} + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} nx - b_n \cos nx}{n}.$$

[004641]

Ejercicio 4338 Concavidad, ENS

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua 2π-periódica par cuya restricción a $[0, 2\pi]$ es cóncavo. Demostrar que los coeficientes de Fourier trigonométricos de f verifican : $a_k \leqslant 0$, para $k \geqslant 1$.

Solución ▼ [004642]

Ejercicio 4339

Desarrollar en serie de FOURIER las siguientes funciones determinan entonces el valor de las sumas indicadas :

1) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica par tal que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. Deducir $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

2) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica impar tal que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. Deducir $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

3) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica tal que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Deducir $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2 + 16n + 3}$.

4) (***) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica tal que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$ (λ real estrictamente positivo dado). Deducir $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}$.

5) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \operatorname{sen} x)$. Deducir $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.

Solución ▼ [005782]

Ejercicio 4340 ***

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

1. (a) Desarrollar en serie trigonométrica la función $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ (utilizar la raíz del módulo más pequeño, denotada b, de la ecuación $z^2 - az + 1 = 0$).
   (b) ¿La serie obtenida es la serie de FOURIER de f ?
2. Deducir de 1) el valor de las integrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos t}\,dt$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [005783]

Ejercicio 4341 *** I

(Un desarrollo en serie de funciones de $\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ y $\operatorname{cotan}(\pi z)$). Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, 2π-periódica tales que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Desarrollar la función f en serie de FOURIER.

2. Deducir que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ y } \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Solución ▼ [005784]

Ejercicio 4342 **

Desarrollar en serie de FOURIER la función $f: x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$.

Solución ▼ [005785]

---

164 221.02 Convergencia, teorema de Dirichlet

Ejercicio 4343 Fenómeno de Gibbs para $\operatorname{sen} kx/k$

Sea $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$.

1. Calcular la abscisa, x_n, del primer máximo positivo de f_n.
2. Determinar $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n)$.

Solución ▼ [004650]

Ejercicio 4344 convergencia uniforme

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ una serie trigonométrica que converge uniformemente en un intervalo $[\alpha, \beta]$. Demostrar que las sucesiones (a_n) y (b_n) tienden a 0.

Solución ▼ [004651]

Ejercicio 4345 convergencia uniforme

Sea (a_n) una sucesión decreciente de límite cero. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si y solo si $na_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Para el sentido directo : utilizar el criterio de convergencia uniforme de Cauchy y la desigualdad : $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2x}{\pi}$ sobre $[0, \pi/2]$.

Solución ▼ [004652]

Ejercicio 4346 Función continua cuya serie de Fourier diverge en 0

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par, 2π-periódica, tal que, para todo $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \operatorname{sen}\left((2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right)$. Verificar que f está definida y es continua en $\mathbb{R}$.
2. Sea $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt$, para $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$.

   Para $\nu \in \mathbb{N}$, se establece $a_{0,\nu} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left((2\nu + 1)\frac{t}{2}\right) dt$ y $a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos(nt) \operatorname{sen}\left((2\nu + 1)\frac{t}{2}\right) dt$.

   Para $q \in \mathbb{N}$, se denota $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$. Demostrar que si ν es fijado, $s_{n,\nu} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Calcular explícitamente los $a_{n,\nu}$. Deducir que, para todo q, para todo ν, $s_{q,\nu} > 0$, y probar que $\max_{q \in \mathbb{N}} (s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$.

3. Demostrar que existe $B>0$ tal que, para todo $\nu \geqslant 1$, $s_{\nu,\nu} \geqslant B \ln \nu$.
4. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3}-1}$.
5. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $T_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} A_k$. Verificar que $T_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3}-1}$. Demostrar que existe $D>0$ tal que, para todo $p \geqslant 1$, $T_{2^{p^3}-1} \geqslant Dp$, y constatar que la serie de Fourier de f diverge en el punto 0.

[004653]

Ejercicio 4347 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) \mathrm{e}^{inx}$, $R=$ fracción racional

Sea R una fracción racional con coeficientes complejos, de grado estrictamente negativo, no tiene polo en $\mathbb{Z}$. Se establece $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) \mathrm{e}^{inx}$.

1. Estudiar la existencia y continuidad de f.
2. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [004654]

Ejercicio 4348 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{P(n)}$, $P=$ polinomio

1. Dar el desarrollo en serie de Fourier de la función f 2π-periódica tal que $f(x) = (\pi - x)^2$ sobre $]0, 2\pi[$.
2. Sea P un polinomio de grado 2 sin raíces en $\mathbb{N}^*$. Se establece $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{P(n)}$. Demostrar que g es de clase $\mathscr{C}^1$ por trozos.

Solución ▼ [004655]

Ejercicio 4349 Núcleo de Fejér

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periódica continua, f_n su n-ésima suma de Fourier y $g_n = \frac{f_0 + \cdots + f_n}{n+1}$.

1. Expresar g_n utilizando un producto de convolución, $g_n = f * k_n$.
2. Demostrar que la sucesión (k_n) constituye una sucesión de aproximaciones de la medida de Dirac en $]-\pi, \pi[$. Esto demuestra que el promedio de sumas parciales de la serie de Fourier de f converge uniformemente a f *para toda f continua*.

Solución ▼ [004656]

---

165 221.03 Fórmula de Parseval

Ejercicio 4350

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica, C^2 y tal que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ y, $\forall t \in [0, 2\pi], |f(t)| \geqslant |f''(t)|$.Se denotan respectivamente $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(c''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier (complejos) de f y f''.

1. Calcular c_0, luego calcular c''_n en función de c_n.

2. Usando el teorema de Parseval, deducir que $c_n = 0$, para $|n| \geqslant 2$.
3. Demostrar que existe $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in \mathbb{R}_+$ tales que $f(t) = \rho\cos(t+\varphi)$, para todo $t \in [0, 2\pi]$.

[001953]

Ejercicio 4351

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función 2π-periódica, C^1 y tal que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Se denotan respectivamente $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier (complejos) de f y f'.

1. Calcular c_0, luego dar una relación entre c_n y c'_n.
2. Deducir que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.
3. ¿En qué caso la igualdad tiene lugar ?

[001954]

Ejercicio 4352 ENS MP 2002

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Demostrar que se puede extender f en una función impar y 2-periódica.
2. Deducir la existencia de $c > 0$ independiente de f tal que $\|f\|_\infty \leqslant c\|f''\|_2$.

Solución ▼ [004643]

Ejercicio 4353 Desigualdad de Wirtinger

Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ y $f(0) = f(2\pi)$. Demostrar que $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt$ y determinar los casos de igualdad.

Solución ▼ [004644]

Ejercicio 4354 Desigualdad isoperimétrica

1. Sean f, g dos aplicaciones 2π-periódicas reales de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que : $2\int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2 + \int_0^{2\pi} g'^2$.
2. Sea Γ un arco $\mathscr{C}^1$, cerrado, simple, de longitud 2π. Demostrar que el área del dominio limitada por Γ es inferior o igual a π.

Solución ▼ [004645]

Ejercicio 4355 $|f''| \leqslant |f|$

Encontrar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódicas de clase $\mathscr{C}^2$ tales que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ y $|f''| \leqslant |f|$. [004646]

Ejercicio 4356 Cálculo de $(f \mid g)$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periódicas, continuas a trozos. Se denota $c_n(f)$ y $c_n(g)$ los coeficientes exponenciales de Fourier de f y g. Demostrar que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$. [004647]

Ejercicio 4357 Una serie trigonométrica que no es una serie de Fourier

Se establece $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$.

1. Demostrar que f está bien definida en $\mathbb{R}$, 2π-periódica y continua en $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
2. Calcular $\lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi - a} f(t) \operatorname{sen}(pt)\, dt$ y deducir que f no tiene desarrollo en serie de Fourier (y por lo tanto, no es continua en 0).

[004648]

Ejercicio 4358 X MP* 2001

Sea $a > 0$ y f continua en $[0, a]$, con valores reales. Se supone que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\int_0^a f(t) \cos(xt)\, dt = 0$. Demostrar que f es nula.

Solución ▼ [004649]

---

166 221.99 Otro

Ejercicio 4359

Sea f una función integrable en el sentido de Riemann periódica con período 2π.
Se designa por :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

su serie de Fourier y se pone, para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$.

1. Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Demostrar $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$.
2. Establecer que $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})(x - t)}{2 \operatorname{sen} \frac{(x-t)}{2}} f(t) dt$.
3. Deducir $S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \theta) \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} d\theta$.
4. Calcular $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} d\theta$.

[001950]

Ejercicio 4360 Fórmula de suma de Poisson

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1$. Se supone que existe $a>1$ tal que $f(x)=O(1/|x|^a)$ y $f'(x)=O(1/|x|^a)$, cuando $|x|\to\infty$, y sea $F(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi)$. Demostrar que F está bien definida, $\mathscr{C}^1$ y 2π-periódica. Deducir la fórmula sumatoria de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n).$$

[004657]

Ejercicio 4361 Fórmula de intercambio

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tales que f,f',g,g' son integrables. Demostrar :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{g}(t)\,dt.$$

[004658]

Ejercicio 4362 $\int_a^b f(t)|\operatorname{sen} nt|\,dt$

1. Desarrollar en serie de Fourier la función : $x\mapsto|\operatorname{sen} x|$.
2. Aplicación : Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\int_a^b f(t)|\operatorname{sen} nt|\,dt\to\frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$, cuando $n\to\infty$.

Solución ▼ [004659]

Ejercicio 4363 Ecuación diferencial

Demostrar que la ecuación : $y^{(4)}+y''+y=|\operatorname{sen} x|$ admite una y solo una solución π-periódica.

Solución ▼ [004660]

Ejercicio 4364 Ecuación diferencial

Sea $k\in\mathbb{R}$. Resolver la ecuación diferencial $y''+k^2y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

Solución ▼ [004661]

Ejercicio 4365 Equirepartición módulo 1

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$, 1-periódica, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ y $x\in\mathbb{R}$. Demostrar que
$$\frac{f(x)+f(x+\alpha)+\cdots+f(x+n\alpha)}{n+1}\to\int_0^1 f(t)\,dt,$$
cuando $n\to\infty$.
2. Demostrar que el resultado es aún verdadero suponiendo solo f continua.
3. Deducir la naturaleza de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n}$.

Solución ▼ [004662]

Ejercicio 4366 Cachan MP* 2000

Sea un real $\beta > 1$ y $a_k = \iint_{[0,1]^2} \mathrm{e}^{-|x-x'|^\beta} \mathrm{e}^{2i\pi k(x-x')}\, dx\, dx'$. Encontrar un equivalente cuando n tiende al infinito de $\sum_{|k|>n \text{ o } |\ell|>n} a_k a_\ell$, k y ℓ son enteros relativos.

Solución ▼ [004663]

Ejercicio 4367 Álgebra de series trigonométricas

Sea E el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de la forma : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nx}$, donde $\sum |c_n|$ converge. Se establece para $f \in E$: $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$.

1. Justificar la definición de $\|f\|$ y demostrar que E es un espacio vectorial normado completo.
2. Demostrar que E es una $\mathbb{C}$-álgebra y que $\|fg\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$.
3. Sea $\varphi : E \to \mathbb{C}$ un morfismo de álgebras.
   (a) Se supone φ continua, demostrar que existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tal que $\forall f \in E,\ \varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_0^n$.
   (b) Verificar que la fórmula anterior define efectivamente un morfismo continuo de E en $\mathbb{C}$.

Solución ▼ [004664]

Ejercicio 4368 Mines MP 2002

Determinar la naturaleza de la serie de término general $u_n = (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2)\, dt$.

Solución ▼ [004665]

Ejercicio 4369 Ens Lyon MP* 2003

Se denota $E^0 = \{$funciones continuas 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$;
$E^1 = \{f \in E$ de clase $\mathscr{C}^1\}$;
$E_n = \{f \in E$ tal que $\forall k \in [\![-n,n]\!],\ \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\, dt = 0\}$;
$E_n^1 = E_n \cap E^1$. Se considera sobre E la norma $\|\ \|_2$ $\left(\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int |f|^2}\right)$.

1. Demostrar que $D : E_0^1 \to E_0$, $f \mapsto f'$ es una biyección.
2. ¿D es continua ?
3. Demostrar que D^{-1} es continua.
4. Demostrar que $D^{-1}(E_n) = E_n^1$ y calcular $|||D^{-1}_{|E_n}|||$.

Solución ▼ [004666]

Ejercicio 4370 Cuatro raíces, ENS Cachan MP* 2005

Sea f, con valores reales, de clase $\mathscr{C}^2$, 2π-periódica, de media cero. Demostrar que $g = f + f''$ se anula al menos cuatro veces en $[0, 2\pi[$.

Solución ▼ [004667]

Ejercicio 4371 **

1. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$, 2π-periódica e impar tal que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Determinar $f(x)$, para todo real x.
2. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$, 2π-periódica y par tal que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Determinar $f(x)$, para todo real x.

Solución ▼ [005781]

167 222.01 Convergencia simple, uniforme, normal

Ejercicio 4372

A

1. Sean a y z dos reales. Sea f una función de clase C^{n+1} en el segmento de extremidades a y z y ϕ un polinomio de grado n. Demostrar que para todo t comprendido en el intervalo $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}\left(a+t(z-a)\right)$$

$$= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f'\left(a+t(z-a)\right)+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}\left(a+t(z-a)\right)$$

2. (a) Demostrar que la función $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ es extensible por continuidad en cero, que su extensión es indefinidamente derivable y admite desarrollos limitados en cero de la forma :

$$1-\frac{t}{2}+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_nt^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n+1}),$$

donde los b_i son reales que no se busca determinar. Demostrar que la derivada n-ésima en cero, denotada $\phi_n(z)$, de la función $t \mapsto t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}$ es un polinomio en z de grado n y que

$$\phi_n(z) = z^n - \frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2b_1z^{n-2}+C_n^4b_2z^{n-4}+\cdots+C_n^{2N}b_Nz^{n-2N}$$

donde $N = E(\frac{n-1}{2})$, E denotando la función de parte entera.

(b) Demostrar que $nz^{n-1} = \phi_n(z+1)-\phi_n(z)$

3. Demostrar que

(i) $\phi_n^{(n-k)}(1) = \phi_n^{(n-k)}(0),\ (2 \leqslant k \leqslant n)$ (ii) $\phi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0,\ (1 \leqslant k \leqslant N)$

(iii) $\phi_n^{(n-2k)}(0) = \dfrac{n!b_k}{(2k)!},\ (1 \leqslant k \leqslant N)$ (iv) $\phi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2}n!$

(v) $\phi_n^{(n-1)}(1) = \frac{1}{2}n!$ (vi) $\phi_n^{(n)} = n!$

4. (a) Se supone f de clase C^{2n+1}. Demostrar que

$$0 = f(z)-f(a)-\frac{z-a}{2}\left[f'(z)+f'(a)\right]+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m)}(z)-f^{(2m)}(a)\right]$$
$$-\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)f^{(2n+1)}(a+(z-a)t)dt$$

(b) Inferir que si F es de clase C^{2n} sobre $[a, a+r\omega]$, donde $r \in \mathbb{N}$ y $\omega > 0$, entonces

$$\int_a^{a+r\omega} F(x)dx = \omega\Big[\frac{1}{2}F(a) + F(a+\omega) + \cdots + F(a+(r-1)\omega) + \frac{1}{2}F(a+r\omega)\Big] - \sum_{m=1}^{n-1} b_m \frac{\omega^{2m}}{(2m)!}\Big[F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\Big] + R_n$$

donde

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \phi_{2n}(t)\sum_{m=0}^{r-1} F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)dt.$$

B

1. Sea $u_k : x > 0 \mapsto \ln(x+k) - \ln(k) + x\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$
   Demostrar que para todo x estrictamente positivo, la serie $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ es convergente. Se define para lo que sigue $G(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.
2. Demostrar que G verifica la ecuación funcional
   $$\forall x > 0 \quad G(x+1) = G(x) - \ln(x).$$
3. Inferir que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exp(-G(m+1)) = m!$
4. Sea x e y dos reales estrictamente positivos. Demostrar que la serie
   $$\sum_{k\geqslant 1}\left[\ln(y+k) - \ln(x+k) + (y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]$$
   es convergente y que su suma es $G(y) - G(x) - \ln y + \ln x$.
5. Demostrar usando A que para todos los enteros positivos n y p
   $$\sum_{k=0}^{n} \ln(y+k) - \ln(x+k) = \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big) + \sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n) - f^{(2h-1)}(0)\big) + T_{p,n}(x,y)$$
   donde $f : t \mapsto \ln(y+t) - \ln(x+t)$ y $T_{p,n}(x,y)$ es una expresión que se debe precisar.
6. Demostrar que $R_p(x,y) = \lim_{n\to+\infty} T_{p,n}(x,y)$ existe.
7. Se define $g(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{z^{2h-1}}$. Demostrar que $G(y)+g(y) = G(x)+g(x)+R_p(x,y)$
8. Demostrar que $R_p(x,y) = O\left(frac1\left[\inf(x,y)\right]^{2p-1}\right)$, cuando $\inf(x,y) \to +\infty$.
9. Demostrar usando la fórmula de Stirling de $G(m)+g(m) \to \frac{1}{2}\ln 2\pi$, cuando $m \to +\infty$.
10. Demostrar que
   $$G(y) = -y\ln y + y + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)(2h-1)}\frac{1}{y^{2h-1}} + O\Big(\frac{1}{y^{2p-1}}\Big)$$

11. Dar una expansión asintótica de $\ln(m!)$, cuando m tiende a $+\infty$ de orden $O(\frac{1}{m^7})$.

Solución ▼ [002683]

Ejercicio 4373 Estudio de convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$, para $x \in [0,1]$.

1. Encontrar el límite simple de funciones f_n.
2. ¿Hay convergencia uniforme ?

Solución ▼ [004503]

Ejercicio 4374 Estudio de convergencia

Se establece $f_n(x) = x^n(1-x)$ y $g_n(x) = x^n \operatorname{sen}(\pi x)$.

1. Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función nula en $[0,1]$.
2. Deducir que es lo mismo para la sucesión (g_n). (Utilizar la concavidad del seno en $[0,\pi]$)

[004504]

Ejercicio 4375 Sin inversión límite-integral

Sea $f_n(x) = n\cos^n x \operatorname{sen} x$.

1. Encontrar el límite simple f, de las funciones f_n.
2. Verificar que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

[004505]

Ejercicio 4376 sin inversión límite-integral

1. Determinar el límite simple de funciones $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ sobre $\mathbb{R}^+$ y demostrar que existe una convergencia uniforme. (Se admite la fórmula de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)
2. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Solución ▼ [004506]

Ejercicio 4377 Estudio de convergencia

Sea $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\begin{cases} (1-x/n)^n & x \leqslant n \\ 0 & x > n. \end{cases}$

1. Determinar el límite simple, f de las funciones f_n.
2. Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.
3. Demostrar que (f_n) converge uniformemente a f en todo segmento $[0,a]$.
4. Demostrar que la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}^+$.

Solución ▼ [004507]

Ejercicio 4378 Estudio de convergencia

Estudiar la convergencia simple, uniforme, de la sucesión de funciones : $f_n : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Solución ▼ [004508]

Ejercicio 4379 Estudio de convergencia

Sea $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Estudiar la convergencia simple, luego la uniforme de las f_n sobre $\mathbb{R}^+$, luego en $[\alpha, +\infty[$, para $\alpha > 0$. [004509]

Ejercicio 4380 $f(nx)$, $f(x/n)$

Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua, no idénticamente nula, tal que $f(0) = 0$ y $f(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$. Se define $f_n(x) = f(nx)$ y $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Dar un ejemplo de una función f.
2. Demostrar que f_n y g_n convergen simplemente a la función nula, y que la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}^+$.
3. Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, determinar $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ y $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

[004510]

Ejercicio 4381 Ecuación diferencial en función de un parámetro

Sea y_n la solución de la ecuación : $(*_n) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)y'' - \left(2+\frac{1}{n}\right)y' + y = 0$ verificando las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

1. Calcular explícitamente y_n.
2. Determinar el límite simple y, de las funciones y_n.
3. Verificar que y es solución de la ecuación límite de $(*_n)$, con las mismas condiciones iniciales.

Solución ▼ [004511]

Ejercicio 4382 $f \circ f \circ \cdots \circ f$

Sea $f : [-1,1] \to [-1,1]$ una función continua que verifica : $\forall x \neq 0, \quad |f(x)| < |x|$. Se establece $f_0(x) = x$, luego $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$. Estudiar convergencia simple de las f_n.

Solución ▼ [004512]

Ejercicio 4383 Estudio de convergencia

Se establece $f_0(t) = 0$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$, para $t \geqslant 0$.

1. Determinar el límite simple, ℓ, de las funciones f_n.
2. ¿Hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}^+$?
3. Demostrar que : $\forall t > 0$, $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \frac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. Deducir que la sucesión (f_n) converge uniformemente en todo intervalo $[a, +\infty[$, con $a > 0$. (Se observa que $f_n - \ell$ es acotada para $n \geqslant 1$)

Solución ▼ [004513]

Ejercicio 4384 Aproximación de la raíz cuadrada por el método de Newton

Se define una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ por recurrencia : $\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right) \end{cases}$.

Estudiar la convergencia simple, luego la uniforme de las f_n $\left(\text{considerar } g_n(x) = \dfrac{f_n(x) - \sqrt{x}}{f_n(x) + \sqrt{x}}\right)$. [004514]

Ejercicio 4385 Aproximación polinomial de la raíz cuadrada

Se considera la sucesión (f_n) de funciones en $[0,1]$ definida por las relaciones $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{t - f_n^2(t)}{2}$. Estudiar la convergencia simple, uniforme, de las funciones f_n.

Solución ▼ [004515]

Ejercicio 4386 Sucesión con dos límites

Encontrar una sucesión de polinomios (P_n) convergiendo simplemente (resp. uniformemente) a la función nula en $[0,1]$ y a la función constante igual a 1 sobre $[2,3]$. Observación : tal sucesión, por lo tanto tiene límites distintos en $\mathbb{R}[x]$, para las normas de convergencia uniforme en $[0,1]$ y en $[2,3]$.

Solución ▼ [004516]

Ejercicio 4387 Límite simple de polinomios de grados acotados

Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo y (P_n) una sucesión de funciones polinomiales de grados menores o iguales a p convergiendo simplemente a f en un intervalo $[a,b]$.

1. Demostrar que f es un polinomial de grado menor o igual que p, y que los coeficientes de los P_n convergen a los de f.
2. Demostrar que la convergencia es uniforme.

Solución ▼ [004522]

Ejercicio 4388 Polinomios con coeficientes enteros, ENS Lyon MP* 2005

Se considera $f : x \mapsto 2x(1-x)$ definida en $[0,1]$.

1. Estudio de la sucesión de funciones g_n, con $g_n = f^n = f \circ \cdots \circ f$.
2. Sea $[a,b] \subset]0,1[$ y h continua en $[a,b]$. Demostrar que h es un límite uniforme de $[a,b]$ de una sucesión de polinomios con coeficientes enteros.

Solución ▼ [004523]

Ejercicio 4389 Teoremas de Dini

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergiendo simplemente a una función continua f.

1. Se supone que cada función f_n es creciente. Demostrar que hay convergencia uniforme.
2. Se supone que en x fija la sucesión $(f_n(x))$ es creciente. Demostrar que hay convergencia uniforme.

[004524]

Ejercicio 4390 Teorema de Ascoli

Sea (f_n) una sucesión de funciones $[a,b] \to \mathbb{R}$ convergiendo simplemente a f. Se supone que todas las funciones f_n son k-Lipchitizianas (con el mismo k).

1. Sea $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ una subdivisión regular de $[a,b]$. Se denota $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)|$ tal que $0 \leqslant i \leqslant N\}$. Encuadrar $\|f_n - f\|_\infty$, con ayuda de M_n.
2. Demostrar que f_n converge uniformemente a f.

[004525]

Ejercicio 4391

Estudiar las sucesiones de funciones siguientes (convergencia simple, convergencia uniforme, convergencia localmente uniforme)

$$1)\ (^{**})\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad 2)\ (^{**})\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \qquad 3)\ (^{**})\ f_n(x) = n(1-x)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Solución ▼ [005726]

Ejercicio 4392 *** I

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \&;\text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x \geqslant n. \end{array}\right.$.

1. Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}^+$ a la función $f:\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
2. Usando la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calcular la integral de GAUSS $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$.

Solución ▼ [005727]

Ejercicio 4393 ** I

Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios que convergen uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función f. Demostrar que f es un polinomio.

Solución ▼ [005729]

Ejercicio 4394 **

Estudiar (convergencia simple, convergencia absoluta, convergencia uniforme, convergencia normal) serie de funciones de términos generales :

$$1.\ f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \text{ sobre } \mathbb{R}^+, \qquad 2.\ f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2} \text{ sobre } \mathbb{R}_+^* \qquad 3.\ f_n(x) = (-1)^n\frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Solución ▼ [005732]

Ejercicio 4395 ** I

Demostrar que para todo real $a > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^a}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

Solución ▼ [005733]

Ejercicio 4396 El caso muy especial de los polinomios

Sea d un entero natural. Demostrar que una sucesión de polinomios $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ de grado como máximo d converge localmente uniformemente en $\mathbb{C}$ si y solo si los $d+1$ sucesiones de sus coeficientes convergen, si y solo si, existe $d+1$ puntos c_i de $\mathbb{C}$ tales que las sucesiones $(P_n(c_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen. [007542]

Ejercicio 4397 Un ejemplo

1. Demostrar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{z+n}$ converge de forma compacta en $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$.
2. ¿Es normal la convergencia?

[007543]

168 222.02 Continuidad, derivabilidad

Ejercicio 4398 Función ortogonal a los polinomios

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua tal que para todo entero k se tiene $\int_a^b f(t)t^k\,dt=0$. ¿Qué se puede decir de f?
[004517]

Ejercicio 4399 Aproximación de f y f'

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Demostrar que existe una sucesión de polinomios (P_n) tal que P_n converge uniformemente a f y P_n' converge uniformemente a f'.
2. ¿Si f es $\mathscr{C}^\infty$, se puede encontrar una sucesión de polinomios (P_n) tal que para todo k la sucesión $(P_n^{(k)})$ converge uniformemente a $f^{(k)}$?

Solución ▼ [004518]

Ejercicio 4400 Límite de $f_n(x_n)$

Sean $f_n:D\to\mathbb{R}$ funciones continuas que convergen a una función continua f y (x_n) una sucesión de elementos de D convergiendo hacia $x\in D$.

1. Si las funciones f_n convergente uniformemente, demostrar que $f_n(x_n)\to f(x)$, cuando $n\to\infty$.
2. Dar un contraejemplo cuando solo hay convergencia simple.

[004519]

Ejercicio 4401 Composición y convergencia

Sea f_n convergiendo uniformemente hacia f, y g una función continua. Demostrar que $g\circ f_n\to g\circ f$ uniformemente. [004520]

Ejercicio 4402 $f_n\circ g_n$

Sea $f_n:[a,b]\to[c,d]$ y $g_n:[c,d]\to\mathbb{R}$ funciones continuas que convergen uniformemente a las funciones f y g. Demostrar que $g_n\circ f_n$ converge uniformemente a $g\circ f$.
Solución ▼ [004521]

Ejercicio 4403 Equicontinuidad

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en $D \subset \mathbb{R}$ convergente uniformemente a una función f. Demostrar que las funciones f_n son *equi-continuas* es decir :

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in]x-\delta, x+\delta[\cap D,\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

[004526]

Ejercicio 4404 Límite simple de funciones convexas

Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas convexas convergiendo simplemente a una función continua f. Demostrar que la convergencia es uniforme.

Solución ▼ [004527]

Ejercicio 4405 *** I Polinomios de BERNSTEIN. Teorema de WEIERSTRASS

Sea f una aplicación continua en $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Para n entero natural no nulo, se define el n-ésimo polinomio de BERNSTEIN asociado a f por

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. (a) Calcular $B_n(f)$, cuando f es la función $x \mapsto 1$, cuando f es la función $x \mapsto x$, cuando f es la función $x \mapsto x(x-1)$.
   (b) Deducir que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.
2. Separando los enteros k tales que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$ y los enteros k tales que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$ ($\alpha > 0$ dado), demostrar que la sucesión de polinomios $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente a f sobre $[0,1]$.
3. Demostrar el teorema de WEIERSTRASS : Sea f una aplicación continua en $[a,b]$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es un límite uniforme de $[a,b]$ de una sucesión de polinomios.

Solución ▼ [005728]

Ejercicio 4406 **

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{sen}(nx)}{n}$.

1. Demostrar que f es de clase C^1 sobre $]-1,1[$.
2. Calcular $f'(x)$ y deducir que $f(x) = \arctan\left(\frac{x \operatorname{sen} x}{1 - x\cos x}\right)$.

Solución ▼ [005730]

Ejercicio 4407 **

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Dominio de definición de f. Se estudia f sobre $]1,+\infty[$.
2. Continuidad de f y límites de f en 1 y $+\infty$.
3. Demostrar que f es de clase C^1 sobre $]1,+\infty[$ y elaborar su tabla de variaciones.

Solución ▼ [005731]

Ejercicio 4408 **

Para $n \in \mathbb{N}^*$, sea $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

1. Estudiar la convergencia simple y uniforme de la serie de término general f_n, luego la continuidad de la suma f.
2. Demostrar que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ utilizando la fórmula de STIRLING.

Solución ▼ [005734]

Ejercicio 4409 **

Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $t \in \mathbb{R}$, sea $f_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$. Estudio completo de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$: dominio de definición, paridad, límites, continuidad, derivabilidad (verificar que f no es derivable en 0), forma del gráfico.

Solución ▼ [005735]

169 222.03 Sucesiones y series de integrales

Ejercicio 4410 ** I

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 \text{ si } x > \sqrt{n} \end{cases}$.

1. Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplemente en $\mathbb{R}^+$ a la función $f: x \mapsto e^{-x^2}$.
2. Usando la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calcular la integral de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Solución ▼ [005738]

Ejercicio 4411 **

Demostrar que $\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ y $\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Solución ▼ [005739]

Ejercicio 4412 **

Demostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Solución ▼ [005740]

Ejercicio 4413 **

Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\, dx$ escribiendo esta integral como la suma de una serie.

Solución ▼ [005741]

Ejercicio 4414 **

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

Solución ▼ [005742]

Ejercicio 4415 **

1. Demostrar que para x real de $[0,1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Solución ▼ [005743]

Ejercicio 4416 *** I

Demostrar que para todo real x, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$

Solución ▼ [005744]

170 222.04 Sucesión y serie de matrices

Ejercicio 4417 **

Determinar $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a real estrictamente positivo dado).

Solución ▼ [005864]

Ejercicio 4418 ***

Sea $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$. Demostrar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes :
(1) $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$ (disco unidad abierto).
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$
(3) La serie de término general A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Solución ▼ [005865]

Ejercicio 4419 **

Sea $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$. Convergencia y suma de series de término general A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [005866]

Ejercicio 4420 ** I

Se provee $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ de una norma sub multiplicativa denotada $\|\ \|$. Sea A un elemento de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tal que $\|A\| < 1$. Demostrar que la serie de término general A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge entonces que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$.

Deducir que $\|(I-A)^{-1}-(I+A)\| \leqslant \dfrac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Solución ▼ [005867]

Ejercicio 4421 ** I

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, p \geqslant p_0$, $\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [005868]

Ejercicio 4422 ** I

Calcular $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Solución ▼ [005869]

Ejercicio 4423 **

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calcular $\ln(I_3+tA) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n$ precisando los valores de t, para los cuales la serie converge.

Solución ▼ [005870]

Ejercicio 4424 ** I Exponencial de un endomorfismo antisimétrico de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Sea $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Para $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$, se establece $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}$. Verificar que $f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Recíprocamente, sea $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. Demostrar que existe un vector $\overrightarrow{\omega}$ único tal que $f = f_{\overrightarrow{\omega}}$.
2. Sea $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Demostrar que $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ es una rotación cuyo eje vamos a determinar (cuando está definido) y el ángulo.

Solución ▼ [005871]

Ejercicio 4425 **

Para $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calcular $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p$.

Solución ▼ [005872]

Ejercicio 4426 **

Demostrar que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ es un polinomio en A.

Solución ▼ [005873]

171 222.99 Otro

Ejercicio 4427 Función definida por una serie

Se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arccos(\cos nx)}{n!}$.

1. Demostrar que f se define en $\mathbb{R}$, continua, par y 2π-periódica.
2. Calcular $f(0)$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución ▼ [004528]

Ejercicio 4428 Función definida por una serie (Central MP 2003)

Sea $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2}$ sujeto a la convergencia ($a \in \mathbb{R}$).

1. Dominio de definición de f.
2. Límite de $af(a)$, cuando $a \to 0$.
3. Límite de $f(a)$, cuando $a \to +\infty$.

Solución ▼ [004529]

Ejercicio 4429 Función ζ de Riemann

Sea $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Determinar el dominio de definición de ζ. Demostrar que ζ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en este dominio.
2. Demostrar que $\zeta(x) \to 1$, cuando $x \to +\infty$ (mayorar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ por comparación a una integral).
3. Demostrar que $\zeta(x) \to +\infty$, cuando $x \to 1^+$.

[004530]

Ejercicio 4430 Función ζ de Riemann y constante de Euler

Sea $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ y $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$. Demostrar que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ ya que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}$. [004531]

Ejercicio 4431 Función definida por una serie

1. Estudiar convergencia simple, uniforme, de la serie de funciones $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.
2. Calcular $f(x)$ cuando la serie converge (integrar término a término).

Solución ▼ [004532]

Ejercicio 4432 Función definida por una serie

1. Estudiar la convergencia de la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

2. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en su dominio de definición.
3. Trazar la curva representativa de f sobre $]1,+\infty[$.

[004533]

Ejercicio 4433 Función definida por una serie

Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}$.

1. Determinar el dominio, D definición de g y probar que g es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre D.
2. Demostrar que la cantidad : $xg(x)-g(x+1)$ es constante en D.
3. Trazar la curva representativa de g sobre $]0,+\infty[$.
4. Dar un equivalente de $g(x)$ en $+\infty$ y en 0^+.

Solución ▼ [004534]

Ejercicio 4434 Función definida por una serie

1. Establecer la convergencia simple sobre $\mathbb{R}$ de la serie de funciones $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{ch} nx}$.
2. Demostrar que la convergencia es uniforme en toda parte de la forma $\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]$, $\alpha > 0$. ¿Qué se puede deducir para f ?

[004535]

Ejercicio 4435 Función definida por una serie

Sea $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ y $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Demostrar que la serie $f(x)$ converge simplemente en $\mathbb{R}^+$.
2. Mayorar apropiadamente el resto de la serie, y demostrar que existe una convergencia uniforme en $\mathbb{R}^+$.
3. ¿Hay convergencia normal ?

Solución ▼ [004536]

Ejercicio 4436 Función definida por una serie

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. Establecer la existencia y continuidad de f sobre $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calcular $f(x+1)$ en función de $f(x)$.
3. Dibujar la curva de f.

Solución ▼ [004537]

Ejercicio 4437 Función definida por una serie

1. Estudiar convergencia simple, uniforme, de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\arctan(x+n)-\arctan(n)\big)$.

2. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$.
3. Determinar una relación simple entre $f(x)$ y $f(x+1)$.
4. Encontrar $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Solución ▼ [004538]

Ejercicio 4438 Conversión serie-integral

Demostrar, para $x > 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} \, dt$.

Solución ▼ [004539]

Ejercicio 4439 Función Γ

Sea $f_n(x) = \frac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\cdots(1+x/n)}$.

1. Estudiar la convergencia simple de las funciones f_n.
2. Se denota $f = \lim f_n$. Calcular $f(x)$ en función de $f(x-1)$ cuando estas dos cantidades existen.
3. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en su dominio de definición. (Se calcula $f_n'(x)/f_n(x)$).

Solución ▼ [004540]

Ejercicio 4440 Ensi Chimie P' 93

Estudiar la convergencia de la sucesión de funciones definidas por $f_n(x) = \frac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \operatorname{sen} t \, dt$.

Solución ▼ [004541]

Ejercicio 4441 Convergencia de $f^{(n)}$

Sea $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Se define la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ por $f_n = f^{(n)}$ (derivada n-ésima). Se supone que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformemente a φ. ¿Qué se puede decir de φ ? [004542]

Ejercicio 4442 Ensi PC 1999

Sea $f_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1. Estudiar la convergencia de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. Demostrar la convergencia de la serie de término general $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx$.
3. Deducir $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en forma de integral.

Solución ▼ [004543]

Ejercicio 4443 Desarrollo de $\coth(x)$

1. Descomponer en elementos simples en $\mathbb{C}$ la fracción racional $F_n(X) = \frac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.
2. Deducir para $x \in \mathbb{R}^*$, $\coth x = \frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^{-2x}-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.

3. Deducir el valor de $\zeta(2)$.

Solución ▼ [004544]

Ejercicio 4444 $\sum \operatorname{sen}(n)/n$

Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in [-1,1]$ se establece $u_n(x) = \dfrac{x^n \operatorname{sen}(nx)}{n}$.

1. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente en $[-1,1]$ a una función continua, f.
2. Justificar la derivabilidad de f sobre $]-1,1[$ y calcular $f'(x)$. Deducir $f(x)$.
3. Deducir el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$.

Solución ▼ [004545]

Ejercicio 4445 Funciones ζ y η

Para $x > 1$ se establece $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ y para $x > 0 : \eta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Establecer para $x > 1 : \eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)$. Deducir $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$, para $x \to 1^+$.
2. Demostrar que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$. Se observa que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^x}$.
3. Deducir el valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Solución ▼ [004546]

Ejercicio 4446 Central MP 2000

Para $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $a_n(y) = \dfrac{\cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

1. Determinar el radio de convergencia de la serie entera $\sum a_n(y)x^n$.
2. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\}$ y $F(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(y)x^n$. Demostrar que F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ existen en todos los puntos de D.

[004547]

Ejercicio 4447 Serie lacunar

Sea (p_n) una sucesión de números naturales, estrictamente creciente y tal que $p_n/n \to \infty$, cuando $n \to \infty$. Se define para $x \in]-1,1[: f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{p_n}$. Demostrar que $(1-x)f(x) \to 0$, cuando $x \to 1^-$.

Solución ▼ [004548]

Ejercicio 4448 Funciones inversas (Pugin, MP*-2001)

Sea (f_n) una sucesión de funciones $[a,b] \to [c,d]$ continuas, biyectivos, estrictamente creciente, convergiendo simplemente a una función $f : [a,b] \to [c,d]$ también continua, biyectiva estrictamente creciente.

1. Demostrar que hay convergencia uniforme (segundo teorema de Dini, considerar una subdivisión de $[a,b]$).

2. Demostrar que las funciones inversas f_n^{-1} convergen simplemente a una función g y que $g = f^{-1}$.
3. Demostrar que (f_n^{-1}) converge uniformemente a f^{-1}.

Solución ▼ [004549]

Ejercicio 4449 Mines MP 2001

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en el compacto K, a valores reales y convergen uniformemente en K a la función f. ¿Se tiene $\sup f_n \to \sup f$, cuando $n \to \infty$?

Solución ▼ [004550]

Ejercicio 4450 Mines MP 2001

Para $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ se establece $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ y $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ sujeto a la convergencia.

1. Estudiar convergencia simple, normal, uniforme de la serie $\sum f_n$ sobre $\mathbb{R}^+$.
2. Demostrar que S es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Demostrar que S no es derivable a la derecha en 0.
4. Demostrar que $x^k S(x)$ tiende a 0 en $+\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución ▼ [004551]

Ejercicio 4451 Central MP 2001

Convergencia y límite en 1^- de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{1+x^n}$.

Solución ▼ [004552]

Ejercicio 4452 Central MP 2001

Sea $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1-t^n}$.

1. ¿Para qué valores de t, S está definida? ¿Es continua?
2. Demostrar que en un vecindario de 1^- se tiene $S(t) = -\frac{\ln(1-t)}{1-t} + O\left(\frac{1}{1-t}\right)$. Se puede desarrollar $\ln(1-t)$ en la serie entera.

Solución ▼ [004553]

Ejercicio 4453 Central MP 2002

Se establece $\phi(x) = d(x,\mathbb{Z}) = \inf\{|x-n| \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Demostrar que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$ se definida y continua.
2. Demostrar que ϕ es lipschitziana. ¿Qué se puede deducir de f?
3. Demostrar que f no es derivable en ningún punto.

Solución ▼ [004554]

Ejercicio 4454 ENS Lyon-Cachan MP 2002

Sea $(a_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión compleja tal que la serie $\sum a_n$ converge. Se define $f(h)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sen}^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h\neq 0$ y $f(0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Estudiar el dominio de definición y la continuidad de f.

Solución ▼ [004555]

Ejercicio 4455 Central MP 2002

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y 2π-periódica. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se establece $F_n(x)=\frac{1}{n}\int_0^n f(x+t)f(t)\,dt$.

1. Demostrar que la sucesión (F_n) converge a una función F que se deben especificar.
2. ¿Naturaleza de la convergencia ?
3. Demostrar $\|F\|_\infty=|F(0)|$.

Solución ▼ [004556]

Ejercicio 4456 Aproximación por fracciones racionales

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, teniendo el mismo límite finito ℓ en $\pm\infty$. Demostrar que f es un límite uniforme de $\mathbb{R}$ de fracciones racionales.

Solución ▼ [004557]

Ejercicio 4457 Función definida por una serie

Se establece para $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+x^2}}$.

1. Determinar $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
2. Encontrar un equivalente de $f(x)$ en $+\infty$.

Solución ▼ [004558]

Ejercicio 4458 Búsqueda de equivalentes, Central MP 2006

Determinar un equivalente en un vecindario de 0 de $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ y $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Solución ▼ [004559]

Ejercicio 4459 Estudio de $\sum t^{p-1}\operatorname{sen}(px)$, para $x\in]0,\pi[$, TPE MP 2005

1. Calcular $S_n(t)=\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\operatorname{sen}(px)$, luego $S(t)=\lim_{n\to\infty} S_n(t)$.
2. Calcular $\int_0^1 S_n(t)\,dt$ y $\int_0^1 S(t)\,dt$.
3. Deducir que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ converge y dar su valor.

Solución ▼ [004560]

Ejercicio 4460 Fracción racional de la mejor aproximación (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Se denota R el conjunto de fracciones racionales continuas en $[0,1]$ y para $m,n\in\mathbb{N}$:
$R_{m,n}=\{f\in R$ tal que $\exists\ P,Q\in\mathbb{R}[X]$ tal que $\operatorname{grad}(P)\leqslant m,\ \operatorname{grad}(Q)\leqslant n$ y $f=P/Q\}$.

1. ¿R es un espacio vectorial ? Si es sí encontrar una base. La misma pregunta para $R_{m,n}$.
2. Sean m,n fijos. Se denota $d=\inf\{\|g-f\|,\ f\in R_{m,n}\}$, donde g designa una función continua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y $\|h\|=\sup\{|h(x)|,\ x\in[0,1]\}$. Demostrar que existe $r_0\in R_{m,n}$ tal que $\|g-r_0\|=d$.

Solución ▼ [004561]

Ejercicio 4461 Derivación múltiple, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Sea (f_n) una sucesión de funciones de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $[a,b]$ tal que (f_n') converge uniformemente a g y existe x_1 tal que $(f_n(x_1))$ converge. Demostrar que (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ hacia f tal que $f'=g$.
2. Sea (f_n) una sucesión de funciones de clase $\mathscr{C}^p$ sobre $[a,b]$ tal que $(f_n^{(p)})$ converge uniformemente a g y existe $x_1,\dots,x_p$ distintos tales que $(f_n(x_i))$ converge. Demostrar que (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ hacia f tal que $f^{(p)}=g$.

Solución ▼ [004562]

Ejercicio 4462 Exponencial, Polytechnique MP* 2006

Sean $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $\exp(A)-\exp(B)=\displaystyle\int_0^1\exp(sA)(A-B)\exp((1-s)B)\,ds$.

Solución ▼ [004563]

Ejercicio 4463 **

Para $x>0$, se establece $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Encontrar un equivalente simple de f en 0 a la derecha.

Solución ▼ [005736]

Ejercicio 4464 ***

Para $x\in]-1,1[$, se establece $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}$. Encontrar un equivalente simple de f en 1.

Solución ▼ [005737]

172 223.01 Límite

Ejercicio 4465

Estudiar la existencia de los siguientes límites :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq0}}\frac{x^2y}{x+y}$.
2. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq0}}\frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$.
3. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$.
4. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}}\frac{x^4y}{x^2-y^2}$.
5. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ (x,y,z)\neq(0,0,0)}}\frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [001784]

Ejercicio 4466

Sea $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0 \tag{1}$$

y que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Indicación ▼ Solución ▼ [001785]

Ejercicio 4467

Sea

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Demostrar que los dos límites iterados $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ y $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ no existen, y que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe y es igual a 0. [001786]

Ejercicio 4468

Determinar los límites donde existan :

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$. 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$. 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$. 6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$. 7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos xy}{y^2}$. 8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y-\cosh x}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [001787]

Ejercicio 4469

Para cada una de las funciones f siguientes, estudiar la existencia de un límite en $(0,0,0)$:

1. $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x+y+z}$; 2. $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [001788]

Ejercicio 4470

Estudiar la continuidad de las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ por

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

[001789]

Ejercicio 4471 parcial 1999

1. Estudiar la continuidad de la función $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Sea $a > 0$ fijado. Estudiar la continuidad de la función $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a\,|y|^a}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Estudiar la continuidad de la función $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_3(x,y) = \begin{cases} y-x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leqslant x^2. \end{cases}$$

4. Se define una función continua del abierto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ en $\mathbb{R}$ por

$$f_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y}\cos\frac{1}{z}.$$

Estudiar la posibilidad de prolongar f_4 en una función continua en $\mathbb{R}^3$.

[001790]

Ejercicio 4472

Prolongar por continuidad la función $g : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$. [001791]

Ejercicio 4473

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,.)$ y $f(.,y)$ son continuas. Demostrar que existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones continuas en $\mathbb{R}^2$ tales que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to\infty} g_n(x,y) = f(x,y).$$

[001792]

Ejercicio 4474

Para cada una de las sucesiones $(u_n)_n$ en el plano $\mathbb{R}^2$ abajo, colocar algunos de los puntos u_n en el plano y describir cualitativamente el comportamiento de la sucesión cuando n tiende a infinito. Estudiar, luego la convergencia de cada una de las sucesiones y determinar el límite si es necesario.

1. $u_n = (\frac{4n^2}{n^2+4n+3}, \cos\frac{1}{n})$, 2. $u_n = (\frac{n^2\arctan n}{n^2+1}, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n})))$, 3. $u_n = (\sinh n, \frac{\ln n}{n})$,
4. $u_n = (a^n\cos(n\alpha), a^n\operatorname{sen}(n\alpha))$, en función de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002621]

Ejercicio 4475

Se considera una sucesión $(u_n)_n$, de término general $u_n \in \mathbb{R}^2$.

1. Dar la definición de convergencia para tal sucesión. (¡Esto es una pregunta de curso !)
2. Sea la sucesión de término general $u_n = (\operatorname{th}(n), \cos(n)\exp(-n^2))$. Estudiar su convergencia.

[002649]

Ejercicio 4476 **T

Estudiar la existencia y el valor eventual de un límite en $(0,0)$ de las siguientes funciones :

1. $\dfrac{xy}{x+y}$. 2. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. 3. $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. 4. $\dfrac{1+x^2+y^2}{y}\operatorname{sen} y$. 5. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. 6. $\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Solución ▼ [005553]

Ejercicio 4477 ** I

Estudiar la existencia y el valor eventual de los siguientes límites :

1. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.
2. $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.
3. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$.
4. $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$.
5. $\dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$.
6. $\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$.
7. $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$.
8. $\dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$.

Solución ▼ [005887]

---

173 223.02 Continuidad

Ejercicio 4478

Encontrar las funciones f continua en $\mathbb{R}^2$ tales que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=f(x+y,x-y)$. [001793]

Ejercicio 4479

Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente función :

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
5. $f(x,y)=\begin{cases}y^2\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
6. $f(x,y)=\begin{cases}xe^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$

[001794]

Ejercicio 4480

Se define la función f sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x);\ x \in \mathbb{R}\}$ por $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y}$. ¿Se puede extender f en una función continua en $\mathbb{R}^2$? [001795]

Ejercicio 4481

Estudiar la continuidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3|y|^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

[001796]

Ejercicio 4482

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2y)^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si no.} \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si no,} \end{cases}$
   definida en $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

[001797]

Ejercicio 4483

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ x & \text{si } x = y. \end{cases}$

1. Calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.
2. Para todo $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, calcular $D_vf(1,-2)$. ¿Para qué valores de $\theta \in [0,2\pi[$, $D_vf(1,-2) = 0$?
3. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.
4. Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
5. Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y determinarlos.
6. Demostrar que la derivada direccional $D_vf(0,0)$ existe para $v = (1,1)$, y determinarla. Se constata que la igualdad $D_vf(0,0) = \partial_xf(0,0) + \partial_yf(0,0)$ no se satisface. Explicar por qué esto no contradice ningún teorema del curso.

[002650]

Ejercicio 4484 $***$

Se establece $f_{x,y} : \begin{array}{l}[-1,1] \to \mathbb{R}, \\ t \mapsto xt^2 + yt\end{array}$, luego $F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Estudiar la continuidad de F sobre $\mathbb{R}^2$.

Solución ▼ [005554]

Ejercicio 4485 $**$

Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado y $B = \{x \in E/ \ \|x\| < 1\}$. Demostrar que $f : \begin{array}{l}E \to B \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}\end{array}$ es un homeomorfismo.

Solución ▼ [005900]

Ejercicio 4486 $**$

$E = \mathbb{R}^n$ es provisto de su estructura euclidiana usual. Demostrar que $f : \begin{array}{l}E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_2\end{array}$ es diferenciable en $E \setminus \{0\}$ y precisar df. Demostrar que f no es diferenciable en 0.

Solución ▼ [005901]

174 223.03 Diferenciabilidad

Ejercicio 4487

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \begin{cases} (x,y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x,y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x,y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| . \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f, la existencia de derivadas parciales y su continuidad. [001798]

Ejercicio 4488

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \begin{cases} (x,y) \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) \mapsto 0. \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f y la existencia de derivadas parciales. ¿La función f es C^1 ? [001799]

Ejercicio 4489

Sea la función $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0, \end{cases}$

Estudiar la continuidad de f. Demostrar f es de clase C^1.

Indicación ▼ Solución ▼ [001800]

Ejercicio 4490

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable. Calcular las derivadas parciales de :

$$g(x,y)=f(x+y),\qquad h(x,y)=f(x^2+y^2),\qquad k(x,y)=f(xy).$$

Indicación ▼ Solución ▼ [001801]

Ejercicio 4491

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f:\begin{cases}(x,y)\mapsto \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0)\mapsto 0.\end{cases}$

Demostrar que f admite una derivada en $(0,0)$ siguiendo todo vector, pero no admite desarrollo limitado de orden 1 en $(0,0)$. [001802]

Ejercicio 4492

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=\begin{cases}x \text{ si } |x|>|y|\\ y \text{ si } |x|<|y|\\ 0 \text{ si } |x|=|y|\,.\end{cases}$

Estudiar la continuidad de f, la existencia de derivadas parciales y su continuidad.

Indicación ▼ Solución ▼ [001803]

Ejercicio 4493

Sea $a\in\mathbb{R}^2$ fijo ; ¿la aplicación $x\to\langle x,a\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usual en $\mathbb{R}$ es continua ?, ¿admite derivadas parciales ?, ¿son estas continuas ? [001804]

Ejercicio 4494

Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ por : $f(x,y)=\begin{cases}x^2 \text{ si } |x|\leqslant y\\ y^2 \text{ si no.}\end{cases}$

Estudiar la continuidad de f y la existencia de derivadas parciales. [001805]

Ejercicio 4495

Demostrar que una norma N sobre $\mathbb{R}^2$ no puede tener derivadas parciales que existan y que sean continuas en 0. [001806]

Ejercicio 4496

Sean $\alpha>0$ y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $\begin{cases}f(x,y)=\dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ f(0,0)=0.\end{cases}$

1. (a) Demostrar que $\forall\,(x,y)\neq(0,0),\ \ |f(x,y)|\leqslant\left(x^2+y^4\right)^{\frac{2\alpha-3}{4}}$.

   (b) Calcular $\lim\limits_{\substack{y\to0\\ y\neq0}}\left|f(y^2,y)\right|$.

   (c) Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

2. (a) Demostrar que $\forall\,(x,y) \neq (0,0),\ \ \dfrac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |x|^{\alpha-2}$.

   (b) Calcular $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{|f(x,x)|}{\sqrt{2}|x|}$.

   (c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

[001807]

Ejercicio 4497

1. Calcular la derivada de la función $F(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ en el punto $P(1,0)$ a lo largo de la bisectriz del primer cuadrante.
2. Calcular la derivada de la función $F(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$ en el punto $P(1,2,1)$ en una dirección que forman ángulos iguales con los tres ejes de coordenadas.
3. Calcular la derivada de la función $F(x,y,z) = xy + yz + zx$ en el punto $M(2,1,3)$ en la dirección que une este punto con el punto $N(5,5,15)$.

[001808]

Ejercicio 4498

Estudiar la continuidad, así como la existencia y continuidad de las primeras derivadas parciales, de las siguientes funciones :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x\ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$

[001809]

Ejercicio 4499

Se define la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existen en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ y que f es continua pero no diferenciable en $(0,0)$. [001810]

Ejercicio 4500

Sea $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } x > y. \end{cases}$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f. [001811]

Ejercicio 4501

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Demostrar que f es continua en $(0,0)$ y admite derivadas parciales en todas las direcciones, pero no es diferenciable. [001812]

Ejercicio 4502

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

Demostrar que la función f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$, pero que $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ no son continuas en ciertos puntos de $\mathbb{R}^2$. [001813]

Ejercicio 4503

Estudiar la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{3/2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$ [001814]

Ejercicio 4504

Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$ funciones definidas por

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$
2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$ [001815]

Ejercicio 4505

Calcular las derivadas parciales (de orden uno) de las siguientes funciones en un punto arbitrario del dominio de definición.

1. $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{xy}$;
2. $g(x,y,z)=x^2y^3\sqrt{z}$
3. $h(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. [001816]

Ejercicio 4506

Calcular las derivadas parciales (de orden uno) de la función $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$ en $(2,1)$. [001817]

Ejercicio 4507

Se define la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$

Demostrar que $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ y $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ existen en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ aunque f no es continua en $(0,0)$. [001818]

Ejercicio 4508

1. Calcular la derivada de la función $F(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ en el punto $P(1,2)$ en una dirección que forma con el eje Ox un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.
2. Calcular la derivada de la función $F(x,y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ en el punto $P(1,2)$ en la dirección que une este punto con el punto $M(4,6)$.
3. Calcular la derivada de la función $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $P(1,1)$ a lo largo de la bisectriz del primer cuadrante.

[001819]

Ejercicio 4509

Calcular los diferenciales de las siguientes funciones en un punto arbitrario del dominio de definición :

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$;
2. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

[001820]

Ejercicio 4510

Calcular $df(1,1)$, si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$. [001821]

Ejercicio 4511

Calcular la derivada de la función $F(x,y,z) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z)$ en el origen en una dirección que forma con los ejes de coordenadas x, y, z los ángulos α, β, γ. [001822]

Ejercicio 4512

Encontrar la ecuación del plano tangente para cada superficie a continuación, en el punto (x_0, y_0, z_0) dado :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1,3,3)$;
2. $z = \operatorname{sen}(\pi xy)\exp(2x^2y - 1), \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002628]

Ejercicio 4513

Se le pide a un estudiante que encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = x^4 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (2,3,7)$. Su respuesta es

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Explicar, sin cálculo, por qué esto de ninguna manera puede ser la respuesta correcta.
2. ¿Cuál es el error cometido por el estudiante ?
3. Dar la respuesta correcta.

Indicación ▼ Solución ▼ [002629]

Ejercicio 4514

Encontrar los puntos en el paraboloide $z = 4x^2 + y^2$, donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + z = 6$. Misma pregunta con el plano $3x + 5y - 2z = 3$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002630]

Ejercicio 4515

Sea C el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ y C^+ el semi-cono donde $z \geqslant 0$. Para cualquier punto M_0 de $C \setminus \{(0,0,0)\}$, de coordenadas $(x_0, y_0, \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, se denota $\mathscr{P}_{M_0}$ el plano tangente al cono C en M_0.

1. Determinar un vector normal y la ecuación del plano $\mathscr{P}_{M_0}$.
2. Demostrar que la intersección del cono C, con el plano vertical de ecuación $y = ax$, donde $a \in \mathbb{R}$ consta de dos rectas $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ y que la intersección del semicono C^+, con este plano vertical consta de dos semirrectas $\mathscr{D}_1^+$ y $\mathscr{D}_2^+$.
3. Demostrar que el plano tangente al cono C es el mismo en todos los puntos $\mathscr{D}_1 \setminus \{(0,0,0)\}$ (respectivamente en todo punto de $\mathscr{D}_2 \setminus \{(0,0,0)\}$).

Indicación ▼ Solución ▼ [002631]

Ejercicio 4516

Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^2 - 2y^3$.

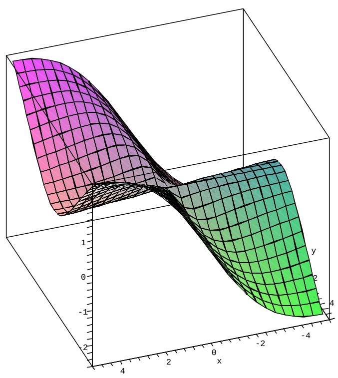
1. Determinar la ecuación del plano tangente $\mathscr{P}_{M_0}$ al gráfico G_f de f en un punto cualquiera M_0 de G_f.
2. Para el punto M_0 de coordenadas $(2,1,2)$, determinar todos los puntos M tal que el plano tangente en M sea paralelo a $\mathscr{P}_{M_0}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002632]

Ejercicio 4517

Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Demostrar que f es continua y que, cualquiera que sea $v \in \mathbb{R}^2$, la derivada direccional $D_v f(x,y)$ existe en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pero que f no es diferenciable en $(0,0)$.
2. ¿La derivada direccional $D_v f(0,0)$ es lineal en v? ¿Las rectas pertenecientes a la familia de rectas que pasan por el origen y de vectores directores $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$, forman un plano? Explicar cómo se puede observar la respuesta en la figura.
3. El vector v es fijo, ¿qué se puede decir de la continuidad de $D_v f(x,y)$ en (x,y)?



Indicación ▼ Solución ▼ [002633]

Ejercicio 4518

Utilizar una aproximación afín bien elegida para calcular un valor aproximado de los siguientes números :

$$\exp[\operatorname{sen}(3.16)\cos(0.02))], \quad \arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)].$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002634]

Ejercicio 4519

1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $a \in D$. Dar la definición de "f es diferenciable en a".
2. Demostrar que, si f es diferenciable en a, entonces todas sus derivadas parciales existen. Expresar el vínculo entre el diferencial df_a de f en a y las derivadas parciales de f en a.
3. Decir si las siguientes declaraciones, son verdaderos o falsos. Justificar brevemente la respuesta.

   (A) Si f es diferenciable en a, entonces es continua.

   (B) Si todas las derivadas parciales de f en a existen, entonces f es diferenciable en a.

[002651]

Ejercicio 4520

Utilizar una aproximación afín bien elegida para calcular un valor aproximado de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

Ejercicio 4521 ***T

Determinar la clase de f sobre $\mathbb{R}^2$, donde $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$

Solución ▼ [005555]

Ejercicio 4522 *** I

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se establece $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Demostrar que f es de clase C^1 (al menos) sobre $\mathbb{R}^2$.

Solución ▼ [005888]

Ejercicio 4523 ** I

Extremos de las siguientes funciones :

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2. $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Solución ▼ [005894]

Ejercicio 4524 *** I

Sea $f : \begin{array}{l} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{array}$. Demostrar que f es diferenciable en todo punto de $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ y determinar su diferencial.

Solución ▼ [005895]

Ejercicio 4525 *

Determinar $\max\{|\operatorname{sen} z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$.

Solución ▼ [005896]

Ejercicio 4526 **

Determinar el diferencial en todo punto de $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \cdot y \end{array}$ y $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \wedge y. \end{array}$

Solución ▼ [005899]

175 223.04 Derivada parcial

Ejercicio 4527

Determinar, para cada de las siguientes funciones, el dominio de la definición D_f. Para cada una de las funciones, calcular las derivadas parciales en cada punto del dominio de definición cuando existen :

1. $f(x,y) = x^2 \exp(xy)$,
2. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$,
3. $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x,y,z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002622]

Ejercicio 4528

Sea f la función en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calcular sus derivadas parciales.
2. Sea $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calcular $D_v f(0,0)$. ¿Para cuál(es) valor(es) de θ esta derivada direccional de f es maximal/minimal ? ¿Qué significa esto ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002623]

Ejercicio 4529

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$, para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 1$.

1. La función f ¿es continua en $(0,0)$?
2. Determinar las derivadas parciales de f en un punto cualquiera distinto del origen.
3. ¿La función f admite derivadas parciales para respecto a x, a y en $(0,0)$?

Indicación ▼ Solución ▼ [002624]

Ejercicio 4530

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}, \text{ para } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$

1. ¿La función f es continua en $(0,0)$? Justificar la respuesta.
2. ¿La función f admite derivadas parciales para respecto a x, a y en $(0,0)$? Dé el(los) valor(es) cuando proceda y justificar la respuesta.
3. ¿La función f es diferenciable en $(0,0)$? Justificar la respuesta.
4. Determinar las derivadas parciales de f en un punto $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
5. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1,2)$.
6. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Determinar la matriz jacobiana de F en el punto $(1,1)$. ¿La función F admite una conversación local en vecindario del punto $(2,2)$?

Indicación ▼ Solución ▼ [002625]

Ejercicio 4531

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Demostrar que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002626]

Ejercicio 4532

Se consideran las funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = (\operatorname{sen}(xy), y\cos x, xy\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)), \qquad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calcular explícitamente $g \circ f$.
2. Utilizando la expresión que se encuentra en (1.), calcular las derivadas parciales de $g \circ f$.
3. Determinar las matrices jacobianas $J_f(x,y)$ y $J_g(u,v,w)$ de f y de g.
4. Encontrar el resultado bajo (2.) usando un producto apropiado de matrices jacobianas.

Indicación ▼ Solución ▼ [002627]

Ejercicio 4533 Cálculo de derivadas parciales

Calcular las derivadas parciales de las funciones :

1. $f(x,y,z) = (x+z)^{(y^z)}$ 2. $f(x,y) = \min(x,y^2)$ 3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$ [004136]

Ejercicio 4534 DL de orden 1

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que $f(0,1,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 3$. ¿Se puede determinar $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)}$?

Solución ▼ [004137]

Ejercicio 4535 Simplificación

Sea $f(x,y) = \text{arcsen}\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ y $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

1. Verificar que f se define en $\mathbb{R}^2$.
2. Calcular las derivadas parciales primeras de f y de g.
3. Simplificar f, con ayuda de g.

Solución ▼ [004138]

Ejercicio 4536 Suma de los ángulos de un triángulo

¿Sobre cuál parte D de $\mathbb{R}^3$ la función

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

está definida ? Demostrar que f es constante cuando x, y, z son estrictamente positivos. [004139]

Ejercicio 4537 Integral función de parámetros

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^1 f(t, x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n)\, dt$.
Demostrar que g es de clase $\mathscr{C}^1$ y calcular sus derivadas parciales. [004140]

Ejercicio 4538 Segundas derivadas compuestas

Sean $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathscr{C}^2$ ld por la relación :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calcular las derivadas parciales primera y segunda de f en función de las de g.

Solución ▼ [004141]

Ejercicio 4539 Los polinomios complejos son armónicos

Sean $P \in \mathbb{C}[X]$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto P(x+iy)$. Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. [004142]

Ejercicio 4540 Laplaciano en polares

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$, y $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$. Se define $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplaciano de f).

1. Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en función de las derivadas parciales de f.
2. Expresar Δf en función de las derivadas de g.

Solución ▼ [004143]

Ejercicio 4541 Laplaciano en esféricas

Sean $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$, con $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ z = r\operatorname{sen}\varphi, \end{cases}$ y $F = f\circ\Phi$.

Verificar que :

$$(\Delta f)\circ\Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - \frac{\tan\varphi}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}.$$

Para este ejercicio, es aconsejable tomar la hoja longitudinalmente, e ir con calma, comprobando sus cálculos. [004144]

Ejercicio 4542 Laplaciano en dimensión n

Sea f una aplicación de clase $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ en $\mathbb{R}$. Se define una aplicación F de $\mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ en $\mathbb{R}$ por : $F(x_1,\dots,x_n) = f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$. Calcular el laplaciano de F en función de f.

Solución ▼ [004145]

Ejercicio 4543 Contraejemplo del teorema de Schwarz

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función π-periódica de clase $\mathscr{C}^2$. Se define para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $g(x,y) = r^2 f(\theta)$, con $(x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en función de f. Deducir los valores de $\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)$. Construir un ejemplo preciso (dar $g(x,y)$ en función de x e y) para los cuales estas dos derivadas son distintas.

Solución ▼ [004146]

Ejercicio 4544 Contraejemplo del teorema de Schwarz (Central MP 2003)

Sea $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq 0$ y $f(0,0)=0$.

1. Estudiar la continuidad de f y sus derivadas parciales primeras en $\mathbb{R}^2$.
2. Demostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Solución ▼ [004147]

Ejercicio 4545 Derivadas de orden k distintas

Encontrar $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^k$ tal que los $k+1$ derivadas de orden k en $(0,0)$ sean distintos. [004148]

Ejercicio 4546 Las isometrías conservan el laplaciano

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría para la norma $\| \ \|_2$.

1. Demostrar que la matriz jacobiana de φ es constante, igual a la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ de la parte lineal de φ.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Demostrar que $(\Delta f)\circ\varphi = \Delta(f\circ\varphi)$.

[004149]

Ejercicio 4547 Cambio de variables afín

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación afín.

1. Demostrar que la matriz jacobiana, J, de φ es constante.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Para $A \in \mathbb{R}^2$, se denota $H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix}$ (*matriz Hessiana de f*). Demostrar que : $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ H_{f\circ\varphi}(A) = {}^tJH_f(\varphi(A))J$.

[004150]

Ejercicio 4548 Fórmula de Leibniz

Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^n$. Calcular $\dfrac{\partial^n(fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ en función de las derivadas de f y g.

Solución ▼ [004151]

Ejercicio 4549 Integración de formas diferenciales

Determinar las funciones $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando :

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2+x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+y}{x}. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-y}{(x+y+1)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$

Solución ▼ [004152]

Ejercicio 4550 Formas diferenciales exactas

Encontrar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tales que la forma diferencial $\omega = f(y)(xe^y\,dx + y\,dy)$ sea exacta. Determinar entonces sus primitivas.

Solución ▼ [004153]

Ejercicio 4551

¿Cuáles son las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tales que la forma diferencial $\omega = f(x,y)\,d(x^2+y^2)$ sea exacta ?

Solución ▼ [004154]

Ejercicio 4552

Encontrar las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tales que la forma diferencial $\omega = 2xz\,dx + f(y)g(z)\,dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)dz$ sea exacta. Determinar entonces sus primitivas.

Solución ▼ [004155]

Ejercicio 4553 Ecuación asociada a una diferencial exacta

1. Determinar las funciones $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ verificando : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\ln x + y - 1}{x^2 y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\ln x}{xy^2}. \end{cases}$

2. Aplicación : Resolver la ecuación diferencial $(x\ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Solución ▼ [004156]

Ejercicio 4554 Ecuación diferencial parcial

Encontrar las funciones polinomiales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificando $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$. [004157]

Ejercicio 4555 DL de orden 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Demostrar que :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(a,b) + o(h^2+k^2).$$

[004158]

Ejercicio 4556 Ajuste lineal

Problema de ajuste lineal : Dados n pares reales (x_i, y_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, estamos buscando una recta D de ecuación $y = ax + b$ tal que $\mu(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ sea minimal. Se denota $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, y se supone $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$.

1. Resolver el problema.
2. Interpretar la relación $\overline{x^2} \neq \bar{x}^2$ usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

[004159]

Ejercicio 4557 Jacobiano de funciones simétricas

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, donde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son las funciones simétricas elementales de $x_1, \dots, x_n$. Calcular el determinante jacobiano de f.

Solución ▼ [004160]

Ejercicio 4558 Cambio de Variables

Se establece $f(x,y) = (x+y, xy) = (u,v)$. Demostrar que f induce un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de U sobre V, donde U y V son abiertos de $\mathbb{R}^2$ a precisar. Determinar la expresión de f^{-1} y verificar que el producto de las matrices jacobianas es igual a I. [004161]

Ejercicio 4559 Cambio de Variables

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{2z}, \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2z}, x - y)$. Demostrar que f induce un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en un abierto a especificar.

Solución ▼ [004162]

Ejercicio 4560 Desigualdad de Taylor–Lagrange

Sea U un abierto convexo de $\mathbb{R}^p$ y $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ cuyas segundas derivadas están acotadas :

$$\forall i,j,\ \forall A \in U,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leqslant M.$$

1. Demostrar que : $\forall A,B \in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_A(\overrightarrow{AB})\right| \leqslant \frac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}$.
2. Demostrar que : $\forall A,B \in U,\ \left|f(B)-f(A)-df_C(\overrightarrow{AB})\right| \leqslant \frac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$, donde C es el punto medio de $[A,B]$.

[004163]

Ejercicio 4561 Aplicación del teorema de la función implícita

Se considera la curva de ecuación $e^{x-y} = 1+2x+y$. Dar la tangente a esta curva y la posición relativa a la tangente en el punto $(0,0)$.

Solución ▼ [004164]

Ejercicio 4562 Teorema de la función implícita

1. Demostrar que la ecuación $x^3+y^3-3xy=1$ define en un vecindario de 0 una función implícita $y=\varphi(x)$ tal que $\varphi(0)=1$.
2. Dar el DL de φ en 0 de orden 3.

Solución ▼ [004165]

Ejercicio 4563 Teorema de la función implícita, Ensi P 91

Demostrar que la igualdad $2e^{x+y}+y-x=0$ define $y=\varphi(x)$ en un vecindario de $(1,-1)$. Calcular $\varphi'(1)$ y $\varphi''(1)$.

Solución ▼ [004166]

Ejercicio 4564 Ecuación implícita $x\ln x = y\ln y$

Sea $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$ $(x,y>0)$. Para $k\in\mathbb{R}$, se considera la curva $\mathscr{C}_k$ de ecuación $f(x,y)=k$.

1. Según la posición de $(a,b)\in\mathscr{C}_k$, especificar la orientación de la tangente a $\mathscr{C}_k$ en (a,b).
2. Hacer la tabla de variaciones de $\phi(t) = t\ln t$.
3. Dibujar $\mathscr{C}_0$. (Estudiar en particular los puntos $(0,1),(1,0)$ y $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ usando DL)
4. Indicar el aspecto general de las curvas $\mathscr{C}_k$ según el signo de k.

[004167]

Ejercicio 4565 Función implícita

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Demostrar que, bajo una condición a precisar, la ecuación $y-zx=f(z)$ define localmente z función implícita de x e y.
2. Demostrar que se tiene entonces : $\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

[004168]

Ejercicio 4566 Ecuación función de dos parámetros

Sea la ecuación $(*) \Leftrightarrow x^5+\lambda x^3+\mu x^2-1=0$. Demostrar que existe un vecindario, V, de $(0,0)$ y $\varphi: V\to\mathbb{R}$ tales que φ es $\mathscr{C}^\infty$, $\varphi(0,0)=1$, $\forall(\lambda,\mu)\in V$, $\varphi(\lambda,\mu)$ es raíz simple de $(*)$. Dar el DL de orden 2 de φ en $(0,0)$.

Solución ▼ [004169]

Ejercicio 4567 Cambio de variable singular, Matexo

Se considera la función de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo definido por $f(x,y) = (u,v)$, donde

$$u(x,y) = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \quad \text{y} \quad v(x,y) = (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Calcular su matriz jacobiana. ¿Es invertible localmente ? Caracterizar $f(\mathbb{R}^2)$.

Solución ▼ [004170]

Ejercicio 4568 Longitud de un arco de curva

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de clase $\mathscr{C}^1$ cuyas derivadas parciales están acotadas en U y $t \in I \mapsto M_t$ una curva parametrizada en U de clase $\mathscr{C}^1$. Para $a,b \in I$ comparar las longitudes de arco $\overset{\frown}{M_a M_b}$ y $\overset{\frown}{f(M_a)f(M_b)}$.

[004171]

Ejercicio 4569 Diferencial del determinante

Sea $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to R$, $M \mapsto \det M$. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^1$ y que se tiene para $M,H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $df_M(H) = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{com}(M)H)$. Aplicación : sea $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$. Expresar a_1 en función de los cofactores de M. [004172]

Ejercicio 4570 Expresar en factor de x e y

Sea U un abierto convexo de $\mathbb{R}^2$ conteniendo $(0,0)$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ tal que $f(0,0) = 0$.

1. Demostrar que existe $g,h : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y).$$

2. ¿Hay unicidad de g y h ?
3. Generalizar al acaso donde U no es convexo.

Solución ▼ [004173]

Ejercicio 4571 funciones convexas

Sea U un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa cuando :

$$\forall x,y \in U,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Se dice que f es estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta cuando $x \neq y$ y $0 < t < 1$.

1. Se supone que f es convexa.
   (a) Sean $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0,1]$ tal que $x-h \in U$ y $x+h \in U$. Demostrar :

   $$(1+t)f(x) - tf(x-h) \leqslant f(x+th) \leqslant (1-t)f(x) + tf(x+h).$$

   (b) Demostrar que f es continua (razonar sobre el caso $n = 2$, luego generalizar).
2. Se supone que f es de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que f es convexa si y solo si para todo $(x,y) \in U$ se tiene : $f(y) \geqslant f(x) + df_x(y-x)$. Dar una interpretación geométrica de esta desigualdad cuando $n = 2$.

3. Se supone que f es de clase $\mathscr{C}^2$.
   (a) Demostrar que f es convexa si y solo si para todo $x \in U$ la forma bilineal simétrica $d^2 f_x$ es positiva.
   (b) Si, para todo $x \in U$, $d^2 f_x$ es definida positiva, demostrar que f es estrictamente convexa. Demostrar con un ejemplo que lo contrario es falso.

Solución ▼ [004174]

Ejercicio 4572 Las raíces de un polinomio son funciones $\mathscr{C}^\infty$ coeficientes

Sea U el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado n y con raíces reales simples.

1. Demostrar que U es abierto en $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Para $P \in U$ se denota $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ las raíces de P. Demostrar que la aplicación $P \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$.

[004175]

Ejercicio 4573 No inyectividad local de la exponencial

Sea $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), M \mapsto \exp(M)$.

1. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ y expresar, para $M, H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $df_M(H)$ como una serie.
2. Demostrar que existe un vecindario V de 0 en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que para todas las matrices $A, B \in V$ se tiene :
   $\exp(A) = \exp(B) \Rightarrow A = B$.
3. Encontrar una sucesión (M_k) de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ distintas teniendo incluso exponencial y convergente a una matriz A (entonces no existe un vecindario de A en el que la restricción de f es inyectiva).
4. Dar de la misma manera un punto de no inyectividad local en $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Solución ▼ [004176]

Ejercicio 4574 Caracterización de isometrías

Sea E un espacio vectorial euclidiano y $f : E \to E$ de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Demostrar que f es una aplicación afín si y solo si su diferencial es constante (es decir $df_x = df_y$, para todo x, y, igualdad en $\mathscr{L}(E)$).
2. Sea X un conjunto no vacío arbitrario y $\varphi : X^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica :
   $$\forall x, y, z \in X,\ \varphi(x, y, z) = \varphi(y, x, z) = -\varphi(z, y, x).$$
   Demostrar que $\varphi = 0$ (lema de las trenzas).
3. Se supone f de clase $\mathscr{C}^2$. Demostrar que f es una isometría de E, para la distancia euclidiana si y solo si, para todo $x \in E$, df_x es una aplicación ortogonal.

[004177]

Ejercicio 4575 Diferenciabilidad de la norma

Para cada una de las tres normas clásicas sobre $\mathbb{R}^2$ decir en qué puntos son diferenciables. [004178]

Ejercicio 4576 Difeomorfismo

Sea E un espacio euclidiano y $f : E \to E$ de clase $\mathscr{C}^1$, $\alpha > 0$ verificando :

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E,\ (df_x(h) \mid h) \geqslant \alpha \|h\|^2.$$

1. Demostrar para $x, y \in E$, $(f(x) - f(y) \mid x - y) \geqslant \alpha \|x - y\|^2$. Deducir que $f(E)$ es cerrado.
2. Demostrar que $f(E)$ es abierto porque f es un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de E sobre E.

[004179]

Ejercicio 4577 Difeomorfismo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ y k-lipschitziana con $k < 1$ y $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + f(y), y - f(x))$. Demostrar que φ es un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. [004180]

Ejercicio 4578 Parcialmente derivable $\Rightarrow$ continua ?

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$.

1. Dar un ejemplo de una función $f : U \to \mathbb{R}$ teniendo en todos los puntos primeras derivadas parciales, pero discontinua en al menos un punto.
2. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ teniendo en todos los puntos primeras derivadas parciales *acotadas* sobre U. Demostrar que f es continua.

Solución ▼ [004181]

Ejercicio 4579 Punto no extremal

Se establece para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad \text{si } (x, y) \neq 0, \qquad f(0, 0) = 0.$$

1. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.
2. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ fijo y $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Demostrar que g_θ admite un mínimo local estricto en $r = 0$.
3. Calcular $f(x, x^2)$. ¿Qué se puede concluir ?

Solución ▼ [004182]

Ejercicio 4580 Contraejemplo del teorema de Leibniz

Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y \geqslant 0 \text{ y } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}; \\ 2\sqrt{y} - x & \text{si } y \geqslant 0 \text{ y } \sqrt{y} < x \leqslant 2\sqrt{y}; \\ 0 & \text{si } y \geqslant 0 \text{ y } 2\sqrt{y} < x \text{ o } x \leqslant 0; \\ -f(x, -y) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

y $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x, y)\,dx$. Hacer el gráfico, verificar que f es continua en $\mathbb{R}^2$, calcular $F(y)$, para $-\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}$, $F'(0)$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)\,dx$. [004183]

Ejercicio 4581 Central MP 2000

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathscr{C}^1$ y $c>0$ tales que, para todo x,y, $\|f(x)-f(y)\| \geqslant c\|x-y\|$.

1. Demostrar que para todo x,h, $\|df_x(h)\| \geqslant c\|h\|$.
2. Demostrar que f es un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$ (para la sobreyectividad se considera, si $a\in\mathbb{R}^n$, el mínimo de $\|f(x)-a\|^2$).

Solución ▼ [004184]

Ejercicio 4582 Central MP 2000

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y $\mathscr{C}^2$ sobre Ω.

1. Se supone que $\Delta u>0$. Demostrar que $\max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{\Omega}\setminus\Omega} u(x,y)$.
2. La misma pregunta asumiendo solo $\Delta u \geqslant 0$.
3. Sea $0<r_1<r_2$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, r_1^2<x^2+y^2<r_2^2\}$. Se supone que u es continua en $\overline{A}$, $\mathscr{C}^2$ sobre A y que $\Delta u\geqslant 0$ sobre A. Se define $M(r)=\max\limits_{x^2+y^2=r^2} u(x,y)$. Demostrar que, para todo $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, $M(r)\leqslant \dfrac{M(r_1)\ln(r_2/r)+M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$.

   Indicación : La función $v:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2)$ verifica $\Delta v=0$.

Solución ▼ [004185]

Ejercicio 4583 Mines MP 2001

Sea una función f de clase $\mathscr{C}^2$ en el disco unidad del plano, tal que su laplaciano $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sea nulo.

1. Demostrar $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ no depende de $r\in[0,1]$.
2. Calcular entonces $\displaystyle\iint_{D_r} f(x,y)\,dxdy$ D_r es el disco cerrado en el centro 0 y de radio r.

Solución ▼ [004186]

Ejercicio 4584 Mines MP 2001

Sean f y g dos funciones de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ verificando : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geqslant 1$ y $|g'(x)|<1$. Sea φ definida en $\mathbb{R}^2$ por $\varphi(x,y)=(f(x)+g(y), f(y)+g(x))$.

1. Demostrar que φ es un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
2. Se supone que existe $k\in\,]0,1[$ tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|g'(x)|<k$; demostrar que $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.

Solución ▼ [004187]

Ejercicio 4585 ENS MP 2002

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $|f(x)|/\|x\|\to+\infty$, cuando $\|x\|\to\infty$. Demostrar que ∇f es sobreyectiva en $\mathbb{R}^2$.

Solución ▼ [004188]

Ejercicio 4586 ENS MP 2002

Sea n un entero > 0, $\| \; \|$ la norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Se supone que $f(x)/\|x\| \to +\infty$, cuando $\|x\| \to \infty$, y que en todo punto la matriz hessiana de f es definida positiva.

Se define $g(y) = \sup\{(x \mid y) - f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$. Estudiar las propiedades de g.

Solución ▼ [004189]

Ejercicio 4587 $\int \varphi \circ f$, X MP* 2004

Sea E el conjunto de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Se y define una norma por $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que φ'' es acotada. Para $f \in E$ se establece $T(f) = \int_0^1 \varphi(f(t))\,dt$.

1. Demostrar que la aplicación así definida $T : E \to \mathbb{R}$ es continua.
2. Demostrar que T es diferenciable en todo punto.

Solución ▼ [004190]

Ejercicio 4588 ***T

Sea
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0. \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de f.
2. Estudiar la existencia y el valor eventual de derivadas parciales de orden 1 y 2. Demostrar en particular que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ están definidas en $(0,0)$, pero no tienen el mismo valor.

Solución ▼ [005556]

Ejercicio 4589 ***

El laplaciano de una aplicación g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ es $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Determinar una función de clase C^2 en un intervalo I de $\mathbb{R}$ a precisar con valores en $\mathbb{R}$ tal que la función $g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$, sea no constante y tiene un laplaciano nulo en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tan grande como sea posible (una función con Laplaciano nulo se dice que es armónica).

Solución ▼ [005557]

Ejercicio 4590 *

Sea f una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ de clase C^1. Se dice que f es positivamente homogénea de grado r (r real dado) si y solo si $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$. Demostrar para una tal función la identidad de EULER :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

Solución ▼ [005893]

176 223.05 Diferencial de funciones compuestas

177 223.06 Segundo diferencial

Ejercicio 4591

Calcular los siguientes diferenciales, sin calcular derivadas parciales, utilizando las propiedades de las sumas diferenciales, productos y composiciones :

(a) $\mathrm{d}\left(\ln(xy)\right)$ (b) $\mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right)$ sh 2(c) $\mathrm{d}\left(\operatorname{sen}(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)$

Indicación ▼ Solución ▼ [002635]

Ejercicio 4592

1. ¿Hay una función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y$?
2. Encontrar las funciones $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que existe $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición $\mathrm{d}g = x^2y^2\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y$.Dada entonces la función b, determinar todas las funciones g correspondientes.

Indicación ▼ Solución ▼ [002636]

Ejercicio 4593

Sea $g\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $g(1,1) = 3$ y cuyo diferencial vale

$$\mathrm{d}g = (2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y. \qquad (E)$$

Sea $h\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ la aplicación de clase C^1 definida por

$$h(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = (x^2y, xy^2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

1. Calcular $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v$.
2. Determinar g del cálculo anterior y (E), y sin más cálculo.
3. Demostrar que h es una biyección. (Se puede calcular explícitamente h^{-1}.)
4. Determinar explícitamente $\mathrm{d}(g \circ h^{-1})$.
5. Calcular las matrices jacobianas $J_h(x,y)$ y $J_{h^{-1}}(u,v)$ y verificar mediante un cálculo directo que

   $$J_h(x,y)J_{h^{-1}}(h(x,y)) = I_2,$$

   donde I_2 es la matriz identidad de orden 2.

Indicación ▼ Solución ▼ [002637]

Ejercicio 4594

Calcular las matrices hessianas de las funciones f definidas por las siguientes expresiones en su dominio de definición natural :

$$\operatorname{sen}(xyz), \qquad \operatorname{sen}^2(y/x).$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002638]

Ejercicio 4595

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sean r y θ las coordenadas polares estándar en el plano tal que la asociación

$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

sea un cambio de variables. Sea F la función definida por

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

Esta es "la expresión de f en coordenadas polares". Demostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{3}$$

Esta fórmula calcula "el Laplaciano en coordenadas polares." El ejercicio, sin embargo no depende del conocimiento del laplaciano.

Indicación ▼ Solución ▼ [002639]

Ejercicio 4596

Las variables que se señalan x y t, encontrar la solución general $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de "la ecuación de onda", a saber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Encontrar luego la solución única de la ecuación de onda que satisface las condiciones iniciales

$$f(x,0) = \operatorname{sen} x, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x. \tag{5}$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002640]

Ejercicio 4597 *** I

Sea $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

Determinar el más grande subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es de clase C^1. Verificar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existen y son diferentes.

Solución ▼ [005889]

Ejercicio 4598 ***

Encontrar una aplicación no constante $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que la aplicación g definida en $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$ tiene un laplaciano cero en un conjunto a especificar. (Se recuerda que el laplaciano de g es $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Una función de laplacien nulo se dice armónica.)

Solución ▼ [005904]

Ejercicio 4599 *** I

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^2 cuyo diferencial en todo punto es una rotación. Demostrar que f es una rotación afín.

Solución ▼ [005905]

178 223.07 Extremos locales

Ejercicio 4600

Para cada una de las siguientes funciones estudiar la naturaleza del punto crítico dado :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el punto crítico $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ en el punto crítico $(0,0)$;
3. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ en el punto crítico $(0,0)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002641]

Ejercicio 4601

Encontrar los puntos críticos de la función f siguiente y determinar si son minimales locales, de máximos locales o puntos de silla.

$$f(x,y) = \operatorname{sen} x + y^2 - 2y + 1$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002642]

Ejercicio 4602

1. Sea f una función real de una variable real de clase C^2 en un vecindario de $0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Demostrar que la función real F de las dos variables x e y definida en un vecindario de $(0,0)$ por $F(x,y) = f(x)f(y)$ no tiene un extremo relativo en $(0,0)$. ¿El punto $(0,0)$ es todavía crítico ? Si es sí caracterizar su naturaleza.
2. Determinar los puntos críticos, luego los mínimos y máximos locales de
$$f(x,y) = \operatorname{sen}(2\pi x)\operatorname{sen}(2\pi y).$$
Observación : Usando la periodicidad de la función, se puede limitar el número de casos a estudiar.

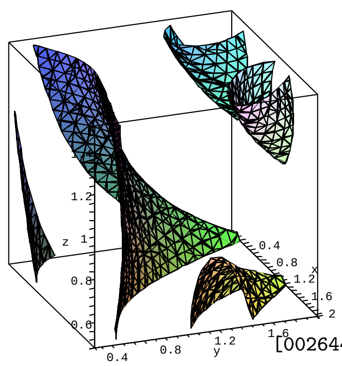
Indicación ▼ Solución ▼ [002643]

Ejercicio 4603

Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel

$$\operatorname{sen}(\pi xy) + \operatorname{sen}(\pi yz) = 1,$$

en el punto de coordenadas $(1, \frac{1}{6}, 1)$. Identificar, en este punto, un vector perpendicular a la superficie.
¿El resultado es compatible con la figura abajo ? Explicar.



Indicación ▼ Solución ▼ [002644]

Ejercicio 4604

Sea $\mathscr{C}$ la curva plano de ecuación $f(x,y) = ye^x + e^y \operatorname{sen}(2x) = 0$.

1. Aplicar el teorema de funciones implícitas a la curva $\mathscr{C}$ en el punto $(0,0)$.
2. Determinar el límite de y/x, cuando (x,y) tiende a lo largo de la curva $\mathscr{C}$ hacia $(0,0)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002645]

Ejercicio 4605

1. Determinar los puntos estacionarios de la función f de dos variables definida por $f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$ y precisar la naturaleza de cada uno de a ellos.
2. Dibujar la curva constituida de puntos tales que $f(x,y) = 0$ y $x \geqslant 0$.
   (*Indicación* : Estudiar la función $x \mapsto \sqrt{x}\,(x+1)$, para $x \geqslant 0$).
3. Demostrar que el punto $(-1,0)$ es un punto aislado de la parte $\mathscr{C} = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$ del plano, es decir el punto $(-1,0)$ pertenecen a esta parte y existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon \cap \mathscr{C} = \{(-1,0)\}$, donde D_ε es el disco abierto centrado en $(-1,0)$ y de radio ε.
4. Enunciar el teorema de la función implícita.
5. Demostrar que, cualquiera que sea el punto (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinto de $(-1,0)$, al menos una de las dos alternativas (i) o (ii) abajo es verificada :
   (i) Existe una función h de clase C^1 de la variable x definida en un intervalo abierto apropiado tal que $h(x_0) = y_0$ y tal que, para que en un vecindario de (x_0,y_0) las coordenadas x e y del punto (x,y) satisfaciendo la ecuación $f(x,y) = 0$ es necesario y suficiente que $y = h(x)$.
   (ii) Existe una función k de clase C^1 de la variable y definida en un intervalo abierto apropiado tal que $h(y_0) = x_0$ y tal que, para que en un vecindario de (x_0,y_0) las coordenadas x e y del punto (x,y) satisfaciendo la ecuación $f(x,y) = 0$ es necesario y suficiente que $x = k(y)$.

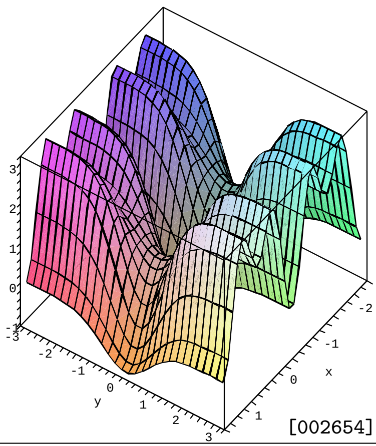
Indicación ▼ Solución ▼ [002646]

Ejercicio 4606

Se considera la función

$$f(x,y) = (1 + 2\cos^2(\pi x))(1 - \exp(-y^2)) + \operatorname{sen}(\pi x).$$

Su gráfico se reproduce en la siguiente figura.



1. Encontrar todos los puntos críticos de f y determinar su naturaleza. ¿Los resultados son compatibles con la gráfica de la función, reproducida al lado ?
2. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto de coordenadas $(1,1,f(1,1))$. Trazar la recta de intersección de este plano con el plano xOy.

[002654]

Ejercicio 4607 Estudio de puntos críticos

Encontrar los extremos de las funciones $f(x,y)$ siguientes :

1. $3xy - x^3 - y^3$	2. $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$	3. $x^2y^2(1+3x+2y)$
4. $2x + y - x^4 - y^4$	5. $\dfrac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$	6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$	8. $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$	9. $MA + MB - MO$, $O = \text{p.med}(A, B)$

Solución ▼ [004191]

Ejercicio 4608 Distancias a los vértices de un triángulo

Sea $A \in \mathbb{R}^p$ fijo y $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $M \mapsto AM^2$; $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $M \mapsto AM$ (distancia euclidiana).

1. Calcular los gradientes de f y g en un punto M.
2. Sean A, B, C tres puntos no alineados del plano. Encontrar los puntos M del plano logrando el mínimo de :

   (a) $MA^2 + MB^2 + MC^2$. (b) $MA + MB + MC$. (c) $MA \times MB \times MC$.

Solución ▼ [004192]

Ejercicio 4609 Área de un triángulo

Sea ABC un triángulo de lados a, b, c.

1. Calcular el área, S, de ABC en función de a, b, c.
2. Demostrar que $\dfrac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$ es maximal cuando ABC es equilátero.

Solución ▼ [004193]

Ejercicio 4610 Central MP 2000

Se considera un triángulo ABC y f la función definida por $f(M) = d(M, AB) \times d(M, AC) \times d(M, BC)$. Demostrar que f admite un máximo dentro del triángulo ABC, y caracterizar geométricamente el punto M_0, donde f es maximal.

Solución ▼ [004194]

Ejercicio 4611 Ley de la refracción

Sean en $\mathbb{R}^2$, $A = (0, a)$, $B = (b, -c)$ y $M = (x, 0)$ $(a, b, c > 0)$. Un rayo de luz recorre la línea quebrada AMB a la velocidad v_1 de A a M y v_2 de M a B. Se denota $\alpha_1 = \overline{(\vec{j}, \overrightarrow{MA})}$, $\alpha_2 = \overline{(-\vec{j}, \overrightarrow{MB})}$.

1. Hacer una figura.
2. Demostrar que el tiempo de viaje es mínimo cuando $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$.

[004195]

Ejercicio 4612 Central MP 2001

Sea f una forma lineal en E espacio euclidiano y $g(x) = f(x)e^{-\|x\|^2}$. Demostrar que g tiene un mínimo y un máximo.

Solución ▼ [004196]

Ejercicio 4613 Central MP 2001

D_1, D_2, D_3 son tres rectas de un plano que tienen los lados de un triángulo equilátero de lado a. Se define

$$\varphi : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R},\ \ (M,N,P) \mapsto MN+NP+PM.$$

Determinar $\min\varphi$ y los tripletes (M,N,P), donde se alcanza este mínimo.

Solución ▼ [004197]

Ejercicio 4614 Central MP 2006

E denota el espacio afín euclidiano clásico. D_1, D_2, D_3 son tres rectas dos o dos no paralelas.
Sea $f : D_1 \times D_2 \times D_3 \to \mathbb{R}$, $(M_1,M_2,M_3) \mapsto \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2+\|\overrightarrow{M_2M_3}\|^2+\|\overrightarrow{M_3M_1}\|^2$.

1. Demostrar que f admite un mínimo alcanzado por un triplete único.
2. En el caso donde D_1, D_2, D_3 son coplanares y están unidos a un triángulo equilátero, encontrar este triplete.

Solución ▼ [004198]

Ejercicio 4615 Camino más corto, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Determinar el camino más corto entre los polos norte y sur de una esfera en dimensión 3.

Solución ▼ [004199]

Ejercicio 4616 Extremos vinculados, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2005

Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, f de clase $\mathscr{C}^1$ sobre B y $x \in B$ tal que $f(x) = \max\{f(y),\, y \in B\}$. Demostrar que $\nabla f(x) = \lambda x$, con $\lambda \geqslant 0$.

Solución ▼ [004200]

Ejercicio 4617 **T

Encontrar los extremos locales de :

1. $\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2+xy+y^2+2x+3y. \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^4+y^4-4xy \end{aligned}$

Solución ▼ [005558]

Ejercicio 4618 ***

Máximo del producto de las distancias a los lados de un triángulo ABC del plano de un punto M interior a este triángulo (se admite que este máximo existe).

Solución ▼ [005559]

Ejercicio 4619 **

Sea a un real estrictamente positivo dado. Encontrar el mínimo de $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{y^2+(x-a)^2}$.

Solución ▼ [005560]

Ejercicio 4620 ***

Máximo del producto de las distancias de un punto M interior a un triángulo ABC al lado de este triángulo.

Solución ▼ [005902]

Ejercicio 4621 *

Mínimo de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a real dado.

Solución ▼ [005903]

179 223.08 Funciones implícitas

Ejercicio 4622

Se considera la curva $\mathscr{C}$ de ecuación $y^2(x^2+1)+x^2(y^2+1) = 1$.

1. Demostrar que existe un único $b > 0$ tal que el punto de coordenadas $(1/2, b)$ se encuentra en $\mathscr{C}$. Determinar b, luego determinar la ecuación de la recta tangente en $\mathscr{C}$, pasando por $(1/2, b)$.
2. Encontrar la función única $\varphi : x \in]-1,1[\to \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$ tal que $(x, \varphi(x)) \in \mathscr{C}$, para todo $x \in]-1,1[$. Demostrar que $\varphi(-x) = \varphi(x)$ y que φ es decreciente en $[0,1[$. Trazar $\mathscr{C}$.
3. Enunciar el teorema de la función implícita y demostrar que existen exactamente dos puntos en la curva $\mathscr{C}$, donde el teorema de la función implícita no se aplica para escribir, en un vecindario de cada uno de estos dos puntos, y como función de x.

[002653]

Ejercicio 4623 **

Demostrar que $\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x - e^y, x+y)\end{array}$ es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

Solución ▼ [005890]

Ejercicio 4624 ***

Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la ecuación $y^{2n+1}+y-x = 0$ define implícitamente una función φ sobre $\mathbb{R}$ tal que $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $[y^{2n+1}+y-x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$. Demostrar que φ es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ y calcular $\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

Solución ▼ [005891]

Ejercicio 4625 ***

Dar un desarrollo limitado de orden 3 en 0 de la función implícitamente definida en un vecindario de 0 por la igualdad $e^{x+y}+y-1 = 0$.

Solución ▼ [005892]

180 223.99 Otro

Ejercicio 4626

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admitiendo derivadas parciales continuas en 0 y tal que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall t > 0,\ f(ta) = tf(a).$$

Demostrar que f es lineal. [001861]

Ejercicio 4627

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación C^1 en un abierto convexo O tal que :

$$\forall a \in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

Demostrar que f es constante en O. [001862]

Ejercicio 4628

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Demostrar que si $\|\nabla f(x)\| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

[001863]

Ejercicio 4629 Desigualdad por Cauchy-Schwarz

1. Demostrar que $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.
2. Determinar $m = \inf\{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} 1/x_i)$ tales que $x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}$.
3. Determinar $M = \sup\{|x + 2y + 3z + 4t|$ tales que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 1\}$.

[001864]

Ejercicio 4630

Se considera la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Trazar las líneas de nivel $f(x, y) = 2$, $f(x, y) = 4$.
2. Trazar la gráfica de la función f. Explicar su dibujo en unas pocas palabras, identificando en particular las intersecciones de la gráfica de f, con los planos paralelos a los tres planos de coordenadas.

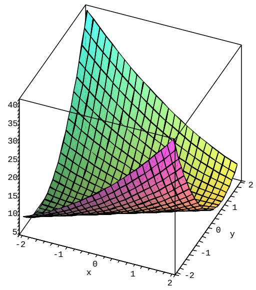
[002648]

Ejercicio 4631

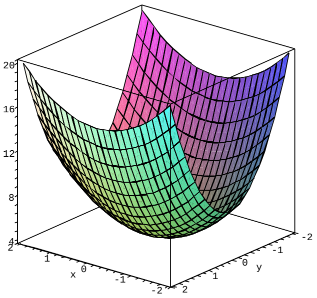
Se consideran las cuatro superficies $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, definidas por las ecuaciones siguientes :

$$z^2 - \exp(2x^2 + y^2) = 0. \qquad (\Sigma_1)$$
$$z = x^2 + 3y^2 + 4. \qquad (\Sigma_2)$$
$$z - (x - 2y)^2 - 4 = 0. \qquad (\Sigma_3)$$
$$\exp(x^2 + y^2) + \exp(y^2 + z^2) = 3. \qquad (\Sigma_4)$$

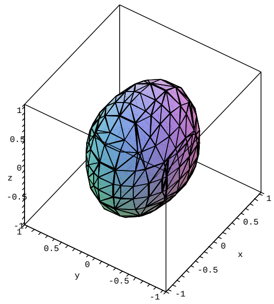
Las cuatro superficies se dibujan en las partes A, B, C y D de la figura de la página siguiente. Indicar qué superficie corresponde a qué parte de la figura. Se deben justificar brevemente las respuestas.



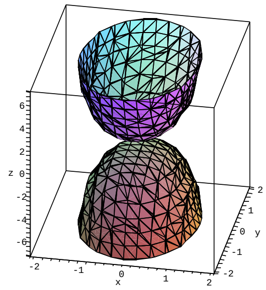
A



B



C



D

[002655]

Ejercicio 4632

Sea la función f definida en $\mathbb{R}_+^n$ por $f(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$. Determinar sus extremos cuando $x_1+\cdots+x_n = n$. Deducir que la media geométrico de n números positivos es menor que su media aritmética. [002684]

Ejercicio 4633 **

Encontrar todas las aplicaciones φ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que la aplicación f de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \neq 0\}$ en $\mathbb{R}$ que a (x,y) asociada $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifica $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^3}$.

Solución ▼ [005561]

Ejercicio 4634 **

Encontrar todas las aplicaciones f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ verificando

1. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (utilizando el cambio de variables $u = x+y$ y $v = x+2y$)
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sobre $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x > 0\}$ (pasando a polares).

Solución ▼ [005562]

---

181 224.01 Integral múltiple

Ejercicio 4635

Calcular $I_1 = \displaystyle\iint_D (x+y)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y} dxdy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x,y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\right\}$.

Calcular $I_2 = \displaystyle\iint_D (x^2+y^2) dxdy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\right\}$.

Calcular $I_3 = \displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$, donde $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$.

Calcular $I_4 = \displaystyle\iint_D \frac{1}{y\cos(x)+1} dxdy$, donde $D = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]$.

Calcular $I_5 = \displaystyle\iiint_D z dxdydz$, donde $D = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 / y^2+z \leqslant 1, x^2+z \leqslant 1\right\}$.

Calcular $I_6 = \iint\limits_D xy\,dx\,dy$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x,y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, con $a,b > 0$. [001907]

Ejercicio 4636

Representar y calcular el volumen de $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leqslant z \leqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant z^2+1\right\}$. [001908]

Ejercicio 4637

Determinar el centro de gravedad del culbuto [3] (homogéneo), *i.e.* el cono

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \in [0,1],\ x^2+y^2 \leqslant z^2\right\}$$

al que se le añade en su base una semi-bola. [001909]

Ejercicio 4638

Sea $D = [0,1]^2$. Calcular :

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}.$$

[001910]

Ejercicio 4639

Sea D el disco central $(0,1)$ y de radio 1 del plano. Calcular :

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

[001911]

Ejercicio 4640

Sea $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2y \geqslant 0, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calcular :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

[001912]

Ejercicio 4641

Sea $D = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant xy\}$. Calcular :

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

[001913]

Ejercicio 4642

Sean $a,b > 0$. Calcular el área de la elipse $E = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ por dos métodos diferentes. (Se recuerda que el área de un dominio D vale $\iint_D dx\,dy$.) [001914]

3. Un juego que consiste en un cilindro con extremos redondeados, cargado en un extremo, que da vueltas en movimiento

Ejercicio 4643

Sea $a > 0$ y D el dominio acotado por la curva de la ecuación polar $\rho = a(1+\cos\theta)$. Calcular el área de D.
[001915]

Ejercicio 4644

Sean $0 < a \leqslant b, 0 < c \leqslant d$, y $D = \{ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2, \frac{c}{x} \leqslant y \leqslant \frac{d}{x}\}$. Calcular el área de D.
(Indicación : Establecer $u = \dfrac{y}{x^2}$ y $v = xy$.) [001916]

Ejercicio 4645

Sea $p > 0$ y $D = \{y^2 - 2px \leqslant 0, x^2 - 2py \leqslant 0\}$. Calcular :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy.$$

(Indicación : escribir $x = u^2v$ y $y = uv^2$.) [001917]

Ejercicio 4646

Sea $R > 0$, $D_R = \{x^2+y^2 \leqslant R^2, x > 0, y > 0\}$ y $K_R = [0,R]^2$. Demostrar que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

deducir la existencia y el valor de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-t^2}\,dt.$$

[001918]

Ejercicio 4647

Sean $a, R > 0$. En el plano (yOz), sea D el disco central $(0,a,0)$ y de radio R. Girando alrededor del eje (Oz), el disco D genera un dominio T (llamado toro pleno). Calcular el volumen de T (es decir, la integral triple $\iiint_T dx\,dy\,dz$). [001919]

Ejercicio 4648

Sea $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 + y^2\}$. Calcular el volumen de D. [001920]

Ejercicio 4649

Sea $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$. Calcular :

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

[001921]

Ejercicio 4650

¿Cuál es el volumen limitado por dos cilindros de revolución de ejes (Ox) y (Oy) y de igual radio $R > 0$?

[001922]

Ejercicio 4651

usando un cambio de variable, calcular la integral de f sobre D, con

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}$;
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ con a, $b > 0$; $f(x,y) = x^2 + y^2$;
3. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\, 0 \leqslant z \leqslant h\}$ con $h > 0$; $f(x,y,z) = z$;
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2\,,\, 1/x \leqslant y \leqslant 2/x\}$; $f(x,y) = x + y$ (cambio de variable $u = y/x^2\,,\, v = xy$);
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,,\, y \geqslant 0\,,\, z \geqslant 0\,,\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$; $f(x,y,z) = xyz$;
6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$; $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\alpha}$.

[001923]

Ejercicio 4652

Identificar los siguientes conjuntos y calcular su área si están en $\mathbb{R}^2$, su volumen si están en $\mathbb{R}^3$.

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, con $a, b > 0$;
2. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$, con $a, b, c > 0$; ¿qué se obtiene en el caso particular donde D es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$?
3. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$, con $R, h > 0$;
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\,,\, y \geqslant 0\,,\, z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1\right\}$;
5. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z^2/h^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$, con $h > 0$.

[001924]

Ejercicio 4653

Calcular las coordenadas del centro de inercia (de gravedad) del dominio D :

1. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$ (el cuarto de elipse);
2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ |y| \leqslant ax\right\}$;
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9,\ (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1\}$.

[001925]

Ejercicio 4654

1. **Teorema de Guldin** Sea D_0 un dominio trazado en el semiplano $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0\}$. Si se hace girar D_0 alrededor del eje Oz, se obtiene un dominio D de $\mathbb{R}^3$. Usando coordenadas cilíndricas. demostrar que $\operatorname{vol}(D) = 2\pi$ Área $(D_0) \cdot x_G$, donde (x_G, z_G) son las coordenadas del centro de inercia del dominio D_0.

2. Calcular los volúmenes de los siguientes dominios :

   (a) El toro obtenido al girar alrededor de Oz el dominio $D_0 = \left\{(x,0,z) \mid \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, donde $a < c$;

   (b) $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2 \,,\, x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$, donde $R > 0$.

[001926]

Ejercicio 4655

Se establece $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ y $J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dxdy$. Calcular J y deducir el valor de I. [001927]

Ejercicio 4656

Se denota D el dominio acotado por las rectas $x = 0$, $y = x+2$ y $y = -x$.

1. Calcular (directamente) $I = \iint_D (x-y)dxdy$.
2. Calcular I mediante el cambio de variable $u = x+y$ y $v = x-y$.

[001928]

Ejercicio 4657

Sea $D = \{(x,y); x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Calcular $\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$. [001929]

Ejercicio 4658 Integrales dobles

Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$:

1. $D = \{y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, y-x \leqslant 1\}$, $f(x,y) = x^2 y$.
2. $D = \{x^2+y^2 \leqslant R^2\}$, $f(x,y) = x^2 y$.
3. $D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
4. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{y^2}{4}\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
5. $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = (x+y)^2$.
6. $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
7. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$, $f(x,y) = x+y+1$.
8. $D = \{|x+y| \leqslant 1, |x-y| \leqslant 1\}$, $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.
9. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$, $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.
10. $D = \{|x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^2$.
11. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant a\}$, $f(x,y) = x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
12. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
13. $D = \{x^2+y^2-2y \leqslant 0\}$, $f(x,y) = y\exp(x^2+y^2-2y)$.
14. $D = \{y^2 \leqslant 2px, x^2 \leqslant 2py\}$, $f(x,y) = \exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$.

Solución ▼ [004381]

Ejercicio 4659 ESEM 94

Calcular $I = \iint_\Delta xy\,dxdy$, donde $\Delta = \{(x,y)$ tal que $y \geqslant 0$ y $(x+y)^2 \leqslant 2x/3\}$.

Solución ▼ [004382]

Ejercicio 4660 Ensi PC 1999

Calcular $I = \iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$, donde $\Delta = \{(x,y)$ tal que $y \geqslant 0$ y $x^2+y^2-2x \leqslant 0$ y $x^2+y^2-2y \leqslant 0\}$.

Solución ▼ [004383]

Ejercicio 4661 Integrales triples

Calcular $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$:

1. $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.
2. $D = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$, $(a > R > 0)$.
3. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = xyz$.
4. $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^2}$.
5. $D = \{x^2+y^2 \leqslant R^2, 0 \leqslant z \leqslant a\}$, $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.
6. $D = \{x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.
7. $D = \left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2$.

Solución ▼ [004384]

Ejercicio 4662 Ensi Chimie P 93

1. Calcular $\iiint_D \dfrac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$, con $D = \{(x,y,z)$ tal que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z\}$.
2. Deducir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Solución ▼ [004385]

Ejercicio 4663 Ensi Chimie P 93

Sea $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. Calculando $J = \displaystyle\iint_D \frac{x\,dxdy}{(1+x^2)(1+xy)}$, con $D = \{(x,y)$ tal que $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ de dos maneras diferentes, encontrar I.

Solución ▼ [004386]

Ejercicio 4664 Ensi Chimie P 93

Sea T un toro de eje (Oz) y de radios R, r $(R > r)$. Calcular $\iiint_T (x^2+y^2)\,dxdydz$.

Solución ▼ [004387]

Ejercicio 4665 $MF+MF'$

Sea $\mathscr{E}$ la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$, E el dominio limitado por $\mathscr{E}$ y F,F' los focos de $\mathscr{E}$. Calcular $I=\iint_{M\in E}(MF+MF')\,dxdy$. Efectuar el cambio de variable : $x=\sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Solución ▼ [004388]

Ejercicio 4666 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$

1. Demostrar la existencia de $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}dx$.
2. Demostrar que $I=\displaystyle\iint_D\frac{\operatorname{sen} y}{1+\cos x\cos y}dx\,dy$, donde $D=[0,\frac{\pi}{2}]^2$.
3. Deducir el valor de I.

Solución ▼ [004389]

Ejercicio 4667 Integral de Gauss

Cálculo de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

1. Justifique la convergencia de esta integral.
2. Para $a>0$ se denota $\Delta_a=[0,a]\times[0,a]$ y C_a el cuarto de disco de ecuaciones : $x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.
   (a) Enmarcar la integral en Δ_a de $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ por las integrales de f en los dominios del tipo C_b.
   (b) Calcular $\displaystyle\iint_{C_b}f(x,y)\,dx\,dy$ en polares y deducir el valor de I.

[004390]

Ejercicio 4668 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt$

1. Calcular $A=\displaystyle\iint_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. Demostrar la convergencia de integrales :
$$B=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta,\quad C=\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(2\operatorname{sen}^2\theta)}{2\cos 2\theta}d\theta,\quad \text{y } D=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}dt.$$
3. Demostrar que $A=B$ (cambiar a coordenadas polares en A).
4. Calcular $B+C$ y $B-C$ en función de D.
5. Deducir los valores de C y D.

Solución ▼ [004391]

Ejercicio 4669 Áreas

Calcular el área de los siguientes dominios :

1. D es la parte del disco unitario situada en la concavidad de la hipérbola de ecuación $xy = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. D es la intersección de los dominios acotados por las elipses con la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Solución ▼ [004392]

Ejercicio 4670 Ensi P 90

Sea $\mathscr{P}$ el plano relacionado con el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Calcular el área del dominio limitado por la curva de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solución ▼ [004393]

Ejercicio 4671 Chimie P 91

Se consideran las curvas planas : $\mathscr{Q}_i : (x^2 = 2q_i y)$ y $\mathscr{P}_i : (y^2 = 2p_i x)$. Se supone $0 < q_1 < q_2$ y $0 < p_1 < p_2$. Calcular el área del "cuadrilátero" limitado por $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{Q}_1$ y $\mathscr{Q}_2$.

Solución ▼ [004394]

Ejercicio 4672 Chimie P 1996

Calcular el área delimitada por la curva de ecuación $(y-x)^2 = a^2 - x^2$.

Solución ▼ [004395]

Ejercicio 4673 Volúmenes

Calcular el volumen de las siguientes áreas :

1. D es la intersección del cilindro de revolución de eje Oz radio a y de la bola de centro O radio 1 $(0 < a < 1)$.
2. D es la intersección de la bola de centro O radio 1 y del cono de revolución de eje Oz y semi-ángulo $\frac{\pi}{4}$.
3. D es el volumen generado por la rotación de un disco de radio r alrededor de una recta coplanar con el disco, ubicada a la distancia $R > r$ del centro del disco (toro de revolución o tubo interior).

Solución ▼ [004396]

Ejercicio 4674 Ensi Physique P 94

Calcular el volumen interior del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = 2pz$ y exterior al cono de ecuación $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ $(p > 0, \lambda > 0)$.

Solución ▼ [004397]

Ejercicio 4675 Volumen

En el plano Oxy se considera la curva $\mathscr{C}$ de ecuación polar $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a > 0,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$. Girando alrededor de Ox, $\mathscr{C}$ genera una superficie de la que calcula el volumen que limita (se define $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $z = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$).

Solución ▼ [004398]

Ejercicio 4676 Volume

Se corta una semi bola por un plano P, paralela a su base. ¿Cuál debe ser la posición de P, para que los dos trozos tengan el mismo volumen ? (Dar un resultado aproximado)

Solución ▼ [004399]

Ejercicio 4677 Suma doble

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$. [004400]

Ejercicio 4678 Número de pares (a,b) tal que $a^2+b^2 \leqslant n$

Para $n \in \mathbb{N}$ se establece $E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tal que } p^2+q^2 \leqslant n\}$ y $C_n = \operatorname{card}(E_n)$. Interpretar C_n como un área y dar un equivalente de C_n, cuando $n \to \infty$. [004401]

Ejercicio 4679 Ens MP 2002

Sea $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}^+)$ tal que $\displaystyle\int_0^1 f = 1$. Para $\psi \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ se establece

$$\Lambda_n(\psi) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) f(x_1)\cdots f(x_n)\, dx_1\cdots dx_n.$$

Demostrar que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\left(\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx\right)$, cuando $n \to \infty$.

Solución ▼ [004402]

Ejercicio 4680 **

Calcular las siguientes integrales múltiples

1. $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\ dxdy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.
2. $I = \displaystyle\iint_{[-1,1]^2} |x+y|\ dxdy$.
3. $I = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, donde D es la parte del plano limitada por las parábolas de las ecuaciones respectivas $y = x^2$ y $x = y^2$.
4. $I = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdy$.
5. $I = \displaystyle\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$.
6. $I = \displaystyle\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz$.
7. $I = \displaystyle\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz$.

Solución ▼ [005908]

Ejercicio 4681 ***

Sean $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tal que $p_1 < p_2$ y $q_1 < q_2$. Calcular el área del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 2p_1 x \leqslant y^2 \leqslant 2p_2 x \text{ y } 2q_2 y \leqslant x^2 \leqslant 2q_2 y\}$.

Solución ▼ [005910]

Ejercicio 4682 *** I

Calcular el volumen de $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$ (bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$, para $\| \ \|_2$).

Solución ▼ [005911]

Ejercicio 4683 **

Calcular el volumen del interior del elipsoide de ecuación $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

Solución ▼ [005912]

Ejercicio 4684 ***

Calcular $I = \displaystyle\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} (x^2 - y^2)\, dxdy$.

Solución ▼ [005914]

---

182 224.02 Cálculo aproximado de integral

183 224.03 Integral de Riemann dependiente de un parámetro

Ejercicio 4685 Cálculo del límite

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\operatorname{sen}^2 t \operatorname{sh} t}\, dt$.

Solución ▼ [004313]

Ejercicio 4686 Cálculo del límite, Ensi P 90

Calcular los límites : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\, dt$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t + e^{3t}}\, dt$.

Solución ▼ [004314]

$\frac{t}{\tan^2 t} = \frac{1}{t} + \varphi(t)$, con φ prolongable por continuidad en 0, por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\, dt = \ln 3$.
$\frac{t^2}{t + e^{3t}} = t^2 + o(t^2)$, por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t + e^{3t}}\, dt = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 4687 Cálculo del límite

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_3^{x^2+x} \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{3 + \ln(\ln t)}$.

Solución ▼ [004315]

Ejercicio 4688 Cálculo del límite

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}\, dt}{\operatorname{sen} t \ln t}$.

Solución ▼ [004316]

Ejercicio 4689 Serie de integrales, Esem 91

Establecer la convergencia y calcular la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

Solución ▼ [004317]

Ejercicio 4690 $\operatorname{sen}(t)/(t+x)$

1. Demostrar la existencia de $x>0$ de $I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$.
2. Determinar $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

Solución ▼ [004318]

Ejercicio 4691 Cálculo del límite

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Determinar $\lim_{x\to 0^+}\int_0^1\frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004319]

Ejercicio 4692 Cálculo equivalente, Mines 1999

Dar un equivalente para $x\to+\infty$ de $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{x^2+t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004320]

Ejercicio 4693 Cálculo del límite

Sea $a>0$. Dar el DL en $x=1$ de orden 3 de $f(x)=\int_{a/x}^{ax}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004321]

Ejercicio 4694 $(\int f^x)^{1/x}$

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continua. Se define $\varphi(x)=\left(\int_a^b (f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.

1. Demostrar que $\varphi(x)\to\max(f)$, cuando $x\to+\infty$.
2. Se supone $f>0$ y $b-a=1$. Demostrar que $\varphi(x)\to\exp\left(\int_a^b \ln(f(t))\,dt\right)$, cuando $x\to 0^+$.

Solución ▼ [004322]

Ejercicio 4695 $t^n f(t)$

Sea $I_n=\int_0^1 t^n\ln(1+t^2)\,dt$. Demostrar que $I_n\to 0$, cuando $n\to\infty$. [004323]

Ejercicio 4696 $t^n f(t)$

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt=\frac{f(1)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. [004324]

Ejercicio 4697 $f(t^n)$

1. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt\to f(0)$, cuando $n\to\infty$.
2. Encontrar un equivalente para $n\to\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.
3. Encontrar un equivalente para $n\to\infty$ de $\displaystyle -1+\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Solución ▼ [004325]

Ejercicio 4698 $f(t^n)$

Dar los dos primeros términos del DL para $n\to\infty$ de $\displaystyle I_n=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

Solución ▼ [004326]

Ejercicio 4699 $f(t^n)$

Dar los dos primeros términos del DL para $n\to\infty$ de $\displaystyle I_n=\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Solución ▼ [004327]

Ejercicio 4700 $f(t^n)$

Encontrar un equivalente para $n\to\infty$ de $\displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Solución ▼ [004328]

Ejercicio 4701 Cálculo del límite

Determinar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^n x}{x+2}\,dx$. [004329]

Ejercicio 4702 Cálculo del límite

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Determinar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,dt$.

Solución ▼ [004330]

Ejercicio 4703 $(1-x/n)^n$, Ensi PSI 1998

Sea $x\in[0,n]$. Demostrar que $(1-x/n)^n\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Deducir $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-x/n)^n\,dx$.

Solución ▼ [004331]

Ejercicio 4704 Ecuación integral, Ensi P 91

Determinar las funciones $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tales que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=1$.

Solución ▼ [004332]

Ejercicio 4705 $\tan^n t$, Ensi Physique P 94

Se establece $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$.

1. Demostrar que $I_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.
2. Calcular I_n en función de n.
3. ¿Qué se puede deducir ?

Solución ▼ [004333]

Ejercicio 4706 Cálculo del límite, École de l'air 94

Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} \, dt$.

Solución ▼ [004334]

Ejercicio 4707 Aproximación de la medida de Dirac

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continua, alcanzando su máximo en un solo punto $c \in]a,b[$.

1. Sea $\mu > 0$ tal que $[c-\mu, c+\mu] \subset [a,b]$. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t) \, dt \Big/ \int_{c-\mu}^{c+\mu} f^n(t) \, dt \right)$.
2. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ continua. Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(t) g(t) \, dt \Big/ \int_a^b f^n(t) \, dt \right)$.

Solución ▼ [004335]

Ejercicio 4708 Ecuación integral

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continua tal que $f(x) \int_0^x f^2(t) \, dt \to \ell \neq 0$ (cuando $x \to +\infty$). Encontrar un equivalente de f en $+\infty$.

Solución ▼ [004336]

Ejercicio 4709 Convolución

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y $a, b \in \mathbb{R}$. Se establece $\varphi(x) = \int_a^b f(t) g(x-t) \, dt$.

1. Demostrar que φ es continua y que si g es de clase $\mathscr{C}^k$, entonces φ, lo es también.
2. Demostrar que si f es de clase $\mathscr{C}^1$ (y g continua), entonces φ es también de clase $\mathscr{C}^1$.

[004337]

Ejercicio 4710 Convolución (Mines MP 2003)

Sean $f, g \in \mathscr{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Se define $h(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) \, dt$.

1. Existencia y continuidad de h.
2. ¿Se puede invertir f y g ?
3. Se supone f integrable en $[0, +\infty[$ y g acotada. Demostrar que h es acotada.

4. Se toma $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $g(x)=\cos(\alpha x)$, con $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. h ¿es acotada (se pueden estudiar los casos $\alpha=0$ y $\alpha=1$)?

[004338]

Ejercicio 4711 Cálculo de integral

1. Calcular $\varphi(a)=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+at}$.
2. Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^1\frac{t\,dt}{(1+at)^2}$.

Solución ▼ [004339]

Ejercicio 4712 Función definida por una integral

Se establece $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x/t}\,dt$.

1. Demostrar que φ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Verificar que $\varphi''(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

[004340]

Ejercicio 4713 Función definida por una integral, Mines 1999

Sea $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$. Demostrar que $I(\alpha)$ existe y define una función de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $]0,1[$. Escribir $I(\alpha)$ como suma de una serie. [004341]

Ejercicio 4714 Función definida por una integral

Se establece para $x\geqslant 0$: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$. Calcular explícitamente $f'(x)$ y deducir $f(x)$ (se calcula $f(0)$ usando el cambio de variable $u=1/t$).

Solución ▼ [004342]

Ejercicio 4715 Función definida por una integral

Se establece $I(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos^2 t+x^2\operatorname{sen}^2 t)\,dt$.

1. Demostrar que I es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calcular $I'(x)$ y deducir $I(x)$.

Solución ▼ [004343]

Ejercicio 4716 Integral de Gauss

Se consideran las funciones definidas por : $f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)^2$ y $g(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Demostrar que f y g son derivables y calcular f' y g'.
2. Demostrar que $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$, para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

3. Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004344]

Ejercicio 4717 Integral de Gauss, Ensi PC 1999

Se da : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Existencia y valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$.

Solución ▼ [004345]

Ejercicio 4718 Función definida por una integral

1. Sea $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$. Demostrar que I es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$.
2. Determinar una relación simple entre I y I'.
3. Deducir el valor de $I(x)$ $\left(\text{se admite que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Solución ▼ [004346]

Ejercicio 4719 Funciones definidas por integrales

Se establece, para x real, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2}\,dt$ y $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

1. Demostrar que las integrales $F(x)$ y $G(x)$ son convergentes absolutamente para todo x real y que $F(x) = |x|F(1)$.
2. Demostrar que la función $F-G$ es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$. Deducir que G es $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^*$ y no es derivable en 0.

[004347]

Ejercicio 4720 Teorema de división de funciones $\mathscr{C}^\infty$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ y $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Verificar que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,dt$. Deducir que g es de clase $\mathscr{C}^\infty$. Demostrar igualmente que la función $g_k : x \mapsto \frac{1}{x^k}\left(f(x)-f(0)-xf'(0)-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)\right)$ se extiende a una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en 0.

[004348]

Ejercicio 4721 $y''+y=f$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Se define $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(x-t)\,dt$. Demostrar que g es la única solución de la ecuación diferencial : $y''+y=f(x)$ tal que $y(0)=y'(0)=0$. [004349]

Ejercicio 4722 Función definida por una integral

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Se define para $x\in\mathbb{R}^*$ y $y\in\mathbb{R}$: $g(x,y) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,dt$.

1. Demostrar que g puede extenderse a una función continua en $\mathbb{R}^2$.

2. Se supone además f derivable en 0. Demostrar que g es de clase $\mathscr{C}^1$.

Solución ▼ [004350]

Ejercicio 4723 Funciones definidas por integrales

Construir las curvas representativas de las siguientes funciones :

1. $f(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x+t| \operatorname{sen} t \, dt$.
2. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
3. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.
4. $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t \, dt}{t+x}$.
5. $f(x) = \int_0^{\pi/2} x \exp\left(\frac{\operatorname{sen} t}{x}\right) dt$.
6. $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \, dt$.

Solución ▼ [004351]

Ejercicio 4724 Función definida por una integral

Demostrar que existe un único real $x \in [0,\pi]$ tal que $\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \, d\theta = 0$. Calcular un valor aproximado de x con una precisión de 10^{-2}.

Solución ▼ [004352]

Ejercicio 4725 Desarrollo en serie, Ensam PSI 1998, Mines MP 1999

Sea $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{e^x - 1} \, dx$.

1. Justificar la existencia de $I(\alpha)$.
2. Determinar los reales a y b tales que : $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
3. Dar un equivalente de $I(\alpha)$, cuando $\alpha \to +\infty$.

Solución ▼ [004353]

Ejercicio 4726 Fórmula de Stirling

Demostrar que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$, para x real tendiendo a $+\infty$.

Solución ▼ [004354]

Ejercicio 4727 Desarrollo en serie, Mines 1999

Sea $\theta \in]0,\pi[$. Demostrar que $\int_0^1 \frac{dt}{e^{-i\theta} - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in\theta)}{n}$. [004355]

Ejercicio 4728 Función definida por una integral, X 1999

1. Calcular $f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) \, dt$.

2. Sea $g(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\, dt$; calcular $\lim_{a \to +\infty} g(a)$.

Solución ▼ [004356]

Ejercicio 4729 Desarrollo asintótico

Sean $J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + x^2 \cos^2 t}}$ y $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + x^2 \cos^2 t}}$. Calcular $\lim_{x \to 0^+} (J(x) - K(x))$ y demostrar que $J(x) = -\ln x + 2\ln 2 + o_{x \to 0^+}(1)$. [004357]

Ejercicio 4730 Transformada de Laplace

Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua tal que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge (no necesariamente absolutamente). Se define $\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$.

1. Demostrar que φ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $]0, +\infty[$.
2. Demostrar que φ es continua en 0.

Solución ▼ [004358]

Ejercicio 4731

Se establece para $n \geqslant 2 : v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\, dx$. Demostrar que la sucesión (v_n) converge. Naturaleza de la serie $\sum (v_n - 1)$?

Solución ▼ [004359]

Ejercicio 4732

Se establece para $n \geqslant 2$ $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx$. Demostrar que la sucesión (u_n) converge, luego que la serie $\sum (u_n - 1)$ converge igualmente.

Solución ▼ [004360]

Ejercicio 4733 Central MP 2000

Dominio de definición de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha}\, dx$. Calcular $I(2)$ y $I(3)$. Determinar el límite de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

Solución ▼ [004361]

Ejercicio 4734 Central MP 2000

Se considera $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Dominio de definición, monotonía, convexidad de f (sin derivar f).
2. Continuidad, derivabilidad, cálculo de $f^{(k)}(x)$.
3. Dar un equivalente de $f(x)$ en 0 y en 1.
4. Calcular $f(1/n)$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Solución ▼ [004362]

Ejercicio 4735 Ensae MP* 2000

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encontrar el límite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(k\alpha)}{n+k}$.

Solución ▼ [004363]

Ejercicio 4736 Polytechnique MP* 2000

Existencia y continuidad de $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt$. Demostrar que f es integrable.

Solución ▼ [004364]

Ejercicio 4737 Central MP 2001

1. Desarrollar, para todo $x>0$, $s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{e^{xt}-1}\,dt$ en series de fracciones racionales.
2. Demostrar que en 0^+, $s(x)$ es equivalente a $\frac{\pi}{2x}$.

Solución ▼ [004365]

Ejercicio 4738 X MP* 2001

Estudiar $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Solución ▼ [004366]

Ejercicio 4739 Ensi MP 2004

Sea $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$.

1. Encontrar el dominio de definición de f.
2. Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calcular $f - f'$.
4. Dar un equivalente simple de $f'(x)$, para $x \to +\infty$.
5. Demostrar que $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.
6. Dibujar la curva de f.

Solución ▼ [004367]

Ejercicio 4740 Ensea MP 2004

Sea $\alpha > 0$.

1. Demostrar que $f : x \mapsto e^{-\alpha x} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ es integrable en $\mathbb{R}^+$.
2. Calcular $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Indicación : escribir $I = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$.

Solución ▼ [004368]

Ejercicio 4741 X MP* 2000

Estudiar el límite en 0+ de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t} e^{-xt}\, dt$.

Solución ▼ [004369]

Ejercicio 4742 ζ y Γ

Demostrar, para $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt$. [004370]

Ejercicio 4743 Central MP 2002

Sea $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1}$. Determinar su dominio de definición ; estudiar su continuidad y su monotonía.
Calcular $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t}$ y deducir las equivalencias y los límites de f en 0 y en $+\infty$.

Solución ▼ [004371]

Ejercicio 4744 Polytechnique MP 2002

Sea $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinar un equivalente para $n \to \infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} \operatorname{sen}(x) \exp(\lambda n \operatorname{sen}^2(x))\, dx$.

Solución ▼ [004372]

Ejercicio 4745 Central MP 2004

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_0 = 1$ y $a_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n)\, dt$.

1. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie entera $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?
2. Dar un equivalente de a_n.

Solución ▼ [004373]

Ejercicio 4746 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$, Mines-Ponts MP 2004

Sea $u_n(t)$ el término general de una serie : $u_n(t) = t^{n-1} \operatorname{sen}(nx)$, con $0 < x < \pi$.

1. Estudiar la convergencia de la serie.
2. Calcular $\sum\limits_{p=0}^{n} u_p(t) = S_n(t)$. Expresar $S_n(t)$ bajo la forma $\dfrac{P_n(t)}{Q(t)}$, con $Q(t) > \alpha$, $\alpha > 0$.
3. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(t)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 S_n(t)\, dt$.
4. Deducir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$.

Solución ▼ [004374]

Ejercicio 4747 Lema de Lebesgue, Central MP 2004

Sea f continua a trozos definida en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{C}$.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt \to 0$, cuando $n \to \infty$.
2. Se supone que f es integrable en $]0, +\infty[$. Sea $u_n = \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2(nt) f(t)\,dt$. Demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite cuando $n \to \infty$ y precisarla.

Solución ▼ [004375]

Ejercicio 4748 Sucesión de integrales, Central MP 2004

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de funciones definidas por : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. Demostrar que (f_n) converge simplemente a una función φ.
2. (a) ¿La convergencia es uniforme ?
   (b) ¿La convergencia es monótona ?
3. Sea, para $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Demostrar que $J_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Solución ▼ [004376]

Ejercicio 4749 Mines-Ponts MP 2004

Sea $f(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} t^x\,dt$. Estudiar el dominio de la definición de f, su derivabilidad, luego calcular $f(x)$.

Solución ▼ [004377]

Ejercicio 4750 Mines-Ponts MP 2004

Sea $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x} \mathrm{e}^{-ax}\,dx$.

1. ¿Cuál es el dominio de la definición de I ?
2. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de I.
3. Calcular $I(a)$.

Solución ▼ [004378]

Ejercicio 4751 ENS Lyon MP* 2004

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ y $F(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-itx}\,dt$, con $a < 0 < b$. Demostrar que $F(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.
2. Demostrar que $F(x) = \frac{f(a)\mathrm{e}^{-iax} - f(b)\mathrm{e}^{-ibx}}{ix} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Demostrar la convergencia de la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-it^2/2}\,dt$.
4. Sea $g(x) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-ixt^2/2}\,dt$. Demostrar que $g(x) = \frac{I \cdot f(0)}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Solución ▼ [004379]

Ejercicio 4752 Teorema de d'Alembert-Gauss

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ de grado $n \geqslant 1$. El propósito de este ejercicio es demostrar que P admite una raíz en $\mathbb{C}$. Se supone al contrario que P no se anula y se considera para $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r,\theta) = \dfrac{r^n e^{en\theta}}{P(re^{i\theta})}$ y $F(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, d\theta$.

1. Demostrar que F es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $[0,+\infty[$.
2. Verificar que $ir\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$. Deducir que F es constante.
3. Obtener una contradicción.

[004380]

Ejercicio 4753 ****

Sea f una función continua en $[a,b]$. Para x real, se establece $F(x) = \displaystyle\int_a^b |t-x| f(t)\, dt$. Estudiar la derivabilidad de F sobre $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005453]

Ejercicio 4754 ***

Estudio completo de $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Solución ▼ [005460]

Ejercicio 4755 ***I

— Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

— Estudio completo de $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Solución ▼ [005464]

Ejercicio 4756

Estudio de $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1-2t\cos x + t^2}\, dt$.

Solución ▼ [005472]

Ejercicio 4757

Estudio de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)\, dt$.

Solución ▼ [005473]

Ejercicio 4758 **

Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in]0,+\infty[$, se establece $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Calcular la derivada de la función I_n sobre $]0,+\infty[$.
2. Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt$.

Solución ▼ [005765]

Ejercicio 4759 *** I (muy largo) Integral de Poisson

Para $x \in \mathbb{R}$, se establece $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$.

1. (a) Demostrar que F es par, definida y continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Precisar una expresión de $F'(x)$ en forma integral.
   (b) Calcular $F'(x)$.
   (c) Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - 4\pi \ln x)$.
   (d) Deducir $F(x)$, para todo real x.
2. (a) Cuando $x \in]-1,1[$, encontrar este resultado escribiendo primero $\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$ como suma de una serie (comenzar por derivar la función de θ).
   (b) Determinar una relación entre $F(x)$ y $F\left(\frac{1}{x}\right)$ y deducir $F(x)$, para todo real x.

Solución ▼ [005766]

Ejercicio 4760 ** I Un cálculo de la integral de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

Para $x \in \mathbb{R}$, se establece $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ y $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$.

1. Demostrar que F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y precisar F'.
2. Demostrar que G es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y precisar G'.
3. Demostrar que la función $F+G$ es constante en $\mathbb{R}$.
4. Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
5. Deducir I.

Solución ▼ [005767]

Ejercicio 4761 ***

Existencia y cálculo de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)\, dt$ (se admite que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Solución ▼ [005768]

Ejercicio 4762 ***

Existencia y cálculo de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt$.

Solución ▼ [005769]

Ejercicio 4763 **** I (muy largo)

Demostrar que para todo real x estrictamente positivo, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{x+t}\,dt$ y deducir $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ (Indicación : encontrar una ecuación diferencial de segundo orden verificada por estas dos funciones).

Solución ▼ [005770]

Ejercicio 4764 ** I (Producto de convolución)

1. Sean f y g dos funciones definidas en $\mathbb{R}$, continuas y T-periódicas (T real estrictamente positivo). Para $x \in \mathbb{R}$, se establece
$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\,dt.$$
Demostrar que la función $f * g$ se define en $\mathbb{R}$, continua y T-periódica.
2. $*$ es, por lo tanto una ley interna sobre E, el espacio vectorial de funciones definidas y continuas en $\mathbb{R}$ y T-periódicas. Demostrar que esta ley es conmutativa.

Solución ▼ [005771]

184 224.04 Transformada de Laplace y transformada de Fourier

185 224.99 Otro

186 225.01 Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

Ejercicio 4765

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales :

1. $y' = y + x$, con $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x-2)^2$.

[000845]

Ejercicio 4766

Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales : escribir la solución pasando por el punto $M(.,.)$ y trazar brevemente la gráfica de la solución.

1. $y' + 2xy = 0, \quad M = (0,1)$,
2. $y' + y\tan x = \operatorname{sen} x \cos x \quad M = (\frac{\pi}{4}, 0)$,
3. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, Se determina $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

[000846]

Ejercicio 4767

Se propone integrar sobre el mayor intervalo posible contenido en $]0,\infty[$ la ecuación diferencial :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Determinar $a \in]0,\infty[$ tal que $y(x) = ax$ ya sea una solución particular y_0 de (E).
2. Demostrar que el cambio de la función incógnita : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforma la ecuación (E) en la ecuación diferencial
$$(E_1) \qquad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1.$$
3. Integrar (E_1) sobre $]0,\infty[$.
4. Dar todas las soluciones de (E) definidas en $]0,\infty[$.

Solución ▼ [000847]

Ejercicio 4768

Encontrar las soluciones reales de las siguientes ecuaciones diferenciales :

1. $y'(t) + 2y(t) = 0$;
2. $\dfrac{dx}{dt} - x = 0$;
3. $y'(x) + 2y(x) = 0$, con $(y - y')(0) = 0$.

[000848]

Ejercicio 4769

Encontrar las soluciones reales de las siguientes ecuaciones diferenciales :

1. $(1+x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y\tan x = 0$, para x en $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

[000849]

Ejercicio 4770

Encontrar las soluciones reales en el intervalo maximal de la ecuación diferencial :

$$t^2y' + y = 1.$$

[000850]

Ejercicio 4771

Sea la ecuación diferencial
$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Resolver la ecuación homogénea asociada.
2. Calcular la solución de (E) verificando $y(0) = 1$.

Solución ▼ [000851]

Ejercicio 4772

Resolver y conectar si es necesario :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1+x^2)y' = y$.
3. $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

[000852]

Ejercicio 4773

Resolver el sistema diferencial : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ y $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2. \end{cases}$

Indicación ▼ Solución ▼ [000853]

Ejercicio 4774

Resolver la ecuación diferencial de Ricatti $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$, encontrando una solución particular y_0 y usando $z = \frac{1}{y - y_0}$. [000854]

Ejercicio 4775

Sea la ecuación diferencial :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x.$$

Integrar (E) y demostrar que por un punto dado pasa una y sólo una curva integral. Sea H el conjunto de puntos M tales que la curva integral que pasa por M tiene tangente horizontal en este punto, e I el conjunto de puntos M tales que la curva integral que pasa por este punto tiene un punto de inflexión en este punto. Trazar H, I y la curva integral que pasa por $O(0,0)$. Deducir un trazado geométrico de las curvas integrales. [000855]

Ejercicio 4776

Se considera la siguiente ecuación diferencial :

$$(E) \qquad y' - (1 - \tan(x))y = \cos(x).$$

Se interesa en esta ecuación en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. (a) Escribir la ecuación homogénea asociada a (E) y resolver esta ecuación en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (b) ¿Cuál es la solución de la ecuación homogénea que satisface la condición inicial condición inicial $y(0) = 1$? Se la denota g_0. Dar la tabla de variaciones de g_0 en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Determinar los límites del intervalo. Dibujar la gráfica de g_0.
   (c) En el mismo diseño, dibujar rápidamente las gráficas de las tres soluciones de la ecuación homogénea, verificando respectivamente $y(0) = 2$, $y(0) = 3$ y $y(0) = -1$.
2. Resolver completamente la ecuación (E).
3. Resolver de la misma manera la siguiente ecuación diferencial sobre el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$y' - (1 - \tan(x))y = \cos^2(x).$$

Indicación : la primitiva puede calcularse utilizando la exponencial compleja o integración por partes.

4. ¿Cuáles son las soluciones de la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$?

$$y'-(1-\tan(x))y=\cos(x)+\cos^2(x).$$

[000856]

Ejercicio 4777

Sea $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$. Demostrar que si :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f'(x)+\alpha f(x)\right)=0$$

entonces :

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

[000857]

Ejercicio 4778

Sea $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $f(0)=1$ et $f\leqslant f'\leqslant 2f$. Encuadrar $f(-1)$ y $f(1)$. [000858]

Ejercicio 4779 **IT

Resolver en el intervalo I de la $\mathbb{R}$ propuesta las siguientes ecuaciones diferenciales :

1) $x\ln xy'+y=x,\ I=]1,+\infty[$

2) $x(xy'+y-x)=1,\ I=]-\infty,0[$

3) $2xy'+y=x^4,\ I=]-\infty,0[$

4) $y'+2y=x^2-3x,\ I=\mathbb{R}$

5) $y'+y=\frac{1}{1+2e^x},\ I=\mathbb{R}$

6) $y'\operatorname{sen}x-y\cos x+1=0,\ I=]0,\pi[$.

Solución ▼ [005476]

Ejercicio 4780 ***I

Resolver la ecuación diferencial $(1-x^2)y'-2xy=x^2$ en cada uno de los intervalos I siguientes : $I=]1,+\infty[$, $I=]-1,1[$, $I=]-1,+\infty[$, $I=\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005477]

Ejercicio 4781 ***

Resolver en $]-\infty,0[$ y $]0,+\infty[$ la ecuación diferencial : $|x|y'+(x-1)y=x^3$.

Solución ▼ [005478]

Ejercicio 4782 **

Sea a un número real distinto de cero. Sea f continua en $\mathbb{R}$ y periódica con período $T\neq 0$. Demostrar que la ecuación diferencial diferencial $y'+ay=f$ tiene una y sólo una solución periódica en $\mathbb{R}$, de período T.

Solución ▼ [005481]

Ejercicio 4783

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}$:

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\operatorname{sen} x$ (E_2)
3. $y' - y = (x+1)e^x$ (E_3)
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ (E_4)

Solución ▼ Vidéo ■ [006991]

Ejercicio 4784

Determinar todas las funciones $f : [0;1]$, derivables, tales que

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006992]

Ejercicio 4785

1. Resolver la ecuación diferencial $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ en $\mathbb{R}$. Dibujar curvas integrales. Hallar la solución que satisface $y(0) = 3$.
2. Resolver la ecuación diferencial $y' \operatorname{sen} x - y \cos x + 1 = 0$ en $]0;\pi[$. Dibujar las curvas integrales. Hallar la solución que satisface $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006993]

Ejercicio 4786 Variación de constantes

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando una solución particular por el método de variación de constantes :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ en $]0;+\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ en $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ en $]0;+\infty[$

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006994]

Ejercicio 4787

Consideremos la ecuación diferencial

$$y' - e^x e^y = a$$

Determinar sus soluciones, especificando cuidadosamente sus intervalos de definición, para

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (hacer el cambio la de función desconocida $z(x) = x + y(x)$)

En cada caso, construir la curva integral que pasa por el origen.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006995]

Ejercicio 4788

Para las siguientes ecuaciones diferenciales encontrar las soluciones definidas en $\mathbb{R}$ entero :

1. $x^2y' - y = 0 \quad (E_1)$
2. $xy' + y - 1 = 0 \quad (E_2)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006996]

Ejercicio 4789 Ecuaciones de Bernoulli y Riccati

1. **Ecuación de Bernoulli**
   (a) Demostrar que la ecuación de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n \neq 1$$
   se puede reducir a una ecuación lineal sustituyendo la función $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.
   (b) Encontrar las soluciones de la ecuación $xy' + y - xy^3 = 0$.
2. **Ecuación de Riccati**
   (a) Demostrar que si y_0 es una solución particular de la ecuación de Riccati
   $$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$
   entonces la función definida por $u(x) = y(x) - y_0(x)$ satisface una ecuación de Bernoulli (con $n = 2$).
   (b) Resolver $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ comprobando primero que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ es una solución..

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [007001]

Ejercicio 4790

1. Demostrar que toda solución en $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tiende a 0 en $+\infty$.
2. Demostrar que toda solución en $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ es acotada.
   Indicación : estudiar la función auxiliar $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.

Solución ▼ Vidéo ■ [007002]

187 225.02 Resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ejercicio 4791

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$,
2. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

[000859]

Ejercicio 4792

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbb{R}$,
4. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utilizar el principio de superposición).

[000860]

Ejercicio 4793

Se considera la ecuación homogénea (E) $ay'' + by' + cy = 0$, donde $a \neq 0$. Dar las condiciones necesarias y suficientes que ligan los coeficientes a, b y c en los dos casos siguientes casos :
(i) todas las soluciones de (E) tienden a 0, cuando x tiende a infinito ;
(ii) todas las soluciones son periódicas. [000861]

Ejercicio 4794

Resolver la ecuación :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

Se debe discutir en función de los valores de k y m. [000862]

Ejercicio 4795

Resuelve la siguiente ecuación :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Solución ▼ [000863]

Ejercicio 4796

Resuelve la siguiente ecuación :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x \operatorname{sen} x.$$

Solución ▼ [000864]

Ejercicio 4797

Resuelve la siguiente ecuación :

$$4y'' + 4y' + 5y = \operatorname{sen} x e^{-x/2}.$$

Solución ▼ [000865]

Ejercicio 4798

Se considera la ecuación :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Resolver la ecuación diferencial homogénea asociada a (E).
2. Encontrar una solución particular de (E) (explicar su concepción, luego dar el conjunto de todas las soluciones de (E).
3. Determinar la solución única h de (E), verificando que $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$.

4. Sea $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $]0,\infty[$ y que verifica :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

(a) Sea $g(x) = f(\mathrm{e}^x)$, comprobar que g es una solución de (E).

(b) Deducir una expresión de f.

Solución ▼ [000866]

Ejercicio 4799

Sea $m \in \mathbb{R}$. Determinar la solución de la ecuación :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

que verifica $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$ (Indicación : Se tratan los casos $m = 0$ y $m \neq 0$). [000867]

Ejercicio 4800

Se considera la ecuación diferencial : $y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$

1. Resolver la ecuación diferencial homogénea asociada a (E).
2. Encontrar una solución particular de (E) cuando, respectivamente, se establece : $d(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-3x}$ y $d(x) = \cos x$.
3. Dar la forma general de las soluciones de (E),cuando $d(x) = 2(x^2+1)\mathrm{e}^{-3x} + 50\cos x$.

[000868]

Ejercicio 4801

Determinar una ecuación diferencial verificada por la familia de funciones $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. [000869]

Ejercicio 4802

Determinar una ecuación diferencial que admita $(r-2)^2 = 0$ como ecuación característica y $\mathrm{e}^x + (x^3/6)\mathrm{e}^{2x}$ como solución particular. [000870]

Ejercicio 4803

Determinar el conjunto de soluciones reales de las ecuaciones :

a) $y'' + y' - 6y = \mathrm{e}^{3x}$, b) $y'' + y' - 6y = \mathrm{e}^x(2x+1)$,

c) $y'' - 4y' + 13y = \cos x$, d) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}(x+1)$ con $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. [000871]

Ejercicio 4804

Se considera la siguiente ecuación diferencial : (ED) $y'' - 4y' + 4y = d(x)$, donde d es una función que se especificará más adelante.

1. Resolver la ecuación diferencial homogénea (o sin segundo miembro) asociada a (ED).
2. Encontrar una solución particular de (ED) cuando $d(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ y cuando $d(x) = \mathrm{e}^{2x}$ respectivamente.
3. Da la forma general de las soluciones de (ED), cuando $d(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x}}{4}$.

Solución ▼ [000872]

Ejercicio 4805

Resolver en $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y = 4th^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
3. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$.
4. $y'' + y = \mathrm{e}^{-|x|}$.

[000873]

Ejercicio 4806

Encontrar las $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable tales que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x$. [000874]

Ejercicio 4807

Resolver en $]0,+\infty[$, $xy'' - y' - x^3 y = 0$ estableciendo $z(t) = y(\sqrt{t})$. [000875]

Ejercicio 4808

Resolver haciendo $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ o $y(-\mathrm{e}^t)$ según el signo de x, las siguientes ecuaciones diferenciales (de Euler) :

1. $x^2 y'' - 2y = x$.
2. $x^2 y'' + xy' + y = x \ln|x|$.

[000876]

Ejercicio 4809

Resolver la ecuación diferencial de Bernoulli $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$, suponiendo que y no desaparezca y haciendo $z = \frac{1}{y}$. [000877]

Ejercicio 4810

Resolver en $\mathbb{R}$: $x\dfrac{dy(x)}{dx} - 2y(x) = x^4, \quad y''(x) - 4y(x) = 4\mathrm{e}^{-2x}, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$. [000878]

Ejercicio 4811

Poniendo $z = \frac{1}{y}$ y asumiendo que y no se anula, resolver la ecuación (de Bernoulli) : $x^2\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - x\dfrac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0$. [000879]

Ejercicio 4812

Resolver : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$.

Solución ▼ [000880]

Ejercicio 4813

Determinar $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x \cos x$.

Solución ▼ [000881]

Ejercicio 4814

Sea p continua positiva no nula ; demostrar que cualquier solución de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ se anula al menos una vez en $\mathbb{R}$. [000882]

Ejercicio 4815

Demostrar que cualquier solución de $y''(x)\mathrm{e}^{-x^2} + y(x) = 0$ es acotada en $\mathbb{R}$. [000883]

Ejercicio 4816

Poniendo $t = \arctan x$, resolver : $y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0$.

Solución ▼ [000884]

Ejercicio 4817

Resolver por cambio de función $z = \frac{y}{x}$ la ecuación diferencial : $x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2-x^2)y(x) = 0$.

Solución ▼ [000885]

Ejercicio 4818 **

Resolver en $\mathbb{R}$ las ecuaciones diferenciales :

1) $y'' - 2y' + 2y = x \cos x \operatorname{ch} x$ 2) $y'' + 6y' + 9y = x^2\mathrm{e}^{2x}$

3) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$ 4) $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Solución ▼ [005479]

Ejercicio 4819 **

Se considera la ecuación diferencial (E) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c reales, $a \neq 0$) para $x \in]0, +\infty[$.

1. Sea y una función dos veces diferenciable en $]0, +\infty[$. Para $t \in \mathbb{R}$, se establece $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Verificar que y es dos veces diferenciable en $]0, +\infty[$ si y solo si z es dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$.
2. Realiza el cambio de incógnita anterior en la ecuación diferencial (E) y comprueba que la resolver (E) se reduce a resolver una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.
3. Resolver en $]0, +\infty[$, la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Solución ▼ [005480]

Ejercicio 4820

Resolver

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 0$
4. $y'' + y = 2\cos^2 x$.

Solución ▼ Vidéo ■ [006997]

Ejercicio 4821

Se considera $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Resolver la ecuación homogénea, luego encontrar una solución particular cuando $d(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, luego $d(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Da la forma general de las soluciones cuando $d(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006998]

Ejercicio 4822

Resolver en $]0;\pi[$ la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{cotan} x$, donde $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006999]

Ejercicio 4823

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando el cambio de variable sugerido.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, en $]0;+\infty[$, configurando $x = \mathrm{e}^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, en $\mathbb{R}$, configurando $x = \tan t$ (en función de $m \in \mathbb{R}$).

Solución ▼ Vidéo ■ [007000]

Ejercicio 4824

1. Resolver en $]0;+\infty[$ la ecuación diferencial $x^2y'' + y = 0$ (usar el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$).
2. Encontrar todas las funciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$ verificando $\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [007003]

188 225.03 Conexión de soluciones

189 225.04 Ecuaciones diferenciales lineales

Ejercicio 4825 Ecuaciones lineales de orden 1

Integrar las siguientes ecuaciones :

1. $(2+x)y' = 2 - y$.
2. $xy' + y = \cos x$.
3. $(1+x)y' + y = (1+x)\operatorname{sen} x$.
4. $x^3y' - x^2y = 1$.
5. $3xy' - 4y = x$.
6. $y' + y = \operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} 2x$.
7. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.
8. $x(x+1)y' + y = \arctan x$.
9. $x(x^2-1)y' + 2y = x\ln x - x^2$.
   Para 8 : Estudiar los problemas de conexión.

Solución ▼ [004054]

Ejercicio 4826 Ecuaciones de orden 2 con coeficientes constantes

Integrar :

1. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\operatorname{sen} 2x$.
4. $y'' + y = \operatorname{cotan} x$.
5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
6. $y'' + y = P(x)$, donde P es un polinomio.
7. $y'^2 + y^2 = 1$ (derivar).

Solución ▼ [004055]

Ejercicio 4827 Ecuaciones de orden 2 con coeficientes no constantes

Integrar las siguientes ecuaciones :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (establecer $u = e^x$).
2. $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2 y = x^4$ (establecer $u = x^2$).
3. $x(1 - 2\ln x)y'' + (1 + 2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ (buscar una solución de la forma $y = x^\alpha$).
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \operatorname{sen} x$ (establecer $u = \ln x$).
5. $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (buscar una solución de la ecuación homogénea de la forma $y = x^\alpha$).
6. $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ $\left(\text{poner } y = \frac{u}{x^2}\right)$.
7. $(x^2 + 3)y'' + xy' - y = 1$ (encontrar soluciones polinómicas).
8. $xy'' - 2y' - xy = 0$ (derivar dos veces).

Solución ▼ [004056]

Ejercicio 4828 Resolución de DSE

Encontrar las soluciones desarrollables en series enteras de las siguientes ecuaciones y resolver completamente estas ecuaciones.

1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$.
2. $xy'' + 2y' - xy = 0$.
3. $4xy'' + 2y' - y = 0$.
4. $y'' + xy' + 3y = 0$.
5. $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$.
6. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Solución ▼ [004057]

Ejercicio 4829 $y^{(4)} + y'' + y = |\operatorname{sen} x|$

Demostrar que la ecuación : $y^{(4)} + y'' + y = |\operatorname{sen} x|$ tiene una y sólo una solución π-periódica.

Solución ▼ [004058]

Ejercicio 4830 $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Sea $k \in \mathbb{R}$. Resolver $y'' + k^2y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Solución ▼ [004059]

Ejercicio 4831 $y' = |x-y|$

Resolver la ecuación : $y' = |x-y|$. Estudiar los problemas de conexión.

Solución ▼ [004060]

Ejercicio 4832 $y'' + |y| = 1$

Resolver la ecuación $y'' + |y| = 1$, con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Solución ▼ [004061]

Ejercicio 4833 Mines MP 2000

Resolver $(E) : 4xy'' + 2y' + y = 0$ sabiendo que (E) admite dos soluciones y y z tales que $yz = 1$. ¿Cómo resolver esta ecuación sin la indicación ?

Solución ▼ [004062]

Ejercicio 4834 Mines MP 2000

Sea $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

1. Demostrar que, para todo $f \in E$, existe un único g de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tal que $\begin{cases} g' + ag = f \\ g(0) = b. \end{cases}$
2. Demostrar que si f es integrable sobre $\mathbb{R}^+$, g también lo es. Relación entre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

Solución ▼ [004063]

Ejercicio 4835 Sistemas diferenciales con coeficientes constantes

x, y, z son funciones de t. Resolver los sistemas :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = y + z + \operatorname{sen} t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x + yz \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

Solución ▼ [004064]

Ejercicio 4836 Sistema diferencial con coeficientes no constantes

Resolver el siguiente sistema diferencial : $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$

Solución ▼ [004065]

Ejercicio 4837 Lema de los núcleos, Matexo

Sean $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ y (E) la ecuación : $y'' + py' + qy = 0$. Denotamos S el conjunto de soluciones de (E) y D la aplicación de S en S definida por $D(f) = f'$.

1. ¿D puede ser una homotecia ?
2. Determinar los valores de p y q para los cuales D no es un isomorfismo de S.
3. Comprobar que $D\circ D+pD+q\mathrm{id}_S=0$ y demostrar que existen números complejos r_1 y r_2 tales que : $(D-r_1\mathrm{id}_S)\circ(D-r_2\mathrm{id}_S)=0$.
4. ¿Las aplicaciones $D-r_1\mathrm{id}_S$, $D-r_2\mathrm{id}_S$ pueden ser invertibles ?

[004066]

Ejercicio 4838 $y''+x\,y'+y=0$, Matexo

Denotamos por y la solución de la ecuación diferencial $y''+x\,y'+y=0$, con las condiciones de Cauchy $y(0)=0, y'(0)=1$.

1. Demostrar que las derivadas de y satisfacen $y^{(n)}+x\,y^{(n-1)}+(n-1)\,y^{(n-2)}=0$, $\forall n\geqslant 2$.
2. Calcular por inducción las derivadas sucesivas de y en cero.
3. Demostrar que y admite un desarrollo limitado en el origen $(x\to 0)$:
$y(x)=x-\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2k+2})$.

[004067]

Ejercicio 4839 $f''(x)+f(-x)=x\cos x$

Encontrar las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tales que : $\forall x\in R$, $f''(x)+f(-x)=x\cos x$.

Solución ▼ [004068]

Ejercicio 4840 $y''+\frac{2y'}{\operatorname{th}x}+y=0$

Se considera la ecuación diferencial : $(*)\iff y''+\frac{2y'}{\operatorname{th}x}+y=0$.

1. Hacemos $z(x)=y'(x)+\frac{y(x)}{\operatorname{th}x}$. Escribir la ecuación diferencial (de orden 1) en z deducida de $(*)$.
2. Resolver en $]-\infty,0[$ y $]0,+\infty[$ la ecuación en z, luego $(*)$.
3. Entre las soluciones encontradas, ¿cuáles pueden prolongarse en 0 ?
   Denotamos por y_0 la solución de $(*)$ tal que $y_0(x)\to 1$ cuando $x\to 0$.
4. Demostrar que y_0 es de clase $\mathscr{C}^1$ y que $\frac{y_0'(x)}{\operatorname{th}x}$ admite un límite finito en 0.
   Deducir que y_0 es de clase $\mathscr{C}^2$ en $\mathbb{R}$.
5. ¿Es el área entre la curva de y_0 y el eje de abscisas finita ?

Solución ▼ [004069]

Ejercicio 4841 $y''+2xy'+(x^2-1)y=0$

Sea $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y $\Phi:E\to E$, definido por $\Phi(f)=g$, donde g es la aplicación $g:t\mapsto f'(t)+tf(t)$.

1. Encontrar los valores propios y los vectores propios de Φ.
2. Encontrar los valores propios y los vectores propios de Φ^2.
3. Resolver la ecuación : $y''+2xy'+(x^2-1)y=0$.

Solución ▼ [004070]

Ejercicio 4842 $x^2 f''(x) + x f'(x) = \lambda f(x)$

Determinar los elementos propios de los siguientes endomorfismos :

1. $E = \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P)(X) = X^2 P''(X) + X P'(X)$.
2. $E = \mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[)$, $\Phi(f)(x) = x^2 f''(x) + x f'(x)$.
3. $E = \mathscr{C}^\infty(]0, 1[)$. $\Phi(f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} f'(x)$.

Solución ▼ [004071]

Ejercicio 4843 $AP' - nA'P = \lambda P$

Sea A un polinomio dado con coeficientes reales de grado 2. Al polinomio P de grado menor o igual a $2n$ se hace corresponder el polinomio $Q = AP' - nA'P$.

1. Demostrar que así definimos un endomorfismo Φ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Encontrar los valores propios y los vectores propios de Φ en los casos particulares :

   (a) $A = X^2 - 1$, (b) $A = X^2$, (c) $A = X^2 + 1$.

Solución ▼ [004072]

Ejercicio 4844 Ecuación integral

Encontrar las aplicaciones continuas $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ verificando para todo $x > 0$: $\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)^2$.

Solución ▼ [004073]

Ejercicio 4845 Desigualdades diferenciales

Sea $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, y y, z soluciones de $\begin{cases} y(0) = z(0) \\ y' = a(t)y + b(t) \\ z' \leqslant a(t)z + b(t). \end{cases}$

Demostrar que : $\forall t \geqslant 0$, se tiene $y(t) \geqslant z(t)$.

Solución ▼ [004074]

Ejercicio 4846 Tangentes paralelas o concurrentes

Sea la ecuación $(*) \Leftrightarrow y' = a(x)y + b(x)$ y x_0 un número real fijo. Demostrar que las tangentes a las curvas integrales en el punto de abscisas x_0 son paralelas o concurrentes.

Solución ▼ [004075]

Ejercicio 4847 $y' + ay =$ función periódica

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T -periódica. Se considera la ecuación : $(*) \Leftrightarrow y' + \lambda y = \varphi(x)$.

1. Demostrar que si y es una solución de $(*)$, entonces $y(x+T)$ también es una solución.
2. Deducir que y, solución de $(*)$, es T-periódica si y sólo si $y(0) = y(T)$.

3. Demostrar que, salvo valores excepcionales de λ, la ecuación $(*)$ admite una y sólo una solución T-periódica.

[004076]

Ejercicio 4848 Coeficientes periódicos

Se considera la ecuación $(*) \Leftrightarrow y' + a(x)y = b(x)$, donde a, b son funciones continuas, T-periódicas.

1. Demostrar que si y es una solución de $(*)$, entonces la función definida por $z(x) = y(x+T)$ también es una solución.
2. Deducir que si $\int_0^T a(t)\,dt \neq 0$, entonces $(*)$ admite un única T-solución periódica.

Solución ▼ [004077]

Ejercicio 4849 Ecuación integral

Sea $E = \{\text{fcs} : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continuas }\}$ y $\Phi : E \to E, f \mapsto g$, con $g(x) = \int_0^1 \inf(t,x) f(t)\,dt$.
Encontrar los valores propios y las funciones propias de Φ.

Solución ▼ [004078]

Ejercicio 4850 Matexo

Sea $k \in \mathbb{R}^*$ fijo. Se considera : $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 3\}$.
Determinar $\inf_{f\in E} \int_0^1 (f'(t) + kf(t))^2\,dt$. *Sugerencia : establecer $f' + kf = g$ y calcula $f(1)$ como una función de g.*

Solución ▼ [004079]

Ejercicio 4851 Ulm-Lyon-Cachan MP* 2000

Sean u, v, w tres aplicaciones acotadas de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}^3$, verificando : $u' + v' = w$; $w' = -v$; $\int_0^{\infty} \|u'\|^2 < +\infty$. Supongamos que existe una sucesión de términos generales t_n que tiende a $+\infty$ tal que $u(t_n)$ tiende a $a \in \mathbb{R}^3$.

1. Demostrar que la sucesión de términos generales $u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,dt$ tiende a a.
2. Demostrar que las sucesiones de términos generales $v_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt$ y $w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt$ tienden a 0.

Solución ▼ [004080]

Ejercicio 4852 Centrale MP 2001

Sea f continua e integrable sobre $\mathbb{R}$. Se considera la ecuación diferencial $(E) : y' - y + f = 0$.

1. Demostrar que (E) admite una única solución F acotada en $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que F es integrable sobre $\mathbb{R}$ y comparar $\int_{-\infty}^{+\infty} F$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Solución ▼ [004081]

Ejercicio 4853 Centrale MP 2001

Encontrar las funciones continuas f, g verificando : $\int_0^x f(t)\,dt = x - 1 + g(x)$ y $\int_0^x g(t)\,dt = x - 1 + f(x)$.

Solución ▼ [004082]

Ejercicio 4854 X MP* 2000

Se considera la ecuación diferencial $y' = \operatorname{sen}(x+y)$. Demostrar que para cualquier condición inicial el intervalo maximal es $\mathbb{R}$. ¿Conjunto de puntos de inflexión de las curvas solución ?

Solución ▼ [004083]

Ejercicio 4855 Polytechnique PC 2002

Se considera la ecuación diferencial : $(E) \Leftrightarrow u''(x) + (k - 2d\cos(x))u(x) = 0$.

1. Existencia y dominio de definición de soluciones maximales A y B tales que $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ y $B(0) = 0$, $B'(0) = 1$.
2. Demostrar que A es par y B es impar.
3. Demostrar que $A(k,d,x) = A(k,0,x) + 2d\int_0^x B(d,0,xt)A(k,d,x)\cos(t)\,dt$.

Solución ▼ [004084]

Ejercicio 4856 $f \mapsto f + f'$ (Mines MP 2003)

Sea E el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ es acotada.
Sea $u : E \to E$, $f \mapsto f + f'$.

1. Demostrar que $u \in \mathscr{L}(E)$.
2. ¿Es u inyectiva ?
3. ¿Es u sobreyectiva ?

Solución ▼ [004085]

Ejercicio 4857 Centrale MP 2004

Se considera la ecuación diferencial : $-y'' + \frac{y}{p^2} = f$, donde $p \in \mathbb{N}^*$ y f es una función continua dada.

1. Da las soluciones de esta ecuación. Demostrar que $x \mapsto -\int_0^x pf(t)\operatorname{sh}\left(\frac{xt}{p}\right)dt$ es solución.
2. Demostrar que existe una solución única tal que $y(0) = y(1) = 0$. La denotamos u_p.
3. Demostrar que (u_p) simplemente converge a una función que se debe determinar.

Solución ▼ [004086]

Ejercicio 4858 Centrale MP 2004

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \frac{d^2u(x)}{dx^2} + (1-\lambda)x^2u(x) = 0$.

1. Demostrar que las soluciones de $(\mathscr{E})$ son de la forma $H(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$, donde H es una función expandible de serie entera.
2. Determinar los valores de λ tales que H es una función polinomial no nula.

Solución ▼ [004087]

Ejercicio 4859 Lema de Gronwall (X MP* 2003)

Sean f, g dos funciones continuas y $a \in \mathbb{R}$ satisfaciendo : $\forall t \geqslant 0,\ g(t) \geqslant 0$, y $f(t) \leqslant a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$.

Demostrar : $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \leqslant a\exp\left(\int_0^t g(u)\,du\right)$.

Solución ▼ [004088]

Ejercicio 4860 $y'' + y \geqslant 0$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geqslant 0$.
Demostrar que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Solución ▼ [004089]

Ejercicio 4861 $f'' + f' + f \to 0$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $f''(t) + f'(t) + f(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$. Demostrar que $f(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Solución ▼ [004090]

Ejercicio 4862 $f'' \geqslant f + 2/ch(x)^3$, Centrale PC 1997

Sea f de clase $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y para todo x, $f''(x) \geqslant f(x) + \dfrac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Demostrar para todo x : $f(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$. [004091]

Ejercicio 4863 $y' + ay = b,\ y(-\infty) = 0$

Sea $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) \geqslant 1$ y $b(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

1. Demostrar que cualquier solución de la ecuación : $y' + ay = b$ tiende a 0 en $+\infty$.
2. Se supone que $b(x) \to 0$, cuando $x \to -\infty$. Demostrar que existe una solución única y que tiende a 0 en $-\infty$.

Solución ▼ [004092]

Ejercicio 4864 $y'' + ay = 0,\ a > 0 \Rightarrow y$ se anula

Sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ una función continua.

1. Sea y una solución de la ecuación $y'' + a(x)y = 0$. Demostrar que y se anula al menos una vez en $\mathbb{R}$.
2. Sea z una solución de la ecuación $z'' - a(x)z = 0$. Demostrar que $z = 0$ o bien z se anula como máximo una vez en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [004093]

Ejercicio 4865 $y''+ay'=0$ a creciente positiva => y es acotada

Sea $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ estrictamente positiva creciente e y una solución de la ecuación : $y''+a(t)y=0$. Demostrar que y es acotada en un vecindario de $+\infty$. (Estudiar $z=y^2+y'^2/a$). [004094]

Ejercicio 4866 $y''+ay=0$, a integrable

Sea $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continua integrable. Demostrar que la ecuación $y''+a(t)y=0$ admite soluciones no acotadas en $[0,+\infty[$ (se comienza demostrando que si y_1,y_2 son dos soluciones entonces el determinante wronskiano de y_1 y y_2 es constante).

Solución ▼ [004095]

Ejercicio 4867 Ceros intercalados (Centrale MP 2003)

Sean r y q dos funciones continuas definidas en $I=[a,b]$ tales que : $\forall x\in I$, $r(x)\geqslant q(x)$.
Se considera las ecuaciones diferenciales : $(E_1)\Leftrightarrow y''+qy=0$, $\quad(E_2)\Leftrightarrow z''+rz=0$.

1. Sea y una solución de (E_1) y x_0,x_1 dos ceros consecutivos de y. ¿Pueden $y'(x_0)$ y $y'(x_1)$ ser nulos ? ¿Qué se puede decir de sus signos ?
2. Sea z una solución de (E_2). Se considera $W(x)=\begin{vmatrix} y(x) & z(x)\\ y'(x) & z'(x)\end{vmatrix}$. Calcular $W'(x)$ y $W(x_1)-W(x_0)$.
3. Demostrar que z tiene un cero en $]x_0,x_1[$ o $z(x_0)=z(x_1)=0$.
4. Sea u una solución de (E_1). Demostrar que u es proporcional a y, o admite un solo cero en $]x_0,x_1[$.

Solución ▼ [004096]

Ejercicio 4868 Ceros de las soluciones de $y''+ay'+by=0$

Se considera la ecuación $(*)\iff y''+a(t)y'+b(t)y=0$, con a,b continuas.

1. Sea y una solución distinta de cero de $(*)$. Demostrar que los ceros de y son aislados.
2. Sean y,z dos soluciones no proporcionales de $(*)$.
   (a) Demostrar que y y z no tienen ceros comunes.
   (b) Demostrar que si u,v son dos ceros consecutivos de y, entonces z tiene cero único en el intervalo $]u,v[$ (estudiar $\frac{z}{y}$).

Solución ▼ [004097]

Ejercicio 4869 $y''+\left(1+\frac{\lambda}{t^2}\right)y=0$

Sean $\lambda>0$ y y una solución de $y''+\left(1+\frac{\lambda}{t^2}\right)y=0$. Demostrar que para todo $a\in\mathbb{R}$, y tiene un cero en el intervalo $]a,a+\pi[$. (Estudiar $z=y'\varphi\check{\ }y\varphi'$, donde $\varphi(t)=\operatorname{sen}(t-a)$).

Solución ▼ [004098]

Ejercicio 4870 $y''+e^d ad=0$

Sea $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una solución cero no idéntica de $y''+e^d ad=0$.

1. Demostrar que el conjunto de ceros de y es infinito numerable.

2. Se denota a_n el n-ésimo cero positivo de y. Usando las funciones $\begin{cases} \varphi(t) = \operatorname{sen}\Big(\mathrm{e}^{a_n/2}(t-a_n)\Big) \\ \psi(t) = \operatorname{sen}\Big(\mathrm{e}^{a_{n+1}/2}(t-a_n)\Big), \end{cases}$

   demostrar que $\dfrac{\pi}{\mathrm{e}^{a_{n+1}/2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \dfrac{\pi}{\mathrm{e}^{a_n/2}}$.
3. Da un equivalente de a_n, cuando $n \to \infty$.

Solución ▼ [004099]

Ejercicio 4871 Condiciones de contorno

Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas con f positiva. Demostrar que existe una solución única para el problema del valor en la frontera : $y'' = f(t)y + g(t)$, $y(a) = y(b) = 0$.

Solución ▼ [004100]

Ejercicio 4872 Comparación de soluciones

Sean $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas con : $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x) < 0$. Sean $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ que satisfacen : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y'' + p(x)y' + q(x)y \leqslant z'' + p(x)z' + q(x)z \\ y(a) \leqslant z(a),\ y'(a) < z'(a). \end{cases}$ Demostrar que : $\forall x > a$, $y(x) < z(x)$.

Solución ▼ [004101]

Ejercicio 4873 Sistema diferencial con coeficientes positivos

Sea $A : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto (a_{ij}(t))$ continua con : $\forall t \geqslant 0$, $\forall i, j$, $a_{ij}(t) \geqslant 0$ y X una solución del sistema diferencial $X'(t) = A(t)X(t)$. Demostrar que si todas las coordenadas de $X(0)$ son positivas o nulas es lo mismo para $X(t)$ para todo t (empezar con el caso estrictamente positivo).

Solución ▼ [004102]

Ejercicio 4874 Integral función de un parámetro

Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{itx}\frac{dt}{\sqrt{t}}$. Formar una ecuación diferencial que satisface f. Deducir f.

Solución ▼ [004103]

Ejercicio 4875 Ulm MP* 2000

Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Se supone que la función Δ es estrictamente positivo en I.
Sea $E = \{f \in \mathscr{C}^2(I) / f(a) = f(b) = 0\}$. Se considera el operador $K : f \mapsto \dfrac{f''}{\Delta}$. .

1. Demostrar que $\mathrm{Sp}(K) \subset]-\infty, 0[$.
2. Encontrar un producto escalar $(\ |\ )$ para el cual dos vectores propios asociados con los valores propios distintos son ortogonales.
3. Se supone que $I = \mathbb{R}^+$ y que $\Delta(x) \geqslant 1$, para $x \geqslant 2$. Sea $\lambda < 0$.

   (a) Demostrar que existe un único $f_\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tal $\begin{cases} f_\lambda'' = \lambda \Delta f_\lambda \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f_\lambda'(0) = 1.\ cr \end{cases}$

   (b) Demostrar f_λ tiene infinitos ceros contables $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots)$ y que la sucesión (x_n) tiende a $+\infty$.

Solución ▼ [004104]

Ejercicio 4876 Centrale MP 2001

1. Sea f de clase $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(0)=f(\pi)=0$. Demostrar que $\int_0^\pi f^2 \leqslant \int_0^\pi f'^2$.
   Sugerencia : extender f a una función impar 2π-periódica.
2. Se considera una función q de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,\pi]$, con valores en $]-\infty,1[$. Demostrar que la única función x de clase $\mathscr{C}^2$ que se anula en 0 y en π y satisface la ecuación diferencial $x''(t)+q(t)x(t)=0$ es la función nula.
3. Sea f una función de clase $\mathscr{C}^1$ en $[0,\pi]$ y dos reales fijos a,b. Demostrar que existe una solución única x de clase $\mathscr{C}^2$ que satisface $x(0)=a$, $x(\pi)=b$ y $x''(t)+q(t)x(t)=f(t)$.

Solución ▼ [004105]

Ejercicio 4877 X MP* 2000

Se considera la ecuación diferencial con coeficientes continuos en $\mathbb{R}$: $x''+p(t)x'+q(t)x=0$. Encontrar una condición necesaria en p y q de manera que hay dos soluciones en $\mathbb{R}$ cuyo el producto siempre vale uno.

Solución ▼ [004106]

Ejercicio 4878 X MP* 2000

Sea A continua de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ hacia sí mismo. Se supone que $a_{ij}(t)$ siguen siendo positivos, cuando t recorre $\mathbb{R}^+$, y se da un vector X_0 cuyas componentes son todas positivas. Demostrar que designando por $X(t)$ el valor en t del sistema $Y'=AY$ siendo igual a X_0 en $t=0$, tenemos para todo $t\geqslant 0$ y para todo i la desigualdad $x_i(t)\geqslant 0$.

Solución ▼ [004107]

Ejercicio 4879 ENS MP 2002

Se considera una aplicación A de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, tal que los valores propios de $A(0)$ tienen todos una parte real estrictamente positiva. Sea F de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{C}^n$. Demostrar que existe X de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{C}^n$, solución de $tX'(t)+A(t)X(t)=F(t)$.
Sugerencia : comenzar con el caso $n=1$, A constante.

Solución ▼ [004108]

Ejercicio 4880 X MP* 2003

1. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas y $k>0$, $t_0\in\mathbb{R}$ tales que : $\forall t\geqslant t_0,\ f(t)\leqslant g(t)+k\int_{t_0}^t f(u)\,du$.
   Demostrar que : $\forall\, t\geqslant t_0,\ f(t)\leqslant g(t)+k\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{k(tu)}g(u)\,du$.
2. Sean $A,B:\mathbb{R}\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ continuas, $T>t_0$, $K>0$ y $\eta>0$ tales que $\forall t\in[t_0,T]$, $|||A(t)|||\leqslant K$ y $|||A(t)-B(t)|||\leqslant\eta$. Observamos M_0 (resp. N_0) la solución del problema de Cauchy : $M(t_0)=I$, $M'(t)=A(t)M(t)$ (resp. $N(t_0)=I$, $N'(t)=B(t)N(t)$). Demostrar que : $\forall t\in[t_0,T]$, $|||M_0(t)-N_0(t)|||\leqslant \mathrm{e}^{K(t-t_0)}(\mathrm{e}^{\eta(t-t_0)}-1)$.
3. Se denota X_0 (resp. Y_0) la solución del problema de Cauchy en $\mathbb{R}^n$: $X(t_0)=\alpha$, $X'(t)=A(t)X(t)$ (resp. $Y(t_0)=\alpha$, $Y'(t)=B(t)Y(t)$), donde $\alpha\in\mathbb{R}^n$. ¿Qué mayoración se tiene en $\|X_0(t)-Y_0(t)\|$?

Solución ▼ [004109]

Ejercicio 4881 **

Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación diferencial propuesta :

1. $y' + y = 1$
2. $2y' - y = \cos x$
3. $y' - 2y = xe^{2x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
5. $y'' + 4y = \cos(2x)$
6. $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Solución ▼ [005874]

Ejercicio 4882 *** I

1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la clase C^1 en $\mathbb{R}$.
   Se supone que cuando x tiende a $+\infty$, $f' + \alpha f$ tiende a $\ell \in \mathbb{C}$. Demostrar que $f(x)$ tiende a $\frac{\ell}{\alpha}$, cuando x tiende a $+\infty$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^2 en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to +\infty} (f + f' + f'')(x) = 0$. Demostrar que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^n en $\mathbb{R}$.
   Denotamos por D el operador de derivación. Sea P un polinomio de grado n unidad cuyos ceros tienen partes reales estrictamente negativas. Demostrar que $\lim_{x \to +\infty} (P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Solución ▼ [005875]

Ejercicio 4883 *** I

Sea f una aplicación de clase C^2 en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x)$ $geqslant 0$. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$.

Solución ▼ [005876]

Ejercicio 4884 *** I

Resolver en el intervalo propuesto I :

1. $xy' - 2y = 0$, $(I = \mathbb{R})$
2. $xy' - y = 0$, $(I = \mathbb{R})$
3. $xy' + y = 0$, $(I = \mathbb{R})$
4. $xy' - 2y = x^3$, $(I =]0, +\infty[)$
5. $x^2y' + 2xy = 1$, $(I = \mathbb{R})$
6. $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$, $(I =]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 1[$, $]0, +\infty[$, $\mathbb{R})$
7. $|x|y' + (x-1)y = x^3$, $(I = \mathbb{R})$.

Solución ▼ [005877]

Ejercicio 4885 *** I

Determinar el radio de convergencia y luego calcular $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n$, cuando x pertenece al intervalo abierto de convergencia. Deducir el valor de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$.

Solución ▼ [005878]

Ejercicio 4886 **

Resolver los siguientes sistemas :

1. $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$ en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3. $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 5x + yz \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

(encontrar la solución tal que $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ y $z(0) = -1$).

Solución ▼ [005879]

Ejercicio 4887 **

Sea $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Demostrar que para cualquier solución de $X' = AX$, la función $t \mapsto \|X(t)\|_2$ es creciente en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [005880]

Ejercicio 4888 **

Resolver los sistemas :

1. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y + 2t \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y + t^2 \end{cases}$ en $]0, +\infty[$

2. $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx - y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x + ty + 3t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)xy \\ \operatorname{sh}(2t)y' = -x + \operatorname{ch}(2t)y \end{cases}$

en $]0, +\infty[$ sabiendo que existe una solución que satisface $xy = 1$.

Solución ▼ [005881]

Ejercicio 4889 *** I

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales :

1. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ en $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, luego en R.
2. $(x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ en $]0, +\infty[$.
3. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ en $]0, +\infty[$.
4. $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$ sobre $]-1, +\infty[$.
5. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $4xy'' + 2y' - y = 0$ en $]0, +\infty[$.

Solución ▼ [005882]

Ejercicio 4890 **

Encontrar las funciones f derivables en $\mathbb{R}$ que satisfacen $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$.

Solución ▼ [005883]

Ejercicio 4891 ***

Encontrar todas las funciones f derivables en $]0, +\infty[$ que satisfacen $\forall x > 0$, $f'(x) = f(\frac{3}{16x})$.

Solución ▼ [005884]

Ejercicio 4892 *** I

Encontrar todas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas en $\mathbb{R}$ tales que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = ds \displaystyle\int_{xy}^{x+y} f(t)\,dt$.

Solución ▼ [005885]

Ejercicio 4893 *** I

Demostrar que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$.

Solución ▼ [005886]

190 225.05 Ecuaciones diferenciales no lineales

Ejercicio 4894 Ecuaciones a variables separables

1. $y' = y(1+y)$.
2. $y' = \operatorname{sen} x \cos y$.
3. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
4. $1 + xy' = \mathrm{e}^y$, condición inicial : $y(1) = 1$.
5. $y' = \sqrt{|y|}$: estudiar el problema de conexión.

Solución ▼ [004110]

Ejercicio 4895 Ecuaciones homogéneas

1. $y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $y' = \frac{xy}{x+y}$.
3. $(x^2+y^2)y' = 2xy$.
4. $(x+y)y' = 2x - y$.

Solución ▼ [004111]

Ejercicio 4896 Ecuaciones de Bernoulli

1. $xy' + y = xy^3$.
2. $2xy' + y = \frac{2x^2}{y^3}$.
3. $\sqrt{x}y' - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.
4. $xy' + y = (xy)^{3/2}$.
5. $x^3y' = y(3x^2 + y^2)$.

Solución ▼ [004112]

Ejercicio 4897 Ecuaciones de Riccati

1. $x^2(y'+y^2)=xy-1$.

Solución ▼ [004113]

Ejercicio 4898 Diversos orden 1

$(x^2-y^2-1)y'=2xy$: establecer $z=\dfrac{y}{x^2+y^2-1}$.

Solución ▼ [004114]

Ejercicio 4899 Centrale MP 2004

Sean $n>0$ y $(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x'(t)=\frac{2}{n}x(t)y(t)\\ y'(t)=-x^2(t)+y^2(t).\end{cases}$

1. Sea $\gamma:t\mapsto(x(t),y(t))$ una solución de (S). Encontrar otra solución que demostrar simetría con γ. Podemos tiene la solución $\sigma(t)=\lambda\gamma(\mu t)$? Deducir una propiedad geométrica de soluciones máximas de (S).
2. Determinar las curvas del plano formado por los puntos (x_0,y_0), donde las soluciones de (S) tienen tangentes paralelas a los ejes (Ox) y (Ay). Deducir algunas soluciones particulares.
3. Suponiendo que existe $\Phi:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ verifica $y(t)=\Phi(x(t))$, determinar Φ y deduzca todas las curvas integrales.

Solución ▼ [004115]

Ejercicio 4900 Chimie P 91

Resolver el sistema numéricamente $\begin{cases}y'=-y\\ z'=yz\\ y(0)=1 \text{ y } z(0)=0.\end{cases}$ Tomar $h=0.1$ y hacer una matriz con 10 valores. Hacer la solución analítica.

Solución ▼ [004116]

Ejercicio 4901 Ecuaciones de orden 2

1. $y''=\operatorname{sen} y$, $y(0)=\frac{\pi}{2}$, $y'(0)=\sqrt{2}$.
2. $2(2a-y)y''=y'^2$.
3. $yy''=y'^2-y^2$: establece $z=y'/y$.

Solución ▼ [004117]

Ejercicio 4902 Centrale MP 2000

¿Existen soluciones de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial : $y'+2\sqrt{y}=0$? ¿Qué podemos decir de la ecuación : $y'^2=4y$? [004118]

Ejercicio 4903 Estudio cualitativo : $y' = x^3 + y^3$

Sea y la solución maximal de la ecuación $y' = x^3 + y^3$ tal que $y(0) = a \geqslant 0$, y $I =]\alpha, \beta[$ su intervalo de definición. Demostrar que y es estrictamente creciente en $[0, \beta[$, que β es acotado, y que $y \to +\infty$, cuando $x \to \beta^-$.

Solución ▼ [004119]

Ejercicio 4904 Estudio cualitativo : $y' = xe^y$

Sea y una solución maximal de la ecuación $y' = xe^y$.

1. Demostrar que y es decreciente y luego creciente.
2. Demostrar que y es definida hasta $+\infty$ y que su curva representativa admite una rama parabólica horizontal.
3. Demostrar que $\alpha > -\infty$ y que $y \to +\infty$, cuando $x \to \alpha^-$.

Solución ▼ [004120]

Ejercicio 4905 Estudio cualitativo : $x' = \cos(t) + \cos(x)$

Sea x la solución maximal del problema de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in]0, \pi[$.
Demostrar que x está definido en $\mathbb{R}$ y que $\forall t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$. [004121]

Ejercicio 4906 Estudio cualitativo : $x' = x^2 - t$, ENS Cachan MP* 2005

Se considera la ecuación diferencial $(E) : x' = x^2 - t$ y el conjunto $D_0 = \{(t,x)/x^2 - t < 0\}$.
Demostrar que si x es una solución de (E) verificando $(t_0, x(t_0)) \in D_0$, entonces x se establece en $[t_0, +\infty[$ y la curva integral permanece en D_0. Deducir que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Solución ▼ [004122]

Ejercicio 4907 Intervalo maximal para $y' = f(y)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase estrictamente positiva $\mathscr{C}^1$ e y la solución maximal definida en $]\alpha, \beta[$ del problema de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Demostrar que $\beta = x_0 + \displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ y que $y \to +\infty$, cuando $x \to \beta^-$. [004123]

Ejercicio 4908 Estudio cualitativo de $y' = 2ty + y^2$

Se considera la ecuación : $y' = 2ty + y^2,\ y(t_0) = y_0$. Sea y una solución maximal.

1. Demostrar que $y = 0$ o de lo contrario y no se anula.
2. Se elige $y_0 > 0$, $t_0 < 0$. Sea $]t_1, t_2[$ el dominio de existencia de y.
   (a) Demostrar que si $y_0 \geqslant -2t_0$, entonces y es estrictamente creciente en $[t_0, t_2[$.
   (b) Demostrar que $t_1 = -\infty$. (De lo contrario, y e y' estarían delimitados en $]t_1, t_0]$.)
   (c) Da la apariencia general de la curva de y.
3. Resolver la ecuación estableciendo $z(t) = \dfrac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

Ejercicio 4909 Ecuación que admite simultáneamente t y $\operatorname{sen} t$ como solución

¿Existe una función $f:(y,t)\to f(y,t)$ de clase $\mathscr{C}^1$ y $n\in\mathbb{N}^*$ tal que la ecuación : $y^{(n)}=f(y,t)$ admite las dos soluciones $y(t)=t$ y $y(t)=\operatorname{sen} t$ en $\mathbb{R}$?
La misma pregunta con la ecuación $y^{(n)}=f(y^{(n-1)},\dots,y,t)$.

[004125]

Ejercicio 4910 $y''=F(x,y)$, $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$

Sea $F:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que para todo $x\in[a,b]$, la función $y\mapsto F(x,y)$ es estrictamente creciente. Demostrar que para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, hay como máximo una solución para la ecuación : $y''=F(x,y)$ con condiciones de frontera $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$.

Solución ▼

[004126]

Ejercicio 4911 Comparación de ecuaciones

Sean y,z soluciones de $\begin{cases} y'=f(y,t)\\ z'=g(z,t)\\ y(0)=z(0),\end{cases}$ donde f,g son dos funciones locales de Lipschitz tales que : $\begin{cases}\forall u,t,\ f(u,t)\leqslant g(u,t)\\ \forall u,v,t,\ u\leqslant v\Rightarrow f(u,t)\leqslant f(v,t).\end{cases}$

1. Para $\varepsilon>0$, denotamos z_ε la solución de $\begin{cases} z_\varepsilon'=g(z_\varepsilon,t)+\varepsilon\\ z_\varepsilon(0)=y(0).\end{cases}$

   Demostrar que $z_\varepsilon\geqslant y$ (en su dominio común de definición).
2. Demostrar que $z_\varepsilon\to z$ cuando $varepsilon\to 0^+$ uniformemente en cualquier intervalo acotado. ¿Conclusión ?

[004127]

Ejercicio 4912 Estudio de la ecuación

$\begin{cases} y''+\operatorname{sen} y=0\\ y(0)=0,\ y'(0)=\alpha\geqslant 0.\end{cases}$

Sea y la solución maximal. Tenemos la primera integral : $\dfrac{y'^2}{2}-\cos y=C=\alpha^2-1$.

1. (a) Demostrar que y está definido en $\mathbb{R}$.
   (b) Demostrar que y es impar.
2. Se asume aquí que $C>1$.
   (a) Demostrar que existe un $T>0$ más pequeño tal que $y(T)=2\pi$.
   (b) Demostrar que : $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t+T)=y(t)+2\pi$.
3. Se supone aquí que $-1<C<1$: Ponemos $C=-\cos\theta$, y $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{du}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}$.
   (a) Sea a maximal tal que $y'(t)>0$ sobre $[0,a[$. Demostrar que $y(a)=\theta$ y $F(\theta)=a$.
   (b) Demostrar que y es $4a$-periódica.

4. Éstudia los casos $C=1, C=-1$.

[004128]

Ejercicio 4913 Resolución aproximada de $y'=f(y,t),\ y(a)=y_0$ por el método de Euler

Se supone que f está acotada por M y $|f(y,s)-f(z,t)|\leqslant K(|yz|+|st|)$. Dividimos $[a,b]$ en n intervalos $[a_k,a_{k+1}]$, $a_k=a+k\frac{ba}{n}$ y nos acercamos la solución y por la función z, continua afín definida por partes por : $\begin{cases} z(a_0)=y_0 \\ \text{en}]a_k,a_{k+1}[,\ z'=f(z(a_k),a_k). \end{cases}$

1. Sea $\varepsilon_k=|z(a_k)-y(a_k)|$. Demostrar que : $\forall t\in[a_k,a_{k+1}],\ |y(t)-z(t)|\leqslant kh^2(M+1)+(1+Kh)\varepsilon_k$, $\left(h=\frac{ba}{n}\right)$.
2. Deducir que $\sup|y-z|\leqslant(M+1)(\mathrm{e}^{K(ba)}-1)\frac{ba}{n}$.

[004129]

Ejercicio 4914 Lyon MP* 2000

1. Sea f una aplicación acotada de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}$, a valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que existe una sucesión (a_n) tal que la sucesión $(f'(a_n))$ tiende a 0.
2. Sea f una aplicación acotada de clase $\mathscr{C}^2$ en $\mathbb{R}^p$, a valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que existe una sucesión (a_n) de $\mathbb{R}^p$ tal que la sucesión $(df(a_n))$ tiende a 0, es decir $\nabla f(a_n)$ tiende a 0.

Solución ▼ [004130]

Ejercicio 4915 ENS MP* 2001

Se considera un vector $v=(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ equipado con su base canónica (e_1,e_2,e_3). Demostrar que existe una función única $u=(u_1,u_2,u_3)$ de clase $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $u'+u\wedge u'=-u\wedge(u_3e_3)$ y $u(0)=v$.
Sugerencia : estudiar la función $p\mapsto p+u\wedge p$ antes de evocar el teorema de Cauchy-Lipschitz.

Solución ▼ [004131]

Ejercicio 4916 Centrale MP 2001

Se define una sucesión de funciones en $[0,1]$ de la siguiente manera : f_0 es la función constante 1 y para todo $x\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=1+\displaystyle\int_0^x f_n(t-t^2)\,dt$.

1. Estudiando $f_{n+1}-f_n$ demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente sobre $[0,1]$. Denotamos por f su límite.
2. Demostrar que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $[0,1]$. ¿Qué son $f'(0)$ y $f'(1)$?
3. Éstudiar la concavidad de f.
4. Demostrar que para todo $x\in[0,1]$ tenemos $1+x\leqslant f(x)\leqslant\exp(x)$.

Solución ▼ [004132]

Ejercicio 4917 ENS MP 2002

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(t,x)\mapsto f(t,x)$ de clase $\mathscr{C}^1$, y a,b reales tales que $a<b$. Se supone que f es T-periódica con respecto a t y que tenemos : $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ f(t,a)>0$ y $f(t,b)<0$.

1. ¿Qué se puede decir sobre las soluciones del problema de Cauchy $E_y : (x'(t) = f(t, x(t)), x(0) = y \in [a,b])$?
2. Demostrar que toda solución maximal está definida en $\mathbb{R}^+$ y tiene valores en $[a,b]$.
3. Demostrar que existe una solución de E_y que es T-periódica.

Solución ▼ [004133]

Ejercicio 4918 X MP* 2005

Sea J un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Se supone que existen a, b continuas de J en $\mathbb{R}^+$ tales que, para todo $t, y : (f(t,y) \mid y) \leqslant a(t)\|y\|^2 + b(t)$. Demostrar que cualquier solución maximal de $y' = f(t,y)$ está definida en J entero.

Solución ▼ [004134]

Ejercicio 4919 Sistema autónomo, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Se considera el sistema diferencial : $(V) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1). \end{cases}$ cuyas soluciones (x,y) definidas en $\mathbb{R}$ con valores en $(\mathbb{R}^{+*})^2$ se buscan.

1. Encontrar una función $f \in \mathscr{C}^2((\mathbb{R}^{+*})^2, \mathbb{R})$ tal que para cualquier solución (x,y) de V, $f(x,y)$ es constante.
2. Demostrar que las soluciones de (V) son periódicas.

Solución ▼ [004135]

---

191 225.06 Ecuaciones diferenciales parciales

Ejercicio 4920 $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$

Resolver la ecuación $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$ con la *condición en la frontera* : $f(t,t) = t$, $(t \in \mathbb{R})$.
(Estudiar $\varphi : t \mapsto f(a+bt, a+ct)$, con a, b, c bien elegidos)

Solución ▼ [004201]

Ejercicio 4921 $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = \text{cte}$

Determinar las aplicaciones f de clase $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ verificando : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = a$, donde a es una constante real dada. Usar el cambio de variable : $u = x + y$, $v = xy$.

Solución ▼ [004202]

Ejercicio 4922 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Resolver en $(\mathbb{R}^{+*})^2 : x\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, estableciendo $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y}. \end{cases}$

Solución ▼ [004203]

Ejercicio 4923 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$

Sea U el conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$: $U=\{(x,y)$ tal que $x>0,\ y>0\}$. Encontrar las aplicaciones $f:U\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ verificando : $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2$. Usar el cambio de variable : $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

Solución ▼ [004204]

Ejercicio 4924 $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$

Resolver en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$, estableciendo $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$

Solución ▼ [004205]

Ejercicio 4925 $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=2f$

Sea $f:U\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ verificando : $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=2f$, donde U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.
Sea $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial\rho}$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}$, luego encontrar f ...

1. Si $U=\{(x,y)$ tal que $x>0\}$.
2. Si $U=\mathbb{R}^2$.

Solución ▼ [004206]

Ejercicio 4926 Ensi Physique P 94

Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial : $2xy\frac{\partial f}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}=0$, usando, por ejemplo, el cambio de variable : $x=\frac{u^2+v^2}{2}$ y $y=\frac{u}{v}$.

Solución ▼ [004207]

Ejercicio 4927 Funciones homogéneas

Sea $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $(x,y)\neq(0,0)\}$, y $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$.
Demostrar que f es positivamente homogénea de grado α si y sólo si : $\forall(x,y)\in\Omega,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$. (Estudiar $g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)$) [004208]

Ejercicio 4928

Resolver la ecuación : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha(\alpha-1)f$, donde α es un real fijo, $\alpha\neq\frac{1}{2}$. Establecer $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$.

Solución ▼ [004209]

Ejercicio 4929 Ecuación de orden 2 con coeficientes constantes

Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ no todos iguales a cero. Se considera la ecuación diferencial parcial : $(*)\Leftrightarrow a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, donde f es una función desconocida : $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Sea $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ distintos, fijos. Realizar el cambio de variable : $u=x+\alpha y$, $v=x+\beta y$.

1. Escribir la ecuación deducida de $(*)$ por este cambio de variable.
2. Deducir que podemos llevar $(*)$ a una de las tres formas reducidas :
   $(1):\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0,\qquad (2):\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}=0,\qquad$ d $(3):\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0.$

Solución ▼ [004210]

Ejercicio 4930 $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\ frac\partial^2 f\partial y^2=0$

Encontrar las aplicaciones $f:(\mathbb{R}^{+*})^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ verificando : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Usar el cambio de variable : $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

Solución ▼ [004211]

Ejercicio 4931 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{y}{x^3}$

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ y $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto g(y/x)$. Encontrar g tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{y}{x^3}$.

Solución ▼ [004212]

Ejercicio 4932 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Sea $g(x,y)=f(2x+y,2x-y)$.

1. Calcular las segundas derivadas parciales de g de acuerdo a las de f.
2. Encontrar f tal que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

Solución ▼ [004213]

Ejercicio 4933 $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

Se considera la ecuación diferencial parcial en $\Omega=(\mathbb{R}^{+*})^2$: $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Resolver esta ecuación estableciendo $\begin{cases}u=xy\\ v=\frac{x}{y}.\end{cases}$

Solución ▼ [004214]

Ejercicio 4934 $f(\cos x/\operatorname{ch} y)$ armónico

Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$. Se considera $g:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto f\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

Determinar f para que g verifique : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$.

Solución ▼ [004215]

Ejercicio 4935 $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$ preserva las funciones armónicas

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sea $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.
Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto F(u,v)$ y f definidos por : $f(x,y) = F(u,v)$.
Demostrar que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$ da como resultado $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Solución ▼ [004216]

Ejercicio 4936 $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = y$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ y $g(u,v) = f(uv, u+v)$.

1. Calcular $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.
2. Resolver la ecuación : $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = y$.

Solución ▼ [004217]

Ejercicio 4937 $f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ tal que $\Delta f = -f$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ y $g(x,y,z) = \dfrac{f(r)}{r}$, con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Determinar f tal que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -g$.

Solución ▼ [004218]

Ejercicio 4938 $x^4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

1. Encontrar las funciones $g : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } u > v\} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2$ que satisfacen : $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(g + v\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(g + u\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)$.
   (Pensar en el teorema de Poincaré).
2. Resolver en $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ la ecuación : $x^4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, considerando $u = y + \frac{1}{x}$, $v = y - \frac{1}{x}$.

Solución ▼ [004219]

Ejercicio 4939 *** I

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales parciales :

1. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, usando $u = x+y$ y $v = x+2y$.
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pasando a polares.
3. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, considerando $x = u$ y $y = uv$.

Solución ▼ [005898]

192 225.99 Otro

193 229.01 Abierto, cerrado, interior, adherencia

Ejercicio 4940

Representar gráficamente y determinar si los siguientes conjuntos son conjuntos abiertos.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$; $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\}$; $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\}$;

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$; $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$; $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$. [001741]

Ejercicio 4941

Demostrar que toda unión y toda intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. ¿Qué se puede decir sobre las intersecciones infinitas de conjuntos abiertos ? [001742]

Ejercicio 4942 parcial 1999

Se define un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ estableciendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 < 1\}$. Determinar el interior, la adherencia y el límite de A. ¿Es conexo el conjunto A ? [001743]

Ejercicio 4943

¿Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos ? ¿Cerrados ? ¿Compactos ?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \mathrm{sen}(y) \leqslant 4\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4\mathrm{e}^y > 4\}$,

$C = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \cos(x) \geqslant 0\}$. [001754]

Ejercicio 4944

Se propone demostrar que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión intervalos abiertos disjuntos. Se considera por lo tanto, un abierto $U \subset \mathbb{R}$ y para todo $x \in U$ se establece $C(x) = \{y \in [x,+\infty[\mid [x,y] \subset U\} \cup \{y \in]-\infty,x[\mid [y,x] \subset U\}$.

1. Demostrar que $C(x)$ es un intervalo abierto para todo x. (Considerar $\inf_{y \in C(x)} y$ y $\sup_{y \in C(x)} y$.)
2. Para todo x,y en U, demostrar que tenemos $C(x) = C(y)$ o $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.
3. Concluir.

[001755]

Ejercicio 4945

Sea E un espacio vectorial normal. Sean A y B dos partes de E. Demostrar :

1. $C_{\mathring{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \mathring{C_A}$.
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Deducir $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Deducir $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$.

   Dar un ejemplo para el cual la inclusión recíproca no es cierta.

[001756]

Ejercicio 4946

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial normado E. Recordar que la frontera de A es el conjunto $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Demostrar que :

1. $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,\varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$.
2. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_A)$.
3. A es cerrado si y solo si $\text{Fr}(A)$ está incluido en A.
4. A es abierto si y solo si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

[001757]

Ejercicio 4947

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial normado E.

1. Demostrar que $\bar{A}$ es el conjunto de límites de sucesiones elementos de A.
2. Se supone ahora que $E = \mathbb{R}$. Deducir de la pregunta anterior que si A es acotado, entonces $\sup A \in \bar{A}$. (Construir una sucesión apropiada de puntos).

[001758]

Ejercicio 4948

Demostrar que la adherencia de una bola abierta es la bola cerrada con el mismo centro y el mismo radio.
[001759]

Ejercicio 4949

Sea E un espacio vectorial normal. Sean A y B dos partes de E. Sea $A+B = \{z \in E \mid \exists\, x \in A, \exists\, y \in B,\ z = x+y\}$.
Demostrar que si A es abierto, $A+B$ es abierto. (Empezar con caso en que B es un punto asilado.) [001760]

Ejercicio 4950

Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita.
Demostrar que todo subespacio vectorial de E es cerrado. [001761]

Ejercicio 4951

Sea E un espacio vectorial normal. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de E. Se define $\text{diam}(A) = \sup\{\|y-x\|, x, y \in A\}$.

1. Demostrar que si A es acotado, entonces $\bar{A}$ y $\text{Fr}(A)$ son acotados.
2. Comparar $\text{dimetro}(A)$, $\text{dimetro}(\overset{\circ}{A})$ y $\text{dimetro}(\bar{A})$, cuando $\overset{\circ}{A}$ no es vacío.
3. (a) Demostrar que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) \leqslant \text{diam}(A)$.
   (b) Sean x y u elementos de A con $u \neq 0$. Se considera el conjunto $X = \{t \geqslant 0 \mid x + tu \in A\}$. Demostrar que $\sup X$ existe.
   (c) Deducir que cualquier semi-recta salida de un punto x de A corta $\text{Fr}(A)$.
   (d) Deducir que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$.

Ejercicio 4952

Sea $E=\mathbb{R}^d$ dotado de una norma $\|\cdot\|$. Se define la *distancia* del elemento x_0 de E a la parte A de E, denotado $d(x_0,A)$, mediante la fórmula $d(x_0,A)=\inf_{x\in A}\|x-x_0\|$.

1. Se supone que A es compacto. Demostrar que para todo $x_0\in E$, existe $y\in A$ tal que $d(x_0,A)=\|y-x_0\|$.
2. Demostrar que el resultado sigue siendo verdadero si solo se supone que A es cerrado. (Observe que para cualquier parte B de A a $d(x_0,B)\geqslant d(x_0,A)$.)
3. Demostrar que la aplicación que a x_0 asocia $d(x_0,A)$ es continua en E (sin ningún supuesto en A).
4. Deducir que si A es un conjunto cerrado de E y B un conjunto compacto de E tal que A y B son disjuntos, entonces existe una constante $\delta>0$ tal que $\|a-b\|\geqslant\delta$, $\forall(a,b)\in A\times B$.
5. Demostrar con un contra-ejemplo que el resultado es falso si simplemente se supone que A y B son dos conjuntos cerrados disjuntos.

[001764]

Ejercicio 4953

Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Para todas las partes A y B de E denotamos $A+B=\{z\in E\mid \exists(x,y)\in A\times B, z=x+y\}$.
Demostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A+B$ es cerrado. [001766]

Ejercicio 4954

Sea X una parte de $\mathbb{R}^2$; demostrar que es cerrada si y solo si para cualquier parte cerrada acotada $K, K\cap X$ es cerrada y acotada. [001769]

Ejercicio 4955

Sea $k\in\mathbb{R}^{+*}$, $\omega_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2\leqslant\frac{k^2}{n^2}\right\}$, y $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\omega_n$. ¿$\Omega$ es abierto ? cerrado ? ...
[001770]

Ejercicio 4956

Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $K_{n+1}\subset K_n$, y $K_n\neq\emptyset$.
Demostrar que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n\neq\emptyset$. [001771]

Ejercicio 4957

Demostrar que la intersección de dos conjuntos abiertos es abierto, que la unión de dos conjuntos cerrados es cerrado, que esto sigue siendo cierto para un número finito de conjuntos, pero que esto puede volverse falso si se consideran sucesiones infinitas. [001772]

Ejercicio 4958

Sea $E\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto ; se escribe $\mathrm{Int}(E)={}^c\,\overline{{}^cE}$. Demostrar que $\mathrm{Int}(E)$ es el abierto más grande contenido en E. [001773]

Ejercicio 4959

Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, demostrar que $\overline{A}$ también es acotado y que $\sup_{x\in A}\|x\| = \sup_{x\in\overline{A}}\|x\|$. [001774]

Ejercicio 4960

Clasificar (por inclusión) las partes : $\overline{A\cap B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$. [001776]

Ejercicio 4961

En el espacio vectorial normado $\mathbb{R}$, ¿cada una de las siguientes partes es abierta ? ¿cerrada ?
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n,\, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geqslant 1}]-1/n,1/n[$. [001777]

Ejercicio 4962

Sea E un evn (espacio vectorial normado). Sea A parte de E. Demostrar la igualdad $E\backslash\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}}$ y $E\backslash\overset{\circ}{A} = \overline{E\backslash A}$. [001778]

Ejercicio 4963

Sea E un evn, V un subespacio vectorial de E.

1. Demostrar que $\overline{V}$ es un subespacio vectorial de E.
2. Demostrar que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, entonces $V = E$.

[001779]

Ejercicio 4964

Graficar las siguientes partes de $\mathbb{R}^2$ y decir para cada una si es abierta, cerrada o ni una ni otra. Determinar sus adherencias e interiores.

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\neq 1 \text{ y } |y|n^{\text{o}} = 1\}$
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x| = 1 \text{ y } |y|n^{\text{o}} = 1\}$
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\neq 1 \text{ o } |y|n^{\text{o}} = 1\}$
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1-xy>0\}$
5. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 3x+4y=2\}$
6. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$
7. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=1\}$
8. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{1/n\}\times[0,1]$.

[001780]

Ejercicio 4965

Determinar el cierre de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$
2. $\{1/n,\, n\in\mathbb{N}^*\}$
3. $\{\frac{(-1)^n}{1+1/n},\, n\in\mathbb{N}^*\}$.

[001781]

Ejercicio 4966

Sean A y B dos partes de un evn E.

1. Demostrar que si O es un conjunto abierto de E, entonces $A+O$ es abierto. (Indicación : Primero tomar $A=\{a\}$ y luego cualquier $A\dots$)
2. Establece que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ y que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$. (Encontrar un ejemplo donde la inclusión sea estricta)

[001782]

Ejercicio 4967

1. Graficar la función $f\colon \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+y^2$ y dibujar las líneas de nivel de esta función.
2. Graficar las funciones f y g definidas por $f(x,y)=25-(x^2+y^2)$ y $g(x,y)=5-\sqrt{x^2+y^2}$ en $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 25\}$.
3. Trazar el gráfico de la curva parametrizada $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $f(x)=(x\cos x, x\operatorname{sen} x)$.
4. ¿Se puede representar gráficamente la aplicación de la pregunta (3.) ? ¿Cómo ?
5. Describir las superficies de nivel de la función $f\colon \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=\exp(x+y^2-z^2)$.
6. ¿Por qué no se puede representar ingenuamente el gráfico de la aplicación
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y)=(-y,x),$$
en una hoja de papel. ¿Cómo se puede representar gráficamente esta aplicación ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002616]

Ejercicio 4968

Determinar si cada una de las siguientes partes del plan es abierta o cerrada, o ni una ni otra. Determinar cada vez que el interior y adherencia.

1. $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2y^2>1\}$,
2. $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1, y>0\}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002617]

Ejercicio 4969

1. Sean $B_1\subset\mathbb{R}^n$ y $B_2\subset\mathbb{R}^m$ bolas abiertas. Demostrar que $B_1\times B_2\subset\mathbb{R}^{n+m}$ es abierta.
2. Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y B un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Demostrar que $A\times B$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002618]

Ejercicio 4970

1. Sea (A_n) $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de partes abiertas de $\mathbb{R}^2$. ¿La unión de los A_n sigue siendo una parre abierta ? ¿Y su intersección ?
2. La misma pregunta para una familia de partes cerradas.

Indicación ▼ Solución ▼ [002619]

Ejercicio 4971

Sea $A = \{(t, \operatorname{sen} \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2; t > 0\}$. Demostrar que A no es ni abierto ni cerrado. Determinación de la adherencia $\overline{A}$ de A.

Indicación ▼ Solución ▼ [002620]

Ejercicio 4972

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1. Dar la definición de "D es abierto." (¡Esta es una pregunta de curso !)
2. Dar la definición de "$a \in \mathbb{R}^2$ es un punto adherente de D." (¡Esta es una pregunta de curso !)
   En el resto del ejercicio, consideramos el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant |y|, x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
3. Dibujar D.
4. Demostrar que D no es abierto.
5. Determinar $\overline{D}$, la adherencia de D. Justificar brevemente tu respuesta, con la ayuda de un dibujo.

[002647]

Ejercicio 4973 **

Sean A y B partes de un espacio vectorial normado E. Demostrar que

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ y $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ y $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Dar un ejemplo con la inclusión es estricta.
5. $\overset{\circ}{A \setminus B} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.
6. $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ y $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Solución ▼ [005844]

Ejercicio 4974 **

Encontrar una parte A de $\mathbb{R}$ tal que los siete conjuntos A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ y $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ son dos por dos distintos.

Solución ▼ [005845]

Ejercicio 4975 **

Sea E el espacio vectorial $\mathbb{R}$ de funciones continuas en $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Se provee E con $\| \ \|_\infty$. D es la parte de E formada por las aplicaciones diferenciables y P es la parte de E formada por las funciones polinómicas. Determinar el interior de D y el interior de P.

Solución ▼ [005846]

Ejercicio 4976 **

1. Sean (E,N_E) y (F,N_F) dos espacios vectoriales normados. Sean f y g dos aplicaciones continuas en E, con valores en F. Sea D un subconjunto de E denso en E. Demostrar que si $f_{|D} = g_{|D}$ entonces $f = g$.
2. Determinar todos los morfismos continuos desde $(\mathbb{R},+)$ en sí mismo.

Solución ▼ [005848]

Ejercicio 4977 ***

Sea u una sucesión acotada de un espacio vectorial normado de dimensión finita que tiene un único valor de adherencia. Demostrar que la sucesión u converge.

Solución ▼ [005849]

Ejercicio 4978 Interior, adherencia

Sea A parte del espacio métrico $(\mathbb{C},|\ |)$ y z un número complejo.

1. Demostrar que z pertenece a $\mathring{A}$ si y solo si hay un número real $\varepsilon > 0$, tal que $B(z,\varepsilon)$ está incluido en A.
2. Demostrar que z pertenece a $\overline{A}$ si y sólo si para todo real $\varepsilon > 0$, la bola $B(z,\varepsilon)$ interseca A.

[007522]

194 229.02 Compacidad

Ejercicio 4979 parcial 1999

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Demostrar que los tres siguientes condiciones son equivalentes :

(1) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ tal que $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
(2) Para cualquier subconjunto acotado B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$.
(3) Para cualquier parte compacta K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ es una parte compacta de $\mathbb{R}^n$. [001744]

Ejercicio 4980

¿En $\mathbb{R}^2$ euclidiano, los siguientes conjuntos son compactos ?

— $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ y } xy = 1\}$.
— $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x,y)\| \leqslant 2 \text{ y } xy = 1\}$.
— $C = \{(x,\cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 18 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$.

[001763]

Ejercicio 4981

Sea $E = \mathbb{R}^d$ dotado de una norma $\|\cdot\|$. Se define la *distancia* del elemento x_0 de E a la parte A de E, denotada $d(x_0,A)$, mediante la fórmula $d(x_0,A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|$.

1. Se supone A compacto. Demostrar que para todo $x_0 \in E$, existe $y \in A$ tal que $d(x_0,A) = \|y - x_0\|$.

2. Demostrar que el resultado sigue siendo verdadero si solo se supone que A es cerrado. (Observar que para cualquier parte B de A se tiene $d(x_0,B) \geqslant d(x_0,A)$.)
3. Demostrar que la aplicación que a x_0 asocia $d(x_0,A)$ es continua en E (sin ninguna hipótesis en A).
4. Deducir que si A es un conjunto cerrado de E y B un compacto de E tal que A y B son disjuntos, entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que $\|a-b\| \geqslant \delta$, $\forall (a,b) \in A\times B$.
5. Demostrar con un contra-ejemplo que el resultado es falso si simplemente se supone que A y B son dos conjuntos cerrados disjuntos.

[001764]

Ejercicio 4982

Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Sea (x_n) una sucesión convergente de E y x su límite. Demostrar que el conjunto $\{x\}\cup\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ es compacto. [001767]

Ejercicio 4983

Sea $(u_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión real. $\forall n\geqslant 1$, se establece $A_n = \{u_p / p\geqslant n\}$. Demostrar que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión $(u_n)_{n\geqslant 1}$ es $V = \bigcap_{n\geqslant 1}\overline{A_n}$, y por lo tanto V es cerrado. Deducir que si la sucesión es acotada, entonces el conjunto V es un compacto no vacío. [001783]

Ejercicio 4984 Gráfico cerrado

Sean E,F dos espacios vectoriales normados y $f: E\to F$. Denotamos $Gr(f) = \{(x,y)\in E\times F \text{ tal que } y = f(x)\}$.

1. Demostrar que si f es continua, entonces $\mathrm{Gr}(f)$ es cerrada en $E\times F$.
2. Demostrar el recíproco cuando $f(E)$ está incluido en un compacto de F.
3. Dar un contra ejemplo si $f(E)$ no está incluido en un compacto.

[004827]

Ejercicio 4985 Aplicación casi contratante

Sea A un subconjunto compacto de un evn E y $f: A\to A$ tal que : $\forall x,y\in A,\ x\neq y \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y)$.

1. Demostrar que f tiene un único punto fijo, a.
2. Sea (x_n) una sucesión de elementos de A tal que $x_{n+1} = f(x_n)$. Demostrar que converge a a.

Solución ▼ [004828]

Ejercicio 4986 Aplicación casi contractante (Mines MP 2003)

Sea C un compacto convexo de un evn E. Sea $f: C\to C$, 1-lipschitziana. Demostrar que f admite un punto fijo. Se puede usar la función $f_n : x\mapsto \frac{a}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)$ con $a\in C$.

Solución ▼ [004829]

Ejercicio 4987 Función bicontinua en un compacto

Sea A una parte compacta de un evn E y $f: A\to F$ una función continua e inyectiva (F = evn).

1. Demostrar que $f^{-1}: f(A)\to A$ también es continua.

2. Da un ejemplo donde A no es compacto y f^{-1} no es continua.

[004830]

Ejercicio 4988 Isometrías de un compacto

Sea A un parte compacta de un evn E y $f : A \to A$ tal que : $\forall x, y \in A,\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$.

1. Sean $a \in A$ y (a_n) la sucesión definida por : $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Demostrar que a es el valor de adherencia de la sucesión (a_n).
2. Sean $a, b \in A$. Demostrar que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.
3. Demostrar que $f(A) = A$.

[004831]

Ejercicio 4989 Parte densa en un compacto

Sea A una parte compacta de un evn E. Demostrar que existe una sucesión (a_k) de elementos de A que es denso en A. [004832]

Ejercicio 4990 Intersección anidada

Sea E un espacio vectorial normado, (K_n) una sucesión creciente de conjuntos compactos no vacíos de E y $K = \bigcap_n K_n$.

1. Demostrar que $K \neq \varnothing$.
2. Sea U un conjunto abierto que contiene K. Demostrar que existe n tal que $K_n \subset U$.
3. Demostrar que $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \delta(K_n)$ (δ es el diámetro).

Solución ▼ [004833]

Ejercicio 4991 Imagen de una intersección

Sean E, F dos espacios vectoriales normados y $f : E \to F$ continua. Sea (K_n) una sucesión decreciente de conjuntos compactos de E. Demostrar que $f(\bigcap\limits_n K_n) = \bigcap_n f(K_n)$.

[004834]

Ejercicio 4992 Recubrimiento abierto

Sea A una parte compacta de un evn E y $(O_i)_{i\in I}$ una recubrimiento abierto de A. Demostrar que existe $r > 0$ tal que para toda parte de A de diámetro inferior o igual a r está incluido en uno de los O_i.

Solución ▼ [004835]

Ejercicio 4993 Conjunto compacto de sucesiones

Sea $E = \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{$sucesiones $u = (u_n)$ acotadas$\}$. Se provee E con la norma : $\|u\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$. Demostrar que $A = \{u \in E$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1\}$ es compacto

Solución ▼ [004836]

Ejercicio 4994 Bola unidad no compacta

Sea $E = \mathscr{C}([0, 2\pi])$ dotado de la norma $\|\cdot\|_2$. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $f_n(x) = \cos(nx)$.

1. Calcular $\|f_n - f_p\|_2$, para $n, p \in \mathbb{N}$.
2. Deducir que $\overline{B}(0,1)$ no es compacta.

[004837]

Ejercicio 4995 Bola más pequeña conteniendo una parte

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$ una parte acotada que contiene al menos dos puntos.

1. Demostrar que existe una bola cerrada de radio mínimo que contiene A.
2. Demostrar que esta bola no es necesariamente única (se toma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$).
3. Demostrar que si $\|\cdot\|$ es una norma euclidiana, entonces la bola precedente es única.

[004838]

Ejercicio 4996 Polytechnique MP* 2000

Sea E un espacio vectorial normado, K un conjunto compacto convexo de E, f una aplicación de K en$K$, 1-lipschitziana. Demostrar que f tiene un punto fijo.

Solución ▼ [004839]

Ejercicio 4997 Teorema de Riesz, Stival 2003

Sea E un evn de dimensión infinita.

1. Sea F un sev de dimensión finita y $a \in E \setminus F$.
   (a) Demostrar que existe $b \in F$ tal que $\|a-b\| = d(a,F)$.
   (b) Deducir que existe $c \in E$ tal que $\|c\| = 1 = d(c,F)$.
2. Demostrar que la bola unitaria de E no es compacta.

[004840]

---

195 229.03 Cota superior

Ejercicio 4998

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos y mayorados de $\mathbb{R}$. Demostrar las siguientes implicaciones :
— $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A,\ x < M \Rightarrow \sup A \leqslant M$.
— $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$.

[001750]

Ejercicio 4999

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos mayorados por $\mathbb{R}$. Se define :

$$A+B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists, b \in B,\ c = a+B\}.$$

1. Demostrar que $A+B$ tiene una cota superior, luego que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. Demostrar la implicación :

$$\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in A, \forall y \in B,\ x+y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leqslant M.$$

[001751]

Ejercicio 5000

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \geqslant \varepsilon$. Demostrar que $\varepsilon = 0$. [001752]

Ejercicio 5001

Sea A una parte acotada no vacía de $\mathbb{R}$. Demostrar que :

$$\sup\{|xy| : (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

[001753]

Ejercicio 5002 ***

Calcular $\operatorname*{Inf}_{\alpha\in]0,\pi[} \left\{ \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{Z}} |\operatorname{sen}(n\alpha)| \right\}$.

Solución ▼ [005850]

196 229.04 Topología de la recta real

Ejercicio 5003 Parte con un solo punto de acumulación

Sea A una parte acotada de $\mathbb{R}$ que tiene un único punto de acumulación, a.

1. Demostrar que A es numerable.
2. Se numeran los elementos de A de cualquier manera : $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.
   Demostrar que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Solución ▼ [004717]

Ejercicio 5004 $(\operatorname{sen}(n))$ es denso

Sean $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $A = \{ma + n$ tal que $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que A es denso en $\mathbb{R}$.
Aplicación : Demostrar que cualquier real de $[-1, 1]$ es valor de adherencia de la sucesión $(\operatorname{sen} n)$. [004718]

Ejercicio 5005 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

Demostrar que el conjunto $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}$ tal que $m, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución ▼ [004719]

Ejercicio 5006 Unidades cuadráticas

Sea $A = \{n + p\sqrt{2}$ tal que $n, p \in \mathbb{N},\ n + p\sqrt{2} > 0,\ n^2 - 2p^2 = 1\}$. Demostrar que A es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^{+*}$.

Solución ▼ [004720]

Ejercicio 5007 Olympiades de 1991

Sea $a > 1$. Demostrar que existe una sucesión real acotada, (x_n), tales que : $\forall i \neq j,\ |x_i - x_j| \geqslant \frac{1}{|i-j|^a}$.

Solución ▼ [004721]

Ejercicio 5008 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Sea (u_n) una sucesión real acotada tal que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Demostrar que el conjunto de valores de adherencia de (u_n) es un intervalo. [004722]

Ejercicio 5009 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continuar, $u_0 \in [0,1]$ y (u_n) la sucesión de itérées de f a u_0.
Se supone que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Demostrar que la sucesión (u_n) converge a un punto fijo de f.
Solución ▼ [004723]

Ejercicio 5010 $\exp(iu_n)$

Sea (u_n) una sucesión real tal que la sucesión $(\exp(iu_n))$ converge y la sucesión $(|u_{n+1} - u_n|)$ es mayorada por $\alpha < \pi$. Demostrar que (u_n) converge.
[004724]

Ejercicio 5011 $\exp(iu_n)$

Sea (u_n) una sucesión real tal que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Demostrar que la sucesión $(\exp(iu_n))$ es densa en $\mathbb{U}$. [004725]

Ejercicio 5012 $\exp(iu_n)$

Sea (x_n) una sucesión real acotada y $u > 0$, $v > 0$. Se supone que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$ y que las sucesiones (e^{iux_n}) y (e^{ivx_n}) converger. Demostrar que la sucesión (x_n) converge. [004726]

Ejercicio 5013 $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$

Sea (u_n) una sucesión real positiva tal que : $\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. Demostrar que la sucesión $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ es convergente.
Solución ▼ [004727]

Ejercicio 5014 Funciones periódicas (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

1. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, periódicas de períodos 1 y $\sqrt{2}$.
2. Determinar las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuas tales que :
   para todo $X \in \mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X + (1,0)) = f(X + (0,1)) = f(AX)$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Solución ▼ [004728]

Ejercicio 5015 **

Demostrar que entre dos reales distintos, hay un racional (o demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).
Solución ▼ [005843]

Ejercicio 5016 *** I

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Demostrar que hay dos reales a y b tales que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Solución ▼ [005851]

197 229.05 Topología de espacios métricos

Ejercicio 5017 Abiertos disjuntos

Sean U, V dos conjuntos abiertos disjuntos de un espacio vectorial normado. Demostrar que $\overset{\circ}{\overline{U}}$ y $\overset{\circ}{\overline{V}}$ son disjuntos.
Dar un contra ejemplo cuando U y V no son abiertos.

Solución ▼ [004729]

Ejercicio 5018 A abierto disjunto de B

Sean A, B dos subconjuntos disjuntos de un espacio vectorial normado. Si A es abierto, demostrar que A y $\overline{B}$ son disjuntos.

[004730]

Ejercicio 5019 $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Sea U un conjunto abierto de un espacio vectorial normado. Demostrar que $\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} = \overline{U}$.

Solución ▼ [004731]

Ejercicio 5020 Frontera de un abierto

Sea U un conjunto abierto de un espacio vectorial normado. Demostrar que la frontera de U tiene un interior vacío.

Solución ▼ [004732]

Ejercicio 5021 La distancia es 1-lipschitziana

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio vectorial normado E. Para $x \in E$, sea considera la distancia $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \text{ tal que } a \in A\}$.

1. Demostrar que : $\forall x, y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$.
2. Demostrar que la aplicación $x \mapsto d(x,A)$ es continua.

[004733]

Ejercicio 5022 Diámetro de la frontera

Sea A una parte no vacía y acotada de un evn E. Se denota $\delta(A) = \sup\{d(x,y) \text{ tal que } x, y \in A\}$ (*diámetro de* A).
Demostrar que $\delta(A) = \delta(\operatorname{Fr}(A))$.

Solución ▼ [004734]

Ejercicio 5023 Conjunto derivado

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial normado E. Se dice un punto $x \in E$ *punto de acumulación de* A si cualquier bola de centro x contiene infinitos puntos de A. Se denota por A' el conjunto de puntos de acumulación de A (*conjunto derivado de* A). Demostrar que A' es cerrado y comparar A' y $\overline{A}$.

[004735]

Ejercicio 5024 Caracterización de funciones continuas

Sean E, F dos espacios vectoriales normales y $f : E \to F$.
Demostrar que f es continua si y solo si : $\forall A \subset E,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
si y solo si : $\forall B \subset F,\ f^{-1}(\mathring{B}) \subset f^{-1}(B)^{\circ}$.

Solución ▼ [004736]

---

198 229.06 Topología de espacios vectoriales normados

Ejercicio 5025 Unicidad del centro y el radio de una bola

Sea E un evn no nulo y $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}' \in E$, $r, r' > 0$ tales que $B_f(\overrightarrow{a}, r) = B_f(\overrightarrow{a'}, r')$. Demostrar que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a'}$ y $r = r'$.
[004737]

Ejercicio 5026 $x+y+z=0$

Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ tres vectores de un evn E tal que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.
Demostrar que : $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| + \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}\| + \|\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}\| \geqslant \frac{3}{2}(\|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\| + \|\overrightarrow{z}\|)$. [004738]

Ejercicio 5027 Una bola es convexa

Sea E un evn, y $\overrightarrow{a} \in E$, $r > 0$. Se denota $\overline{B} = \overline{B}(\overrightarrow{a}, r)$ y $\mathring{B} = \mathring{B}(\overrightarrow{a}, r)$.

1. Demostrar que $\overline{B}$ y $\mathring{B}$ son convexos.
2. Si la norma es euclidiana, demostrar que si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overline{B}$ con $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$, luego $]\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}[\subset \mathring{B}$. $(]\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}[= \{(1-t)\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ tal que $t \in]0,1[\})$.
3. Deducir que si la norma es euclidiana, cualquier subconjunto A tal que $\mathring{B} \subset A \subset \overline{B}$ es convexo.
4. Dar un contra ejemplo con una norma no euclidiana.

[004739]

Ejercicio 5028 Distancia a un conjunto

Sea E un evn y $A \subset E$ una parte no vacía. Para $\overrightarrow{x} \in E$ se establece : $d(\overrightarrow{x}, A) = \inf\{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\|$ tal que $\overrightarrow{a} \in A\}$.

1. Demostrar que : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$, $\left|d(\overrightarrow{x}, A) - d(\overrightarrow{y}, A)\right| \leqslant \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$. (Quitar el valor absoluto y demostrar por separado cada desigualdad)
2. Demostrar que la aplicación $\overrightarrow{x} \mapsto d(\overrightarrow{x}, A)$ es continua.

[004740]

Ejercicio 5029 Distancia a un conjunto (ENS Cachan MP 2002)

Sea A una parte no vacía de $\mathbb{R}^n$. Se denota para $x \in \mathbb{R}^n$: $d_A(x) = \inf\{\|x - y\|$ tal que $y \in A\}$.

1. Demostrar que d_A es continua.
2. Sean $\mathbb{R}^n$ dos subconjuntos no vacíos A, B. Dar una condición equivalente a $d_A = d_B$.
3. Se denota $\rho(A,B) = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, valiendo eventualmente $+\infty$. Demostrar que tenemos $\rho(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d_B(x),\ \sup_{x\in B} d_A(x)\right)$.

Solución ▼ [004741]

Ejercicio 5030 Distancia entre un cerrado y un compacto

Sean A, B dos partes compactas no vacíos de $\mathbb{R}^n$.
Demostrar que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\|a-b\| = \min\{\|x-y\|$ tal que $x \in A,\ y \in B\}$.
Demostrar que esto sigue siendo cierto si se supone que A es compacto y B es cerrado. [004742]

Ejercicio 5031 Diámetro

Sea E un evn de dimensión finita y $A \subset E$ acotado, cerrado, no vacío. Demostrar que existe $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in A$ tales que $\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| = \max(\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$ tal que $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in A)$. (Considerar el conjunto $A \times A$ en el evn $E \times E$)
[004743]

Ejercicio 5032 Diámetros concurrentes (Ens Ulm MP* 2003)

1. Sea K un compacto convexo de $\mathbb{R}^2$ con interior no vacío. Sea $O \in \mathring{K}$. Demostrar que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua 2π-periódica tal que en coordenadas polares de centro O, K está definido por $\rho \leqslant f(\theta)$.
2. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\cos(x)\,dx = \int_0^\pi g(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = 0$. Demostrar que g se anula al menos dos veces en $]0,\pi[$.
3. Sea G el centro de gravedad de K. Demostrar que G es el punto medio de al menos tres "diámetros" de K (tres segmentos que unen dos puntos de la frontera).

Solución ▼ [004744]

Ejercicio 5033 $x/\max(1,\|x\|)$, Centrale MP 2005

Sea f definida por $f(x) = \dfrac{x}{\max(1,\|x\|)}$. Demostrar que f es 2-lipschitziana.
Solución ▼ [004745]

Ejercicio 5034 u_n colineal a $v_n \Rightarrow \lim u_n$ colineal a $\lim v_n$

Sean E un evn de dimensión finita y $(\overrightarrow{u}_n)$, $(\overrightarrow{v}_n)$ dos sucesiones de vectores tales que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{u}_n$ es colineal a $\overrightarrow{v}_n$, $\overrightarrow{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{v}$. Demostrar que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son colineales (razonar por contradicción y completar $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en una base de E). [004746]

Ejercicio 5035 Sucesiones de Cauchy

Sean (u_n), (v_n) dos sucesiones de un evn E tales que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y (u_n) es Cauchy. Demostrar que (v_n) es Cauchy. [004747]

Ejercicio 5036 Sucesión de Cauchy no convergente

Sea $E=\mathbb{R}[X]$ dotado de la norma : $\|\sum a_k X^k\| = \max(|a_k|,\ k\in\mathbb{N})$. Se denota $P_n = 1+X+\frac{X^2}{2}+\cdots+\frac{X^n}{n}$. Demostrar que la sucesión (P_n) es de Cauchy, pero no converge. [004748]

Ejercicio 5037 Minas PC 1998

Sea B una matriz antisimétrica. Se supone que la sucesión (B^n) converge a una matriz C. ¿Qué se puede decir de C ? [004749]

Ejercicio 5038 Sucesión de matrices invertibles

Sea (A_n) una sucesión de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ que satisfacen las propiedades siguientes :

$$\begin{cases} 1:\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}) \\ 2:\ \text{para todo } n,\ A_n \text{ es invertible} \\ 3:\ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Demostrar que A es invertible y $A^{-1}=B$.
2. ¿Se puede eliminar la propiedad 3 ?

[004750]

Ejercicio 5039 Sucesión de matrices invertibles

Sea $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ arbitrario. Demostrar que existe una sucesión de matrices invertibles convergiendo a A. [004751]

Ejercicio 5040 DSE de IA

Sea $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Se supone que la sucesión de matrices : $A_n = I+A+A^2+\cdots+A^n$ converge a una matriz B. Demostrar que $I-A$ es invertible y $B=(I-A)^{-1}$.
Nota : El recíproco es falso, es decir que la sucesión (A_n) puede divergir incluso si $I-A$ es invertible. Buscar un contra ejemplo. [004752]

Ejercicio 5041 Ensam PSI 1998

Sea $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que la sucesión (A^k) converge a una matriz P. Demostrar que P es una matriz de proyección. [004753]

Ejercicio 5042 Sucesiones de funciones

Sea $E=\mathscr{C}([a,b]\to\mathbb{R})$, (f_n) una sucesión de funciones de E y $f\in E$. Comparar los enunciados :

$$1:\|f_n-f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 2:\|f_n-f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 3:\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

[004754]

Ejercicio 5043

Se denota E el espacio vectorial de sucesiones reales (x_n) tales que la serie $\sum x_n^2$ converge. Se dota del producto escalar $(x\mid y)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.

Sea (y^s) una sucesión acotada de elementos de E. Demostrar que se puede extraer una subsucesión débilmente convergente, es decir, existe z tal que para todo x de E se tiene $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$.

Solución ▼ [004755]

Ejercicio 5044 ENS Lyon MP 2002

Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de dimensión finita, y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que para todo $x \in E$, la sucesión $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

1. Demostrar que la sucesión $(|||u^n|||)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
2. Determinar el límite cuando $n \to \infty$ de $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u^i(x)$.

Solución ▼ [004756]

Ejercicio 5045 Norma bizarra

Demostrar que $(x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ es la norma en $\mathbb{R}^2$; dibujar la bola unidad. [004757]

Ejercicio 5046 Normas de polinomios

Sea $E = \mathbb{R}[X]$. Para $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, se establece :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad \|P\|_\infty = \max\{|a_0|,\dots,|a_n|\}, \qquad \|P\|_* = \max\{|P(t)| \text{ tal que } 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Demostrar que estas son normas, y que son dos a dos no equivalentes. (Se considera $P_n(t) = (t-1)^n$ y $Q_n(t) = 1+t+t^2+\cdots+t^n$) [004758]

Ejercicio 5047 Norma de polinomios

Sea $E = \mathbb{R}[X]$. Para $P \in E$ se establece $\|P\| = \sup(|P(t)-P'(t)| \text{ tal que } t \in [0,1])$.
Demostrar que se define una norma en E. [004759]

Ejercicio 5048 Normas de polinomios

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se considera para $P \in \mathbb{R}[X]$: $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt$. Demostrar que ...

1. N_a es una norma.
2. N_0 y N_1 son equivalentes.
3. Si $a,b \in [0,1]$, entonces N_a y N_b son equivalentes.
4. Sea $P_n = (X/2)^n$. Determinar para qué normas N_a la sucesión (P_n) es convergente y cuál es su límite.
5. Si $0 \leqslant a < b$ y $b > 1$, entonces ninguna de las normas N_a, N_b es más fina que la otra.

Solución ▼ [004760]

Ejercicio 5049 Normas de polinomios

Sea (λ_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos. Se asocia a la norma sobre $\mathbb{R}[x]$: $N(\sum_i a_i x^i) = \sum_i \lambda_i |a_i|$.

Sean (λ_n) y (λ'_n) dos sucesiones y N, N' las normas asociadas. Demostrar que N y N' son equivalentes si y solo si las sucesiones $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}\right)$ y $\left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)$ son acotadas. [004761]

Ejercicio 5050 Centrale MP 2006

E es el conjunto de funciones f de clase $\mathscr{C}^2$ en $[0,1]$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Para $f \in E$, se establece :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f''(x)|, \qquad N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

1. Demostrar que N_∞, N y N_1 son normas sobre E.
2. Demostrar que N_∞ no es equivalente ni N_1 ni a N.
3. Demostrar que N y N_1 son equivalentes (introducir la ecuación diferencial $y''+y=g$).

Solución ▼ [004762]

Ejercicio 5051 Norma de Frobenius

Para $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, se establece $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$.
Demostrar que es una norma y que : $\forall A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

Solución ▼ [004763]

Ejercicio 5052 Semi-norma

Sea p una semi-norma en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (es decir, falta justo el axioma $p(A)=0 \Rightarrow A=0$). Se supone además que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$. Demostrar que $p=0$ o p es de hecho una norma.

Solución ▼ [004764]

Ejercicio 5053 Normas producto

Sean E,F dos evn y $G = E\times F$. Se considera para $u = (\vec{x},\vec{y}) \in G$:

$$\|u\|_1 = \|\vec{x}\|_E + \|\vec{y}\|_F, \qquad \|u\|_2 = \sqrt{\|\vec{x}\|_e^2 + \|\vec{y}\|_F^2}, \qquad \|u\|_\infty = \max(\|\vec{x}\|_E, \|\vec{y}\|_F).$$

1. Demostrar que estas son normas sobre G y que son dos a dos equivalentes (sin hipótesis de dimensión finita).
2. Se toma $E=F$. Demostrar que para cada una de estas normas, la aplicación $G \to E$, $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \vec{x}+\vec{y}$ es continua.

[004765]

Ejercicio 5054 Normas sobre sucesiones

Sea E el conjunto de sucesiones $u=(u_n)$ reales acotadas. Se establece $\begin{cases} \|u\| = \sup(|u_n| \text{ tal que } n\in\mathbb{N}) \\ N(u) = \sup(|u_n|+|u_{2n}| \text{ tal que } n\in\mathbb{N}). \end{cases}$
Demostrar que estas son normas sobre E y que son equivalentes. [004766]

Ejercicio 5055 Estándar en suites

Sea E el conjunto de sucesiones reales $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ tales que la sucesión $(\sqrt[n]{|u_n|})$ es acotada. Para $u \in E$, se establece $\|u\| = \sup(\sqrt[n]{|u_n|}$ tal que $n \in \mathbb{N}^*)$. Demostrar que E es un $\mathbb{R}$-ev y que $\|\cdot\|$ *no* es una norma en E.

[004767]

Ejercicio 5056 Funciones lipschitzianas

Sea E el conjunto de funciones de Lipschitz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para $f \in E$, se establece :

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{xy}\right| \text{ tal que } x \neq y\right),$$
$$N(f) = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \text{ tal que } x \neq 0\right).$$

1. Demostrar que E es un $\mathbb{R}$-ev.
2. Demostrar que $\|\cdot\|$ y N son normas sobre E.
3. ¿Son equivalentes ?

[004768]

Ejercicio 5057 Funciones $\mathscr{C}^1$

Sea E el conjunto de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$.
Para $f \in E$, se establece : $N_1(f) = \sup(|f| + |f'|)$, $N_2(f) = \sup|f| + \sup|f'|$.
Demostrar que N_1 y N_2 son dos normas equivalentes en E. [004769]

Ejercicio 5058 Norma en funciones continuas

$E = C([0,1],\mathbb{R})$. Sea $g \in E$. Para todo $f \in E$ se establece $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \{|f(x)g(x)|\}$.

1. Dar una condición necesaria y suficiente en g para que N sea una norma en E.
2. Si para todo $x \in [0,1]$, $g(x) \neq 0$, demostrar que entonces N y $\|\ \|_\infty$ son normas sobre E equivalentes.
3. Demostrar el recíproco de la proposición anterior.

[004770]

Ejercicio 5059 Comparación de normas (ENS MP 2002)

1. Sean E un espacio hilbertiano real y $u_1, \dots, u_n$ elementos de E. Calcular $\sum\limits_{\sigma}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(i)u_i\right\|^2$, donde σ recorre el conjunto de funciones de $[\![1,n]\!]$ en $\{-1,1\}$.
2. Se considera el conjunto de funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Demostrar que la norma infinita no es equivalente a ninguna norma euclidiana.
3. Misma pregunta con la norma $\|\ \|_p$, $p \in [1,+\infty[\setminus\{2\}$.

Solución ▼ [004771]

Ejercicio 5060 Jauge

Sea $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-evn y $K \subset E$ una parte convexa, acotada, simétrica con respecto al origen y tal que $0 \in \mathring{K}$.

Para $x \in E$, se considera $n(x) = \inf\{|\lambda| \text{ tal que } x \in \lambda K\}$. Demostrar que n es una norma equivalente a $\| \ \|$.
[004772]

Ejercicio 5061 Polytechnique MP* 2006

Sea E un espacio vectorial real. Se considera una aplicación $N : E \to \mathbb{R}^+$ tal que :
(i) $\forall \lambda, x,\ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
(ii) $\forall x,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1. Demostrar que N es una norma si y sólo $B = \{x \text{ tal que } N(x) \leqslant 1\}$ es convexo.
2. Demostrar que si N también verifica (iii) $\quad \forall x, y,\ N(x+y)^2 \leqslant 2N(x)^2 + 2N(y)^2$ entonces es una norma.

Solución ▼ [004773]

Ejercicio 5062 Partes de $\mathbb{R}^n$

¿Son abiertas las siguientes partes cerradas ? ¿acotadas ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } xy = 1\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + xy + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1\}$.

[004774]

Ejercicio 5063 Adición de partes

Sean A, B dos partes no vacías de un evn E. Se denota $A + B = \{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \text{ tal que } \overrightarrow{a} \in A,\ \overrightarrow{b} \in B\}$. Demostrar que ...

1. Si A o B es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
2. Si A y B son cerrados, entonces $A+B$ no es necesariamente cerrado. (Tomar $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } xy = 1\}$ y $B = \{(x,0) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}\}$).
3. Si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto.

[004775]

Ejercicio 5064 Vecindario cerrado de un cerrado

Sea F un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Sea $F' = \bigcup_{\overrightarrow{x} \in F} \overline{B}(\overrightarrow{x}, r)$. Demostrar que F' es cerrado. [004776]

Ejercicio 5065 Ev generado por un abierto

Sea $\mathscr{O}$ un conjunto abierto no vacío de una ev normado E. Demostrar que $\mathrm{vect}(\mathscr{O}) = E$. [004777]

Ejercicio 5066 Adherencia e interior de un sev

Sea E un evn y F un sev de E.

1. Demostrar que $\overline{F}$ es un sev de E.
2. Si E es de dimensión finita, demostrar que $F = \overline{F}$.

3. En el caso general, demostrar que $\mathring{F} = \varnothing$ o $F = E$.

[004778]

Ejercicio 5067 Cono convexo generado por un conjunto finito, ENS ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado y $a_1, \ldots, a_n \in E$. Sea $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \lambda_i \geqslant 0 \right\}$.

1. Demostrar que, para todo $x \in E$, existe $c \in C$ tal que $\|x - c\| = \inf\{\|x - a\|, a \in C\}$.
2. Deducir que C es cerrado.

Solución ▼ [004779]

Ejercicio 5068 Parte convexa densa

Sea E un evn de dimensión finita y $C \subset E$ convexo y denso. Demostrar que $C = E$.

Solución ▼ [004780]

Ejercicio 5069 El conjunto de proyectores es cerrado

Sea E un evn de dimensión finita y $\mathscr{P}$ el conjunto de proyectores de E. Demostrar que $\mathscr{P}$ es cerrado en $\mathscr{L}(E)$. [004781]

Ejercicio 5070 Adherencia e interior en funciones continuas

1. Sea $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ dotado de la norma de convergencia uniforme. Sea P el conjunto de funciones positivas o nulas de E. Buscar $\overline{P}$ y $\mathring{P}$.
2. Las mismas preguntas con la norma : $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

Solución ▼ [004782]

Ejercicio 5071 Mines MP 2000

Se establece $E = C([0,1], \mathbb{R})$ y se equipa con la norma N_∞. Sea $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Determinar la adherencia y el interior de F.

Solución ▼ [004783]

Ejercicio 5072 Puntos aislados (Ens Ulm MP* 2003)

¿Las soluciones de la ecuación $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, para $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ son aisladas ?

Solución ▼ [004784]

Ejercicio 5073 Adherencia e interior de un convexo

Sea A una parte convexa de un evn E.

1. Demostrar que $\overline{A}$ y $\mathring{A}$ también son convexos (para $\mathring{A}$: hacer un dibujo).
2. Demostrar que la aplicación $x \mapsto d(x,A)$ es convexa (es decir, $d(tx + (1-t)y, A) \leqslant t d(x,A) + (1-t) d(y,A)$).

[004785]

Ejercicio 5074 Teorema de cerrados anidados

Sea E un evn de dimensión finita, y $(B_n = B(\overrightarrow{a}_n, r_n))$ una sucesión de bolas cerradas, decrecientes para inclusión, tales que $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1. Demostrar que la sucesión $(\overrightarrow{a}_n)$ admite una subsucesión convergente a $\overrightarrow{a} \in E$.
2. Demostrar que $\overrightarrow{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{a}$.
3. Demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\overrightarrow{a}\}$.

[004786]

Ejercicio 5075 X MP* 2001

Se considera el espacio $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dotado de norma cualquiera.

1. Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ es una abierto denso de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Sea $D_n(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices diagonalizables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que $D_n(\mathbb{C})$ es denso en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. ¿Cuál es el interior de $D_n(\mathbb{C})$?

Solución ▼ [004787]

Ejercicio 5076 Matrices nilpotentes, ENS Ulm-Lyon-Cachan MP* 2006

Sea $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que N es nilpotente si y solo si la matriz nula es adherente al conjunto $\{P^{-1}NP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

Solución ▼ [004788]

Ejercicio 5077 Polinomios divididos (Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003)

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $\sigma \in \mathbb{R}^n$. se denota $P_\sigma = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n$.
Sea $\Omega = \{\sigma \in \mathbb{R}^n$ tal que P_σ es de raíces distintas reales$\}$.

1. ¿Es Ω abierto ? ¿cerrado ?
2. Denotar $f : \sigma \mapsto P_\sigma$. Determinar $f(\overline{\Omega})$.

Solución ▼ [004789]

Ejercicio 5078 $(f(x) - f(y))/(x - y)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} (x,y) & \dfrac{f(x)-f(y)}{xy} \text{ si } x \neq y \\ (x,x) & f'(x) \end{cases}$

Demostrar que g es continua. (Advertencia : para una función definida por casos, usar un vecindario de (x_0, y_0) y determinar si solo uno o más casos deben ser considerados en este vecindario) [004790]

Ejercicio 5079 $\sup(f(x,y))$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Se establece $g(x) = \sup(f(x,y)$ tal que $y \in [0,1])$. Demostrar que g es continua.

Solución ▼ [004791]

Ejercicio 5080 Función que tiende a $+\infty$ en infinito

Sea E un evn de dimensión finita y $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Se supone que $f(\overrightarrow{x}) \xrightarrow[\|\overrightarrow{x}\|\to\infty]{} +\infty$, es decir : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \|\overrightarrow{x}\| \geqslant B \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) \geqslant A$.

1. Se toma $A = f(\overrightarrow{0})$ y B el número correspondiente.
   Demostrar que $\inf\{f(\overrightarrow{x})$ tal que $\overrightarrow{x} \in E\} = \inf\{f(\overrightarrow{x})$ tal que $\|\overrightarrow{x}\| \leqslant B\}$.
2. Deducir que f admite un mínimo.
3. Ejemplo : Sea $E = \mathbb{R}_n[X]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.
   Demostrar que existe $P \in E$ tal que $\|f-P\|_\infty = \sup\{|f(t)-P(t)|$ tal que $t \in [a,b]\}$ sea mínimo (P se llama : *un* polinomio de mejor aproximación de f sobre $[a,b]$).

[004792]

Ejercicio 5081 Funciones homogéneas

Observamos $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *positivamente homogéneo de grado* α si :
$\forall (x,y) \in \Omega, \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.

1. Dar ejemplos de tales funciones para $\alpha = 1, 0, -2, \frac{1}{2}$.
2. Sea f continua, positivamente homogénea de grado α. Demostrar que si $\alpha \geqslant 0$, f es acotado en D y que si $\alpha > 0$, f admite un límite finito en $(0,0)$.
   Examinar los casos $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.

[004793]

Ejercicio 5082 Función parcialmente continua en todas las direcciones

Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ discontinua en $(0,0)$ pero tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha t, \beta t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.
[004794]

Ejercicio 5083 Continuidad del polinomio característico

Sean $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}_n[X]$, y $\varphi : E \to F, A \mapsto P_A$ (polinomio característico). Demostrar que φ es continua.
[004795]

Ejercicio 5084 Abierto y no abierto

Sea $E = \mathbb{R}[X]$. Para $P \in E$, se establece : $\begin{cases} N_1(P) = \sup(|P(t)| \text{ tal que } 0 \leqslant t \leqslant 1) \\ N_2(P) = \sup(|P(t)| \text{ tal que } 1 \leqslant t \leqslant 2) \\ \varphi(P) = P(0). \end{cases}$

1. Comprobar que N_1 y N_2 son normas.
2. Demostrar que φ es continua para N_1.
3. Demostrar que φ es discontinua para N_2. (Considerar $P_n(t) = (1-t/2)^n$)
4. ¿Son N_1 y N_2 equivalentes ?
5. Sea $\mathscr{O} = \{P \in E$ tal que $P(0) \neq 0\}$. Demostrar que $\mathscr{O}$ es abierto para N_1, pero no para N_2.

[004796]

Ejercicio 5085 Teorema del punto fijo

Sea E un evn de dimensión finita y $f : E \to E$ una función k-lipschitziana con $k < 1$. Se escoge $\overrightarrow{u}_0 \in E$ arbitrariamente, y se considera la sucesión $(\overrightarrow{u}_n)$ tal que para todo n : $\overrightarrow{u}_{n+1} = f(\overrightarrow{u}_n)$.

1. Demostrar que $\|\overrightarrow{u}_{n+1} - \overrightarrow{u}_n\| \leqslant k^n \|\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_0\|$.
2. Deducir que la sucesión $(\overrightarrow{u}_n)$ es de Cauchy.
3. Sea $\overrightarrow{\ell} = \lim(\overrightarrow{u}_n)$. Demostrar que $\overrightarrow{\ell}$ es la única solución en E de la ecuación $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.

[004797]

Ejercicio 5086 Puntos fijos, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

1. Demostrar que los puntos fijos de f, continua en $[0,1]$, con valores en $[0,1]$, forman un cerrado no vacío.
2. Demostrar que todo cerrado de $[0,1]$ no vacío es el conjunto de puntos fijos de una función continua de $[0,1]$ en $[0,1]$.

Solución ▼ [004798]

Ejercicio 5087 Raíces de polinomios X MP* 2004

Sea $E = \mathbb{C}_d[X]$ normado por $\|P\| = \sum |a_i|$, $P \in E$ de grado d, con raíces simples y P_n una sucesión de polinomios de E convergiendo hacia P. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$ y $\delta > 0$.

1. Demostrar que para n bastante grande, P_n tiene al menos un cero en $\overline{B(z,\delta)}$.
2. Demostrar que existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $\delta \in]0,\delta_0]$ P_n tiene exactamente una raíz en $\overline{B(z,\delta)}$ si n es bastante grande.
3. ¿Qué se puede decir si los ceros de P ya no se supone que sean simples ?

Solución ▼ [004799]

Ejercicio 5088 Una aplicación de polinomios es cerrada, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Sea f una función polinomial en $\mathbb{C}$. Demostrar que la imagen por f de todo cerrado es un cerrado.

Solución ▼ [004800]

Ejercicio 5089 Principio del máximo, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ y U un abierto de $\mathbb{C}$ acotado. Demostrar que $\sup(|P(x)|,\ x \in U) = \sup(|P(x)|,\ x \in \mathrm{Fr}(U))$.

Solución ▼ [004801]

Ejercicio 5090 Función casi aditiva, Central MP 2001

Sean E,F dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales normados, F es completo. Sea f una aplicación continua de E en F tal que existe $M \in \mathbb{R}^+$ verificando :

$$\forall x,y \in E,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M.$$

1. En el caso $M = 0$ demostrar que f es lineal. ¿Se cumple este resultado si E y F son $\mathbb{C}$-ev ?

2. Se supone $M > 0$. Sea para $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Demostrar que la sucesión (f_n) converge simplemente en E.
3. Se denota $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Demostrar que g es una aplicación lineal continua y que es la única aplicación lineal tal que $f - g$ es acotada.

Solución ▼ [004802]

Ejercicio 5091 f uc $\Rightarrow f$(acotado) es acotado

Sea $A \subset E$ una parte no vacía acotado y $f : A \to F$ uniformemente continua. Demostrar que f es acotada en los siguientes casos :

1. A es convexo.
2. A es conexo por arcos.
3. A es cualquiera y E es de dimensión finita.

[004803]

Ejercicio 5092 Aplicaciones lineales continuas

Sea E un $\mathbb{R}$-ev de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Se establece $|||u||| = \sup(\|u(\overrightarrow{x})\|$ tal que $\|\overrightarrow{x}\| = 1)$.

1. Demostrar que $|||u|||$ existe y que es un máximo.
2. Demostrar que $|||\ .\ |||$ es una norma en $\mathscr{L}(E)$ (llamada : *norma lineal asociada a* $\|\ .\ \|$).
3. Demostrar que : $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \|u(\overrightarrow{x})\| \leqslant |||u||| \times \|\overrightarrow{x}\|$.
4. Deducir que : $\forall u, v \in \mathscr{L}(E),\ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| \times \mathbb{N}v\mathbb{N}$.

[004804]

Ejercicio 5093 Central MP 2006

E es el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas y acotadas en $\mathbb{R}$. Para $p \in \mathbb{N}$ y $f \in E$ se establece : $N_p(f) = \sup\{|t^p e^{-|t|} f(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. Demostrar que N_p es una norma en E.
2. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $P_c : E \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$. Estudiar la continuidad de P_c sobre (E, N_p).
3. Demostrar que, para p y q distintos en $\mathbb{N}$, las normas N_p y N_q no son equivalentes.

Solución ▼ [004805]

Ejercicio 5094 Aplicaciones lineales continuas

Sean E, F dos evn de dimensiones finitas y $\varphi : E \to F$ lineal. Demostrar que φ es continua. Deducir que todo sev de E es cerrado. [004806]

Ejercicio 5095 Continuidad del polinomio de Lagrange

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distintos. A $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se hace corresponder el polinomio $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que para todo i : $P(x_i) = y_i$.

1. Demostrar que la aplicación $(y_1, \dots, y_n) \mapsto P$ es continua.
2. Demostrar que la aplicación inversa es también continua.

Ejercicio 5096 Ensi PSI 1998

Sea $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ el conjunto de sucesiones reales convergentes dotadas de la norma $\|u\| = \sup\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$. Sea $L : \mathscr{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, u \mapsto \ell = \lim_{n\to\infty} u_n$. Demostrar que L es una aplicación lineal continua y calcular su norma.

[004808]

Ejercicio 5097 Iteración de un endomorfismo

Sea E un evn de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Se escoge $\vec{x}_0 \in E$, y se considera la sucesión $(\vec{x}_n)$ definida por la relación de recurrencia : $\vec{x}_{n+1} = \frac{u(\vec{x}_n)}{\|u(\vec{x}_n)\|}$. Se supone que la sucesión $(\vec{x}_n)$ converge. Demostrar que el límite es un vector propio de u.

Ejemplos : **1)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9 \end{pmatrix}$. **2)** $E = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}$. [004809]

Ejercicio 5098 Potencias de u

Sea E un evn de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\|u\| \leqslant 1$. Demostrar que la sucesión (u^n) contiene una sub-sucesión que converge simplemente.

Solución ▼ [004810]

Ejercicio 5099 $\mathrm{Id} - u$ es bicontinua

Sea E un $\mathbb{C}$-evn y $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tal que $\mathrm{Id}_E - u$ es bicontinua. Demostrar que para todo entero n, $\mathrm{Id}_E - u^n$ es bicontinua y comparar su inversa a $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{Id}_E - \mathrm{e}^{2ik\pi/n} u\right)^{-1}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [004811]

Ejercicio 5100 Norma lineal en $\mathbb{R}$ = norma lineal en $\mathbb{C}$

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ los endomorfismos canónicamente asociados con A. Demostrar que si se provee $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ de normas euclidianas usuales, entonces $\|f\| = \|g\|$.

Solución ▼ [004812]

Ejercicio 5101 Aplicaciones lineales sobre polinomios

Sea $E = \mathbb{R}[x]$ dotado con la norma : $\left\|\sum_i a_i x^i\right\| = \sum_i |a_i|$.

1. ¿Es $\varphi : P \mapsto P(x+1)$ continua ?
2. ¿Es $\psi : P \mapsto AP$ continua ? ($A \in E$ fijo)
3. Retomar las preguntas anteriores con la norma : $\|P\| = \sup\{\mathrm{e}^{-|t|}|P(t)|,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Solución ▼ [004813]

Ejercicio 5102 $uv - vu = \mathrm{Id}$

Sea E un espacio vectorial normado y $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tales que $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

1. Calcular $u \circ v^n - v^n \circ u$, para $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Demostrar que u o v es discontinua.

Solución ▼ [004814]

Ejercicio 5103 ¿La derivación puede ser continua ?

Se denota $E = \mathscr{C}^\infty([0,+\infty[,\mathbb{R})$ y D el endomorfismo de E de derivación : $D(f) = f'$.

1. Demostrar que no existe norma sobre E, para la cual D sea continuo (considerar $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$).
2. Sea F el sub-ev de E constituido por funciones polinomiales. Encontrar una norma en F, para la cual $D_{|F}$ es continuo.

Solución ▼ [004815]

Ejercicio 5104 Mines MP 2002

Se provee $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ de la norma $\|P\|_k = \sum_{i=0}^{k} |P(i)|$. Calcular $|||\varphi|||$, con $\varphi : E_2 \to E_3, P \mapsto X^2P'$.

Solución ▼ [004816]

Ejercicio 5105 Normas sobre sucesiones acotadas

Sea E el conjunto de sucesiones reales $u = (u_n)$ acotadas y F el sev de sucesiones tales que la serie de término general $|u_n|$ converge. Para $u \in E$, se establece $\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$ y para $u \in F$: $\|u\|_1 = \sum_n |u_n|$. Sea $a \in E$ y $f : E \to E, u \mapsto au = (a_n u_n)$.

1. Demostrar que f es una aplicación lineal continua de E en E y calcular su norma.
2. Demostrar que F es estable por f y calcular la norma de $f_{|F}$ cuando se toma la norma $\| \ \|_1$ sobre F.

[004817]

Ejercicio 5106 Teorema del hiperplano cerrado

Sea E un $\mathbb{R}$-evn y $f \in E^*$.

1. Demostrar que f es continua si y solo si $\ker f$ es cerrado (para la inversa : suponer $\ker f$ cerrado, demostrar que $\{x \text{ tal que } f(x) > 0\}$ es abierto, luego estudiar $\{x \text{ tal que } -1 < f(x) < 1\}$).
2. Se supone f continua. Sea $x \in E$. Demostrar que $|f(x)| = \|f\| d(x, \ker f)$.

Solución ▼ [004818]

Ejercicio 5107 Teorema de Hahn-Banach (Polytechnique MP* 2003)

Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita y F un hiperplano de E. Sea $\varepsilon \in E$ tal que $\mathbb{R}\varepsilon$ sea suplemento de F. Sea f una forma lineal en F.

1. Demostrar que : $\forall x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
2. Demostrar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que : $\forall x_1, x_2 \in F,\ f(x_1) - |||f|||\ \|x_1 - \varepsilon\| \leqslant \alpha \leqslant |||f|||\ \|x_2 + \varepsilon\| - f(x_2)$.
3. Se define $\varphi : E \to \mathbb{R}$ por $\varphi_{|F} = f$ y $\varphi(\varepsilon) = \alpha$. Demostrar que $|||\varphi||| = |||f|||$.
4. Se considera $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tal que } \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\}$, con la norma definida por : $\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Demostrar que E es completo para esta norma.
5. Dar una familia numerable de sev de E de dimensiones finitas incluyendo la unión es denso en E.
6. Sea F un sev de E de dimensión finita y f una forma lineal en F. Demostrar que existe una forma lineal φ sobre E tal que $\varphi_{|F} = f$ y $|||\varphi||| = |||f|||$.

Solución ▼ [004819]

Ejercicio 5108 Rayon spectral

Sea E un evn de dimensión finita y $u \in \mathscr{L}(E)$. Se define $x_n = \|u^n\|$.

1. Demostrar que $\rho = \inf\{\sqrt[n]{x_n},\ n \in \mathbb{N}\}$ es independiente de la norma elegida en E.
2. Usando la desigualdad : $x_{p+q} \leqslant x_p x_q$, demostrar que la sucesión $(\sqrt[n]{x_n})$ converge a ρ.

[004820]

Ejercicio 5109 Rayon spectral (Central MP 2001)

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Se considera un endomorfismo f de E y se denota $\rho(f) = \sup\{|\lambda| \text{ tal que } \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$ (radio espectral de f). Sea ν una norma en $\mathscr{L}(E)$.

1. Demostrar que $\rho(f) \leqslant \lim\limits_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$. Se puede para comenzar suponer que ν es la norma subordinada a una norma sobre E.
2. Demostrar que si f es diagonalizable la desigualdad anterior es una igualdad.
3. Estudiar el caso general.

Solución ▼ [004821]

Ejercicio 5110 Polytechnique MP* 2000

Sea u una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que u es sobreyectiva si y solo si transforma todo abierto de $\mathbb{R}^n$ en abierto de $\mathbb{R}^m$.

Solución ▼ [004822]

Ejercicio 5111 Conexidad de un evn

Sea E un evn y $A \subset E$. Se supone que A es a la vez abierto y cerrado.

1. ¿Puede dar ejemplos de tales partes ?
2. Se define la función $f : E \to \mathbb{R}$ por $\begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in A \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin A. \end{cases}$
   (a) Demostrar que f es continua.
   (b) Se toma $\vec{a} \in A$ y $\vec{b} \notin A$. Demostrar que $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t\vec{a} + (1-t)\vec{b})$ es continua.
   (c) Concluir.

[004823]

Ejercicio 5112 $A \neq E$ y $A \neq \varnothing => \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$

Sea E un evn y A una parte de E ni vacía, ni igual a E. Demostrar que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$. [004824]

Ejercicio 5113 $A \cup B$ cerrado $\Rightarrow A \cup B = E$.

Sea E un evn de dimensión superior o igual a 2 y A, B dos partes de E tales que A es abierto no vacío, B es finito y $A \cup B$ es cerrado. Demostrar que $A \cup B = E$.

Solución ▼ [004825]

Ejercicio 5114 Complemento de un hiperplano (Ens Ulm MP* 2005)

Sea E un evn real y H un hiperplano de E. Demostrar que $E \setminus H$ es arco conexo si y solo si H *no es* cerrado.

Solución ▼ [004826]

Ejercicio 5115 **

Demostrar que la bola unidad de un espacio vectorial normado es un convexo de este espacio.

Solución ▼ [005839]

Ejercicio 5116 *** I

1. Desigualdades de HÖLDER y de MINKOWSKI. Sea $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Demostrar que para $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.
   (b) Deducir que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$.
   (c) Deducir que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}.$$
2. Sea α un real estrictamente positivo. Para $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define $N_\alpha(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}$.
   (a) Demostrar que $\forall \alpha \geqslant 1$, N_α es una norma en $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dibujar las « bolas unitarias » de $\mathbb{R}^2$ en el caso donde $\alpha \in \left\{\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,+\infty\right\}$.
   (c) Demostrar que, para $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ fijado, $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = \max\{|x_k|,\ 1\leqslant k\leqslant n\} = N_\infty(x)$.
   (d) Demostrar que si $0<\alpha<1$, N_α no es una norma en $\mathbb{R}^n$ (si $n \geqslant 2$).

Solución ▼ [005840]

Ejercicio 5117 ** I

Sea $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. Para f elemento de E, se establece $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ y
$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Demostrar que N, N' y N'' son normas y compararlas.

Solución ▼ [005841]

Ejercicio 5118 ** I Distancia de un punto a una parte

Sea A una parte no vacío de un espacio vectorial normado $(E,\|\ \|)$. Para $x \in E$, se establece $d_A(x) = d(x,A)$, donde $d(x,A) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$.

1. Justificar la existencia de $d_A(x)$, para cada x de E.
2. (a) Demostrar que si A es cerrado, $\forall x \in E$, $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
   (b) Demostrar que si A es cerrado y E es de dimensión finita, $\forall x \in E$, $\exists a \in A/\ d_A(x) = \|x-a\|$.
3. Si A es cualquiera, comparar $d_A(x)$ y $d_{\overline{A}}(x)$.

4. Demostrar d_A es continua en E.
5. A cada parte cerrada no vacía A, se asocia la aplicación d_A definida arriba. Demostrar que la aplicación $A \mapsto d_A$ es inyectiva.
6. En el espacio de aplicaciones continuas en $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$ dotado de la norma de convergencia uniforme, se considera $A = \left\{ f \in E /\ f(0) = 0 \text{ y } \int_0^1 f(t)\, dt \geqslant 1 \right\}$. Calcular $d_A(0)$.

Solución ▼ [005847]

199 229.07 Conexidad

Ejercicio 5119 Frontera conexa

Sea E un espacio vectorial normado y $A \subset E$ cerrado. Demostrar que si $\mathrm{Fr}(A)$ es conexo, entonces A es conexo.

Solución ▼ [004841]

Ejercicio 5120 $\mathbb{U}$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos

Sea $\mathbb{U}$ el círculo unitario de $\mathbb{C}$ y $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que f no es inyectiva. [004842]

Ejercicio 5121 $u_{n+1} - u_n \to 0$

Sea E un evn de dimensión finita y (u_n) una sucesión acotada de elementos de E tal que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Demostrar que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión es conexo.

Solución ▼ [004843]

Ejercicio 5122 Complemento de una parte estrellada

Sea Ω una parte acotada estrellada de un evn real dimensional superior o igual a 2. Demostrar que el complemento de Ω es conexo. [004844]

Ejercicio 5123 Complemento de un sev

Sea E un $\mathbb{R}$-evn de dimensión finita y F un sev propio de E. Demostrar que $E \setminus F$ es conexo si y solo si $\mathrm{codim}(F) \geqslant 2$. ¿Qué se puede decir en un $\mathbb{C}$-ev? [004845]

Ejercicio 5124 Conexidad

El propósito de este ejercicio es demostrar que una parte P abierta de $\mathbb{C}$ es conexa si y solo si para todo par (a,b) puntos de P existe una línea poligonal incluida en P que une a y b.

1. Se supone primero que para todo par (a,b) puntos de P existe una línea poligonal incluida en P que une a y b. Se supone que P no es conexo. Demostrar que existen dos abiertos disjuntos A y B, un punto a de A, un punto b de B tal que el segmento $[ab]$ esté incluido en P.
2. Denotemos

$$\alpha := \{t \in [0,1] \ /\ ta + (1-t)b \in A\}$$
$$\beta := \{t \in [0,1] \ /\ ta + (1-t)b \in B\}.$$

Demostrar que α y β son no vacíos abiertos y disjuntos y utilizar la conexión de $[0,1]$, para obtener una contradicción.

3. Por el contrario, se supone que P es conexo y fijamos un punto o de P. Se considera

$$A := \{b \in P \text{ existe una línea poligonal incluida en } P \text{ que une } o \text{ y } b.\}.$$

Demostrar que A es abierto en P, mostrando que para todo punto b de A, existe una bola $B(b,\varepsilon)$ incluida en A.

4. Con las notaciones anteriores, demostrar que $P-A$ es abierto en P, mostrando que para todo punto z de $P-A$ y toda bola $B(z,\varepsilon)$ incluida en P, $B(z,\varepsilon)$ está incluida en $P-A$.

5. Concluir.

[007523]

---

200 229.08 Espacios completos

Ejercicio 5125 Norma para las funciones de Lipschitz

Sea $E = \{\text{funciones de Lipchitz } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Para $f \in E$, se establece $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{x \neq y} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$. Demostrar que E es completo. [004846]

Ejercicio 5126 Imagen de una intersección de cerrados

Sea E un espacio vectorial normado completo, F un espacio vectorial normado cualquiera, $f : E \to F$ una aplicación continua y (E_n) una sucesión decreciente de cerrados de E cuyo diámetro tiende hacia 0. Demostrar que $f(\bigcap\limits_n E_n) = \bigcap\limits_n f(E_n)$. [004847]

Ejercicio 5127 Intersección de bolas

Sea E un evn completo y $(B_n(a_n,r_n))$ una sucesión decreciente de bolas cerradas cuyo radio no tiende a 0. Demostrar que $\bigcap\limits_n B_n$ es una bola cerrada.

Solución ▼ [004848]

Ejercicio 5128 Intersección vacía

Sea $E = \mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{\text{sucesiones } u = (u_n) \text{ acotadas}\}$. Se provee E de la norma : $\|u\| = \sup\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Demostrar que E es completo.

2. Sea $F_k = \{u \in E \text{ tal que } \|u\| = 1 \text{ y } u_0 = \cdots = u_k = 0\}$. Verificar que los F_k forman una sucesión de conjuntos cerrados acotados anidados cuya intersección es vacía.

[004849]

Ejercicio 5129 Teorema de Baire

Sea E un espacio vectorial normado completo y (F_n) una sucesión de cerrados de E de interiores vacíos. Se define $F = \bigcup\limits_n F_n$. Demostrar que $\mathring{F} = \varnothing$.

Solución ▼ [004850]

Ejercicio 5130 $f \circ f$ es contractante

Sea E un espacio vectorial normado completo y $f : E \to E$ tal que $f \circ f$ es contractante. Demostrar que f admite un único punto fijo.

Solución ▼ [004851]

Ejercicio 5131 Central MP 2001

Demostrar que un plano euclidiano no es una unión de círculos disjuntos no reducidos a un punto.

Indicación ▼ Solución ▼ [004852]

201 229.09 Funciones vectoriales

Ejercicio 5132 Centro de gravedad de una curva paramétrica

Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto M_t$ una curva parametrizada de clase $\mathscr{C}^1$ de longitud no nula. El centro de gravedad de la curva es el punto G tal que $\int_a^b \overrightarrow{GM_t} \|\vec{M}'(t)\| \, dt = \vec{0}$.

1. Demostrar la existencia y unicidad de G.
2. Determinar el centro de gravedad de un semicírculo. (Se admite que G es independiente del parametraje)
3. Demostrar que G pertenece a la envolvente convexa de la curva.
4. Demostrar que si la curva admite un eje de simetría, Δ, entonces $G \in \Delta$. (Si σ es la simetría asociada, se considera la curva descrita por $N_t = \sigma(M_t)$)
5. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría afín. Demostrar que si G es el centro de gravedad de $\mathscr{C}$, entonces $\Phi(G)$ es el centro de gravedad de $\Phi(\mathscr{C})$.

Solución ▼ [004853]

Ejercicio 5133 Derivada de una base ortonormada

Sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathscr{C}^1$ tales que para todo $t \in I$, $\mathscr{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ es una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ (base ortonormada móvil).

1. Sea M_t la matriz en $\mathscr{B}_t$ de vectores derivada $\vec{e}_1{}'(t), \vec{e}_2{}'(t), \vec{e}_3{}'(t)$. Demostrar que M_t es antisimétrica.
2. Deducir que existe un vector $\vec{\Omega}(t)$ tal que $\vec{e}_i{}'(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{e}_i(t)$, $i = 1,2,3$.
3. Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ son de clase $\mathscr{C}^2$, demostrar que $\vec{\Omega}$ es de clase $\mathscr{C}^1$ y calcular $\vec{e}_i{}''$ en función de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}'$ y $\vec{e}_i$.

Solución ▼ [004854]

Ejercicio 5134 f' es colineal a f

Sea $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ tal que :

$$\forall t \in I,\ \vec{f}(t) \neq \vec{0} \text{ y la familia } (\vec{f}(t), \vec{f}'(t)) \text{ es ld.}$$

Se establece $\overrightarrow{g}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f}(t)}{\|\overrightarrow{f}(t)\|}$.

1. Demostrar que g es de clase $\mathscr{C}^1$ y que $\overrightarrow{g}'(t)$ es a la vez ortogonal y colineal a $\overrightarrow{g}(t)$.
2. Deducir que $\overrightarrow{f}(t)$ tiene una dirección constante.
3. Determinar un contraejemplo cuando se elimina la propiedad : $\forall t \in I,\ \overrightarrow{f}(t) \neq \overrightarrow{0}$.

[004855]

Ejercicio 5135 f'' es colineal a f

Sea $\overrightarrow{f}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathscr{C}^2$ tal que para todo $t \in I$, $\overrightarrow{f}''(t)$ es colineal a $\overrightarrow{f}(t)$. (*movimiento de aceleración central*) Se denota $\overrightarrow{\sigma}(t) = \overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{f}'(t)$.

1. Demostrar que $\overrightarrow{\sigma}(t)$ es un vector constante.
2. Si existe $t_0 \in I$ tal que $(\overrightarrow{f}(t_0), \overrightarrow{f}'(t_0))$ es libre, demostrar que $\overrightarrow{f}(I)$ está incluido en un plano.

[004856]

Ejercicio 5136 f y g colineales

Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ dos funciones vectoriales de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Se supone : $\forall t \in I,\ f(t)$ y $g(t)$ son colineales. ¿Son $f'(t)$ y $g'(t)$ colineales ?
2. Se supone : $\forall t \in I,\ f'(t)$ y $g'(t)$ son colineales. ¿Existe $\overrightarrow{c} \in E$ tal que $f - \overrightarrow{c}$ y g son colineales ?

Solución ▼ [004857]

Ejercicio 5137 $\mathbb{R}^2 \setminus$ una recta no es conexa

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función continua, D una recta de $\mathbb{R}^2$ y P^+, P^- los semiplanos delimitados por D. Demostrar que si existe $a, b \in I$ tales que $f(a) \in P^+$ y $f(b) \in P^-$, entonces existe c comprendido entre a y b tal que $f(c) \in D$. Generalizar en dimensión n. [004858]

---

202 229.10 Aplicación lineal continua, norma matricial

Ejercicio 5138 *

Se provee $E = \mathbb{R}[X]$ de la norma $\|\ \|_\infty$ definida por : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \sup\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1. Verificar brevemente que $\|\ \|_\infty$ es una norma en E.
2. Sea f el endomorfismo de E definido por $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Demostrar que la aplicación f es continua en $(E, \|\ \|_\infty)$ y determinar $|||f|||$.

Solución ▼ [005854]

Ejercicio 5139 **

Se provee $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las sucesiones acotadas de la norma $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Se consideran endomorfismos Δ y C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ definidos por :

$\forall u \in E$, $\Delta(u) = v$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ y $\forall u \in E$, $C(u) = w$, donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Demostrar que Δ y C son continuos en $(E, \| \|_\infty)$ y calcular su norma.

Solución ▼ [005855]

Ejercicio 5140 *** I

Se provee $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norma 1 definida por $\forall f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

Se establece $T : E \to E$ y se admite que T es un endomorfismo de E.

$$\begin{aligned} f \mapsto Tf : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t)\, dt \end{aligned}$$

1. Demostrar que T es continuo en $(E, \| \|_1)$ y determinar $|||T|||$.
2. Verificar que no se alcanza la cota superior.

Solución ▼ [005856]

Ejercicio 5141 **

Se provee $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norma N definida por $\forall A \in E$, $N(A) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$ (se admite que N es una norma en E). Sea f la aplicación de E en $\mathbb{R}$ definida por $\forall A \in E$, $f(A) = \mathrm{tr}(A)$. Demostrar que la aplicación f es continua en (E, N) y determinar $|||f|||$.

Solución ▼ [005857]

Ejercicio 5142 ***

Determinar $s = \sup\left\{ \frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\}$, cuando $\| \|$ es

1. $\| \|_1$,
2. $\| \|_2$,
3. $\| \|_\infty$.

Solución ▼ [005858]

Ejercicio 5143 *

Una norma sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$, ¿es necesariamente una norma « de tres barras » ?

Solución ▼ [005859]

Ejercicio 5144 **

Sea N una norma en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que existe $k > 0$ tal que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.

Solución ▼ [005860]

Ejercicio 5145 **

¿Existe una norma N sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ tal que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$.

Solución ▼ [005861]

Ejercicio 5146 ***

Se establece $\forall X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ y $\|X\|_\infty=\operatorname{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. Determinar las normas sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ respectivamente asociadas a las normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Se denota $|||\ |||_1$ y $|||\ |||_\infty$ estas normas.

Solución ▼ [005862]

Ejercicio 5147 **I

Para $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, se establece $\|X\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$. Para $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, se denota $\rho(A)$ el radio espectral de A, es decir $\rho(A)=\max\{|\lambda|,\ \lambda\in\operatorname{Sp}(A)\}$. Demostrar que $\forall A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2=\rho(A)$, donde $|||A|||_2=\sup\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}$.

Solución ▼ [005863]

203 229.99 Otro

Ejercicio 5148

Sea $x=(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$. Se define

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|;\quad \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}\quad \text{y}\quad \|x\|_\infty=\sup\{|x_i|:1\leqslant i\leqslant n\}.$$

1. Demostrar que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.
2. Demostrar que
$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant n\|x\|_\infty\ \text{ y }\ \|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Discutir el caso $n=1$.
3. Representar en $\mathbb{R}^2$ la bola unidad cerrada
$$B_{\|\cdot\|}=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ \|x\|\leqslant 1\}$$
para cada de las normas $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

[001740]

Ejercicio 5149

1. En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ euclidiana provista de un b.o.n., representar los siguientes conjuntos :
   — $\mathscr{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2-y^2>1 \text{ y } x^2+y^2<4\}$
   — $\mathscr{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2-y^2>1 \text{ y } x^2+\frac{y^2}{4}<4\}$
   — $\mathscr{C}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 1<x+y+z<3 \text{ y } x>0 \text{ y } y>0 \text{ y } z>0\}$
   — $\mathscr{D}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y+z<1\wedge x-y+z<1\wedge -x-y+z<1\right\}$
   — $\mathscr{E}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2<0 \text{ y } 2<z<4\}$
   — $\mathscr{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2<1 \text{ y } x^2+y^2<z^2 \text{ y } z>0\}$
   — $\mathscr{G}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2=4 \text{ y } z=x-1\}$.
2. Determinar las proyecciones de $\mathscr{E}$ y $\mathscr{G}$ en el plano (xOy).

[001745]

Ejercicio 5150 Imágenes directas y recíprocas

1. Sea f la aplicación afín por pedazos, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida por :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 1+x & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Sean $A = [-1,0[$ y $B = [0,2[$. Determinar $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(\mathbb{R}\setminus A)$, $f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))$, $f(A\cap B)$, y $f(A)\cap f(B)$.

2. Sean dos conjuntos E y F, y $f : E \to F$ una aplicación. Comparar conjuntos $f(A\cap B)$ y $f(A)\cap f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ y A, $f(f^{-1}(B))$ y B, $f(E\setminus A)$ y $F\setminus f(A)$.

[001746]

Ejercicio 5151

Sea la aplicación $\begin{array}{rl} G : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto (\frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v}) \end{array}$. Se denota $\mathscr{D}$ el conjunto de definiciones de G. Determinar $G(\mathscr{D})$. [001747]

Ejercicio 5152

Sean las aplicaciones f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por :

$$f(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y) \text{ y } g(x,y) = (2x, \frac{y}{\sqrt{2}}).$$

Sean los conjuntos

$$\mathscr{D}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+y^2+\frac{xy}{2} = 1\}, \text{ y } \mathscr{D}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+2y^2 = 1\}.$$

Determinar $f(\mathscr{D}_1)$ y $g^{-1}(\mathscr{D}_2)$. [001748]

Ejercicio 5153

Simplificar la escritura de los siguientes conjuntos :

$$I = \bigcup_{n>1} [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \text{ y } J = \bigcap_{i>0, j>0}]-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{j}[.$$

[001749]

Ejercicio 5154

Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Demostrar que f admite un mínimo. [001765]

Ejercicio 5155

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E. Se supone que (x_n) es de Cauchy. Demostrar que converge si y solo si ella admite una sub-sucesión convergente. [001768]

Ejercicio 5156

Sea C una parte convexa de $\mathbb{R}^2$, demostrar que $\overline{C}$ es también convexo. [001775]

Ejercicio 5157 *** I Topología en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, denso en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Demostrar que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es cerrado pero no compacto (para $n \geqslant 2$).
3. Demostrar que $O_n(\mathbb{R})$ es compacto. ¿Es $O_n(\mathbb{R})$ convexo ?
4. Demostrar que $S_n(\mathbb{R})$ es cerrado.
5. Sea $p \in [\![0,n]\!]$. Demostrar que el conjunto de matrices de rango menor o igual que p es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Demostrar que el conjunto de matrices diagonalizables en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ es denso en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. ¿Se puede reemplazar $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ por $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
7. Determinar las propiedades topológicas del conjunto de tripletes reales (a,b,c) tales que la forma cuadrática $(x,y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ sea definida positiva.
8. Demostrar que el conjunto de matrices estocásticas (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ y $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) es un compacto convexo de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
9. Demostrar que el conjunto de matrices diagonalizables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es conexo por arcos.

Solución ▼ [005842]

204 240.00 Geometría afín en el plano y en el espacio

Ejercicio 5158

Sea P un plano provisto de un sistema de referencia $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, puntos y vectores se expresan por sus coordenadas en $\mathscr{R}$.

1. Dar un vector director, la pendiente, una ecuación paramétrica y una ecuación cartesiana de las rectas (AB) siguientes :
   (a) $A(2,3)$ y $B(-1,4)$
   (b) $A(-7,-2)$ y $B(-2,-5)$
   (c) $A(3,3)$ y $B(3,6)$
2. Dar ecuaciones paramétricas y cartesianas de rectas que pasan por A y dirigidas por $\overrightarrow{v}$ con :
   (a) $A(2,1)$ y $\overrightarrow{v}(-3,-1)$
   (b) $A(0,1)$ y $\overrightarrow{v}(1,2)$

(c) $A(-1,1)$ y $\overrightarrow{v}(1,0)$

3. Dar ecuaciones paramétricas y cartesianas de las rectas definidas de la siguiente manera :
   (a) pasando por el punto $(0,4)$ y de pendiente 3,
   (b) pasando por el punto $(2,-3)$ y paralela al eje de las x,
   (c) pasando por el punto $(-2,5)$ y paralela a la recta $D : 8x+4y=3$.

Solución ▼ Vidéo ■ [001956]

Ejercicio 5159

1. ¿Los tres puntos A, B y C de P están alineados ? En caso afirmativo, proporcionar una ecuación cartesiana de la recta que los contiene.
   (a) $A(-3,3)$, $B(5,2)$ y $C(2,1)$,
   (b) $A(1,1)$, $B(-2,2)$ y $C(2,1)$,
   (c) $A(4,-3)$, $B(0,-1)$ y $C(2,-2)$,
   (d) $A(2,-1)$, $B(1,-2)$ y $C(-3,4)$.
2. En los siguientes casos, dar un vector director de D y determinar si el punto C pertenece o no a D
   (a) $(D) : 3x+5y+1=0$, $C(3,-2)$.
   (b) $(D) : \begin{cases} x=3+t \\ y=2-t \end{cases}$ $C(5,3)$.

[001957]

Ejercicio 5160

En el siguiente ejercicio, se consideran pares de rectas D_1 y D_2 : se tiene que determinar si son secantes, paralelas o coincidentes. Si son secantes, se determinan las coordenadas del punto de intersección, y si son paralelas o coincidentes, se determinará un vector director.

1. $(D_1) : 3x+5y-2=0$ y $(D_2) : x-2y+3=0$
2. $(D_1) : 2x-4y+1=0$ y $(D_2) : -5x+10y+3=0$
3. $(D_1) : \begin{cases} x=3+4t \\ y=2-t \end{cases}$ y $(D_2) : \begin{cases} x=5-s \\ y=2+3s \end{cases}$
4. $(D_1) : \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$ y $(D_2) : \begin{cases} x=3-4s \\ y=-1+6s \end{cases}$
5. $(D_1) : x-2y+3=0$ y $D_2 : \begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \end{cases}$
6. $(D_1) : 3x-2y+1=0$ y $(D_2) : \begin{cases} x=1-4t \\ y=2-6t \end{cases}$

[001958]

Ejercicio 5161

Se consideran las dos rectas del plano $D : 2x-3y+4=0$ y $D' : x+3y+1=0$. Se considera el punto A, intersección de las dos rectas y el punto B de coordenadas $(3,8)$. Dar una ecuación de (AB). [001959]

Ejercicio 5162

Se considera el triángulo ABC cuyos lados tienen ecuaciones $(AB): x+2y=3, (AC): x+y=2, (BC): 2x+3y=4$.

1. Dar las coordenadas de los puntos A,B,C.
2. Dar las coordenadas de los puntos medios A',B',C' de segmentos $[BC]$, $[AC]$ y $[AB]$ respectivamente.
3. Dar una ecuación de cada mediana y comprobar que son concurrentes.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [001960]

Ejercicio 5163 Medianas

Se considera en P tres puntos A, B y C.

1. Determinar en el sistema de referencia $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ecuaciones para las medianas del triángulo ABC.
2. Deducir que las medianas de un triángulo son concurrentes.

[001961]

Ejercicio 5164 Teorema de Menelao

En el triángulo ABC, se consideran tres puntos P,Q,R, en los lados $(BC),(AC)$ y (AB) respectivamente, estos puntos no son los puntos A,B o C. Demostrar que P,Q y R están alineados si y solo si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=1.$$

[001962]

Ejercicio 5165 Teorema de Pappus

Sean (A_1,A_2,A_3) y (B_1,B_2,B_3) dos sistemas de tres puntos alineados. Demostrar que los puntos C_1, C_2 y C_3, intersecciones de las rectas (A_2B_3) y (A_3B_2), (A_3B_1) y (A_1B_3), (A_1B_2) y (A_2B_1) (se supone que existe) están alineados. [001963]

Ejercicio 5166 Teorema de Ceva

En el triángulo ABC, se consideran tres puntos P,Q,R, en las rectas $(BC),(AC)$ y (AB) respectivamente, estos puntos no son los puntos A,B o C. Demostrar que las rectas (AP), (BQ) y (CR) son concurrentes o paralelos si y solo si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=-1$$

[001964]

Ejercicio 5167

Demostrar que la intersección de dos partes convexas es convexa. ¿Es cierto para la unión? [001965]

Ejercicio 5168

Sean C y C' dos conjuntos convexos de un espacio afín, demostrar que

$$D=\left\{\frac{M+M'}{2} \mid (M,M')\in C\times C'\right\}$$

es convexo. [001966]

Ejercicio 5169

Se llama envolvente convexa $co(A)$ de una parte no vacía A de un espacio afín E la intersección de los conjuntos convexos conteniendo A; es el más pequeño conjunto convexo que contiene A. Demostrar que también es el conjunto de baricentros con coeficientes positivos de puntos de A. ¿Qué son $co(\{A,B\}), co(\{A,B,C\})$?
[001967]

Ejercicio 5170

Un cono de un espacio vectorial es una parte K tal que :

$$\forall x \in K,\ \forall t \geqslant 0,\ tx \in K.$$

Demostrar que un cono es convexo si y solo si es estable por adición. [001968]

Ejercicio 5171

Encontrar las partes C convexas de $\mathbb{R}^2$ tales que el complemento ${}^cC$ también sea convexo. [001969]

Ejercicio 5172

Sea E un espacio afín de dimensión n, y $(x_1,\dots,x_n)$ de puntos de E.Se considera una combinación convexa de puntos de A, subconjunto de E :

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \text{ con } \forall i \in \{1,\dots,m\} : t_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{j=1}^{m} t_j = 1.$$

Demostrar que se puede escribir :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ con } \forall k \in \{1,\dots,n+1\} : g_k \geqslant 0 \text{ y } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Así pues, basta con tener $n+1$ puntos en un espacio de dimensión n, para escribir una combinación convexa.
[001970]

Ejercicio 5173

Una bimediana de un tetraedro es una recta que pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas. Demostrar que las tres bimedianas son concurrentes. [001971]

Ejercicio 5174

Sean A,B,C tres puntos no alineados de un plano afín. Determinar el conjunto de puntos que tienen las mismas coordenadas en los sistemas de coordenadas $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ y $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. [001972]

Ejercicio 5175

Sea $R_1 = (0,e_1,e_2,e_3)$ un marco cartesiano de un espacio afín. Sean $O' = (1,0,0)$, $e_1' = e_1+e_2$, $e_2' = e_1-e_2$, $e_3' = e_3$ y $R_2 = (0',e_1',e_2',e_3')$. Determinar las coordenadas de un punto en R_2 en función de sus coordenadas en R_1. [001973]

Ejercicio 5176

Sean $(D_i)_{i=1,\dots,4}$ cuatro rectas del plano afín secante dos a dos en seis puntos distintos. Si dos de ellas se cruzan A y las otras dos en B, se dice que $[AB]$ es una diagonal. Demostrar que los puntos medios de tres diagonales están alineadas (se estudia el problema analíticamente eligiendo un buen sistema de referencia).
[001974]

Ejercicio 5177

1. Sean $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1\dots 3}$ tres rectas del plano afín. Demostrar que son paralelas o concurrentes si y solo si $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$.
2. Sean $(D_1 : x+2y=1)$, $(D_2 : x+y=2)$, $(D_3 : 2x+y=3)$, $(D_4 : 3x+2y=1)$. Determinar una ecuación de la recta D que pasa por $D_1 \cap D_2$ y $D_3 \cap D_4$ sin calcular estos puntos de intersección.

[001975]

Ejercicio 5178

Sean A, B, C tres puntos no alineados de un plano afín.

1. Sea f una aplicación afín tal que $f(A) = A$, $f(B) = B$ y $f(C) = C$. Demostrar que $f = id$.
2. Sean f y g afines tales que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ y $f(C) = g(C)$. ¿Qué se puede concluir?
3. Sea f afín tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$ y $f(C) = A$. ¿Qué se puede concluir?

[001976]

Ejercicio 5179

Sea E un espacio afín y f una aplicación afín de E en E.

1. Demostrar que f es una traslación si y solo si $\overrightarrow{f} = id$.
2. Demostrar que si $\overrightarrow{f} = \lambda id$, donde $\lambda \neq 1$, entonces f es una homotecia (se demuestra que f admite un punto fijo).
3. Se denota $\mathscr{T}$ el conjunto de traslaciones. Demostrar que $\mathscr{T}$ es un subgrupo del grupo afín.
4. Se denota $\mathscr{H}$ el conjunto de homotecias biyectivas. Demostrar que $\mathscr{T} \cup \mathscr{H}$ es un subgrupo del grupo afín.

[001977]

Ejercicio 5180

Sean f y g dos aplicaciones afines de E en E tales que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. Demostrar que existe $u \in \overrightarrow{E}$ tal que $f = t_u \circ g$, donde t_u es la traslación de vector u. ¿Qué se puede decir si además existe $M \in E$ tal que $f(M) = g(M)$?
[001978]

Ejercicio 5181

Reconocer las aplicaciones afines de $\mathbb{R}^3$ siguientes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+2y-2z-2 \\ -3y+2z+6 \\ -4y+3z+6 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{3y}{2}-\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \\ -x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

[001979]

Ejercicio 5182

Sea E un espacio afín, f una aplicación afín de E en E y

$$F = \{M \in E / f(M) = M\}.$$

Se supone que $F \neq \varnothing$.

1. Demostrar que $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})$.
2. Se supone que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$. Sea s la proyección afín en F, paralelamente a $\ker(\overrightarrow{f})$. Demostrar que $f = s$.
3. Hacer lo mismo si $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = id$.

[001980]

Ejercicio 5183

Sea E un espacio afín y f una aplicación afín de E en E.

1. Demostrar que si $f \circ f = f$, entonces f es una proyección afín.
2. Demostrar que si $f \circ f = id$, entonces f es una simetría afín.

[001981]

Ejercicio 5184

Se consideran las rectas $D : x+2y = 5$ y $D' : 3x-y = 1$ y se denota A la intersección de las dos rectas y B un punto de coordenadas $(5,2)$.

1. Dar una ecuación cartesiana de la recta (AB).
2. Dar una ecuación cartesiana de la perpendicular a D pasando por B.
3. Dar una ecuación cartesiana de la paralela a D' pasando por B.
4. Sea C un punto de coordenadas $(2,-7)$). Dar una ecuación cartesiana de la mediatriz Δ del segmento $[B,C]$. ¿Δ es paralela a D ? ¿Y a D' ?

[001991]

Ejercicio 5185

1. Se considera la familia de rectas $D_\lambda : x+\lambda y+1 = 0$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Verificar que todas estas rectas pasando por el mismo punto A cuyas coordenadas se darán.
   (b) ¿Entre todas estas rectas, existe alguna que sea vertical ? En caso afirmativo, dar una ecuación de esta recta.

(c) ¿Entre todas estas rectas, existe una que sea horizontal ? En caso afirmativo, dar una ecuación de esta recta.

(d) ¿De todas estas rectas, alguna es paralela, coincidente o perpendicular a la recta Δ de ecuación $2x-3y+1=0$? En caso afirmativo, proporcionar las ecuaciones de estas rectas.

2. Se considera la familia de rectas $D_m : (2m-1)x+(3-m)y+m+1=0$, $m \in \mathbb{R}$. ¿Entre todas estas rectas existe una perpendicular a $(\Delta) : x+y-1=0$? Si es sí, ¿cuál ?

[001992]

Ejercicio 5186

Se consideran los tres puntos de $P : A(2,-3)$, $B(0,-1)$ y $C(-2,-5)$.

1. Dibujar el triángulo ABC, luego calcular el área.
2. Calcular las coordenadas del ortocentro H, del centro del círculo circunscrito Ω y del centro de gravedad G de ABC.
3. Verificar que H, Ω y G están alineados y que en particular $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

[001993]

Ejercicio 5187

1. Calcular los ángulos :
   (a) entre los vectores $\vec{u}_1(\sqrt{3},2)$ y $\vec{v}_1(1,3\sqrt{3})$,
   (b) entre los vectores $\vec{u}_2(1,\sqrt{2})$ y $\vec{v}_2(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$,
   (c) del triángulo de vértices $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Calcular la distancia del punto A a la derecha D :
   (a) $A(1,1)$ y $D : 2x+y-1=0$
   (b) $A(2,-1)$ y $D : 3x-2y+4=0$
   (c) $A(3,3)$ y $D : -x+3y+2=0$.
3. Encontrar las bisectrices de :
   (a) $D : 5x-12y+7=0$ y $D' : 3x+4y-7=0$,
   (b) $D : x-3y+5=0$ y $D' : 3x-y-1=0$.

[001994]

Ejercicio 5188

Sea $(0,\vec{i},\vec{j})$ un sistema de referencia del plano. Determinar la expresión analítica en este sistema de coordenadas de la reflexión de eje $x+y=1$. [001995]

Ejercicio 5189

Sea G un subgrupo finito del conjunto de isometrías del plano. Demostrar que G no puede contener una traslación no trivial. [001996]

Ejercicio 5190

Se considera en el plano las dos rectas $(D : 3x+y=5)$ y $(D' : x-2y+3=0)$. ¿Cuál es el ángulo entre estas dos rectas ? [001997]

Ejercicio 5191

Sea C un círculo de centro $I=(x_0,y_0)$ y de radio R y $(D : ax+by+c=0)$. Parametrizando D, demostrar que D es tangente a C (*i.e.* $D\cap C$ es un punto aislado) si y solo si $d(I,D)=R$. [001998]

Ejercicio 5192

Sean A y B dos puntos del plano y α un real. Determinar el conjunto de puntos M que verifica $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\alpha$. [001999]

Ejercicio 5193

Sean A,B,C los vértices de un triángulo equilátero de lado 1. Determinar el conjunto de puntos M que verifica $MA^2+MB^2+MC^2=2$. [002000]

Ejercicio 5194

Sean A y B dos puntos del plano y k un real estrictamente positivo. Determinar el conjunto de puntos M que verifica $MA=kMB$. [002001]

Ejercicio 5195

¿Cuál es la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3x-4y\\-4x+3y-2\end{pmatrix}$? [002002]

Ejercicio 5196

Sea $X=\{A,B,C,D\}$ los vértices de un cuadrado del plano y $G=\{f\in I_2/f(X)=X\}$. Demostrar que G es un subgrupo de I_2. Demostrar que si $f\in G$, entonces $f(O)=O$, donde O es el isobaricentro de A,B,C,D. Deducir los elementos de G. [002003]

Ejercicio 5197

Determinar el $z\in\mathbb{C}$ tales que z,z^2,z^4 están alineados. [002004]

Ejercicio 5198

Si a y b son los afijos de dos vértices opuestos de un cuadrado, calcular los afijos de los otros dos. [002005]

Ejercicio 5199

Sea O,A,B un triángulo rectángulo en O. A toda recta D saliendo de O se asocia el círculo con el diámetro $A'B'$, donde A' y B' son los proyectados ortogonales de A y B sobre D. Demostrar que todos los círculos pasan por el mismo punto fijo (se puede usar una similitud...). [002006]

Ejercicio 5200

Para a,b,c tres números complejos tales que $b \neq c$, se denota $V(a,b,c) = \frac{c-a}{c-b}$. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro números complejos distintos. Demostrar que las imágenes de estos números complejos están alineados o son cocíclicos si y solo si $\frac{V(z_1,z_2,z_3)}{V(z_1,z_2,z_4)} \in \mathbb{R}$. [002007]

Ejercicio 5201

Sea $ABCD$ un cuadrado directo y M un punto de la recta (DC). La perpendicular a (AM) pasando por A corta (BC) en N. Se denota por I el punto medio de $[MN]$. Determinar el lugar de puntos I, cuando M recorre la recta (DC). [002008]

Ejercicio 5202

Sean A,B,C,D cuatro puntos distintos del plano tales que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Demostrar que el centro de la similitud directa transformando A en C y B en D es también el centro de esta transformación A en B y C en D.

Indicación ▼ Solución ▼ [002009]

Ejercicio 5203

¿Los cuatro puntos A, B, C y D del espacio son coplanares ? Si es sí, dar una ecuación cartesiana del plano que los contiene :

1. $A(1,2,2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(3,4,4)$ y $D(-2,3,1)$.
2. $A(0,1,3)$, $B(1,2,-1)$, $C(1,1,-1)$ y $D(1,2,2)$.
3. $A(-1,2,4)$, $B(3,-3,0)$, $C(1,3,4)$ y $D(5,1,-6)$.
4. $A(2,-1,0)$, $B(0,-4,5)$, $C(4,-13,13)$ y $D(-4,5,-3)$.

[002010]

Ejercicio 5204

1. Encontrar una ecuación del plano (P) definido por los elementos siguiente.
   (a) A, B y C son puntos de (P)
      i. $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ y $C(0,1,0)$.
      ii. $A(1,1,1)$, $B(2,0,1)$ y $C(-1,2,4)$.
   (b) A es un punto de (P), $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son vectores directores de (P).
      i. $A(1,2,1)$, $\overrightarrow{u}(4,0,3)$ y $\overrightarrow{v}(1,3,-1)$.
      ii. $A(1,0,2)$, $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$ y $\overrightarrow{v}(-1,4,5)$.
   (c) A es un punto de (P), D es una recta contenida en (P)
      i. $A(0,0,0)$ y $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0. \end{cases}$
      ii. $A(1,1,0)$ y $(D) : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t. \end{cases}$
   (d) D y D' son las rectas contenidas en (P)
      i. $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ y $(D') : \begin{cases} 3x-y-z+5=0 \\ x+y-z+1=0. \end{cases}$

ii. $(D):\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x+3y+z-4=0\end{cases}$ y $(D'):\begin{cases}2x+y-3z+7=0\\3x+2y+z-1=0.\end{cases}$

(e) Demostrar que las siguientes representaciones paramétricas definen el mismo plano :

$$\begin{cases}x=2+s+2t\\y=2+2s+t\\z=1-s-t\end{cases}\quad \text{y} \quad \begin{cases}x=1+3s'-t'\\y=3+3s'+t'\\z=1-2s'.\end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [002011]

Ejercicio 5205

¿Los siguientes planos son paralelos o se cortan ? En este último caso, dar un vector director de la recta $(D)=(P)\cap(P')$.

1. $(P):5x-y-1=0$ y $(P'):z=3$.
2. $(P):x+y+z+1=0$ y $(P'):2x-y+3z+2=0$.
3. $(P):2x-z+1=0$ y $(P'):4x-3y+2z+5=0$.
4. $(P):4x-6y+8z-1=0$ y $(P'):-6x+12y-9z+11=0$.

[002012]

Ejercicio 5206

¿Cuál es la naturaleza de la intersección de los tres planos siguientes ? Si es un punto dar sus coordenadas, si es una recta dar un vector director.

1. $(P):z=1$, $(P'):x-y-2=0$ y $(P''):4x-2y+z+2=0$.
2. $(P):4x-2y+3z+5=0$, $(P'):3x+y-z+2=0$ y $(P''):x-y+z+1=0$.
3. $(P):4x-2y+10z-4=0$, $(P'):-10x+5y-25z+13=0$ y $(P''):x+y-z+1=0$.
4. $(P):3x-y+2z-5=0$, $(P'):x-y+3z-7=0$ y $(P''):4x+2y-z+1=0$.
5. $(P):x-y+2z-1=0$, $(P'):2x+y+z+3=0$ y $(P''):x-4y+5z-6=0$.
6. $(P):x-y+2z-1=0$, $(P'):2x+y-z+1=0$ y $(P''):x+5y-8z+2=0$.

[002013]

Ejercicio 5207

¿Son las siguientes rectas, secantes, paralelas o no coplanares ? Si se cruzan, dar su punto de intersección y si son paralelas dan un vector director.

1. $(D):\begin{cases}x+y-z+2=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$ y $(D'):\begin{cases}3x-y+2z-7=0.\\x-y=0\end{cases}$
2. $(D):\begin{cases}x=1-2t\\y=t+2\\z=3t+1\end{cases}$ y $(D'):\begin{cases}x=3t-1\\y=-t+2\\z=2t.\end{cases}$

[002014]

Ejercicio 5208

En cada uno de los siguientes casos decir si la recta (D) y el plano (P) son paralelas o secantes. Dar entonces su punto de intersección.

1. $(D):\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ y $(P):4x-3y+7z-7=0$.
2. $(D):\begin{cases}x=3+2t\\y=5-3t\\z=2-2t\end{cases}$ y $(P):-3x+2y+3z-5=0$.

[002015]

Ejercicio 5209

Se consideran los siguientes cinco puntos : $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$, $D(1,0,4)$ y $E(-1,1,1)$.

1. ¿Son estos cuatro puntos coplanares ?
2. Determinar la naturaleza del triángulo ABC. ¿A, B y C están alineados ?, si no dar una ecuación cartesiana del plano P que los contienen.
3. Determinar las coordenadas del baricentro G de los puntos A, B, C y D.
4. Demostrar que O, D y G están alineados y que la recta OD es perpendicular a P.

[002016]

Ejercicio 5210

Sean D_1, D_2 y D_3 tres rectas concurrentes en Ω y sean P, P' y P'' tres planos tales que ninguno contiene ninguna de las tres rectas arriba. Se pueden entonces definir los 9 puntos de intersección : P corta D_1, D_2, D_3 en A, B, C ; P' corta D_1, D_2, D_3 en A', B', C' ; P' corta D_1 D_2, D_3 en A'', B'', C''.
Se consideran también las siguientes intersecciones : $I=(AB')\cap(A'B)$, $J=(AC')\cap(A'C)$,$K=(BC')\cap(B'C)$. Demostrar que las rectas $(A''K)$, $B''J)$ y $(C''I)$ son paralelas o concurrentes.
(*Indicación : Utilizar un buen sistema de referencia afín*). [002017]

Ejercicio 5211

Se consideran los siguientes cuatro puntos : $A(2,0,0)$, $B(-1,\sqrt{3},0)$, $C(-1,-\sqrt{3},0)$, $D(0,0,4)$. Determinar un vector director de la recta $(ABC)\cap(ADE)$. [002018]

Ejercicio 5212

Dar una condición de m, para que los tres planos siguientes se corten en la misma recta : $(P):x+my-z+1=0$, $(P'):(m+1)x+3y+4z-2=0$ y $(P''):y+(2m+4)z-(2m+2)=0$. [002019]

Ejercicio 5213

Se considera la familia de planos $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ definidos por ecuaciones cartesianas :

$$m^2x+(2m-1)y+mz=3$$

1. Determinar los planos P_m en cada uno de los casos siguientes :
   (a) $A(1,1,1)\in P_m$
   (b) $\overrightarrow{n}(2,-\frac{5}{2},-1)$ es normal a P_m.
   (c) $\overrightarrow{v}(1,1,1)$ es un vector director de P_m
2. Demostrar que existe un único punto Q perteneciendo a todos los planos P_m.

Solución ▼ Vidéo ■ [002020]

Ejercicio 5214

1. Determinar la distancia del punto A en el plano (P)
   (a) $A(1,0,2)$ y $(P): 2x+y+z+4=0$.
   (b) $A(3,2,1)$ y $(P): -x+5y-4z=5$.
2. Calcular la distancia del punto $A(1,2,3)$ a la derecha $(D): \begin{cases} -2x+y-3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

Solución ▼ Vidéo ■ [002021]

Ejercicio 5215

Se consideran las dos rectas $(D): \begin{cases} y-z=3 \\ -x-y+2=0 \end{cases}$ y $(\Delta): \begin{cases} -x+3z=1 \\ -x-3y=2 \end{cases}$.

1. Dar un vector director de D y de Δ.
2. Dar una ecuación paramétrica de Δ.
3. Se fija un punto M_α de Δ dependiendo del parámetro α, donde α es la abscisa del punto M_α. Dar una ecuación del plano P_α pasando por M_α y conteniendo D.
4. ¿Entre todos estos planos, existe alguno que sea perpendicular a Δ? ¿Para qué valor α_0 de α es obtenido? Dar una ecuación de este plano. Dar las coordenadas de M_{α_0}.

[002022]

Ejercicio 5216

Se dan dos rectas D_1 y D_2 teniendo como respectivos vectores directores $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$.

1. Perpendicular común a estas dos rectas.
   (a) Se supone que $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ no son colineales y se denota $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.
      i. Demostrar que el plano P_1 conteniendo D_1 y admitiendo $\overrightarrow{n}$ como vector director y el plano P_2 conteniendo D_2 y admitiendo $\overrightarrow{n}$ como vector director se interseca en una recta Δ.
      ii. Demostrar que Δ es una perpendicular común a D_1 y D_2 (es decir Δ corta D_1 y D_2, y es ortogonal a D_1 y a D_2).
      iii. Demostrar que Δ es la única perpendicular común a D_1 y D_2.
   (b) ¿Cómo construir Δ en el caso en que D_1 y D_2 son paralelas ?
2. Distancia entre estas dos rectas.
   Sea $H_1 := D_1 \cap \Delta$ y $H_2 := D_2 \cap \Delta$. Demostrar que para todo $A_1 \in D_1$ y todo $A_2 \in D_2$, se tiene $d(A_1,A_2) \geqslant d(H_1,H_2)$. $d(H_1,H_2)$ es llamada *distancia entre las dos rectas* D_1 *y* D_2.
3. Dar ecuaciones cartesianas para Δ y calcular la distancia entre las dos rectas D_1 y D_2 en el siguiente caso :
   (a) $(D_1): \begin{cases} x-y-z+4=0 \\ -x-2y-3z+9=0 \end{cases}$ y $(D_2): \begin{cases} -x+2y+z+2=0 \\ -2x+4y-z+1=0 \end{cases}$
   (b) $(D_1): \begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ y $(D_2): \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

(c) $(D_1):\begin{cases} x=1-2t \\ y=t+2 \\ z=3t+1 \end{cases}$ y $(D_2):\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-t+2 \\ z=2t \end{cases}$

(d) $(D_1):\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{cases}$ y $(D_2):\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0. \end{cases}$

[002023]

Ejercicio 5217

---

1. Determinar los planos bisectores de :
   $P: x+y+z+3=0$ y $P': 2x+y+2z=1$
   $Q: 5x+3y-4z=8$ y $Q': 4x-5y-3z=2.$
2. Determinar el conjunto de puntos en el espacio equidistantes a los tres ejes de coordenadas.
3. Se considera la recta D de ecuación paramétrica $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=1 \\ z=-t-1 \end{cases}$

   Dar una ecuación de los dos planos P y P' conteniendo D a una distancia de 1 del origen (punto O de coordenadas $(0,0,0)$).

[002024]

Ejercicio 5218

Determinar la expresión analítica de la reflexión s plano $x+y-z=1$. ¿Cuál es la imagen por s del plano $x+2y-3z+1=0$? [002025]

Ejercicio 5219

Determinar la distancia del punto $M=(1,2,3)$ a las rectas

$$D\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{y } \Delta\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}$$

[002026]

Ejercicio 5220

Sea dos planos $\begin{cases} \pi: & ux+vy+wz+h &=& 0 \\ \pi': & u'x+v'y+w'z+h' &=& 0 \end{cases}$.

1. Demostrar que si π y π' son secantes, todo plano que pase por su recta de intersección D tiene una ecuación del tipo
   $$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0$$
   y recíprocamente, todo plano que tiene una ecuación de este tipo, (para un par (λ,μ) dado) pasa por D.
2. Si π y π' son paralelas, ¿qué representa el conjunto de planos de ecuación :
   $$\lambda(ux+vy+wz+h)+\mu(u'x+v'y+w'z+h')=0?$$

[002027]

Ejercicio 5221

Escribir la ecuación del plano que pasa por la recta $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+5z+6 & = & 0 \\ x+4y+3z+4 & = & 0 \end{array}\right.$ y paralela a la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-3}$.

[002028]

Ejercicio 5222

Sea la recta de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y-z+4 & = & 0 \\ x-4y-3z-2 & = & 0 \end{array}\right.$. Encontrar su proyección en el plano $5x+2y+2z-7 = 0$.

[002029]

Ejercicio 5223

Sea las rectas D y D' no coplanares :

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z+1 & = & 0 \\ 2x+y-z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad (D')\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x-2y-2z-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Encontrar las ecuaciones de su perpendicular común.

[002030]

Ejercicio 5224

Sea ABC un triángulo equilátero de lado unidad y T_0 su interior. Se consideran las figuras geométricas T_n obtenidos por inducción de la siguiente manera : en cada lado MN de T_{n-1}, se agrega el interior de un triángulo equilátero PQR, donde P y Q están en el segmento $[MN]$, a tercios de su longitud, y R es exterior a T_{n-1}. Finalmente, se define el subconjunto del plano K por

$$K = \bigcup_{n\geqslant 0} T_n.$$

1. Hacer un dibujo representativo T_0, T_1, T_2,...
2. Dar el área de T_n como una serie. ¿Cuál es el área de K ?
3. Las mismas preguntas con el perímetro, luego el diámetro de T_n y K.

[002698]

Ejercicio 5225 **I

(ABC) es un verdadero triángulo.

1. Demostrar que sus medianas son concurrentes en G el isobaricentro de (ABC).
2. Demostrar que sus mediatrices son concurrentes en O, el centro del círculo circunscrito a (ABC).
3. Demostrar que sus alturas son concurrentes en H el ortocentro de (ABC), luego mostrar la relación de EULER : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (considerar la homotecia de centro G y de cociente -2).
4. Demostrar que sus bisectrices (interiores) son concurrentes en I el centro del círculo inscrito.

Solución ▼

[005195]

Ejercicio 5226 **IT

Se dan los puntos $A(1,2)$, $B(-2,1)$ y $C(0,4)$.

1. Determinar $\widehat{BAC}$ al grado más cercano.
2. Determinar el área del triángulo (ABC).
3. Determinar su isobaricentro, su ortocentro, el centro de su círculo circunscrito y una ecuación de este círculo.
4. Determinar una ecuación de las bisectrices de los ángulos $\widehat{BAC}$, luego de la bisectriz interior al ángulo $\widehat{A}$.

Solución ▼ [005196]

Ejercicio 5227 **

Sea (E) el conjunto de ecuaciones cartesianas $2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0$. Demostrar que (E) es una unión de dos rectas. Determinar el área del paralelogramo formado por estas dos rectas y las paralelas a estas dos rectas que pasan por O.

Solución ▼ [005199]

Ejercicio 5228 **

Determinar un círculo tangente a las tres rectas de respectivas ecuaciones $y=2x+1$, $y=2x+7$ y $y=-\frac{1}{2}x$.

Solución ▼ [005200]

Ejercicio 5229 ***I

Sean n un entero superior o igual que 2, luego A_1, $A_2,\dots,A_n$, n puntos del plano. ¿Existen n puntos B_1, $B_2,\dots,B_n$ tales que, para $i\in\{1,\dots,n\}$, A_i ya sea el punto medio de $[B_i,B_{i+1}]$ (con la convención $B_{n+1}=B_1$) ? (Utilizar el ejercicio anterior.)

Solución ▼ [005202]

Ejercicio 5230 *T

Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

1. Determinar una ecuación de la tangente en el punto de $\mathscr{C}$ de coordenadas $(2,-2+\sqrt{3})$.
2. Determinar la intersección de $\mathscr{C}$ y del círculo de centro $(1,0)$ y de radio 2.

Solución ▼ [005203]

Ejercicio 5231 *** Teorema de Menelao

Sean A, B y C tres puntos no alineados. Sean M, N y P tres puntos pertenecientes respectivamente a las rectas (BC), (CA) y (AB) y distintos de A, B y C. Demostrar que :

$$(M,\ N,\ \text{ y }\ P \text{ están alineados}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1\right).$$

(Encontrar una prueba usando el teorema de Tales, una usando la composición de dos homotecias y una usando coordenadas.)

Solución ▼ [005204]

Ejercicio 5232 ** Haces de rectas

1. Sean (D) y (D') dos rectas secantes de ecuación respectiva $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$, $(a,b)\neq(0,0)$, $(a',b')\neq(0,0)$. Sea (Δ) una recta. Demostrar que (D), (D') y (Δ) son concurrentes si y solo si existe (Δ) tiene una ecuación cartesiana de la forma $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
2. Ecuación cartesiana de la recta pasando por el punto $(1,0)$ y por el punto de intersección de rectas de ecuaciones respectivas $5x+7y+1=0$ y $-3x+2y+1=0$
3. Para $m\in\mathbb{R}$, se considera (D_m) la recta de ecuación $(2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0$. Demostrar que las rectas (D_m) son concurrentes en un punto A que se deben especificar. Toda recta pasando por A ¿es una recta (D_m) ?

Solución ▼ [005208]

Ejercicio 5233 **

En $\mathbb{R}^3$, sean $(D)\begin{cases}x-z-a=0\\ y+3z+1=0\end{cases}$ y $(D')\begin{cases}x+2y+z-2b=0\\ 3x+3y+2z-7=0\end{cases}$. Verificar que (D) y (D') no son paralelas, luego encontrar a y b, para que (D) y (D') sean secantes. Formar entonces una ecuación cartesiana de su plano.

Solución ▼ [005510]

Ejercicio 5234 **

Sistema de ecuaciones cartesianas de la recta (Δ), paralela a la recta $(D):2x=3y=6z$ y secante a las rectas $(D_1):x=z-4=0$ y $(D_2):y=z+4=0$.

Solución ▼ [005511]

Ejercicio 5235 ***

Encontrar todas las rectas secantes a las cuatro rectas $(D_1)\ x-1=y=0$, $(D_2):y-1=z=0$, $(D_3):z-1=x=0$ y $(D_4):x=y=-6z$.

Solución ▼ [005512]

Ejercicio 5236 **T

En $\mathbb{R}^3$ euclidiana referida a un marco ortonormado, se da $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ y $C(-1,-3,0)$. Determinar el ortocentro, el centro de gravedad, los centros de los círculos circunscritos e inscritos en el triángulo (A,B,C).

Solución ▼ [005513]

Ejercicio 5237 **T

Sea $M(x,y,z)$ un punto de $\mathbb{R}^3$ referido a un marco ortonormado. Determinar la distancia de M a la recta (D) $\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x+y+5z=2\end{cases}$. Deducir una ecuación del cilindro de revolución del eje (D) y de radio 2.

Solución ▼ [005514]

Ejercicio 5238 **T

En $\mathbb{R}^3$ referido a un sistema ortonormado, sean $(D) \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$ y $(D') \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3. \end{cases}$

Determinar la distancia de (D) a (D'), luego la perpendicular común a estas dos rectas.

Solución ▼ [005515]

Ejercicio 5239 **

Demostrar que los planos $(P_1): z-2y=5$, $(P_2): 2x-3z=0$ y $(P_3):\ 3y-x=0$ admite una paralela común. Así definen un prisma. Determinar el área de una sección perpendicular.

Solución ▼ [005516]

Ejercicio 5240 *T

Ángulo de los planos $x+2y+2z=3$ y $x+y=0$.

Solución ▼ [005517]

Ejercicio 5241 **T

Sean $(P_1):\ 4x+4y-7z-1=0$ y $(P_2):\ 8x-4y+z+7=0$. Encontrar una ecuación cartesiana de los planos bisectores de (P_1) y (P_2).

Solución ▼ [005518]

Ejercicio 5242 **T

Determinar la perpendicular común a las rectas (D) y (D') : $(D) \begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ y $(D') \begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1. \end{cases}$

Solución ▼ [005519]

Ejercicio 5243 **I

Determinar los diferentes ángulos de un tetraedro regular (entre dos caras, entre dos aristas y entre una arista y una cara).

Solución ▼ [005521]

Ejercicio 5244 **T

Determinar la distancia del origen O a la derecha (D) del cual un sistema de ecuaciones cartesianas es dado por $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10. \end{cases}$

Solución ▼ [005522]

Ejercicio 5245

Determinar la proyección ortogonal del punto $M_0(x_0,y_0)$ sobre la recta (D) de ecuación $2x-3y=5$ y su simétrica ortogonal.

Solución ▼ Vidéo ■ [006884]

Ejercicio 5246 Preguntas del curso

1. Recordar las definiciones de paralelismo y paralelismo débil.

2. Sea (λ_i) p números reales con suma igual a 1 y M_i p puntos de un espacio afín. Recordar el sentido de la notación $\sum_i \lambda_i M_i$. ¿Es necesario que los puntos M_i sean distintos?

[007415]

Ejercicio 5247

Dar la lista de los subespacios afines del plano afín $\mathbb{R}^2$ y del espacio afín $\mathbb{R}^3$. [007416]

Ejercicio 5248 Con el curso

— ¿Dos planos de espacio afín $\mathbb{R}^3$ pueden tener un único punto de intersección?
— En el espacio afín $\mathbb{R}^n$, ¿cuál es la dimensión de un subespacio afín definido por dos ecuaciones afines independientes?

[007417]

Ejercicio 5249 Con el curso

Sea A,B,C,D cuatro puntos de un plano afín. Sea I la mitad de $[C,D]$. ¿El isobaricentro de los puntos A,B,C,D es el centro de gravedad del triángulo A,B,I? [007418]

Ejercicio 5250 En $\mathbb{R}^3$, a partir de las ecuaciones

Sea el espacio afín $\mathbb{R}^3$ dotado de un sistema de referencia afín A_0,A_1,A_2,A_3.

1. Demostrar que el subconjunto A del espacio afín $\mathbb{R}^3$ de ecuación
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in A \iff \begin{cases} 2x-y-z-3=0 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$$
es un subespacio afín. Especificar la dimensión, el espacio vectorial director y un sistema de referencia afín.
2. La misma pregunta para B de ecuación
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in B \iff \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3z+1 \\ 5x+5y=10z. \end{cases}$$

[007419]

Ejercicio 5251 En $\mathbb{R}^3$, encontrar las ecuaciones

Sea el espacio afín $\mathbb{R}^3$ dotado de un sistema de referencia afín A_0,A_1,A_2,A_3.

1. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{A}$ pasando por el punto $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y paralelo al plano de ecuación $(2x-y-z=5)$.

2. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{B}$ pasando por el punto $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de dirección $\mathbb{R}\overrightarrow{u} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{v}$, donde $\overrightarrow{u}$ es el vector de coordenadas $\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v}$ el vector de coordenadas $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ en la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}\overrightarrow{A_0A_3})$.

3. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{C}$ generado por los puntos $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ y $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

[007420]

Ejercicio 5252 En $\mathbb{R}^3$, encontrar además las ecuaciones

Sea el espacio afín $\mathbb{R}^3$ dotado de un sistema de referencia afín A_0, A_1, A_2, A_3.

1. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{D}$ pasando por el punto $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y paralela a la recta de ecuación $\begin{cases} 2x-y-z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.

2. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{E}$ pasando por el punto $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de dirección $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, donde $\overrightarrow{u}$ es el vector de coordenadas $\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ en la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}\overrightarrow{A_0A_3})$.

3. Encontrar un sistema de ecuaciones para el subespacio afín $\mathscr{F}$ generado por los puntos $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

[007421]

Ejercicio 5253 Cálculo en coordenadas cartesianas en el plano

Sea a y b dos reales no nulos distintos. En un plano afín provisto de un sistema de referencia, calcular una ecuación cartesiana de la recta Δ pasando por el punto de coordenadas (a,b) y por el punto de intersección de las dos rectas D de ecuación $x/a+y/b=1$ y D' de ecuación $x/b+y/a=1$. [007422]

Ejercicio 5254 Dos rectas secantes en el espacio

En un espacio afín de dimensión 3 dotado de un sistema de referencia afín.

1. Demostrar que las rectas D y D' de ecuaciones cartesianas

$$D:\ x+y-z-2=0 \ \text{ y } \ 2x-y+3z-1=0 \ \text{ y } \ D':\ x-2y-3 \ \text{ y } \ 3x+6y-1$$

son concurrentes.

2. Encontrar una ecuación cartesiana del plano que determinan.

[007423]

Ejercicio 5255 En las medianas

En el espacio afín $\mathbb{R}^2$, se considera el triángulo ABC. Escoger un sistema de referencia afín A_0, A_1, A_2 adaptado para demostrar simplemente que las medianas del triángulo ABC son concurrentes. Se debe calcular una ecuación para cada mediana y demostrar que ellas son concurrentes. [007424]

Ejercicio 5256 Dibujar

En el plano afín $\mathbb{R}^2$ dotado de un sistema de referencia A_0, A_1, A_2, representar la envolvente convexa de los puntos dados en coordenadas cartesianas $A\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$. [007425]

Ejercicio 5257 Una propiedad de los tetraedros

Sean $\mathscr{E}$ un espacio afín de dimensión 3, y A, B, C, D un tetraedro de $\mathscr{E}$. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de las caras opuestas del tetraedro son concurrentes. [007426]

Ejercicio 5258 Centro de gravedad

En un plano afín, sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos de centro de gravedad G y G' respectivamente.

1. Calcular $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$ en función de G y G'.
2. Demostrar que ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo centro de gravedad si y solo si existe un punto D tal que $DBA'C$ y $DB'AC'$ sean paralelogramos.

[007427]

Ejercicio 5259 Localizar puntos en coordenadas baricéntricas

1. Sea (AB) una recta en un espacio afín determinada por dos puntos distintos A y B. Describir con el uso de coordenadas baricéntricas en el sistema de referencia AB las tres regiones de la recta cortada por los puntos A y B.
2. Sea ABC un triángulo no plano en un plano afín E. Describir con el uso de coordenadas baricéntricas en el sistema de referencia ABC las siete regiones cortadas por las rectas que llevan los lados del triángulo ABC.

[007428]

Ejercicio 5260 Ejercicio de construcción

Se supone que se sabe trazar la paralela a una recta dada que pasa por un punto dado. Se puede usar un compás pero solo para reportar longitudes iguales. Dividir un segmento dado en siete partes de la misma longitud. [007429]

Ejercicio 5261 En un plano afín

Se considera en el espacio afín $\mathbb{R}^2$ un triángulo no aplanado ABC. Sea (a,b), (c,d) y (e,f) tres pares de números reales con suma no nula. Se designa por C' el baricentro de $(A,a;B,b)$, A' el baricentro de $(B,c;C,d)$ y B' el baricentro de $(C,e;A,f)$. Demostrar que A',B' y C' están alineados si y solo si $ace=-bdf$. [007430]

Ejercicio 5262

¿Una aplicación afín puede tener exactamente dos puntos fijos distintos?
Dar un ejemplo de una aplicación afín sin un punto fijo, que no es una traslación. [007431]

Ejercicio 5263

Sea el plano afín E dotado con el sistema de coordenadas cartesianas $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Se considera la aplicación f que a todo $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ asocia el punto $M'\begin{pmatrix}2x-5y+3\\-4x+10y-1\end{pmatrix}$.

1. Demostrar que f es afín y escribir la matriz de su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ en la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
2. Determinar los puntos fijos de f.
3. Demostrar que $\operatorname{Im}\overrightarrow{f}$ y $\ker\overrightarrow{f}$ son suplementarios en $\overrightarrow{E}$. Dar una base para cada uno de estos subespacios.

[007432]

Ejercicio 5264 Las traslaciones

Demostrar usando la regla del paralelogramo que las únicas aplicaciones afines cuya parte lineal es la identidad son las traslaciones. [007433]

Ejercicio 5265 Las dilataciones

Sea E un espacio afín y f una aplicación afín cuya parte lineal es múltiplo de la identidad de $\overrightarrow{E}$. Se supone que $\overrightarrow{f}=\lambda\,\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$, con $\lambda\neq 1$. Describir los valores propios de $\overrightarrow{f}$. Demostrar que f tiene un único punto fijo. Demostrar entonces que f es una homotecia. [007434]

Ejercicio 5266 Las proyecciones

Sea E un espacio afín y F y G dos subespacios afines de dirección suplementaria en $\overrightarrow{E}$. Describir $F\cap G$.

1. Sea M un punto de E. Demostrar que el subespacio afín que pasa por M y paralela a G interseca F en un solo punto señalado $p(M)$.
2. Demostrar que la aplicación p es afín.
3. Determinar los puntos fijos de p.
4. Demostrar que $p\circ p=p$.

[007435]

Ejercicio 5267 Las simetrías

Sea E un espacio afín y F y G dos subespacios afines de dirección suplementaria en $\overrightarrow{E}$.

1. Describir la simetría s, con respecto a F, paralelamente a G. ¿Es biyectiva ?
2. Sea M un punto de E. ¿Cuál es el punto medio del segmento $[M, s(M)]$?
3. Determinar $\ker(\overrightarrow{s} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ y $\ker(\overrightarrow{s} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$.
4. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector de G. Determinar la aplicación $s \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ s^{-1}$.

[007436]

Ejercicio 5268 Las afinidades y transvecciones

En el espacio afín $E = \mathbb{R}^3_{\text{aff}}$, se considera un endomorfismo afín f que admite un hiperplano de puntos fijos F. Sea A un punto de E que no está en F.

1. ¿Qué se puede decir de f si $f(A) = A$?
2. Se supone ahora que $f(A)$ es diferente de A. Se supone además que la recta $(Af(A))$ corta el plano F en un punto Ω. Explicar cómo construir $f(M)$. Se dice entonces que la aplicación f es una afinidad.
3. Se supone ahora que $f(A)$ es diferente de A. Se supone además que la recta $(Af(A))$ no interseca el plano F. Explicar cómo construir $f(M)$. Se dice entonces que la aplicación f es una transvección.

[007437]

Ejercicio 5269 Escribir expresiones analíticas

En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ dotado de un sistema de referencia afín A_0, A_1, A_2, A_3, dar la expresión analítica

1. (a) de homotecia h de centro $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y de cociente 4.
   (b) de la simetría s de eje $(x+y+z=1)$, paralelamente a $\overrightarrow{A_0A_1}$.
   (c) de la afinidad a de base $(x+y+z=1)$ reportando 3, paralelamente a $\overrightarrow{A_0A_1}$.
   (d) de la transvección t de base $(x+y+z=1)$ que envía A_0 sobre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. Dar expresiones analíticas de las aplicaciones afines anteriores en los sistemas de referencia más adecuados para determinar.

[007438]

Ejercicio 5270 Construcciones

1. Dos rectas se cortan fuera de la hoja en un punto I. Sea A un punto de la hoja. Trazar la recta (AI).
2. Sea d y d' dos rectas paralelas y M un punto del plano. Trazar con una regla (no graduada) la paralela a d pasando por M.

[007439]

Ejercicio 5271

En un plano afín, ¿cuál es el conjunto de puntos medios de segmentos cuyos extremos pertenecen respectivamente a dos segmentos dados ? [007440]

Ejercicio 5272

Sea x_i, n números reales. Demostrar que $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leqslant n\sum_1^n x_i^2$. [007441]

Ejercicio 5273

Se supone que F y G son dos subespacios vectoriales de E. Demostrar que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ y que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. [007442]

Ejercicio 5274 Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

En el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar estándar y la base canónica, aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} ;\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} ;\ v_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

para obtener una base ortonormada. [007443]

Ejercicio 5275

Se considera $\mathbb{R}^4$ dotado de su producto escalar usual. Sea F el subespacio generado por $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,1)$. Determinar una base ortonormada de F y completarla para obtener una base ortonormada de $\mathbb{R}^4$. [007444]

Ejercicio 5276 Verdadero o falso, Precisar

Sea $(E, <.>)$ un espacio vectorial euclidiano. Responder verdadero o falso, luego diga bajo qué suposiciones adicionales sobre la base del enunciado es verdadera.

1. La matriz A de una aplicación lineal ortogonal u en una base $\mathscr{B}$ de E verifica ${}^tAA = \mathrm{Id}$.
2. En toda base ortonormada de $\mathbb{R}^3$, la matriz de una rotación es de la forma $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

[007445]

Ejercicio 5277

Sea E l'espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar canónico y de la base canónica. Sea H el plano de ecuación $x+2y+2z=0$. Sea π la proyección ortogonal en H y s la simetría ortogonal con respecto a H.

1. Determinar un vector ε_1 normal a H y unitario.
2. Para todo vector V de E, escribir $V-\pi(V)$, luego $\pi(V)$, con ayuda de V y ε_1 solamente. (Se pueden usar los productos escalares como coeficientes).
3. Determinar las matrices de π y de s en la base canónica. ¿Son ortogonales, simétricas ?

[007446]

Ejercicio 5278 Curso

Demostrar que en un espacio afín euclidiano E la función $E\times E\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\|x-y\|$ es una función de distancia. [007447]

Ejercicio 5279 Distancia entre dos rectas en el espacio

Sea $\mathscr{E}$ un espacio euclidiano afín de dimensión 3. Para todo par de rectas (D_1,D_2) se llama

$$d(D_1,D_2)=\inf\{\|y_1-y_2\|,y_1\in D_1,y_2\in D_2\}.$$

1. Calcular $d(D_1,D_2)$, cuando D_1 y D_2 son concurrentes.
2. Sea $a_1\in D_1$ y $a_2\in D_2$. Descomponiendo a_1-a_2 en $\overrightarrow{D_1}+\overrightarrow{D_2}+(\overrightarrow{D_1}+\overrightarrow{D_2})^{\perp}$ demostrar que existe $x_1\in D_1$ y $x_2\in D_2$ tales que $d(D_1,D_2)=d(x_1,x_2)$.
3. Demostrar que para $z_1\in D_1$ y $z_2\in D_2$,
$$d(D_1,D_2)=d(z_1,z_2)\iff z_1-z_2\in\overrightarrow{D_1}^{\perp}\cap\overrightarrow{D_2}^{\perp}.$$
4. Demostrar que si e_i es un vector director de D_i
$$d(D_1,D_2)^2=\frac{Gram(a_1-a_2,e_1,e_2)}{Gram(e_1,e_2)}$$
donde $Gram(u_1,u_2,\ldots,u_r):=det(\langle u_i,u_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant r}$.
5. Calcular la distancia entre las dos rectas dadas por las ecuaciones cartesianas en un marco ortonormado de $\mathscr{E}$:
$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in D_1\iff\begin{cases}x+y=1\\x+y+2z=1\end{cases}\qquad M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in D_2\iff\begin{cases}y+z=1\\x+y-2z=3.\end{cases}$$

[007448]

Ejercicio 5280 Ángulo de dos rayos con el mismo origen

En el plano euclidiano orientado $\mathscr{P}$, se consideran dos semirrectas d_1 y d_2 del mismo origen Ω.

1. Recordar la forma general de una matriz de rotación vectorial en un base ortonormada directa de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. ¿Cómo cambia esto matriz cuando se cambia de la base ortonormada ?
2. Demostrar que existe un único centro de rotación Ω que envía d_1 sobre d_2. Por tanto, se puede definir el ángulo orientado de dos semirrectas como el ángulo de rotación que envía la primera a la segunda.

[007449]

Ejercicio 5281

En el plano euclidiano provisto de un sistema de referencia ortonormado, se consideran los puntos $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Determinar según el valor de r el conjunto de puntos M del plano tal que $MA^2-2MB^2=r$.
2. Determinar según el valor de r el conjunto de puntos M del plano tal que $MA^2-MB^2=r$.

[007450]

Ejercicio 5282 Sobre las homotecias traslaciones

Se trabaja en un espacio euclidiano afín. Se recuerda que las homotecias-traslaciones se caracterizan por transformar cualquier recta en una recta paralela. Se llama homotecia a una aplicación afín cuya parte lineal es una homotecia vectorial.

1. Demostrar que el conjunto de dilataciones coincide con el conjunto de homotecias-traslaciones.
2. Demostrar que el conjunto de dilataciones es un subgrupo normal del grupo de aplicaciones afines.
3. Se trabaja ahora en el plano afín euclidiano $\mathscr{P}$. Demostrar que existen exactamente dos dilataciones que transforma un círculo dado en un círculo dado.

[007451]

Ejercicio 5283 Desigualdad isoperimétrica

Se considera en el plano euclidiano provisto de una referencia ortonormada, la curva C de ecuación polar $r = f(\theta)$, donde f es una función continua positiva en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1. Representar C en el caso donde $f = \cos$.
2. Se recuerda que el área de la superficie S delimitada por la curva C es dada por
$$a(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$
Demostrar que
$$a(S) \leqslant \frac{\pi}{4} (\operatorname{diam}(S))^2.$$

[007452]

Ejercicio 5284 Curso

¿En un espacio vectorial euclidiano, son dos subespacios vectoriales ortogonales no nulos siempre en suma directa ?

1. Demostrar usando la forma reducida que el determinante de una isometría es $(-1)^{\operatorname{codim} E_1}$, donde E_1 es el espacio propio del valor propio 1.
2. Recordar todas las isometrías del plano euclidiano y del espacio euclidiano de dimensión 3, precisando su parte lineal, su punto fijo, su eje, su componente de punto fijo y su componente deslizante.
3. Recordar la construcción del eje radical de dos círculos que no se cortan.
4. Determinar el grupo de isometrías de un segmento en el plano euclidiano.

[007453]

Ejercicio 5285

Sean A y B dos puntos fijos en un plano euclidiano afín. Determinar el lugar de los puntos M del plano donde $MA \perp MB$. [007454]

Ejercicio 5286

El propósito de este ejercicio es demostrar que la simetría del ortocentro H de un triángulo no plano ABC, con respecto a uno de los lados (por ejemplo (AC)) está en el círculo circunscrito. Sea ABC un triángulo no plano. La altura saliendo de A corta (BC) en A' y la altura desde C corta (AB) en C'. Demostrar que los puntos A', B, C' y H son cocíclicos. Demostrar que los ángulos de las rectas $((BC'), (BA'))$ y $((HC'), (HA'))$ son iguales. Concluir. [007455]

Ejercicio 5287

Dos círculos se dicen ortogonales si las tangentes en los puntos de intersección son ortogonales. Demostrar que los círculos Cy C' son ortogonales si y solo si la potencia del centro de C, con respecto a C' es igual al cuadrado del radio de C. [007456]

Ejercicio 5288

Sean A y B dos puntos de un plano afín euclidiano. Determinar según el valor de la constante k,

1. El conjunto de puntos M del plano tal que $MA^2 + MB^2 = k$
2. El conjunto de puntos M del plano tal que $MA^2 - MB^2 = k$
3. y el conjunto de los puntos M del plano tal que $MA/MB = k$
4. El conjunto de puntos M del plano tal que $MA/MB < k$

[007457]

Ejercicio 5289

Descomponiendo las rotaciones en productos de reflexiones, determinar el centro de una composición de dos rotaciones cuya suma de ángulos no es nula módulo 2π. [007458]

Ejercicio 5290 Descomposición de isometrías planas

---

1. ¿Qué se puede decir de una isometría plana que tiene tres puntos fijos no alineados ?
2. Sea ϕ una isometría plana que tiene dos puntos fijos distintos A y B. Sea C un punto fuera de recta (AB) y C' su imagen por ϕ. Si C' es diferente de C, determinar la mediatriz del segmento $[CC']$ y demostrar que $s_{(AB)} \circ \phi$ es la identidad. Deducir la naturaleza de ϕ.
3. Sea ϕ una isometría diferente de la identidad que tiene un punto fijo A. Sea B otro punto del plano y B' su imagen. Si B' es diferente de B, sea d la mediatriz del segmento $[BB']$ Demostrar que $s_d \circ \phi$ tiene dos puntos fijos. Demostrar que ϕ se compone de reflexiones.
4. Demostrar que una isometría plana que no tiene un punto fijo se puede escribir como composición de menos de tres reflexiones.

[007459]

Ejercicio 5291

Se provee al plano afín euclidiano una referencia ortonormada (O, i, j) y se identifica con el plano complejo. Escribir usando afijos complejos, la simetría deslizada de eje de ecuación $x + y = 2$ y de vectores $(3, 3)$. [007460]

Ejercicio 5292 Determinar una rotación a partir de imágenes

Sea E un plano euclidiano afín provisto de un sistema cartesiano ortonormada. Sean A, B, C y D los puntos de E cuyas coordenadas son

$$A:(0,3), \quad B:(2,1), \quad C:(2,3) \text{ y } D:(0,1).$$

1. Demostrar que las rectas (A,B) y (C,D) son ortogonales y explicitar las coordenadas de su punto de intersección.
2. Demostrar la existencia de un *rotación* que envía A sobre C, C sobre B, B sobre D y D sobre A. Explicitar una representación matricial de esta rotación.

[007461]

Ejercicio 5293 Encontrar la isometría

Sea E un espacio euclidiano afín de dimensión 3 dotado de un sistema de coordenadas cartesianas ortonormadas. Se denota v la transformación de E en E que envía el punto de coordenadas (x,y,z) en el punto de coordenadas (x',y',z') definidas por :

$$x' = \frac{2x-2y+z+1}{3}; \quad y' = \frac{2x+y-2z+2}{3}; \quad z' = \frac{x+2y+2z+5}{3}.$$

Demostrar que v es una isometría de E. Especificar qué tipo de isometría se trata. Explicitar su eje y su vector de deslizamiento. [007462]

Ejercicio 5294 Composición de isometrías

Sea E un espacio euclidiano afín de dimensión 3 dotado de un sistema de coordenadas cartesianas ortonormadas $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se designa por D la recta de ecuación $(x=0, z=1)$ y por D' la recta de ecuación $(y=0, z=0)$. Se denota S_D la simetría con respecto a la recta D y R_θ la rotación de eje D' y de ángulo θ (considerando la base (j,k) como directa). Se define $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

1. Escribir en la base (i,j,k) la matriz de $\overrightarrow{S_D}$, la de $\overrightarrow{R_\theta}$ y la de $\vec{\varphi}$. Escribir las expresiones analíticas de S_D y de R_θ en el sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Demostrar que φ es una simetría eventualmente deslizada de eje una recta Δ.
3. Para todo punto M de E, probar que los puntos medios de $\big(M, s_\Delta(M)\big)$ y de $\big(M, \varphi(M)\big)$ están en Δ.
4. Usando el punto O, demostrar que Δ pasa por el punto de coordenadas $(0,0,1)$, y está contenido en el plano afín de ecuación $x=0$.
5. Dar las componentes del vector de deslizamiento de φ en función de θ.

[007463]

Ejercicio 5295

1. Sea C un círculo y $\vec{u}$ un vector. Construir una cuerda $[AB]$ del círculo C tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
2. Construir un segmento $[AB]$ conociendo su entorno I y sabiendo que A pertenece a una recta dada d y B a un círculo dado C.
3. Construir un cuadrado $ABCD$ sabiendo que A y C están en una recta dada d_1 que B está en una recta dada d_2 y que D está en una recta dada d_3.

Ejercicio 5296

Sea d una recta. Sea $\mathscr{C}$ un círculo y A un punto de $\mathscr{C}$. Construir un círculo tangente a la derecha d y tangente en A en el círculo $\mathscr{C}$. [007465]

Ejercicio 5297

Se considera el plano equipado con un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

1. Demostrar que esta curva tiene un centro de simetría Ω y dar su ecuación en el sistema de referencia $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. Demostrar que en el sistema de referencia $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la primera bisectriz Δ es eje de simetría.
3. Se considera el sistema de referencia ortonormado directo $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ donde $\overrightarrow{I}$ es un vector unitario de Δ. Dar la ecuación de (C) en este sistema de referencia.
4. Demostrar que en el sistema de referencia $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la segunda bisectriz $\Delta^{'}$ es eje de simetría. Dar las ecuaciones de Δ y $\Delta^{'}$ en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Sabiendo que (C) es una elipse, trazar (C) en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Retomar este ejercicio pero utilizando la teoría de las formas cuadráticas y su aplicación en las cónicas. En particular, encontrar los ejes de (C). [007466]

Ejercicio 5298

Se considera el plano equipado con un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$$

1. Demostrar que esta curva tiene un centro de simetría Ω y dar su ecuación en el sistema de referencia $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. Deducir que (C) es la unión de dos líneas cuyas ecuaciones se dan en la tabla siguiente $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

[007467]

Ejercicio 5299

Se considera el plano equipado con un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10 = 0$$

1. Verificar que O es un centro de simetría. Encontrar una base ortonormal tal que la ecuación de (C) sea de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b reales).
2. Dar la ecuación de las asíntotas de (C) y trazar (C) en el sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

[007468]

Ejercicio 5300

Se considera el plano euclidiano equipado con una referencia ortonormada $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

1. Demostrar que (C) es una parábola.
2. Encontrar un sistema de referencia ortonormado $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tal que (C) tiene una ecuación de la forma $x^2 = 2py$ en este sistema.

[007469]

Ejercicio 5301

Se considera el plano euclidiano equipado con sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$$

1. Demostrar que (C) es una parábola.
2. Encontrar un sistema de referencia ortonormado $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tal que (C) tiene una ecuación de la forma $x^2 = 2py$ en este sistema de referencia . *Indicación.* Se debe encontrar que en el marco ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ el vértice tiene por coordenadas $(0,1)$ y por eje la recta $y = x + 1$.

[007470]

Ejercicio 5302

Estudiar las siguientes cónicas cuyas ecuaciones están dadas en un sistema ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
Se especifica según la naturaleza el centro, los ejes, el vértice y las asíntotas.

1. $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0.$
   Indicación. Se debe encontrar una hipérbola de centro $(2,3)$ en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y de ecuación reducida (por lo tanto relacionado con sus ejes) $3x^2 - 7y^2 = 4$.
2. $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$
   Indicación. Encontrar una elipse de centro $(\frac{-9}{7}, \frac{8}{7})$ en el sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y de ecuación reducida (por lo tanto relacionado con sus ejes) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3-\sqrt{2}}{2}y^2 - \frac{36}{7} = 0$

[007471]

Ejercicio 5303

Se considera el plano euclidiano equipado con un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación

$$\sqrt{3}x^2 + 6xy + \sqrt{3}y^2 + 2(\sqrt{3} - 6)x - 2(3 + \sqrt{3})y + 1 = 0$$

1. Demostrar que esta curva tiene un centro de simetría Ω y dar su ecuación en el sistema de referencia $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

2. Demostrar que en el sistema de referencia $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la recta Δ de ecuación $y = \sqrt{3}x$ es eje de simetría.
3. Se considera el sistema de referencia ortonormado directo $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ donde $\vec{I}$ es un vector unitario de Δ. Dar la ecuación de (C) en este sistema de referencia .
4. Demostrar que en el sistema de referencia $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la perpendicular $\Delta^{'}$ a Δ es eje de simetría.
5. Sabiendo que (C) es una hipérbola, trazar gráficamente (C) en el sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

[007472]

205 240.01 Subespacios afines

Ejercicio 5304 Ensi Physique P 94

Sean I, J, K tres puntos del plano. Demostrar la equivalencia entre las tres propiedades :
a) I, J, K están alineados.
b) Existe M tal que $\det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + \det(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) + \det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = 0$.
c) Para todo punto M, se tiene $\det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + \det(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) + \det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = 0$.

Solución ▼ [004859]

Ejercicio 5305 Haz de planos

Se consideran dos planos no paralelos de $\mathscr{E}_3$ teniendo por ecuación en un sistema de referencia $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} P: & ax+by+cz+d=0 \\ P': & a'x+b'y+c'z+d'=0. \end{cases}$$

Sea $D = P \cap P'$. Demostrar que un plano Q contiene D si y solo si tiene por ecuación en $\mathscr{R}$:

$$\alpha(ax+by+cz+d) + \beta(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no ambos nulos.

Solución ▼ [004860]

Ejercicio 5306 Ecuación de un plano

En $\mathscr{E}_3$ dotado de un sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se da : $A : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D : \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x+y-3z=-1. \end{cases}$

Dar la ecuación cartesiana del plano pasando por A y D.

Solución ▼ [004861]

Ejercicio 5307 Rectas coplanares

En $\mathscr{E}_3$ dotado de un sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se da : $D : \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ y $D' : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a. \end{cases}$

1. ¿Para qué valores de a, D y D' son coplanares ?
2. Dar entonces la ecuación del plano conteniendo D y D'.

Solución ▼ [004862]

Ejercicio 5308 Rectas no coplanares

Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín de dimensión 3, y D, D', D'' tres rectas paralelas al mismo plano $\mathscr{P}$, pero dos a dos no coplanares.

1. Demostrar que en todo punto A de D, pasa una única recta Δ_A intersecando D' y D''.
2. Demostrar que las rectas Δ_A son todos paralelos al mismo plano $\mathscr{Q}$.

Solución ▼ [004863]

Ejercicio 5309 Rectas concurrentes

En $\mathscr{E}_2$ dotado de un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, se consideran las tres rectas : $\begin{cases} D: & ax+by=c \\ D': & a'x+b'y=c' \\ D'': & a''x+b''y=c''. \end{cases}$

Demostrar que D, D', D'' son paralelas o concurrentes si y solo si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$ [004864]

Ejercicio 5310 Rectas concurrentes

Sea $ABCD$ un paralelogramo, y $M \in (ABC)$. Se denota I, J proyecciones de M sobre (AB) y (CD), paralelamente a (AD), y K, L proyecciones de M sobre (AD) y (BC), paralelamente a (AB). Demostrar que las rectas (IK), (JL), (BD) son paralelas o concurrentes.

Solución ▼ [004865]

Ejercicio 5311 Ecuación de una recta variable

Sea $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un sistema de referencia de $\mathscr{E}_2$, y $A : \binom{1}{0}$, $B : \binom{0}{1}$, $C : \binom{0}{2}$. Para $m \in \mathbb{R}$, se construyen las rectas $D : y = mx$ y $D' : y = -mx$, luego $M \in D \cap (AB)$, y $M' \in D' \cap (AC)$ (si es posible). Demostrar que la recta (MM') pasa por un punto fijo (= independiente de m).

Solución ▼ [004866]

Ejercicio 5312 Dimensiones

Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, dos subespacios afines de dimensión finita de un espacio afín $\mathscr{E}$. Se denota $\mathscr{H}$ el subespacio afín generado por $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$. Determinar $\dim(\mathscr{H})$.

Solución ▼ [004867]

Ejercicio 5313 Dimensiones

Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}$, dos subespacios afines disjuntos de dimensiones f, g de un espacio afín $\mathscr{E}$, con $f \leqslant g$. Demostrar que $\mathscr{F} \mathbin{//} \mathscr{G}$ si y solo si existe un subespacio afín $\mathscr{H}$ de dimensión $g+1$ conteniendo $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$. [004868]

Ejercicio 5314 Central PSI 1997

Sea la familia de rectas :

$$(D_\lambda) \quad \begin{cases} x = \lambda + \lambda^2 z \\ y = \lambda^2 + \lambda z. \end{cases}$$

1. Escribiendo sus ecuaciones en la forma $\begin{cases} z = a \\ ux+vy+h=0 \end{cases}$ muestra que existen dos rectas Δ_1 y Δ_2 horizontales cortando todas las rectas D_λ.
2. Encontrar las ecuaciones de los planos que pasan por $M(\lambda,\lambda^2,0)$ y que contiene respectivamente Δ_1 y Δ_2.
3. Encontrar el conjunto (D_λ).

Solución ▼ [004869]

Ejercicio 5315 *T

En $\mathbb{R}^3$ afín, determinar un sistema de referencia de la recta (D) $\begin{cases} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{cases}$.

Solución ▼ [005505]

Ejercicio 5316 *T

En $\mathbb{R}^3$, determinar la intersección de (D) $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=7 \end{cases}$ y $(P):\ x+3y-5z+2=0$.

Solución ▼ [005506]

Ejercicio 5317 **

En $\mathbb{R}^3$ afín, determinar el real a, para que las rectas $\begin{cases} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$ sean coplanares, luego determinar una ecuación del plano que los contiene.

Solución ▼ [005507]

Ejercicio 5318 **T

En $\mathbb{R}^3$, dar la ecuación del plano P, paralelo a la derecha (Oy) y pasando por $A(0,-1,2)$ y $B(-1,2,3)$.

Solución ▼ [005508]

---

206 240.02 Aplicaciones afines

Ejercicio 5319 $f^p = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ tiene un punto fijo

Sea $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ afín tal que existe $p\in\mathbb{N}^*$ tal que $f^p=\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$. Demostrar que f admite al menos un punto fijo.
[004870]

Ejercicio 5320 1 no valor propio $\Rightarrow$ un punto fijo único

Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín de dimensión finita y $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ afín. Demostrar que f admite un único punto fijo si y solo si 1 no es valor propio de f. [004871]

Ejercicio 5321 Expresiones analíticas

Se fija un sistema de referencia $\mathscr{R}=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de un espacio afín de dimensión 3. Determinar las expresiones analíticas de las siguientes aplicaciones :

1. Simetría de base el plano de ecuación $x+2y+z=1$ y de dirección vect$(\overrightarrow{e}_1+\overrightarrow{e}_2+\overrightarrow{e}_3)$.
2. Simetría de base la recta de ecuaciones $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+z+2=0 \end{cases}$ de dirección el plano vectorial de ecuación $3x+3y-2z=0$.

Solución ▼ [004872]

Ejercicio 5322 Expresión analítica

Se fija un sistema de referencia $\mathscr{R}=(O,\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2,\overrightarrow{e}_3)$ de un espacio afín de dimensión 3. Reconocer la aplicación que tiene la siguiente expresión analítica :

$$\begin{cases} x'=3x+4y+2z-4 \\ y'=-2x-3y-2z+4 \\ z'=4x+8y+5z-8. \end{cases}$$

(encontrar los puntos fijos de f y estudiar $\overrightarrow{MM'}$)

Solución ▼ [004873]

Ejercicio 5323 Permutación circular de 4 puntos

En un espacio afín $\mathscr{E}$, se consideran cuatro puntos A,B,C,D. Estudiar la existencia de una aplicación afín f tal que $f(A)=B$, $f(B)=C$, $f(C)=D$, $f(D)=A$.

Solución ▼ [004874]

Ejercicio 5324 $f^3=\mathrm{Id}$

Sea $\mathscr{P}$ un plan, y $f:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ una aplicación afín tal que $f^3=\mathrm{Id}$, con $f\neq\mathrm{Id}$.

1. Demostrar que si $A\neq f(A)$, entonces $A,f(A),f^2(A)$ no están alineados.
2. Deducir que f es el producto de dos simetrías.

[004875]

Ejercicio 5325 Producto de afinidades

Sea $\mathscr{P}$ un plan, $\mathscr{D}$ una recta de $\mathscr{P}$, y f,g dos afinidades de base $\mathscr{D}$, de direcciones $\overrightarrow{\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta'}$ y de cocientes λ, μ. Estudiar la naturaleza de $f\circ g$.

Solución ▼ [004876]

Ejercicio 5326 Baricentro de proyecciones

Sean π,π' dos proyecciones en un espacio afín $\mathscr{E}$ teniendo la misma dirección $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. Para $\lambda\in\mathbb{R}$, se denota π_λ la aplicación : $M\longmapsto \mathrm{Bar}(\pi(M):\lambda,\pi'(M):1-\lambda)$. Demostrar que π_λ es aún una proyección de dirección $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. [004877]

Ejercicio 5327 Simetría-traslación

Sea $f:\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ afín. Se dice que f es una *simetría-traslación* si existe una simetría s y una traslación t tales que $f=s\circ t=t\circ s$.

1. Sean s simetría básica $\mathscr{B}$ de dirección $\overrightarrow{\mathscr{F}}$, y t una traslación de vector $\overrightarrow{u}$. Demostrar que $s \circ t = t \circ s \iff \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{B}}$.
2. Sea f una simetría-traslación. Demostrar que el par (s,t) tal que $f = s \circ t = t \circ s$ es único.
3. Sea f afín cualquiera. Demostrar que f es una simetría-traslación si y solo si $f \circ f$ es una traslación.
4. Deducir que el producto de una simetría por cualquier traslación es una simetría-traslación.
5. AN : descomponer la aplicación f de expresión analítica en un sistema de referencia $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$:

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Solución ▼ [004878]

Ejercicio 5328 Transitividad de homotecias-traslaciones

En un espacio afín $\mathscr{E}$ se dan cuatro puntos P, Q, P', Q', con $P \neq Q$. ¿Existe una homotecia-traslación f tal que $f(P) = P'$ y $f(Q) = Q'$?

Solución ▼ [004879]

Ejercicio 5329 Uso de aplicaciones afines

Se considera en el espacio dos planos paralelos distintos $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$, $A, B, C \in \mathscr{P}$, $O \notin \mathscr{P}$, y se construye los siguientes puntos :
– A', B', C' : intersecciones con $\mathscr{P}'$ de las rectas (OA), (OB), (OC). – α, β, γ : los puntos medios de los segmentos $[B,C]$, $[C,A]$, $[A,B]$. Demostrar que las rectas $(A'\alpha)$, $(B'\beta)$, $(C'\gamma)$ son paralelas o concurrentes.

Solución ▼ [004880]

Ejercicio 5330 Uso de aplicaciones afines

Sean $A_1, \dots, A_n$, n puntos de $\mathscr{E}$. Estudiar la existencia de puntos $B_1, \dots, B_n$ tales que $A_i = \text{p.med}(B_i, B_{i+1})$ $(A_n = \text{p.med}(B_n, B_1))$. [004881]

Ejercicio 5331 Proyección estereográfica

En el espacio, se considera un punto O y un plano $\mathscr{P}$ sin pasar por O. Se define la aplicación $f : M \longmapsto M'$, donde M' es el punto de intersección de $\mathscr{P}$ y (OM). (Proyección estereográfica en $\mathscr{P}$ polo O)

1. ¿Es f afín ?
2. Estudiar la imagen por f de una recta, de un plano, de una parte convexa.

[004882]

Ejercicio 5332 Caracterización de productos de simetría

Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín de dimensión finita y $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ afín. Demostrar que f es un producto de simetrías si y solo si $\det(\overrightarrow{f}) = \pm 1$. [004883]

Ejercicio 5333 Puntos en el espacio

En el espacio, las rectas (AA'), (BB'), (CC') son concurrentes en O, $O \notin (ABC)$ y A,B,C no alineados. Sean G,G' los isobaricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$. ¿Puede dar una CNS para que O,G,G' sean alineados ?

Solución ▼ [004885]

Ejercicio 5334 Polígono de puntos medios

Sea $P = A_1A_2\dots A_n$ un polígono a n vértices : se le asocia el polígono $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$, donde A'_i es el punto medio de A_i y A_{i+1} ($A_{n+1} = A_1$). Se define entonces una sucesión de polígonos por recurrencia :
$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$
Demostrar que cada vértice de P_k converge hacia el centro de gravedad de P_0, cuando k tiende a infinito. (Escribir un vértice de P_k como baricentro de $A_1,\dots,A_n$)

Solución ▼ [004886]

Ejercicio 5335 Isobaricentro de todos los puntos salvo uno

Sea $P = A_1A_2\dots A_n$ un polígono a n vértices : se le asocia el polígono $P' = A'_1A'_2\dots A'_n$, donde A'_i es el isobaricentro de todos los vértices excepto A_i. Se define entonces una sucesión de polígonos por recurrencia :
$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$
Demostrar que cada vértice de P_k converge hacia el centro de gravedad de P_0, cuando k tiende a infinito.

Solución ▼ [004887]

Ejercicio 5336 Sucesión recurrente

Sean A_0,A_1,A_2 tres puntos dados. Se considera la sucesión (A_k) de puntos que satisfacen la relación de recurrencia :

$$\forall k \geqslant 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión.

Solución ▼ [004888]

Ejercicio 5337 Teorema de Menelao

Sea ABC un triángulo y tres puntos $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distintos de A,B,C.

1. Demostrar que P,Q,R están alineados si y solo si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. En este caso, demostrar que $P' = \text{p.med}(P,C)$, $Q' = \text{p.med}(Q,A)$, y $R' = \text{p.med}(R,B)$ están también alineados.

[004889]

Ejercicio 5338 Teorema de Ceva

Sea ABC un triángulo y tres puntos $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distintos de A,B,C. Demostrar que las rectas (AQ), (BR), (CP) son paralelas o concurrentes si y solo si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Ejercicio 5339 Rectas paralelas

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que las paralelas a (AB), (BC), (CA) respectivamente pasando por C', A', B' sean concurrentes. Demostrar que sucede lo mismo para las paralelas a $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ pasando por C, A, B. [004891]

Ejercicio 5340 Puntos en tercios de los lados

Sea ABC un triángulo, $A_1 = \mathrm{Bar}(B:2, C:1)$, $B_1 = \mathrm{Bar}(C:2, A:1)$ y $C_1 = \mathrm{Bar}(A:2, B:1)$. Se denota A_2, B_2, C_2 los puntos de intersección de las rectas (AA_1), (BB_1), y (CC_1).

1. Demostrar que A_2 es el punto medio de $[B, B_2]$.
2. Comparar las superficies de los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$.

Solución ▼ [004892]

Ejercicio 5341 Simétricas de un punto con respecto a los puntos medios de los lados

Sea un triángulo ABC, A', B', C', los puntos medios de los lados, y M un punto del plano (ABC) de coordenadas baricéntricas (α, β, γ).

1. Encontrar las coordenadas baricéntricas de P, Q, R simétricas de M, con respecto a los puntos A', B', C'.
2. Demostrar que las rectas (AP), (BQ), (CR) son concurrentes en un punto N.
3. Demostrar que N es el punto medio de $[A, P]$, $[B, Q]$, $[C, R]$.
4. Reconocer la aplicación $M \mapsto N$.

Solución ▼ [004893]

Ejercicio 5342 Paralelogramos

En el plano, se considera :
– tres puntos no alineados A, B, C.
– tres puntos alineados P, Q, R, con $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$.
Se construyen los puntos I, J, K de manera que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ sean paralelogramos. Demostrar que I, J, K están alineados.

Solución ▼ [004894]

Ejercicio 5343 Proyecciones en cascada

Sean A, B, C tres puntos no alineados y $M_1 \in (AB)$. Se construye los puntos M_2, M_3, M_4 de la siguiente manera :
– M_2 es la proyección de M_1 sobre (BC), paralelamente a (AC).
– M_3 es la proyección de M_2 sobre (AC), paralelamente a (AB).
– M_4 es la proyección de M_3 sobre (AB), paralelamente a (BC).
Se empiezan de nuevo las mismas construcciones a partir de M_4, que dan los puntos M_5, M_6, M_7. Demostrar que $M_7 = M_1$.

Solución ▼ [004895]

Ejercicio 5344 Caracterización del baricentro por las superficies

Sea ABC un triángulo, y $M \in (ABC)$. Se denota α, β, γ áreas de triángulos MBC, MCA, MAB.

1. Se supone que M está en la envolvente convexa de $\{A, B, C\}$.
   Demostrar que : $(\alpha = \beta = \gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.

2. ¿Cuáles son todos los puntos del plano (ABC) tales que $\alpha = \beta = \gamma$?

Solución ▼ [004896]

Ejercicio 5345 Coord. del baricentro del centro del círculo circunscrito

Sea ABC un triángulo. Se denota : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1. Demostrar que para todo punto M del círculo (ABC), se tiene :

$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$

2. Deducir las coordenadas baricéntricas del centro del círculo (ABC).

[004897]

Ejercicio 5346 Círculo inscrito

Sea ABC un triángulo. Se denota : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Sea A' el pie de la bisectriz interior procedente de A. Demostrar que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. Deducir las coordenadas baricéntricas de I, centro del círculo inscrito.

Solución ▼ [004898]

---

207 240.03 Baricentro

Ejercicio 5347 Ecuación baricéntrica de una recta

Sea (A, B, C) una base afín de $\mathscr{E}_2$, y M, M', M'' tres puntos de coordenadas baricéntricas (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Demostrar que M, M', M'' están alineados si y solo si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$ [004884]

Ejercicio 5348 Puntos en el espacio

En el espacio, las rectas (AA'), (BB'), (CC') son concurrentes en O, $O \notin (ABC)$ y A, B, C no son alineados. Sean G, G' los isobaricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$. ¿Puede dar una CNS para que O, G, G' sean alineados ?

Solución ▼ [004885]

Ejercicio 5349 Polígono de puntos medios

Sea $P = A_1A_2\dots A_n$ un polígono a n vértices : se le asociada el polígono $P' = A'_1A'_2\dots A'_{n-1}A'_n$, donde A'_i es el punto medio de A_i y A_{i+1} ($A_{n+1} = A_1$). Se define entonces una sucesión de polígonos por recurrencia : $\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$
Demostrar que cada vértice de P_k converge hacia el centro de gravedad de P_0, cuando k tiende a infinito. (Escribir un vértice de P_k como baricentro de $A_1, \dots, A_n$)

Solución ▼ [004886]

Ejercicio 5350 Isobaricentro de todos los puntos salvo uno

Sea $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polígono a n vértices : se le asocia el polígono $P' = A'_1A'_2 \dots A'_n$, donde A'_i es el isobaricentro de todos los vértices excepto A_i. Se define entonces una sucesión de polígonos por recurrencia :

$$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{k+1} = (P_k)'. \end{cases}$$

Demostrar que cada vértice de P_k converge hacia el centro de gravedad de P_0, cuando k tiende a infinito.

Solución ▼ [004887]

Ejercicio 5351 Sucesión recurrente

Sean A_0, A_1, A_2 tres puntos dados. Se considera la sucesión (A_k) de puntos que satisfacen la relación de recurrencia :

$$\forall k \geqslant 3,\ A_k = \mathrm{Bar}(A_{k-1} : 1, A_{k-2}, 1, A_{k-3} : 2).$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión.

Solución ▼ [004888]

208 240.04 Propiedades de los triángulos

Ejercicio 5352 Teorema de Menelao

Sea ABC un triángulo y tres puntos $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distintos de A, B, C.

1. Demostrar que P, Q, R están alineados si y solo si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
2. En este caso, demostrar que $P' = \mathrm{p.med}(P, C)$, $Q' = \mathrm{p.med}(Q, A)$, y $R' = \mathrm{p.med}(R, B)$ están también alineados.

[004889]

Ejercicio 5353 Teorema de Ceva

Sea ABC un triángulo y tres puntos $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CA)$, distintos de A, B, C. Demostrar que las rectas (AQ), (BR), (CP) son paralelas o concurrentes si y solo si $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -1$. [004890]

Ejercicio 5354 Rectas paralelas

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que las paralelas a (AB), (BC), (CA) respectivamente pasando por C', A', B' sean concurrentes. Demostrar que es lo mismo para las paralelas a $(A'B')$, $(B'C')$, $(C'A')$ pasando por C, A, B. [004891]

Ejercicio 5355 Puntos en tercios de los lados

Sea ABC un triángulo, $A_1 = \mathrm{Bar}(B : 2, C : 1)$, $B_1 = \mathrm{Bar}(C : 2, A : 1)$ y $C_1 = \mathrm{Bar}(A : 2, B : 1)$. Se denota A_2, B_2, C_2 los puntos de intersección de las rectas (AA_1), (BB_1), y (CC_1).

1. Demostrar que A_2 es el punto medio de $[B, B_2]$.
2. Comparar las superficies de los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$.

Solución ▼ [004892]

Ejercicio 5356 Simétricas de un punto con respecto a los puntos medios de los lados

Sea un triángulo ABC, A',B',C', los puntos medios de los lados, y M un punto del plano (ABC) de coordenadas baricéntricas (α,β,γ).

1. Encontrar las coordenadas baricéntricas de P,Q,R simétricas de M, con respecto a los puntos A',B',C'.
2. Demostrar que las rectas (AP), (BQ), (CR) son concurrentes en un punto N.
3. Demostrar que N es el punto medio de $[A,P]$, $[B,Q]$, $[C,R]$.
4. Reconocer la aplicación $M \mapsto N$.

Solución ▼ [004893]

Ejercicio 5357 Paralelogramos

En el plano, se considera :
– tres puntos no alineados A,B,C.
– tres puntos alineados P,Q,R, con $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$, $R \in (BC)$. Se construyen los puntos I,J,K de manera que $BPIR$, $APJQ$, $CQKR$ sean paralelogramos. Demostrar que I,J,K están alineados.

Solución ▼ [004894]

Ejercicio 5358 Proyecciones en cascada

Sean A,B,C tres puntos no alineados y $M_1 \in (AB)$. Se construye los puntos M_2,M_3,M_4 de la siguiente manera :
– M_2 es la proyección de M_1 sobre (BC), paralelamente a (AC).
– M_3 es la proyección de M_2 sobre (AC), paralelamente a (AB).
– M_4 es la proyección de M_3 sobre (AB), paralelamente a (BC).
Se empiezan de nuevo las mismas construcciones a partir de M_4, que dan los puntos M_5,M_6,M_7. Demostrar que $M_7 = M_1$.

Solución ▼ [004895]

Ejercicio 5359 Caracterización del baricentro por las superficies

Sea ABC un triángulo, y $M \in (ABC)$. Se denota α,β,γ áreas de triángulos MBC, MCA, MAB.

1. Se supone que M está en la envolvente convexa de $\{A,B,C\}$.
   Demostrar que : $(\alpha=\beta=\gamma) \iff M = \mathrm{Bar}(A:1,\ B:1,\ C:1)$.
2. ¿Cuáles son todos los puntos del plano (ABC) tales que $\alpha=\beta=\gamma$?

Solución ▼ [004896]

Ejercicio 5360 Coord. baricentro del centro del círculo circunscrito

Sea ABC un triángulo. Se denota : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

1. Demostrar que para todo punto M del círculo (ABC), se tiene :
$$a\cos\alpha MA^2 + b\cos\beta MB^2 + c\cos\gamma MC^2 = abc.$$
2. Deducir las coordenadas baricéntricas del centro del círculo (ABC).

Ejercicio 5361 Círculo inscrito

Sea ABC un triángulo. Se denota : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$,

1. Sea A' el pie de la bisectriz interior procedente de A. Demostrar que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$.
2. Deducir las coordenadas baricéntricas de I, centro del círculo inscrito.

Solución ▼ [004898]

Ejercicio 5362 Ortocentro

Sea ABC un triángulo. Se denota : $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

1. Sea A' el pie de la altura resultante de A. Calcular $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$.
2. Deducir las coordenadas baricéntricas del ortocentro H.

Solución ▼ [004899]

Ejercicio 5363 **

Demostrar que no existe un triángulo equilátero cuyos vértices pertenezcan a los puntos de intersección de las líneas de una hoja cuadriculada blanca usual.

Solución ▼ [005206]

Ejercicio 5364

Sea ABC un triángulo y $\mathscr{C}$ su círculo circunscrito, de centro O. Sea A' el punto diametralmente opuesto a A en el círculo $\mathscr{C}$. La altura (AH) saliendo de A del triángulo ABC interseca el círculo $\mathscr{C}$ en el punto D. Demostrar que la recta (DA') es paralela a (BC).

Indicación ▼ Solución ▼ [007059]

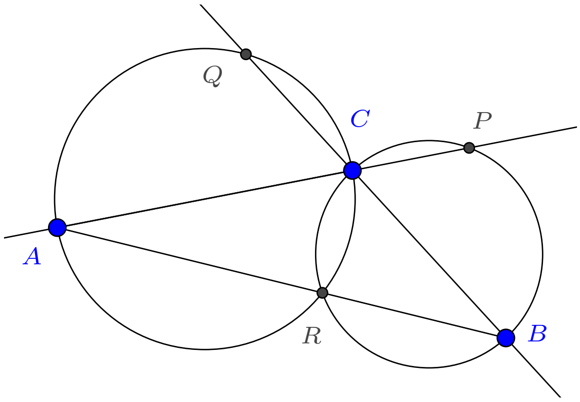
Ejercicio 5365

Sea $[AB]$ un segmento y M, N dos puntos pertenecientes al círculo $\mathscr{C}$ de diámetro $[AB]$. Se supone que las rectas (MB) y (AN) (respectivamente (NB) y (AM)) se intersecan en P (respectivamente en Q). Determinar el ángulo formado por las rectas (AB) y (PQ).

Indicación ▼ Solución ▼ [007060]

Ejercicio 5366

Sea ABC un triángulo. El círculo $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$) de diámetro $[BC]$ (resp. $[CA]$) corta la recta (CA) (resp. La recta (BC)) en P (resp. Q). círculos $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ se cortan en un segundo punto R. Demostrar que (CR), (BP) y (AQ) son concurrentes.



Indicación ▼ Solución ▼ [007061]

Ejercicio 5367

Se da un círculo $\mathscr{C}$, un diámetro $[AB]$ y un tercer punto M del círculo. El objetivo es construir la proyección ortogonal de M sobre (AB) solo con regla.

1. Demostrar que es suficiente construir una recta ortogonal a (AB) cortando el círculo en dos puntos.
2. Construir tal recta.

Indicación ▼ Solución ▼ [007062]

Ejercicio 5368

Se dan dos círculos $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ rayos distintos, de centros O y O', tangente externamente en un punto A. Se admite que existen tres tangentes comunes a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$: la tangente común en A, que es directamente construible, y otras dos rectas. El objetivo del ejercicio es dibujar estas dos últimas tangentes.

1. Se considera así una recta tangente a $\mathscr{C}$ en B y a $\mathscr{C}'$ en C, con $B \neq C$. La tangente común en A a los dos círculos cortados (BC) en I. Demostrar que I es el punto medio de $[BC]$ y que ABC es rectangular en A.
2. Terminar el ejercicio (es decir, construir B y C) en una de dos maneras siguientes :
   (a) Sea D tal que $ABDC$ sea un rectángulo. ¿Cuáles son los puntos de intersección entre (DB), (DC) y (OO') ? Deducir una construcción del punto D.
   (b) Demostrar que OIO' es rectangular en I y deducir una construcción del punto I.

Indicación ▼ Solución ▼ [007063]

Ejercicio 5369 Teorema de Varignon

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, e I, J, K, L los puntos medios de sus lados. Demostrar que $IJKL$ es un paralelogramo ya sea usando baricentros, ya sea el teorema de Tales. Demostrar que el área de $ABCD$ es el doble de la de $IJKL$ de dos maneras diferentes.

Indicación ▼ [007064]

Ejercicio 5370 Cuadriláteros ortodiagonales

Un cuadrilátero se dice *ortodiagonal* si sus diagonales son perpendiculares.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero ortodiagonal no cruzado. Demostrar que su área es $\frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Indicación ▼ [007065]

Ejercicio 5371 Suma de distancias

Sea ABC un triángulo equilátero. Para todo punto M al interior del triángulo, se nota

$$d = \operatorname{dist}(M,[AB]) + \operatorname{dist}(M,[BC]) + \operatorname{dist}(M,[AC])$$

la suma de los distancias de M en la tres lados. Demostrar que d no depende de hecho del punto M.

Indicación ▼ [007066]

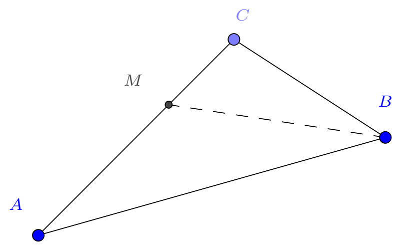
Ejercicio 5372

Tres círculos son tangentes exteriormente dos a dos. Demostrar que las tangentes comunes son concurrentes.

Indicación ▼ Solución ▼ [007067]

Ejercicio 5373 *

Sea ABC un triángulo con $AB = 2BC$ y M un punto de $[AC]$ tal que $AM = 2MC$. Comparar los ángulos $\widehat{ABM}$ y $\widehat{MBC}$.



Indicación ▼ Solución ▼ [007068]

Ejercicio 5374

Al exterior de un triángulo BOA se construyen dos triángulos rectángulos :

— El triángulo OAC, teniendo por hipotenusa el lado $[OA]$, tales que el vértice C del ángulo recto esté situado sobre la bisectriz exterior de OAB.

— El triángulo OBE, teniendo para hipotenusa el lado $[OB]$, tales que el vértice E de ángulo recto esté situado sobre la bisectriz exterior de OBA.

¿Qué se puede decir de $[EC]$ y de su longitud ?

Indicación ▼ [007069]

Ejercicio 5375

Se considera un cuadrado $ABCD$, y un círculo $\mathscr{C}$ pasando por A y B y tangente a $[CD]$.

1. Demostrar que el punto de tangence es el punto medio de $[CD]$.
2. Demostrar que si el radio vale $r = 10$, entonces $AB = 16$, y recíprocamente.
3. Demostrar que $AB = \frac{8}{5}r$.

Indicación ▼ [007070]

Ejercicio 5376

Sea A un punto cualquiera del diámetro de un círculo $\mathscr{C}$ y B el extremo de un radio perpendicular a este diámetro. Se traza una recta (BA) que corta el círculo en P, entonces la tangente en el punto P que corta en C el diámetro extendido. Demostrar que $CA = CP$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007071]

Ejercicio 5377

Sea ABC un triángulo e I el centro de su círculo inscrito, cuyo radio se denota por r. Demostrar que uno de los vértices del triángulo está a una distancia $\geqslant 2r$ de I, y que el otro está a una distancia $\leqslant 2r$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007072]

Ejercicio 5378 Cuadriláteros tangenciales

Un cuadrilátero convexo se dice *tangencial* o *circunscribible* si el tiene un círculo inscrito, es decir si sus cuatro lados son tangentes a un mismo círculo.

1. Demostrar que un cuadrilátero es tangencial si y solo si sus bisectrices interiores son concurrentes.
2. Demostrar el teorema de Pitot (1725) : en un cuadrilátero tangencial, la suma de los largos de dos lados opuestos es igual a la suma de los dos otros. ¿Recíproco ?
3. Demostrar que una cometa isósceles (o romboide) es tangente.

Indicación ▼ [007073]

Ejercicio 5379 Teorema de los tres tangentes

Sea ABC un triángulo. El círculo ex-inscrito en el ángulo en A toca los lados $[BC]$, $[AC)$ y $[AB)$ en P, Q y R. Demostrar que la suma $AR + AQ$ es igual al perímetro del triángulo ABC.

Indicación ▼ [007074]

Ejercicio 5380 Área, perímetro y círculo inscrito

Sea ABC un triángulo cuyo se denota a, b y c las longitudes los lados.

1. Expresar el área S del triángulo en función del perímetro $a+b+c = 2p$ y del radio r del círculo inscrito.
2. Expresar igualmente S en función de a y del radio r_A del círculo ex-inscrito en A.
3. Deducir $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$.

Indicación ▼ [007075]

Ejercicio 5381

Se da un círculo $\mathscr{C}$ (de centro O), un punto M al exterior del círculo, las dos tangentes $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$ a $\mathscr{C}$ pasando por M. Se denota A y B los puntos de tangencia. El círculo $\mathscr{C}$ corta (MO) en dos puntos P y Q. Por otra parte, sea H la intersección de la cuerda $[AB]$, con (OM). Demostrar que los círculos de centros P y Q y pasando por H son tangentes a $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$.

Solución ▼ [007076]

209 240.99 Autres

210 241.00 Isometría vectorial

Ejercicio 5382

Completar $x_1 = (1,2,1)$ a una base ortogonal directa de $\mathbb{R}^3$ euclidiana canónica. [001982]

Ejercicio 5383

Demostrar que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \;\; x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$. [001983]

Ejercicio 5384

Sea E euclidiana orientada de dimensión 3 y $a \in E$.
Sea $f : E \to E, x \mapsto x \wedge a$. ¿$f$ es lineal, biyectiva ? Comparar f^3 y f. [001984]

Ejercicio 5385

Sean a y b dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Discutir y resolver la ecuación $a \wedge x = b$. [001985]

Ejercicio 5386

Sea R la rotación vectorial de ángulo θ y de eje orientado por el vector unitario k. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $R(x) = (\cos\theta)x + (\operatorname{sen}\theta)k \wedge x + 2(x|k)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)k$. [001986]

Ejercicio 5387

Determiner la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de retorno de eje $\mathbb{R}(1,2,1)$. [001987]

Ejercicio 5388

Reconocer las transformaciones geométricas cuyas matrices respectivas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[001988]

Ejercicio 5389

Sea R una rotación de $\mathbb{R}^3$ de eje $\mathbb{R}u$ y de ángulo θ y r una rotación cualquiera. Determinar rRr^{-1}. Deducir que el centro de $SO_3(\mathbb{R})$ es bîîîîîp (el centro es el conjunto de rotaciones que conmutan con todos los demás). [001989]

Ejercicio 5390

Se considera el espacio vectorial euclidiano canónico y orientado $\mathbb{R}^3$. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ y $p = [a,b,c]$ el producto mixto de a, b y c. Expresar usando p las siguientes cantidades

1. $s = [a+b, b+c, c+a]$,
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.

[001990]

Ejercicio 5391 *T

Naturaleza y elementos característicos de la transformación de expresión compleja :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Solución ▼ [005207]

Ejercicio 5392

Construir un segmento $[A, B]$ conociendo su entorno I y sabiendo que A pertenece a una recta dada d y B a un círculo dado $\mathscr{C}$. [007480]

Ejercicio 5393

Construir un triángulo equilátero ABC conociendo A y sabiendo que B pertenece a un círculo dado $\mathscr{C}$ y C a otro círculo dado $\mathscr{C}'$. [007481]

Ejercicio 5394

Sea $\mathscr{C}$ un círculo y $\overrightarrow{u}$ un vector. Construir una cuerda AB de $\mathscr{C}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. [007482]

Ejercicio 5395

Construir un cuadrado $ABCD$ sabiendo que A y C están en una recta D_1 dada, B en una recta D_2 dada y D en una recta D_3 dada. [007483]

Ejercicio 5396

Sea d una recta. Sea $\mathscr{C}$ un círculo y A un punto de $\mathscr{C}$. Construir un círculo tangente a la derecha d y tangente en A en el círculo $\mathscr{C}$. [007484]

Ejercicio 5397

En un triángulo ABC rectángulo en A encontrar la relación entre longitud y altura $[AH]$ saliendo de A y la longitud de los segmentos $[BH]$ y $[CH]$. Dado un segmento de longitud a construir un segmento de longitud $\sqrt{a}$. [007485]

Ejercicio 5398

Dado un segmento de longitud a construir un segmento de longitud $a\sqrt{5}$. [007486]

---

211 242.00 Geometría afín euclidiana

212 242.01 Geometría afín euclidiana del plano

Ejercicio 5399 Transformaciones afines e isometrías

Sea P un plano provisto de un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ cualquiera.

1. Se considera D una recta de ecuación cartesiana $2x - y + 3 = 0$ y $\overrightarrow{u}(3, -2)$.
   (a) Sea $A(4,2)$. Dar una ecuación paramétrica de D_A recta que pasa por A de dirección $\overrightarrow{u}$. Deducir las coordenadas de $A' = D_A \cap D$ proyectado de A sobre D según $\overrightarrow{u}$.
   (b) Definir de manera general analíticamente la proyección sobre D según $\overrightarrow{u}$ expresando las coordenadas x', y' de M' proyectado de $M(x,y)$ en función de x y y.

2. Definir analíticamente las proyecciones sobre D según Δ en los siguientes casos :
   (a) Δ de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.
   (b) Δ de ecuación $3x + 2y + 2 = 0$.
   (c) Δ de ecuación $x + y - 1 = 0$.
   (d) Δ de ecuación $2x - 2y + 4 = 0$.

[002035]

Ejercicio 5400

Sea P un plano provisto de un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ cualquiera.

1. Dar la expresión analítica de la traslación t_1 de vector $(1,2)$.
2. Dar la expresión analítica de la traslación t_2 de vector $(-1,2)$.
3. Dar la expresión analítica de la homotecia h_1 de centro el origen del sistema de referencia y de razón 2 y de homotecia h_2 de centro $A(2,-1)$ de razón 3.
4. Dar la expresión analítica de $t_1 \circ h_1$, $t_2 \circ h_2$, $h_1 \circ t_1$, $h_2 \circ t_2$.
5. Sea $M(x,y)$ un punto de P. Dar las coordenadas del simétrico de M, con respecto a la recta de ecuación $y = ax + b$.

[002036]

Ejercicio 5401

1. Se considera S_1 la transformación del plano definido por el sistema de ecuaciones siguiente : $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$. Reconocer esta transformación.
2. Igualmente con la transformación S_2 definida por $x' = 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$, $y' = -5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$.
3. Se compone S_1, con S_2. Dar la expresión de $S_1 \circ S_2$, y encontrar la naturaleza de esta transformación.

[002037]

Ejercicio 5402

Se considera el plano provisto de un sistema de referencia ortonormado directo $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1. Sea f la transformación del plano definido analíticamente por

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1) \\ y' = & \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y+2). \end{cases}$$

   (a) Calcular las coordenadas de O', I', J' que son las imágenes de f de puntos los O, I, J.

   (b) Demostrar que el sistema de referencia $(O', \overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'})$ es ortonormada. ¿Es directa ?

   (c) Deducir que f es una isometría. ¿Es directa ?

   (d) Determinar el conjunto de puntos invariantes por f y reconocer f.

   (e) Dar la expresión analítica para la transformación inversa de f.

   (f) Calcular la imagen por f de la recta de ecuación $2x-y-1=0$.

2. Dar la expresión analítica de la rotación de centro $A(1,1)$ y de ángulo $\frac{\pi}{3}$, calcular la imagen de 0 por esta transformación.
3. La misma pregunta para la simetría de eje la recta de ecuación $x+y+1=0$
4. Dar la expresión analítica de la composición de las dos aplicaciones anteriores.

[002040]

Ejercicio 5403

En el plano cartesiano identificado con $\mathbb{C}$, un punto M se representa por su afijo z.

1. Dibujar los siguientes conjuntos y luego expresar en función de (x,y) $((z=x+iy))$:
   (i) $z+\bar{z}=1$ (ii) $z-\bar{z}=i$ (iii) $iz-i\bar{z}=1$
2. Dar la expresión analítica compleja de las siguientes transformaciones, luego calcular la imagen de i por estas transformaciones :

   (a) la rotación de centro $1+i$ y de ángulo $\frac{\pi}{3}$,

   (b) la simetría de eje la recta de ecuación $iz-i\bar{z}=1$,

   (c) la composición de las dos aplicaciones anteriores.

3. Sea f la transformación del plano definido analíticamente por $z'=(1+i)z+1$.

   (a) Determinar el conjunto de puntos invariantes por f.

   (b) Dar la expresión analítica para la transformación inversa de f.

   (c) Calcular la imagen por f del conjunto $z+\bar{z}=1$.

   (d) Escribir f como la composición de una homotecia y una isometría.

[002041]

Ejercicio 5404 Función numérica de Leibniz

Sea ABC un triángulo equilátero de lado a. ¿Cuáles son los puntos M del plano (ABC) tales que $MA^2+a^2=2(MB^2+MC^2)$?

Solución ▼ [004949]

Ejercicio 5405 Círculo circunscrito a un triángulo

Sea ABC un triángulo y $\mathscr{C}$ su círculo circunscrito. Sea M un punto del plano de coordenadas baricéntricas (x,y,z) en el sistema de referencia afín (ABC). Demostrar que : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0 \Leftrightarrow xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0$.

Solución ▼ [004950]

Ejercicio 5406 Círculo estable para una aplicación afín

Sea $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$ un círculo del plano y f una aplicación afín tal que $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Demostrar que f es una isometría de punto fijo O. [004951]

Ejercicio 5407 Punto equidistante de una familia de rectas

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la recta D_λ de ecuación cartesiana : $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$. Demostrar que existe un punto M_0 equidistante a todas las rectas D_λ.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [004952]

Ejercicio 5408 Bisectriz de dos rectas

Sean D, D' dos rectas distintas que se cruzan en O. Se denota $\mathscr{H} = \{M \text{ tal que } d(M,D) = d(M,D')\}$.

1. Demostrar que $\mathscr{H}$ es la unión de dos rectas perpendiculares (llamadas bisectrices de (D,D')).
2. Sea s una simetría ortogonal tal que $s(D) = D'$. Demostrar que el eje de s es una de las rectas de $\mathscr{H}$
3. Sea $\mathscr{C}$ un círculo del plano tangente a D. Demostrar que $\mathscr{C}$ es tangente a D y a D' si y solo si su centro pertenece a $\mathscr{H}$.

[004953]

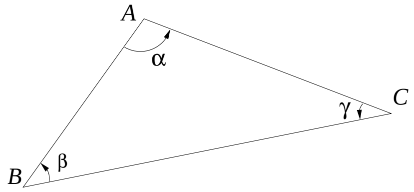
Ejercicio 5409 Tres figuras isométricas

Tres figuras F_1, F_2, F_3 se deducen unas de otras por rotaciones. Demostrar que existe una figura F de la que F_1, F_2, F_3 se deducen por simetrías axiales.

Solución ▼ [004954]

Ejercicio 5410 Producto de tres rotaciones

Sea ABC un triángulo de ángulos α, β, γ. Se denota ρ, ρ', ρ'' rotaciones alrededor A, B, C de ángulos α, β, γ, orientados según el dibujo :



¿Qué es $\rho \circ \rho' \circ \rho''$?

Solución ▼ [004955]

Ejercicio 5411 Subgrupos finitos de desplazamientos

1. Sea G un subgrupo finito de desplazamientos del plano.
   (a) Demostrar que G consta únicamente de rotaciones.

(b) Sean $f,g \in G$. Demostrar que f y g tienen el mismo centro. (Estudiar $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$).

(c) Probar finalmente que G es cíclico.

2. Sea G un subgrupo finito de orden p de isometrías del plano, no todas positivas.

   (a) Demostrar que G contiene tantas isometrías positivas como negativas.

   (b) Demostrar que G es un grupo diédrico (grupo de isotropía de un polígono regular).

[004956]

Ejercicio 5412 Central MP 2000

Sea E un plano euclidiano afín provisto de un sistema de referencia ortonormado de origen O. Sea A punto de coordenadas $(a,0)$. Para todo punto M, se define $M' = f(M)$ de la siguiente manera : A,M,M' están alineados y (MO) es ortogonal a $(M'O)$. Explicitar f en función de las coordenadas (x,y) de M. Dar su dominio de definición. Demostrar que f realiza una biyección entre el semidisco superior de diámetro $[AO]$ y el cuarto plano de ecuaciones $x<0, y>0$.

Solución ▼ [004957]

Ejercicio 5413 *IT

Determinar la proyección ortogonal del punto $M(x_0,y_0)$ en la recta (D) de ecuación $x+3y-5=0$ así como su simetría ortogonal.

Solución ▼ [005197]

Ejercicio 5414 *

Sea $(ABDC)$ un paralelogramo. Determinar las coordenadas de D en el sistema de referencia $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Solución ▼ [005198]

Ejercicio 5415 **I

1. h (resp. h') es la homotecia de centro Ω y de cociente k (resp. k') no nulo. Determinar la naturaleza y los elementos característicos de $h' \circ h$.
2. s (resp. s') es la simetría central de centro Ω (resp. Ω'). Determinar la naturaleza y los elementos característicos de $s' \circ s$.
3. s es la simetría central de centro Ω y t es la traslación de vector $\overrightarrow{u}$. Determinar la naturaleza y los elementos característicos de $t \circ s$.

Solución ▼ [005201]

Ejercicio 5416 Construcción de paralelas y perpendiculares

Se da una recta $\mathscr{D}$ y un punto $P \notin \mathscr{D}$. Trazar la paralela y la perpendicular a $\mathscr{D}$ pasando por P.

Indicación ▼ [007047]

Ejercicio 5417 Construcción del centro y las tangentes

Se da un círculo $\mathscr{C}$ (sin su centro).

1. Trazar su centro, si es posible de varias maneras.
2. Se da un punto P al exterior del círculo. Trazar las tangentes a $\mathscr{C}$ pasando por P.

3. La misma pregunta si P está en el círculo.

Indicación ▼ [007048]

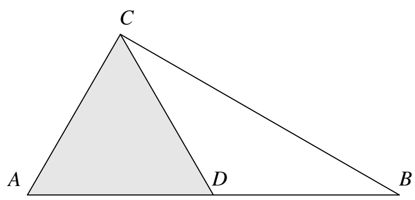
Ejercicio 5418 Triángulo del colegio, 1

Se dan dos puntos A y B. Construir un triángulo ABC rectángulo en C tal que $AB = 2AC$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007049]

Ejercicio 5419 Triángulo del colegio, 2

Sea ADC un triángulo equilátero y B el simétrico de A, con respecto a D. Demostrar que ABC es rectangular en C y determinar igualmente $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$.



Solución ▼ [007050]

Ejercicio 5420 Subdivisión y baricentros

Se da un segmento $[AB]$.

1. Dividir el segmento en cuatro.
2. Dividir el segmento en tres partes iguales sin usar el teorema de Tales.
3. Dividir el segmento en siete partes iguales.
4. Construir el baricentro de $(A,3)$ y $(B,4)$.

Indicación ▼ [007051]

Ejercicio 5421 Isobariocentro

1. Se da un cuadrilátero $ABCD$. Construir el isobaricentro de sus vértices. Construir el baricentro de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,3)$ y $(D,3)$.
2. Se da un pentágono cualquiera. Construir el isobaricentro de sus vértices.

Indicación ▼ Solución ▼ [007052]

Ejercicio 5422 Introducción a los números construibles

Se dan dos puntos O e I, con $OI = 1$. Un real r es construible, si podemos construir con regla y compás un punto M tal que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OI}$. El objetivo del ejercicio es demostrar que el conjunto de números construibles es un sub-cuerpo de $\mathbb{R}$ estable por raíz cuadrada.

1. Construir en la recta (OI) de puntos A, B y C tales que $OA = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB = \sqrt{2}$ y $OC = \sqrt{3}$.
2. (Construcción del producto y el inverso de dos números construibles.) Se dan dos puntos A y B alineados con O. Construir en la recta (AB) de puntos C y D tal que $OC = OA \times OB$ y $OD = \frac{OA}{OB}$.

3. (Construcción de la raíz cuadrada.) Sea A un punto en la semi-recta $[OI)$. Sea I' el simétrico de I, con respecto a O, sea $\mathscr{C}$ el círculo de diámetro $I'A$, y sea F una de las intersecciones del círculo $\mathscr{C}$, con la perpendicular a (OA) pasando por O. Demostrar que $OF = \sqrt{OA}$.

Indicación ▼ [007053]

Ejercicio 5423 Tangentes comunes de dos círculos

Se dan dos círculos $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ de radios $r < r'$, y de centros O y O', disjuntos y exteriores entre sí. Se admite que existen cuatro tangentes comunes a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. El objetivo es de construirlas.

1. (Análisis) Sea $\mathscr{D}$ una tangente común. Se denota A y A' los puntos de contacto de $\mathscr{D}$, con los dos círculos. ¿Qué se puede decir de la paralela a (AA') pasando por O y su intersección con $(O'A')$?
2. (Síntesis) Deducir una construcción del punto de intersección de estas dos rectas, luego estas dos rectas y finalmente $\mathscr{D}$. Trazar las cuatro tangentes comunes de esta manera.

Indicación ▼ Solución ▼ [007054]

Ejercicio 5424 Construcción de círculos, 1

1. Se da una recta $\mathscr{D}$ y un punto O fuera de la recta. Trazar el círculo de centro O y tangente a $\mathscr{D}$.
2. Se dan dos rectas $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$ secantes y un punto O de una bisectriz (y fuera de las rectas). Construir el círculo central O y tangente a las dos rectas.

Indicación ▼ [007055]

Ejercicio 5425 Construcción de círculos, 2

1. Se da una recta $\mathscr{D}$, un punto H sobre $\mathscr{D}$ y un punto A fuera. Trazar el círculo que pasa por A y tangente a la recta en H.
2. Se dan tres rectas, dos de las cuales son paralelas. Contar y construir los círculos tangentes a las tres rectas.

Indicación ▼ [007056]

Ejercicio 5426 Construcción de círculos

Se dan tres círculos distintos $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ del mismo radio y cuyos centros no están alineados. Construir dos círculos tangentes a $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$.

Indicación ▼ [007057]

Ejercicio 5427 Construcción de círculos de radio dado

En todo el ejercicio, se fija $R > 0$. Contar y construir los círculos de radio R tangente a :

1. dos círculos distintos $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$;
2. dos rectas secantes $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$;
3. un círculo $\mathscr{C}$ y una recta $\mathscr{D}$.

Solución ▼ [007058]

Ejercicio 5428

Sea $\mathscr{D}$ una recta y σ la reflexión ortogonal a lo largo de esta recta. Construir la imagen para σ de un punto, de un segmento, de una recta, de un círculo (si estos objetos se cruzan con el eje de simetría o no). [007077]

Ejercicio 5429 Construcciones

1. Se dan dos puntos A y B. Sea τ la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ y M un punto del plano. Construir $\tau(M)$.
2. Sea $\mathscr{D}$ una recta del plano, y σ la reflexión ortogonal de eje $\mathscr{D}$. Sea M un punto del plano. Construir $\sigma(M)$. Recíprocamente, sea σ una reflexión ortogonal, y se suponen dados un punto A y su imagen $\sigma(A)$. Construir $\mathscr{D}$.
3. Se da un punto O, y ϕ la homotecia de centro O y de cociente $5/8$. Sea M un punto del plano. Construir $\phi(M)$. Observación : esto funciona para todo cociente racional.
4. Se da un triángulo auxiliar ABC y se considera el ángulo $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Sea ρ la rotación de centro O y de ángulo α. Si M es un punto del plano, construir $\rho(M)$.

[007078]

Ejercicio 5430

1. ¿Bajo qué condición sobre cuatro puntos $P_1, \dots, P_4$ existe una homotecia h tal que $h(P_1) = P_2$ y $h(P_3) = P_4$?
2. Sea ϕ una homotecia. Se dan dos puntos A y B, así como sus imágenes $\phi(A)$ y $\phi(B)$. El centro de la homotecia no es dado. Construirla, aunque los cuatro puntos dados estén alineados..
3. Sea ρ una rotación del plano. Se dan dos puntos A y B, así como sus imágenes $\rho(A)$ y $\rho(B)$. Construir el centro de rotación, distinguiendo los casos.

[007079]

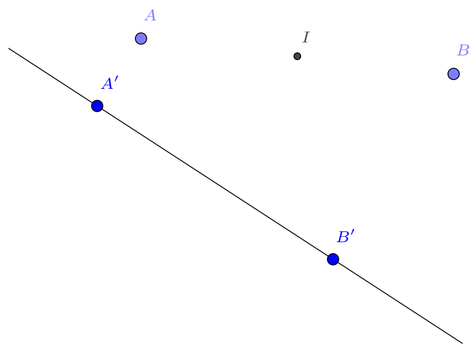
Ejercicio 5431 Polígono de puntos medios

Se da un número impar de puntos del plano $M_1, \dots, M_n$. ¿Existe un polígono $P_1, P_2, \dots, P_n$ tal que los M_i son los puntos medios de los lados del polígono ? Comenzar por $n = 3$. ¿Y si n es par ? En particular, si $n = 4$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que el problema admita una solución y determinar el conjunto de soluciones.

Indicación ▼ Solución ▼ [007080]

Ejercicio 5432 Trapecio rectangular

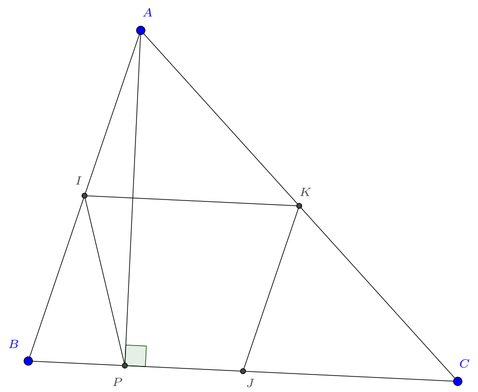
Sea $\mathscr{D}$ una recta, A y B dos puntos fuera de esta recta, y A', B' sus proyecciones ortogonales en $\mathscr{D}$, supuestamente distintos. Sea finalmente I la mitad de $[AB]$. Demostrar que $A'IB'$ es isósceles en I.



Indicación ▼   Solución ▼   [007081]

Ejercicio 5433 Trapecio isósceles

Sea ABC un triángulo, P el pie de la altura resultante de A e I, J, K los puntos medios de los lados $[AB]$, $[BC]$ y $[CA]$. Demostrar que el cuadrilátero $IPJK$ es un trapecio isósceles.



Solución ▼   [007082]

Por el teorema del punto medio, se tiene $(IK)||(PJ)$, por lo tanto $IPJK$ es un trapecio. Sea Q la mitad de $[IK]$. La perpendicular a (IK) en Q es entonces un eje de simetría de $IPJK$, por el teorema del punto medio aplicado a APJ. **Ejercicio 5434** Dos círculos son homotéticos

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos círculos de radios distintos. Demostrar que existen homotecias que transforman una en la otra. Dependiendo de la posición y el tamaño de los círculos, ¿cuántas homotecias hay ? Trazar sus centros.

Indicación ▼   Solución ▼   [007083]

Ejercicio 5435 Tangentes comunes de dos círculos

Se dan dos círculos. Determinar el número de tangentes comunes a los dos círculos y trazar estas tangentes.

Indicación ▼   [007084]

Ejercicio 5436 Cuadrado inscrito en un triángulo

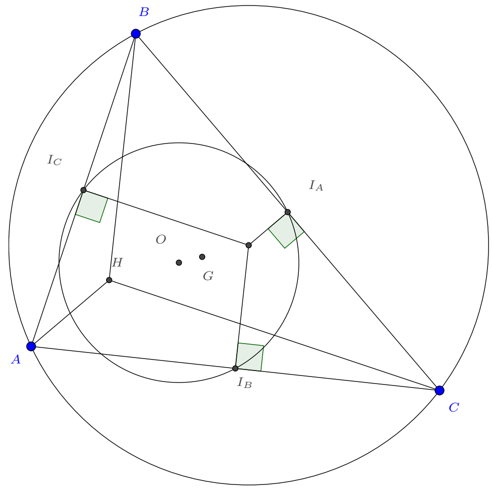
Sea ABC un triángulo. construir un cuadrado cuyo vértice pertenezca a $[AB]$, uno a $[AC]$ y dos vértices adyacentes pertenecen a $[BC]$.

Indicación ▼   Solución ▼   [007085]

Ejercicio 5437 Círculo de Euler

Sea ABC un triángulo. Se denota G, Ω y H el centro de gravedad, el centro del círculo circunscrito $\mathscr{C}$ y el ortocentro. Sea $\mathscr{C}'$ el círculo pasando por los puntos medios I_A, I_B y I_C de los lados de ABC.

1. Demostrar que el centro de $\mathscr{C}'$ pertenece a la recta $(G\Omega)$. Calcular su radio.
2. Demostrar que $\mathscr{C}'$ corta los segmentos que conectan los vértices con el ortocentro H en su medio.



Indicación ▼ Solución ▼ [007086]

Ejercicio 5438 Teorema del trapecio

Sean $[AB]$ y $[CD]$ dos segmentos paralelos de diferentes longitudes. Demostrar que existen homotecias que transforman una en la otra. ¿Cuántos hay de tales homotecias ? Trazar sus centros. Demostrar que la recta que conecta estos centros interseca los segmentos en su mitad. Aplicación : construir con solo la regla la simétrica de A, con respecto a B. Explicar cómo construir solo con regla cualquier baricentro con coeficientes racionales de A y de B. [007087]

Ejercicio 5439 Aplicación del teorema del trapecio

Sea $\mathscr{D}$ una recta, A y B dos puntos distintos que no están en esta recta, y A' el simétrico de A, con respecto a $\mathscr{D}$. Se supone que $A'B$ no es paralela a $\mathscr{D}$. Construir con una regla solo la simétrica B' de B, con respecto a $\mathscr{D}$.

Indicación ▼ [007088]

Ejercicio 5440 Aplicación del teorema del trapecio, bis

Sean dos rectas paralelas distintas $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$, y P un punto que no está en estas rectas. Construir con solo regla la recta que pasa por P y paralela a los otras dos. [007089]

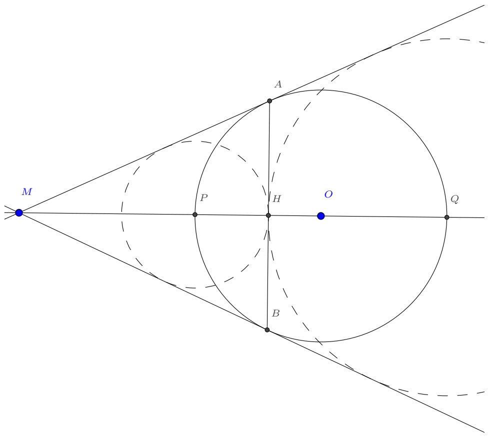
Ejercicio 5441 ¿Donde está el centro ?

Sea $ABCD$ un paralelogramo, y M un punto en la diagonal (BD). Sea I el simétrico de C, con respecto a M. Sea E la proyección de I sobre (AB), paralelamente a (AD), y F la proyección de I sobre (AD), paralelamente a (AB). Demostrar que E, M y F están alineados.

Indicación ▼ [007090]

Ejercicio 5442 Tangentes comunes a varios círculos

Se da un círculo $\mathscr{C}$ (de centro O), un punto M al exterior del círculo, las dos tangentes $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$ a $\mathscr{C}$ pasando por M. Se denota A y B los puntos de tangencia. El círculo $\mathscr{C}$ corta (MO) en dos puntos P y Q. Por otra parte, sea H la intersección de la cuerda $[AB]$, con (OM). Usando homotecias, demostrar que las circunferencias de los centros P y Q y pasando por H son tangentes a $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$.



[007091]

Ejercicio 5443

Se dan tres círculos disjuntos, de rayos distintos y fuera uno del otro. Cada uno de los tres pares de círculos proporciona dos tangentes comunes exteriores que se intersecan en un punto. Demostrar que estos tres puntos están alineados.

Indicación ▼ [007092]

Ejercicio 5444

Sea $ABCD$ un rectángulo y M un punto del plano. Se denota C' el proyectado ortogonal de C sobre (AM), D' el proyectado ortogonal de D sobre (BM) y M' el proyectado ortogonal de M sobre (AB). En fin, se denota I el punto de intersección de las rectas (CC') y (DD'). Demostrar que los puntos M, M' e I están alineados.

Indicación ▼ [007093]

Ejercicio 5445 Teorema de Pappus, versión afín

Sean D y D' dos rectas. Sean A,B,C tres puntos en D, y A', B' y C' tres puntos en D'. Si $(AB')||(BC')$ y $(BA')||(CB')$, entonces $(AA')||(CC')$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007094]

Ejercicio 5446 Teorema de Desargues, versión afín

1. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos (no aplanado) sin vértice común. Demostrar que se deducen entre sí por homotecia o traslación si y solo si sus lados son paralelos.
2. (Aplicación) Se dan dos rectas que se cortan en un punto O fuera de la hoja, así como un punto M fuera de estas rectas. Trazar la recta (OM).

Indicación ▼ [007095]

Ejercicio 5447

Sean f y g dos homotecias con la misma razón y centros distintos. Determinar la naturaleza de $f\circ g^{-1}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007096]

Ejercicio 5448 Cuerda de longitud fija

Sea $\mathscr{C}$ un círculo y D una recta. Construir una recta paralela a D cortando el círculo $\mathscr{C}$ en dos puntos situados a distancia a dada (inferior de diámetro).

Indicación ▼ Solución ▼ [007097]

Ejercicio 5449 Círculo tangente a dos rectas y que pasa por un punto

Se dan dos rectas paralelas y un punto A entre las dos rectas. Contar y trazar los círculos que pasan por A y tangentes a las dos rectas.

Indicación ▼ Solución ▼ [007098]

Ejercicio 5450

1. Se dan dos rectas paralelas y un punto A entre las dos rectas. Contar y trazar los círculos que pasan por A y son Tangentes a las dos rectas.
2. Se dan dos rectas secantes y un punto A no perteneciente a las dos rectas. Contar y trazar los círculos que pasan por A y tangentes a las dos rectas.

Indicación ▼ Solución ▼ [007099]

Ejercicio 5451 Permutación cíclica

Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano tales que tres de ellos nunca están alineados. Dar una condición necesaria y suficiente en $ABCD$, para que exista una transformación afín f del plano tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ y $f(D) = A$. Demostrar que tal transformación, si existe, es necesariamente de orden cuatro en el grupo afín.

Indicación ▼ [007100]

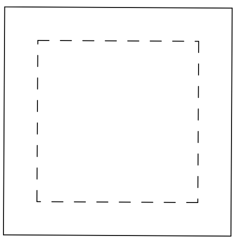
Ejercicio 5452 Minimización

Sean C y C' dos círculos secantes de centros O y O', y A uno de sus puntos de intersección. Una recta D pasando por A interseca los dos círculos en M y M'. Determinar la posición de la recta que maximiza la distancia MM' y calcular el máximo.

Indicación ▼ Solución ▼ [007101]

Ejercicio 5453 Claustro

Se da un cuadrado, y se busca construir un cuadrado con el mismo centro, con lados paralelos, y de área dos veces más pequeña, como a continuación :



1. (Pregunta preliminar) Sea $\mathscr{C}$ un círculo. Demostrar que un cuadrado circunscrito al círculo tiene el doble de área que un cuadrado inscrito en el círculo.
2. Deducir una solución al problema inicial.

Indicación ▼ Solución ▼ [007102]

Ejercicio 5454 Construcción del octágono regular

Construir un octágono regular inscrito en un cuadrado dado (es decir, un octágono con cuatro de los ocho lados descansando sobre los lados del cuadrado).

Indicación ▼ Solución ▼ [007103]

Ejercicio 5455 Cuadrado invisible

Se considera un cuadrado $ABCD$ y se colocan cuatro puntos E, F, G, y H a los lados de este cuadrado, fuera de los vértices. Después, se borra el cuadrado. Considerando una rotación y una traslación, reconstruir el cuadrado.

Indicación ▼ Solución ▼ [007104]

Ejercicio 5456

Sobre los lados $[AB]$ y $[BC]$ de un cuadrado directo $ABCD$, se colocan puntos M y N verificando $AM = BN$. Sea H el punto de intersección de las rectas (AN) y (CM). Demostrar que H es el ortocentro del triángulo DMN.

Solución ▼ [007105]

Ejercicio 5457

Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O, y $OPQR$ un segundo cuadrado del mismo tamaño. Calcular el área de la intersección de estos dos cuadrados con base en el área de $ABCD$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007106]

Ejercicio 5458

Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O, y M un punto en (AB). A partir de M, se construye el triángulo isósceles OMN, rectángulo en O. Demostrar que los puntos B, C y N están alineados.

Indicación ▼ [007107]

Ejercicio 5459

Sea BOA un triángulo indirecto cualquiera, OAC y OEB dos triángulos rectángulos isósceles en O directos. Demostrar que $ACEB$ es un pseudo-cuadrado, es decir que las rectas (AE) y (BC) son perpendiculares y que $BC = AE$.

Indicación ▼ [007108]

Ejercicio 5460

Sea BOA un triángulo isósceles indirecto en O, OAC y OEB dos triángulos equiláteros directos. Demostrar que $BC = AE$ y comprobar que el ángulo de las rectas (BC) y (AE) es de $\pi/3$.

Indicación ▼ [007109]

Ejercicio 5461

Sea $ABCD$ un cuadrado, E el simétrico de C, con respecto a D, I la mitad de $[BC]$ y J la mitad de $[DE]$. Demostrar que el triángulo AIJ es un rectángulo isósceles en A.

Indicación ▼ [007110]

Ejercicio 5462

Se consideran tres rectas paralelas D_1, D_2 y D_3. Construir un triángulo equilátero cuyos vértices pertenecen respectivamente a D_1, D_2 y D_3.

Indicación ▼ [007111]

Ejercicio 5463

Indicación ▼ Solución ▼ [007112]

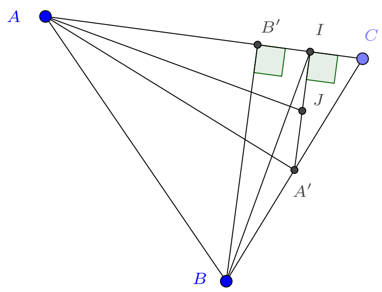
Ejercicio 5464

Sea ABC un triángulo y D el proyectado ortogonal de A sobre (BC). Se consideran puntos E y F perteneciendo a una recta que pasa por D tales que (AE) y (BE) son perpendiculares así como (AF) y (CF). En fin, se denotan M y N los puntos medios respectivos de $[BC]$ y $[EF]$. Demostrar que (AN) y (NM) son perpendiculares.

Indicación ▼ [007113]

Ejercicio 5465

Sea ABC un triángulo isósceles en A, A' y B' los pies de las alturas desde A y B, I la mitad de $[CB']$ y J la mitad de $[A'I]$. Demostrar que (BI) y (AJ) son ortogonales.



Indicación ▼ Solución ▼ [007114]

Ejercicio 5466

Sea ABC un triángulo rectángulo no isósceles directo. Sean ARB, BPC, CQA los triángulos isósceles rectángulos en P, Q y R, interiores a ABC.

1. Demostrar que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{QR}$ tienen la misma norma y son ortogonales.
2. Demostrar que (AP), (BQ) y (CE) son concurrentes.

Indicación ▼ [007115]

Ejercicio 5467

Sea un cuadrilátero convexo $ABCD$. Los puntos E, F, G, H son tales que AEB, BFC, CGD, DHA son rectángulos isósceles en respectivamente E, F, G, H. Los triángulos AEB y CGD están hacia el exterior ABC, los triángulos BFC y DHA hacia el interior. Demostrar que $EFGH$ es un paralelogramo.

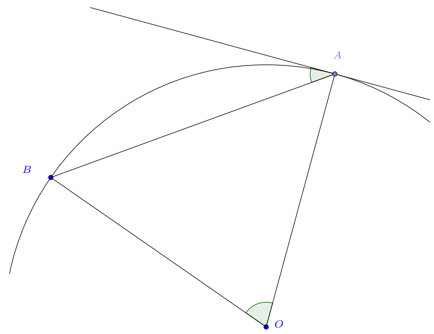
Indicación ▼ Solución ▼ [007116]

Ejercicio 5468

Sean $ABCD$ y $AB'C'D'$ cuadrados de la misma orientación y centros respectivos O y O'. Se denota R y S son los puntos medios respectivos de $[BD']$ y $[B'D]$. Demostrar que $OSO'R$ es un cuadrado. [007117]

Ejercicio 5469 Ángulo inscrito en el caso límite

Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O, $[AB]$ una cuerda y $\mathscr{T}$ la tangente de A. Entonces $(\mathscr{T}, AB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$.



Indicación ▼ Solución ▼ [007118]

Ejercicio 5470 Construcción del arco capaz

Construir el lugar de los puntos M tales que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha$.

Solución ▼ [007119]

Ejercicio 5471 Octágono apoyado en un segmento

Construir un octágono convexo regular cuyo lado sea un segmento $[AB]$ dado.

Indicación ▼ Solución ▼ [007120]

Ejercicio 5472 Trapecios inscribibles

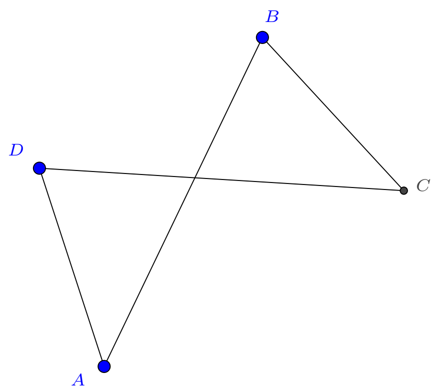
Demostrar que un trapezoide es isósceles si y solo si se puede escribir.

Solución ▼ [007121]

Ejercicio 5473 Antiparalelogramo

Un antiparalelogramo es un cuadrilátero cruzado cuyos lados opuestos son dos a dos de la misma longitud. Sea $ABCD$ un antiparalelogramo. Demostrar las afirmaciones siguientes.

1. Los ángulos opuestos tienen la misma medida.
2. Las diagonales (AC) y (BD) son paralelas.
3. La mediatriz de las diagonales es un eje de simetría de $ABCD$.
4. Dos lados opuestos tienen su punto de intersección ubicado en esta bisectriz perpendicular.



5. El cuadrilátero convexo $ADBC$ formado por los dos lados no cruzados y las diagonales es un trapecio isósceles.

6. $ABCD$ es inscribible.

[007122]

Ejercicio 5474 Teorema de Reim

Solución ▼ [007123]

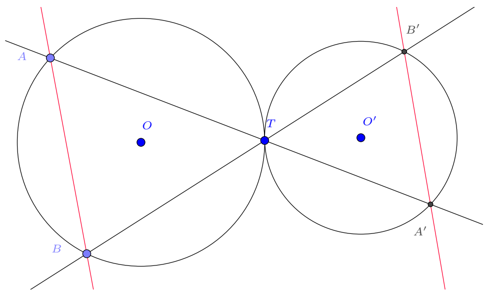
Ejercicio 5475 Bisectrices y círculo circunscrito

Las bisectrices interior y exterior en A de un triángulo ABC no isósceles en A intersecan el círculo Γ circunscrito a este triángulo respectivamente en I y J. Demostrar que I y J pertenecen a la mediatriz de $[BC]$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007124]

Ejercicio 5476 Caso límite del teorema de Reim

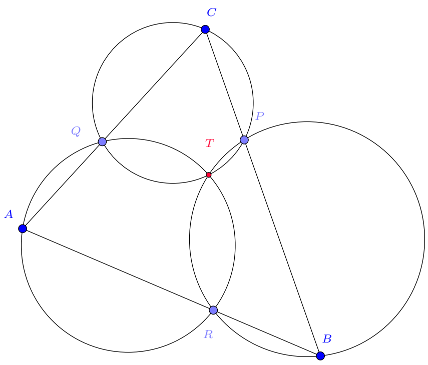
Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos círculos tangentes en un punto T, y $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ dos rectas secantes en T. Se denota A y A' (resp. B y B') los puntos de intersección de $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) con $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. Demostrar que las rectas (AB) y $(A'B')$ son paralelas.



Indicación ▼ Solución ▼ [007125]

Ejercicio 5477 Teorema de los tres círculos de Miquel

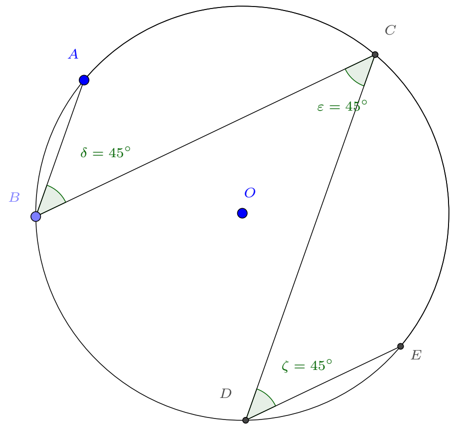
Sea ABC un triángulo recto, y P, Q, R tres puntos situados en $[BC]$, $[CA]$ y $[AB]$ respectivamente, y distintos de los vértices. Demostrar que las circunferencias circunscritas de ARQ, BPR y CQP son concurrentes.



Indicación ▼ Solución ▼ [007126]

Ejercicio 5478 Línea rota

Una línea quebrada $ABCDE$ formada de ángulos de 45 grados está inscrito en un círculo. Divide el disco en dos regiones, cada una en un lado diferente de la línea. Calcular el área de estas dos regiones.



Indicación ▼ Solución ▼ [007127]

Ejercicio 5479 Pentagrama

Sea $\mathscr{C}$ un círculo, $[BC]$ una cuerda, y $A \in \mathscr{C}$ tales que los arcos AB y AC sean iguales. Sean $[AD]$ y $[AE]$ otras dos cuerdas de extremos A, que cortan $[BC]$ en F y en G, respectivamente. Demostrar que $DEFG$ es inscribible.

Solución ▼ [007128]

Ejercicio 5480

Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos círculos que se cortan en P y Q, y considera una recta $\mathscr{D}$ corte $\mathscr{C}_1$ en A y B, y cortando $\mathscr{C}_2$ en C y D. Demostrar que $(PA, PC) = (DQ, BQ)$. Más precisamente, demostrar que los ángulos $\widehat{APC}$ y $\widehat{DQB}$ son iguales si $\mathscr{D}$ corta el segmento $[PQ]$ y que A, C, B y D están alineados en este orden. ¿Qué se puede decir en los otros casos ?

Solución ▼ [007129]

Ejercicio 5481

Se dan dos segmentos $[AB]$ y $[CD]$ no paralelos y de longitud diferente. Se supone que existe una similitud directa ϕ enviando A sobre C y B sobre D. El propósito del ejercicio es construir el centro O de esta similitud.

1. Demostrar que el ángulo de la similitud es $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.
2. Se denota $Q = (AB) \cap (CD)$. Demostrar que $AQCO$ es inscribible.
3. Terminar el razonamiento y construir O.
4. ¿Qué hacer si los segmentos son paralelos ? ¿De misma longitud ? Pensar en otros métodos para construir el centro, sin usar círculos.

Solución ▼ [007130]

Ejercicio 5482 Triángulo órtico

Sea ABC un triángulo no rectángulo y A', B', C' los pies de las alturas. Demostrar que las alturas de ABC son las bisectrices del triángulo $A'B'C'$, dicho *triángulo órtico*.

Indicación ▼ Solución ▼ [007131]

Ejercicio 5483 Ptolomeo, prueba geométrica en sentido directo

Se considera el enunciado siguiente :

Teorema 1 (Ptolomeo)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, directo. Entonces A,B,C,D son cocíclicos si y solo si $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$.*

El objetivo de este ejercicio es demostrar el sentido directo del teorema. Se supone A,B,C,D cocíclicos.

1. Hacer una figura aproximada y demostrar que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ y tres relaciones semejantes en otros ángulos.
2. Sea K el punto de la diagonal $[AC]$ tal que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Hacer una figura y construir K explicando (hacer la figura de tal manera que K sea legible).
3. Demostrar que los triángulos ABK y DBC son semejantes, del mismo modo ABD y KBC, por similitudes cuyos centros y relaciones se deben especificar. Nota : es suficiente para esto demostrar que tienen los mismos ángulos. Deducir relaciones en los lados de estos triángulos.
4. Concluir.

Indicación ▼ Solución ▼ [007132]

Ejercicio 5484 Una aplicación de Ptolomeo

Sea ABC un triángulo equilátero y M un punto del círculo circunscrito que pertenece al arco BC no conteniendo a A. Demostrar que $MA = MB + MC$. [007133]

Ejercicio 5485 Trisección

1. Sea Γ un círculo, O su centro y M un punto que no pertenece a Γ. Dos secantes salidas de M cortan Γ respectivamente en A y B, y en C y D. Demostrar la igualdad :
$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}).$$
2. Sean A y B dos puntos de un círculo Γ de centro O y de radio r. Sobre la recta (OA), sea C el punto fuera del círculo tal que la recta (CB) interseca el círculo en un punto M verificando $MC = r$. (No se pide construir este punto, colóquelo aproximadamente en la figura.) Demostrar que $\widehat{ACB} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

Indicación ▼ [007134]

Ejercicio 5486 Problema « RPP »

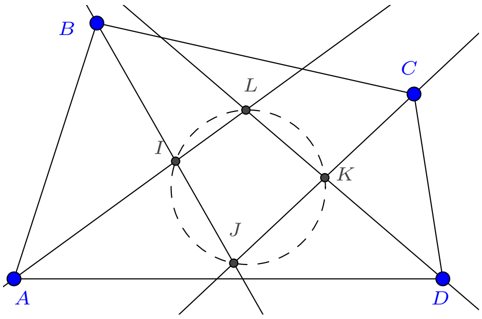
Sea $\mathscr{D}$ una recta y A y B dos puntos situados de un solo lado de $\mathscr{D}$. El objetivo es construir una circunferencia que pase por los dos puntos y sea tangente a la recta.

1. Construir un círculo tal si las rectas (AB) y $\mathscr{D}$ son paralelas. En lo que sigue, se supone que son secantes.
2. (Analizar) Sea $\mathscr{C}$ tal círculo y T su punto de tangencia con $\mathscr{D}$. Demostrar que $(AB,AT) = (TB,\mathscr{D})$.
3. (Síntesis) Sea I el punto de intersección de (AB), con $\mathscr{D}$, B' el simétrico de B, con respecto a I, y B'' el simétrico de B, con respecto a $\mathscr{D}$. Demostrar que el círculo circunscrito de $AB'B''$ (de diámetro $[AB']$ en el caso donde $B' = B''$) corta $\mathscr{D}$ en dos puntos que son adecuados para la elección de T.

[007135]

Ejercicio 5487 Bisectrices de un cuadrilátero convexo

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Se denota $\mathscr{B}_A$ (resp. $\mathscr{B}_B$, $\mathscr{B}_C$, $\mathscr{B}_D$) la bisectriz interior en A (resp. En B, C, D). Sean $I = \mathscr{B}_A \cap \mathscr{B}_B$, $J = \mathscr{B}_B \cap \mathscr{B}_C$, $K = \mathscr{B}_C \cap \mathscr{B}_D$ y $L = \mathscr{B}_D \cap \mathscr{B}_A$. Demostrar que $IJKL$ es inscribible.



Indicación ▼ Solución ▼ [007136]

Ejercicio 5488 Mediatrices de un cuadrilátero convexo

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. ¿Qué pasa con el cuadrilátero formado por las intersecciones de las mediatrices de los cuatro lados ? En particular, ¿qué puede decir si $ABCD$ es un paralelogramo ? ¿Un diamante ?

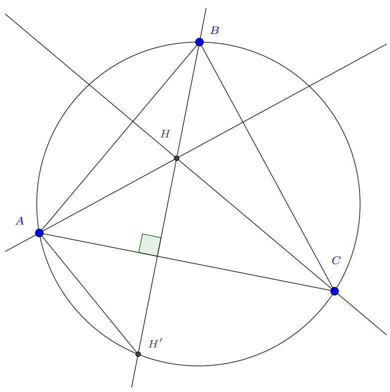
Solución ▼ [007137]

Ejercicio 5489 Cuadrado a determinar

Se considera un cuadrado $ABCD$ y se colocan cuatro puntos E, F, G, y H a los lados de este cuadrado (fuera de los vértices). Después, se borra el cuadrado. El objetivo es reconstruir el cuadrado usando el teorema del ángulo inscrito. Si A es el vértice entre E y F, Demostrar que la diagonal del cuadrado saliendo de A pasa por la intersección del círculo de diámetro $[EF]$, con la mediatriz de $[EF]$. Deducir una construcción de las diagonales del cuadrado, y luego del cuadrado. [007138]

Ejercicio 5490 Simétrico del ortocentro

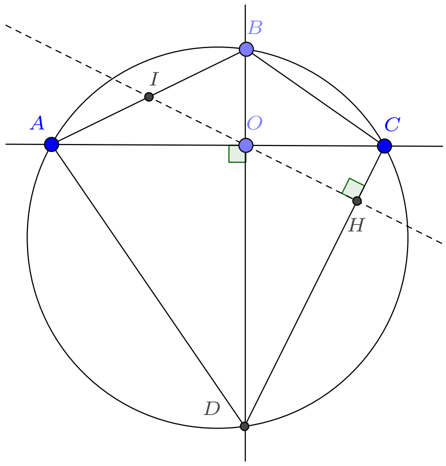
Sea ABC un triángulo, H su ortocentro y $\mathscr{C}$ su círculo circunscrito. La altura saliendo de B interseca $\mathscr{C}$ en H'. Demostrar que H' es la simétrica de H, con respecto a la recta (AC).



Indicación ▼ Solución ▼ [007139]

Ejercicio 5491 Un teorema de Brahmagupta

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito cuyas diagonales son perpendiculares, y sea O su punto de intersección. Sea H el proyectado ortogonal de O sobre $[CD]$, e I la intersección de (OH), con $[AB]$. El objetivo es demostrar que I es el punto medio de $[AB]$.



1. Demostrar que es suficiente establecer que $IO = IA$.
2. Concluir.

Indicación ▼ Solución ▼ [007140]

Ejercicio 5492 Potencia de un punto con respecto a un círculo

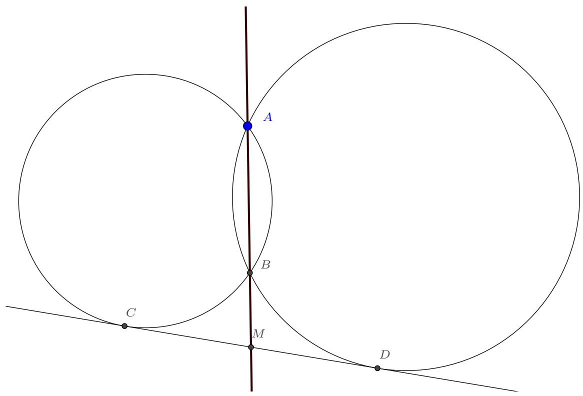
Sea $\mathscr{C}$ un círculo y P un punto del plano.

1. Sea $\mathscr{D}$ una recta que pasa por P y cortando el círculo en dos puntos A y B. Demostrar que la cantidad $\overline{PA} \cdot \overline{PB} := \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ no depende de la recta elegida. Se llama la *potencia del punto P, con respecto al círculo* $\mathscr{C}$, y se denota $p_{\mathscr{C}}(P)$.
2. Con las mismas notaciones, si P está en el exterior del círculo y $\mathscr{D}$ es tangente al círculo en T, demostrar que $p_{\mathscr{C}}(P) = PT^2$.
3. Demostrar que $p_{\mathscr{C}}(P)$ vale $OP^2 - r^2$, donde r es el radio del círculo.
4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinar el conjunto de puntos cuya potencia con respecto al círculo vale λ.
5. Recíprocamente, sean (AB) y (CD) dos rectas que se cortan en P. Se supone que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. Demostrar que $ABCD$ es inscribible.

Solución ▼ [007141]

Ejercicio 5493

Sean dos círculos que se cortan en dos puntos distintos A y B, y $\mathscr{D}$ una tangente común, tocando los círculos en C y D. Demostrar que (AB) corta $[CD]$ en su punto medio.



Indicación ▼ Solución ▼ [007142]

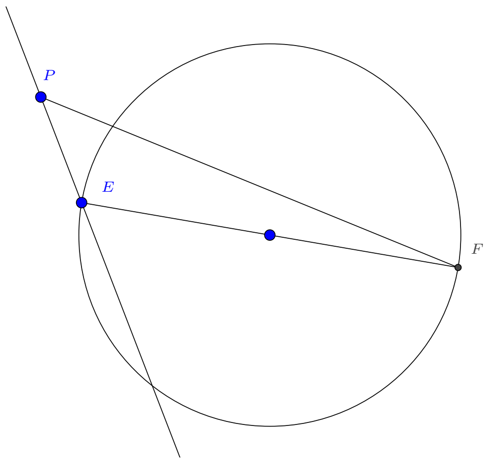
Ejercicio 5494

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y H el pie de la altura resultante de A. Demostrar $AH^2 = HB \cdot HC$.

Indicación ▼ Solución ▼ [007143]

Ejercicio 5495

Sea $\mathscr{C}$ un círculo y P un punto del plano. Se considera una recta $\mathscr{D}$ pasando por P y cortando el círculo en al menos un punto E. Sea F el punto diametralmente opuesto a E. Demostrar que $p_{\mathscr{C}}(P) = \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$.



Indicación ▼ Solución ▼ [007144]

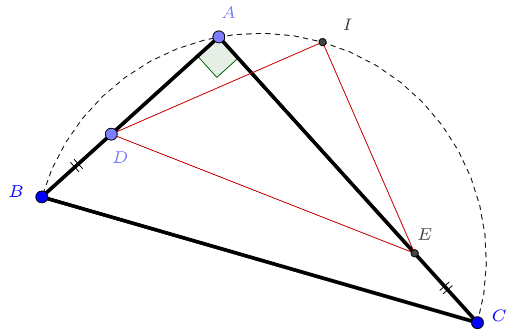
Ejercicio 5496 Número áureo

Sea $ABCD$ un cuadrado directo de lado 1, y sean E y F dos puntos tales que $AEFD$ sea un rectángulo directo, con $AE > 1$. En lo que sigue se denota $l = AE$. Demostrar que existe una similitud directa s enviando A (resp. E, F y D) sobre C (resp. B, E y F) si y solo si l es igual a la proporción áurea $(1+\sqrt{5})/2$.

Solución ▼ [007152]

Ejercicio 5497

Sea ABC un triángulo rectángulo en A y no isósceles. La mediatriz de $[BC]$ interseca el semicírculo circunscrito en I. Se consideran dos puntos $D \in [AB]$ y $E \in [AC]$ tales que $BD = CE$. Demostrar que IDE es un rectángulo isósceles en I.



Indicación ▼ Solución ▼ [007153]

Ejercicio 5498

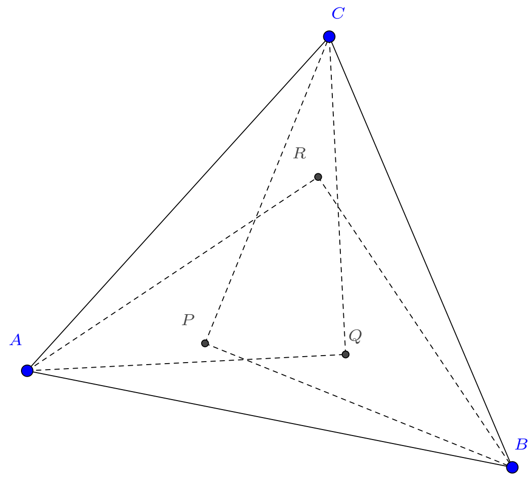
Sean A y B_0 dos puntos y sea s la similitud directa de centro A, de razón $\frac{1}{2}$ y de ángulo $\frac{3\pi}{4}$. Se considera la sucesión de puntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la relación de recurrencia $\forall n \in \mathbb{N}, : B_{n+1} = s(B_n)$.

1. Hacer una figura con $AB_0 = 8$ y colocar los puntos B_n hasta $n = 4$.
2. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, los triángulos AB_nB_{n+1} y $AB_{n+1}B_{n+2}$ son semejantes.
3. En lo que sigue, se considera el subconjunto del plano $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [B_nB_{n+1}]$. Es una espiral poliédrica. ¿Su longitud es finita o infinita ? En el primer caso, calcular su longitud.

Solución ▼ [007154]

Ejercicio 5499 Punto interior de Vecten

Sea ABC un triángulo directo isósceles no rectángulo, y sea P (resp. Q, R) tal que BCP (resp. CAQ, ABR) sea rectángulo isósceles directo en P (resp. Q y R).

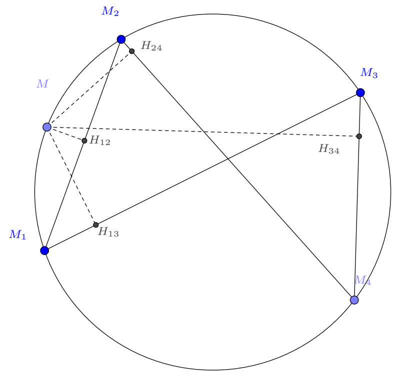


1. Demostrar que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{QR}$ son ortogonales y de la misma norma.
2. Demostrar que las rectas (AP), (BQ) y (CE) son concurrentes.

Indicación ▼ Solución ▼ [007155]

Ejercicio 5500

Sean M, M_1, M_2, M_3 y M_4 cinco puntos distintos en un círculo $\mathscr{C}$. Demostrar que el producto de las distancias de M a las rectas (M_1M_2) y (M_3M_4) es igual al producto de las distancias de M a las rectas (M_1M_3) y (M_2M_4).



Indicación ▼ Solución ▼ [007156]

Ejercicio 5501

1. Sea $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^2$ la gráfica de la función seno. Describir las isometrías de $\mathscr{S}$.
2. La misma pregunta para la gráfica de la función tangente.

Indicación ▼ Solución ▼ [007157]

Ejercicio 5502 Isometrías de un triángulo

Sea $\mathscr{T} = ABC$ un triángulo y sea g una isometría de $\mathscr{T}$, es decir una isometría del plano tal que $g(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.

1. Demostrar que g envía vértices a vértices.
2. Demostrar que g admite al menos un punto fijo.
3. Demostrar que g no es ni una traslación ni una reflexión deslizada.

Solución ▼ [007158]

Ejercicio 5503 Isometrías de un triángulo equilátero

Sea $\mathscr{T} = ABC$ un triángulo equilátero y $G = \mathrm{Isom}(\mathscr{T})$ su grupo de isometrías.

1. Encontrar seis isometrías dejando $\mathscr{T}$ invariante.
2. Demostrar que una isometría de $\mathscr{T}$ debe enviar un vértice a un vértice.
3. Escribir un morfismo inyectivo ϕ entre G y $\mathfrak{S}_3$.
4. Demostrar que es biyectiva.
5. Describir el grupo $H = \mathrm{Isom}^+(\mathscr{T})$ y escribir un isomorfismo entre este grupo y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. ¿A qué subgrupo de $\mathfrak{S}_3$ corresponde H ?

Solución ▼ [007159]

Ejercicio 5504 Isometrías de un triángulo isósceles

Sea $\mathscr{T} = ABC$ un triángulo isósceles no equilátero. Determinar su grupo de isometrías así como un isomorfismo entre este grupo y un grupo clásico.

Solución ▼ [007160]

Ejercicio 5505 Isometrías de un cuadrado

Sea $\mathscr{C} = ABCD$ un cuadrado pleno del plano (es decir, la envolvente convexa de sus vértices) y O su centro.

1. Sea $g \in \operatorname{Isom}(\mathscr{C})$ una isometría del cuadrado, es decir una isometría del plano que conserva el cuadrado. Demostrar que permuta los vértices, luego que es una rotación de centro O o bien una reflexión de eje que contiene O.
2. Determinar completamente el grupo $G = \operatorname{Isom}(\mathscr{C})$.
3. Describir el grupo $H = \operatorname{Isom}^+(\mathscr{C})$ de isometrías directas del cuadrado y escribir un isomorfismo entre este grupo y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [007161]

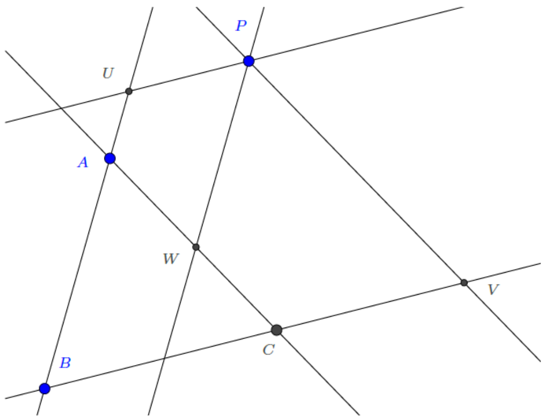
Ejercicio 5506 Isometrías de un rectángulo

Sea $\mathscr{C} = ABCD$ un rectángulo pleno, no cuadrado. Determinar su grupo de isometrías, y especificar un isomorfismo entre este grupo y un grupo usual abstracto.

Solución ▼ [007162]

Ejercicio 5507

Sea ABC un triángulo equilátero directo, y P un punto que no pertenece a las rectas (AB), (BC) y (CA). La paralela a (BC) (resp. a (CA) y (AB)) pasando por P corta (AB) (resp. (BC) y (CA)) en U (resp. V, W).

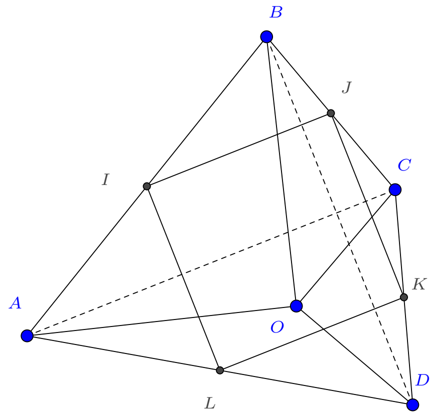


1. Demostrar que $AUPW$ y $PCVW$ son inscribibles.
2. Hacer una lista de igualdades de ángulos (de rectas) que se puede deducir.
3. Hacer una (grand) figura en el caso donde P está en el círculo circunscrito a ABC.
4. Demostrar que los puntos U, V y W están alineados si y solo si $ABCP$ es inscribible.

Indicación ▼ Solución ▼ [007165]

Ejercicio 5508

Sean AOB y COD dos triángulos directos, rectángulos isósceles en O. Sean I, J, K y L los puntos medios de los segmentos $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ y $[DA]$.



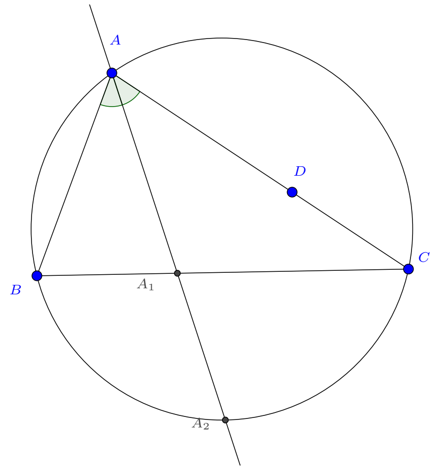
1. Demostrar que $(AC) \perp (BD)$ y que $AC = BD$.
2. Demostrar que $IJKL$ es un cuadrado.

Solución ▼ [007167]

Ejercicio 5509

Sea ABC un triángulo no isósceles A. la bisectriz interior Δ de $\widehat{BAC}$ corta $[BC]$ en A_1 y el círculo circunscrito a ABC en A_2.

1. Sea D el simétrico de B, con respecto a Δ. Justificar que $D \in (AC)$.
2. Demostrar que A_1A_2CD es inscribible.
3. Demostrar que $AA_1 \cdot AA_2 = AB \cdot AC$.



Solución ▼ [007168]

Ejercicio 5510

Sean P, Q, R tres puntos del plano. En este ejercicio, se denota $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ el producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

1. Demostrar que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se a

$$(\overrightarrow{QP} + \lambda \overrightarrow{QR})^2 = \overrightarrow{QP}^2 + 2\lambda \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} + \lambda^2 \overrightarrow{QR}^2.$$

2. Considerando el discriminante del polinomio (en la variable λ) de recta en la igualdad anterior, demostrar que
$$\left|\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}\right| \leqslant QP\times QR.$$
3. Demostrar que
$$\overrightarrow{PR}^2 = \overrightarrow{QP}^2 - 2\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2.$$
4. Deducir que
$$PR \leqslant PQ + QR.$$
5. Demostrar que $PR = PQ + QR$ si y solo si $Q \in [PR]$.
6. Se consideran ahora cuatro puntos P, Q, R y S. Demostrar que
$$PS \leqslant PQ + QR + RS$$
y caracterizar las configuraciones de cuatro puntos P, Q, R y S que verifican la igualdad $PS = PQ + QR + RS$.

[007249]

Ejercicio 5511 Diagrama de Voronoï. Médiatrice, diagrama de 2 puntos

Un *diagrama de Voronoï* es una familia de partes del plano (o del espacio, pero en este ejercicio nos limitaremos al plano) y puntos asociados tales que :
— cada parte del plano tiene un único punto asociado, que está contenido dentro ;
— cada parte es exactamente igual al conjunto de puntos del plano que está más cerca del punto asociado a esta parte que a los puntos asociados a las otras partes.

Es decir, es una familia $(A_i, P_i)_{i\in I}$, donde :
— I es un conjunto ;
— para todo $i \in I$, A_i es una parte (i.e. un subconjunto) del plano y $P_i \in A_i$;
— para todo $i \in I$, se tiene (denotando $\mathscr{P}$ el plano) :
$$A_i = \left\{ Q \in \mathscr{P} \,\middle/\, \forall j \in I \setminus \{i\}\ P_iQ \leqslant P_jQ \right\}.$$

Las partes A_i se llaman los *células* del diagrama de Voronoï. El punto P_i asociada a la célula A_i es llamado el *germen* de la celda. Los diagramas de Voronoï son una herramienta útil para representar las zonas de cobertura de antenas radio, o para estudiar la ubicación de escuelas, de hospitales, oficinas de correo, etc, en una región.

1. Sean A y B dos puntos del plano. Demostrar que el conjunto de puntos equidistantes de A y B (dicho de otro modo, el conjunto de puntos P del plano tal que $PA = PB$) es una recta (que se denota Δ, y que se llama la *mediatriz* del segmento $[AB]$).
2. Demostrar que la recta Δ es ortogonal a la derecha (AB).
3. Demostrar que el conjunto de puntos P del plano tal que $PA \leqslant PB$ es el semiplano de frontera Δ conteniendo A.
4. ¿Qué es el diagrama de Voronoï de un conjunto de dos puntos distintos ?

[007250]

Ejercicio 5512 Diagrama de Voronoï

Sea $(A_i, P_i)_{i\in I}$ un diagrama de Voronoï. Si $i, j \in I$ con $i \neq j$, se denota $\Pi_{i,j}$ el semi-plano de frontera la mediatriz del segmento $[P_iP_j]$ y que contiene el punto P_i.

1. Demostrar que, para todo $i \in I$, se a :
$$A_i = \bigcap_{j \in I \setminus \{i\}} \Pi_{i,j}.$$
2. Dibujar el diagrama de Voronoï de tres puntos que forman un triángulo equilátero.

[007251]

Ejercicio 5513 Diagrama de Voronoï

1. ¿Qué pasa con la frontera entre dos celdas de Voronoï ?
2. ¿Que se puede decir del punto común a tres células de Voronoï, llamado vértice de Voronoï ?
3. ¿Qué pasa con el círculo centrado en un vértice de Voronoï y que pasa por un germen de una de las tres celdas ?
4. Añadir un punto al triángulo equilátero del ejercicio anterior, y trazar el nuevo diagrama de Voronoï.
5. Agregue un quinto punto muy cerca de un vértice de Voronoï y trazar el nuevo diagrama de Voronoï. ¿Todas las células han cambiado ?

[007252]

Ejercicio 5514 Convexidad de la células de Voronoï

Se dice que una parte X del plano (o del espacio) es *convexo* si verifica :
$$\forall (P,Q) \in X^2 \quad [PQ] \subset X,$$
dicho de otro modo, para todo par (P,Q) de puntos de X, el segmento $[PQ]$ entero está contenido en X.

1. Demostrar que una intersección de partes convexas del plano es convexa.
2. Deducir que las celdas de un diagrama de Voronoï son convexas.

[007253]

Ejercicio 5515

Se recuerda que un cuadrilátero de un espacio euclidiano E es un *paralelogramo* si sus diagonales se cortan en el punto medio, llamado centro del paralelogramo. Esta definición es también válida en dimensión 1 y para los casos en que dos vértices coincidan. (En estos casos, el paralelogramo es plano). Se dice que dos bipuntos (A,B) y (C,D) son *equipolentes* si el cuadrilátero $(ABDC)$ es un paralelogramo.

1. Verificar que para todo par de puntos (A,B), los bipuntos (A,B) y (A,B) son equipolentes. Se dice entonces que la relación de equipolencia es *reflexiva*.
2. Demostrar que para todo los bipuntos (A,B) y (C,D), si los bipuntos (A,B) y (C,D) son equipolentes entonces los bipuntos (C,D) y (A,B) lo son también. Se dice entonces que la relación de equipolencia es *simétrica*.
3. Demostrar que la relación de equipolencia es *transitiva*, es decir que para todo triplete (A,B), (C,D) y (F,G) de bipuntos, si los bipuntos (A,B) y (C,D) son equipolentes y si los bipuntos (C,D) y (F,G) son equipolentes entonces los bipuntos (A,B) y (F,G) lo son también. (Indicación : en el caso donde el cuadrilátero $(ABGF)$ no es plano, se puede considerar la recta que une los centros de los paralelogramos $(ABDC)$ y $(CDGF)$; en el caso donde el cuadrilátero $(ABGF)$ es plano, se puede usar el teorema de Tales.)

4. Se resumen las tres propiedades anteriores diciendo que la relación de equipolencia es *una relación de equivalencia*. La *clase de equipolencia* del bipunto (A,B) es por definición el conjunto de bipuntos equipolentes en (A,B). Se llama *vector* y se denota $\overrightarrow{AB}$. Si (C,D) es equipolente a (A,B), se dice que (C,D) es un *representante* de $\overrightarrow{AB}$. Demostrar que dado un punto A y un vector $\overrightarrow{u}$, existe un único punto B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Se denota $B = t_{\overrightarrow{u}}(A)$.
5. Dados un punto A y un representante (F,G) del vector $\overrightarrow{u}$, construir con regla y compás el punto $t_{\overrightarrow{u}}(A)$.
6. Demostrar que si dos bipuntos (A,B) y (C,D) son equipolentes, entonces los bipuntos (A,C) y (B,D) lo son también.
7. Se define la suma de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por el siguiente proceso :
   — Se escoge un punto A.
   — Se determina el punto B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
   — Se determina el punto C tal que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
   — Se define $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} := \overrightarrow{AC}$.
   Demostrar que la *suma* así definida es independiente de la elección del punto de base A, es decir demostrar que si elegimos otro punto A' como punto de base, el bipunto (A',C') construido entonces es equipolente en el bipunto (A,C) construido a partir del punto A. (Indicación : Se puede demostrar que (A,A') es equipolente a (C,C').)

[007254]

Ejercicio 5516

Construir con regla y compás un ángulo de medida $\pi/12$. [007258]

Ejercicio 5517

1. Se dice que un ángulo está inscrito en una circunferencia si su vértice pertenece a esta circunferencia. Demostrar el teorema de los ángulos inscritos : “Dos ángulos de vectores inscritos en un círculo intersecan el mismo arco de círculo son de igual medida”.
2. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos círculos que tienen dos puntos de intersección I y J. Sean A y M dos puntos distintos de $\mathscr{C}_1$ (y diferentes de I y J). Se denota B el punto de intersección de la recta (AJ), con $\mathscr{C}_2$ y N el punto de intersección de la recta (MJ), con $\mathscr{C}_2$.
   Considerando la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos AIB y MIN, demostrar que Mes $\widehat{AIB} =$ Mes $\widehat{MIN}$.

[007259]

Ejercicio 5518

Sea E un plano euclidiano orientado, dotado de un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ortonormado directo.

1. Sea n un entero natural superior a 3. Expresar usando funciones trigonométricas cos y sen, el perímetro p_n de un polígono regular a n lados inscritos en el círculo trigonométrico (es decir, el círculo de centro 0 y de radio 1.)
2. Se recuerda que para todo $\theta \in]0,\pi/2[$,
$$\theta \cos\theta \leqslant \operatorname{sen}\theta \leqslant \theta.$$
   Demostrar que la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un límite y determinar este límite.

Ejercicio 5519

1. Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O, P y Q dos puntos de $\mathscr{C}$ no diametralmente opuestos. Calcular Mes $\widehat{OPQ}$ en función de Mes $\widehat{POQ}$.
2. Sea d la recta perpendicular a (OP) pasando por P. Calculando la distancia entre O y todo punto M de la recta d, demostrar que P es el único punto de intersección entre d y $\mathscr{C}$. La recta d es llamada *tangente en el círculo $\mathscr{C}$ en P*.

[007261]

Ejercicio 5520

Sea E un plano y $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un sistema de referencia. Se considera la aplicación

$$\phi : (\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}) \mapsto xx' + 3yy'.$$

1. Demostrar que ϕ es un producto escalar.
2. Determinar un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ del plano ortonormado para este producto escalar.
3. Calcular $\phi(X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J}, X'\overrightarrow{I} + Y'\overrightarrow{J})$.

[007262]

Ejercicio 5521

Sea E un plano y $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un sistema de referencia. Sean α y β de números reales. Se considera la aplicación

$$\varphi : (\overrightarrow{u}(x,y), \overrightarrow{u'}(x',y')) \mapsto \alpha xx' + \beta yy'$$

1. Demostrar que φ es bilineal y simétrica.
2. Demostrar que φ es un producto escalar si, y solo si, α y β son estrictamente positivos.
3. Demostrar que la aplicación

$$\psi : (\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}) \mapsto 2xx' + yy' + xy' + x'y$$

   es un producto escalar.
   Indicación : Encontrar una identidad notable.

[007263]

Ejercicio 5522

Sea E un plano euclidiano orientado provisto de un marco ortonormado directo $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector de norma 1 y de coordenadas $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

1. Calcular el producto escalar $\overrightarrow{I} \cdot \overrightarrow{u}$.
2. Calcular, usando la definición de la función coseno, la cantidad $\|\overrightarrow{I}\|\,\|\overrightarrow{u}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{u}})$.

3. Retomar los cálculos anteriores, sin la hipótesis que $\overrightarrow{u}$ es de norma 1.

[007264]

Ejercicio 5523

Demostrar que si A está incluido en una parte B de un plano euclidiano E, entonces

$$\mathscr{A}(A) \leqslant \mathscr{A}(B).$$

[007265]

Ejercicio 5524

Sea ABC un triángulo en un plano euclidiano orientado E. Se denota $a = BC, b = CA$ y $c = AB$ y $\hat{A} = \widehat{(BAC)}$. Denotemos p la mitad de su perímetro.

1. Demostrar que

$$2p(p-a) = bc + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$2(p-b)(p-c) = bc - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2. Deducir que el área del triángulo ABC es $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

[007266]

Ejercicio 5525

Sea ABC un triángulo. Denotemos Δ_A, Δ_B y Δ_C las bisectrices de los ángulos en A, B, C respectivamente. Se observa así a, b, c las longitudes BC, CA y AB respectivamente, y α, β, γ mediciones de ángulos (no orientados) $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ respectivamente.

1. Demostrar que si Δ_A es paralela a Δ_B, entonces el triángulo ABC es plano. Se supone en el resto del ejercicio que este triángulo no es plano.
2. Demostrar que para todo punto P de Δ_A, la distancia de P a la derecha (AB) es igual a la distancia de P a la derecha (AC).
3. Deducir que el punto de intersección de Δ_A y de Δ_B, que se denota Ω, es equidistante de (AB), (BC) y (CA). Se admite que esto permite demostrar que $\Omega \in \Delta_C$.
4. Se denota A' el proyectado ortogonal de Ω en la recta (BC), es decir el único punto $A' \in (BC)$ tal que $(\Omega A') \perp (BC)$. Igualmente, se denota B' el proyectado ortogonal de Ω sobre (CA) y C' el proyectado ortogonal de Ω sobre (AB). Demostrar que $AB' = AC'$.
5. Se admite que $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$. Demostrar que

$$2AB' + a = 2AB' + A'B + A'C = 2AB' + BC' + CB' = b + c.$$

6. Se denota $p = \frac{a+b+c}{2}$. Demostrar que $AB' = p - a$.
7. Se denota $r = \Omega A'$. Demostrar que

$$r = (p-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (p-b)\tan\frac{\beta}{2} = (p-c)\tan\frac{\gamma}{2}.$$

8. Usando las fórmulas de adición para sen y cos, demostrar que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}} \text{ y } \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

9. Demostrar que $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$. Deducir que

$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

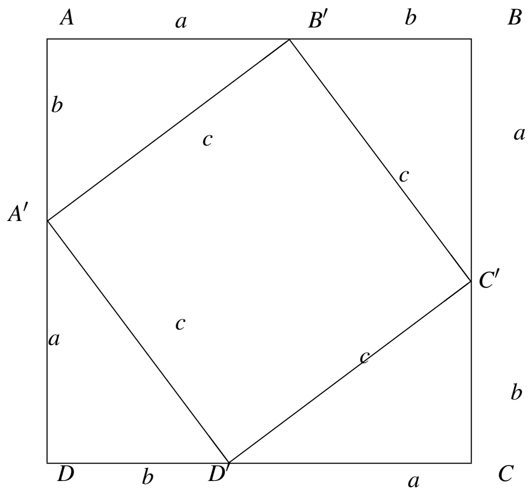
10. Deducir que $(p-a)(p-b)(p-c)=r^2p$, luego que el área del triángulo ABC es

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[007267]

Ejercicio 5526

Sea $\mathscr{T}$ un triángulo rectángulo cuyos lados adyacentes al ángulo recto miden a y b, y la hipotenusa c. Se construye en un cuadrado $ABCD$ de lado $a+b$ los puntos $A'B'C'D'$ en los lados a las distancias indicadas de los extremos.



Demostrar que $A'B'C'D'$ es un cuadrado. Deducir una demostración del teorema de Pitágoras. [007268]

Ejercicio 5527

Sea ABC un triángulo equilátero de lado a. Sea B' la mitad de $[AC]$. Sea L un punto de $[BB']$ tal que $B'L=a/2$. Sea d la recta ortogonal a (BB') que pasa por L. Sea M un punto de intersección de d, con el círculo de diámetro $[BB']$. Calcular BM. [007269]

Ejercicio 5528

El *teorema de Bolyai* afirma que siempre se pueden obtener dos polígonos con la misma área cortando y uniendo. Se va a estudiar el corte de un triángulo equilátero para obtener un cuadrado de misma área.
Se considera un triángulo equilátero ABC que se quiere cortar para poder transformarlo en un rectángulo, ver un cuadrado.

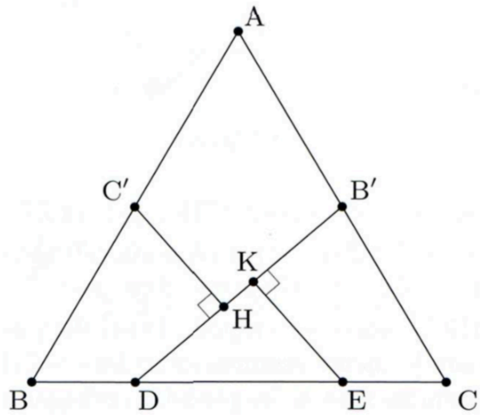


Fig. a

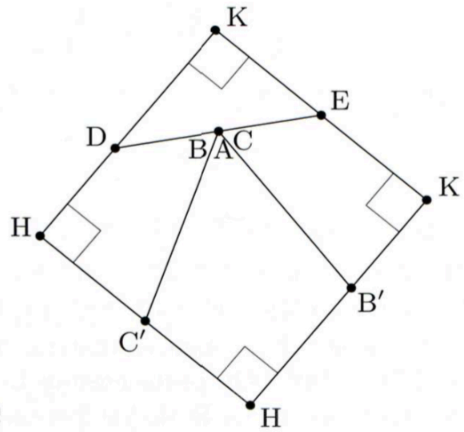


Fig. b

1. Se parte del triángulo equilátero ABC y se coloca un punto D sobre $[BC]$ tal que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. Luego se construye E en el mismo segmento como $DE = \frac{1}{2}BC$. Se une D en el medio B' de $[AC]$, y se llaman a H y K las proyecciones ortogonales de C' y E sobre $[B'D]$.
   Se supone el corte efectuado según el modelo de las figuras *a* y *b* da un rectángulo sobre la figura *b*. Rehacer de las figuras escogiendo D cerca de B. Demostrar utilizando el hecho que la figura *b* es un rectángulo con coincidencia de ciertos puntos que :
   (a) B' y C' son los puntos medios de $[AB]$ y $[AC]$,
   (b) $DE = \frac{1}{2}BC$,
   (c) $KE = HC'$,
   (d) $DH = KB'$.
2. Demostrar que $DEB'C'$ es un paralelogramo.
3. Deducir que los triángulos $BC'D$ y $CB'E$ tienen dos lados iguales y un ángulo. ¿Se puede deducir que son isométricos ?
4. Empezamos con el triángulo equilátero ABC y colocamos un punto D en $[BC]$ tal que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. A continuación construimos E sobre el mismo segmento tal que $DE = \frac{1}{2}BC$. Unimos D en el punto medio B' de $[AC]$, y se llaman a H y K las proyecciones ortogonales de C' y E sobre $[B'D]$.
   Demostrar que se obtiene así un rectángulo cortando la figura como se indica en las figuras c y d.

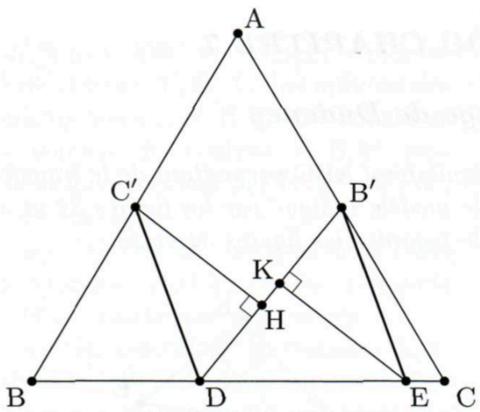


Fig. c

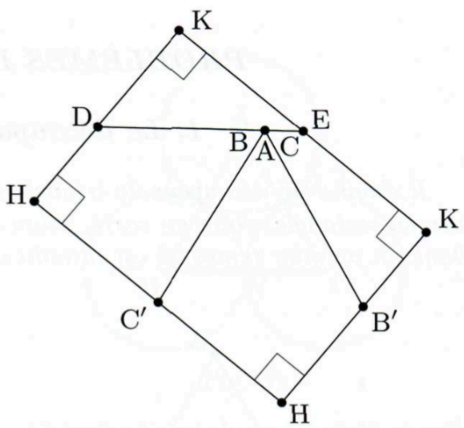


Fig. d

5. Calcular, en función del lado a del triángulo, las longitudes de los lados del rectángulo obtenido en el caso de que los puntos D y E son un cuarto y tres cuartos del segmento $[BC]$. ¿Este rectángulo es un cuadrado ?
6. Determinar la posición de D, para lo cual se tiene efectivamente un cuadrado. Se especifica la longitud $B'D$ utilizando un cálculo de área.

[007270]

Ejercicio 5529

1. ¿Una traslación transforma una recta en una recta paralela a ella ?
2. Demostrar que una traslación conserva el paralelismo, es decir transforma dos rectas paralelas $d_1||d_2$ en dos rectas paralelas $d_1'||d_2'$.
3. Retomar las preguntas para una rotación.

[007271]

Ejercicio 5530

Sea E un plano euclidiano y A y B dos puntos de E

1. Determinar la composición de la homotecia de centro A y de cociente 2, con centro de homotecia B y de cociente $\frac{1}{2}$. Se puede construir la imagen de algunos puntos.
2. Determinar la composición de la homotecia de centro A y de cociente 2, con centro de homotecia B y de cociente 3.
3. ¿Qué se puede decir en general sobre la composición de dos homotecias ?
4. ¿Qué pasa con la composición de una homotecia y una traslación ?

[007272]

Ejercicio 5531

1. Sea d una recta de un plano euclidiano orientado E de vector director $\vec{u}$. Sea $\vec{v}$ un vector ortogonal a $\vec{u}$. Determinar la composición de la simetría axial s_d de eje d, con la traslación t de vector $\vec{u}$.
   Indicación : se puede descomponer la traslación como composición de dos simetrías bien elegidas.
2. Sea d una recta de un plano euclidiano orientado E de vector director $\vec{u}$. Sea A un punto de d. Determinar la composición de la simetría axial s_d de eje d, con la rotación r de centro A y de ángulo $\pi/4$.

[007273]

Ejercicio 5532

Se recuerda que la *homotecia* del centro O y de cociente λ, para O un punto del plano $\mathscr{P}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es la aplicación de $\mathscr{P}$ en sí mismo que a un punto $P \in \mathscr{P}$ asocia el punto único Q verificando $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$. En este ejercicio, se considera una homotecia h de centro O y cociente λ.

1. Demostrar que si $\lambda \neq 1$, entonces O es el único punto del plano cuya imagen por h es él mismo.
2. ¿Es verdadera la propiedad anterior si $\lambda = 1$? (Recordar : la respuesta debe ir acompañada de una demostración.)

3. Si P es un punto del plano distinto de O, demostrar que $h(P)$ es un punto en la recta (OP). (*Indicación :* Se puede considerar los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{O\,h(P)}$).
4. Deducir que si $\mathscr{D}$ es una recta que pasa por el punto O, entonces $h(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$. (Recordar : se denota $h(\mathscr{D})$ el conjunto de puntos $h(P)$ para $P \in \mathscr{D}$.)
5. Considerando la homotecia de centro O y de cociente $\frac{1}{\lambda}$, deducir que $h(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ (con las mismas notaciones que en la pregunta anterior).
6. Sea Δ una recta. Se admite en este ejercicio que $h(\Delta)$ es también una recta. Demostrar que si Δ y $h(\Delta)$ tienen un punto en común y si $\lambda \neq 1$ entonces este punto común es O.
7. Deducir que si Δ es una recta que no pasa por O y si $\lambda \neq 1$ entonces las rectas Δ y $h(\Delta)$ son paralelas y son dos rectas distintas.
8. Demostrar que la imagen de una recta por una homotecia es una recta paralela. (Cuidado, en esta pregunta, ya no existe ninguna hipótesis particular sobre la recta considerada, ni en la razón de homotecia.)

[007274]

Ejercicio 5533

1. Dados dos puntos A y B del plano, construir con regla y compás la mediatriz del segmento $[AB]$. (Indicación : se puede, usando el compás, construir dos puntos equidistantes de A y B.)
2. Dado un círculo $\mathscr{C}$ cuyo centro no conocemos, determinar su centro por construcción con regla y compás. (*Indicación :* Se puede usar la pregunta anterior.)

[007275]

Ejercicio 5534

Dadas dos semirrectas $[OA)$ y $[OB)$, se quiere construir la bisectriz del ángulo geométrico $\widehat{AOB}$.

1. ¿Cómo construir una compás de dos puntos $P \in]OA)$ y $Q \in]OB)$ de manera que el triángulo OPQ sea isósceles ?
2. Demostrar que la mediatriz del segmento $[PQ]$ es también la bisectriz del ángulo $\widehat{POQ}$. (Indicación : Usar una simetría axial bien elegida.)
3. Explicar cómo construir la bisectriz de un ángulo usando regla y compás $\widehat{AOB}$.

[007276]

Ejercicio 5535

¿Cómo se construye, solo con compás el simétrico de un punto con respecto a una recta ? ¿Cómo construir con regla y compás la proyección ortogonal de un punto sobre una recta ? [007277]

Ejercicio 5536

Dados tres puntos A, B, C no alineados, construir con compás solo el punto D tal que $ABCD$ sea un paralelogramo. [007278]

Ejercicio 5537

Dadas tres rectas concurrentes, construir un triángulo del cual estas sean las mediatrices. (Indicación : se puede considerar la aplicación compuesta por las tres simetrías axiales correspondientes, y sus puntos fijos.)
[007279]

Ejercicio 5538 Construcción del pentágono regular

1. Demostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se a

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

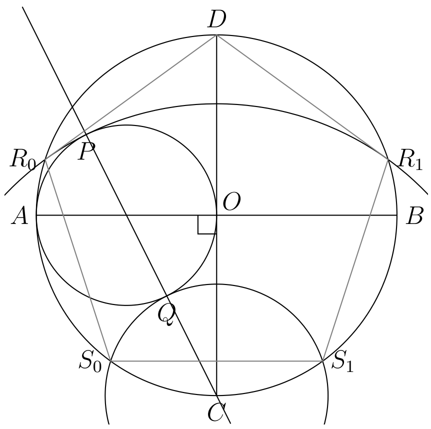
2. Deducir que

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{y} \quad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Se verifica que

$$16X^5 - 20X^3 + 5X + 1 = (X+1)(4X^2 - 2X - 1)^2.$$

3. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 1 ? ¿El de un decágono regular ?
4. Se considera la siguiente construcción :



Los segmentos $[AB]$ y $[CD]$ son dos diámetros ortogonales de un círculo $\mathscr{C}$ de centro O. Denotemos $\mathscr{C}_1$ el círculo de diámetro $[AO]$, y P y Q los puntos de intersección del círculo $\mathscr{C}_1$ y de la recta pasando por C y por el centro de $\mathscr{C}_1$. Sean R_0 y R_1 los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y del círculo de centro C pasando por P, y sean S_0 y S_1 los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y del círculo de centro C pasando por Q. Calcular las longitudes CP y CQ.

5. Deducir la medida de los ángulos $\widehat{COR_0}$ et $\widehat{COS_0}$.
6. Deducir que los puntos $DR_0S_0S_1R_1$ forman un pentágono regular.

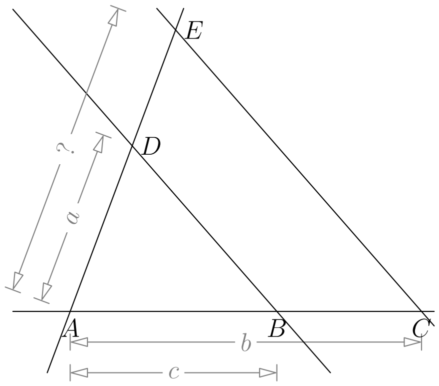
[007280]

Ejercicio 5539

Dados cuatro puntos A, B, C, D, construir con regla y compás dos puntos cuya distancia sea $AB+CD$. Misma pregunta para $AB-CD$. [007281]

Ejercicio 5540

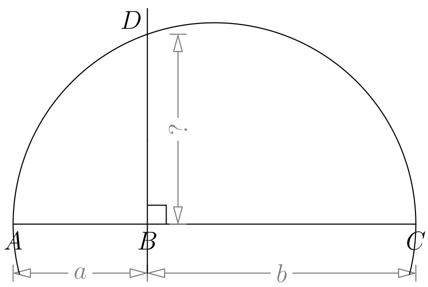
Dadas tres longitudes a, b y c, construir con regla y compás la longitud $\frac{ab}{c}$. (Indicación : se puede considerar la siguiente figura.)



[007282]

Ejercicio 5541

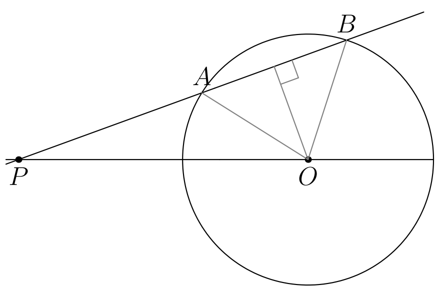
Dadas dos longitudes a y b, construir con regla y compás la longitud $\sqrt{ab}$. (Indicación : se puede considerar la siguiente figura.)
¿Por qué, en este ejercicio y en el anterior, ¿se han considerado las longitudes $\frac{ab}{c}$ y $\sqrt{ab}$ más bien que ab, $\frac{a}{c}$ y $\sqrt{a}$?



[007283]

Ejercicio 5542 Potencia de un punto con respecto a un círculo

Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O y de radio r, y sea P un punto. Sea $\mathscr{D}$ una recta que pasa por P y que corta $\mathscr{C}$ en dos puntos A y B. La *potencia* del punto P con respecto al círculo $\mathscr{C}$ es el producto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.



Demostrar que la potencia de P con respecto a $\mathscr{C}$ es igual a $OP^2 - r^2$. (Indicación : Usar el teorema de Pitágoras.) ¿Depende de la recta $\mathscr{D}$ escogida ? [007284]

Ejercicio 5543 Inversiones

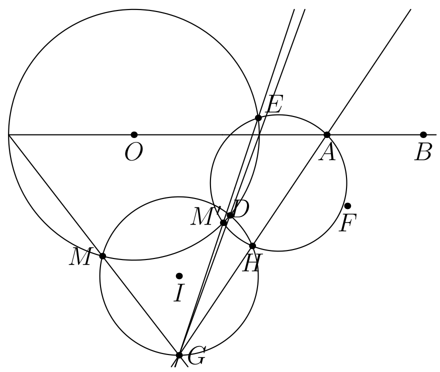
1. Si Ω es un punto y si λ es un real no nulo, la *inversión* de centro Ω y de cociente λ es la aplicación del plano privado de P en sí mismo que al punto P asocia el punto único $P' \in (\Omega P)$ tal que $\overrightarrow{\Omega P} \cdot \overrightarrow{\Omega P'} = \lambda$. Demostrar que las inversiones son involutivas, es decir que son biyecciones que son su propia biyección recíproca.
2. Demostrar que el conjunto de puntos fijos de una inversión es un círculo.
3. Demostrar que si $\mathscr{C}$ es un círculo tal que la potencia de Ω con respecto a $\mathscr{C}$ es λ, y si ι es la inversión de centro Ω y de cociente λ, entonces $\iota(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.
4. Si Δ es una recta que no pasa por Ω, demostrar que su imagen por la inversión de centro Ω y de cociente λ es un círculo que pasa por Ω privado del punto Ω. (Indicación : denotar H el proyectado ortogonal de Ω sobre Δ, ι la inversión ; aplicando una homotecia de centro Ω bien elegido, podemos suponer que $\iota(H) = H$; demostrar entonces que $P \in \Delta$ si y solo si $\overrightarrow{\Omega\iota(P)} \cdot \overrightarrow{H\iota(P)} = 0$.)
5. Demostrar que la imagen por una inversión de un círculo que no pasa por el centro de la inversión es un círculo. (Indicación : Utilizar una homotecia de mismo centro que la inversión para volver a la pregunta 3.)

[007285]

Ejercicio 5544 Intersección de un círculo y una recta

Se considera un círculo $\mathscr{C}$ de centro O y dos puntos distintos A y B. Se quiere construir con solo el compás los puntos de intersección del círculo $\mathscr{C}$ y de la recta (AB).

1. Si $O \notin (AB)$, explicar cómo construir estos dos puntos. (*Indicación :* Se puede construir la simétrica del círculo $\mathscr{C}$ con respecto a la recta (AB), utilizando el ejercicio 5535.)
2. Si $O \in (AB)$, se reduce a una intersección de círculos usando una inversión. Más precisamente, se considera la construcción siguiente.



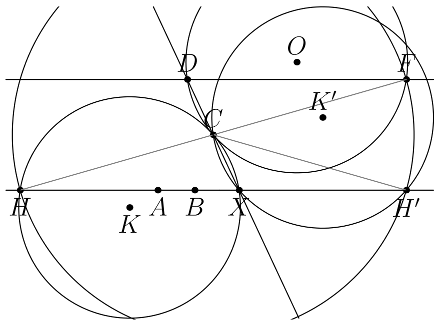
Sea $\mathscr{C}'$ un círculo que pasa por A, que corta $\mathscr{C}$ en dos puntos D y E. Sea F el simétrico de O con respecto a la recta (DE), y sea G un punto tal que el triángulo OFG sea equilátero. Demostrar que $G \in (DE)$ y explicar cómo construirlo solo con compás.
3. Demostrar que G tiene la misma potencia con respecto a $\mathscr{C}$ y a $\mathscr{C}'$. Deducir que existe una inversión ι de centro G tal que $\iota(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$ y $\iota(\mathscr{C}') = \mathscr{C}'$.

4. Se denota $\mathscr{C}''$ la imagen de la derecha (OA) por inversión ι (adjuntando su centro G para tener un círculo), y se denota I el centro de $\mathscr{C}''$. Demostrar que las rectas (GI) y (OA) son ortogonales.
5. Sea H la intersección del círculo $\mathscr{C}'$ y de la recta (AG) que no es$A$. Demostrar que $\iota(A) = H$.
6. Demostrar que I está en la mediatriz del segmento $[GH]$. ¿Cómo construir con solo compás dos puntos de esta mediatriz ?
7. ¿Cómo construir dos puntos de la perpendicular a (OA) pasando por G ? (*Indicación :* construir la simetría de G con respecto a (OA).)
8. Demostrar que I es la intersección de la mediatriz de $[GH]$ y de la perpendicular a (OA) pasando por G (ver el ejercicio 5545 para saber cómo construir esta intersección solo con compás).
9. Deducir cómo construir $\mathscr{C}''$. (*Indicación :* $G \in \mathscr{C}''$.)
10. Se denotan M y M' los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. Demostrar que $\iota(M)$ y $\iota(M')$ son los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y (AB).
11. Demostrar que $\iota(M)$ es la intersección de $\mathscr{C}$ y de la recta (GM), otra que M.

[007286]

Ejercicio 5545 Intersección de dos rectas

Se consideran cuatro puntos distintos A, B, C, D, tales que las rectas (AB) y (CD) sean secantes en un punto X. Se quiere construir el punto X solo con compás.



1. Usando ejercicio 5536, explicar cómo construir la paralela Δ a (AB) pasando por D.
2. Construir un punto O equidistante de C y D, y F el punto de intersección del círculo central O pasando por C y D con la recta Δ, otra que D. Se denota H y H' los puntos de intersección del círculo central C pasando por F con la recta (AB). ¿Cómo construir estos puntos solo con compás ?
3. Construir el centro K de $\mathscr{C}$, uno de los dos círculos de radio OC pasando por C y H. Igualmente, construir el centro K' de $\mathscr{C}'$, uno de los dos círculos de radio OC pasando por C y H'. Demostrar que el punto C es común a $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$.
4. Denotemos α la medición del ángulo $\widehat{AXD}$. Suponiendo que los puntos están dispuestos como en la figura anterior, demostrar que :
   (a) la medida de $\widehat{CDF}$ es α ;
   (b) la medida de $\widehat{COF}$ es 2α ;
   (c) la medida de $\widehat{CKH}$ es 2α ;
   (d) la medida de $\widehat{CK'H'}$ es 2α.
5. Denotemos ζ el punto de intersección de $\mathscr{C}$ y (AB) otro que C. Demostrar que la medida del ángulo $\widehat{C\zeta H}$ es α. Deducir que $\zeta = X$.

6. Demostrar que los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son C y X.

[007287]

Ejercicio 5546

La noción de «construcción con compás» es un poco ambiguo. Se distingue :

— El *compás trazante*, que permite, a partir de dos puntos A y B, construir el círculo de centro A pasando por B ;

— El *compás transportador*, que permite, a partir de tres puntos A, B y C, construir el círculo de centro A y de radio BC (permite «transportar» la distancia BC, de ahí su nombre).

El compás transportador permite obviamente todas las construcciones posibles del compás trazante. El propósito de este ejercicio es demostrar que toda construcción de compás transportador se puede transformar en una construcción de compás trazante. Se consideran tres puntos A, B y C, dos a dos distintos.

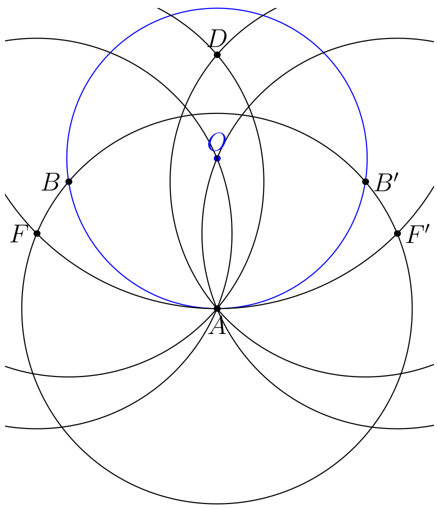
1. Construir, a compás trazante, dos puntos de la mediatriz del segmento $[AB]$.
2. Construir, a compás trazante, el simétrico C' de C con respecto a la mediatriz del segmento $[AB]$.
3. Demostrar que $AC' = BC$.
4. Construir, a compás trazante, el círculo de centro A y de radio BC.

Observaciones. La cuestión de qué construcciones se pueden hacer solo con compás (sin regla) ha sido estudiado con la esperanza de obtener construcciones más precisas. (Es más fácil fabricar un buen compás que una regla realmente recta.)

Por el teorema de Mohr y Mascheroni, las construcciones que se pueden lograr solo con compás son exactamente las mismas que se pueden lograr con la regla y compás, a condición de considerar que una recta se construye si conocen dos puntos de ella. Información sobre este teorema en el libro *Leçons sur les constructions géométriques* de Henri Lebesgue. [007288]

Ejercicio 5547

La cuestión de encontrar el centro de un círculo con regla y compás se estudió en el ejercicio 5533. Ahora se estudia una construcción solo a compás.



Sea $\mathscr{C}$ un círculo (cuyo centro no conocemos). Sea A un punto de $\mathscr{C}$, y sea $\mathscr{C}'$ un círculo de centro A, que corta $\mathscr{C}$ en dos puntos B y B'. Los círculos de centros B y B' pasando por A se cruzan en otro punto D. Denotemos $\mathscr{C}''$ el círculo de centro D pasando por A, y denotar F y F' los puntos de intersección de $\mathscr{C}'$ y $\mathscr{C}''$. Finalmente, se denota Ω el otro punto de intersección de los círculos de centros F y F' pasando por A.

1. Denotemos O el centro del círculo $\mathscr{C}$, r su radio, a el radio del círculo $\mathscr{C}'$. Demostrar que se tiene $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = r^2 - a^2$. (Indicación : considerar la potencia del punto O con respecto al círculo de centro B pasando por A.)
2. Deducir que $\overrightarrow{DA} = \frac{a^2}{r^2}\overrightarrow{OA}$ et $DA = \frac{a^2}{r}$.
3. Considerando la potencia de D con respecto al círculo de centro F pasando por A, demostrar del mismo modo $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{a^2}{DA^2}\overrightarrow{DA}$.
4. Deducir que $\Omega = O$.

[007289]

Ejercicio 5548 Determinar una rotación a partir de imágenes

Sea E un plano euclidiano afín provisto de un sistema cartesiano ortonormado. Sean A, B, C y D los puntos de E cuyas coordenadas son

$$A : (0,3), \quad B : (2,1), \quad C : (2,3) \quad \text{y} \quad D : (0,1).$$

1. Demostrar que las rectas (A,B) y (C,D) son ortogonales y explicitar las coordenadas de su punto de intersección.
2. Demostrar la existencia de un *rotación* que envía A sobre C, C sobre B, B sobre D y D sobre A. Explicitar una representación matricial de esta rotación.

[007474]

Ejercicio 5549 Reconocer una aplicación afín

Sea E un plano afín euclidiano. Sean $\mathscr{R}$ un marco cartesiano ortonormado de E, y $f : E \to E$ la aplicación afín definida en $\mathscr{R}$ por la igualdad

$$f\big((x,y)\big) = \left(\frac{3x+4y+8}{5}, \frac{4x-3y-1}{5}\right).$$

1. ¿La aplicación f tienen puntos fijos ?
2. Demostrar que cuando M recorre E, el punto medio de $(M, f(M))$ recorre una recta cuya ecuación especificaremos.
3. Demostrar que f es una isometría cuya naturaleza se debe precisar, el eje y el componente de traslación.

[007475]

Ejercicio 5550 En un grupo de isometrías

En un plano afín euclidiano orientado se consideran dos puntos distintos O y A. Se denota r la rotación de centro O y de ángulo $2\pi/3$ y ρ la rotación de centro A y de ángulo $2\pi/3$. Se define $B = r(A)$ y $C = r(B)$. Finalmente, notamos G el conjunto de isometrías generadas por r y ρ.

1. Demostrar que G contiene solo traslaciones y rotaciones de ángulo $2\pi/3$ y $-2\pi/3$.
2. Explicitar una relación de dependencia entre vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ (se puede notar que la suma de estos vectores es invariante por r).
3. Demostrar que $r \circ \rho^{-1}$ y $r^{-1} \circ \rho$ son traslaciones para las que se especifica el vector (se puede estudiar la imagen de A).

4. Demostrar que G contiene todas las traslaciones de vectores $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ y $p+q \in 3\mathbb{Z}$.

[007478]

Ejercicio 5551

En el plano afín P real, dotado de un sistema de referencia afín (A_0,A_1,A_2), ¿en qué condición el punto M de coordenadas baricéntricas (α,β,γ) y los puntos $A(1,5,-2)$ y $B(3,2,0)$ están alineados ? [007487]

Ejercicio 5552

1. Dar la definición de un subespacio afín de un espacio afín E.
2. Dar un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que no es afín.
3. Enunciar y demostrar el significado directo del teorema de Tales.

[007488]

Ejercicio 5553

En el plano afín P real, dotado de un sistema de referencia afín (A_0,A_1,A_2), se consideran los puntos dados en coordenadas baricéntricas por $A(2,-1,5)$ y $B(1,1,2)$ y $C(2,3,0)$. Determinar las coordenadas baricéntricas normalizadas, del baricentro G de puntos de masa $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,-1)$. [007489]

Ejercicio 5554

Sea $A(0,0)$ y $B(3,0)$ dos puntos de un plano afín euclidiano provistos de un sistema de referencia $\mathscr{R} = (O,i,j)$ cartesiano ortonormado. Determinar el conjunto de puntos M del plano tal que

$$2MA^2 - MB^2 = -2.$$

[007495]

Ejercicio 5555 Reconocer una aplicación afín

Sea E un plano afín euclidiano. Sea $\mathscr{R} = (O,i,j)$ un marco cartesiano ortonormado de E.

1. Determinar la expresión analítica de la traslación t de vector $\overrightarrow{u} = 3i+j$.
2. Determinar la expresión analítica de la simetría ortogonal s de eje la recta d de ecuación $(x+y=1)$.
3. Determinar la expresión analítica de la composición $f = t \circ s$.
4. Demostrar que f es una isometría. Especificar el determinante de su parte lineal. ¿Qué se puede deducir ?
5. Determinar el conjunto de puntos fijos de f. Determinar su eje (se puede demostrar que para todo punto M del plano la mitad del segmento $[M,f(M)]$ está en una recta, cuya ecuación se precisará).
6. Determinar la componente traslacional de f.

[007496]

Ejercicio 5556

Se retoman las notaciones del ejercicio anterior. Sea E un plano afín euclidiano. Sea $\mathscr{R} = (O,i,j)$ un marco cartesiano ortonormado de E. Se considera la traslación t de vector $\overrightarrow{u} = 3i+j$ y la simetría ortogonal s de eje la recta d de ecuación $(x+y=1)$.

1. Descomponer el vector $\overrightarrow{u}$ en la suma directa ortogonal $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{d}^{\perp} \oplus \overrightarrow{d}$ en $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.
2. Determinar geométricamente la naturaleza y los elementos característicos de la composición $t_{\overrightarrow{v}} \circ s$. Se puede descomponer cada isometría en productos de reflexiones.
3. Determinar geométricamente la naturaleza y los elementos característicos de la composición $t \circ s$.

[007497]

Ejercicio 5557

Recordar la construcción de los centros de homotecias que envían un círculo a otro de distinto radio. Construir un círculo tangente a dos rectas dadas y que pase por un punto dado. [007498]

Ejercicio 5558 Preguntas del curso

1. Sea P un plano afín y (A,B,C) un sistema de referencia afín. Dar la condición de alineamiento de tres puntos en coordenadas baricéntricas.
2. Demostrar que si f es una aplicación lineal ortogonal de un espacio vectorial euclidiano $\overrightarrow{E}$ de dimensión finita, entonces $\ker(f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ y $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ son ortogonales suplementarias.
3. Dar un ejemplo de una aplicación afín que no sea una isometría.
4. ¿Las isometrías de determinante -1 en un espacio afín euclidiano de dimensión tres tienen todas un punto fijo ?
5. ¿Se puede escribir una rotación en el plano euclidiano como composición de cinco reflexiones ?
6. En el espacio afín euclidiano equipado con un marco ortonormado, se considera el cubo de vértices $A(-1,-1,-1)$, $B(-1,-1,1)$, $C(-1,1,1)$, $D(-1,1,-1)$, $E(1,-1,-1)$, $F(1,-1,1)$, $G(1,1,1)$, $H(1,1,-1)$. ¿Existe una isometría del espacio que envía A sobre B y G sobre F ? Si es sí, determinarlo.

[007501]

Ejercicio 5559 Línea de nivel de una función de Leibniz

Se provee el plano afín euclidiano $(P,<,>)$ de un marco ortonormado $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Se consideran los puntos $A(-1,2)$ y $B(5,4)$.

1. Determinar las coordenadas del baricentro G de puntos de masa $A(-3)$ y $B(1)$.
2. Calcular $-3GA^2 + GB^2$.
3. Demostrar que para todo punto M del plano, se tiene
$$-3MA^2 + MB^2 = -2MG^2 - 3GA^2 + GB^2.$$
4. Determinar el conjunto $\mathscr{L}$ de puntos M del plano tal que $-3MA^2 + MB^2 = 50$.

[007502]

Ejercicio 5560 Isometrías y construcciones

1. Se considera en el plano euclidiano orientado un punto A y la rotación r de centro A de ángulo $+\pi/2$. Sea M un punto y $M' = r(M)$ su imagen por r. Sea d una recta que pasa por M. Describir un punto y la dirección de la imagen $r(d)$ de la recta d.

2. Sean d_1 y d_2 dos rectas y $B \in d_1$ y $C \in d_2$ tal que ABC sea un triángulo rectángulo isósceles en A (con mes $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = +\pi/2$). Demostrar que C pertenece a la imagen de la recta d_1 por r.
3. Sean δ_1 y δ_2 dos rectas no perpendiculares y E un punto del plano. Construir un triángulo EFG rectángulo isósceles en E y tal que $F \in \delta_1$ y $G \in \delta_2$.

[007503]

Ejercicio 5561 Productos de reflexiones y composición

En el plano euclidiano orientado provisto de una referencia ortonormada directa $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, se considera la traslación t de vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ y la rotación r de centro $A(-3,-1)$ y de ángulo $+\pi/2$.

1. Demostrar que $t \circ r$ tiene un único punto fijo.
2. Descomponer la traslación t en producto $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ pensamientos con respecto a las rectas d_1 y d_2 que se describen.
3. Descomponer la rotación r en producto $s_{d_4} \circ s_{d_3}$ pensamientos con respecto a las rectas d_3 y d_4 que se describen.
4. ¿Es posible elegir $d_1 = d_4$ en las preguntas anteriores ?
5. Determinar por un método geométrico la naturaleza y los elementos característicos de la composición $t \circ r$.

[007504]

Ejercicio 5562

Se provee el plano afín euclidiano $(P, <,>)$ de un marco ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Se consideran los puntos A de coordenadas $(-2,1)$ y B de coordenadas $(4,4)$.

1. Determinar las coordenadas del baricentro G de puntos de masa $A(2)$ y $B(1)$.
2. Calcular $2GA^2 + GB^2$.
3. Demostrar que para todo punto M del plano, se tiene
$$2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2.$$
4. Determinar el conjunto $\mathscr{L}$ de puntos M del plano tal que $2MA^2 + MB^2 = 42$.

Solución ▼ [007505]

Ejercicio 5563

1. Se identifica el plano afín $\mathbb{R}^2$ dotado del producto escalar estándar en el espacio vectorial $\mathbb{C}$ dotado del producto escalar $(z,z') = re(z\overline{z'})$ por la aplicación lineal $(1,0) \mapsto 1$, $(0,1) \mapsto i$. Entre las siguientes transformaciones, ¿cuáles son isometrías del plano euclidiano

a. $z \mapsto 3z + 4$
b. $z \mapsto 3\overline{z} + 4$
c. $z \mapsto \overline{z} + 4$
d. $z \mapsto i\overline{z} + 4$

2. Para cada una de las isometrías, decir si se trata de una traslación, de una rotación... (sin especificar los elementos característicos).

Solución ▼ [007506]

Ejercicio 5564

1. Demostrar que si A, B, C son tres puntos distintos de un plano euclidiano afín $\mathscr{P}$ la suma de los ángulos de vectores
$$((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) + ((\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})) + ((\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}))$$
es un ángulo plano.
2. Sea $\mathscr{C}$ un círculo de $\mathscr{P}$ y A un punto de $\mathscr{C}$. Sea $\mathscr{C}'$ la imagen por una rotación r de centro A del círculo $\mathscr{C}$. Sea B el otro punto de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. Sea D un punto de $\mathscr{C}$ diametralmente opuesto a A sobre $\mathscr{C}$. Sea $D' = r(D)$ su imagen por r. Demostrar que D, D' y B están alineados.
3. Sea M un punto cualquiera de $\mathscr{C}$. Demostrar que M, $M' = r(M)$ y B están alineados.

Solución ▼ [007507]

Ejercicio 5565

Sea $\mathbb{R}^2$ el plano afín euclidiano equipado con el producto escalar estándar y la base canónica.

1. Escribir la matriz A de la forma bilineal simétrica dada en coordenadas por
$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y.$$
2. Diagonalizar A en una base ortonormada.
3. Determinar la naturaleza de la cónica de ecuación
$$x^2 + 19y^2 + 24xy + 5y = 0.$$

Solución ▼ [007508]

Ejercicio 5566

Sea A, B, C un marco afín de un plano afín E.

1. Determinar las ecuaciones baricéntricas de las medianas del triángulo ABC.
2. Utilizando la pregunta precedente, demostrar que las medianas del triángulo ABC son concurrentes.

Solución ▼ [007512]

Ejercicio 5567

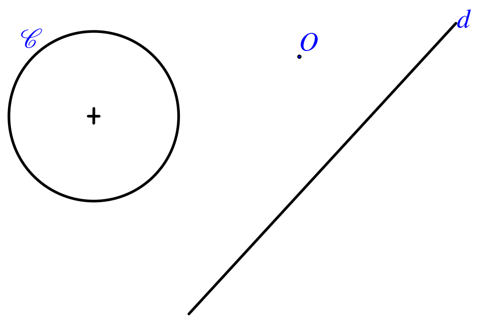
Sea P un plano euclidiano orientado.

1. Dar la lista de los elementos del grupo de isometrías del plano que conservan un cuadrado.
2. ¿Este grupo es conmutativo ?
3. ¿Es el conjunto de desplazamientos del plano que conservan un cuadrado conmutativo ?

Solución ▼ [007513]

Ejercicio 5568

Construir un punto A en el círculo $\mathscr{C}$ cuya simetría con respecto a O está en la recta d.



Justificar su construcción.

Solución ▼ [007514]

213 242.02 Geometría afín euclidiana del espacio

Ejercicio 5569

Se consideran los 4 puntos A, B, C, D dados. ¿$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ establece un nuevo sistema de referencia? En este caso, encontrar las fórmulas de los cambios de sistema de referencia que expresan las coordenadas (x,y,z) en $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ en función de las (x',y',z') en $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

1. $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
2. $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$
3. $A(0,-1,3)$, $B(5,-6,4)$, $C(-4,1,-2)$, $D(-3,3,6)$
4. $A(1,1,0)$, $B(1,5,2)$, $C(0,-1,1)$, $D(3,4,-1)$
5. $A(2,-1,4)$, $B(0,0,1)$, $C(3,2,-1)$, $D(1,3,4)$
6. $A(4,4,2)$, $B(5,3,2)$, $C(4,3,3)$, $D(3,5,2)$
7. $A(1,3,1)$, $B(1,2,2)$, $C(2,-1,-4)$, $D(0,8,6)$.

[002031]

Ejercicio 5570

¿Las siguientes fórmulas definen un cambio de marco? En este caso, dar el cambio del sistema de referencia inverso.

1. $\begin{cases} x' = y - z + 1 \\ y' = -x - 4y + 5z + 2 \\ z' = x - 5y + 5z + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 3z - 2 \\ y' = 2x + 3y + z + 2 \\ z' = 4x - y + 3z + 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - 5y + z + 2 \\ y' = 2x - y + z - 1 \\ z' = -3x - 4y - z - 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x - z + 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 2 \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - 2y - 3z + 5 \\ y' = -3x + 4y + z - 2 \\ z' = 2x - y + 6z + 3 \end{cases}$

Ejercicio 5571

Se consideran las siguientes rectas y planos cuyas ecuaciones se dan en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dar sus ecuaciones en el nuevo sistema de referencia $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, sabiendo que en $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ los puntos A, B, C y D tienen las respectivas coordenadas $A(4,-1,2)$, $B(2,-5,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(1,-5,6)$.

1. $P : x+y=1$
2. $P : 2x-3y+4z-1=0$
3. $P : x-y+z+3=0$
4. $P : \begin{cases} x = 2t+3s+1 \\ y = t-s+2 \\ z = 4t-2s-3 \end{cases}$
5. $(D) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+4z=3 \end{cases}$
6. $(D) : \begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ 4x-3y-z=-2 \end{cases}$

[002033]

Ejercicio 5572

1. Se considera el punto $A(-2,4,1)$, los vectores $\overrightarrow{u}(1,1,1)$, $\overrightarrow{v}(2,2,-4)$, $\overrightarrow{w}(3,-1,1)$ y el sistema de referencia $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Se denota x', y' y z' las coordenadas en este marcador. Dar las fórmulas analíticas del cambio del sistema de referencia expresando x, y, z en función de x', y', z'.
2. Se considera la recta $(D) : \begin{cases} y-z=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ utilizar el cambio de sistema de referencia para dar una ecuación de D en el sistema de referencia $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
3. Dar las fórmulas analíticas del cambio de sistema de referencia inverso.

Solución ▼ Vidéo ■ [002034]

Ejercicio 5573

1. Sea f la transformación del espacio definida analíticamente por

$$\begin{cases} x' = & -3x+2y-2z+4 \\ y' = & -8x+5y-4z+8 \\ z' = & -4x+2y-z+4 \end{cases}$$

   (a) Determinar el conjunto P de puntos invariantes por f.

   (b) Demostrar que para M de imagen M', la mitad de $[MM']$ está en P, (MM') es paralela a una dirección fija.

   (c) Deducir una descripción simple de f.

2. Sea f la transformación del espacio definida analíticamente por

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(\;\; 2x-y-z+1) \\ y' = \frac{1}{3}(\;\; -x+2y-z+1) \\ z' = \frac{1}{3}(\;\; -x-y+2z+1) \end{cases}$$

(a) Determinar el conjunto P de puntos invariantes por f.

(b) Demostrar que para M de imagen M' el vector $\overrightarrow{MM'}$ es colineal con un vector fijo.

(c) Deducir una descripción simple de f.

[002038]

Ejercicio 5574

1. Definir analíticamente la proyección ortogonal en el plano de la ecuación $2x+2y-z=1$.
2. Definir analíticamente la proyección ortogonal en la recta de ecuación $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2. \end{cases}$
3. Dar la expresión analítica de la proyección sobre el plano (P) conteniendo el punto $C(2,-1,1)$ y teniendo como vectores directores $\overrightarrow{u}(0,-1,1)$ y $\overrightarrow{u}'(-2,0,1)$, según la recta (AB), donde $A(1,-1,0)$ y $B(0,-1,3)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [002039]

Ejercicio 5575

Todo este problema se ubica en el espacio euclidiano tridimensional dotado de un sistema de referencia ortonormado directo $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Se consideran las dos rectas d y D dadas por los siguientes sistemas de ecuaciones cartesianas :
   $d \begin{cases} x+y-3z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$ y $D \begin{cases} x-1 &= 0 \\ y-z-1 &= 0. \end{cases}$
   (a) i. Dar un punto y un vector de dirección de d. Dar un punto y un vector director de D.
   ii. Decir si las rectas d y D son paralelas, secantes o no coplanares.
   iii. Justificar la existencia de dos planos paralelos (dando para cada uno de estos dos planos un punto y dos vectores directores) tales que d está contenido en uno y D está contenido en el otro.
   (b) i. Sean $\overrightarrow{u}$ el vector de coordenadas $(4,-1,1)$ en $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{v}$ el vector de coordenadas $(0,1,1)$ en $\mathscr{R}$ y Ω un punto de coordenadas $(1,1,0)$ en $\mathscr{R}$. Determinar una ecuación cartesiana para el plano P sistema de coordenadas cartesianas $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, deducir una ecuación cartesiana para el plano Q sistema de coordenadas Cartesianas $(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
   ii. Dar ecuaciones paramétricas para la recta Δ normal a P pasando por O. Determinar los dos puntos $\Delta \cap P$ y $\Delta \cap Q$, luego calcular la distancia entre ellos.

   Interpretar esta distancia.
2. Se consideran los vectores del espacio $\overrightarrow{a} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{b} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\overrightarrow{c} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
   (a) Demostrar que $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ es un sistema de referencia ortonormado. ¿Es directo ?
   (b) Escribir las fórmulas para el cambio de sistema de referencia de $\mathscr{R}$ a $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$.
   (c) ¿Cuál es la ecuación en el sistema de coordenadas $(0,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$ del plano de ecuación $x+2y-2z=0$ en $\mathscr{R}$? Misma pregunta con plano de ecuación $x+2y-2z=3$ en $\mathscr{R}$.

[002042]

Ejercicio 5576

Todo este problema se ubica en el espacio euclidiano tridimensional dotado de un sistema de referencia ortonormado directo $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Se definen los tres puntos : $A = (3, \sqrt{6}, 3)$, $B = (3, -\sqrt{6}, 3)$ y $C = (4, 0, 0)$.

1. (a) Demostrar que los puntos O, A y B no están alineados y dar una ecuación cartesiana del plano P conteniendo O, A y B.
   (b) Calcular las distancias OA, OB y AB. Deducir la naturaleza del triángulo OAB.
   (c) ¿Los puntos O, A, B y C son coplanares ?
2. Sea G el baricentro de los puntos O, A, B y C, es decir por definición el único punto G del espacio tal que : $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
   (a) Demostrar que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
   (b) Deducir las coordenadas de G en $\mathscr{R}$.
3. (a) Demostrar que la recta (GC) es perpendicular al plano P.
   (b) Calcular las coordenadas del punto de intersección de la recta (GC), con el plano P.
4. Demostrar que la transformación espacial definida por las fórmulas : $(x' = x, y' = -y, z' = z)$ es una isometría. ¿Cuáles son sus puntos fijos ? Determinar las imágenes de los puntos O, A, B, C por esta isometría. ¿Qué se observa ?

[002043]

Ejercicio 5577

El espacio se refiere a un marco ortonormado directo $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Se definen los puntos

$$A : (1,2,3)\ ; \quad B : (2,3,1)\ ; \quad C : (3,1,2)\ ; \quad D : (1,1,1)$$

y el plano

$$\Pi : 2x - 3y + 4z = 0.$$

1. Demostrar que los puntos A, B, C no están alineados.
2. Demostrar que los puntos A, B, C, D no son coplanares.
3. Dar una ecuación cartesiana del plano P pasando por A, B, C.
4. Calcular la distancia de D en el plano P.
5. Dar una representación paramétrica de la recta $d = P \cap \Pi$.

[002044]

Ejercicio 5578

Sean A, B y C tres puntos distintos y no alineados del espacio afín tridimensional $\mathscr{E}$. Se denota P el plano que contiene A, B y C. Sea O un punto de $\mathscr{E}$ no perteneciente a P.

1. (a) Explicar brevemente por qué $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ es un sistema cartesiano de $\mathscr{E}$.
   (b) En este sistema de referencia $\mathscr{R}$, escribir las coordenadas de los puntos O, A, B y C, y determinar una ecuación cartesiana del plano P.
2. Sea A' el punto de la recta (OA) tal que $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$. Se denota P' el plano paralelo a P pasando por A'. P' corta (OB) en B' y (OC) en C'. En $\mathscr{R}$, escribir las coordenadas de los puntos A', B' y C' y determinar las ecuaciones paramétricas para rectas (BC') y $(B'C)$, deducir ecuaciones cartesianas a partir de estas rectas. Calcular las coordenadas de puntos $I = (BC') \cap (B'C)$, $J = (AC') \cap (A'C)$ y $K = (AB') \cap (A'B)$.

3. Sea A'' el punto de la recta (OA) tal que $\overrightarrow{OA''} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. Se denota P'' el plano paralelo a P pasando por A''. P'' corta (OB) en B'' y (OC) en C''. Demostrar que las rectas (IA''), (JB''), (KC'') son paralelas.

[002045]

Ejercicio 5579 Ecuación del producto vectorial

Sean A, B, C tres puntos distintos del espacio. Determinar el lugar de puntos M tales que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

Solución ▼ [004958]

Ejercicio 5580 $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\|$

Sean A, B, C, D, E cinco puntos del espacio y $k \in \mathbb{R}$. Determinar el lugar de puntos M del espacio tales que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\|$.

Solución ▼ [004959]

Ejercicio 5581 Ensi Chimie P 93

Encontrar las coordenadas proyectadas del punto $C(3,4,-2)$ en las rectas definidas por las ecuaciones : $D_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+3}{-4}$. $D_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Solución ▼ [004960]

Ejercicio 5582 Proyecciones sobre 4 planos

En el espacio se dan los planos $\begin{cases} P & x+y=1 \\ Q & y+z=1 \\ R & x+z=1 \\ S & x+3y+z=0 \end{cases}$ y el punto $A : (1,1,\lambda)$. Dar una CNS en λ, para que las proyecciones de A en los cuatro planos sean coplanares.

Solución ▼ [004961]

Ejercicio 5583 Cálculo de puntos y planos

En el espacio se dan los puntos $A : (1,2,3)$, $B : (2,3,1)$, $C : (3,1,2)$, $D : (1,0,-1)$.

1. Encontrar el centro y el radio de la esfera circunscrita $ABCD$.
2. Encontrar las ecuaciones cartesianas de los planos (ABC), (ABD), (ACD), (BCD).
3. Hallar el centro y el radio de la esfera inscrita en el tetraedro $ABCD$.

Solución ▼ [004962]

Ejercicio 5584 Perpendicular común a dos rectas

En el espacio se dan las rectas $D : \begin{cases} x-y+z=-1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ y $D' : \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y-z=\frac{1}{2}. \end{cases}$
Determinar la perpendicular común, Δ, a D y D' (se dan los puntos $H \in D \cap \Delta$ y $K \in D' \cap \Delta$).

Solución ▼ [004963]

Ejercicio 5585 Perpendicular común a dos rectas

En el espacio se dan las rectas $D : \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ y $D' : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=0. \end{cases}$

Calcular $d(D,D')$.

Solución ▼ [004964]

Ejercicio 5586 Tetraedro cuyas caras tienen la misma área

Sea $ABCD$ un tetraedro cuyas cuatro caras tienen la misma área. Demostrar que los lados no coplanares tienen dos o dos la misma longitud.

Solución ▼ [004965]

Ejercicio 5587 Distancia entre los lados de un tetraedro

Sea $ABCD$ un tetraedro regular de lado a. Encontrar la distancia entre dos lados no coplanares.

Solución ▼ [004966]

Ejercicio 5588 Distancia de un punto a una recta

En el espacio se dan la recta $D : \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ y $M(x,y,z)$. Calcular $d(M,D)$.

Solución ▼ [004967]

Ejercicio 5589 Proyección ortogonal

En el espacio se da el plano $P : x+2y+3z=4$. Determinar la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre P.

Solución ▼ [004968]

Ejercicio 5590 Proyección ortogonal

En el espacio se dan los puntos $A : (1,0,-1)$, $B : (-1,1,1)$, $C : (2,-1,1)$, $D : (1,2,-2)$, $E : (-2,-2,0)$. Determinar, por un punto y un vector director, la proyección de (DE) en el plano (ABC).

Solución ▼ [004969]

Ejercicio 5591 Simétrica de un plano

En el espacio se dan los planos $P : x+y+z=1$ y $Q : 2x-y+z=1$. Encontrar una ecuación cartesiana del plano Q' simétrico de Q, con respecto a P.

Solución ▼ [004970]

Ejercicio 5592 Marcos de referencias ortonormados

Sean $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ y $(O,\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OC'})$ dos marcos de referencia ortonormados directos del espacio. Demostrar que $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ son coplanares. [004971]

Ejercicio 5593 Ángulo de un plano y una recta

Sean P un plan, D una recta tal que $\overline{(P,D)} \equiv \theta \pmod{\pi}$. Demostrar que para todo recta $\Delta \subset P$, se tiene $\cos(D,\Delta) \geqslant \cos\theta$. ¿Cuándo hay igualdad ? [004972]

Ejercicio 5594 Ángulo entre dos caras de un dodecaedro

¿Cuál es el ángulo entre dos caras de un dodecaedro regular ? (se da : $4\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$)

Solución ▼ [004973]

Ejercicio 5595 Ensi P 90

Determinar la ecuación de la esfera que contiene los círculos de ecuaciones $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2. \end{cases}$

Solución ▼ [004974]

Ejercicio 5596 Esfera definida por sus intersecciones

Sea S una parte del espacio que contiene al menos dos puntos y tales que para todo plano P, $P\cap S$ es un círculo, un punto aislado o vacío. Demostrar que S es una esfera.

Solución ▼ [004975]

Ejercicio 5597 CNS para dos tornillos conmuten

Sean f,g dos tornillos de ángulos $\neq\pi$. Encontrar un CNS para que $f\circ g=g\circ f$. (Se estudia $f\circ g\circ f^{-1}$)

Solución ▼ [004976]

Ejercicio 5598 Composición de 3 semi-vueltas

Sean D_1,D_2,D_3, tres rectas, y $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ los $\frac{1}{2}$-tours correspondants. Demostrar que $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$ es un $\frac{1}{2}$-vuelta si y solo si D_1,D_2,D_3 tienen una perpendicular común o son paralelas.

Solución ▼ [004977]

Ejercicio 5599 Composición de semi-vueltas con respecto a las aristas de un tetraedro

Sea $ABCD$ un tetraedro regular, y d_{AB},d_{AC},d_{AD} los $\frac{1}{2}$-tours alrededor de las rectas $(AB),(AC),(AD)$. Simplificar $f=d_{AB}\circ d_{AC}\circ d_{AD}$.

Solución ▼ [004978]

Ejercicio 5600 Isometrías transformando un triángulo en un triángulo dado

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$. ¿Cuántas isometrías hay que transforman ABC en $A'B'C'$?
Indicación : si f y g son dos de tales isometrías, entonces $f\circ g^{-1}$ es una isometría que conserva ABC.

Solución ▼ [004979]

Ejercicio 5601 Grupos de isotropía

Determinar *todas* las isometrías

1. de un tetraedro regular.
2. de un cubo.
3. de dos rectas no coplanares.

Solución ▼ [004980]

Ejercicio 5602 Composición de proyecciones

Sean D_1, D_2, D_3 tres rectas del espacio no todas paralelas. Para $M_1 \in D_1$ se construye : M_2, proyectado de M_1 sobre D_2, M_3, proyectado de M_2 sobre D_3, M_4, proyectado de M_3 sobre D_1. Demostrar que existe un único punto $M_1 \in D_1$ tal que $M_4 = M_1$.

Solución ▼ [004981]

Ejercicio 5603 **T

En E_3 referido a un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, se dan los puntos $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$ y $D(1,0,4)$. Determinar la intersección de los planos (OAB) y (OCD).

Solución ▼ [005501]

Ejercicio 5604 **T

En E_3 referido a un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, se da : la recta (D) del cual un sistema de ecuaciones paramétricas es $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$ el plano P del cual un sistema de ecuaciones paramétricas es $\begin{cases} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = -1-3\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ el plano P' del cual un sistema de ecuaciones paramétricas es $\begin{cases} x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\eta \\ z = \nu+\eta. \end{cases}$ Estudiar $D \cap P$ y $P \cap P'$

Solución ▼ [005502]

Ejercicio 5605 **T

Dar la matriz en la base canónica ortonormada directa de la rotación vectorial de $\mathbb{R}^3$ alrededor de $(1,2,2)$ que transforma $\overrightarrow{j}$ en $\overrightarrow{k}$.

Solución ▼ [005503]

Ejercicio 5606 Preguntas del curso

Recordar todas las isometrías del plano euclidiano y del espacio euclidiano de dimensión 3, precisando su parte lineal, su punto fijo, su eje, su componente de punto fijo y su componente deslizante. [007473]

Ejercicio 5607 Encontrar la isometría

Sea E un espacio euclidiano afín de dimensión 3 dotado de un sistema de coordenadas cartesianas ortonormadas. Se denota v la transformación de E en E que envía el punto de coordenadas (x,y,z) en el punto de coordenadas (x',y',z') definidas por :

$$x' = \frac{2x-2y+z+1}{3}; y' = \frac{2x+y-2z+2}{3}; z' = \frac{x+2y+2z+5}{3}.$$

Demostrar que v es una isometría de E. Especificar qué tipo de isometría se trata. Explicitar su eje y su vector de deslizamiento. [007476]

Ejercicio 5608 Composición de isometrías

Sea E un espacio euclidiano afín de dimensión 3 dotado de un sistema de coordenadas cartesianas ortonormadas $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Se designa por D la recta de ecuación $(x = 0, z = 1)$ y por D' la recta de ecuación $(y = 0, z = 0)$. Se denota S_D la simetría con respecto a la recta D y R_θ la rotación de eje D' y de ángulo θ (considerando la base (j,k) como directo). Se define $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

1. Escribir en la base (i, j, k) la matriz de $\overrightarrow{S_D}$, esto $\overrightarrow{R_\theta}$ y la de $\overrightarrow{\varphi}$. Escribir las expresiones analíticas de S_D y de R_θ en el sistema de referencia $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
2. Demostrar que φ es una simetría eventualmente deslizada de eje una recta Δ.
3. Para todo punto M de E, probar que los puntos medios de $\big(M, s_\Delta(M)\big)$ y de $\big(M, \varphi(M)\big)$ están en Δ.
4. Usando el punto O, demostrar que Δ pasa por el punto de coordenadas $(0,0,1)$. Y está contenido en el plano afín de ecuación $x = 0$.
5. Dar las componentes del vector de deslizamiento de φ en función de θ.

[007477]

Ejercicio 5609 Grupo dejando estable una parte

Sean E un espacio euclidiano afín de dimensión 3 y $\mathscr{R}$ un marco cartesiano ortonormado de E. Sea n un entero $\geqslant 3$. Se considera el conjunto X de puntos de E cuyas coordenadas (x,y,z) en $\mathscr{R}$ satisfacen las siguientes dos condiciones :

1. Los números x, y y z están en $\mathbb{Z}$;
2. El número $x+y+z$ es divisible por n.

Se denota O el origen de $\mathscr{R}$ y A, B, C y D los puntos de coordenadas en $\mathscr{R}$:

$$A = (n,0,0), \quad B = (0,n,0), \quad C = (0,0,n) \quad \text{y} \quad D = (1,-1,0).$$

Sean G el subgrupo de isometrías afines de E que preservan globalmente el conjunto X y G_0 el subgrupo de G formado por elementos que fijan O.

1. Sean P y Q dos elementos de X. Demostrar que la traslación vectorial $\overrightarrow{PQ}$ pertenece a G. Deducir una caracterización de las traslaciones que pertenecen a G.
2. ¿Cuáles son los centros de simetrías con respecto a un punto que pertenecen a G?
3. Describir todos los elementos P de X tales que $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 2$.
4. Se considera el conjunto $\mathscr{T}$ de transformaciones afines que dejan fijo O y conservar globalmente el conjunto $\{A,B,C\}$. Demostrar que los elementos de $\mathscr{T}$ son isometrías y que conservan X. Demostrar que $\mathscr{T}$ es un subgrupo de G_0 isomorfo al grupo de permutación S_3. Explicitar la representación matricial de las transformaciones de $\mathscr{T}$.
5. Deducir de las preguntas anteriores la órbita de D bajo la acción de G_0. Demostrar que todo elemento de G_0 deja globalmente invariante el plano H de ecuación $x+y+z = 0$.
6. Explicitar una representación matricial de la simetría ortogonal a H. ¿Pertenece esta simetría a G?
7. Se considera el conjunto G_0' de restricciones en H de elementos de G_0. Estudiando la acción de G_0' sobre H demostrar que el orden de G_0' es 12. Demostrar que G_0 es de orden 12 o 24 según el valor de n.

[007479]

Ejercicio 5610 Preguntas del curso

1. En un espacio afín, ¿cuál es el significado de la notación $1/3\,A + 1/3\,B + 1/3\,C$, donde A, B, C son tres puntos ?
2. Sea A, B, C, D cuatro puntos de un plano afín. Sea I la mitad de $[C, D]$. El isobaricentro de los puntos A, B, C, D ¿es el centro de gravedad del triángulo A, B, I ?
3. ¿Es una isometría caracterizada por su parte lineal ?
4. Dos isometrías de un espacio afín euclidiano tridimensional que tienen exactamente el mismo plano P de puntos fijos son iguales ?

[007499]

Ejercicio 5611 Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

En el espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar estándar y la base canónica $\mathscr{C}$, aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\mathscr{B}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para obtener una base ortonormada $\mathscr{B}'$. [007500]

Ejercicio 5612 Una simetría

Sea E un espacio afín euclidiano tridimensional y $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un sistema de referencia. Sea $A(1,2,3)$ y $B(3,2,1)$ dos puntos de E.

1. Determinar la expresión analítica en el sistema de coordenadas $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de la simetría ortogonal con respecto al plano mediador del segmento $[AB]$.
2. Verificar el resultado determinando la imagen del punto A.

[007509]

Ejercicio 5613 Cónica

En el espacio afín $\mathscr{E}$ dotado de un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, se considera el cono $\mathscr{C}$ de ecuación $y^2 + z^2 = 3(x-2)^2$.

1. Determinar un plano cuya intersección con el cono $\mathscr{C}$ sea un círculo.
2. Determinar la naturaleza de la intersección de $\mathscr{C}$, con el plano de ecuaciones $z = 1$. Se especifica (si existen) el centro, ejes de simetría y asíntotas.

[007510]

Ejercicio 5614

Escribir la tabla de todas las isometrías de un espacio euclidiano afín de dimensión 3. [007511]

Ejercicio 5615

Demostrar que si f es una aplicación lineal ortogonal de un espacio vectorial euclidiano $\overrightarrow{E}$ de dimensión finita, entonces $\ker(f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ y $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$ son ortogonales suplementarias. [007515]

Ejercicio 5616

Sean E un espacio afín de dimensión 3, y A, B, C, D un tetraedro de E. Demostrar que las rectas que unen los puntos medios de las caras opuestas del tetraedro son concurrentes.

Solución ▼ [007516]

Ejercicio 5617

Sea $(\mathbb{R}^3_{ev}, \text{estándar})$ el espacio euclidiano estándar de la base canónica. Determinar una base ortonormada del subespacio $\text{vect}(e_1, e_1+e_2+e_3)$. Completarla en una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Solución ▼ [007517]

214 243.00 Cónica

Ejercicio 5618 *IT

El plano está relacionado con un marco ortonormada $\mathscr{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Elementos característicos de la cónica con una ecuación cartesiana en $\mathscr{R}$ es

— 1. $y^2 = x$,
2. $y^2 = -x$,
3. $y = x^2$,
4. $y = -x^2$.

— 1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,
3. $x^2 + 2y^2 = 1$.

— 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,
2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,
3. $x^2 - y^2 = 1$.

Solución ▼ [005540]

Ejercicio 5619 *IT

El plano está relacionado con un marco ortonormada $\mathscr{R} = \left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Elementos característicos de la curva con una ecuación en $\mathscr{R}$ es

— 1. $y = x^2 + x + 1$,
2. $y^2 + y - 2x = 0$,
3. $y = \sqrt{2x+3}$.

— 1. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$,
2. $y = -2\sqrt{-x^2+x}$.

— $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$.

Solución ▼ [005541]

Ejercicio 5620 **IT

El plano está relacionado con un marco ortonormada $\mathscr{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Naturaleza y elementos característicos de la curva de la que se obtiene una ecuación de referencia ortonormada

1. $y = \frac{1}{x}$,
2. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$,
3. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,
4. $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$,
5. $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$,
6. $x(x-1) + (y-2)(y-3) = 0$,
7. $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$,
8. $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$.

Solución ▼ [005542]

Ejercicio 5621 *IT

Estudiar las curvas de ecuación polar (en un sistema de referencia ortonormado directo) es

1. $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos\theta}$,
2. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$,
3. $r = \dfrac{1}{2 + \cos\theta}$,
4. $r = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta}$,
5. $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$.

Solución ▼ [005543]

Ejercicio 5622 ***

Determinar la imagen del círculo trigonométrico de la función $\begin{array}{rl} f : \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z & \mapsto \dfrac{1}{1+z+z^2} \end{array}$.

Solución ▼ [005544]

Ejercicio 5623 ***

1. **Recta de SIMSON.** Sea (A, B, C) un triángulo y M un punto del plano. Demostrar que las proyecciones ortogonales P, Q y R de M en los lados (BC), (CA) y (AB) del triángulo (ABC) están alineados si y solo si M está en el círculo circunscrito a (ABC). La recta que pasa por P, Q y R se llama recta de SIMSON del punto M relativamente al triángulo ABC (o en el círculo (ABC)).
2. **Parábola tangente a tres lados de un triángulo.** Lugar geométrico de los focos de parábolas tangentes de tres rectas dos a dos no paralelas. En particular, proporcionar la construcción de puntos de contacto.

Solución ▼ [005546]

Ejercicio 5624 **

$(\mathscr{C})$ es el círculo de diámetro $[A, B]$. (D) es la tangente en A a $(\mathscr{C})$. P es un punto variable en $(\mathscr{C})$ y (T) la tangente en P a $(\mathscr{C})$. (T) interseca (D) en S. La perpendicular a (AB) pasando por P corta (BS) en M. ¿Cuál es el conjunto de puntos M ?

Solución ▼ [005547]

Ejercicio 5625 **

Estudiar las curvas cuya ecuación en un marco ortonormado es :

1. $2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1=0$.
2. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$.
3. $2x^2-4xy-3x+3y+1=0$.
4. $-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2-4=0$.
5. $4x^2+12xy+9y^2-2x+1=0$.
6. $(x-y+1)^2+(x+y-1)^2=0$.
7. $x^2+y^2-3x-y+2=0$.
8. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$.
9. $(x+2y-4)(x-y-1)=3$.
10. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Solución ▼ [005815]

Ejercicio 5626 **

Estudiar las curvas de ecuación polar (en un sistema de referencia ortonormado directo) es

1. $r=\dfrac{2}{1-2\cos\theta}$,
2. $r=\dfrac{6}{2+\cos\theta}$,
3. $r=\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}\theta}$.
   tem[]

Solución ▼ [005816]

Ejercicio 5627 ***

1. Demostrar que toda curva de grado menor o igual que 2 admite una representación paramétrica de la forma
$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{P(t)}{R(t)} \\ y(t)=\dfrac{Q(t)}{R(t)} \end{cases}$$
donde P, Q y R son polinomios de grado menor o igual a 2 y demostrar a la inversa que toda curva paramétrica del tipo anterior es una curva de grado menor o igual que 2.
2. Estudiar la curva $\begin{cases} x=\dfrac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\dfrac{t^2-1}{t^2+2t-1}. \end{cases}$

Solución ▼ [005817]

215 243.01 Elipse

Ejercicio 5628

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de focos F y F', M un punto fijo de $\mathscr{E}$ y M' un punto que se mueve en $\mathscr{E}$. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ los círculos de centros M y M' de radios MF' y $M'F'$. Sean I un punto de $(FM)\cap\mathscr{C}$ tal que $M\in[FI]$ y J el segundo punto de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$.

1. Demostrar que (MM') biseca el ángulo $F'MJ$.
2. ¿En qué se convierte J si M' tiende a M (no se pide prueba)?
3. Demostrar que la tangente a $\mathscr{E}$ en M es la bisectriz exterior del ángulo FMF'.

[002065]

Ejercicio 5629

Demostrar que la curva parametrizada $x(t) = \dfrac{1}{t^2+t+1}$ y $y(t) = \dfrac{t}{t^2+t+1}$ es una elipse y trazarla. [002071]

Ejercicio 5630 Ortóptica de una elipse

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de focos F, F', de centro O, de dimensiones a y b. Sean $M, M' \in \mathscr{E}$ tales que las tangentes a $\mathscr{E}$ son perpendiculares a un punto T. Demostrar que $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$. ¿Cuál es el lugar de T, cuando M y M' variar ?

Solución ▼ [004912]

Ejercicio 5631 Tangentes a una elipse

Sean $\mathscr{E} : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$, y $\mathscr{E}' : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. ¿Puede dar una CNS en u, v, w de modo que la recta de ecuación $ux + vy + w = 0$ sea tangente a $\mathscr{E}'$?
2. Sean (MP), (MQ) dos tangentes a $\mathscr{E}'$, con $M, P, Q \in \mathscr{E}$. Demostrar que (PQ) es también tangente a $\mathscr{E}$.

Solución ▼ [004913]

Ejercicio 5632 Puntos móviles con $PQ =$ constante

Sean P un punto móvil en Ox, y Q un punto móvil en Oy tales que PQ permanece constante.

1. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, determinar el lugar, $\mathscr{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P : 1-\alpha, Q : \alpha)$.
2. Sea R el cuarto punto del rectángulo $OPQR$. Demostrar que la tangente a $\mathscr{C}_\alpha$ en un punto M es perpendicular a (RM).

Solución ▼ [004914]

Ejercicio 5633 FMT es rectangular en F

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de foco F, directriz D. Sea $M \in \mathscr{E}$ fuera del eje focal, y T el punto de intersección de la tangente en M y de la directriz D. Demostrar que FMT es rectangular en F.

Solución ▼ [004915]

Ejercicio 5634 $1/OM^2 + 1/OP^2$

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de centro O y de dimensiones a, b. Sean $M, P \in \mathscr{E}$ tales que OMP sea rectángulo en O.

1. Demostrar que $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OP^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.
2. Deducir que (MP) permanece tangente a un círculo fijo de centro O.

[004916]

Ejercicio 5635 Círculo en una tangente

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de vértices A, A', y $M \in \mathscr{E}$. La tangente en M corta las tangentes en A, A' en P, P'. Demostrar que el círculo de diámetro $[P, P']$ pasa por los focos de $\mathscr{E}$. [004917]

Ejercicio 5636 ***

Sea P un polinomio de grado 3, con coeficientes reales. Demostrar que la curva de ecuación $P(x) = P(y)$ en un cierto sistema de referencia ortonormado, es en general la unión de una recta y una elipse de excentricidad fija.

Solución ▼ [005550]

Ejercicio 5637 ***

$(\mathscr{C})$ es el círculo de diámetro $[AB]$. $(\mathscr{D})$ es la tangente en A en el círculo $(\mathscr{C})$. P es un punto variable en el círculo $(\mathscr{C})$ y $(\mathscr{T})$ la tangente en P en el círculo $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{T})$ interseca $(\mathscr{D})$ en S. La perpendicular a la recta (AB) pasando por P corta la recta (BS) en M. ¿Cuál es el conjunto de puntos M?

Solución ▼ [005820]

Ejercicio 5638 **

Sea P un polinomio de grado 3, con coeficientes reales. Demostrar que la curva de ecuación $P(x) = P(y)$ en un cierto sistema de referencia ortonormada, es en general la unión de una recta y una elipse de excentricidad fija.

Solución ▼ [005822]

216 243.02 Parábola

Ejercicio 5639

Sea $\mathscr{P}$ una parábola de foco F, de directriz $\mathscr{D}$, M un punto de $\mathscr{P}$ y H su proyectado ortogonal sobre $\mathscr{D}$. Demostrar que la tangente a $\mathscr{P}$ en M es la mediatriz de $[FH]$. Deducir un procedimiento de construcción de una parábola. [002066]

Ejercicio 5640

Determinar el conjunto de puntos a partir de los cuales se pueden trazar dos tangentes ortogonales a una parábola. [002067]

Ejercicio 5641

Determinar con ingenio el vértice y el eje de la parábola $x(t) = t^2 + t + 1$ y $y(t) = t^2 - 2t + 2$. [002070]

Ejercicio 5642 Ortóptica de una parábola

Sea P una parábola de foco F y de directriz D. Sea $M \in P$, y M' un punto de P tal que las tangentes en M y M' son ortogonales.

1. Demostrar que estas tangentes se cortan en el punto medio de $[H, H']$.
2. Demostrar que M, F, M' están alineados. Deducir en un sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dado, todas las parábolas tangentes a los ejes de coordenadas.

Solución ▼ [004903]

Ejercicio 5643 Círculo circunscrito

Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O, y A,B dos puntos distintos de $\mathscr{C}$. Sea Δ el diámetro paralelo a (AB). Para $M \in \mathscr{C}$, se denota P,Q las intersecciones de (MA) y (MB), con Δ. Determinar el lugar del centro del círculo circunscrito a MPQ.

Solución ▼ [004904]

Ejercicio 5644 Proyección sobre el diámetro de un círculo

Se da un círculo $\mathscr{C}$ de centro O y $A \in \mathscr{C}$. Para $M \in \mathscr{C}$, se construye el proyectado N en el diámetro perpendicular a (OA), e I, el punto de intersección de (OM) y (AN). ¿Cuál es el lugar de I ?

Solución ▼ [004905]

Ejercicio 5645 $MF+MH=2a$

Sea F un punto, D una recta que no pasa por F, y $a > \frac{1}{2}d(F,D)$. Encontrar el conjunto de puntos M tales que $MF+d(M,D)=2a$.

Solución ▼ [004906]

Ejercicio 5646 Parábolas que pasan por un punto

Sean D una recta y $F \in D$. Demostrar que para todo punto $M \notin D$, pasan exactamente dos parábolas de foco F y de eje D. Demostrar que las tangentes a estas parábolas en M son ortogonales. [004907]

Ejercicio 5647 Longitud mínima de una cuerda normal, Ensi Physique 93

Sea $\mathscr{P}$ una parábola de parámetro p y $A \in \mathscr{P}$. Sea B el punto donde la normal a $\mathscr{P}$ en A interseca $\mathscr{P}$. Determinar la longitud minimal de AB.

Solución ▼ [004908]

Ejercicio 5648 Cuerdas perpendiculares, Central P' 1996

Se considera una parábola en el plano euclidiano.

1. Expresar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos A y B de la parábola usando un determinante de orden 3.
2. A,B,C son tres puntos en la parábola, expresar el hecho que (AB) y (AC) son perpendiculares.
3. Se fija A en la parábola, B y C son dos puntos de la parábola variables tales que (AB) y (AC) son perpendiculares. Demostrar que (BC) pasa por un punto fijo M.
4. ¿Cuál es el lugar geométrico de M, cuando A varía ?

Solución ▼ [004909]

Ejercicio 5649 Normales concurrentes, Central P' 1996

Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2=2px$ y $M_0=(x_0,y_0) \in \mathscr{P}$.

1. Discutir la existencia y el número de puntos $M \in \mathscr{P}$ distintos de M_0 tales que la normal a $\mathscr{P}$ en M pasa por M_0.
2. En caso de que haya dos soluciones, M_1 y M_2, hallar el lugar geométrico del centro de gravedad del triángulo $M_0M_1M_2$.

Solución ▼ [004910]

Ejercicio 5650 Cruces en una parábola, Central MP 2000

Para $p>0$ se da la curva Γ de ecuación $y^2=2px$. Sea un cuadrado $ABCD$ tal que $B,D\in\Gamma$ y A,C pertenecen al eje de simetría de Γ.

1. ¿Cuál es la relación entre las abscisas de A y C?
2. Se construye una sucesión (M_n) puntos de Ox, M_n de abscisa x_n, tal que $x_{n+1}>x_n$ y M_nM_{n+1} es la diagonal de un cuadrado cuyos otros dos vértices pertenecen a Γ. Determinar un equivalente de x_n quand $n\to\infty$.

Solución ▼ [004911]

Ejercicio 5651 **

Determinar la ortóptica de una parábola, es decir el conjunto de puntos del plano por los que pasan dos tangentes a la parábola, perpendiculares entre sí.

Solución ▼ [005545]

Ejercicio 5652 ***

Sea, en $\mathbb{R}^3$ referido a un marco ortonormado $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la curva (Γ) de ecuaciones $\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Demostrar que (Γ) es una parábola de la cual determinaremos, el vértice, el eje, el foco y la directriz.

Solución ▼ [005548]

Ejercicio 5653 ***

Ecuación cartesiana de la parábola tangente a (Ox) en $(1,0)$ y a (Oy) en $(0,2)$.

Solución ▼ [005552]

Ejercicio 5654 **

Determinar la ortóptica de una parábola, es decir el conjunto de puntos del plano por donde pasan dos tangentes a la parábola que son perpendiculares.

Solución ▼ [005818]

Ejercicio 5655 ***

1. (Recta de SIMSON) Sean ABC un triángulo y M un punto del plano. Demostrar que las proyecciones ortogonales P, Q y R del punto M en los lados (BC), (CA) y (AB) del triángulo ABC están alineados si y solo si M está en el círculo circunscrito al triángulo ABC. La recta que pasa por los puntos P, Q y R se llama recta de SIMSON del punto M relativamente al círculo (ABC).
2. (Parábola tangente a tres lados de un triángulo) Lugar geométrico de los focos de parábolas tangentes de tres rectas dos a dos no paralelas. Proporcionar en particular la construcción de puntos de contacto.

Solución ▼ [005819]

Ejercicio 5656 **

El espacio de dimensión 3 se refiere a un sistema de referencia ortonormado $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Se denota (Γ) la curva de ecuaciones

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Demostrar que (Γ) es una parábola cuyo vértice determinaremos, el eje, el foco y la directriz.

Solución ▼ [005821]

Ejercicio 5657 **

Ecuación cartesiana de la parábola $(\mathscr{P})$ tangente a (Ox) en $(1,0)$ y a (Oy) en $(0,2)$.

Solución ▼ [005824]

217 243.03 Hipérbola

Ejercicio 5658 Proyección no ortogonal

Sean F un punto, D una recta que no pasa por F, y $\overrightarrow{\Delta}$ una dirección ni igual ni perpendicular a $\overrightarrow{D}$. Para $M \in \mathscr{P}$, se denota H el proyectado de M sobre D, paralelamente a $\overrightarrow{\Delta}$. ¿Cuál es el conjunto de puntos M tal que $MF = MH$?

Solución ▼ [004918]

Ejercicio 5659 Triángulo rectángulo en una hipérbola

Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola equilátera de dimensión a. Se considera un SOND $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ construido sobre las asíntotas de $\mathscr{H}$.

1. Determinar la ecuación de $\mathscr{H}$ en este sistema.
2. Sea ABC un triángulo rectángulo en A cuyos tres vértices están sobre $\mathscr{H}$. Demostrar que la tangente en A es ortogonal a (BC).
3. Sea ABC un triángulo cualquiera cuyos vértices están en $\mathscr{H}$. Demostrar que el ortocentro también.

Solución ▼ [004919]

Ejercicio 5660 Círculo en una tangente

Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola de vértices A, A', y $M \in \mathscr{H}$. La tangente en M corta las tangentes en A, A' en P, P'. Demostrar que el círculo de diámetro $[P, P']$ pasa por los focos de $\mathscr{H}$. [004920]

Ejercicio 5661 Triángulo equilátero

Sean A, F dos puntos distintos, D su mediatriz, $\mathscr{H}$ la hipérbola de foco F, directriz D, excentricidad 2, y $\mathscr{C}$ un círculo que pasa A y F, de centro I.

1. Para $M \in \mathscr{C}$, demostrar que $M \in \mathscr{H} \Leftrightarrow 3\overline{(\overrightarrow{IM}, D)} \equiv \overline{(\overrightarrow{IF}, D)}\ [2\pi]$.
2. Deducir que si $I \notin (AF)$, $\mathscr{C}$ corta $\mathscr{H}$ en los vértices de un triángulo equilátero.

Solución ▼ [004921]

Ejercicio 5662 $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv 2\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO})}$

Sean O, A dos puntos distintos del plano. Encontrar los puntos M tales que $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv 2\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO})}$.

Solución ▼ [004922]

Ejercicio 5663 Lugar geométrico

Sean A, A' dos puntos distintos y $\mathscr{C}$ el círculo de diámetro $[A, A']$. Para $P \in \mathscr{C}$, se construye : P' el simétrico de P, con respecto a (AA'), y M el punto de intersección de (AP) y (A', P'). ¿Cuál es el lugar de M ?

Solución ▼ [004923]

Ejercicio 5664 Triángulo en una hipérbola, Ensi P 91

Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola equilátera y ABC un triángulo cuyos vértices pertenecen a $\mathscr{H}$. Demostrar que el ortocentro, H, del triángulo pertenece también a $\mathscr{H}$. Comparar H y el punto Q, donde el círculo circunscrito de ABC interseca $\mathscr{H}$.

Solución ▼ [004924]

Ejercicio 5665 *

¿Cuál es la excentricidad de la hipérbola equilátera (una hipérbola es equilátera si y solo si sus asíntotas son perpendiculares) ?

Solución ▼ [005549]

Ejercicio 5666 ***

Sea $(\mathscr{H})$ una hipérbola equilátera de centro O y P y Q dos puntos de $(\mathscr{H})$ simétricos con respecto a O. Demostrar que el círculo de centro P y de radio PQ interseca $(\mathscr{H})$ en tres puntos formando un triángulo equilátero de centro P.

Solución ▼ [005551]

Ejercicio 5667 ***

Sea $(\mathscr{H})$ una hipérbola equilátera de centro O y P y Q dos puntos de $(\mathscr{H})$ simétricos con respecto a O. Demostrar que el círculo de centro P y de radio PQ interseca $(\mathscr{H})$ en tres puntos formando un triángulo equilátero de centro P.

Solución ▼ [005823]

218 243.04 Cuádruple

Ejercicio 5668 Estudio de ecuaciones

Determinar la naturaleza de las superficies de ecuación :

1. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
2. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
3. $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx+4=0$.
4. $x^2-2y^2-z^2+2xz-4yz+3=0$.
5. $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz+4x-2y-z+3=0$.

6. $xy + xz + yz + 1 = 0$.
7. $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$.
8. $xy + yz = 1$.
9. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.
   Hacer cálculos mínimos necesarios para poder concluir.

Solución ▼ [004925]

Ejercicio 5669 Marco de referencia no ortonormado

Sea $\mathscr{S}$ una superficie de ecuación $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ en un marco no ortonormado. Demostrar que es aún una cuádrica. [004926]

Ejercicio 5670 Centro de simetría

Sea $\mathscr{S}$ una cuádrica de ecuación $f(x,y,z) = 0$. Se denota q la forma cuadrática asociada con f.

1. Demostrar que, para todo punto A y todo vector $\overrightarrow{h}$, se tiene : $f(A + \overrightarrow{h}) = f(A) + (\overrightarrow{\nabla} f(A) \mid \overrightarrow{h}) + q(\overrightarrow{h})$.
2. Se supone que $\mathscr{S}$ no está incluido en un plano. Demostrar que un punto Ω es centro de simetría de $\mathscr{S}$ si y solo si $\overrightarrow{\nabla} f(\Omega) = \overrightarrow{0}$.
3. Deducir que si 0 no es el valor propio de la matriz de q, entonces $\mathscr{S}$ admite un centro único.

[004927]

Ejercicio 5671 Cono apoyado en una elipse

Sea $\mathscr{E}$ la elipse de ecuaciones : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$, con $z_0 \neq 0$. Se denota $\mathscr{C}$ el cono de vértice Ω generado por $\mathscr{E}$.

1. Encontrar una ecuación cartesiana de $\mathscr{C}$.
2. ¿Cuáles son los puntos Ω tales que $\mathscr{C} \cap Oyz$ sea un círculo ?

Solución ▼ [004928]

Ejercicio 5672 Secciones circulares

1. Se considera la forma cuadrática $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a \in [b,c]$.
   (a) Demostrar que existe $y, z \in \mathbb{R}$ tales que $y^2 + z^2 = 1$ y $by^2 + cz^2 = a$.
   (b) Deducir que existe una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de q es de la forma : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.
2. Sea $\mathscr{E}$ un elipsoide de centro O. Demostrar que existe un plano P que corta $\mathscr{E}$ a lo largo de un círculo de centro O. Demostrar que las secciones de $\mathscr{E}$ por planos paralelos a P son círculos.
3. ¿Se puede generalizar a cualquier cuádrica ?

Solución ▼ [004929]

Ejercicio 5673 Rotación de una recta

1. Sea D la recta de ecuaciones $\begin{cases} y = 1 \\ x = \lambda z, \end{cases}$ donde λ es un real no nulo fijo. Determinar una ecuación cartesiana y la naturaleza de la superficie $\mathscr{S}$ generada por la rotación de D alrededor de Oz.
2. Deducir que todo hiperboloide de revolución de una hoja es unión de una familia de rectas (*superficie reglada*).
3. Generalizar a un hiperboloide de una hoja arbitrario.

Solución ▼ [004930]

Ejercicio 5674 Líneas en un paraboloide hiperbólico

Sea $\mathscr{P}$ el paraboloide de la ecuación $z = xy$. Demostrar que en todo punto $M \in \mathscr{P}$, pasan dos rectas y solo dos incluidas en $\mathscr{P}$. [004931]

Ejercicio 5675 Hipérbola en rotación

Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuaciones : $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 = 0 \\ x + z = 1. \end{cases}$

1. Determinar la naturaleza y los elementos notables de $\mathscr{C}$.
2. Encontrar una ecuación cartesiana de la superficie $\mathscr{S}$ generada por la rotación de $\mathscr{C}$ alrededor de Oz y reconocer $\mathscr{S}$.

Solución ▼ [004932]

Ejercicio 5676 Volumen de un elipsoide

Sea $\mathscr{S}$ la superficie de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3z^2}{4} + xz = 1$. Demostrar que $\mathscr{S}$ es un elipsoide y calcular el volumen interior.

Solución ▼ [004933]

Ejercicio 5677 Ecuación de un cono

Determinar los reales λ tal que la superficie de la ecuación : $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) = \lambda$ sea un cono. Precisar entonces el vértice y la naturaleza del cono.

Solución ▼ [004934]

Ejercicio 5678 Plano tangente a un elipsoide

Sea $\mathscr{E}$ un elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y P un plano de ecuación $ux + vy + wz = 1$. Demostrar que P es tangente a E si y solo si $a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$. [004935]

Ejercicio 5679 Normal a un elipsoide

Sea $\mathscr{E}$ un elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, M un punto de $\mathscr{E}$, y P,Q,R las intersecciones de la normal en M a $\mathscr{E}$, con los planos Oyz, Oxz, Oxy. Demostrar que $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ están en una relación constante (independiente de M).

Solución ▼ [004936]

Ejercicio 5680 Puntos equidistantes de dos rectas

Sean D,D' dos rectas no coplanares y $\mathscr{S}$ el conjunto de puntos equidistantes de D y D'. Demostrar que $\mathscr{S}$ es un paraboloide hiperbólico. (Utilizar un buen sistema de referencia) [004937]

Ejercicio 5681 $MF = eMH$

Se considera un punto F, un plano P sin pasar por F y un real $e>0$. Demostrar que el conjunto, $\mathscr{S}$, de puntos M tales que $MF = ed(M,P)$ es una cuádrica de revolución. Precisar los diferentes casos posibles. [004938]

Ejercicio 5682 $MF = ed(M,D)$

En el espacio, se considera un punto F, una recta D sin pasar por F y un real $e>0$. Demostrar que el conjunto, $\mathscr{S}$, de puntos M tales que $MF = ed(M,D)$ es una cuádrica. Especificar los diferentes casos posibles.

Solución ▼ [004939]

Ejercicio 5683 $d(M,P)^2+d(M,D)^2 =$ constante

Se considera un plano P y una recta D secantes. Determinar el lugar de los puntos M tales que $d(M,P)^2 + d(M,D)^2 = a$ (constante fija).

Solución ▼ [004940]

Ejercicio 5684 Puntos equidistantes de un plano y una recta

En el espacio, sea P el plano de ecuación $z=0$ y D la recta de ecuaciones : $\begin{cases} y=0 \\ x\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2})$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos M tales que $d(M,P) = d(M,D)$?

Solución ▼ [004941]

Ejercicio 5685 Esferas equidistantes de una esfera y un plano

En el espacio, se considera un plano P y una esfera S. ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las esferas tangentes a S y P ?

Solución ▼ [004942]

Ejercicio 5686 Denominaciones no controladas

La lista de cuádricas parece contener omisiones : paraboloide parabólico, cono hiperbólico,... Enumerar todas las superficies olvidadas y constatar que se conocen con otros nombres. [004943]

Ejercicio 5687 ** I

Naturaleza y « elementos característicos » de la cuádrica $(\mathscr{S})$, donde una ecuación en un marco ortonormado dado $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ del espacio de dimensión 3 es :

1. $x^2+y^2+z^2-2yz-4x+4y-1=0$.
2. $x^2+y^2+z^2+2xy-1=0$.
3. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
4. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-2x+4y=0$.
5. $x^2-4x-3y-2=0$.
6. $7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0$.
7. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
8. $xy+yz=1$.
9. $xy+yz+zx+2y+1=0$.

Solución ▼ [005825]

Ejercicio 5688 **

Determinar la cuádrica que contiene el punto $A(2,3,2)$ y las dos parábolas $(\mathscr{P})$ de ecuaciones $\begin{cases} z=0 \\ y^2=2x \end{cases}$ y $(\mathscr{P}')$ de ecuaciones $\begin{cases} x=0 \\ y^2=2z. \end{cases}$

Solución ▼ [005826]

Ejercicio 5689 ***

Demostrar que toda ecuación cuadrática simétrica en x, y y z es la ecuación de una superficie de revolución (una superficie $(\mathscr{S})$ se dice de revolución de eje $(\mathscr{D})$ si y solo si $(\mathscr{S})$ es invariante para toda rotación del eje $(\mathscr{D})$).

Solución ▼ [005827]

Ejercicio 5690 ***

Formar la ecuación de la superficie de revolución $(\mathscr{S})$ generada por la rotación de la recta $(\mathscr{D})$ $\begin{cases} x=z+2 \\ y=2z+1 \end{cases}$ alrededor de la recta (Δ) de ecuaciones $x=y=z$. ¿Cuál superficie se obtiene ?

Solución ▼ [005828]

Ejercicio 5691 ***

Determinar la ecuación de cono de vértice S y de directriz $(\mathscr{C})$ en los siguientes casos :

1. $S(0,0,0)$ y $(\mathscr{C}) : x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ t\in\mathbb{R}^*$.
2. $S(1,-1,0)$ y $(\mathscr{C}) : \begin{cases} y+z=1 \\ x^2+y^2=z \end{cases}$.

Solución ▼ [005829]

Ejercicio 5692 ***

Encontrar una ecuación del cono de vértice S circunscrito a la superficie $(\mathscr{S})$ cuando

1. $S(0,5,0)$ y $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=9$,

2. $S(0,0,0)$ y $(\mathscr{S}) : x^2+xy+z-1=0$. (Especificar la curva de contacto.)

(**Definiciones.** El cono $(\mathscr{C})$ de vértice S circunscrito a la superficie $(\mathscr{S})$ es la unión de las tangentes a $(\mathscr{S})$ pasando por S. Por otra parte, una recta es tangente a la superficie $(\mathscr{S})$ en un punto M si y solo si pasa por M y está contenido en el plano tangente a $(\mathscr{S})$ en M).

Solución ▼ [005830]

Ejercicio 5693 ***

¿Para qué valores de λ la superficie $(\mathscr{S})$ de ecuación $x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda=0$ es un cono de segundo grado ? Precisar entonces el vértice y la directriz.

Solución ▼ [005831]

Ejercicio 5694 *

Demostrar que el arco parametrizado $\begin{cases} x=\frac{1}{2}e^t(\cos t-\operatorname{sen} t) \\ y=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\operatorname{sen} t) \\ z=e^t \end{cases}$ se traza sobre un cono cuadrático con vértice O.

Solución ▼ [005832]

Ejercicio 5695 ***

Ecuación cartesiana del cilindro $(\mathscr{C})$ de dirección $\vec{u}$ y de directriz (C) en los siguientes casos :

1. $\vec{u}(1,0,1)$ y $(C) : x=a\cos t,\ y=b\operatorname{sen} t,\ z=a\operatorname{sen} t\cos t$ (a y b ambos no nulos).
2. $\vec{u}(0,1,1)$ y $(C) : \begin{cases} y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Solución ▼ [005833]

Ejercicio 5696 **

Ecuación del cilindro $(\mathscr{C})$ de sección transversal de la curva (C) de ecuaciones $\begin{cases} z=x \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases}$

Solución ▼ [005834]

Ejercicio 5697 ** I

Ecuación cartesiana del cilindro de revolución $(\mathscr{C})$ radio R y de eje $(\mathscr{D})$ de ecuaciones $\begin{cases} x=z+2 \\ y=z+1. \end{cases}$

Determinar R, para que la recta (Oz) sea tangente al cilindro.

Solución ▼ [005835]

Ejercicio 5698 *

Encontrar los planos tangentes al elipsoide de ecuación $x^2+2y^2+3z^2=21$ que son paralelas al plano de ecuación $x+4y+6z=0$.

Solución ▼ [005836]

Ejercicio 5699 **

Encontrar los planos tangentes a la superficie $(\mathscr{S})$ de ecuación $x-8yz=0$ y conteniendo la recta $(\mathscr{D})$ de ecuaciones $\begin{cases} y=1 \\ x+4z+2=0. \end{cases}$

Solución ▼ [005837]

Ejercicio 5700 ** I

1. Ecuación del cilindro de revolución $(\mathscr{C})$ de eje la recta de ecuaciones $x=y+1=3z-6$ y de radio 3.
2. Ecuación del cono de revolución $(\mathscr{C})$ de eje la recta de ecuaciones $x=y+1=3z-6$, de vértice $S(0,-1,2)$ y semi-ángulo en el vértice $\frac{\pi}{3}$.

Solución ▼ [005838]

---

219 243.99 Otros

Ejercicio 5701

Sea $\mathscr{E}=\left\{M(z)/2\,|z|^2-\frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2)=1\right\}$, R la rotación de centro O y de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y $\mathscr{E}'=R(\mathscr{E})$. Determinar una ecuación cartesiana de $\mathscr{E}'$ y deducir la traza de $\mathscr{E}$. [002068]

Ejercicio 5702

1. $13x^2-32xy+37y^2-2x+14y-5=0$
2. $xy+3x+5y-4=0$
3. $(2x+3y)^2+4x+6y-5=0$

[002069]

Ejercicio 5703 Ecuaciones de segundo grado

Determinar la naturaleza y los elementos de la curva de la ecuación en un sistema de referencia $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ ortonormada :

1. $16x^2-24xy+9y^2+35x-20y=0.$
2. $5x^2+7y^2+2xy\sqrt{3}-(10+2\sqrt{3})x-(14+2\sqrt{3})y-4+2\sqrt{3}=0.$
3. $x^2+xy+y^2=1.$
4. $x^2+2y^2+4xy\sqrt{3}+x+y\sqrt{3}+1=0.$
5. $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$ $(m\in\mathbb{R})$.

Solución ▼ [004900]

Ejercicio 5704 Curva paramétrica

Demostrar que el soporte de la curva paramétrica : $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos t+\operatorname{sen} t \end{cases}$ es una elipse, y especificar los elementos.

Solución ▼ [004901]

Ejercicio 5705 Puntos alineados con el foco

Sea $\mathscr{C}$ una cónica de foco F, directriz D, excentricidad e. Se consideran dos puntos de $\mathscr{C}$, $M \neq M'$ alineados con F. Demostrar que las tangentes a $\mathscr{C}$ en M y M' se cortan en D o son paralelas.

Solución ▼ [004902]

220 244.01 Curvas paramétricas

Ejercicio 5706

Trazar las siguientes curvas paramétricas

$$x(t) = \cos^2(t), \quad y(t) = \cos^3(t)\operatorname{sen}(t) \qquad x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$
$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y(t) = t + \frac{1}{t} \qquad x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$x(t) = \tan(t) + \operatorname{sen}(t), \quad y(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad x(t) = \operatorname{sen}(2t), \quad y(t) = \operatorname{sen}(3t).$$

[002046]

Ejercicio 5707

Se hace rodar sin deslizar un círculo de radio 1 en el eje (Ox). Determinar y trazar la curva descrita por un punto en el círculo. [002047]

Ejercicio 5708

Dibujar curva de ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ cortándolo por las rectas $y = tx$, donde $t \in \mathbb{R}$. [002048]

Ejercicio 5709

Trazar la curva paramétrica definida por : $x(t) = \int_0^t \cos(2u)\operatorname{sen}(u)du, \quad y(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(2u)\cos(u)du.$ [002049]

Ejercicio 5710

Trazar la curva paramétrica definida por : $x(t) = t^2 + 2t, \quad y(t) = \frac{1+2t}{t^2}.$ [002050]

Ejercicio 5711

En el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, dar ecuaciones paramétricas para una recta ; un círculo ; una elipse ; una hipérbola ; una parábola. [002699]

Ejercicio 5712

Para cada una de las siguientes curvas, determinar la tangente en todo punto, puntos de inflexión y retroceso, las ramas infinitas, puntos dobles ; construir y trazar la curva.

1. $x = \operatorname{sen} 4t, \quad y = \cos 3t$;
2. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t$;
3. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t$;
4. $x = \cos t, \quad y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{2 + \operatorname{sen} t}$;
5. $x = \dfrac{t^3}{1 - t^2}, \quad y = \dfrac{1 + t}{(1 - t)^2}$;
6. $x = \cos^3 t + \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t + \cos t$;
7. $x = 3\cos t - 2\operatorname{sen}^3 t, \quad y = \cos 4t$.

[002700]

Ejercicio 5713

Se considera el conjunto Γ de puntos del plano (x, y) que verifica $0 < x < 2$ y $x = 2\operatorname{sen}(y/x)$. Demostrar que es un arco del cual se encuentra una representación paramétrica. Construir Γ. [002701]

Ejercicio 5714

Se considera el arco parametrizado del plano definido por

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^3 - 1}, \quad y = \frac{2t}{t^3 - 1}.$$

Estudiar sus ramas infinitas. Encontrar tus puntos de inflexión y demostrar que están alineados. Trazar el arco. [002702]

Ejercicio 5715

Sea el arco paramétrico definido por

$$x = \frac{t - \operatorname{sen} t}{t^2}, \quad y = \frac{1 - \cos t}{t^2}.$$

Demostrar que se puede extenderse continuamente para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y tiene un eje de simetría. Demostrar que tiene una infinidad de cúspides ubicadas en el mismo círculo, y que las tangentes en estos puntos son concurrentes. Trazar el arco. [002703]

Ejercicio 5716 Epicicloides, hipocicloides

Sea $R > 0$ un real, y C_R el círculo de centro O y de radio R en el plano.

1. Se considera el círculo γ radio 1 tangente externamente a C_R en $A = (R, 0)$; se hace rodar γ el largo de C_R sin resbalar. Encontrar las ecuaciones paramétricas del conjunto Γ_R de puntos ocupados por A. ¿En qué casos es este conjunto un arco? Si no ¿qué es?
2. Se supone ahora que $R > 1$ y que γ es internamente tangente a C_R; mismas preguntas a lo largo Γ'_R así construido.
3. Trazar Γ_R y Γ'_R, para $R = 6$ y $R = 8/3$.

[002704]

Ejercicio 5717

Demostrar que las dos rectas del espacio de ecuaciones paramétricas $x = 2 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 2 - 4t$ y $x = 4 + t$, $y = 6 + 2t$, $z = -2 - 2t$ son idénticos. [002705]

Ejercicio 5718

Demostrar que la curva del espacio de ecuaciones paramétricas

$$x = 4\sqrt{2}\cos t, \quad y = t + 2\operatorname{sen} t, \quad z = -2\cos t$$

es plana. [002706]

Ejercicio 5719 Hélice -

Estudiar la curva paramétrica del espacio definida por

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t.$$

Trazar sus proyecciones ortogonales en los tres planos xOy, yOz, xOz. Demostrar que la proyección de esta curva en el plano xOy, paralelamente a la dirección de una de sus tangentes es una cicloide. [002707]

Ejercicio 5720

Encontrar en todo punto la ecuación desde el plano osculador a la curva

$$x = \frac{t^3}{t^2+1}, \quad y = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad z = \frac{t}{t^2+1}.$$

[002708]

Ejercicio 5721

Se considera el arco de espacio definido en coordenadas paramétricas por

$$M(t): \quad x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = t.$$

Determinar la intersección $\mu(t)$ de su tangente en $M(t)$, con el plano osculador en $O = M(0)$, y demostrar que la tangente al arco $t \mapsto \mu(t)$ es la intersección de los planos osculadores en O y en $M(t)$. [002709]

Ejercicio 5722 Loxodromía de la esfera

Se considera la curva paramétrica del espacio definida por

$$x = \cos(k \log \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}(k \log \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t, \quad z = \cos t,$$

para $0 < t < \pi$, donde $k > 0$ es un real fijo.

1. Demostrar que está trazada sobre una esfera de centro O, y que es simétrica por respecto a O. Demostrar que tiene dos puntos límites que se deben especificar.
2. Calcular su tangente en todo punto. Demostrar que forma un ángulo constante con los meridianos de la esfera, ángulo que se determinará de acuerdo con k.
3. Trazar las proyecciones de la curva en los tres planos xOy, yOz y xOz. ¿Cuál es la forma de esta curva en el espacio ?

[002710]

Ejercicio 5723

Estudie la curva definida por

$$\theta = t - 2\operatorname{sen} t, \qquad \rho = \tan t$$

Encontrar asíntotas y puntos dobles. [002716]

Ejercicio 5724

Construir la curva teniendo por ecuación implícita $(x^2+y^2)^2 - ax(x^2+2y^2) = 0, (a > 0)$. [002717]

Ejercicio 5725 Retrocesos

Estudiar los puntos estacionarios de las siguientes curvas paramétricas :

1. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicornio)
2. $x = (1+\cos^2 t)\operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t \cos t$.
3. $x = (1+\cos t)\operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos 2t$.
4. $x = 2t^3+3t^2, \quad y = 3t^2+6t$.
5. $x = t^3-3t, \quad y = t^3-t^2-t+1$.

[004982]

Ejercicio 5726 Ramas infinitas

Estudiar las ramas infinitas de las siguientes curvas paramétricas :

1. $x = t^5 - t^3 + \frac{t}{4}, \quad y = \frac{3t}{3t^2+1}$.
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\operatorname{sen} t|, \quad y = \operatorname{sen} 2t$.
3. $x = \sqrt{\frac{t^2-2}{t^4-1}}, \quad y = tx$. ¿El área entre la curva y sus asíntotas es finita?
4. $x = \frac{t^3-t}{2t-1}, \quad y = tx$.
5. $x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \quad y = \frac{1}{t} + \frac{1}{(t+1)^2}$.
6. $x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \quad y = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
7. $x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = tx$.
8. $x = \frac{te^t}{t+1}, \quad y = \frac{e^t}{t+1}$.
9. $x = 2t^3+3t^2, \quad y = 3t^2+6t$.
10. $x = t^3-3t, \quad y = t^3-t^2-t+1$.
11. $x = \frac{t}{t^2-1}, \quad y = \frac{t^2}{t-1}$.

[004983]

Ejercicio 5727 Inflexiones

Determinar los puntos de inflexión de las siguientes curvas paramétricas :

1. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$. (Bicornio)
2. $x = \operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad y = \tan t$.
3. $x = \frac{e^t}{t}, \quad y = te^t$.
4. $x = \operatorname{sen} t \cos 2t, \quad y = \cos t \operatorname{sen} 2t$.

Solución ▼ [004984]

Ejercicio 5728 Matexo

Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuaciones paramétricas : $x(t) = \frac{t^2+1}{t^3-1}, y(t) = \frac{2t}{t^3-1}$.

1. Demostrar que los puntos de los parámetros t, u, v (distintos) están alineados si y solo si $tuv = t + u + v + 1$.
2. Demostrar que $\mathscr{C}$ admite exactamente tres puntos de inflexión y están alineados.

Solución ▼ [004985]

Ejercicio 5729 Construcción

Construir la curva de ecuaciones paramétricas : $x = \frac{t}{t^2-1}$, $y = \frac{t^2}{t-1}$. Determinar las coordenadas del punto doble y verificar que las tangentes en este punto son perpendiculares. [004986]

Ejercicio 5730 Construcción

Dibujar la curva de ecuación cartesiana : $x^3 + y^3 = 3xy$ (folio de Descartes), se toma $t = \frac{y}{x}$ como parámetro. [004987]

Ejercicio 5731 Construcción

Construcción de las curvas de ecuación polar :

1. $\rho = \frac{\cos(\theta/2)}{1+\operatorname{sen}\theta}$.
2. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$. (Estrofoide, calcular el área limitada por el bucle)
3. $\rho = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta - 1}$. Verificar que la curva cruza sus asíntotas en el punto doble.
4. $\rho = \frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}$.
5. $\rho = \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$.
6. $\rho = \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$.
7. $\rho = \cos\frac{\theta}{3}$.
8. $\rho = 1 + \operatorname{sen} 3\theta$.
9. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$.
10. $\rho = \ln\theta$.

[004988]

Ejercicio 5732 Estrofoide

Sea Γ un círculo de centro O y de radio 1, $A \in \Gamma$, y D el diámetro de Γ perpendicular a (OA). Para $M \in \Gamma \setminus \{A\}$, se construye el punto N intersección de D y (AM), luego el punto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$. [004989]

Ejercicio 5733 Cocloide

1. Dibujar la curva $\mathscr{C}$ de ecuación polar $\rho = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ (cocloide)
2. Una recta que pasa por O corta $\mathscr{C}$ en un cierto número de puntos. Demostrar que las tangentes a $\mathscr{C}$ en estos puntos son concurrentes.

Solución ▼ [004990]

Ejercicio 5734 Chimie P 91

Sean O y A dos puntos distintos en un plano $\mathscr{P}$. Determinar el lugar de los puntos $M \in \mathscr{P}$ tales que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM}) \equiv 3(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \pmod{\pi}$.

Solución ▼ [004991]

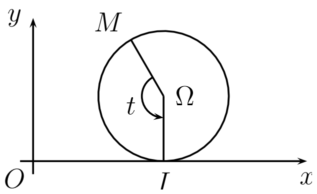
Ejercicio 5735 Ensi Chimie P' 93

Determinar los puntos duales de la curva de ecuación polar $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$.

Solución ▼ [004992]

Ejercicio 5736 Algunos grandes clásicos

1. (**) **El astroide.**
   (a) a es un real estrictamente positivo dado. Estudiar y construir la curva de parametrización : $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t. \end{cases}$
   (b) Para $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se denota $A(t)$ y $B(t)$ los puntos de intersección de la tangente en el punto actual $M(t)$, con respectivamente (Ox) y (Oy). Calcular la longitud $A(t)B(t)$.
2. (**) **La cicloide.**
   (a) Un círculo $(\mathscr{C})$, radio $R > 0$, rueda sin deslizarse sobre el eje (Ox). Se denota I el punto de contacto entre $(\mathscr{C})$ y (Ox) y se denota Ω el centro de $(\mathscr{C})$ (Ω e I son móviles). M es un punto dado de $(\mathscr{C})$ (M es móvil, pero solidario de $(\mathscr{C})$). Se define $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.



   Determinar una parametrización de la curva descrita por el punto M (se toma t como parámetro).
   (b) Estudiar y construir el arco paramétrico : $\begin{cases} x = R(t - \mathrm{sen}\,t) \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$, donde R es un real estrictamente positivo dado.
3. (**) **Una curva de Lissajous**. Estudiar y construir el arco paramétrico : $\begin{cases} x = \mathrm{sen}(2t) \\ y = \mathrm{sen}(3t). \end{cases}$
4. (**) **La lemniscata de Bernoulli**. Estudiar y construir el arco paramétrico : $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4}. \end{cases}$
5. (***) **Las tractrices.**
   (a) Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de círculos de radio R ($R > 0$ dado) y centrados en (Ox).
   (b) Estudiar y construir el arco paramétrico : $\begin{cases} x = R(\ln|\tan\frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t, \end{cases}$ donde R es un real estrictamente positivo dado.

Solución ▼ [005523]

Ejercicio 5737

Construir las curvas de parametrización :

1. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = (t+2)\mathrm{e}^{1/t} \\ y = (t-2)\mathrm{e}^{1/t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t+2}{(t-1)^2} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y = \dfrac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = t^2+t^3 \\ y = t^2+t^3-2t^4-2t^5. \end{cases}$

Solución ▼ [005524]

Ejercicio 5738

La curva ortóptica de una curva $(\mathscr{C})$ es el lugar de los puntos del plano a partir del cual se puede llevar (al menos) dos tangentes a $(\mathscr{C})$, ortogonales. Determinar la ortóptica de $(\mathscr{C})$ en cada uno de los casos siguientes :

1. $(\mathscr{C})$ es un astroide de parametrización $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t, \end{cases}$ $a > 0$ dado.
2. $(\mathscr{C})$ es el arco parametrizado : $\begin{cases} x = t^2-2t \\ y = 2t^3-3t^2. \end{cases}$
3. $(\mathscr{C})$ es la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.

Solución ▼ [005525]

Ejercicio 5739

Encontrar las rectas tanto tangentes como normales al arco paramétrico : $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3. \end{cases}$ [005526]

Ejercicio 5740

En cada uno de los casos siguientes, encontrar una parametrización racional de la curva propuesta y luego construir

1) $x(y^2-x^2) = 2y^2-x^2$

2) $x^3-y^3+xy-2x+2y+3 = 0.$

[005527]

Ejercicio 5741

Encontrar una ecuación cartesiana de los soportes de los siguientes arcos :

1. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4}. \end{cases}$

[005528]

Ejercicio 5742

Representar las curvas de ecuación cartesiana $y = f(x)$, dar la ecuación de su tangente en el punto de abscisas $x = 0$ y la posición de la curva con respecto a esta tangente, para :

1. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$
2. $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$.

Solución ▼ Vidéo ■ [006981]

Ejercicio 5743

1. Dar una parametrización $(x(t), y(t))$ de la curva de ecuación
$$y = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$$
precisando el dominio de variación del parámetro t.
2. Demostrar que el soporte de la curva parametrizada por
$$\begin{cases} x(t) = \cos t + 3 \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
no puede ser descrito por una ecuación de la forma $y = f(x)$.
3. Demostrar que el soporte de la curva parametrizada por
$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 2 \\ y(t) = \operatorname{sen}^4 t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
es el gráfico de una función f que se deben especificar, así como su dominio de definición.

Solución ▼ Vidéo ■ [006982]

Ejercicio 5744

Estudie y trazar las siguientes curvas paramétricas :

1. $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ *(El astroide)*
2. $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th} t \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{sen} t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ *(El cicloide)*

Solución ▼ Vidéo ■ [006983]

Ejercicio 5745

Sea $\mathscr{C}$ la curva plana parametrizada por
$$\begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{\ln t}{t} \end{cases} \quad (t \in]0; +\infty[).$$

1. Comparar los puntos de parámetros t y $1/t$, deducir un dominio de estudio de $\mathscr{C}$.
2. Representar $\mathscr{C}$.

Solución ▼ Vidéo ■ [006984]

Ejercicio 5746

Demostrar que la curva parametrizada

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t^2 - t} \\ y(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1} \end{cases}$$

tiene un punto doble y que las tangentes en este punto son perpendiculares.

Solución ▼ Vidéo ■ [006985]

Ejercicio 5747

Demostrar que la curva parametrizada

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{4t - 3}{t^2 + 1} \\ y(t) = \dfrac{2t - 1}{t^2 + 2} \end{cases}$$

admite un único punto singular, y trazar la forma de la curva en un vecindario de este punto.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006986]

Ejercicio 5748

Se considera la curva parametrizada definida por

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{4}{t} \\ y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}. \end{cases}$$

1. Hacer la tabla de variaciones conjuntas de x e y.
2. Calcular las tangentes horizontales, verticales y asíntotas.
3. Encontrar el punto singular de la curva, estudiar su tipo y escribir la ecuación de la tangente a la curva en estos puntos.
4. Dibujar la curva.

Solución ▼ Vidéo ■ [006987]

Ejercicio 5749

Encontrar rectas que sean tanto tangentes como ortogonales a la curva

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3. \end{cases}$$

Solución ▼ Vidéo ■ [006988]

221 244.02 Coordenadas polares

Ejercicio 5750

Trazar las siguientes curvas en polares

$$\rho(\theta)=\operatorname{sen}(2\theta) \qquad \rho(\theta)=\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} \qquad \rho(\theta)=\frac{\theta-1}{\theta+1}$$
$$\rho(\theta)=\cos(\theta)-\cos(2\theta) \qquad \rho(\theta)=\frac{\cos(\theta)}{1+\operatorname{sen}(\theta)}.$$

[002051]

Ejercicio 5751

Sea C un círculo del plano de centro $(1,0)$ y de radio a. Determinar y trazar el lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de O en las tangentes de C. [002052]

Ejercicio 5752

Determinar y trazar las curvas cuya tangente en todo punto M forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$, con $\overrightarrow{OM}$. [002053]

Ejercicio 5753

Usando coordenadas polares, dibujar la curva definida implícitamente por la relación $2xy(x^2+y^2)=x^2-y^2$. [002054]

Ejercicio 5754

Trazar la curva de ecuación polar :

$$r=1+\cos\theta.$$

[002055]

Ejercicio 5755

Trazar las curvas de ecuaciones polares :

$$r=\frac{\tan\theta}{\cos\theta}; \qquad r^2=\frac{1}{\operatorname{sen}(2\theta)}.$$

[002056]

Ejercicio 5756

1. Demostrar que un círculo C de diámetro a y pasando por el polo O puede ser representado en coordenadas polares por la ecuación $\rho=a\cos(\theta-\theta_0)$. Se considera un real $b>0$ y la concoide de C de valor b, es decir la curva Γ definida como sigue : en todo punto P de C, se asocia el punto M ubicado en la semi-recta OP, del lado opuesto a O, con respecto a P y tal que $PM=b$; Γ es el lugar geométrico de los puntos M. Dar una ecuación polar de Γ. Construir Γ distinguiendo cuatro casos : $a>b$, $a=b$, $a<b<2a$ y $b\geqslant 2a$. Determinar en particular los puntos de inflexión en cada caso.
2. Con base en la pregunta anterior, trazar los concoides de una recta $\rho=a/\cos(\theta-\theta_0)$.

Ejercicio 5757

Estudiar según los parámetros $a, b > 0$ curvas de ecuación $\rho = a/(1 + b\cos\theta)$ (en particular ramas infinitas, posición relativa a las asíntotas). Demostrar que son cónicas, y determinar los focos. [002712]

Ejercicio 5758

Estudiar y dibujar las curvas definidas en coordenadas polares abajo ; si existen ramas infinitas, precisarlas, y especificar la posición de la curva con respecto a las eventuales asíntotas ; también encontrar los puntos dobles :

rosácea de cuatro puntas	$\rho = a\operatorname{sen} 2\theta$
	$\rho = \operatorname{sen}\theta + \cos\frac{\theta}{2}$
estrofoide recto	$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$
	$\rho = 1 + 2\cos\frac{3\theta}{2}$
caracol	$\rho = 5\cos 2\theta - 3\cos\theta$
curva del diablo	$\rho^2 = 49 + \frac{1}{\cos 2\theta}$
espiral de Arquímedes	$\rho = a\theta$
	$\rho = \theta + 1/\theta$ (¿asíntota ?)
espiral parabólica	$\theta = (\rho - 1)^2$
cocloide	$\rho = a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$
curva de la espiral	$\rho = \frac{a}{1 + \mathrm{e}^{\theta/5}}$
	$\rho = \frac{1 - 2\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$ (parábola asíntota)
epi	$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}(5\theta/3)}$.

[002713]

Ejercicio 5759

Una *espiral logarítmica* es una curva de ecuación en coordenadas polares $\rho = a\mathrm{e}^{k\theta}$. Demostrar que interseca sus radio-vectores en un ángulo constante, que se determina en función de k. [002714]

Ejercicio 5760

Demostrar que la curva definida por

$$\rho = 1 + \tan\frac{\theta}{2}$$

admite una asíntota ; especificar la posición de la curva con respecto a ella. [002715]

Ejercicio 5761 Curvas en polares

Construir las siguientes curvas polares :

1. $\rho = \dfrac{\cos\theta/2}{1+\operatorname{sen}\theta}$
2. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos}\theta$
3. $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta - 1}$
4. $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}$
5. $\rho = \cos\theta + \dfrac{1}{\cos}\theta$
6. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$
7. $\rho = \cos\dfrac{\theta}{3}$
8. $\rho = 1 + \operatorname{sen} 3\theta$
9. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$
10. $\rho = \ln\theta$
11. $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

Solución ▼ [004993]

Ejercicio 5762 ***

Construir el conjunto de puntos M de coordenadas polares $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ verificando $r = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(2\theta)} + \sqrt{1-\operatorname{sen}(2\theta)}}$ (empezar por estudiar todas las simetrías del conjunto considerado).

Solución ▼ [005205]

Ejercicio 5763

Construir las siguientes curvas :

1. $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$,
2. $r = \operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right)$,
3. $r = ae^{b\theta}$, $(a,b) \in]0,+\infty[^2$,
4. $r = 2\cos(2\theta) + 1$,
5. $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Solución ▼ [005530]

Ejercicio 5764

Estudio completo de la curva de ecuación polar $r = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}\theta + 1}$.

Solución ▼ [005531]

Ejercicio 5765 El cardioide

Sea la curva de ecuación polar $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.

1. Construir la curva.

2. Longitud y evoluta.

Solución ▼ [005532]

Ejercicio 5766

Construir la curva de ecuación cartesiana $x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2=0$, luego de cambiar a polares.

Solución ▼ [005533]

Ejercicio 5767

Evoluta de la espiral logarítmica de ecuación polar $r=ae^{\theta}$ $(a>0)$.

Solución ▼ [005534]

Ejercicio 5768

Estudiar las curvas de ecuaciones polares siguientes :

1. $r(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{\tan(2\theta)}}$ para $\theta\in]0,\frac{\pi}{4}[$
2. $r(\theta)=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ para $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *(La cisoide recta)*
3. $r(\theta)=\sqrt{\cos(2\theta)}$ *(La lemniscata de Bernoulli)*

Solución ▼ Vidéo ■ [006989]

Ejercicio 5769

Se consideran las curvas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ *(caracoles de Pascal)* respectivamente dados en polares por

$$r_1(\theta)=1+\cos\theta,\qquad r_2(\theta)=3+\cos\theta.$$

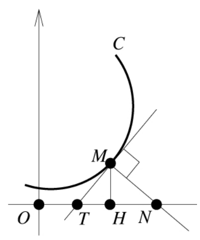
Para $i=1,2$, se denota $N_i(\theta)$ la recta ortogonal en el punto $M_i(\theta)\in\mathscr{C}_i$. Verificar que para todo $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$, las rectas $N_1(\theta)$ y $N_2(\theta)$ son secantes, en un punto $P(\theta)$. Determinar el lugar del punto P, cuando θ varía.

Indicación ▼ Solución ▼ Vidéo ■ [006990]

222 244.03 Curvas definidas por una condición

Ejercicio 5770 sub-tangente, sub-normal

Sea $\mathscr{C}$ una curva del plan. A un punto M un punto de $\mathscr{C}$, se asocian los puntos H, T y N según el dibujo :



Determinar las curvas de ecuación $y=f(x)$ verificando la siguiente condición :

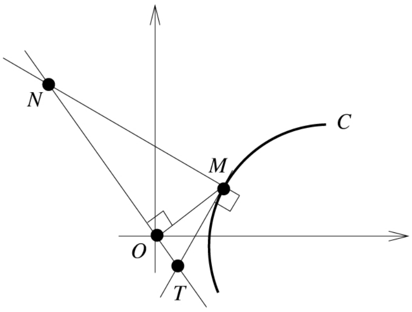
1. $\overline{HT}=$ cte.

2. $\overline{HN} = \text{cte.}$
3. $MN = \text{cte.}$
4. $MT = \text{cte.}$
5. $AN = MN$, donde A es el punto de coordenadas $(0,a)$.

Solución ▼ [004994]

Ejercicio 5771 Sub-tangente, sub-normal

Sea $\mathscr{C}$ una curva del plan. A un punto M de $\mathscr{C}$, se asocian los puntos T y N según el dibujo :



Determinar las curvas que satisfacen la siguiente condición :

1. $\overline{OT} = \text{cte.}$
2. $\overline{ON} = \text{cte.}$

Solución ▼ [004995]

Ejercicio 5772 Punto medio fijo

Sea D una recta del plano y $\mathscr{C}$ una curva paramétrica. Para $M \in \mathscr{C}$ se denota T y N los puntos de intersección de D, con la tangente y la normal a $\mathscr{C}$ en M. Determinar $\mathscr{C}$ tal que el punto medio de $[T,N]$ permanece fijo. $\left(\text{Se parametriza } \mathscr{C} \text{ por } t = \frac{y'}{x'}\right)$

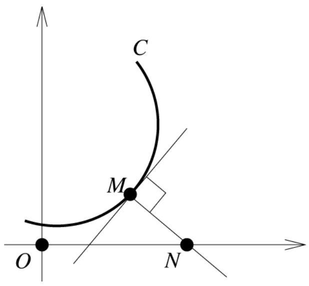
Solución ▼ [004996]

Ejercicio 5773 Distancia TN constante

Sea D una recta del plano y $\mathscr{C}$ una curva paramétrica. Para $M \in \mathscr{C}$ se denota T y N los puntos de intersección de D, con la tangente y la normal a $\mathscr{C}$ en M. Determinar $\mathscr{C}$ tal que la distancia TN permanece constante. $\left(\text{Se parametriza } \mathscr{C} \text{ por } t = \frac{y'}{x'}\right)$

Solución ▼ [004997]

Ejercicio 5774 Ensi Chimie P' 93



Encontrar las curvas $\mathscr{C}$ tales que $MN = ON$.

Solución ▼ [004998]

Ejercicio 5775 Ensi Physique P 94

Encontrar los arcos bi-regulares del plano cuyo círculo osculador está en todo punto tangente a una recta fija.

Solución ▼ [004999]

Ejercicio 5776 La homotética del círculo osculador permanece tangente a Ox

Determinar las curvas planas tales que la imagen del círculo osculador en un punto M por la homotecia de centro M y de cociente 2 permanece tangente a Ox. Se toma φ como parámetro y se busca una ecuación diferencial sobre el radio de curvatura R.

Solución ▼ [005000]

Ejercicio 5777 Ensi P 91

Se sitúa en un plano euclidiano afín relacionado con una referencia ortonormada. Dar el conjunto de trayectorias ortogonales de la familia de círculos de radio constante a $(a > 0)$ centrados en Ox.

Solución ▼ [005001]

Ejercicio 5778 Ecuaciones intrínsecas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se estudian las curvas planas parametrizadas por una abscisa curvilínea, s, tales que la curvatura en el punto M_s sea $c = f(s)$.

1. Demostrar que si se impone la posición de M_0 y la tangente en este punto, el problema tiene una solución única.
2. En el caso general, demostrar que las curvas solución se deducen de una curva particular aplicando un desplazamiento plano arbitrario.
3. Estudiar las ecuaciones : $c = \text{cte}$, $c = \frac{1}{s}$ (espiral logarítmica).

[005002]

Ejercicio 5779 Ecuaciones intrínsecas

Encontrar las curvas planas que satisfacen la ecuación intrínseca :

1. $R = s$.
2. $Rs = 1$.
3. $R^2 = 2as$, $a > 0$ dado.
4. $R = 1 + s^2$.
5. $R^2 + s^2 = a^2$.

Solución ▼ [005003]

Ejercicio 5780 I permanece en un círculo

Encontrar las curvas planas $\mathscr{C}$ tal que el centro de curvatura descansa sobre un círculo $\mathscr{C}(O, r)$ fija. (Se toma φ como parámetro)

Solución ▼ [005004]

Ejercicio 5781 $M - s/2M'$ permanece en Ox

Sea $\mathscr{C}$ una curva plana y s una abscisa curvilínea en $\mathscr{C}$. En cada punto $M \in \mathscr{C}$ de abscisa curvilínea s, se asocia el punto $N = M - \frac{s}{2}\overrightarrow{T}$. Encontrar $\mathscr{C}$ tal que N permanece en Ox.

Solución ▼ [005005]

Ejercicio 5782 $MC = kMN$

Encontrar las curvas Γ del plano que tiene la siguiente propiedad : Sea $M \in \Gamma$, C el centro de curvatura de Γ en M y N el proyectado de O en la normal a Γ en M. Entonces $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MN}$, donde k es un real fijo. Estudiar los casos especiales : $k = 1$, $k = \frac{2}{3}$, $k = 2$, $k = \frac{1}{3}$ y $k = -1$.

Solución ▼ [005006]

Ejercicio 5783

Sea T la intersección de (Ox) y de la tangente a M y H el proyectado ortogonal de M sobre (Ox). Encontrar las curvas tales que

1. $MT = a$ ($a > 0$ dado)
2. $HT = a$ (sin relación con 1))

[005529]

223 244.04 Ramas infinitas

Ejercicio 5784 Ramas infinitas

Determinar las ramas infinitas para las siguientes curvas paramétricas :

1. $x = 4t^5 - 4t^3 + t$, $y = \dfrac{t}{3t^4+1}$
2. $x = 2\cos^2 t + \ln|\operatorname{sen} t|$, $y = \operatorname{sen} 2t$
3. $x = \sqrt{\dfrac{t^2-2}{t^4-1}}$, $y = tx$
4. $x = \dfrac{t^3-t}{2t-1}$, $y = tx$
5. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{(t+1)^2}$
6. $x = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2}$, $y = \tan t$
7. $x = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$
8. $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = tx$
9. $x = \dfrac{te^t}{t+1}$, $y = \dfrac{e^t}{t+1}$
10. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
11. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
12. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$

Solución ▼ [005007]

224 244.05 Puntos de retroceso

Ejercicio 5785 Retrocesos

1. $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$
2. $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - t^2 - t + 1$
3. $x = \operatorname{sen} t$, $y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}$
4. $x = (1 + \cos^2 t) \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t \cos t$
5. $x = (1 + \cos t) \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$

Solución ▼ [005008]

225 244.06 Envolventes

Ejercicio 5786 Esem 91

Sea $\mathscr{C}$ el círculo : $x^2 + y^2 = 1$. Sea M un punto de $\mathscr{C}$ de ángulo polar θ y D_θ la recta que pasa por M de ángulo polar 2θ. Encontrar la envolvente de las rectas D_θ.

Solución ▼ [005009]

Ejercicio 5787 Ensi Physique 93

Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O y de radio R, y S un punto en el plano diferente de O. Dar la envolvente de las normales en M a (SM), cuando M recorre $\mathscr{C}$.

Solución ▼ [005010]

Ejercicio 5788 Cuerdas en una parábola

Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2 = 2px$. Determinar la envolvente de las cuerdas $[A, B]$ de $\mathscr{P}$ de altura $h > 0$ dada.

Solución ▼ [005011]

Ejercicio 5789 Cuerdas en una parábola

Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2 = 2px$. Para $A, B \in \mathscr{P}$ distintos, se denota C el punto de intersección de tangentes en A y B. Encontrar la envolvente de las rectas (AB) cuando el área del triángulo ABC permanece constante.

Solución ▼ [005012]

Ejercicio 5790 Cuerdas en una parábola

Sean M, M' dos puntos de una parábola $\mathscr{P}$ tales que (MM') pasa por el foco F. ¿Cuáles son :

1. la envolvente de las rectas (MM') ?
2. el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos $[M, M']$?
3. la envolvente de las mediatrices de $[M, M']$?

Solución ▼ [005013]

Ejercicio 5791 Radios reflejados en una parábola

Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2 = 2px$.

1. Un rayo incidente llega a lo largo de una paralela a Ox y se refleja al “interior” de $\mathscr{P}$, con el mismo ángulo. Encontrar la envolvente de los radios reflejados.

2. La misma pregunta, pero el rayo incidente es paralelo a Oy.

Solución ▼ [005014]

Ejercicio 5792 Círculo osculador con una parábola

Sea $\mathscr{P}$ una parábola, $M \in \mathscr{P}$ y $\mathscr{C}$ el círculo osculador en $\mathscr{P}$ en M. Demostrar que, excepto un caso particular, $\mathscr{C}$ interseca $\mathscr{P}$ en un segundo punto P. Determinar la envolvente de las rectas (MP).

Solución ▼ [005015]

Ejercicio 5793 Cuerdas de una hipérbola

Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola de foco F. Encontrar la envolvente de las cuerdas $[P,Q]$ de $\mathscr{H}$ vistas desde F en ángulo recto.

Solución ▼ [005016]

Ejercicio 5794 Cardioide

Para $\theta \in \mathbb{R}$, se denota $A_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Determinar la envolvente de las rectas $D_\theta = (A_\theta\, A_{2\theta})$.

Solución ▼ [005017]

Ejercicio 5795 Cicloide

Encontrar la envolvente de un diámetro Δ de un círculo $\mathscr{C}$ rodando sin deslizar en una recta D. Comparar el punto característico a la proyección ortogonal del punto de contacto I sobre Δ.

Solución ▼ [005018]

Ejercicio 5796 Hipocicloide

Sea $\mathscr{C}$ un círculo que pasa O centrado en Ox. Para $M \in \mathscr{C}$, se denota D_M la recta simétrica de (OM), con respecto a la horizontal que pasa por M. Determinar la envolvente de las rectas D_M y construirla.

Solución ▼ [005019]

Ejercicio 5797 Cuerdas de $\rho = a/\cos(3\theta)$

Trazar la curva de ecuación polar $\rho = \frac{a}{\cos 3\theta}$, $a > 0$. Determinar la envolvente de las cuerdas vistas de O en ángulo recto.

Solución ▼ [005020]

Ejercicio 5798 Perpendicular a OM en una elipse

Sea $\mathscr{E}$ una elipse de centro O, parámetros a y b. Para $M \in \mathscr{E}$, sea D la perpendicular en M a (OM).

1. Dar las ecuaciones paramétricas de la envolvente de las rectas D.
2. Trazar envolventes en computadora para diferentes valores de a/b.
3. Estudiar los puntos estacionarios de la envolvente cuando existen.

Solución ▼ [005021]

Ejercicio 5799 $AM \perp D$

Sea D una recta del plano y A un punto no elemento de D. Sea M un punto variable en D. Encontrar la envolvente de la normal en M a (AM).

Solución ▼ [005022]

Ejercicio 5800 Concavidad

Sean u, v, w de clase $\mathscr{C}^2$, D_t la recta de ecuación : $u(t)x+v(t)y+w(t)=0$, y Γ la envolvente de las rectas D_t. Se denota : $\delta = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$, y se supone para todo t : $\delta\Delta w(t) \neq 0$. Demostrar que Γ gira su concavidad hacia O si y solo si para todo t : $\delta\Delta w(t) > 0$. [005023]

226 244.07 Propiedades métricas : longitud, curvatura,...

Ejercicio 5801

Determinar la longitud de la curva $y=\sqrt{x}(1-\frac{x}{3})$, para $0 \leqslant x \leqslant 3$. [002059]

Ejercicio 5802

Determinar una abscisa curvilínea, la longitud y la evoluta del astroide. [002060]

Ejercicio 5803

Calcular el radio de curvatura de $\rho(\theta)=\cos(\frac{\theta}{3})$ en función de ρ. [002061]

Ejercicio 5804

Sea $\mathscr{P}$ la parábola $y^2=x$. Determinar una ecuación paramétrica y una ecuación cartesiana de Γ la evoluta de $\mathscr{P}$. Trazar Γ. [002062]

Ejercicio 5805

Sea Γ la curva $\rho(\theta)=\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}$.

1. Dibujar esta curva.
2. Calcular el radio de curvatura.
3. Sean I el centro de curvatura en M y H el proyectado ortogonal de I sobre (OM). Determinar $\overrightarrow{MH}$.
4. Deducir una construcción geométrica de la evoluta de Γ.

[002063]

Ejercicio 5806

Sea $M(s)$ un arco C^2 bi-regular parametrizado por una abscisa curvilínea. Sea $\mathscr{R}$ el sistema de referencia de Frénet $(M(0), \overrightarrow{t}(0), \overrightarrow{n}(0))$. Se denota $(X(s), Y(s))$ las coordenadas en este marco de un punto $M(s)$ de la curva.

1. Demostrar que si R_0 es el radio de curvatura en $M(0)$, entonces $R_0 = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{X^2(s)}{2Y(s)}$.
2. Deducir el radio de curvatura en el punto $\theta=0$ de la curva $\rho(\theta)=1+2\cos(\frac{\theta}{2})$.

[002064]

Ejercicio 5807 Cálculo de longitud

Determinar la longitud de un arco $\overset{\frown}{M_0M_t}$ o $\overset{\frown}{M_0M_\theta}$, para las curvas :

1. $x = t - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t, \quad y = 2\operatorname{ch} t$
2. $\rho = \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$.

Solución ▼ [005024]

Ejercicio 5808 Cálculo de longitud

Sea la curva paramétrica por : $x = 2t^3 + 3t^2, \quad y = 3t^2 + 6t$. Calcular la longitud del arco $\overset{\frown}{AO}$, donde A es el punto de retroceso.

Solución ▼ [005025]

Ejercicio 5809 Cálculo de longitud

Calcular la longitud total de las siguientes curvas :

1. $x = (1 + \cos^2 t) \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t \cos t$.
2. $\rho = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$.

Solución ▼ [005026]

Ejercicio 5810 TPE MP 2003

Naturaleza, construcción y longitud de la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Solución ▼ [005027]

Ejercicio 5811 Comparación de longitud (ENS MP 2002)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua cóncava, $\mathscr{C}^1$ por trozos, L_1 la curva paramétrica $x \mapsto (x, f(x))$ y L_2 un camino continuo $\mathscr{C}^1$ a trozos uniendo los extremos de L_1 y ubicado arriba de L_1. Demostrar que la longitud de L_2 es superior o igual que la de L_1.

Solución ▼ [005028]

Ejercicio 5812 Centro de curvatura

Determinar las coordenadas del centro de curvatura en el punto M, para las siguientes curvas :

1. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$.
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$.
3. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t$. (Cicloide, indicar una relación geométrica simple entre la curva descrita por M y la describe por I)
4. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\operatorname{sen}^3 t$. (Astroide) construir la curva $\mathscr{C}$ y su evoluta, luego demostrar por cálculo que son similares.
5. Hipérbola de ecuación $xy = 1$.
6. Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. $\rho = e^\theta$. (Espiral logarítmica)

8. $\rho = 1 + \cos\theta$. (Cardioide)

Solución ▼ [005029]

Ejercicio 5813 Puntos en una hipérbola (Ensi P 91)

Sea la curva Γ definida por : $xy = a^2$, $(a > 0)$. Para cada punto M se define el punto Ω por : $2\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{MN}$, donde N es el punto donde Γ interseca su normal en M. Demostrar que Ω es el centro de curvatura de Γ en M.

Solución ▼ [005030]

Ejercicio 5814 Círculo circunscrito de tres puntos

Sea $\mathscr{C}$ una curva plana parametrizada por una abscisa curvilínea s. Sea s_0 fijo.

1. Dar el DL de orden 2 de M_s, para $s \to s_0$ en el sistema de referencia de Frénet en M_{s_0}.
2. Se supone $c(s_0) \neq 0$. Demostrar que para h bastante pequeño, los puntos M_{s_0-h}, M_{s_0}, M_{s_0+h} no están alineados.
3. Sea Γ_h el círculo circunscrito en estos tres puntos, y R_h su radio. Determinar $\lim\limits_{h\to 0} R_h$.

[005031]

Ejercicio 5815 Propiedades de la cicloide

Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ para $t \in]0, 2\pi[$ (arco cicloide). Se denota S el punto de parámetro π, y D la tangente a $\mathscr{C}$ en S. Sea $M \in \mathscr{C} \setminus \{S\}$, I el punto de intersección de la normal a $\mathscr{C}$ en M y de Ox, y J el punto de intersección de la tangente en M, con D.

1. Hacer el dibujo.
2. Demostrar que I y J tienen la misma abscisa.
3. Se toma S como origen de las abscisas curvilíneas. Encontrar una relación entre s y $\overrightarrow{MJ}$.

[005032]

Ejercicio 5816 Normales a un cardioide

Se considera la curva $\mathscr{C}$ de ecuación polar $\rho = 1 + \cos\theta$ (cardioide).

1. Dibujar $\mathscr{C}$.
2. Una recta D pasando por O corta $\mathscr{C}$ en dos puntos M_1 y M_2. Sean Δ_1, Δ_2 los normales a $\mathscr{C}$ en estos puntos y P el punto de intersección de Δ_1 y Δ_2. ¿Cuál es la curva descrito por P, cuando D gira alrededor de O ?

Solución ▼ [005033]

Ejercicio 5817 Cálculo de curvatura por TFI

Determinar el radio de curvatura de la curva $\mathscr{C}$ de ecuación : $2x^2 + y^2 = 1$ en los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y los ejes Ox y Oy.

Solución ▼ [005034]

Ejercicio 5818 Cálculo de curvatura por TFI

Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación cartesiana $x^4+y^4+x^3+y^3=2$. Utilizando el teorema de funciones implícitas, calcular la curvatura de $\mathscr{C}$ en $A=(-1,1)$.

Solución ▼ [005035]

Ejercicio 5819 Cálculo de curvatura (Chimie P' 90)

Determinar el conjunto de centros de curvatura en O a las curvas integrales de la ecuación diferencial $(1-x^2)y''-xy'-2y=1$ tales que $y(0)=0$.

Solución ▼ [005036]

Ejercicio 5820 Curva paralela a una parábola

Sea $\mathscr{C}: t\mapsto M_t$ una curva plana paramétrica sin punto estacionario. Curvas paralelas a $\mathscr{C}$ son las curvas de la forma : $t\mapsto M_t+\lambda\overrightarrow{N}$, o $\overrightarrow{N}$ es el vector normal en M_t y λ es constante.

1. Demostrar que el paralelismo es una relación de equivalencia entre arcos sin puntos estacionarios.
2. Construir las paralelas a la parábola de ecuación $y=x^2$, para $\lambda=\pm 2$.

[005037]

Ejercicio 5821 Puntos equidistantes de la tangente

Sea $\mathscr{C}$ una curva paramétrica, $(M,\overrightarrow{t},\overrightarrow{n})$ el sistema de referencia de Frénet en un punto M de $\mathscr{C}$. Sea $a>0$ fijo y $P_1=M+a\overrightarrow{t}$, $P_2=M-a\overrightarrow{t}$. Se denota $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ las curvas descritas por P_1 y P_2, cuando M recorre $\mathscr{C}$ y c_1,c_2 las curvaturas correspondientes. Sea C el centro de curvatura en $\mathscr{C}$ en M. Demostrar que $c_1+c_2=\frac{2}{CP_1}$ y que las tres normales son concurrentes.

Solución ▼ [005038]

Ejercicio 5822 Parábolas de círculo osculador dado

Sea $\mathscr{C}$ el círculo de ecuación $x^2+y^2-2Rx=0$ y Δ una recta variable pasando por O.

1. Encontrar la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ de eje paralelo a Δ, pasando por O, cuyo $\mathscr{C}$ es el círculo osculador en O.
2. ¿Cuál es la envolvente de las parábolas anteriores ?

Solución ▼ [005039]

Ejercicio 5823 Involuta

1. Construir la curva $\mathscr{C}$ de ecuaciones paramétricas : $x=3t-t^3,\quad y=3t^2$.
2. Encontrar las ecuaciones paramétricas de las involutas de $\mathscr{C}$.
3. Trazar la involuta que se encuentra $\mathscr{C}$ en el origen.

Solución ▼ [005040]

Ejercicio 5824 Involuta

Determinar la involuta de la catenaria $\mathscr{C}$ de ecuación $y=a\,\mathrm{ch}(x/a)$ que cumple $\mathscr{C}$, para $x=0$. (Tractriz) Dibujar las dos curvas.

Solución ▼ [005041]

Ejercicio 5825

Longitud L de (Γ) en cada uno de los casos siguientes :

1. Γ es el astroide de representación paramétrica $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ ($a > 0$ dado).
2. Γ es el arco de cicloide de representación paramétrica $\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Γ es el arco de una parábola de ecuación cartesiana $x^2 = 2py$, $0 \leqslant x \leqslant a$ ($p > 0$ y $a > 0$ dados).
4. Γ es el cardioide de ecuación polar $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$ dado).

Solución ▼ [005535]

Ejercicio 5826

Determinar y construir la evoluta

1. $\begin{cases} x = R\left(\cos t + \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ y = R\operatorname{sen} t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = R(t - \operatorname{sen} t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$.
3. $y = x^3$

Solución ▼ [005536]

Ejercicio 5827

Encontrar el punto de la curva de ecuación $y = \ln x$ en el que el valor absoluto del radio de curvatura es mínimo.

Solución ▼ [005537]

Ejercicio 5828

Sea (Γ) la curva de ecuación $y = \ln(\cos x)$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calcular la abscisa curvilínea s, cuando O es el origen de las abscisas curvilíneas y la orientación es la de las x crecientes. Encontrar una relación entre R y s. Trazar (Γ) y su evoluta.

Solución ▼ [005538]

Ejercicio 5829

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, se denota (Γ_λ) la curva de ecuación $y = \lambda x e^{-x}$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de curvatura C_λ en O en (Γ_λ), cuando λ recorre $\mathbb{R}$?

Solución ▼ [005539]

227 244.08 Curvas en el espacio

Ejercicio 5830 Ensi P 90

Se considera la curva $\mathscr{C}$ definida por : $x(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, $z(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.
¿En qué condición M_1, M_2, M_3, M_4 cuatro puntos de $\mathscr{C}$ de parámetros respectivos t_1, t_2, t_3, t_4 son coplanares ?

Solución ▼ [005042]

Ejercicio 5831 Curvatura de M cte $\Rightarrow$ curvatura de I cte

Sea $\mathscr{C}$ una curva del espacio, y Γ la curva descrita por el centro de curvatura, I, en un punto M de $\mathscr{C}$. Se supone que la curvatura de $\mathscr{C}$ es constante y su torsión no nula.

1. Demostrar que la curvatura de Γ es también constante.
2. Determinar la torsión Γ en I en función de la curvatura y torsión de $\mathscr{C}$ en M.

Solución ▼ [005043]

Ejercicio 5832 Elementos de curvatura de T

Sea $s \mapsto M_s$ una curva del espacio de clase $\mathscr{C}^3$, parametrizada por una abscisa curvilínea, y P el punto tal que $\overrightarrow{OP} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds}$. Determinar los elementos de curvatura de la trayectoria de P.

Solución ▼ [005044]

Ejercicio 5833 Envolvente de normales

Sea $s \mapsto M_s$ una curva del espacio de clase $\mathscr{C}^3$, parametrizada por una abscisa curvilínea. Para todo s se elige una normal a la curva en M_s : Δ_s. ¿En qué condición las rectas Δ_s admiten una envolvente ?

Solución ▼ [005045]

Ejercicio 5834 Ecuaciones intrínsecas en dimensión 3

Encontrar las curvas del espacio que satisfacen las ecuaciones intrínsecas : $c = \tau = \dfrac{1}{s\sqrt{2}}$.

Solución ▼ [005046]

---

228 244.99 Otro

Ejercicio 5835

Sea $f : [0,1] \to [0,1]^2$ de clase C^1, demostrar que f no puede ser biyectiva. [002057]

Ejercicio 5836

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua, y $z \in \mathbb{C}$ cualquiera. Demostrar :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma' \in C([0,1], \mathbb{C}) \text{ tal que :} \\ &\quad 1 \ : \ \forall t \in [0,1], \left|\gamma(t) - \gamma'(t)\right| < \varepsilon, \\ &\quad 2 \ : \ \forall t \in [0,1], \gamma(t) \neq z. \end{aligned}$$

[002058]

Ejercicio 5837

Un círculo de radio R rueda sin deslizarse sobre el eje Ox en el sentido de los x crecientes. Sea C la curva descrita por el punto M ligado al círculo que, en la posición inicial, coincide con el origen O (cicloide). Sea M(θ) la posición del punto M cuando el círculo ha girado un ángulo θ a partir de la posición inicial y $\Omega(\theta)$ el punto de contacto correspondiente entre el círculo y el eje Ox.

- Determinar la abscisa de $\Omega(\theta)$ y las coordenadas $x(\theta)$ y $y(\theta)$ del punto M(θ). Demostrar que la curva C es periódica y graficar el primer período.
- Determinar, en función de θ, el vector tangente $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}/d\theta$, el vector tangente unitario $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, y el elemento de longitud ds.
- Determinar el vector normal unitario $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ y el radio de curvatura ρ en el punto parametrizado por θ. Demostrar que el centro de curvatura se encuentra en la recta definida por M(θ) y $\Omega(\theta)$, y especificar su posición en esta recta.
- (Facultativo) El ángulo de rotación está definido en función del tiempo por la función $\theta(t)$. Calcular el vector velocidad $\overrightarrow{v}$ del punto M al instante t. Demostrar que $\overrightarrow{v}$ se expresa en términos de ΩM, $d\theta/dt$ y $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, y dar un vector $\overrightarrow{\omega}$ ortogonal al plano de movimiento tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$. Obtener geométricamente en un instante dado cualquiera el vector velocidad de cualquier punto P en la circunferencia.

[002691]

Ejercicio 5838

Un segmento AB de longitud l se desplaza en el plano de forma que el punto A permanece constantemente en el eje Ox y el punto B en el eje Oy, el ángulo $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ variando de 0 a 2π. Sea M un punto de AB tal que $AM = \alpha$, $\alpha = C^{te}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Calcular las coordenadas de M en función de θ y determinar la curva que describe.

- En el instante cero, un pájaro se aleja volando de un punto A de un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad $\overrightarrow{v}$. Al mismo tiempo, un cazador situado en el punto B dispara el fusil para abatir el pájaro. La velocidad de la bala del rifle es en valor absoluto igual a u. Se supone obviamente que se tiene $u > \|\overrightarrow{v}\|$. Determinar la dirección en la que el cazador debe tirar para abatir el pájaro y el instante t_0 de impacto : se escriben dos ecuaciones que determinan el vector velocidad $\overrightarrow{u}$ de la bala de fusil y el momento t_0, y se dan las soluciones. Dar la expresión de la distancia d recorrida por el pájaro entre los momentos 0 y t_0. Aplicar numéricamente los resultados anteriores a los dos casos definidos por $A(0,0,a)$, $B(b,0,0)$, $\overrightarrow{v} = (0,v,0)$ con :
- Vuelo a partir del reposo : $a = 15$m, $b = 10$m, $v = 5$m/s, $u = 300$m/s
- Pasaje en pleno vuelo : $a = 20$m, $b = 0$, $v = 90$km/h, $u300$m/s

[002694]

Ejercicio 5839

Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2 = 2px, p > 0$.

- Demostrar que la tangente a $\mathscr{P}$ en el punto $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ tiene la ecuación $yy_0 = p(x + x_0)$.
- Un rayo de luz, llevado por la recta de ecuación $y = y_0$ y se propagan en dirección opuesta al eje x, se refleja en el punto M_0 en la tangente a $\mathscr{P}$ según la ley de Descartes. Determinar la ecuación del rayo reflejado.
- Verificar que los rayos reflejados correspondientes a los diversos valores de y_0 pasan todos por un mismo punto F ubicado en el eje de x (foco de la parábola). Citar las aplicaciones prácticas de esta propiedad.

[002695]

Ejercicio 5840

Se dispone de un osciloscopio de dos canales. Se aplica una tensión sinusoidal al canal X ω, y en el canal Y una tensión de la misma amplitud y pulsación 2ω. Colocando el osciloscopio en modo X–Y y para una escogencia apropiada de subida de cada canal, se observa en pantalla una curva parametrizada definida en coordenadas cartesianas por las ecuaciones :

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen} \omega t \\ y(t) = a \operatorname{sen} 2\omega t. \end{cases}$$

— Determinar el periodo del movimiento T.
— Dar la tabla de variaciones de $x(t)$ y $y(t)$ en el intervalo $[0,T]$, y deducir la forma de la curva.
— Determinar las coordenadas de los puntos de la curva de abscisa u ordenada máxima.
— Determinar las simetrías de la curva y dar las transformaciones correspondientes del parámetro t.

[002696]

Ejercicio 5841

En la pantalla de un osciloscopio observamos la curva cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes :

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen} \omega t \\ y(t) = a \operatorname{sen}(\omega t - \varphi). \end{cases}$$

— Expresar y luego factorizar la suma y la diferencia $x+y$ y $x-y$.
— Sean X y Y las coordenadas con respecto a los ejes, deducidas de los ejes Ox y Oy por una rotación de $\pi/4$. Dar las ecuaciones paramétricas de la curva en este sistema de coordenadas.
— Trazar la curva y discutir la forma y la dirección del recorrido de acuerdo con el parámetro $\varphi \in [0,2\pi]$, (considerar los valores múltiplos de $\pi/2$ y las regiones que limitan).
— La curva que se supone dada, deducir geométricamente el valor de φ.

[002697]

229 245.00 Análisis vectorial : forma diferencial, campo de vectores, circulación

230 245.01 Forma diferencial, campo de vectores, circulación

Ejercicio 5842

Se considera el campo vectorial $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$P(x,y) = (2x\mathrm{e}^{x^2-2y}; -2\mathrm{e}^{x^2-2y}).$$

1. Verificar que la forma diferencial asociada a P es cerrada.
2. Deducir que P es un campo gradiente y determinar un potencial.
3. Calcular la circulación de P por el camino

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); \mathrm{e}^t + 1).$$

Ejercicio 5843

Sean a, b de números tales que $0 < a < b$ y sea

$$D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b,\ y \geqslant x,\ y^2 - x^2 \leqslant 1\}.$$

Efectuando el cambio de variable $u = xy, v = y^2 - x^2$, calcular

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

[002073]

Ejercicio 5844

Sea el campo vectorial $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy + \mathrm{e}^y, x^2 + x\mathrm{e}^y)$. Calcular la circulación de $\overrightarrow{V}$ a lo largo de la parábola $x = y^2$ entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. [002074]

Ejercicio 5845

Sea el campo vectorial $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (xy, -z, xz)$. ¿$\overrightarrow{V}$ es un campo gradiente? Calcular la circulación de $\overrightarrow{V}$ a lo largo de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, para $t \in [0, 2\pi]$. [002075]

Ejercicio 5846

Demostrar que $\omega(x,y) = \dfrac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx + \dfrac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2}dy$ es una forma diferencial exacta en $\mathbb{R}^2$ e integrarlo. [002076]

Ejercicio 5847

Sobre $D =]0, +\infty[^2$ se define $\omega(x,y) = (\dfrac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy))dx + \dfrac{\varphi(y)}{x+y}dy$.

1. Encontrar un CNS en φ, para que ω sea cerrada.
2. Demostrar que entonces ω es exacta e integrarla.

[002077]

Ejercicio 5848

Sea $\omega(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ una forma diferencial C^1 en un abierto estrellado U de $\mathbb{R}^3$.

1. ¿En qué condición ω es exacta?
2. Se supone que no es exacta y se busca entonces $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^*$ de clase C^1 tal que $\lambda\omega$ sea exacta. Se dice entonces que λ es un factor integrante. Eliminando λ en la condición encontrada en la pregunta anterior, encontrar una condición necesaria en P, Q, R, para que exista un factor integrante.

[002078]

Ejercicio 5849

Sea $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\right\}$ y $\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$.

1. Usando el ejercicio anterior (ejercicio 5848), demostrar que ω admite un factor integrante.
2. Encontrar un factor de integración que dependa solo de z.
3. Se supone que un movimiento en U verifica la ecuación diferencial $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$. Encontrar una integral primero del movimiento.

[002079]

Ejercicio 5850

Calcular el área de un astroide. [002080]

Ejercicio 5851

Se recuerda que la fórmula general de Stokes establece que si ω es una forma diferencial de grado $p-1$, Ω una variedad de $\mathbb{R}^N$ de dimensión p y de borde $\partial\Omega$, entonces

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

¿En el caso en que $p=1$, $\Omega = [a,b]$ un segmento y $\omega = f$ una función real, que da esta fórmula ? ¿Y si Ω es la unión de varios intervalos ? Más generalmente, si Ω es una curva de $\mathbb{R}^3$, y g una función definida en $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es el trabajo de g a lo largo de Ω ? Demostrar que no depende del camino recorrido. [002480]

Ejercicio 5852

Sea Σ una superficie de $\mathbb{R}^3$ de borde $\Gamma = \partial\Sigma$, y $\mathbf{U}$ un campo de vectores de $\mathbb{R}^3$. Considerando la forma diferencial $\omega = \mathbf{U}_1\,dx + \mathbf{U}_2\,dy + \mathbf{U}_3\,dz$, demostrar la forma vectorial de la fórmula de Stokes :

$$\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oint_\Gamma \mathbf{U}\cdot d\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{n}$ designa el vector normal a Σ. Explicitar esta fórmula en los casos donde Σ es dada :
a) en forma directa $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$;
b) en la forma intrínseca $f(x,y,z) = 0$;
c) en forma paramétrica $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, con $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. [002481]

Ejercicio 5853

Calcular

$$\oint_\Gamma (2xy^2 + \operatorname{sen} z)\,dx + 2x^2y\,dy + x\cos z\,dz$$

a lo largo de la curva Γ dada por $x = \cos t, y = z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. [002482]

Ejercicio 5854

Demostrar que si Σ es una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{U}$ un campo de vectores C^1 sobre Σ, entonces $\int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$. Deducir el valor de $\int_S \operatorname{rot}\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\,ds$, donde $\mathbf{U} = (-y^3, x^3+z, z^3)$ y S el hemisferio $z > 0$ de la esfera unitaria. [002483]

Ejercicio 5855

Sea $\mathbf{U} = (\mathrm{e}^x + y^2, -y\mathrm{e}^x, x^2 + y^2)$; calcular div$\mathbf{U}$ y deducir $\int_\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$, donde Σ es una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$. [002484]

Ejercicio 5856

Bajo las condiciones del teorema de Stokes, demostrar las siguientes identidades, donde $\mathbf{V}$ es un campo de vectores arbitrario, Σ una superficie de borde Γ, y ϕ y ψ funciones C^1 :

$$\oint \phi\, d\mathbf{r} = \int_\Sigma d\sigma \wedge \nabla\varphi,$$
$$\oint_\Gamma d\mathbf{r} \wedge \mathbf{U} = \int_\Sigma (\mathbf{n} \wedge \nabla) \wedge \mathbf{U}\, d\sigma,$$
$$\oint_\Gamma \varphi\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = \int_\Sigma \nabla\phi \wedge \nabla\psi \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

[002485]

Ejercicio 5857

Deducir de la fórmula general de Stokes la fórmula de Green en dos dimensiones : si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de borde $\partial\Omega$ de clase C^1 por trozos, y si P, Q son dos funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de clase C^1 en Ω, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

[002486]

Ejercicio 5858

Sea C una curva cerrada del plano, y P y Q dos polinomios de grado 1 en x, y; demostrar que el valor de $\oint_C P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$ no cambia si se efectúa una traslación en C. Deducir el valor de $\oint_C (3x+4y)\, dx + (x-3y)\, dy$, donde C es un círculo cualquiera de radio $a > 0$. [002487]

Ejercicio 5859

Sea C el borde del cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$. Calcular

$$\oint_C (\mathrm{e}^{x^3} + 3y^2)\, dx + \sqrt{\cos y}\, dy.$$

[002488]

Ejercicio 5860

Sea C la cicloide de ecuaciones $x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t$, y C_0 el arco de C uniendo $O = (0,0)$ a $A = (\pi, 2)$; calcular $\int_{C_0} (2x^2 + 3y^2)\, dx + (6xy + 4y^2)\, dy$. [002489]

Ejercicio 5861

Sea C una curva cerrada del plano que encierra un área S, y a, b dos reales.

1. Calcular $\oint_C ay\, dx + bx\, dy$. Deducir que

$$S = \oint_C x\, dy = -\oint_C y\, dx = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx.$$

2. Usando la fórmula anterior, calcular el área entre los ejes Ox y el arco de la cicloide de ecuaciones $x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t$, con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Igualmente, encontrar el área interior al bucle del folio de Descartes de ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$, que se incluye en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ (se puede encontrar una representación paramétrica del lazo del folio suponiendo $y = tx$).

[002490]

Ejercicio 5862

Deducir de la fórmula general de Stokes la fórmula de Green en tres dimensiones : si V es un volumen de $\mathbb{R}^3$ de borde $\Sigma = \partial V$, y $\mathbf{U}$ un campo de vector C^1 en V, entonces

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{U}\, dv = \oint_\Sigma \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma.$$

inferir que el volumen de V es dado por

$$|V| = \oint_\Sigma x\, dydz = \oint_\Sigma y\, dzdx = \oint_\Sigma z\, dxdy = \frac{1}{3}\oint_\Sigma x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy.$$

[002491]

Ejercicio 5863

Bajo las condiciones de la fórmula de Green, demostrar las siguientes identidades, donde $\mathbf{U}$ es un campo de vectores arbitrario, y φ una función C^1 :

$$\int_V \nabla\varphi\, dv = \oint_\Sigma \varphi\,\mathbf{n}\, d\sigma,$$
$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{U}\, dv = \oint_\Sigma \mathbf{n}\wedge\mathbf{U}\, d\sigma.$$

[002492]

Ejercicio 5864

Sea $\mathbf{U} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$; calcular directamente $I_S = \oint_S \mathbf{U}\cdot\mathbf{n}\, ds$ en el caso donde S es una bola de radio r y de centro $O = (0,0,0)$. Calcular igualmente $\operatorname{div}\mathbf{U}$. ¿Qué se constata ? Explicar por qué no se aplica la fórmula de Green. Calcular I_S respectivamente en el caso donde S es una superficie cerrada cuyo interior no contiene O (resp. contiene O). ¿Qué sucede si O se encuentra en S ? [002493]

Ejercicio 5865

En $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{U}$ un campo vectorial arbitrario, $\mathbf{a}$ un vector constante, $\mathbf{r}$ el campo vectorial de coordenadas (x,y,z) y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Calcular $\Delta\frac{1}{r}$; $\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3)$; $\operatorname{div}(\mathbf{U}\wedge\mathbf{r})$; $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{U})$; $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r})$. [002685]

Ejercicio 5866

Sea a, b, c de constantes y $\mathbf{U}$ el campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas

$$(x+2y+az,\ bx-3y-z,\ 4x+cy+2z).$$

Determinar para qué valores de a, b, c, $\mathbf{U}$ es irrotacional. En este caso, ¿de que potencial se deriva? Las mismas preguntas con el campo de coordenadas

$$\left(\frac{xzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}, \frac{yzr^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-r^2}{(ax^2+by^2+c)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

donde $r^2 = x^2+y^2+z^2$. [002686]

Ejercicio 5867

Un *campo electromagnético* se caracteriza por dos campos vectoriales $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, igualmente una función del tiempo t, y satisfaciendo las *ecuaciones de Maxwell*

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

donde c es una constante y ρ una función escalar de (x,y,z,t). Demostrar que existe un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{H}$, y un campo escalar ϕ tal que $\mathbf{E}$ se expresa en términos de $\mathbf{A}$ y ϕ. Calcular $\operatorname{div}\mathbf{A}$, con ayuda de ϕ, y demostrar que $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen una ecuación de onda. [002687]

Ejercicio 5868 **

¿Son exactas las siguientes formas diferenciales? Si es sí, integrar y si no busca un factor integrante.

1. $\omega = (2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sobre $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega = \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ sobre $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x\}$
3. $\omega = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - ydy$
4. $\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$ sobre $(]0,+\infty[)^2$ (encontrar un factor integrante no nulo que dependa solo de x^2+y^2).

Solución ▼ [005897]

Ejercicio 5869 **

Calcular la integral de la forma diferencial ω a lo largo del contorno orientado C en los siguientes casos :

1. $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ y C es el arco de la parábola de ecuación $y^2 = 2x+1$ uniendo los puntos $(0,-1)$ y $(0,1)$ recorrido una vez en dirección a y crecientes.
2. $\omega = (x-y^3)dx + x^3dy$ y C es el círculo de centro O y de radio 1 recorrido una vez en el sentido directo.
3. $\omega = xyzdx$ y C es el arco $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \cos t \operatorname{sen} t$, t variando creciente de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Solución ▼ [005906]

Ejercicio 5870 **

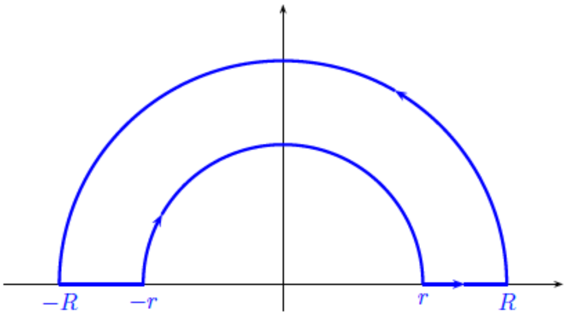
Sea $\omega = x^2dx + y^2dy$. Calcular la integral de ω a lo largo de todo círculo en el plano recorrido en sentido antihorario una vez. Misma pregunta para $\omega = y^2dx + x^2dy$.

Solución ▼ [005907]

Ejercicio 5871 *** I

Cálculo de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$).

1. r y R son dos números reales estrictamente positivos tales que $r < R$. Se considera el contorno Γ orientado siguiendo



   Calcular la integral de la forma diferencial
   $$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}((x\operatorname{sen} x - y\cos x)dx + (x\cos x + y\operatorname{sen} x)dy)$$
   a lo largo de este contorno orientado.
2. Deducir $\int_r^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ en función de otra integral.
3. Al hacer tender r hacia 0 y R hacia $+\infty$, determinar el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

Solución ▼ [005909]

Ejercicio 5872 **** Desigualdad isoperimétrica

Una curva cerrada (C) es el soporte de un arco parametrizado γ de clase C^1 regular y simple. Se denota $\mathscr{L}$ su longitud y $\mathscr{A}$ el área delimitada por la curva cerrada (C). Demostrar que

$$\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Por esto, primero se supone $\mathscr{L} = 2\pi$ y se elige una parametrización normal del arco. Se aplica luego la fórmula PARSEVAL a las integrales que permiten calcular $\mathscr{L}$ y $\mathscr{A}$ y se compara las sumas de las series obtenidas.

Solución ▼ [005913]

Ejercicio 5873

Determinar si las formas diferenciales siguientes son exactas y si es así, integrarlas :

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2+z)dy + (2xyz+2z+y)dz$.

Solución ▼ [006873]

Ejercicio 5874

Se considera el siguiente cambio de variables en coordenadas esféricas :

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z &= r\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

1. Calcular dx, dy, dz.
2. Verificar que $xdx + ydy + zdz = rdr$. Deducir $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ y $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Solución ▼ [006874]

Ejercicio 5875

Se considera la forma diferencial $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$.

1. Demostrar que ω no es exacto.
2. Encontrar una función $\psi(x)$ tal que $\psi(x)\omega = df$. Precisar entonces f. (Se dice que ψ es un factor integrante.)

Solución ▼ [006875]

Ejercicio 5876

Se considera el campo vectorial $\overrightarrow{V}(x,y) = (1+2xy, x^3-3)$. ¿Este campo es un campo gradiente ?

Solución ▼ [006876]

Ejercicio 5877

¿Cuál es el campo vectorial que deriva del potencial

$$U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Solución ▼ [006877]

Ejercicio 5878

Calcular la circulación del campo vectorial $\overrightarrow{V}(x,y) = (3x, x+y)$ a lo largo del círculo C de centro O y de radio 1, recorrido en el sentido directo.

Solución ▼ [006878]

Ejercicio 5879

Calcular el trabajo W de la fuerza $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ a lo largo de la hélice H, parametrizada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $z = t$, donde t varía de 0 a $\frac{\pi}{4}$.

Solución ▼ [006879]

Ejercicio 5880

Se da el campo vectorial

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (y^2\cos x, 2y\operatorname{sen} x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. Demostrar que este campo es un campo gradiente.
2. Determinar el potencial $U(x,y,z)$ del que deriva este campo sabiendo que vale 1 en el origen.
3. ¿Cuál es la circulación de este campo de $A(0,1,0)$ a $B(\frac{\pi}{2},3,0)$?

Solución ▼ [006880]

Ejercicio 5881

Utilizando la fórmula de Green-Riemann, calcular $I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy$, donde

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0; y \geqslant 0; x+y \leqslant 1\}.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [006881]

Ejercicio 5882

Se considera la forma diferencial

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

1. ¿En qué dominio esta forma diferencial está definida ?
2. Calcular la integral curvilínea $\int_C \omega$, donde C es el círculo de centro O y de radio 1, recorrido en el sentido directo.
3. ¿La forma ω es exacta ?

Solución ▼ [006882]

231 245.02 Torsores

Ejercicio 5883 Momento paralelo a un plano

Sean $\mathscr{T}$ un torsor y $\mathscr{P}$ un plan. Determinar el lugar de puntos $M \in \mathscr{P}$ tales que $\mathscr{T}(M) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Solución ▼ [004944]

Ejercicio 5884 Torsores de sumas ortogonales

Sean $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ dos torsores de suma no nula, ortogonales. Demostrar que el co-momento de $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}'$ es nulo si y solo si los ejes centrales son concurrentes. [004945]

Ejercicio 5885 Suma de deslizadores

Sea $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un marco ortonormado directo del espacio. Se consideran los deslizadores :
$\mathscr{G}_1$ de eje $\begin{cases} y = mx \\ z = 1 \end{cases}$ y de vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$. $\mathscr{G}_2$ de eje $\begin{cases} y = -mx \\ z = -1 \end{cases}$ y de vectores $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - m\overrightarrow{j}$.
Determinar el eje central de $\mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2$. [004946]

Ejercicio 5886 Deslizadores asociados con un tetraedro

Sea $ABCD$ un tetraedro no aplanado del espacio. Para $X,Y \in \{A,B,C,D\}$ distintos, se denota $\mathscr{G}_{XY}$ el eje deslizador a la derecha (XY) y de vectores $\overrightarrow{XY}$. Demostrar que $(\mathscr{G}_{AB}, \mathscr{G}_{AC}, \mathscr{G}_{AD}, \mathscr{G}_{BC}, \mathscr{G}_{BD}, \mathscr{G}_{CD})$ es una base del espacio de torsores.

Solución ▼ [004947]

Ejercicio 5887 Producto vectorial de torsores

Sean $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ dos torsores de suma $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$. Se define el campo $\mathscr{T}$ por :

$$\mathscr{T}(M) = \overrightarrow{R}_1 \wedge \mathscr{T}_2(M) + \mathscr{T}_1(M) \wedge \overrightarrow{R}_2.$$

1. Demostrar que $\mathscr{T}$ es un torsor de suma $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2$ (producto vectorial de $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$).
2. Si $\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2 \neq \overrightarrow{0}$, Demostrar que el eje central de $\mathscr{T}$ es la perpendicular común de los ejes centrales de $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$.

[004948]

232 246.00 Otro

233 246.01 Plano tangente, vector normal

Ejercicio 5888

Sea $\mathscr{S}$ la superficie de ecuación $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Determinar los planos tangentes a la superficie $\mathscr{S}$, paralela al plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. Estudiar localmente la posición relativa de la superficie $\mathscr{S}$ y su plano tangente en cada uno de los puntos así obtenidos.
3. Investigar la posición relativa global de la superficie $\mathscr{S}$ y del plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Solución ▼ [005915]

Ejercicio 5889

Encontrar todas las rectas dibujadas en la superficie de ecuaciones $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, luego se verifica que estas rectas sean coplanares. [005916]

234 246.02 Superficies paramétricas

Ejercicio 5890 Chimie P 91

Ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de Γ alrededor de Oz, donde Γ es la curva de ecuaciones paramétricas : $\begin{cases} x = a\cos^3 u \\ y = a\operatorname{sen}^3 u \\ z = a\cos 2u. \end{cases} \quad (a > 0)$

Solución ▼ [005047]

Ejercicio 5891 Ensi Physique 93

Sea la curva de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$:

$$(\Gamma) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = 0 \\ x + z & = 1. \end{array} \right.$$

Determinar el área generada por la rotación de (Γ) alrededor de Oz.

Solución ▼ [005048]

Ejercicio 5892 El plano tangente interseca Oz en un punto fijo

Sea la superficie $\mathscr{S}$ de ecuaciones paramétricas : $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = f(\rho, \theta), \end{cases}$ donde f es una función de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Dar la ecuación del plano tangente en $\mathscr{S}$ en un punto $M(\rho, \theta)$.
2. Determinar f de manera que, a lo largo de una recta $\theta = $ cte, el plano tangente corta Oz en un punto fijo.
3. Ejemplo : $f(\rho, \theta) = \theta$. Dibujar la superficie $\mathscr{S}$.

Solución ▼ [005049]

Ejercicio 5893 Pseudo-esfera

Dibujar la superficie $\mathscr{S}$ de ecuaciones paramétricas : $\begin{cases} x = a \cos u / \operatorname{ch} v \\ y = a \operatorname{sen} u / \operatorname{ch} v \\ z = a(v - \operatorname{th} v), \end{cases}$ donde a es un real estrictamente positivo (pseudo-esfera).

Solución ▼ [005050]

Ejercicio 5894 Las normales cortando $Oz \Leftrightarrow$ revolución

Sea $\mathscr{S}$ una superficie de ecuación $z = f(x, y)$. Demostrar que $\mathscr{S}$ es de revolución si y solo si en todo punto M, la normal a $\mathscr{S}$ en M es paralela o secante a Oz.

Solución ▼ [005051]

Ejercicio 5895

¿Qué pasa con una superficie $\mathscr{S}$ tal que todas las normales son concurrentes ? (cf ex.5894) [005052]

Ejercicio 5896 Contorno visible

Sea $\mathscr{S}$ la superficie de ecuación cartesiana $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

1. Reconocer $\mathscr{S}$.
2. Sea D la recta de ecuaciones : $2x + y = 0$, $z = 0$. Determinar los puntos M de $\mathscr{S}$ tal que el plano tangente a $\mathscr{S}$ en M es paralela a D. (Contorno visible de $\mathscr{S}$ en la dirección de D)

Solución ▼ [005053]

Ejercicio 5897 Cilindro circunscrito

Sea $\mathscr{S}$ la superficie de ecuaciones paramétricas : $\begin{cases} x = u/(u^2+v^2) \\ y = v/(u^2+v^2) \\ z = 1/(u^2+v^2). \end{cases}$

1. Dar una ecuación cartesiana de $\mathscr{S}$.
2. Determinar el conjunto $\mathscr{C}$ de puntos de $\mathscr{S}$, donde está el plano tangente es paralelo a la recta D de ecuaciones : $x = y = z$.
3. Determinar la ecuación cartesiana del cilindro de generatrices paralelas a D que se apoya sobre $\mathscr{C}$. (Cilindro circunscrito a $\mathscr{S}$)

Solución ▼ [005054]

Ejercicio 5898 Ecuación del cono

Sea $\mathscr{C}$ el círculo intersección de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ y del plano de ecuación $x+y=1$, y $S=(1,1,1)$. Determinar la ecuación cartesiana del cono de vértice S que se apoya sobre $\mathscr{C}$.

Solución ▼ [005055]

Ejercicio 5899 Cono = cilindro ?

Sea $\mathscr{S}$ la superficie de ecuación cartesiana : $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}=\frac{1}{(x-z)^2}$.

1. Demostrar que $\mathscr{S}$ es a la vez un cilindro y un cono.
2. ¿Cómo es posible ?

[005056]

Ejercicio 5900 Posición de una superficie de revolución con respecto al plano tangente

Sea $\mathscr{S}$ una superficie de ecuación cartesiana $z = f(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y f es una función de clase $\mathscr{C}^2$. Demostrar que la posición de $\mathscr{S}$, con respecto a su plano tangente viene dado por el signo de $f'(\rho)f''(\rho)$. Interpretar este hecho geométricamente. [005057]

Ejercicio 5901 Intersección de dos cilindros

Sean $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ las superficies de ecuaciones $x^2+y^2+xy=1$ y $y^2+z^2+yz=1$, y $\mathscr{C}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$.

1. Dar en todo punto de $\mathscr{C}$ el vector tangente a $\mathscr{C}$.
2. Demostrar que $\mathscr{C}$ es la unión de dos curvas planas.
3. ¿Cuál es la proyección de $\mathscr{C}$ sobre Oxz ?

Solución ▼ [005058]

Ejercicio 5902 Conoide

Sea $\mathscr{S}$ la esfera de centro $A=(a,0,0)$ y de radio r $(0<r<a)$ y $\mathscr{S}'$ la superficie formada por rectas horizontales tangentes a $\mathscr{S}$ y secante a Oz. Determinar la ecuación cartesiana de $\mathscr{S}'$.

Solución ▼ [005059]

Ejercicio 5903 Superficie encapsulada

Sea $A=(0,1,0)$ y $\mathscr{S}$ la superficie formada por los círculos verticales de diámetro $[A,B]$, donde B es un punto variable en Ox. Encontrar una ecuación cartesiana de $\mathscr{S}$.

Solución ▼ [005060]

Ejercicio 5904 Chimie P' 91

Se considera la recta Δ de ecuaciones : $x=a$, $z=0$. P es un punto describiendo Δ y $\mathscr{C}_P$ el círculo tangente a Oz en O y pasando por P. Hacer un esquema y parametrizar la superficie engendrada por los círculos $\mathscr{C}_P$, cuando P recorre Δ.

Solución ▼ [005061]

Ejercicio 5905 Ensi Chimie P' 93

Sea $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=a\cos(t)/\operatorname{ch}(mt)\\ y(t)=a\operatorname{sen}(t)/\operatorname{ch}(mt)\\ z(t)=a\operatorname{th}(mt).\end{cases}$

1. Demostrar que (Γ) se traza sobre una superficie (Σ) simple. Demostrar que (Σ) es de revolución alrededor de Oz y dar su ecuación.
2. Demostrar que (Γ) corta los meridianos de (Σ) en un ángulo constante (loxodromía).
3. Recíprocamente, determinar todos los loxodromos de (Σ).
4. Dibujar la proyección de (Γ) sobre xOy.

Solución ▼ [005062]

235 260.01 Probabilidad y conteo

Ejercicio 5906

Una empresa decide clasificar 20 personas susceptibles de ser contratadas ; sus CV son muy cercanos, el jefe decide recurrir al azar : ¿cuántas clasificaciones posibles hay : sin empates ; con exactamente 2 ex-aequo ?

Solución ▼ [005983]

Ejercicio 5907

Un estudiante se viste muy rápido por la mañana y toma, al azar de la cesta de ropa, un pantalón, una camiseta, un par de calcetines ; ese día hay en el armario 5 pantalones incluidos 2 negro, 6 camiseta de las cuales 4 son negras, 8 pares de medias, de los cuales 5 pares son negros. ¿Cuántas formas hay de vestirse ? ¿Cuáles son las probabilidades de los siguientes eventos : es todo en negro ; solo una pieza de las tres es negra.

Solución ▼ [005984]

Ejercicio 5908

Si 30 personas están presentes en la víspera de Año Nuevo y si, a medianoche, cada persona da 2 besos a todos los demás, ¿cuántos besos se intercambiaron en total ? (Un beso es un contacto entre dos mejillas...)

Solución ▼ [005985]

Ejercicio 5909

Un PCM incluye 10 preguntas, para cada una de las cuales 4 respuestas son propuestas, una sola es correcta. ¿Cuántas claves de respuesta posibles hay ? ¿Cuál es la probabilidad de responder al azar al menos 6 veces correctamente ?

Solución ▼ [005986]

Ejercicio 5910

Amédée, Barnabé, Carlos disparan a un pájaro ; si las probabilidades de éxito son para Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Carlos : 90%, ¿cuál es la probabilidad de que el pájaro sea abatido ?

Solución ▼ [005987]

Ejercicio 5911

Durante una lotería de Navidad, 300 boletos son vendidos a los escolares ; 4 boletos son ganadores. Si se compran 10 boletos, ¿cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio ?

Solución ▼ [005988]

Ejercicio 5912

La probabilidad de que una población tenga una enfermedad A es p dado ; en esta misma población, una persona puede verse afectada por una enfermedad B, con una probabilidad q dada también ; se supone que las enfermedades son independientes : ¿cuál es la probabilidad de ser afectado por una u otra de estas enfermedades ?

Solución ▼ [005989]

Ejercicio 5913

En un juego de 52 tarjetas, se toma una carta al azar : son los eventos «sacar un rey» y «sacar una espada» independientes ? ¿cuál es la probabilidad de «sacar un rey o una espada» ?

Solución ▼ [005990]

Ejercicio 5914

La familia Potter incluye 2 niños ; los eventos A :«hay dos niños de diferente sexo en los Potters» y B : «la familia Potter tiene a lo sumo una hija» ¿son independientes ? La misma pregunta si la familia Potter tiene 3 niños. Generalizar.

Solución ▼ [005991]

Ejercicio 5915

Se lanzan dos dados 6 caras. Describir el conjunto Ω de posibles resultados y la probabilidad P asociada a esta experiencia. Dar la probabilidad de obtener :

1. un doble,
2. a lo sumo un número par,
3. exactamente un número par,
4. dos números que se suceden.

[006889]

Ejercicio 5916

En la lotería, se escogen 6 números principales, que son 6 números diferentes entre 1 y 49, y un número complementario, que es un número entre 1 y 49 diferente de los 6 precedentes. ¿Cuál es la probabilidad de tener :

1. los seis números principales correctos ?
2. cinco buenos números entre los 6 principales ?
3. ¿cinco números correctos de los principales y el número adicional correcto ?

[006890]

Ejercicio 5917

Una urna contiene una bola roja, tres bolas verdes y dieciséis bolas blancas. La bola roja gana 10 euros, cada bola verde permite ganar 5 euros y las bolas blancas no aportan nada. Un jugador saca simultáneamente cinco bolas. ¿Cuál es la probabilidad para que este jugador gane exactamente 10 euros ?

Solución ▼ [006891]

Ejercicio 5918

Se tiran tres dados equilibrados. Se observa el número de puntos (1, 2, 3, 4, 5 o 6) que aparece en la parte superior de cada dado. Calcular la probabilidad de tener :

1. tres 3,
2. dos 2 y un 1,
3. un 1, un 3, un 5,
4. la suma de los puntos igual a 9,
5. la suma de los puntos igual a 10.

Observación : Estos cálculos fueron hechos originalmente por Galileo para explicar la diferencia entre 4 y 5.

Solución ▼ [006892]

Ejercicio 5919

Los tres mosqueteros (por lo tanto cuatro personas) han mezclado sus botas en el pasillo del albergue. D'Artagnan se levanta primero y toma dos botas al azar. Calcular la probabilidad de que :

1. ambas botas sean suyas,
2. ambas botas son un par (un par es la unión de un pie derecho y un pie izquierdo),
3. ambas botas sean dos pie derecho,
4. las dos botas pertenecen a dos personas diferentes.

[006893]

Ejercicio 5920

Se saca simultáneamente 6 cartas en una baraja de 32 tarjetas. ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 2 damas y 3 tréboles ? [006894]

Ejercicio 5921

Se quiere enviar un mensaje electrónico compuesto por los dígitos 0 y 1. Las condiciones de transmisión imperfectas significan que existe una probabilidad igual a 0,1 que un 0 sea transformado en un 1 y un 1 en un 0 en la recepción, y esto de forma independiente para cada dígito. Para mejorar la calidad de transmisión, se propone emitir el bloque 00000 en vez de 0 y el bloque 11111 en vez de 1 y trasladar la mayoría de los 0 de un bloque en la recepción por 0 y una mayoría de 1 por 1.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la mayoría de 1 si 00000 se emite ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la mayoría de 1 si 11111 se emite ?

Solución ▼ [006895]

236 260.02 Probabilidad condicional

Ejercicio 5922

En la sala de profesores 60% son mujeres ; una de cada tres mujeres usa anteojos y uno de cada dos hombres usa anteojos : ¿Cuál es la probabilidad de que una persona al azar que usa anteojos sea una mujer ?

Solución ▼ [005992]

Ejercicio 5923

Una fiesta reúne 35 hombres, 40 mujeres, 25 niños ; en una mesa, hay 3 urnas H, F, E conteniendo bolas de colores de las cuales respectivamente el 10%, 40%, 80% son bolas negras. Un presentador con los ojos vendados señala a una persona al azar y le pide sacar una bola en la urna H si esta persona es un hombre, en la urna F si esta persona es una mujer, en la urna E si esa persona es un niño. La bola extraída es negra : ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea sacada por un hombre ? ¿una mujer ? ¿un niño ? El presentador no es más mago que usted o yo y pronostica el género de la persona al azar : ¿qué debe decir para tener el menor riesgo de error ?

Solución ▼ [005993]

Ejercicio 5924

Un fumador, luego de leer una serie de estadísticas aterradoras en los riesgos de cáncer, problemas cardiovasculares relacionados con el tabaco, decide dejar de fumar ; siempre según las estadísticas, se estiman las siguientes probabilidades : si esta persona no ha fumado un día J_n, entonces la probabilidad de que no fume al día siguiente J_{n+1} es 0.3 ; pero si alguna vez fumó J_n, entonces la probabilidad de que no fume al día siguiente J_{n+1} es 0.9 ; ¿cuál es la probabilidad P_{n+1}, para que fume durante el día J_{n+1} en función de la probabilidad P_n, para que fume durante el día J_n ? ¿Cuál es el límite de P_n ? ¿Acabará por dejar de fumar ?

Solución ▼ [005994]

Ejercicio 5925

Un profesor olvida con frecuencia sus llaves. Para todo n, se nota : E_n el evento « el día n, el profesor olvida sus llaves», $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

Se supone que : $P_1 = a$ es dado y que si el día n olvida sus llaves, al día siguiente las olvida con la probabilidad $\frac{1}{10}$; si el día n no olvidar sus llaves, al día siguiente los olvida con la probabilidad $\frac{4}{10}$. Demostrar que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Deducir una relación entre P_{n+1} y P_n

¿Cuál es la probabilidad del evento «el día n, el profesor olvida sus llaves» ?

Solución ▼ [005995]

Ejercicio 5926

En tabletas de chocolate N., se encuentran imágenes distribuidas uniformemente de los cinco personajes de la última película de Walt Disney, una imagen por tableta. La niña quiere tener al héroe Príncipe Azul : ¿cuántas barras se deben comprar para que la probabilidad de tener la figura esperada supere 80% ? Misma pregunta para estar seguro al 90%.

Solución ▼ [005996]

Ejercicio 5927

En caso de migraña, tres de cada cinco pacientes toman aspirina (o equivalente), dos de cada cinco toman un medicamento M presentando efectos secundarios :
Con aspirina, 75% de los pacientes que son aliviados.
Con el medicamento M, 90% de los pacientes que son aliviados.

1. ¿Cuál es la tasa global de personas aliviadas ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente haya tomado aspirina sabiendo que se siente aliviado ?

Solución ▼ [005997]

Ejercicio 5928

En una población el 40% de las personas tienen ojos marrones, 25% de los individuos tienen el pelo rubio, 15% de las personas tienen ojos marrones y el cabello rubio. Se escoge un individuo al azar. Calcular :

1. La probabilidad del evento : si un individuo tiene los ojos marrones, de tener el pelo rubio.
2. La probabilidad del evento : si un individuo tiene cabello rubio de tener los ojos marrones.
3. La probabilidad del evento : si un individuo tiene cabello rubio, no tener ojos marrones.

Solución ▼ [005998]

Ejercicio 5929

Un fabricante aeronáutico provee su avión trimotor con un motor central de tipo A y dos motores, uno por ala, de tipo B ; cada motor falla independientemente de otro, y se estima p la probabilidad de que un motor tipo A falle y q la probabilidad de que un motor tipo B falle. El trimotor puede volar si el motor central *o* ambos motores de las alas funcionan : ¿cuál es la probabilidad que el avión vuele ? Aplicación numérica : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

Solución ▼ [005999]

Ejercicio 5930

Se sabe que en una fecha dada, 3% de una población tiene hepatitis Se dispone de pruebas de detección de la enfermedad :

— Si la persona está enferma, entonces el test es positivo con una probabilidad de 95%.
— Si la persona está sana, entonces el test es positivo con una probabilidad de 10%.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se enferme si su prueba es positiva ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté sana si su prueba es positiva ?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se enferme si su prueba es negativa ?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté sana si su prueba es negativa ?

Solución ▼ [006000]

Ejercicio 5931

En un manojo de llaves hay 8 clés ; todas son semejantes. Para entrar a la casa se toma una llave al azar ; se sigue probando hasta que encuentra la adecuada ; se descartan las llaves equivocadas sobre la marcha. ¿Cuál es la probabilidad de que abra la puerta :

1. la primera vez ?
2. en el tercer intento ?
3. en el quinto ensayo ?
4. en el octavo intento ?

Solución ▼ [006001]

Ejercicio 5932

Seis parejas se reencuentran en una fiesta de Nochevieja. Una vez los besos de nuevo año intercambiados, se baila, de manera convencional : un hombre con una mujer, pero no necesariamente la suya.

1. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$, para que cada uno de los 6 hombres, baile con su legítima esposa ?
2. ¿Cuál es la probabilidad $P(B)$, de que André baile con su esposa ?
3. ¿Cuál es la probabilidad $P(C)$, para que André y René bailen cada uno con sus esposas ?
4. ¿Cuál es la probabilidad $P(D)$, para que André o René baile(n) con su esposa ?

Solución ▼ [006002]

Ejercicio 5933

En la antigua fórmula de Loto, se debía elegir 6 números entre 49.

1. ¿Cuántas cuadrículas posibles hay ? Deducir la probabilidad de ganar jugando una cuadrícula.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la grilla ganadora tenga 2 números consecutivos ?

Solución ▼ [006003]

Ejercicio 5934

Un principiante en un juego realiza varias partidas sucesivas. Para la primera parte, las probabilidades de ganar o perder son las mismas ; después, se supone que :

— Si se gana un juego, la probabilidad de ganar el siguiente es 0.6.
— Si se pierde un juego, la probabilidad de perder el siguiente es 0.7.

Sea G_n el evento «Ganar el juego n», y $u_n = P(G_n)$. Se denota $v_n = P(\overline{G_n})$.

1. Escribir 2 relaciones entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.
2. Utilizando la matriz señalada, deducir u_n y v_n. Hacer un cálculo directo con ayuda de $u_n + v_n$.

Solución ▼ [006004]

Ejercicio 5935

Aurora llega tarde a clase con probabilidad $1/2$. Ella no va a clase con probabilidad $1/6$. Hoy, el curso comienza sin ella. ¿Cuál es la probabilidad de que ella venga hoy ? [006896]

Ejercicio 5936

Se ha encontrado que cierta población una probabilidad de 0,01 para que un niño tiene una enfermedad M. La probabilidad de que un niño que no está afectado por M tenga una reacción negativa a una prueba T es $0,9$. Si es alcanzado por M, la probabilidad que tiene una reacción positiva a la prueba es de $0,95$.
¿Cuál es la probabilidad que un niño tomado al azar tenga una reacción positiva al test ? ¿Cuál es la probabilidad que un niño tomado al azar y que tiene una reacción positiva se vea afectado por M ?

Solución ▼ [006897]

Ejercicio 5937

Las bombillas de la marca X se fabrican en dos fábricas, A y B. El 20% de las bombillas de la fábrica A y 5% de la fábrica B son defectuosos. Cada semana la fábrica A produce $2n$ bombillas y fábrica B produce n bombillas (donde $n \geqslant 1$ es un entero). Se saca una bombilla al azar en la producción de una semana.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la bombilla extraída no sea defectuosa ?
2. ¿Si la bombilla sacada es defectuosa, cuál es la probabilidad si viene de la fábrica A ?

[006898]

Ejercicio 5938

Una persona lanza dos dados de 6 caras y dice que ha obtenido al menos un número par. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números obtenidos sean pares ? [006899]

Ejercicio 5939

Hay 5% de daltonismo en hombres y $0,25\%$ en las mujeres. Hay 48% de hombres y 52% de mujeres en la población. ¿Cuál es la probabilidad de que un daltónico sea hombre ?

Observación : la forma más común de daltonismo es genética, debido a un gen recesivo portado por el cromosoma X. Un hombre (XY) es daltónico cuando el cromosoma X lleva este gen. Una mujer (XX) es daltónica solo si los 2 cromosomas X portan este gen. Esto explica las tasas tan diferentes entre hombres y mujeres.

Solución ▼ [006900]

Ejercicio 5940

Dos urnas están llenas de bolas. La primera contiene 10 bolas negras y 30 bolas blancas. La segunda contiene 20 bolas negras y 20 bolas blancas. Se saca una de las urnas al azar, de manera equiprobable, y en esta urna, se saca una bola al azar, la bola es blanca. ¿Cuál es la probabilidad que se ha sacado esta bola en la primera urna sabiendo que es blanca ?

Solución ▼ [006901]

237 260.03 Variable aleatoria discreta

Ejercicio 5941

Una empresa farmacéutica decide ahorrar en las tarifas de franquicia del correo publicitario que envía a sus clientes. Por esto, decide liberar, al azar, una proporción de 3 letras en 5 en la tarifa urgente, los demás a la tarifa normal.

1. Se envían cuatro cartas a un consultorio médico de cuatro médicos : ¿cuál es la probabilidad de los eventos :

   A : «Al menos uno de ellos recibe una carta con tarifa urgente».

   B : «Exactamente 2 médicos de cada cuatro reciben una carta con tarifa de urgencia».
2. Sea X la variable aleatoria : «número de cartas franqueadas con tarifa urgente entre 10 letras» : ¿Cuál es la ley de probabilidad de X, cuál es su esperanza y cuál es su varianza ?

Solución ▼ [006005]

Ejercicio 5942

Se toma al azar, al mismo tiempo, tres bombillas en un paquete de 15 de los cuales 5 son defectuosas. Calcular la probabilidad de los eventos :
A : al menos una bombilla es defectuosa ;
B : las 3 bombillas son defectuosas ;
C : exactamente una bombilla es defectuosa.

Solución ▼ [006006]

Ejercicio 5943

Un avión puede acomodar 20 personas ; las estadísticas muestran que 25% de los clientes que reservaron no vinieron. Sea X la variable aleatoria : «número de clientes que vienen luego de reservar entre 20». ¿Cuál es la ley de X ? (solo se da la forma general) ¿cuál es su esperanza, su desviación estándar ? ¿Cuál es la probabilidad de que X sea igual a 15 ?

Solución ▼ [006007]

Ejercicio 5944

El examen oral de un concurso comprende en total 100 temas ; los candidatos sortean tres temas al azar y eligen el tema a tratar de entre estos tres temas. Un candidato se presenta habiendo revisado 60 temas en los 100.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato haya revisado :
   (a) los tres temas sorteados ;
   (b) exactamente dos de los tres temas ;
   (c) ninguno de los tres temas.
2. Definir una variable aleatoria asociada con este problema y dar su ley de probabilidad y su esperanza.

Solución ▼ [006008]

Ejercicio 5945

Un candidato entra en una competencia donde, esta vez, las 20 preguntas se dan en forma de QEM. A cada pregunta, son propuestas 4 respuestas, solo una es exacta. El examinador cuenta las respuestas correctas dadas por los candidatos. Algunos candidatos responden aleatoriamente cada pregunta ; para estos, definir una variable aleatoria asociada a este problema y dar su ley de probabilidad, su esperanza.

Solución ▼ [006009]

Ejercicio 5946

En una oficina de correos en un pequeño pueblo, se observa que entre 10 horas y 11 horas, la probabilidad de que entren dos personas durante el mismo minuto se considera nula y la llegada de personas es independiente del minuto considerado. Se ha observado que la probabilidad de que una persona se presente entre minutos n y el minuto $n+1$ es : $p = 0.1$. Se quiere calcular la probabilidad de que : 3, 4, 5, 6, 7, 8,... personas vienen al mostrador entre 10h y 11h.

1. Definir una variable aleatoria adecuada, luego responder el problema considerado.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 personas vienen al mostrador entre 10h y 11h ?

Solución ▼ [006010]

Ejercicio 5947

Si una de cada cien personas de una población es centenaria, ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos un centenario entre 100 personas seleccionadas al azar ? ¿Y entre 200 personas ?

Solución ▼ [006011]

Ejercicio 5948

Un fabricante debe comprobar el funcionamiento de sus máquinas y sustituir algunas de ellas si es necesario. Según estadísticas anteriores, se evalúa a 30% la probabilidad de que una máquina falle en 5 años ; entre estas, la probabilidad de quedar fuera de servicio por una avería más grave se estima en 75% ; esta probabilidad es de 40% para una máquina que nunca ha tenido una falla.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina dada con más de cinco años esté fuera de servicio ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina averiada no se haya averiado nunca antes ?
3. Sea X la variable aleatoria «número de máquinas que se fallan luego de 5 años, entre 10 máquinas escogidas al azar». ¿Cuál es la ley de probabilidad de X, (se da el tipo de ley y las fórmulas de cálculo), su esperanza, su varianza y su desviación estándar ?
4. Calcular $P[X = 5]$.

Solución ▼ [006012]

Ejercicio 5949

Una población incluye en promedio una persona que mide más de 1m90 sobre 80 personas. Sobre 100 personas, calcular la probabilidad de que exista al menos una persona además alta que 1.90m (utilizar una ley de Poisson). Sobre 300 personas, calcular la probabilidad de que exista al menos una persona más alta que 1.90m.

Solución ▼ [006013]

Ejercicio 5950

Sea n un entero estrictamente positivo. ¿Cuál es la ley del número de niños en una familia de n niños ? (Precisar las hipótesis que se hacen) [006902]

Ejercicio 5951

Una empresa fabrica transistores. Cada transistor tiene una probabilidad de 3% de ser defectuoso. ¿Cuál es la ley del número de transistores defectuosos en un lote de 100 transistores? ¿Cuánto vale su esperanza y qué representa? [006903]

Ejercicio 5952

La empresa Luminex fabrica lámparas, de las cuales el 80% duran más de 3000 horas. Las pruebas son efectuadas sobre muestras de tamaño $n = 15$.

1. ¿Cuál es el número promedio de lámparas que tienen una vida útil inferior a 3000 horas en una muestra de tamaño 15?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las lámparas de la muestra duren más de 3000 horas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que 13 lámparas o más, en una muestra de tamaño 15, duran más de 3000 horas?

Solución ▼ [006904]

Ejercicio 5953

Un transportista aéreo ha observado que 25% en media de personas que reservaron un asiento para un vuelo no se presentan a la salida. Decide aceptar hasta 23 reservaciones cuando solo dispone de 20 asientos para este vuelo.

1. Sea X la variable aleatoria "número de clientes que vienen luego de reservar cuando 23 asientos han sido reservados". ¿Cuál es la ley de X (especificar las hipótesis que se hacen para modelar la situación)? ¿Cuál es su esperanza?
2. Si 23 personas han reservado, ¿Cuál es la probabilidad de que todos los que se presenten al inicio tengan un asiento?

Solución ▼ [006905]

Ejercicio 5954

Se lanzan 10 veces una pieza supuestamente bien balanceada. Se designa por X la frecuencia del número de veces que se obtuvo cruz (es decir, el número de cruces dividido por 10).

1. ¿Cuál es la ley de X?
2. ¿Con qué probabilidad X está estrictamente arriba de 0,5?
3. ¿Con qué probabilidad X está comprendida entre 0,4 y 0,6 (cotas incluidas)?
4. Determinar el entero más pequeño $a > 0$ tal que la probabilidad de que X sea en el intervalo $[0,5 - \frac{a}{10}, 0,5 + \frac{a}{10}]$ sea superior a 95%.
5. Se tira una moneda 10 veces. Cae 3 veces cruz y 7 veces cara. ¿Cree que la moneda está bien equilibrada (justifique la respuesta usando la pregunta 3)? La misma pregunta si se tiene 1 vez cruz y 9 veces cara.

Solución ▼ [006906]

Ejercicio 5955

Una central telefónica recibe en promedio 2 llamadas por minuto. Las llamadas se distribuyen aleatoriamente en el tiempo.

1. ¿Cuál es la ley de probabilidad que rige el número de llamadas recibidas en 3 minutos ? ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna llamada en 3 minutos ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de llamadas en 2 minutos sea superior o igual a 5 ?

Solución ▼ [006907]

Ejercicio 5956

En una dictadura militar, el dictador quiere aumentar el número de nacimientos de niños. Se impone la siguiente regla : si una mujer da a luz a una niña, ella debe seguir teniendo hijos ; si da a luz a un niño, ella debe parar de tener hijos. Se supone que cada mujer tiene al menos un hijo y no más de 5 hijos.

1. Sea X el número de hijas por mujer. ¿Cuál es la ley de X ?
2. ¿Cuál es el promedio de hijas que tiene una mujer ? ¿El promedio de niños ? ¿Es esta regla efectiva para aumentar el número de niños ?

Solución ▼ [006908]

Ejercicio 5957 Ley multinomial

Se tiran cuatro dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos 6 y dos 3 ? [006909]

Ejercicio 5958

Se lanzan dos dados de 6 caras. Determinar la ley de la variable aleatoria que da el máximo de los dos dígitos obtenidos. [006910]

Ejercicio 5959

Se considera $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Entre las siguientes opciones, ¿cuáles son los que dan una probabilidad P sobre Ω ?

a) $P(1) = 1/4,\quad P(2) = 3/8,\quad P(3) = 1/16,\quad P(4) = 3/16.$
b) $P(1) = 0,\quad P(2) = 1/3,\quad P(3) = 1/6,\quad P(4) = 1/2.$
c) $P(1) = 1/5,\quad P(2) = 1/4,\quad P(3) = 1/3,\quad P(4) = 1/2.$
d) $P(1) = 1/4,\quad P(2) = 1/2,\quad P(3) = -1/4,\quad P(4) = 1/2.$

[006911]

Ejercicio 5960

La siguiente tabla da la ley de un par de variables aleatorias $Z = (X,Y)$, con X tomando sus valores de $\{-1,1\}$ y Y tomando sus valores de $\{-1,0,1\}$.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$1/12$	$1/3$	$1/12$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$

1. Determinar la probabilidad de que X y Y sean iguales.
2. Determinar las leyes de X y de Y.
3. Determinar las leyes de $X+Y$ y de XY.

Ejercicio 5961

La siguiente tabla da la ley de un par de variables aleatorias (X,Y), con X y Y cada uno tomando sus valores en $\{1,2,3\}$.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0	$1/9$	$2/9$
2	$2/9$	0	$1/9$
3	$1/9$	$2/9$	0

1. Calcular la probabilidad que X y Y sean iguales.
2. Determinar las leyes de X y de Y.

[006913]

Ejercicio 5962

Carlos no soporta a los gatos y Sofía odia a los perros. Carlos no cría más de un perro y Sofía no más de un gato. La probabilidad de que Charles tenga un perro es de $0,2$. Si Carlos no tiene perro, la probabilidad de que Sophie tenga un gato es de $0,1$. Se denota X el número de perros de Charles, Y 3l número de gatos de Sophie y Z el número de mascotas en la pareja.

1. Calcular la probabilidad de que no tengan animales.
2. Se supone además que la probabilidad de que Z sea igual a 1 es de $0,1$.
   (a) Calcular la probabilidad de que Z sea igual a 2.
   (b) Determinar la esperanza y la desviación estándar de Z.
   (c) Establecer la ley de probabilidad del par (X,Y). ¿Cuál es la ley de probabilidad de Y ?
   (d) Las variables X y Y son independientes ?

Solución ▼ [006914]

Ejercicio 5963

En una pila de n ($n \geqslant 2$) hojas mecanografiadas, se encuentran las dos cartas que se deben enviar. Se retiran las hojas del paquete una a una hasta que una de las cartas que se van a enviar se encuentre en la parte superior de la pila. Se nota X_1 la variable aleatoria que da el número de hojas eliminadas. Se repite la operación hasta encontrar la segunda letra y se nota X_2 la variable aleatoria que da el número de hojas que tuvo que quitarse del paquete luego de encontrar la primera letra y antes de que la segunda letra estuviera encima del paquete. Sin información adicional, se puede suponer que todas las posiciones posibles para las dos letras son equiprobable.

1. Describir el conjunto Ω de resultados posibles para este experimento aleatorio y la probabilidad P que se asigna a Ω.
2. Determinar la ley del par (X_1,X_2), luego la ley de X_1 y de X_2.
3. Calcular la probabilidad del evento "$X_1 = X_2$".
4. Se denota $Z = X_1 + X_2 + 2$. ¿Qué representa la variable aleatoria Z ? Determinar su ley.

[006915]

238 260.04 Leyes de distribución

Ejercicio 5964

Una empresa fabrica balines de diámetro 8mm. Los errores de mecanizado provocan variaciones de diámetro. Se estima, de los datos anteriores, que el error es una variable aleatoria que obedece a una ley normal con parámetros : media : 0mm, desviación estándar : 0.02mm. Se rechazan piezas cuyo diámetro no está comprendido entre 7.97mm y 8.03mm. ¿Cuál es la proporción de balines rechazados ?

Solución ▼ [006014]

Ejercicio 5965

Las máquinas fabrican placas de chapa destinadas a ser apiladas.

1. Sea X la variable aleatoria «espesor de placa en mm» ; se supone que X sigue una ley normal de parámetros $m = 0.3$ y $\sigma = 0.1$. Calcular la probabilidad para que X sea menor que 0.36mm y la probabilidad para que X está entre 0.25 y 0.35mm.
2. El uso de estas placas consiste en apilar n, numerados de 1 a n tomándolos al azar : sea X_i la variable aleatoria «espesor de la placa número i en mm» y Z la variable aleatoria «grosor de n placas en mm». Para $n = 20$, ¿cuál es la ley de Z, su esperanza y su varianza ?

Solución ▼ [006015]

Ejercicio 5966

Las máquinas fabrican placas de chapa destinadas a ser apiladas ; se estima que 0.1% es la proporción de placas inutilizables. El uso de estas placas consiste en apilar n, numerados de 1 a n tomándolas al azar. Para $n = 2000$, ¿Cuál es la ley que sigue la variable aleatoria N «número de platos inservibles entre los 2000» ? (se utiliza una ley de probabilidad adaptada) ; ¿cuál es la probabilidad para que N sea menor o igual a 3 ? ¿Cuál es la probabilidad de que N sea estrictamente menor que 3 ?

Solución ▼ [006016]

Ejercicio 5967

Las máquinas hacen panqueques destinados a ser apilados en paquetes de 10. Cada panqueque tiene un espesor que sigue una ley normal de parámetros $m = 0.6$mm y $\sigma = 0.1$mm. Sea X la variable aleatoria «grosor del paquete en mm». Calcular la probabilidad para que X está entre 6.3mm y 6.6mm.

Solución ▼ [006017]

Ejercicio 5968

En un gran número de personas se ha encontrado que la distribución del nivel de colesterol sigue una ley normal con los siguientes resultados :
– 56% tienen una tasa inferior a 165 cg ;
– 34% tienen una tasa comprendida entre 165 cg y 180 cg ;
– 10% tiene una tasa superior a 180 cg. ¿Cuál es el número de personas que se espera cuidar en una población de 10 000 personas, si la tasa máxima tolerada sin tratamiento es de 182 cg ?

Solución ▼ [006018]

Ejercicio 5969

Para cada una de las variables aleatorias que se describen a continuación, indicar cuál es la ley exacta con los parámetros eventuales (esperanza, varianza) e indicar eventualmente una ley aproximada.

1. Número anual de accidentes en una intersección dada donde la probabilidad de un accidente por día se estima en $\frac{4}{365}$.
2. Número de niños en una familia de 6 niños ; número de niñas por día en una sala de maternidad donde nacen en promedio 30 niños por día.
3. En un grupo de 21 personas incluidas 7 mujeres, el número de mujeres en una delegación de 6 personas extraídas al azar.

Solución ▼ [006019]

Ejercicio 5970

Se efectúa un control de fabricación en piezas de las cuales una proporción $p = 0.02$ es defectuosa.

1. Se controla un lote de 1000 piezas :

   Sea X la variable aleatoria : «número de piezas defectuosas entre 1000». ¿Cuál es la verdadera ley de X ? (solo se da la forma general) ; ¿cuál es su esperanza, su desviación estándar ?
2. Aproximando esta ley por la de una ley normal adaptada, calcular la probabilidad para que X está entre 18 y 22 ($P[18 \leqslant X \leqslant 22]$) ; se hacen los cálculos con y sin corrección de continuidad. También se hacen los cálculos con la verdadera ley para comparar.

Solución ▼ [006020]

Ejercicio 5971

Se efectúa un control de las monedas de un euro, una parte de las cuales $p = 0,05$ es falsa y en las monedas de 2 euros, donde una proporción $p' = 0,02$ es falsa. Hay en un lote 500 partes incluyendo 150 monedas de un euro y 350 monedas de 2 euros.

1. Se toma una moneda al azar de este lote : ¿cuál es la probabilidad de que sea falsa ?
2. Sabiendo que esta moneda es falsa, ¿cuál es la probabilidad que sea de un euro ?
3. Ahora se controla un lote de 1000 monedas de un euro. Sea X la variable aleatoria : «número de monedas falsas entre 1000». ¿Cuál es la verdadera ley de X ? (solo se da la forma general) ; ¿cuál es su esperanza, su desviación estándar ?
4. Aproximando esta ley por la de una ley normal adaptada, calcular la probabilidad para que X esté entre 48 y 52.

Solución ▼ [006021]

Ejercicio 5972

Se tira un dado 180 veces. Se denota X la variable aleatoria : «número de salidas de 4».

1. ¿Cuál es la ley de X ?
2. Calcular la probabilidad de que X está entre 29 y 32.

Solución ▼ [006022]

Ejercicio 5973

En las últimas elecciones presidenciales en Francia, el candidato A ha obtenido el 20% de los votos. Se toman al azar en las mesas electorales en las grandes ciudades, paquetes de 200 boletas : se denota X la variable aleatoria «número de votos para A en las diferentes mesas electorales».

1. ¿Cuál es la ley de probabilidad de X ?

2. ¿Cómo se puede abordar ?
3. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que : X sea superior a 45 ? ¿De que X esté comprendido entre 30 y 50 ?
4. Para otro candidato B menos feliz el porcentaje de votos es de 2%. Notando Y el número de votos para B en las diferentes mesas electorales, sobre 100 boletas, retomar las preguntas 1 y 2. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que Y sea superior a 5 ? ¿De que Y esté comprendido entre 1 y 4 ?

Solución ▼ [006023]

Ejercicio 5974

Se supone que existe una probabilidad igual a p de ser controlado al tomar el tranvía. El Sr. A hace n viajes por año en esta línea.

1. Se supone que $p = 0.10$, $n = 700$.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el Sr. A sea controlado entre 60 y 80 veces al año ?
   (b) El Sr. A en realidad siempre viaja sin billete. Para tener en cuenta la posibilidad de realizar varios trayectos con el mismo billete, se supone que el precio de un billete es 1.12 euros. ¿Cuál es la multa mínima que debe fijar la empresa para que el defraudador tenga, a lo largo de un año, una probabilidad superior a 0.75 de perder ?
2. Se supone que $p = 0.50$, $n = 300$. El Sr. A siempre viaja sin billete. Sabiendo que el precio de un billete es de 1.12 euros, ¿qué multa mínima debería fijar la empresa para que el evasor de billetes tenga, en un período de un año, una probabilidad superior a 0.75 de salir perdiendo ?

Solución ▼ [006024]

---

239 260.05 Esperanza, varianza

Ejercicio 5975

Se lanzan dos dados de 6 caras. Sea X_1 el resultado del primer dado, X_2 el resultado del segundo dado, y $S = X_1 + X_2$.

1. Calcular $E(X_1)$ y $\mathrm{Var}(X_1)$.
2. Deducir $E(S)$ y $\mathrm{Var}(S)$.

Solución ▼ [006916]

Ejercicio 5976

Una urna contiene 10 bolas rojas y 5 bolas blancas.

1. Se realizan sorteos sucesivos, devolviendo la bola que salió de la urna luego de cada sorteo. En tres extracciones, ¿cuántas bolas rojos van a sacar en promedio ? En media, ¿cuántos sorteos con reemplazo se necesitarán antes de sacar una bola roja ?
2. Ahora se efectúa 3 tirajes sin devolución. ¿Cuántos de bolas rojos van a sacar en promedio ?

[006917]

Ejercicio 5977

Para una elección, una población de N individuos tenían que elegir entre votar por el candidato A o el candidato B. Se denota m el número de personas que votaron por A. Se pregunta al azar k individuos diferentes en esta población ($1 \leqslant k \leqslant N$).

1. Se designa por $a_1, \ldots, a_m$ los m personas que han votado por A. Para $i \in \{1, \ldots, m\}$, se denota X_i el indicador del evento “la persona a_i es interrogada”. ¿Cuál es la ley de X_i ?
2. Determinar la esperanza así como la matriz de covarianza de $(X_1, \ldots, X_m)$.
3. Se define $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$. ¿Cuál es la ley de S ?
4. Determinar el número promedio de personas que votan por A sobre k personas sacadas al azar.
5. Determinar la varianza de S.

[006918]

Ejercicio 5978

La siguiente tabla da la ley de un par de variables aleatorias (X,Y), con X tomando sus valores en $\{0,3\}$ y Y tomando sus valores en $\{0,1\}$. Calcular la covarianza entre X y Y, luego la correlación entre X y Y.

$X \setminus Y$	0	1
0	$1/3$	0
3	$1/6$	$1/2$

Solución ▼ [006919]

Ejercicio 5979

Sea U y V dos variables aleatorias independientes con la misma ley, con valores en $\{1, \ldots, N\}$. Se define $X = U - V$ y $Y = U + V$. Determinar la covarianza entre X y Y.

Solución ▼ [006920]

240 260.06 Recta de regresión

241 260.07 Funciones generatrices

242 260.99 Otro

243 261.01 Densidad de probabilidad

Ejercicio 5980

La Sra. Michel y el Sr. Lustucru van todas las semanas al mercado semanal de Kerplou. La Sra. Michel llega en un momento aleatorio entre 8h y 12h y se queda 30 minutos ; se supone que su hora de llegada sigue una ley uniforme. El Sr. Lustucru llega a 10h en punto y se queda igualmente 30 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que estén juntos en el mercado en una hora determinada ?

Solución ▼ [006924]

Ejercicio 5981

Sea X y Y de variables aleatorias independientes de ley de densidad uniforme $\mathbb{1}_{[0,1]}$ y $Z = X + Y$. Calcular la ley de Z.

Solución ▼ [006925]

Ejercicio 5982 Función de repartición, independencia

Sea $X_1, \ldots, X_n$ de variables aleatorias independientes con la misma ley exponencial $\mathscr{E}(1)$ y $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Determinar la ley de Z.

Solución ▼ [006926]

---

244 261.02 Ley débil de los grandes números

Ejercicio 5983

Se supone que el número de piezas que salen de una fábrica dada en un día es una variable aleatoria con esperanza 50.

1. ¿Se puede estimar la probabilidad de que la producción de mañana exceda 75 piezas ?
2. ¿Qué más se puede decir acerca de esta probabilidad si se sabe que la desviación estándar de la producción diaria es 5 monedas ?

Solución ▼ [006927]

Ejercicio 5984

Para estudiar las partículas emitidas por una sustancia radiactiva, se dispone de un detector. Se denota X la variable aleatoria representando el número de partículas que llegan al detector durante un intervalo de tiempo Δt. El número máximo de partículas que el detector puede contar durante un intervalo de tiempo Δt es de 10^3. Se supone que X sigue una ley de Poisson con parámetro $\lambda = 10^2$. Dar una mayoración de la probabilidad que X supere 10^3.
(Se recuerda que la esperanza y la varianza de una distribución de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ son iguales a λ.)

Solución ▼ [006928]

---

245 261.03 Convergencia en ley

246 261.04 Ley normal

Ejercicio 5985

1. Sea X una variable aleatoria que sigue una ley normal $N(m, \sigma^2)$. ¿Cuál es la probabilidad que X sea superior a m ?
2. Sea Y una variable aleatoria que sigue una ley normal $N(0, 1)$. ¿Cuál es la ley de $-Y$?; ¿la ley de $\sigma Y + m$?
3. Utilizando la tabla de N$(0, 1)$, determinar $P(0 \leqslant Y \leqslant 0,8)$, $P(-0,6 \leqslant Y \leqslant 0)$ y $P(Y \leqslant 0,8)$.

[006921]

Ejercicio 5986

Sean X_1, X_2, X_3, tres variables aleatorias de ley normal independiente tales que $E(X_1) = 100$, $\mathrm{Var}(X_1) = 100$, $E(X_2) = 20$, $\mathrm{Var}(X_2) = 4$, $E(X_3) = 50$, $\mathrm{Var}(X_3) = 25$. Se forma la combinación lineal $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$. Determinar $E(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$. ¿Cuál es la ley de Y ? [006922]

Ejercicio 5987

Se diseña una máquina para hacer paquetes de un peso de 500g, pero no todos tienen exactamente el mismo peso. Se ha constatado que la distribución de los pesos alrededor del valor media de 500g tiene una desviación estándar de 25g.

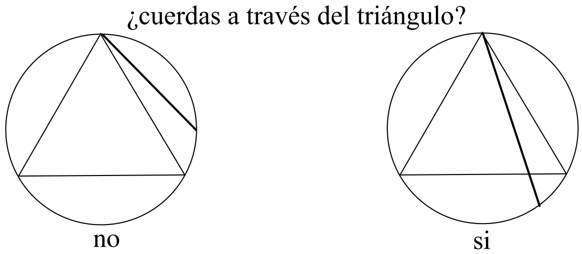
1. ¿Bajo qué ley es razonable modelar el peso de los paquetes ?
2. Sobre 1000 paquetes, ¿cuál es el número promedio de paquetes que pesan entre 480 g y 520 g ? (*Utilizar la tabla de* $\mathrm{N}(0,1)$)
3. ¿Cuántas paquetes pesan entre 480g y 490g ?
4. Sobre 1000 paquetes, ¿cuál es el número promedio de paquetes que pesan más de 450 g ?
5. Encontrar a tal que los 9/10 de esta producción tienen un peso comprendido entre $500 - a$ y $500 + a$.

Solución ▼ [006923]

247 261.99 Otro

Ejercicio 5988 La paradoja de las cuerdas de Bertrand

Se considera un círculo. Se elige una cuerda al azar y se quiere encontrar la probabilidad de que esta cuerda pase al interior de un triángulo equilátero inscrito en el círculo del cual uno de los vértices es uno de los extremos de la cuerda (ver la figura) o, de manera equivalente, para que esta cuerda sea más larga que el lado de un triángulo equilátero inscrito en el círculo.



Este ejercicio está redactado deliberadamente de manera imprecisa. Intentar encontrar la solución intuitivamente (sin teorema para usar aquí). Es muy probable que no todos encuentren la misma probabilidad. Históricamente, este tipo de paradoja motivó la introducción de una teoría rigurosa del azar.

Solución ▼ [006954]

248 262.01 Estimación

Ejercicio 5989

El personal médico de una gran empresa elabora sus pequeñas estadísticas sobre el nivel de colesterol de sus empleados ; las observaciones sobre 100 empleados seleccionados al azar son los siguientes :

nivel de colesterol en cg :(centro clase)	effectif de employés :
120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

1. Calcular la media m_e y la desviación estándar σ_e en la muestra.
2. Estimar la media y la desviación estándar de los niveles de colesterol en toda la empresa.
3. Determinar un intervalo de confianza para la media.
4. Determinar el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea menor que 10.

Solución ▼ [006028]

Ejercicio 5990

Sobre 12 000 individuos de una especie, se han contado 13 albinos. Estimar la proporción de albinos en la especie. Se comparan los métodos de aproximación de leyes reales por otras leyes clásicas.

Solución ▼ [006029]

249 262.02 Prueba de hipótesis, intervalo de confianza

Ejercicio 5991

En una muestra de 10 000 personas de una población dada, se sabe que la tasa promedio de personas que necesitan tratamiento para un problema de colesterol alto es de 7,5%. Dar un intervalo en el que estamos «seguros» al 95%, para encontrar el número exacto de personas que deben ser atendidas en las 10 000.

Solución ▼ [006025]

Ejercicio 5992

Un vuelo Marsella - París es operado por un Airbus de 150 lugares ; para este vuelo las estimaciones han demostrado que la probabilidad de que una persona confirme su billete es $p = 0.75$. La empresa vende n boletos, $n > 150$. Sea X la variable aleatoria «número de personas entre los n posibles, habiendo confirmado su reserva para este vuelo».

1. ¿Cuál es la ley exacta seguida por X ?
2. ¿Cuál es el número máximo de lugares que la compañía puede vender para que, tiene al menos 95%, sea seguro que todo el mundo pueda subir al avión, es decir n tal que : $P[X > 150] \leqslant 0.05$?
3. Retomar el mismo ejercicio con un avión de capacidad de 300 lugares ; hacer variar el parámetro $p = 0.5$; $p = 0.8$.

Solución ▼ [006026]

Ejercicio 5993

Un pequeño avión (enlace Saint Brieuc-Jersey) puede acomodar cada día 30 personas ; las estadísticas muestran que 20% de los clientes que reservaron no vinieron. Sea X la variable aleatoria : «número de clientes que acuden al mostrador entre 30 personas que han reservado».

1. ¿Cuál es la ley de X ? (solo se da la forma general) ; ¿cuál es su esperanza, su desviación estándar ?
2. Dar un intervalo de confianza de nivel 95%, que permita estimar el número de clientes que se espera.

Solución ▼ [006027]

Ejercicio 5994

Una compañía aérea ha pedido estadísticas para mejorar la seguridad en el despegue y definir un límite de peso del equipaje. Para estimar el peso de los pasajeros y el peso de las valijas, una muestra consta de 300 pasajeros que aceptaron ser pesados : se obtiene una media m_e de 68kg, con una desviación estándar σ_e de 7 kg.

1. Definir un intervalo de confianza para la media de los pasajeros. (Se admite que el peso de los pasajeros sigue una ley normal con media m, de desviación estándar σ.)
2. Demostrar que se puede considerar que el peso de los pasajeros es una variable aleatoria X de media 70 kg, de desviación estándar 8 kg.
3. Procediendo de la misma manera para el peso del equipaje, se admiten los resultados :
   — Si el peso máximo autorizado es de 20 kg, el peso del equipaje se puede considerar como una variable aleatoria Y de media 15 kg, de desviación estándar 5 kg.
   — La capacidad del avión es 300 pasajeros ; el avión pesa, vacío, 250 toneladas. Queda prohibido el despegue si el peso total excede 276.2 toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de que se prohíba el despegue ?

Solución ▼ [006030]

Ejercicio 5995

Afín de satisfacer mejor a sus clientes, una gran empresa proveedora de acceso a Internet lleva estadísticas sobre el número de llamadas recibidas en *hotline*, así podrá evaluar el tiempo de espera del cliente y el número de empleados que deben utilizarse ; los resultados de la encuesta se refieren a 200 secuencias consecutivas de un minuto, durante el cual el número de llamadas promedio ha sido de 3 llamadas por minuto. Se supone que las llamadas se distribuyen por igual en el tiempo : se divide un intervalo de tiempo en unidades de un segundo ; entonces en cada unidad de tiempo, existe como máximo una llamada.

1. ¿Cuál es la ley de probabilidad del número de llamadas recibidas en 4 minutos ?
2. Demostrar que esta ley se puede aproximar por una ley de Poisson.
3. Dar un intervalo de confianza para el número promedio de llamadas en 4 minutos.

Solución ▼ [006031]

Ejercicio 5996

Se interesa el problema de las algas tóxicas que llegan a determinadas playas de Francia ; luego del estudio se constata que 10% de las playas están afectadas por este tipo de algas y queremos comprobar la influencia de nuevos vertidos químicos en la aparición de estas algas. Por esto 50 playas cercanas a zonas de vertido de productos químicos, son observados ; se cuenta entonces el número de rangos alcanzados por el alga nociva : se constata que 10 playas se ven afectadas por las algas. ¿Se puede responder a la pregunta «Los vertidos químicos modificaron de manera significativa con el riesgo $\alpha = 0.05$, el número de playas afectadas» ?

Solución ▼ [006032]

Ejercicio 5997

Se quiere estudiar la relación entre los caracteres :«ser fumador» (más de 20 cigarrillos por día, durante 10 año) y «tener cáncer de garganta», en una población de 1000 personas, de las cuales 500 tienen cáncer de garganta. Aquí están los resultados observados :

Tabla observada

Observado	cancer	no cancer	margen
fumador	342	258	600
no fumador	158	242	400
margen	500	500	1000

Realizar una prueba de independencia para establecer la conexión entre estos caracteres.

Solución ▼ [006033]

Ejercicio 5998

Se mide cierta cantidad física G, con un dispositivo cuya precisión se caracteriza por la desviación estándar σ. Se hace la hipótesis que las medidas siguen una ley normal.

1. Se efectúa una sola medida, se encuentra $g_1 = 1,364$. Se supone que se conoce la precisión del dispositivo de medición : $\sigma = 4,3.10^{-3}$ (unidad arbitraria). Determinar un intervalo de confianza que contenga, con una probabilidad de 90%, el valor G.
2. Se desconoce la precisión del dispositivo de medición. Se efectúa 5 medidas. Se encuentra :

1,365	1,371	1,368	1,359	1,362

Dar estimaciones de G y de σ. Determinar un intervalo de confianza que contenga, con una probabilidad de 90%, el valor G.

Solución ▼ [006929]

Ejercicio 5999

Se pregunta a 1000 electores, 521 de ellos dijeron que tenían la intención de votar por el candidato A. Indicar con una probabilidad de 0,95 entre qué límites está la proporción del electorado a favor de A en el momento de la votación.

Solución ▼ [006930]

Ejercicio 6000

La firma Comtec acaba de desarrollar un nuevo dispositivo electrónico. Antes de ponerlo en producción, se quiere estimar su fiabilidad en términos de vida útil. De acuerdo con la oficina de Investigación y Desarrollo de la empresa, la desviación estándar de la vida útil de este dispositivo es del orden de 100 horas. Determinar el número de intentos necesarios para estimar, con un nivel de confianza de 95%, la vida media de una gran producción para que el margen de error en la estimación no exceda $\pm$ 50 horas. La misma pregunta para un margen de error no excediendo $\pm$ 20 horas.

Solución ▼ [006931]

Ejercicio 6001

Se efectúa una encuesta con una muestra de 10 000 personas a la víspera de un referéndum : 4903 de ellos se aprestan a votar sí, y 5097 a votar no. ¿Cuál es el riesgo de error al predecir el voto del no ? [006932]

Ejercicio 6002

Cada día, un tren experimenta un retraso aleatorio en la salida, evaluado en minutos, independiente de los retrasos de otros días y cuya ley es aproximadamente $\mathscr{E}(\lambda)$ (*se recuerda que una ley exponencial* $\mathscr{E}(\lambda)$ *tiene esperanza* $1/\lambda$ *y por desviación estándar* $1/\lambda$). Sobre 400 días, el retraso medio es de 10 minutos. Dar un intervalo de confianza de nivel aproximado 95% para λ.

Solución ▼ [006933]

Ejercicio 6003

En un lote de 700 pernos sujetos a pruebas de ruptura, 300 han resistido. En un segundo lote de 225, 125 han resistido. ¿Se puede admitir, en el umbral de 5%, que estos dos lotes pertenecen a la misma población ?

Solución ▼ [006934]

Ejercicio 6004

Después de una experimento de 1000 tirajes, un generador de números aleatorios ha dado los siguientes resultados :

cifra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
número de apariciones	87	103	90	110	81	108	85	123	90	123

Probar a nivel 5% la hipótesis de que el generador simule satisfactoriamente un tiraje uniforme de los números enteros $\{0,\dots,9\}$.

Solución ▼ [006935]

Ejercicio 6005

La cubierta vegetal de la zona de distribución de un alce americano consiste en árboles de caducifolios (25,8% de la superficie), de bosques mixtos (38% de la superficie), madera blanda (25,8% de la superficie) y de un pantano (10,4% de la superficie). En este dominio, el alce se ubica en 511 ocasiones durante el año : 118 veces en las maderas duras, 201 veces en bosques mixtos, 110 veces en los resinosos y 82 veces en el pantano. [Fuente : B. Scherrer "Biostatistique", éditeur Gaetan Morin, 1984, página 556] ¿Utiliza el alce por igual los cuatro tipos de vegetación de su área de distribución ? [006936]

Ejercicio 6006

Siguiendo la formulación de las leyes de Mendel, Bateson hizo cruces con guisantes de olor para estudiar el color (morado o rojo) y la forma del polen (alargado o redonda). Estos cruces se realizaron en híbridos de color púrpura y con polen alargado ; suponiendo que el color y la forma del polen están controlados cada uno por un gen que tiene dos formas diferentes (llamadas alelos) denotadas S y s por el color y T, t por la forma del polen, el genotipo de un guisante híbrido para estas dos características es (Ss, Tt). Las letras mayúsculas denotan alelos dominantes (aquí el color morado y la forma alargada del polen). Los resultados de los cruces se dan en la siguiente tabla :

	color morado	color rojo
polen alargado	1528	117
polen redondo	106	381

Haciendo la hipótesis que las cuatro posibilidades de transmisión de alelos para cada uno de estos dos genes son equiprobable, ¿se puede decir que los genes que controlan estos dos caracteres se transmiten independientemente uno del otro ?
¿Cómo asegurarse que la hipótesis de transmisión equiprobable de las cuatro posibilidades de transmisión de alelos es válida para cada uno de estos dos genes ? [006937]

250 262.99 Otro

251 300.00 Grupo cociente, teorema de Lagrange

Ejercicio 6007

Sea G un grupo no reducido a un elemento. Un subgrupo M de G se dice *maximal* si el único subgrupo de G, distinto de G y conteniendo M, es el M mismo. Las preguntas son independientes.

1. (a) Demostrar que $6\mathbb{Z}$ no es un subgrupo maximal de $\mathbb{Z}$.
   (b) Demostrar que $5\mathbb{Z}$ es un subgrupo maximal de $\mathbb{Z}$.
2. Se define $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Sea H_1 el subgrupo de G generado por $\overline{4}$ y H_2 el subgrupo de G generado por $\overline{2}$.
   (a) Explicitar los elementos de H_1 y H_2.
   (b) Demostrar que H_1 no es un subgrupo maximal de G y que H_2 es un subgrupo maximal de G.

[001434]

Ejercicio 6008

Determinar todos los subgrupos de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Solución ▼ [001435]

Ejercicio 6009

Demostrar que el grupo cociente $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$. [001436]

Ejercicio 6010

Sea G el grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $q \in \mathbb{Q}$, se denota $\mathrm{cl}(q)$ la clase de q módulo $\mathbb{Z}$.

1. Demostrar que $\mathrm{cl}(\frac{35}{6}) = \mathrm{cl}(\frac{5}{6})$ y determinar el orden de $\mathrm{cl}(\frac{35}{6})$.
2. Demostrar que si $x \in G$ existe un único $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ tal que $x = \mathrm{cl}(\alpha)$.
3. Demostrar que todo elemento de G es de orden finito y que existen elementos de orden arbitrario.

[001437]

Ejercicio 6011

Describir el grupo cociente $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ y demostrar que es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Solución ▼ [001438]

Ejercicio 6012

Demostrar que todo cociente de un grupo monogénico es monogénico. [001439]

Ejercicio 6013

Sean G el grupo de productos $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ y H el subgrupo de G engendrado por $(\overline{3}, \overline{2})$. Escribir la descomposición de G según las clases a la izquierda módulo H. Describir el grupo cociente G/H. [001440]

Ejercicio 6014

Sea G un grupo $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in g, gh = hg\}$.

1. Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.
2. Demostrar que si $G/Z(G)$ es monogénico G es cíclico.

[001441]

Ejercicio 6015

Sea G un grupo ; se denota $D(G)$ el grupo generado por los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$; $g, h \in G$.

1. Demostrar que $D(G)$ es normal en G.
2. Demostrar que $G/D(G)$ es conmutativo ; más generalmente se demuestra que un subgrupo normal H de G contiene $D(G)$ si y solo si G/H es conmutativo.

Solución ▼ [001442]

Ejercicio 6016

Sea G un grupo ; se denota, para todo $g \in G$, φ_g la aplicación $x \mapsto gxg^{-1}$ de G en sí mismo y $\mathrm{Int}(G) = \{\varphi_g; g \in G\}$.

1. Demostrar que $\mathrm{Int}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.
2. Sea $f : G \to \mathrm{Int}(G)$ la aplicación $g \mapsto \varphi_g$. Demostrar que f es un homomorfismo de grupo. Calcular $\ker(f)$.
3. Deducir que $G/Z(G)$ es isomorfo a $\mathrm{Int}(G)$.

[001443]

Ejercicio 6017

Sea G un grupo, H y K dos subgrupos de G. Se denota $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$. Se supone que K es normal en G.

1. Demostrar que $HK = KH$ y que HK es un subgrupo de G.
2. Demostrar que H y K son subgrupos de KH y que $K \cap H$ es un subgrupo normal de H y que K es normal en KH.
3. Sea $\varphi : H \to (HK)/K$ la restricción a H de la aplicación del cociente. Calcular el núcleo y la imagen de φ. Deducir que los grupos $H/(K \cap H)$ y $(HK)/K$ son isomorfos.

[001444]

Ejercicio 6018

Sea G un grupo, H y K dos subgrupos normales de G, con $H \subset K$.

1. Demostrar que K/H es un subgrupo normal de G/H.
2. Demostrar que el cociente $(G/H)/(K/H)$ es isomorfo a G/K.

[001445]

Ejercicio 6019

Sea G el subgrupo de $Gl(2,\mathbb{R})$ generado por las matrices $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sea H el subgrupo de G generado por AB. Calcular $|H|$
2. Demostrar que H es normal en G. Calcular el cociente G/H ; deducir $|G|$.

Solución ▼ [001446]

Ejercicio 6020

Las preguntas son independientes.

1. (a) Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto 3x+6y$ es un morfismo de grupos.
   (b) Determinar el núcleo $\ker f$ de f y demostrar que no existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\ker f = p\mathbb{Z}\times q\mathbb{Z}$.
   (c) Demostrar que el grupo cociente $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2,1)$ es isomorfo al grupo $3\mathbb{Z}$.
2. Sea G el subgrupo de $\mathbb{Z}^2$ generado por $(2,0)$ y $(0,2)$. Demostrar que el grupo-cociente $\mathbb{Z}^2/G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [001447]

Ejercicio 6021

1. Demostrar que los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$, donde $n \in \mathbb{N}$.
   (Indicación : Utilizar la división euclidiana).
2. Recordar por qué se distinguen estos subgrupos. Por tanto, se pueden considerar los grupos de cocientes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo de raíces n–ésimas de la unidad.
4. Demostrar que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo generado por un ciclo de longitud n en S_N ($N \geqslant n$).
5. Más generalmente, demostrar que existe, módulo isomorfismo, un solo grupo monogénico (i.e. generado por un solo elemento) de orden n, llamado grupo cíclico de orden n.

[001448]

Ejercicio 6022

Recordar : si A es un anillo (en particular, si A es un cuerpo), se denota $\mathrm{GL}_n(A)$ el conjunto de matrices cuadradas de dimensión n, con coeficiente en A, que son invertibles. $\mathrm{GL}_n(A)$ forma un grupo por la ley $\times$ multiplicación de matrices, llamado grupo lineal. Una matriz cuadrada de dimensión n está en $\mathrm{GL}_n(A)$ si y solo si su determinante es un invertible del anillo A (lo que equivale a decir, cuando A es un cuerpo, que su determinante es no nulo). Para simplificar, se supone en el ejercicio que A es un cuerpo, denotado $\mathbb{K}$.

1. Demostrar que $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ es un morfismo de grupos.
2. Se denota $SL_n(\mathbb{K}) = \ker(\det)$. Decir por qué $SL_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo normal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ y demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.

3. Reconocer $\mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ y $SL_1(\mathbb{K})$.
4. Demostrar que las matrices diagonales (resp. triángulos superiores) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ forman un subgrupo. ¿Son normales ?
5. Demostrar que $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ es el subgrupo formado por las homotecias.

[001449]

252 301.00 Orden de un elemento

Ejercicio 6023

Se dispone de un tablero de ajedrez y fichas de dominó. Las fichas de dominó se colocan en el tablero de ajedrez ya sea horizontalmente, ya sea verticalmente para cubrir dos cuadrados contiguos. ¿Es posible cubrir completamente el tablero de ajedrez de esta manera a excepción de los dos cuadrados extremos, arriba a la izquierda y abajo a la derecha ? Repetir esta pregunta en el caso que se excluyan dos celdas cualesquiera en lugar de las dos celdas extremas arriba.

Indicación ▼ [002101]

Ejercicio 6024

(I) Sea X un conjunto y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de partes de X ordenado por inclusión. Sea φ una aplicación creciente de $\mathscr{P}(X)$ en sí mismo.

(a) Demostrar que el conjunto E de partes A de X que verifica $\varphi(A) \subset A$ es no vacío y tiene un elemento más pequeño A_0.

(b) Demostrar que $\varphi(A_0) = A_0$.

(II) Sean dos conjuntos X y Y dotados con dos inyecciones g de X en Y y h de Y en X.

(a) Demostrar que la aplicación de $\mathscr{P}(X)$ en sí mismo definida por

$$\varphi(A) = X - h(Y - g(A))$$

es creciente.

(b) Deducir de lo anterior que existe una biyección de X sobre Y.

Indicación ▼ Solución ▼ [002102]

Ejercicio 6025

Sea X un conjunto no vacío y ordenado. Demostrar que existe una parte Y totalmente ordenada de X que verifica la propiedad

$$\forall x \notin Y \quad \exists y \in X \quad x \text{ y } y \text{ no son comparables}$$

¿El conjunto Y es único ?

Solución ▼ [002103]

Ejercicio 6026

Un jardinero debe plantar 10 árboles en 5 hileras de 4 árboles. Dar una posible disposición. ¿Cuál es el número mínimo de árboles que se debe tener para plantar 6 hileras de 5 árboles ? Generalizar.

Indicación ▼ [002104]

Ejercicio 6027

Sea n y p dos enteros, $p \leqslant n$. Demostrar, a través de un conteo, la siguiente fórmula :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

Indicación ▼ [002105]

Ejercicio 6028

Sea n un entero impar no divisible por 3. Demostrar que 24 divide $n^2 - 1$.

Indicación ▼ [002106]

Ejercicio 6029

Se considera en $\mathbb{R}$ la ley de composición definida por $x \star y = x + y - xy$. ¿Esta ley es asociativa, conmutativa ? ¿Admite un elemento neutro ? ¿Un real x admite un inverso para esta ley ? Dar una fórmula para la potencia n-ésima de un elemento x por esta ley.

Indicación ▼ Solución ▼ [002107]

Ejercicio 6030

Sea E un monoide unitario. Se dice que un elemento a de E admite un *inverso a la izquierda* (resp. *inverso a la derecha*) si existe $b \in E$ tal que $ba = e$ (resp. $ab = e$).

(a) Se supone que un elemento a admite un inverso a la izquierda b que admite una inversa a la izquierda. Demostrar que a es invertible.

(b) Se supone que todo elemento de E admite un inverso a la izquierda. Demostrar que E es un grupo.

Solución ▼ [002108]

Ejercicio 6031

Sea E un conjunto provisto de una ley $\star$ asociativa
(i) admitiendo un elemento neutro a la izquierda e (i.e. $\forall x \in E \quad e \star x = x$) y
(ii) tal que cada elemento tiene un inverso a la izquierda (i.e. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad y \star x = e$). Demostrar que E es un grupo por la ley $\star$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002109]

Ejercicio 6032

¿Los racionales no nulos forman un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{R}^*$?

Indicación ▼ [002110]

Ejercicio 6033

Demostrar que el conjunto $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y el conjunto $\left\{\frac{1+2m}{1+2n} | n, m \in \mathbb{Z}\right\}$ son subgrupos multiplicativos de $\mathbb{Q}^*$.

Indicación ▼ [002111]

Ejercicio 6034

Demostrar que el conjunto de matrices cuadradas en n filas y n columnas de determinante no nulo es un grupo para la multiplicación.

Indicación ▼ [002112]

Ejercicio 6035

Se considera el conjunto E de matrices cuadradas con coeficientes reales de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \, b \in \mathbb{R}$$

dotado del producto de las matrices.

(a) Demostrar que E es así provisto de una ley de composición interna asociativa.

(b) Determinar todos los elementos neutros a la derecha de E.

(c) Demostrar que E no admite un elemento neutro a la izquierda.

(d) Sea e un elemento neutro a la derecha. Demostrar que todo elemento de E tiene un inverso izquierdo para este elemento neutral, i.e.

$$\forall g \in E, \, \exists h \in E, \, hg = e.$$

Indicación ▼ [002113]

Ejercicio 6036

Sea G un grupo verificando

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

Demostrar que G es conmutativo. Deducir que si G es finito, entonces el orden de G es una potencia de 2.

Solución ▼ [002114]

Ejercicio 6037

Sea G un grupo de orden par. Demostrar que existe un elemento $x \in G$, $x \neq e$ tal que $x^2 = e$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002115]

Ejercicio 6038

Sea G un grupo de orden impar. Demostrar que la aplicación f de G en sí mismo dado por $f(x) = x^2$ es una biyección. Deducir que la ecuación $x^2 = e$ tiene una sola solución, a saber $x = e$.

Indicación ▼ [002116]

Ejercicio 6039

Sean G un grupo finito y m un entero primo de orden de G. Demostrar que para todo $a \in G$ la ecuación $x^m = a$ admite una única solución.

Indicación ▼ [002117]

Ejercicio 6040

Sea G un grupo y $H < G$, $K < G$ dos subgrupos de G. Se supone que existen dos elementos $a, b \in G$ tales que $Ha \subset Kb$. Demostrar que $H < K$.

Solución ▼ [002118]

Ejercicio 6041

Sea H una parte no vacía de un grupo G. Se define $H^{-1} = \{x^{-1}; x \in H\}$. Demostrar las siguientes equivalencias :

(a) $H < G \Leftrightarrow HH^{-1} \subset H$

(b) $H < G \Leftrightarrow \forall a \in H, \quad Ha = H.$

Indicación ▼ [002119]

Ejercicio 6042

Sea G un grupo y H, K dos subgrupos de G.

(a) Demostrar que $H \cup K$ es un subgrupo de G si y solo si $H < K$ o $K < H$.

(b) Demostrar que un grupo no puede ser la unión de dos subgrupos propios.

Solución ▼ [002120]

Ejercicio 6043

Demostrar que en un grupo G, todo subconjunto finito no vacío estable por la ley de composición es un subgrupo. Dar un contra ejemplo de la propiedad anterior en el caso de una parte infinita.

Solución ▼ [002121]

Ejercicio 6044

(a) Demostrar que los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$, donde n es un entero.

(b) Un elemento x de un grupo se dice que es de orden finito si existe un entero k tal que $x^k = e_G$. Demostrar que $\{k \in \mathbb{Z} \mid x^k = e_G\}$ es entonces un subgrupo no nulo de $\mathbb{Z}$. Se llama orden de x el generador positivo de este subgrupo.

(c) Sea x un elemento de un grupo G. Demostrar que x es de orden d si y solo si el subgrupo $< x >$ de G generado por x es de orden d.

Indicación ▼ [002122]

Ejercicio 6045

Se establece $SL_2(\mathbb{Z}) = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$.

(a) Demostrar que $SL_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo del grupo de matrices invertibles con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

(b) Se consideran las dos matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que A y B son de órdenes finitos pero que AB es de orden infinito.

Indicación ▼ [002123]

Ejercicio 6046

Sea G un grupo abeliano y a y b dos elementos de orden finito. Demostrar que ab es de orden finito y que el orden de ab divide el mcm de los órdenes de a y b. Demostrar que si los órdenes de a y b son primos entre sí, el orden de ab es igual al mcm de los órdenes de a y de b.

Solución ▼ [002124]

Ejercicio 6047

Sea G un grupo conmutativo. Demostrar que el conjunto de elementos de orden finito de G forma un subgrupo de G.

Indicación ▼ [002125]

Ejercicio 6048

Determinar todos los subgrupos de $\mu_2 \times \mu_2$.

Indicación ▼ [002126]

Ejercicio 6049

Sean G un grupo finito y conmutativo y $\{G_i\}_{i\in I}$ la familia de subgrupos propios maximales de G. Se define $F = \bigcap_{i\in I} G_i$. Demostrar que F es el conjunto de elementos a de G que son tales que, para toda parte S de G conteniendo a y engendrando G, $S \setminus \{a\}$ engendra aún G.

Solución ▼ [002127]

Ejercicio 6050

Determinar todos los grupos de orden $\leqslant 5$. Deducir que un grupo no conmutativo tiene al menos 6 elementos. Demostrar que el grupo simétrico S_3 es no conmutativo.

Indicación ▼ [002128]

Ejercicio 6051

El centro de un grupo G es el conjunto $Z(G)$ de elementos de G que conmutan a todos los elementos de G. Verificar que $Z(G)$ es un subgrupo abeliano de G. Demostrar que si G tiene un único elemento de orden 2, entonces este elemento está en el centro $Z(G)$.

Indicación ▼ [002129]

Ejercicio 6052

Sean G un grupo y H y K dos subgrupos de G.

(a) Demostrar que el conjunto $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.

(b) Demostrar que si H y K son finitos entonces $|HK| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

Solución ▼ [002130]

Ejercicio 6053

Determinar todos los subgrupos del grupo simétrico S_3.

Solución ▼ [002131]

Ejercicio 6054

Demostrar que en un grupo de orden 35, existe un elemento de orden 5 y un elemento de orden 7.

Indicación ▼ Solución ▼ [002132]

Ejercicio 6055

Sea G un grupo de orden $2p$, con p un número primo. Demostrar que existe un elemento de orden 2 y un elemento de orden p.

Solución ▼ [002133]

Ejercicio 6056

Sean $n \geqslant 0$ un entero y p un número primo tal que p divide $2^{2^n}+1$. Demostrar que p es de la forma $p = k2^{n+1}+1$, donde k es un entero.

Indicación ▼ Solución ▼ [002134]

Ejercicio 6057

Demostrar que todo entero $n > 0$ divide siempre $\varphi(2^n - 1)$ (donde φ es la función indicatriz de Euler).

Indicación ▼ Solución ▼ [002135]

Ejercicio 6058

Sea G un grupo multiplicativo (es decir cuya ley se denota multiplicativamente). Sean a y b dos elementos de G. Demostrar que si ab es de orden finito, entonces ba, lo es igualmente y su orden es el de ab. [002661]

Ejercicio 6059

Demostrar que los elementos de orden finito de un grupo conmutativo G forman un subgrupo de G. ¿Es lo mismo si G no es conmutativo ? [002662]

Ejercicio 6060

Sea G un grupo conmutativo multiplicativo, a y b dos elementos de G de órdenes n y m. ¿Qué se puede decir del orden de ab ? ¿Qué más se puede decir si la intersección de los subgrupos G_a y G_b engendrados por a y b se reduce a $\{1_G\}$? [002663]

Ejercicio 6061

Demostrar que un grupo finito cuyo orden es un número primo es cíclico. [002664]

Ejercicio 6062

Sean σ y τ dos transposiciones de $\{1,\ldots,n\}$. Demostrar que $\sigma \circ \tau$ es de orden 1, 2 o 3. [002665]

253 302.00 Grupo simétrico, descomposición en ciclos disjuntos, signo

Ejercicio 6063

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, calcular el signo de la permutación $[n\; n-1\; n-2 \ldots\; 3\; 2\; 1] \in S_n$. [002666]

Ejercicio 6064

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Calcular la suma de los números de inversiones de todas las permutaciones de $\{1,2,\dots,n\}$. [002667]

Ejercicio 6065

Matrices de permutación

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y K un cuerpo. Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : S_n &\to M_n(K) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{aligned}$$

donde $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k=l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$ (símbolo de Kronecker) induce un morfismo de grupos de S_n en $\mathrm{GL}_n(K)$. [002668]

Ejercicio 6066

Sea $\sigma \in S_n$ y $c = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$ un ciclo. ¿Cuál es la naturaleza de la permutación $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$? [002669]

Ejercicio 6067

Explicitar las 24 rotaciones del espacio dejando un cubo de vértices $A_1, A_2, \dots, A_8$ invariante.
Descomponer en ciclos las permutaciones de S_8 correspondientes.
Escribir los productos "típicos" de 2 de estas permutaciones cualesquiera. [002670]

Ejercicio 6068 Ciclos de orden 3 generando $\mathscr{A}_n$

Sea n un entero natural superior a 3, $\mathscr{S}_n$ el grupo simétrico de n letras y $\mathscr{A}_n$ el grupo alternado.

1. Calcular los productos de transposiciones $(a,b)(b,c)$, luego $(a,b)(c,d)$.
2. Demostrar que los ciclos de orden 3 generan $\mathscr{A}_n$.

[007872]

Ejercicio 6069 Grupos simétricos

Sea n un entero natural superior a 3.

1. Demostrar que las permutaciones $(i,j)(j,k)$ y $(i,j)(k,l)$ se escriben como producto de 3-ciclos.
2. Deducir que el grupo alternado $\mathscr{A}_n$ es generado por los 3-ciclos.
3. Demostrar que si $n \geqslant 5$, todos los 3-ciclos son conjugados en $\mathscr{A}_n$.

[007873]

Ejercicio 6070

1. ¿El grupo $\mathscr{S}_n$ es simple ?
2. ¿El grupo $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$ es simple ?
3. ¿El grupo $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ es simple ?

[007874]

Ejercicio 6071 Simplicidad de $\mathscr{A}_5$

1. Enumerar las clases de conjugación de $\mathscr{S}_n$ en $\mathscr{A}_n$ numerándolas.
2. Demostrar que los 3-ciclos son conjugados en $\mathscr{A}_n$.
3. Demostrar solo elementos de orden 2 son conjugados en $\mathscr{A}_n$.
4. Demostrar que todo subgrupo normal H de $\mathscr{A}_n$ que contiene un elemento de orden 5, los contiene todos. (Se observa que el grupo generado por un elemento de orden 5 es de Sylow.)
5. Demostrar que todo subgrupo normal H de $\mathscr{A}_n$ no reducido a $\{\mathrm{Id}\}$ contiene al menos dos tipos de elementos además de la identidad. Demostrar entonces que $H = \mathscr{A}_n$.

[007875]

254 303.00 Subgrupo normal

Ejercicio 6072

Sea G un grupo, H y K dos subgrupos de orden finito de G tales que $H \cap K = \{e_G\}$.

1. Demostrar que el cardinal de HK es igual $|H||K|$.
2. Deducir que si $|G| = pq$, donde p es primo y $p > q$, entonces G tiene como máximo un subgrupo de orden p. Demostrar que si este subgrupo existe es normal en G.

Solución ▼ [001428]

Ejercicio 6073

Sea G un grupo, A una parte no vacía de G. Se denota $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ y $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$. Demostrar que $N(A)$ y $C(A)$ son subgrupos de G y que $C(A)$ es un subgrupo normal de $N(A)$.
[001429]

Ejercicio 6074

Sea G un grupo, H y K dos subgrupos de G. Se denota $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$.

1. Demostrar que HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$. Deducir que si H es normal en G, entonces HK es un subgrupo de G.
2. Se supone ahora que $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$. Demostrar que la aplicación $f : H \times K \to G$ definida por $\forall h \in H, k \in K : f(h,k) = hk$ es un homomorfismo de grupos.
3. Calcular el núcleo e imagen de f. Dar una condición necesaria y suficiente para que f sea un isomorfismo de grupos.

[001430]

Ejercicio 6075

1. Sea G un grupo, H un subgrupo de G. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes :
   i) $\forall g \in G : gHg^{-1} \subset H$.
   ii) $\forall g \in G : gHg^{-1} = H$.
   iii) $\forall g \in G : gH = Hg$.
2. Deducir que todo subgrupo de índice 2 es normal.

[001431]

Ejercicio 6076

Sean $T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R}\right\}$ y $U=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b\in\mathbb{R}\right\}$.

1. Demostrar que T es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Demostrar que U es un subgrupo normal de T.

[001432]

Ejercicio 6077

Sea G un grupo.

1. Un subgrupo H de G es normal si : $\forall x\in G, xH=Hx$, lo que equivale a decir que H es el núcleo de un morfismo de G en un grupo. Recordar la demostración de esta equivalencia.
2. Si H es un subgrupo de índice 2 de G, demostrar que H es normal.
3. Si G es abeliano, demostrar que todo subgrupo de G es normal.
4. El centro de G es el conjunto $Z(G)=\{z\in G : \forall x\in G, xz=zx\}$. Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo normal.

[001433]

Ejercicio 6078

Sea G un grupo tal que la aplicación $x\to x^{-1}$ sea un morfismo. Demostrar que G es conmutativo.

Indicación ▼ [002136]

Ejercicio 6079

Sean G un grupo y $n\geqslant 1$ un entero tal que la aplicación $x\to x^n$ sea un automorfismo de G. Demostrar que para todo elemento x de G, x^{n-1} pertenece al centro de G.

Solución ▼ [002137]

Ejercicio 6080

Demostrar que el grupo de automorfismos del grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo simétrico S_3.

Solución ▼ [002138]

Ejercicio 6081

Demostrar que un subgrupo de índice 2 en un grupo G es normal en G.

Solución ▼ [002139]

Ejercicio 6082

Sea G un grupo y H un subgrupo. Se supone que el producto de dos clases a la izquierda módulo H es una clase a la izquierda módulo H. Demostrar que H es normal en G.

Solución ▼ [002140]

Ejercicio 6083

Sea G un grupo y $\simeq$ una relación de equivalencia en G. Se supone que esta relación es compatible con la ley de grupo, es decir que

$$\forall x,y \in G \quad \forall x',y' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{y} \quad y \simeq y' \quad \text{entonces} \quad xy \simeq x'y'$$

Demostrar que la clase H del elemento neutro 1 es un subgrupo normal de G y que

$$\forall x,x' \in G \quad x \simeq x' \quad \text{es} \quad \text{equivalente} \quad \text{à} \quad x'x^{-1} \in H$$

Solución ▼ [002141]

Ejercicio 6084

Sea G un grupo y $K \subset H \subset G$ dos subgrupos. Se supone que H es normal en G y que K es característico en H (i.e. estable para todo automorfismo de H). Demostrar que entonces K es normal en G. Dar un ejemplo de un grupo G y de dos subgrupos $K \subset H \subset G$, H es normal en G y K es normal en H, pero K no es normal en G.

Solución ▼ [002142]

Ejercicio 6085

(a) Demostrar que para todos los primos entre sí $m,n > 0$, los dos grupos $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ y $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ son isomorfos. Deducir que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, donde φ es la función indicatriz de Euler.

(b) El grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ ¿es cíclico? Demostrar que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, que $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Estudiar el grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$.

Indicación ▼ [002143]

Ejercicio 6086

(a) Demostrar que si m y n son números enteros primos entre sí y que un elemento z de un grupo G verifica $z^m = z^n = e$, donde e designa el elemento neutro de G, entonces $z = e$.

(b) Demostrar que si m y n son dos enteros primos entre sí, la aplicación

$$\phi : \mu_m \times \mu_n \to \mu_{mn}$$

que al par (s,t) hace corresponder el producto st es un isomorfismo de grupos

Indicación ▼ [002144]

Ejercicio 6087

Demostrar que los grupos μ_4 y $\mu_2 \times \mu_2$ no son isomorfos. de manera general demostrar que si m y n son enteros que no son primos entre sí, los grupos μ_{mn} y $\mu_m \times \mu_n$ no son isomorfos.

Solución ▼ [002145]

Ejercicio 6088

Sea n y d dos enteros tales que d divide n. Se define una aplicación $f : \mu_n \to \mu_d$ que a s asociada $s^{n/d}$. Demostrar que f es un morfismo sobreyectivo de grupos cuyo núcleo es $\mu_{n/d}$.

Indicación ▼ [002146]

Ejercicio 6089

Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos finitos. Sea G' un subgrupo de G. Demostrar que el orden de $f(G')$ divide los órdenes de G' y de H.

Indicación ▼ [002147]

Ejercicio 6090

Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos finitos. Sea G' un subgrupo de G de orden primo de orden de H. Demostrar que $G' \subset \ker(f)$.

Indicación ▼ [002148]

Ejercicio 6091

Sea G un grupo finito y H y K dos subgrupos de G. Se supone que H es normal en G, que $|H|$ y $|G/H|$ son primos entre sí y $|H| = |K|$. Demostrar que $H = K$.

Solución ▼ [002149]

Ejercicio 6092

Sea f un morfismo de grupos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^{\times}_{>0}$, $\mathbb{Q}$ es provisto de la suma y $\mathbb{Q}^{\times}_{>0}$ dotado de la multiplicación. Calcular $f(n)$ en función de $f(1)$, para todo entero $n > 0$. Demostrar que los dos grupos anteriores no son isomorfos.

Solución ▼ [002150]

Ejercicio 6093

Encontrar todos los morfismos del grupo aditivo $\mathbb{Q}$ en sí mismo. La misma pregunta de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$. La misma pregunta de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

Indicación ▼ [002151]

Ejercicio 6094

Dados dos enteros $m, n > 0$, determinar todos los morfismos de grupo de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, luego todos los automorfismos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicación ▼ [002152]

Ejercicio 6095

Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G de índice n. Demostrar que para todo $a \in G$, $a^n \in H$. Dar un ejemplo de un subgrupo H no normal de G, para los cuales la conclusión anterior es falsa.

Solución ▼ [002153]

Ejercicio 6096

Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal de orden n y de índice m. Se supone que m y n son primos entre sí. Demostrar que H es el único subgrupo de G de orden n.

Solución ▼ [002154]

Ejercicio 6097

Demostrar que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y que el grupo cociente es isomorfo a $\mathbb{R}^{\times}$.

Indicación ▼ [002155]

Ejercicio 6098

Se consideran los siguientes grupos :

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad \mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \quad \mu_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \quad z^n = 1\}$$

(a) Demostrar los siguientes isomorfismos :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T \quad \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times_{>0} \simeq T \quad \mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \simeq T \quad T/\mu_n \simeq T \quad \mathbb{C}^\times/\mu_n \simeq \mathbb{C}^\times$$

(b) Demostrar que $\mu_\infty \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. ¿Cuáles son los subgrupos finitos de μ_∞ ?

(c) Demostrar que un subgrupo de tipo finito de $\mathbb{Q}$ conteniendo $\mathbb{Z}$ es de la forma $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$. Deducir la forma de los subgrupos de tipo finito de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y de μ_∞.

(d) Sea p un número primo. Demostrar que $\mu_{p^\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad z^{p^n} = 1\}$ es un subgrupo de μ_∞. ¿Es de tipo finito ?

Solución ▼ [002156]

Ejercicio 6099

Sea G un subgrupo de índice finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Demostrar que $G = \mathbb{C}^\times$.

Solución ▼ [002157]

Ejercicio 6100

Sea G un grupo y H un subgrupo contenido en el centro $Z(G)$ de G. Demostrar que H es normal en G y que, si el grupo cociente G/H es cíclico, $G = Z(G)$.

Indicación ▼ [002158]

Ejercicio 6101

Demostrar que un grupo de orden p^2, donde p es un número primo es abeliano. (Solo se utiliza el centro de un p-grupo es no trivial, que es una consecuencia clásica de la “fórmula de las clases” (ver el próximo capítulo)).

Indicación ▼ [002159]

Ejercicio 6102

(a) Sea p un número primo. Demostrar que todo morfismo de grupos entre $\mathbb{F}_p^n$ y $\mathbb{F}_p^m$ es una aplicación $\mathbb{F}_p$ -lineal.

(b) Demostrar que el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{F}_p^*$.

(c) Determinar el número de automorfismos de $\mathbb{F}_p^n$.

Solución ▼ [002160]

Ejercicio 6103

Determinar el centro del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ de los automorfismos de $(\mathbb{F}_p)^n$.

Indicación ▼ [002161]

Ejercicio 6104

Sea p un número primo. Demostrar que un grupo abeliano finito, donde todos los elementos distintos del elemento neutro son de orden p, es isomorfo a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

Solución ▼ [002162]

Ejercicio 6105

(a) Sea G un grupo y H un subgrupo normal de G. Se denota φ la sobreyección canónica $\varphi : G \to G/H$. Demostrar que el orden de un elemento x de G es un múltiplo del orden de $\varphi(x)$.
(b) Para todo $x \in G$ se establece τ_x la aplicación de G en G definida por $\tau_x(y) = xyx^{-1}$. Demostrar que τ_x es un automorfismo de G y que la aplicación

$$x \to \tau_x$$

es un morfismo de grupo de G en $\mathrm{Aut}(G)$. ¿Cuál es el núcleo de este morfismo?

(c) Se supone que G es finito y que H es un subgrupo normal cuyo orden es el número primo más pequeño p dividiendo el orden de G. Demostrar que para todo $x \in G$ el orden de la restricción a H de τ_x es un divisor de $p-1$ y del orden de G. Deducir que τ_x restringido a H es la identidad para todo x y así H está contenido en el centro de G.

Indicación ▼ [002163]

Ejercicio 6106

Sea G un grupo. Se llama grupo de conmutadores de G y se denota $D(G)$ el subgrupo de G generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. Demostrar que $D(G)$ es normal en G y que el cociente $G/D(G)$ es abeliano. Demostrar que $D(G)$ es el subgrupo normal más pequeño de G tal que el cociente de G por este subgrupo sea abeliano.

Indicación ▼ [002164]

Ejercicio 6107

Sea G un grupo de orden p^3, donde p es un número primo. Demostrar que si G no es conmutativo, $Z(G) = D(G)$ y que este subgrupo es de orden p.

Solución ▼ [002165]

Ejercicio 6108

1. Sea $f : \mathscr{S}_n \to A$ un homomorfismo de grupos de $\mathscr{S}_n$ a un grupo abeliano. Demostrar que las transposiciones tienen todas la misma imagen. Demostrar que si $A = \{1,-1\}$ $f =$ signo o $f =$ aplicación constante1.
2. Sea G de índice 2 en $\mathscr{S}_n$. Demostrar que G es normal (retomar el método de la hoja 1) ya que $G = \mathscr{A}_n$.

[007776]

Ejercicio 6109 Los subgrupos normales de $\mathscr{S}_n$

El propósito del ejercicio es determinar los subgrupos normales de $\mathscr{S}_n$ (para $n \geqslant 5$).

1. Sea H un subgrupo normal de $\mathscr{S}_n$. Demostrar que $H \cap \mathscr{A}_n$ es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_n$. Deducir que H contiene $\mathscr{A}_n$ o que $H \cap \mathscr{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$?
2. Se supone que $H \cap \mathscr{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Demostrar que la restricción a H del morfismo característico es inyectiva. Demostrar que en este caso todos los elementos de H están en el centro de $\mathscr{S}_n$ y deducir que $H = \{\mathrm{Id}\}$.

3. Se supone que H contiene $\mathscr{A}_n$. Demostrar entonces que $H = \mathscr{S}_n$ o $H = \mathscr{A}_n$ según el índice de H en $\mathscr{S}_n$.
4. Concluir : si $n \geqslant 5$, los únicos subgrupos normales de $\mathscr{S}_n$ son $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathscr{A}_n$ y $\mathscr{S}_n$..

[007777]

Ejercicio 6110 Grupo triangular superior

1. Demostrar que el grupo de Heisenberg H de matrices $3*3$ triangular superior cuyos coeficientes diagonales son iguales a 1, es resolube.
2. Demostrar que el grupo B de matrices triangulares superiores $3*3$ invertibles (coeficientes diagonales no nulos) es resolube.

[007778]

Ejercicio 6111

El objetivo del ejercicio es determinar los grupos derivados sucesivos de $\mathscr{S}_4$. Se denota V_4 el subgrupo de permutaciones de perfil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (con la identidad).

1. Demostrar que $D(\mathscr{S}_4) \subset \mathscr{A}_4$.
2. Calcular los conmutadores $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ y $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
3. Demostrar que $D(\mathscr{S}_4) = A_4$.
4. Demostrar que $V_4 \subset D(\mathscr{A}_4)$.
5. Verificar que V_4 es normal en $\mathscr{A}_4$ y que el cociente $\mathscr{A}_4/V_4$ es un grupo abeliano. Deducir que $D(\mathscr{A}_4) \subset V_4$.
6. Deducir $D^2(\mathscr{S}_4)$.
7. Calcular los otros grupos derivados de $\mathscr{S}_4$.

[007779]

Ejercicio 6112 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$ y de $SL(3,\mathbb{F}_2)$

1. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que el conmutador $tst^{-1}s^{-1}$ es una transvección.
2. Recordar la prueba del hecho que dos transvecciones de $SL(3,\mathbb{F}_2)$ son conjugados en $SL(3,\mathbb{F}_2)$.
3. Determinar $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$
4. Determinar $D(\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2))$.

[007780]

Ejercicio 6113 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(2,k)$

Se trabaja en $\mathrm{GL}(2,k)$ para un cuerpo k que tiene al menos 4 elementos. Sea $g \in \mathrm{GL}(2,k)$. Se denota i_g el automorfismo interno dado por g.

1. Demostrar que existe un escalar no nulo $a \in k$ tal que $a^2 \neq 1$. ¿Qué pasa en $\mathbb{F}_2$ y en $\mathbb{F}_3$?

2. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$
Demostrar que $T = tst^{-1}s^{-1}$ es una transvección.
3. Sea τ una transvección de $SL(2,k)$. Existe $g \in \mathrm{GL}(2,k)$ tal que $\tau = i_g(T) := gTg^{-1}$. Calcular τ, con ayuda de g, s y t y demostrar que $D(SL(2,k))$ contiene todas las transvecciones.
4. Determinar $D(SL(2,k))$.
5. Determinar $D(\mathrm{GL}(2,k))$.

[007781]

Ejercicio 6114 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$

Se trabaja en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$.

1. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calcular $tst^{-1}s^{-1}$.
2. Determinar $D(\mathrm{GL}(2,k))$. Notar que este cálculo no es suficiente para determinar $D(SL(2,k))$.

[007782]

Ejercicio 6115

Demostrar que un grupo de orden 63 no es simple. [007783]

Ejercicio 6116 Simplicidad de $\mathscr{A}_5$

1. Enumerar las clases de conjugación de $\mathscr{S}_n$ en $\mathscr{A}_n$ numerándolas.
2. Demostrar que los 3-ciclos son conjugados en $\mathscr{A}_n$.
3. Demostrar que los elementos de orden 2 son conjugados en $\mathscr{A}_n$.
4. Demostrar que todo subgrupo normal H de $\mathscr{A}_n$ que contiene un elemento de orden 5 los contiene todos. (Se observa que el grupo generado por un elemento de orden 5 es un Sylow.)
5. Demostrar que todo subgrupo normal H de $\mathscr{A}_n$ no reducido a $\{\mathrm{Id}\}$ contiene al menos dos tipos de elementos además de la identidad. Demostrar entonces que $H = \mathscr{A}_n$.

[007784]

Ejercicio 6117 Grupo finito resoluble

1. Se recuerda que el centro de un p-grupo nunca se reduce a $\{e\}$. Demostrar por inducción que un p-grupo es siempre resoluble.
2. Sean p,q dos números primos distintos. Demostrar que un grupo de cardinal pq es siempre resoluble. (Se supone $p > q$ y considerar un p-Sylow)
3. Sea G un grupo de orden 12. Demostrar que G es resolube (Suponiendo los 3-Sylow no normales, contar el número de elementos de orden 3).

4. Sean p, q dos números primos distintos. Demostrar que un grupo de cardinales $p^2 q$ es siempre resoluble.

[007786]

Ejercicio 6118 Los subgrupos normales de $\mathrm{GL}(E)$

El propósito del ejercicio es determinar los subgrupos normales de $SL(E)$. Se supone que el cuerpo k tiene característica nula o que su característica es diferente de 2 y primo con la dimensión n de E. También se supone $n \geqslant 3$.

1. Dar un ejemplo de un subgrupo no normal de $SL(E)$.
2. Sea $\phi : G \to H$ un morfismo sobreyectivo de grupos. Demostrar que la imagen por ϕ de un subgrupo normal de G es un subgrupo normal de H.
3. Sea H un subgrupo de $SL(E)$. Determinar las posibilidades de su imagen en $PSL(E)$, por la proyección canónica.
4. Demostrar que todo subgrupo del centro de $SL(E)$ es normal en $SL(E)$.
5. Se supone ahora que H no es un subgrupo del centro de $SL(E)$. Sea τ una transvección. Demostrar que τ^n es una transvección de H.
6. Demostrar que H contiene todas las transvecciones de E.
7. Concluir.

[007787]

Ejercicio 6119

Sea G un grupo y $f : G \to A$ un morfismo de grupos de G en un grupo abeliano A. Se supone además que el núcleo $N(f)$ de f es resolube.

1. Demostrar que el grupo derivado $D(G)$ de G está incluida en el núcleo de F.
2. Demostrar que G es resolube.

[007844]

Ejercicio 6120 Grupo derivado

Sea G un grupo. Se llama grupo de conmutadores de G y se denota $D(G)$ el subgrupo de G generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. Demostrar que $D(G)$ es normal en G y que el cociente $G/D(G)$ es abeliano. Demostrar que $D(G)$ es el subgrupo normal más pequeño de G tal que el cociente de G por este subgrupo sea abeliano. [007845]

Ejercicio 6121 Ejemplos de subgrupos característicos

1. Demostrar que un p-Sylow normal es característico.
2. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G tal que su orden es primo con su índice. Demostrar entonces que H es el único subgrupo de orden $|H|$ y así como H es característico.

[007857]

Ejercicio 6122 Producto semidirecto interno

Sea N un subgrupo normal de un grupo G ($N \lhd G$) y H un subgrupo de G tal que $H \cap N = \{e_G\}$.

1. Demostrar que NH es un subgrupo de G.
2. Se supone ahora que $|G| = |N||H|$. Demostrar que $\phi : N \times H \to G$, $(n,h) \mapsto nh$ es una biyección.
3. Demostrar que si se provee $N \times H$ de la ley

$$(n,h) \star (n',h') = (n(hn'h^{-1}), hh'),$$

entonces $N \times H$ es un grupo y ϕ un isomorfismo de grupos.

[007858]

Ejercicio 6123 Grupos de automorfismos

1. Demostrar que los automorfismos del grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ se obtienen multiplicando por un invertible de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$.
2. Describir un isomorfismo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sobre $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$.
3. Demostrar que si G y H son dos grupos de orden primos entre sí, entonces

$$Aut(G \times H) = Aut(G) \times Aut(H).$$

4. Deducir el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$.
5. Sea p un número primo y n un entero natural no nulo. Demostrar que

$$Aut((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p).$$

6. Demostrar que $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to Bij((1,0),(1,1),(0,1))$ es un isomorfismo.

[007859]

Ejercicio 6124 Ejemplo de productos semi-directos

1. Demostrar que, luego de fijar un generador $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$, el dar un morfismo de grupos de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ en $Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ equivale a dar un morfismo de grupos de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
2. Deducir una estructura de producto semidirecto en $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que todas las estructuras de productos semi-directos dan grupos isomorfos. *Se puede demostrar que si $\phi, \psi \in Hom(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}), Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$, entonces existe $\gamma \in Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ tal que $\psi(h) = \gamma \circ \phi(h) \circ \gamma^{-1}$.*
4. Demostrar que todos los morfismos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ son de la forma $t \mapsto \{x \mapsto k^t x\}$, donde k es un elemento de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$ de orden p.

[007860]

Ejercicio 6125

Demostrar que un grupo de orden 63 no es simple. [007871]

Ejercicio 6126 Generalidades

1. Demostrar que el grupo de matrices triangulares superiores con diagonal identidad es resoluble.
2. Demostrar que si H es un subgrupo normal de un grupo G, entonces G es resolube si y solo s H y G/H, lo son. (Se puede empezar con el caso en que G/H es abeliano).

3. Demostrar que un p-grupo es resolube.

[007876]

Ejercicio 6127

1. El conjunto de permutaciones de perfil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ ¿con la identidad es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_6$? (Justificar)
2. Dar un ejemplo de un grupo soluble.
3. Dar si es posible un ejemplo de un grupo simple resoluble.
4. Dar si es posible un ejemplo de un grupo resoluble simple no abeliano.

[007877]

Ejercicio 6128 Grupo triangular superior

1. Demostrar que el grupo de Heisenberg H de matrices $3*3$ triangular superior cuyos coeficientes diagonales son iguales a 1, es resolube.
2. Demostrar que el grupo B de matrices triangulares superiores $3*3$ invertibles (coeficientes diagonales no nulos) es resolube.

[007878]

Ejercicio 6129 Grupos derivados de $\mathscr{S}_4$

El objetivo del ejercicio es determinar los grupos derivados sucesivos de $\mathscr{S}_4$. Se denota V_4 el subgrupo de permutaciones de perfil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (con la identidad).

1. Demostrar que $D(\mathscr{S}_4) \subset \mathscr{A}_4$.
2. Calcular los conmutadores $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ y $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
3. Demostrar que $D(\mathscr{S}_4) = A_4$.
4. Demostrar que $V_4 \subset D(\mathscr{A}_4)$.
5. Verificar que V_4 es normal en $\mathscr{A}_4$ y que el cociente $\mathscr{A}_4/V_4$ es un grupo abeliano. Deducir que $D(\mathscr{A}_4) \subset V_4$.
6. Deducir $D^2(\mathscr{S}_4)$.
7. Calcular los otros grupos derivados de $\mathscr{S}_4$.

[007879]

Ejercicio 6130 Resolubilidad

1. Demostrar que $\mathscr{S}_3$ es resolube.
2. Demostrar que el grupo D_4 de permutaciones de perfil $(.,.)(.,.)$ es un grupo abeliano de orden 4 normal en A_4. Deducir que $\mathscr{A}_4$ y entonces $\mathscr{S}_4$ son resolubles.
3. Se supone ahora $n \geqslant 3$. Sea c un 3 ciclo. Considerando c^2, demostrar que c es un conmutador en $\mathscr{S}_n$. Deducir el subgrupo derivado $D(\mathscr{S}_n)$.
4. Demostrar que para $n \geqslant 5$, $\mathscr{A}_n$ y $\mathscr{S}_n$ no son resolubles.

Ejercicio 6131 Grupo de orden pqr

Sea $p > q > r$ tres números primos. El objetivo del ejercicio es demostrar que un grupo de orden pqr es resolube.

1. Demostrar que un grupo de orden pq es resolube.
2. Sea G un grupo de orden pqr. Se supone que no admite un subgrupo normal. Se denota N_p (resp. N_q, N_r) el número de subgrupos de Sylow de orden p (resp. q, r). Demostrar que $m_p = qr$, $m_q \geqslant p$ y $m_r \geqslant q$.
3. Concluir.

[007881]

Ejercicio 6132 Grupos lineales

Sea E un k-espacio vectorial. Sea f una forma lineal en E y a un elemento no nulo de $H = \ker(f)$. Se llama transvección asociada a f y a la aplicación $u : E \to E$, $x \mapsto x + f(x)a$. Se recuerda que las transvecciones de E generan $SL(E)$.

1. Sea u una transvección. Considerando una base (e_i) de E, con $e_{n-1} = a$, $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n-1}$ base en H, y e_n tal que $f(e_n) = 1$, escribir la matriz de u.
2. Demostrar que si u es una transvección, $\ker(u - \mathrm{Id}) = H$, $\det u = 1$, u no es diagonalizable.
3. Demostrar que si $\dim E \geqslant 3$, las transvecciones de E son conjugados en $SL(E)$.
4. Se supone k de característica diferente de 2 y $\dim E \geqslant 3$. Demostrar que
$$D(\mathrm{GL}(E) = D(SL(E)) = SL(E)$$
y por lo tanto, que ni $\mathrm{GL}(E)$, ni $SL(E)$ no son resolubles.

[007882]

Ejercicio 6133 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2)$ y de $SL(3,\mathbb{F}_2)$

1. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que el conmutador $tst^{-1}s^{-1}$ es una transvección.
2. Recordar la prueba del hecho que dos transvecciones de $SL(3,\mathbb{F}_2)$ son conjugados en $SL(3,\mathbb{F}_2)$.
3. Determinar $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$.
4. Determinar $D(\mathrm{GL}(3,\mathbb{F}_2))$.

[007883]

Ejercicio 6134 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(2,k)$

Se trabaja en $\mathrm{GL}(2,k)$ por un cuerpo k que tiene al menos 4 elementos. Sea $g \in \mathrm{GL}(2,k)$. Se denota i_g el automorfismo interno dado por g.

1. Demostrar que existe un escalar no nulo $a \in k$ tal que $a^2 \neq 1$. ¿Qué pasa en $\mathbb{F}_2$ y en $\mathbb{F}_3$?
2. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$
Demostrar que $T = tst^{-1}s^{-1}$ es una transvección.
3. Sea τ una transvección de $SL(2,k)$. Existe $g \in \mathrm{GL}(2,k)$ tal que $\tau = i_g(T) := gTg^{-1}$. Calcular τ, con ayuda de g, s y t y demostrar que $D(SL(2,k))$ contiene todas las transvecciones.
4. Determinar $D(SL(2,k))$.
5. Determinar $D(\mathrm{GL}(2,k))$.

[007884]

Ejercicio 6135 Grupo derivado de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$

Se trabaja en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$.

1. Sea
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calcular $tst^{-1}s^{-1}$.
2. Determinar $D(\mathrm{GL}(2,k))$. Notar que este cálculo no es suficiente para determinar $D(SL(2,k))$.

[007885]

Ejercicio 6136 Pequeñas preguntas

1. ¿El entero 374 ¿divide el orden del grupo $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$? ¿El grupo $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ tiene un elemento de orden 374 ?, ¿tiene un elemento de orden 187 ?
2. Determinar todos los divisores de 374. ¿El grupo $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ tiene un subgrupo de orden de cada uno de los divisores de 374 ?

[007886]

---

255 304.00 Acción de grupo

Ejercicio 6137

Sea $\sigma \in S_5$ definido por
$$\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

(a) Escribir la descomposición de σ como producto de ciclos de soportes disjuntos. ¿Cuál es el signo de σ ?

(b) Dar la lista de los elementos de $< \sigma >$. Determinar $< \sigma > \cap A_5$.

Indicación ▼ [002166]

Ejercicio 6138

(a) Demostrar que el producto de dos transposiciones distintas es un 3-ciclo o un producto de dos 3-ciclos. Deducir que A_n es generado por los 3-ciclos.

(b) Demostrar que $A_n =< (123),(124),\ldots,(12n) >$.

Solución ▼ [002167]

Ejercicio 6139

Se llama ciclo una permutación σ verificando la siguiente propiedad : existe una partición de $\{1,\ldots,n\}$ en dos subconjuntos I y J tales que la restricción de σ a I es la identidad de I y existe $a \in J$ tal que $J = \{a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a)\}$, donde r es el cardinal de J. El subconjunto J es llamado soporte del ciclo σ. Un tal ciclo se denota $(a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a))$

(a) Sea $\sigma \in S_n$ una permutación. Se considera el subgrupo C generado por σ en S_n. Demostrar que la restricción de σ en cada una de las órbitas de $\{1,\ldots,n\}$ bajo la acción de C es un ciclo, que estos diferentes ciclos conmutan entre a ellos, y que σ es el producto de estos ciclos.

(b) Descomponer en ciclos las siguientes permutaciones de $\{1,\ldots,7\}$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

(c) Demostrar que si σ es un ciclo, $\sigma = (a,\sigma(a),\ldots,\sigma^{r-1}(a))$, el conjugado $\tau\sigma\tau^{-1}$ es un ciclo y que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a),\tau(\sigma(a)),\ldots,\tau(\sigma^{r-1}(a)))$.

(d) Determinar todas las clases de conjugación de las permutaciones en S_5 (se considera su descomposición en ciclos). Determinar todos los subgrupos normales de S_5.

Indicación ▼ [002168]

Ejercicio 6140

Demostrar que las permutaciones circulares generan S_n si n es par, y A_n si n es impar.

Solución ▼ [002169]

Ejercicio 6141

Sea I un subconjunto de $\{1,\ldots,n\}$ y σ un ciclo de soporte I. Sea τ otra permutación. Demostrar que τ conmuta con σ si y solo si τ deja invariante I y la restricción de τ a I es igual a una potencia de restricción de σ a I.

Solución ▼ [002170]

Ejercicio 6142

Sea H un subgrupo normal de S_n conteniendo una transposición. Demostrar que $H = S_n$.

Solución ▼ [002171]

Ejercicio 6143

En el grupo simétrico S_4 se consideran los siguientes subconjuntos :

$$H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(\{1,2\}) = \{1,2\}\}$$

$$K = \{\sigma \in S_4 \mid \forall a,b \quad a \equiv b \ [\text{mod } 2] \Rightarrow \sigma(a) \equiv \sigma(b) \ [\text{mod } 2]\}$$

Demostrar que H y K son subgrupos de S_4. Describirlos.

Solución ▼ [002172]

Ejercicio 6144

Demostrar que el orden de una permutación impar es un número par.

Indicación ▼ [002173]

Ejercicio 6145

Demostrar que toda permutación de orden 10 en S_8 es impar.

Solución ▼ [002174]

Ejercicio 6146

(a) Demostrar que todo 3-ciclo es un cuadrado. Deducir que el grupo alternado A_n es generado por los cuadrados de las permutaciones.

(b) Demostrar que A_n es el único subgrupo de S_n de índice 2.

Solución ▼ [002175]

Ejercicio 6147

Encontrar todas las clases de conjugación de S_4. Dar la lista los subgrupos normales de S_4.

Solución ▼ [002176]

Ejercicio 6148

Dados un grupo G y un subgrupo H, se define el normalizador $\mathrm{Nor}_G(H)$ de H en G como el conjunto de elementos $g \in G$ tales que $gHg^{-1} = H$.

(a) Demostrar que $\mathrm{Nor}_G(H)$ es el mayor subgrupo de G conteniendo H como subgrupo normal.

(b) Demostrar que el número de subgrupos conjugados distintos de H en G es igual al índice $[G : \mathrm{Nor}_G(H)]$ y que en particular es un divisor del orden de G.

Indicación ▼ [002177]

Ejercicio 6149

Demostrar que para $m \geqslant 3$, un grupo simple de orden $\geqslant m!$ no puede tener un subgrupo de índice m.

Indicación ▼ Solución ▼ [002178]

Ejercicio 6150

Sea G un grupo y H un subgrupo de índice finito n. Demostrar que la intersección H' de conjugados de H por los elementos de G es un subgrupo normal de G y con índice finito en G. Demostrar que es el más grande subgrupo normal de G contenido en H.

Indicación ▼ [002179]

Ejercicio 6151

a) Demostrar que un grupo G verificando

$$\forall a, b \in G \quad a^2b^2 = (ab)^2$$

es conmutativo.

(b) El propósito de esta pregunta es dar un ejemplo de un grupo G verificando la propiedad

$$\forall a, b \in G \quad a^3b^3 = (ab)^3$$

y que no es conmutativo.
(i) Demostrar que existe un automorfismo σ de $\mathbb{F}_3^2$ de orden 3.
(ii) Demostrar que el grupo G definido como el producto semi-directo de $\mathbb{F}_3^2$ por $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3$ actuando en $\mathbb{F}_3^2$ a través de σ responde la pregunta.

Solución ▼ [002180]

Ejercicio 6152

Sean G un grupo y H un subgrupo de índice finito en G. Se define en G la relación xRy si y solo si $x \in HyH$.

(a) Demostrar que R es una relación de equivalencia y que toda clase de equivalencia para la relación R es una unión finita disjunta de clases a la izquierda módulo H.

Sea $HxH = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d(x)} x_i H$ la partición de la clase HxH en clases a la izquierda distintas.

(b) Sea $h \in H$ y i un entero comprendido entre 1 y $d(x)$; se escribe $h * x_i H = hx_i H$. Demostrar que esta fórmula define una acción transitiva de H en el conjunto de clases $x_1 H, \ldots, x_{d(x)} H$ y que el reparador de $x_i H$ en esta acción es $H \cap x_i H x_i^{-1}$. Deducir que

$$d(x) = [H : H \cap xHx^{-1}]$$

y que en particular $d(x)$ divide el orden de G.

(c) Demostrar que H es normal en G si y solo si $d(x) = 1$, para todo $x \in G$.

(d) Se supone que G es finito y que $[G : H] = p$, donde p es el primo más pequeño que divide el orden de G. El propósito de esta pregunta es demostrar que H es normal en G.
(i) Demostrar que para todo $x \in G$, $d(x) \leqslant p$. Deducir que $d(x) = 1$ o $d(x) = p$.
(ii) Demostrar que si H no es normal en G, existe una única clase de equivalencia para la relación R y que $G = H$, lo que contradice la hipótesis $[G : H] = p$.

Solución ▼ [002181]

Ejercicio 6153

Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X.

(a) Se supone que cada órbita contiene al menos dos elementos, que $|G| = 15$ y que $\mathrm{card}(X) = 17$. Determinar el número de órbitas y la cardinalidad de cada una.

(b) Se supone que $|G| = 33$ y $\mathrm{card}(X) = 19$. Demostrar que existe en menos una órbita reducida a un elemento.

Solución ▼ [002182]

Ejercicio 6154

(a) Sea G un grupo y H un subgrupo. Demostrar que la fórmula

$$g.g'H = gg'H$$

define una acción de G en el conjunto cociente G/H. Determinar el fijador de una clase gH.

(b) Sea G un grupo y X y Y dos conjuntos en los que G actúa (se habla de G-conjuntos). Sea f una aplicación de X en Y. Se dice que f es compatible con la acción de G (o que f es un morfismo de G-conjuntos) si para todo elemento x de X y todo g en G, $f(g.x) = g.f(x)$. Demostrar que si f es biyectiva y compatible con la acción de G es lo mismo con f^{-1}. Se dice en este caso que f es un isomorfismo de G-conjuntos.

(c) Sea G un grupo actuando transitivamente en un conjunto X (i.e. para todo par de elementos x e y de X existe al menos un elemento g del grupo tal que $g.x = y$). Demostrar que existe un subgrupo H de G tal que X sea isomorfo en tanto que G-conjunto a G/H (se toma por H el fijador de todo punto de X).

(d) i) Sea H y K dos subgrupos de G. Demostrar que existe una aplicación f de G/H hacia G/K compatible con la acción de G si y solo si H está contenido en un conjugado de K. Demostrar que en este caso f es sobreyectiva. Demostrar que G/H y G/K son isomorfos en tanto que G-conjuntos si y solo si H y K son conjugados en G.

ii) Sea X y Y dos G-conjuntos transitivos. Demostrar que existe una aplicación de X hacia Y compatible con la acción de G si y solo si existen dos elementos x e y de X y Y tales que el fijador de x está contenido en un conjugado de fijador de y. Demostrar que X y Y son isomorfos si y solo si los fijadores de x y de y son conjugados en G.

Solución ▼ [002183]

Ejercicio 6155

Sea G un grupo finito y X un G-conjunto transitivo. Se dice que X es *imprimitivo* si X admite una partición $X = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} X_i$ tal que todo elemento g de G respeta esta partición, i.e. Envía un subconjunto X_i en un subconjunto X_k (eventualmente $k = i$) y tal que $2 \leqslant r$ y las partes X_i no se reducen a un elemento. En caso contrario se dice que X es *primitivo*.

(a) Demostrar que en la descomposición anterior, si existe, todos los subconjuntos X_i tienen mismo número m de elementos.

(b) Sea H un subgrupo de G. Demostrar que G/H es imprimitivo si y solo si existe un subgrupo propio K de G diferente de H tal que $H \subset K \subset G$ (se verá la partición de G/H en clases módulo K).

(c) Deducir de lo anterior que X es primitivo si y solo si el fijador de un elemento x de X es maximal entre los subgrupos propios de G.

(d) Se supone aquí que X es primitivo y que H es un subgrupo normal de G cuya acción no es trivial en X. Demostrar que entonces H actúa transitivamente sobre X.

Indicación ▼ Solución ▼ [002184]

Ejercicio 6156

Demostrar que un subgrupo primitivo de S_n que contiene una transposición es S_n todo entero.

Indicación ▼ Solución ▼ [002185]

Ejercicio 6157

Sea G un grupo finito y X un G-conjunto. Si k es un entero ($1 \leqslant k$), se dice que X es k-transitivo, si para todo par de k-tuples $(x_1, \ldots, x_k)$ y $(y_1, \ldots, y_k)$ de elementos de X distintos dos en dos, existe al menos un elemento g de G tal que para todo i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $g.x_i = y_i$. Un G-conjunto 1-transitivo es, por lo tanto simplemente un G-conjunto transitivo.

(a) Demostrar que si X es k-transitivo, es también l-transitivo para todo l, $1 \leqslant l \leqslant k$.

(b) Demostrar que X es 2-transitivo si y solo si el fijador de un elemento x de X actúa transitivamente sobre $X \setminus \{x\}$.

(c) Demostrar que si X es imprimitivo, no es 2-transitivo.

(d) Demostrar que un grupo cíclico C de orden primo considerado como C-conjunto por la acción de traslacional de C en sí mismo, es primitivo pero no es 2-transitivo.

(e) Demostrar que el conjunto $\{1,\ldots,n\}$ equipado con acción de grupo S_n es k-transitivo para todo k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Deducir que el conjunto $\{1,\ldots,n\}$ equipado con acción de grupo S_n es primitivo.

(f) Demostrar que el fijador de 1 en S_n es isomorfo a S_{n-1}. En lo que sigue se identifica S_{n-1} a este fijador. Deducir del ejercicio 19 que S_{n-1} es un subgrupo propio maximal de S_n.

Indicación ▼ [002186]

Ejercicio 6158

Describir el grupo D_n de las isometrías del plano afín euclidiano que dejan invariante un polígono regular de n lados. Demostrar que D_n es generado por dos elementos σ y τ que controlan las relaciones : $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ y $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. ¿Cuál es el orden de D_n ? Determinar el centro de D_n. Demostrar que $D_3 \simeq S_3$.

Indicación ▼ [002187]

Ejercicio 6159

Demostrar que el grupo de isometrías del espacio afín euclidiano de dimensión 3 que dejan invariante un tetraedro regular de vértices a_1, a_2, a_3, a_4 es isomorfo a S_4 y que el subgrupo de isometrías directas que dejan invariante el tetraedro es isomorfo a A_4.

Solución ▼ [002188]

Ejercicio 6160

Determinar el grupo de isometrías del espacio afín euclidiano de dimensión 3 que dejan un cubo invariante.

[002189]

Ejercicio 6161

Sea G un grupo, H un subgrupo de índice n en G.

1. Usando clases a la izquierda módulo H en G, construir un homomorfismo $\phi : G \mapsto \mathscr{S}_n$.
2. Demostrar que si $N \subset H$ y N es normal en G, se tiene $N < \operatorname{Ker} \phi < H$.
3. Deducir que todo grupo finito G es isomorfo a un subgrupo de $\mathscr{S}_n$.

[006379]

Ejercicio 6162

Sea K un cuerpo finito de q elementos, $\mathrm{GL}(n,K)$ el conjunto de matrices (n,n) invertibles con coeficientes en K. Demostrar por inducción en n que $|\mathrm{GL}(n,K)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$ considerando la acción de $Aut(K^n)$ en el espacio vectorial K^n (de base $\{v_1,\ldots,v_n\}$), la órbita y el estabilizador de un vector de base (v_1 por ejemplo). [006380]

Ejercicio 6163

Sea φ una acción de un grupo G operando en X (denotada $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$).

1. Demostrar que $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$, donde $g \in G$ y G_x designa el estabilizador del punto x.
2. Si la acción φ es transitiva y fiel y G es abeliano, entonces demostrar que φ es simplemente transitiva.

[006381]

Ejercicio 6164

Sea $G = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ opera en el plano complejo $\mathbb{C}$, donde $\gamma_1 : z \mapsto z+1$ y $\gamma_2 : z \mapsto z+i$.

1. Demostrar que $G \cong \mathbb{Z}^2$ y G actúa isométricamente sobre $\mathbb{C}$.
2. Encontrar un conjunto fundamental F, para esta acción y el conjunto de órbitas $\mathbb{C}/\sim\, = \mathbb{C}/G = \overline{F}/\sim$ identificando los puntos equivalentes sobre el borde de $\overline{F}$.

[006382]

Ejercicio 6165

1. Demostrar que la cantidad siguiente (llamada forma de Killing) es un producto escalar en el grupo de matrices $M_n(\mathbb{R})$.
$$\langle X, Y \rangle = \text{tr } (X^T Y). \quad X, Y \in M_n(\mathbb{R})$$
2. Demostrar que la forma de Killing permanece invariable por respecto a la acción de $O(n)$ por conjugación :
$$\left\langle gXg^{-1}, gYg^{-1} \right\rangle = \langle X, Y \rangle, \;\; X, Y \in M_n(\mathbb{R}), \; g \in O(n).$$

[006383]

Ejercicio 6166

Sean G un grupo y S un sistema de generadores de G conteniendo con cada elemento s su inversa s^{-1}. Recordar la construcción de la gráfica de Cayley $C(G,S)$. El conjunto V de vértices de $C(G,S)$ está en biyección con el conjunto de elementos de G. Dos vértices g_1 y g_2 están unidos por una arista si $g_1^{-1} \cdot g_2 = s \in S$. La longitud de esta arista es declarada por definición igual a 1. Un camino $l \subset C(G,S)$ entre dos vértices g y h es una sucesión finita de aristas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uniendo g y h. La longitud $|l|$ de l vale por definición n : el número de aristas que lo constituyen.

1. Demostrar que la función $d : G \times G \mapsto \mathbb{N}$ dada por
$$d(g,h) = \inf\{ \text{ largos de los caminos uniendo } g \text{ y } h$$
es una distancia y que existe un camino $l \subset C(G,S)$ que la realiza, es decir $|l| = d(g,h)$.
2. Para cada $g \in G$ se escribe $|g| = d(0,g)$. Demostrar que $|g| = \inf\{k \mid g = s_{i_1} \cdots s_{i_k},\; s_{i_j} \in S\}$.
3. Demostrar que G actúa isométricamente sobre los vértices de $C(G,S)$, o sea $\forall g \in G \; d(g\gamma_1, g\gamma_2) = d(\gamma_1, \gamma_2)$ où $\gamma_i \in V$ $(i = 1, 2)$. Deducir que $d(f,h) = |f^{-1} \cdot h|$ $(f, h \in V)$.
4. Sea $F_2 =< a, b >$ un grupo libre sobre generadores a y b (ver el ejercicio 6329). Dar un fragmento (inicial) de su gráfica de Cayley $C(F_2, \{a, b\})$.
5. Demostrar que la gráfica de Cayley de un grupo libre es siempre un árbol (un gráfico sin lazos se denomina árbol).

[006384]

Ejercicio 6167 Colorear

1. Recordar la fórmula de Burnside que calcula el número de órbitas de la acción de un grupo finito en un conjunto finito.

2. Recordar la lista de elementos del grupo de isometrías directas (desplazamientos) de un tetraedro regular. Se hace una figura para cada tipo de eje de rotación, indicando el orden de las rotaciones.
3. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden pintar las caras de un tetraedro regular con c colores ? Cada lado solo está pintado de un color. No se hace distinción entre dos resultados que se deducen el uno del otro desplazando el tetraedro.

Solución ▼ [007729]

Ejercicio 6168

Se fija una acción de un grupo G en un conjunto finito E. Se supone que el orden de G es 15, que el cardinal de E es 17 y que E no tiene un punto fijo para todos los elementos del grupo G. Determinar el número de órbitas y la cardinalidad de cada una de ellas. [007758]

Ejercicio 6169 Pequeñas preguntas

Se considera la acción de un grupo G en un conjunto E.

1. Demostrar que un subconjunto de E es globalmente estable por G si y solo si es una unión de orbitas.
2. Demostrar que dos elementos en la misma órbita tienen estabilizadores conjugados.
3. Demostrar que dos elementos conjugados en el grupo G fijando el mismo número de elementos.

[007759]

Ejercicio 6170 El teorema de Cayley

1. Para todo elemento a de un grupo finito G de orden n, se define la aplicación

$$\begin{aligned} l_a : G &\to G \\ g &\mapsto ag \end{aligned}$$

Demostrar que l_a es una biyección de G, producto de $\frac{n}{\text{orden}(a)}$ ciclos con soporte disjuntos todos de longitud orden(a).

2. Demostrar entonces que la aplicación

$$\begin{aligned} l : G &\to \mathscr{S}(G) \\ a &\mapsto l_a \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos, inyectivo. Por tanto, todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones de sus elementos.

[007760]

Ejercicio 6171

1. Sea p un número primo. Demostrar que el centro de un p-grupo G, (i.e. un grupo finito de orden una potencia no nula de p), no se reduce al elemento neutro.
2. Demostrar que si el cociente de un grupo por su centro es cíclico entonces el grupo es abeliano, por lo tanto igual a su centro.
3. Demostrar que un grupo de orden p^2 es abeliano.

4. Demostrar que el centro de un grupo no abeliano de orden p^3 es de orden p. Deducir que el número de clases de conjugación es p^2+p-1. (Se puede estudiar la acción de G en sí mismo por conjugación : sus puntos fijos, la órbita de los elementos, el estabilizador de los elementos...)

[007761]

Ejercicio 6172

Sea G un grupo finito. Sea p el factor primo más pequeño del orden de G. Sea H un subgrupo de G de índice $p>1$.

1. Demostrar que las órbitas de acción de H sobre G/H (el conjunto cociente G/H de clases a la izquierda de G módulo H) por traslación a la izquierda se reducen a puntos.
2. Demostrar que H es normal.

[007762]

Ejercicio 6173

Sea G un grupo actuando en un conjunto E. Sea E_1 y E_2 dos partes no vacías y disjuntas de E. Sea g_+ y g_- dos elementos de G tales que toda potencia (positiva o negativa) de g_+ envía todo elemento de E_1 en E_2 y toda potencia g_- envía todo elemento de E_2 en E_1.

1. Demostrar que las palabras de la forma $g_+^{k_1}g_-^{l_1}g_+^{k_2}g_-^{l_2}\cdots g_+^{k_d}g_-^{l_d}g_+^{k_{d+1}}$ no son iguales al elemento neutro e_G.
2. Deducir mediante una conjugación que ninguna palabra del grupo generado por g_+ y g_- que no sea la palabra vacía es igual al elemento neutro. Entonces se dice que el grupo generado por g_+ y g_- es un grupo libre.
3. ¿Qué sucede si solo se supone que E_1 no está incluido en E_2 ?
4. Demostrar el subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$ generado por
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
es libre, considerando la acción natural sobre $\mathbb{R}^2$ y los dominios $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|<|y|\}$ y $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|>|y|\}$ delimitados por las diagonales.

[007771]

Ejercicio 6174 Subgrupos finitos de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$

Si p y q son dos números naturales, se denota $p\wedge q$ el máximo común divisor de p y q, se denota también $p|q$ si p divide q. Si m es un entero mayor o igual que 1, se denota $\Phi_m(X)$ el polinomio ciclotómico de orden m,
$$\Phi_m(X) = \Pi_{\{k\in\{1,..,m\}/k\wedge m=1\}}(X-\mathrm{e}^{2ik\pi/m}).$$
Se recuerda que $\Phi_m(X)$ es un polinomio unitario con coeficientes enteros, irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. El grado de $\Phi_m(X)$ es $\varphi(m)$, donde φ es la función indicatriz de Euler. Por último, se recuerda que $X^m-1=\Pi_{d|m}\Phi_d(X)$.

1. Sea $M\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, de orden finito m.
   — Demostrar que si z es una raíz compleja del polinomio característico $\chi_M(X)$, entonces z es raíz del polinomio x^m-1.
   — Demostrar, resolviendo la ecuación $\phi(k)=1$, que existen exactamente dos polinomios ciclotómicos de grado uno.

— Demostrar de la misma manera que existen exactamente tres polinomios ciclotómicos de grado dos cuyas expresiones desarrolladas se deben dar.
— Deducir que el polinomio $\chi_M(X)$ pertenece al conjunto $\{X^2+X+1, X^2+1, X^2-X+1, X^2-1, (X-1)^2, (X+1)^2\}$.
— Deducir que $m \in \{1,2,3,4,6\}$.
— Dar una matriz compañera de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de orden 6.

2. Sea p un número primo, $p \geqslant 3$. Se denota $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de cardinal p. Se recuerda que la sobreyección natural $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ induce un morfismo de grupos $R_p :\ \mathrm{GL}_n(Z) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Sea $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ de orden $m \geqslant 2$ y en el núcleo de R_p. Se supone que M no es la identidad. La matriz M se puede por lo tanto escribir $M = I_n + p^r N$, con $r \in \mathbb{N}^\star$ y $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) - pM_n(\mathbb{Z})$.
— Demostrar que $mp^rN \in p^{2r}M_n(\mathbb{Z})$. Deducir que p divide m. Se establece entonces $m = pm'$ y $M' = M^p$.
— Demostrar que p divide m'.
— Deducir una contradicción.
3. Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
4. Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
— Demostrar que el cardinal de G es un divisor de 48.
— Demostrar que el cardinal de G no puede ser igual a 48. (Se podrá, eventualmente, estudiar $\Phi_8(X)$ considerado como un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}_3$.)

[007772]

Ejercicio 6175 Clasificación de grupos de orden 8

Sea G un grupo de orden 8.

1. Enumerar cuatro grupos de orden 8, dos a dos no isomorfos, e incluso 5 si es posible.
2. Se supone que todos los elementos de G son de orden 2. Demostrar que G es abeliano. Sea a y b dos elementos no neutros distintos de G. Demostrar que $\{e,a,b,ab\}$ es un subgrupo de orden 4 de G. Determinar un isomorfismo de G, con un grupo conocido.
3. Se supone que G admite un elemento a de orden 4. Sea b un elemento fuera del subgrupo generado por a. Demostrar que $\langle a\rangle$ es normal y que b^2 pertenece a $\langle a\rangle$.
   (a) ¿Cuál es el orden de b si $b^2 = a$ o si $b^2 = a^3$? Concluir en este caso.
   (b) Si $b^2 = e$, demostrar que G es un producto semidirecto y deducir un isomorfismo con un grupo conocido.
   (c) Si todos los elementos fuera de $< a >$ tiene un cuadrado igual a a^2, establecer la lista de elementos y la tabla de multiplicar de G usando solo a y b.

[007773]

Ejercicio 6176

Se considera la acción del grupo $G := \{-1,+1\}$ en el álgebra de polinomios $k[X,Y]$ por $(-1)\cdot X = -X$ y $(-1)\cdot Y = -Y$. Determinar el álgebra de polinomios invariantes. ¿Es un anillo factorial ? ¿Es un álgebra de polinomios ? [007785]

256 305.00 Grupo cíclico

Ejercicio 6177

Demostrar que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico. [002659]

Ejercicio 6178

Demostrar que un grupo G cuyos únicos subgrupos son G y $\{e_G\}$ es cíclico y su orden es primo. [002660]

Ejercicio 6179 El recíproco del teorema de Lagrange

1. ¿El grupo simétrico $\mathscr{S}_5$ tiene un elemento de orden 6 ?
2. Encontrar en un grupo simétrico un contraejemplo del inverso del teorema de Lagrange sobre el orden de un elemento en un grupo.

[007730]

Ejercicio 6180

1. Demostrar que un grupo de orden p^3q (con p primo y q primero con p) admite un subgrupo de orden p, uno de orden p^2 y uno de orden p^3.
2. Dar la lista de los elementos del grupo alternado $\mathscr{A}_4$. Sea H un subgrupo de orden 3 de $\mathscr{A}_4$ y σ un elemento de $\mathscr{A}_4$ que no está en H. Demostrar que el subgrupo generado por H y σ es el grupo $\mathscr{A}_4$. Deducir que $\mathscr{A}_4$ no tiene subgrupo de orden 6.

[007764]

Ejercicio 6181 Descomposiciones explícitas

1. Se considera el elemento de $\mathscr{S}_8$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Descomponer σ en un producto de transposiciones y calcular su signo. ¿Se puede escribir σ como producto de doce transposiciones ?
2. Sea σ el elemento de $\mathscr{S}_{11}$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Descomponer σ en un producto de ciclos con soportes disjuntos. Especificar el orden de σ, y el signo de σ. Calcular σ^2 y σ^3. Escribir σ^{-1} en un producto de ciclos con soportes disjuntos.

[007765]

Ejercicio 6182

1. Si c es el ciclo $(1,2,3,4,5,6)$, ¿c^2 es un ciclo ?
2. Si c es un ciclo de $\mathscr{S}_n$ de orden l y k un entero natural, calcular el orden de c^k.

[007766]

Ejercicio 6183 Estudio de $\mathscr{S}_3$

Dar las estructuras de ciclos posibles en $\mathscr{S}_3$, el número de elementos de $\mathscr{S}_3$ teniendo esta estructura, y su signo. Describa los subgrupos de $\mathscr{S}_3$, y los que son normales en $\mathscr{S}_3$. Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathscr{S}_3$. [007767]

Ejercicio 6184 Estudio de $\mathscr{S}_4$

Dar las estructuras de ciclos posibles en $\mathscr{S}_4$, el número de elementos de $\mathscr{S}_4$ teniendo esta estructura, y su signo. Determinar los subgrupos normales de $\mathscr{S}_4$ (usar el ejercicio de clases de conjugación). Deducir que A_4 no es un grupo simple, i.e. que no tiene subgrupos normales distintos de $\{e\}$ y A_4. Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathscr{S}_4$. [007768]

Ejercicio 6185

Se llama grupo diédrico D_{2n} el grupo de isometrías de un polígono regular en n lados.

1. Determinar (por ejemplo usando una acción de grupo) el cardinal y luego la lista de elementos de D_{2n}.
2. Se supone n impar. Determinar el 2-Sylow de D_n y verificar que sean conjugados.
3. Se supone $n = 6$. Determinar un 2-Sylow de D_6. Determinar dos subgrupos de orden 2 de D_6 no conjugados en D_6.

[007769]

Ejercicio 6186

Sea G el subgrupo de $\mathscr{S}_7$ generado por $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ y $\beta = (3,4)(5,6)$. Se propone determinar el orden de G. Se considera para esto los conjuntos siguientes :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$

$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

Dado un conjunto Y, se denota $|Y|$ el cardinal de Y.

1. Demostrar que 6 divide $|\, G \,|$.
2. ¿Cuál es la relación entre $|G|$ y $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?
3. Explicitar X_1.
4. Explicitar $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ y $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. Deducir $x_3 = \{3,4,5,6\}$ o $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ y $X_2 = \{2,7\}$ o $x_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.
5. Se acciona G en el conjunto de partes de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determinar la órbita de la parte $\{1,2,7\}$. Deducir que 7 es fijo para los elementos de G_2 y que G_3 se reduce a la identidad.
6. Deducir $|G|$.

[007770]

Ejercicio 6187

1. Sea G un grupo, a y b dos elementos de orden finito que conmutan. Se supone que los subgrupos generados $\langle a\rangle$ y $\langle b\rangle$ tienen una intersección reducida al punto aislado elemento neutro $\{e\}$.
2. Demostrar que una igualdad $(ab)^m = e$ implica $a^m = e$ y $b^m = e$.
3. Calcular el orden de ab.
4. Demostrar que si dos elementos de un grupo son de órdenes primos entre ellos, la intersección de los subgrupos que generan se reduce al elemento neutro aislado.
5. Demostrar que todo grupo abeliano de orden 77 es cíclico.

[007775]

---

257 306.00 Teorema de Sylow

Ejercicio 6188

Sean G un grupo finito y H un subgrupo normal de G. Demostrar que si H y G/H son los p-grupos, es lo mismo con G.

Indicación ▼ [002190]

Ejercicio 6189

Sea G un p-grupo y H un subgrupo normal de G. Demostrar que $H\cap Z(G)$ no se reduce al elemento neutro.

Solución ▼ [002191]

Ejercicio 6190

Sea G un p-grupo de orden p^r.

(a) Demostrar que para todo entero $k \leqslant r$, G tiene un subgrupo normal de orden p^k.

(b) Demostrar que existe una sucesión $G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_r = G$ de subgrupos G_i normales de orden p^i $(i = 1,\ldots,r)$.

(c) Demostrar que para todo subgrupo H de G de orden p^s, con $s < r$, existe un subgrupo de orden p^{s+1} de G que contiene H.

Indicación ▼ Solución ▼ [002192]

Ejercicio 6191

Sea G un grupo de orden $2p$, donde p es un número primo mayor o igual que 3. Demostrar que G contiene un solo subgrupo H de orden p y que este subgrupo es normal. Verificar que los únicos automorfismos de orden 2 de un grupo cíclico de orden p son la identidad y el pasaje a la inversa. Deducir que el grupo G es ya sea cíclico, ya sea no conmutativo, en cuyo caso tiene dos generadores s y t comprobando las relaciones $s^p = 1$, $t^2 = 1$ y $tst^{-1} = s^{-1}$.

Solución ▼ [002193]

Ejercicio 6192

Sea G un grupo no conmutativo de orden 8.

(a) Demostrar que G contiene un elemento a de orden 4 y que el subgrupo H de G generado por a es normal en G.

(b) Se supone aquí que existe un elemento b de $G \setminus H$ que es de orden 2. Sea K el subgrupo generado por b. Demostrar que en este caso G es isomorfo al producto semidirecto de H por K, el generador b de K actuando en H vía el automorfismo $x \to x^{-1}$. El grupo es entonces isomorfo al grupo diédrico D_4.

(c) En caso contrario, sea b un elemento de orden 4 de G no perteneciente a H. Demostrar que a^2 es el único elemento de orden 2 de G, que el centro $Z(G)$ de G es igual a $\{1, a^2\}$. Se define $-1 = a^2$. Demostrar que a y b verifican las siguientes relaciones : $a^2 = b^2 = -1$, $bab^{-1} = a^{-1}$. Finalmente, ponemos $ab = c$. Verificar las siguientes relaciones :

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1 \quad ab = -ba = c \quad bc = -cb = a \quad ca = -ac = b$$

(la escritura $-x$ significa aquí $(-1)x$). Este último grupo es el grupo de los cuaterniones.

Solución ▼ [002194]

Ejercicio 6193

Demostrar que el grupo diédrico D_6 es isomorfo al producto directo $\mu_2 \times S_3$.

Indicación ▼ [002195]

Ejercicio 6194

(a) Sea G un grupo no abeliano de orden 12. Sea H un 3-Sylow de G. Se considera el morfismo $\theta : G \to S_{G/H}$ correspondiente a la acción de G por traslación de G sobre G/H. Demostrar que este morfismo no es inyectivo si y solo si H es normal en G. Deducir que si H no es normal en G, el grupo G es isomorfo a A_4.

(b) Se supone que G no es isomorfo a A_4. Demostrar que entonces G admite un único 3-Sylow $H = \{1, a, a^2\}$. Demostrar luego que si G contiene un elemento b de orden 4, a y b verifican las relaciones :

$$a^3 = b^4 = 1 \quad bab^{-1} = a^2 = a^{-1}.$$

Demostrar solo en el caso contrario $G \simeq D_6$.

(c) Dar la lista de las clases de isomorfismo de los grupos de orden 12.

Solución ▼ [002196]

Ejercicio 6195

Sean G un grupo y H un subgrupo normal de G. Se da un número primo p y se supone que H admite un único p-Sylow S. Demostrar que S es normal en G.

Indicación ▼ [002197]

Ejercicio 6196

Sean G un grupo y H un subgrupo normal de G. Se da un número primo p y un p-Sylow P de G. Demostrar que $H \cap P$ es un p-Sylow de H y que HP/H es un p-Sylow de G/H.

Solución ▼ [002198]

Ejercicio 6197

Demostrar que un grupo de orden 200 no es simple.

Solución ▼ [002199]

Ejercicio 6198

Para p un número primo, determinar el número de p-subgrupos de Sylow del grupo simétrico S_p.

Solución ▼ [002200]

Ejercicio 6199

(a) Dar el conjunto $\mathscr{D}$ de los órdenes posibles de los elementos del grupo alterno A_5 y para cada $d \in \mathscr{D}$, indicar el número de elementos de A_5 de orden d.
(b) Demostrar que, para $d = 2$ y $d = 3$, los elementos de orden d son conjugados, y que los subgrupos de orden 5 son conjugados.
(c) Deducir una demostración de la simplicidad de A_5.

Indicación ▼ [002201]

Ejercicio 6200

Determinar los subgrupos de Sylow del grupo alterno A_5.

Indicación ▼ Solución ▼ [002202]

Ejercicio 6201

Sea G un grupo simple de orden 60.

(a) Demostrar que G admite 6 5-Sylow, y que la acción de la conjugación sobre sus 5-Sylow define un morfismo inyectivo $\alpha : G \to S_6$, una vez una numeración de los 5-Sylow de G escogida. Demostrar que la imagen $\alpha(G) = H$ está contenido en A_6.

(b) Se considera la acción de A_6 por traslación a la izquierda en el conjunto $A_6/.H$ de clases a la izquierda. Demostrar que define un isomorfismo $\varphi : A_6 \to A_6$, una vez escogida una numeración de los elementos de $A_6/.H$.

(c) Demostrar que $\varphi(H)$ es el fijador de clase del elemento neutro H, y concluir que $G \simeq A_5$.

Solución ▼ [002203]

Ejercicio 6202

Sean $p < q$ dos números primos distintos y G un grupo de orden pq. Demostrar que G admite un único q-Sylow Q que es normal y que $G = QP$, donde P es un p-Sylow de G. Demostrar que G es isomorfo al producto semidirecto de un grupo cíclico de orden q por un grupo cíclico de orden p. Demostrar que si $q-1$ no es divisible por p, este producto semidirecto es de hecho un producto directo.

Indicación ▼ [002204]

Ejercicio 6203

Demostrar que un grupo de orden 35 es cíclico.

Indicación ▼ [002205]

Ejercicio 6204

Sean p y q dos números primos y G un grupo de orden p^2q. Se supone que p^2-1 no es divisible por q y que $q-1$ no es divisible por p. Demostrar que G es abeliano.

Solución ▼ [002206]

Ejercicio 6205

Sean p y q dos números primos. Demostrar que no existe ningún grupo simple de orden p^2q.

Indicación ▼ Solución ▼ [002207]

Ejercicio 6206

Sea G un grupo de orden 399.

(a) Demostrar que G admite un único 19-Sylow P que es normal en G.

(b) Sea Q un 7-Sylow. Demostrar que $N = PQ$ es un subgrupo de orden 133 de G y que este grupo es cíclico.

(c) Se supone que Q no es normal en G. Demostrar que G admite 57 subgrupos cíclicos de orden 133 distintos dos en dos. ¿Cuál es el número de elementos de orden 133 en G? Llegar a una contradicción. Deducir que Q es normal en G y que N es normal en G.

(d) Demostrar que $G = NR$, donde R es un 3-Sylow. Deducir que G es isomorfo al producto semidirecto de un grupo cíclico de orden 133 por un grupo cíclico de orden 3.

Solución ▼ [002208]

Ejercicio 6207

Sea G un grupo simple de orden 60.

(a) Demostrar que G no permite un subgrupo de orden 20.

(b) Demostrar que si G admite un subgrupo K de orden 12, entonces K admite 4 3-Sylow.

(c) Demostrar que si H y K son dos subgrupos distintos de orden 4 de G, entonces $H \cap K = \{1\}$.

(d) Demostrar que si H es un 2-Sylow, entonces $H \neq \mathrm{Nor}_G(H)$.

(e) Demostrar que G tiene 5 2-Sylow.

(f) Concluir considerando la acción de G por conjugación en los 5-Sylow.

Indicación ▼ [002209]

Ejercicio 6208 Sylow de grupos diédricos

Sea $\mathscr{P}_n$ un polígono regular en n lados en el plano euclidiano orientado. Se llama grupo diédrico D_n el grupo de isometrías de $\mathscr{P}_n$.

1. Recordar sin demostración la lista completa de los elementos de D_n.
2. Describir un subgrupo cíclico de orden n en D_n.
3. Se escribe $n = 2^k n'$, donde n' es impar. Considerando un polígono regular inscrito, describir una aplicación inyectiva de D_{2^k} en D_n. Hacer una figura en el caso $n = 12$.
4. Describir para cada divisor primo p de $2n$, un p-Sylow de D_n.

[007739]

Ejercicio 6209 Sylow de grupos diédricos

Sea $\mathscr{P}_n$ un polígono regular en n lados en el plano euclidiano orientado. Se llama grupo diédrico D_n el grupo de isometrías de $\mathscr{P}_n$.

1. Entre las traslaciones, rotaciones, las simetrías ortogonales, y simetrías deslizantes, describir las isometrías del plano que conservan el polígono regular $\mathscr{P}_n$.
2. Determinar, utilizando la acción natural de D_n en el conjunto de los picos de $\mathscr{P}_n$, el cardinal de D_n. Deducir la lista completa de los elementos de D_n.

3. Se supone n impar. Determinar el 2-Sylow de D_n y comprobar (sin referencia al curso) que son conjugados.
4. Se supone $n = 6$. Determinar un 2-Sylow de D_6. ¿Es el 2-Sylow normal ? Determinar dos subgrupos de orden 2 de D_6 no conjugados en D_6. Dar un 3-Sylow de D_6.

Solución ▼ [007740]

Ejercicio 6210 Ordenar grupos 33

Determinar módulo un isomorfismo todos los grupos de orden 33.

Solución ▼ [007741]

Ejercicio 6211

Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. [007763]

Ejercicio 6212 Teorema de Sylow para grupos abelianos finitos

Sea $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un grupo finito. Se denota α_i el orden del elemento a_i. Sea p un divisor primo de $\mid G \mid$ el orden de G.

1. Demostrar que la aplicación
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\alpha_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\alpha_n\mathbb{Z} &\to G \\ (\overline{h_1}, \overline{h_2}, \ldots, \overline{h_n}) &\mapsto a_1^{h_1} a_2^{h_2} \cdots a_n^{h_n} \end{aligned}$$
es una aplicación bien definida. Demostrar que es un homomorfismo de grupos y luego que es sobreyectivo.
2. Deducir que p divide $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.
3. Demostrar que hay en G un elemento de orden p.
4. Razonando por inducción sobre el orden del grupo y considerando el conjunto $G/ < x >$, donde x es un elemento de orden p en G, demostrar que G admite un p-Sylow.
5. Demostrar que un grupo abeliano es simple si y solo si es cíclico, de orden un número primo.

[007774]

Ejercicio 6213 Alrededor del curso

1. Demostrar que los morfismos de un grupo simple a un grupo arbitrario son constantes o inyectivas.
2. ¿Cuál es el número promedio de puntos fijos de una permutación de $\mathscr{S}_n$?
3. Demostrar que si G es un grupo finito, S un p-Sylow de G, y H un subgrupo de G, existe un conjugado de S que cumple H en un p-Sylow de H.

[007846]

Ejercicio 6214

Sea G un grupo finito. Sea p el factor primo más pequeño del orden de G. Sea H un subgrupo de G de índice $p > 1$.

1. Demostrar que las órbitas de acción de H sobre G/H por traslación a la izquierda se reducen a puntos.

2. Demostrar que H es normal.

[007847]

Ejercicio 6215

1. Explicitar un 7-Sylow del grupo simétrico $\mathscr{S}_9$
2. Determinar el número de elementos de orden 7 en $\mathscr{S}_9$.
3. Determinar el número de 7-Sylows.
4. Verificar las congruencias dadas por el teorema de Sylow sobre el número de 7-Sylows.

[007848]

Ejercicio 6216

Se fija una acción de un grupo G en un conjunto finito E. Se supone que el orden de G es 15, que el cardinal de E es 17 y que E no tiene un punto fijo para todos los elementos del grupo G. Determinar el número de órbitas y la cardinalidad de cada una de ellas. [007849]

Ejercicio 6217

1. Sea G un p-grupo actuando en un conjunto finito E. Demostrar que la cardinalidad del conjunto de puntos fijos de la acción es congruente, módulo p, al cardinal de E.
2. Considerando una acción de G en sí mismo, demostrar que el teorema de Burnside : el centro de un p-grupo no reducido al elemento neutro no es reducido al elemento neutro.

[007850]

Ejercicio 6218 Grupo de orden p^3

Sea G un grupo no abeliano de orden p^3, donde p es un número primo.

1. Demostrar que el centro de G es de orden p e igual a su subgrupo derivado $Z(G) = D(G)$.
2. Deducir que el número de clases de conjugación es $p^2 + p - 1$. (Se puede estudiar la acción de G en sí mismo por conjugación : sus puntos fijos, la órbita de los elementos, el estabilizador de elementos y aplicar la fórmula de Burnside...)
3. Demostrar que $G/Z(G)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Demostrar que todo subgrupo de G de orden p^2 contiene el centro $Z(G)$ de G, y que por lo tanto G no es un producto semidirecto de su centro por su abelianizado.

[007851]

Ejercicio 6219

1. Contando el número de base de $\mathbb{F}_p^n$ determinar la cardinalidad de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.
2. Demostrar que el conjunto de matrices triangulares superiores estrictas es un p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

[007852]

Ejercicio 6220

1. Verificar que los p-Sylow de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ son monogénicos.
2. Sean A y B dos matrices de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ de orden p. Demostrar que A es conjugada a una potencia de B.

[007853]

Ejercicio 6221

Sea p un número primo y m un entero no múltiplo de p. Sea G un grupo de cardinal $|G| = p^d m$.

1. Demostrar que el número de p-Sylow de G divide m.
2. Demostrar que para todo $0 \leqslant i \leqslant d$, G tiene un subgrupo de orden p^i.

[007854]

Ejercicio 6222

Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. [007855]

Ejercicio 6223 Grupos de matrices en $\mathbb{F}_2$

1. Describir un 2-Sylow de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.
2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que el polinomio minimal de A es irreducible de grado 3. Deducir que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) \cap \mathbb{F}_2[A]$ es un 7-Sylow de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.
3. Determinar un 3-Sylow de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ usando la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[007856]

Ejercicio 6224 Pequeñas preguntas

1. Sea p un número primo. Determinar módulo un isomorfismo, todos los grupos de orden p.
2. Sea p un número primo. Determinar módulo un isomorfismo, todos los grupos de orden p^2.
3. Dar ejemplos de grupos de orden 6 no abelianos.
4. Determinar el orden de los grupos diédricos D_n.
5. Determinar el orden de los grupos alternos $\mathscr{A}_n$.

[007861]

Ejercicio 6225 Estudio de $\mathscr{S}_3$

Dar las estructuras de ciclos posibles en $\mathscr{S}_3$, el número de elementos de $\mathscr{S}_3$ teniendo esta estructura, y su signo. Describa los subgrupos de $\mathscr{S}_3$, y los que son normales en $\mathscr{S}_3$.
Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathscr{S}_3$. [007862]

Ejercicio 6226 Grupos de orden 6

Sea G un grupo de orden 6.

1. Demostrar que G admite un elemento τ de orden 2 y un elemento σ de orden 3.
2. ¿Cuáles son los posibles valores de $\tau\sigma\tau$?
3. Determinar, en cada uno de los casos anteriores, la estructura de G módulo isomorfismo.

[007863]

Ejercicio 6227 Estudio de $\mathscr{S}_4$

Dar las estructuras de ciclos posibles en $\mathscr{S}_4$, el número de elementos de $\mathscr{S}_4$ teniendo esta estructura, y su signo. Determinar los subgrupos normales de $\mathscr{S}_4$. Deducir que $\mathscr{A}_4$ no es un grupo simple, i.e. que no tiene subgrupos normales distintos de $\{e\}$ y $\mathscr{A}_4$. Determinar los subgrupos de Sylow de $\mathscr{S}_4$. [007864]

Ejercicio 6228

Sea p un número primo impar, se propone describir los grupos de orden p^2 módulo isomorfismo.

1. Sea G un grupo de cardinal p^2, demostrar que, o bien G es cíclico o bien todos los elementos distintos del elemento neutro son de orden p.
2. Sea G un grupo no cíclico de orden p^2, sea K un subgrupo de orden p, demostrar que K es normal en G y que existe H subgrupo de orden p tal que $K \cap H = \{e\}$. Deducir que G es isomorfo a un producto semi-directo de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que todo grupo de cardinal p^2 es isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

[007865]

Ejercicio 6229 Grupos de orden pq

Sea G un grupo de orden pq, donde p y q son dos números primos distintos. Se supone que $p < q$.

1. Demostrar que solo existe un q-Sylow Q y que es normal.
2. Demostrar que G es un producto semidirecto $Q \rtimes P$, donde P es un p-Sylow de G.
3. Si p no divide $q-1$, determinar la estructura de G.
4. Si $p = 2$, determinar el morfismo estructural $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Determinar entonces la estructura de G.
5. Si p divide $q-1$, demostrar que solo existe un producto semidirecto no abeliano, módulo isomorfismo.

[007866]

Ejercicio 6230 Grupo no abeliano de orden 8

Sea G un grupo de orden 8.

1. Enumerar cuatro grupos de orden 8, dos a dos no isomorfos, e incluso 5 si es posible.
2. Se supone que todos los elementos de G son de orden 2. Demostrar que G es abeliano. Sea a y b dos elementos no neutros distintos de G. Demostrar que $\{e,a,b,ab\}$ es un subgrupo de orden 4 de G. Determinar un isomorfismo de G, con un grupo conocido.
3. Se supone que G admite un elemento a de orden 4. Sea b un elemento fuera del subgrupo generado por a. Demostrar que $< a >$ es normal y que b^2 pertenece a $< a >$.
   (a) ¿Cuál es el orden de b si $b^2 = a$ o si $b^2 = a^3$? Concluir en este caso.

(b) Si $b^2 = e$, demostrar que G es un producto semidirecto y deducir un isomorfismo con un grupo conocido.

(c) Si todos los elementos fuera de $< a >$ tiene un cuadrado igual a a^2, establecer la lista de elementos y la tabla de multiplicar de G usando solo a y b.

[007867]

Ejercicio 6231 Grupo no abeliano de orden 8

Sea G un grupo no abeliano de orden 8.

1. Demostrar que G contiene un elemento de orden 4. Sea H el subgrupo que genera.
2. Demostrar que si $G - H$ contiene un elemento de orden 2, G es un producto semidirecto. Después de comprobar que $Aut(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, demostrar que existe una única estructura de tal producto semi-directo no abeliano.
3. Demostrar que si $G \setminus H$ no tiene elemento de orden 2, se encuentra la tabla de H_8 escogiendo i el elemento de orden 4 que engendra H y j un elemento de orden 4 en $G \setminus H$. *Se puede demostrar que i^2 es el único elemento de orden* 2 *y es central. Se denota* -1.

[007868]

Ejercicio 6232 Ordenar grupos 10

Sea G un grupo de orden 10.

1. Demostrar que G es un producto semidirecto.
2. Determinar los automorfismos de orden 2 de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. Deducir las dos posibilidades para las clases de isomorfismos de G.

[007869]

Ejercicio 6233 Grupos de orden 33

Determinar módulo un isomorfismo todos los grupos de orden 33. (Se puede determinar el número de subgrupos de orden 11 y el número de subgrupo de orden 3.) [007870]

---

258 307.00 Otro

259 310.00 Isometría euclidiana

Ejercicio 6234

Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión n.

1. Demostrar que $A \in \mathrm{GL}(E)$ pertenece a $\mathcal{O}(n)$ si y solo si ${}^T AA = I$.
2. Demostrar que si $A \in \mathcal{O}(n)$, entonces $\det A = \pm 1$.
3. Demostrar que $A \in U(n)$ si y solo si ${}^T A\bar{A} = I$.

[006385]

Ejercicio 6235

Sea L un espacio hermitiano. ¿Es cierto que $A \in Iso(L)$ implica $Ax = Ux + b$, con $U \in U(n)$. [006386]

Ejercicio 6236

Sea E es un espacio euclidiano de dimensión n. Demostrar que $Iso(E) \not\simeq \mathscr{O}(n) \times T(E)$. [006387]

Ejercicio 6237

Determinar la naturaleza de las siguientes aplicaciones : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ y $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Bx$, donde $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. [006388]

Ejercicio 6238

1. Denotemos $l \subset \mathbb{R}^2$ una recta afín y τ_l la reflexión con respecto a l. Demostrar que si $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ verifica $f_{|l} \equiv id$, entonces ya sea $f = id$, o ya sea $f = \tau_l$.
2. Sean l y m dos rectas afines en $\mathbb{R}^2$.
   (a) Demostrar que existe $\alpha \in Iso(\mathbb{R}^2)$ tales que $\alpha\tau_l\alpha^{-1} = \tau_m$.
   (b) Demostrar que $\tau_l.\tau_m$ es una traslación si y solo si l y m son paralelas.

[006389]

Ejercicio 6239

Denotemos $R(a,\alpha)$ la rotación de ángulo α alrededor del punto $a \in \mathbb{R}^2$ y t_b la traslación $t_b : x \mapsto x + b$. Demostrar que

1. $\exists\ \beta \in Iso(\mathbb{R}^2):\ \beta R(a,\alpha)\beta^{-1} \in SO(2)$.
2. $R(a,\alpha) = \tau_l \cdot \tau_m$, donde m es una recta cualquiera que pasa por a y l es una recta que pasa por a fija.
3. t_b y t_c son conjugados si y solo si $||b|| = ||c||$.

[006390]

Ejercicio 6240

Una aplicación del tipo $G(l,a) = \tau_l \cdot t_a$ se llama *reflexión deslizante* si el vector a es paralela a la recta $l \subset \mathbb{R}^2$.

1. Si $G = \tau_l \cdot t_a$ es una reflexión deslizante entonces demostrar que $\tau_l.t_a = t_a.\tau_l$ y $G^2 = t_{2a}$.
2. Demostrar que $G = \tau_l t_a$ es una reflexión si l y a son perpendiculares y es una reflexión deslizada si l y a no son perpendiculares.
3. Observando el conjunto de puntos fijos $fijo(f) := \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) = x\}$ de una isometría $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ demostrar que :
   (a) si $fijo(f) \neq \varnothing$, entonces $f = R(a,\alpha)$ o $f = \tau_l$
   (b) si $fijo(f) = \varnothing$, entonces $f = t_a$ o $f = G(l,a)$ (*Indicación : utilizar la pregunta 2 y el ejercicio 6239, pregunta 2*).

[006391]

Ejercicio 6241

Denotemos $l \subset \mathbb{R}^2$ una recta afín de $\mathbb{R}^2$.

1. Demostrar que el conjunto I_l de los $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ tales que $g(l) = l$ es un subgrupo de $Iso(\mathbb{R})$.
2. Determinar las traslaciones que pertenecen a I_l.
3. Demostrar que si $g \in I_l$ tiene un punto fijo entonces g tiene un punto fijo en l.
4. Sea $g \in I_l$, demostrar que existe una traslación t de I_l tal que $g.t$ tiene un punto fijo.
5. Describir I_l.

[006392]

Ejercicio 6242

Sea E un espacio euclidiano de dimensión n y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ un subconjunto de E.

1. Demostrar que $Aff(X) := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i | x_i \in X, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$ es el subespacio afín más pequeño de E conteniendo X.
2. Sea $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ un subconjunto de E, demostrar que S es un sistema de referencia afín de E si y solo si S no está contenido en ningún hiperplano.

[006393]

Ejercicio 6243

Estudiar la composición de dos rotaciones, luego la composición de dos reflexiones deslizantes y finalmente la composición de una rotación y una reflexión deslizante. [006394]

Ejercicio 6244

Sea f una aplicación que preserva las proporciones de longitud : $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^2$, se tiene : $\frac{d(f(x), f(y))}{d(f(z), f(t))} = \frac{d(x,y)}{d(z,t)}$. (Por definición una aplicación de este tipo es una *similitud*)

1. Demostrar que $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}$ tal que $d(f(x), f(y)) = kd(x,y)$.
2. Demostrar que una similitud se escribe como composición de una homotecia y una isometría.

[006395]

Ejercicio 6245

Sea ABC un triángulo isósceles en A no equilátero, el objetivo de este ejercicio es estudiar el conjunto de isometrías de $\mathscr{P}$ que preservan globalmente ABC.

1. Demostrar que este conjunto es un grupo.
2. Demostrar que si f preserva ABC, entonces f fija el baricentro G de ABC.
3. Estudiando las distancias GA, GB, GC demostrar que $f(A) = A$
4. Deducir (utilizando la clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^2$) el grupo de simetría de ABC.

[006396]

Ejercicio 6246 Estudio de subgrupos conmutativos de isometrías

Sean f, g dos isometrías del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$.

1. Demostrar que si g y f conmutan entonces $g = f \circ g \circ f^{-1}$ y f conserva (globalmente) el conjunto de puntos fijos de g.
2. Describir los casos en los que f y g conmutan ($f \circ g = g \circ f$).
3. Deducir una descripción de los subgrupos conmutativos de isometrías.

[006397]

---

260 311.00 Geometría diferencial elemental de $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 6247

1. Sean $\xi(t)$ y $\eta(t)$ dos curvas paramétricas de $\mathbb{R}^3$ de clase C^1, demostrar que $\frac{d}{dt}[\xi,\eta] = [\frac{d\xi}{dt},\eta] + [\xi,\frac{d\eta}{dt}]$, donde $[,]$ denota el producto vectorial.
2. Demostrar que $\kappa = -\frac{\langle r',[r'',r''']\rangle}{k^2}$, donde $s \mapsto r(s)$ una curva de clase C^2, parametrizada por su longitud, κ y k son respectivamente su torsión y su curvatura.

[006398]

Ejercicio 6248

Para la curva $r = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, $a > 0$, $b > 0$ encontrar la curvatura, torsión y marco de Frénet. [006399]

Ejercicio 6249

1. Demostrar que una curva $s \mapsto r(s)$ es plano si y solo si $\langle r',[r'',r''']\rangle = 0$.
2. Sea $s \mapsto r(s)$ una curva de clase C^2, parametrizada por su longitud. Se considera la nueva curva $s \mapsto n(s)$, donde n es el vector unitario normal. Denotemos s^* el parámetro natural de esta curva. Demostrar que $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2+\kappa^2}$.

[006400]

Ejercicio 6250

1. Demostrar que si una curva $s \mapsto r(s)$ se traza en una esfera de radio R y si $\kappa(s) \neq 0$, $k(s) \neq 0$ $(\forall s)$, entonces $R^2 = \langle r,r\rangle = \frac{1}{k^2}(1+\frac{(k')^2}{(\kappa k)^2})$.
2. Sea $s \mapsto r(s)$ una curva de curvatura constante que se traza en la esfera S^2. Demostrar que la imagen r es un arco de círculo. ¿Depende la propiedad de tener curvatura constante de la parametrización de la curva ?

[006401]

Ejercicio 6251

1. Demostrar que 3 puntos x, y y z son colineales en $\mathbb{R}^n$, con y entre x y z (recordemos que esto significa que $y = x + t(z-x)$ $t \in [0,1]$) si y solo si

$$||x-y|| + ||y-z|| = ||x-z||.$$

2. Demostrar que si $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ es una curva, entonces $|\gamma([a,b])| \geqslant ||\gamma(a) - \gamma(b)||$ y que la igualdad tiene lugar si y solo si γ es una geodésica (donde $|\cdot|$ designa longitud de una curva).

[006402]

261 312.00 Geometría y trigonometría esférica

Ejercicio 6252

Sea $\alpha : [a,b] \to S^n$ una curva con $b - a < \pi$. Demostrar la equivalencia de las siguientes condiciones :

1. α es una curva geodésica.
2. Hay dos vectores ortogonales $A, B \in S^n$ tales que $\alpha(t) = A\cos(t-a) + B\,\mathrm{sen}(t-a)$.
3. La curva α verifica la ecuación $\alpha'' + \alpha = 0$.

[006403]

Ejercicio 6253

Sea S^n es la esfera unidad en el espacio lineal E de dimensión $n+1$.

1. Demostrar que la distancia esférica induce en S^n una topología equivalente a la inducida del espacio ambiente E.+
2. Demostrar que la intersección de un subespacio lineal L de E de dimensión k, con S^n es una esfera de dimensión $k-1$ (si $k = 2$ esta intersección es un círculo llamado gran círculo de S^n).

[006404]

Ejercicio 6254

Se denota $[X,Y]$ el producto vectorial de dos vectores x y Y en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que tres vectores X, Y, y Z en $\mathbb{R}^3$ son libres si y solo si los vectores $[X,Y]$, $[Y,Z]$ y $[Z,X]$ son libres. *Indicación :* Demostrar primero la siguiente identidad :

$$[[X,Y],Z] = <X,Z> Y - <Y,Z> X$$

[006405]

Ejercicio 6255

Sea $T = \triangle ABC \subset S^2$ un triángulo esférico de ángulos interiores $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$

1. Demostrar que existe un triángulo $T' = \triangle A'B'C'$ llamado polar tal que
$$a' = \pi - \alpha,\ b' = \pi - \beta,\ c' = \pi - \gamma,$$
donde como de costumbre notamos a', b', c' las longitudes de los lados opuestos a los vértices A', B', C'. *Indicación.* Expresar : $C' = \frac{[A,B]}{|||[A,B]|||}, A' = \frac{[B,C]}{|||[B,C]|||}, B' = \frac{[C,A]}{|||[C,A]|||}$
2. Demostrar que $(T')' = \mathrm{sign}(\langle A, [B,C]\rangle) \cdot T$. Deducir que
$$\angle A' = \pi - a,\ \angle B' = \pi - b,\ \angle C' = \pi - c,$$

Ejercicio 6256

Utilizando el resultado y las notaciones del ejercicio 6255 demostrar que :

1. $\cos\gamma = \cos c \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$
2. $\cos\beta = \cos b \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\gamma$
3. $\cos\alpha = \cos a \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma$

[006407]

Ejercicio 6257

El propósito de este ejercicio es demostrar que para cada triplete $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in\,]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ existe un triángulo esférico con ángulos interiores iguales a $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

1. Demostrar que $\forall\, \alpha \in\,]0, \frac{\pi}{2}[\ \forall\, d \in\,]0, \alpha]$ existe un triángulo esférico $\triangle ABC$ tal que $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = \alpha$ y $a = |BC| = d$ (en las notaciones anteriores).
2. Utilizando 1 y las fórmulas del ejercicio 6256 demostrar el resultado.

[006408]

262 313.00 Grupo ortogonal y cuaterniones

Ejercicio 6258

El objetivo de este ejercicio es introducir una topología en el grupo lineal $\mathrm{GL}(E)$. Sea $A \in \mathrm{GL}(E)$, entonces se introduce la norma :

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \qquad (1).$$

Demostrar que las topologías siguientes sobre $\mathrm{GL}(E)$ son equivalentes :

1. $A_n \to A$ si la sucesión a_{ij}^n de coeficientes de A_n converge a a_{ij}.
2. $A_n \to A$ si $||A_n - A|| \to 0$.
3. $A_n \to A$ si la aplicación $A_n : x \to A_n(x)$ converge a la aplicación $A(x)$ uniformemente en cada compacto $K \subset E$.

[006409]

Ejercicio 6259

1. Usando la norma (1) demostrar que $O(n)$ es compacto en $\mathrm{GL}(E)$.
2. Usando el resultado del curso de que una matriz ortogonal es una matriz de bloques demostrar que $O(n)$ contiene dos componentes conexas : $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = +1\}$ y $O^-(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$. ¿$O^-(n)$ es un subgrupo de $O(n)$?

[006410]

Ejercicio 6260

Recordar que una aplicación $g \in SO(3)$ se dice *retorno* si g es un ángulo de rotación π alrededor de una recta fija $L \subset \mathbb{R}^3$ $(g|_L \equiv \mathrm{id})$. Sea $g \in SO(3)$ un retorno del eje a la derecha $L \in \mathbb{R}^3$ $(0 \in L)$. Demostrar que $g_1 \in SO(3)$ es un retorno si y solo si existe $f \in SO(3)$ tal que $g_1 = fgf^{-1}$ y el eje de g_1 es $f(L)$. [006411]

Ejercicio 6261

1. Sea $S = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}\}$ un subconjunto $\mathbb{H}$ de cuaterniones. Demostrar que S es invariante por la aplicación :
$$\rho_j : \to jqj^{-1},\ q \in \mathbb{H}.$$
2. Identificando S, con $\mathbb{R}^3$ describir $\rho_j : S \to S$.
3. Demostrar que la aplicación $\rho_k : q \to kqk^{-1}$ deja S invariante (i.e. $\rho_k(S) = S$). Describir ρ_k.

[006412]

Ejercicio 6262

1. Demostrar que S^3 es un subgrupo de $\mathbb{H}^*$ considerado como un grupo multiplicativo. ¿Es normal ?
2. Demostrar que si $\exists\ q \in S^3 :\ \forall q_1 \in \mathbb{R}^3 = \{y \cdot i + u \cdot j + v \cdot k \mid y, v, u \in \mathbb{R}\} : qq_1q^{-1} = q_1$, entonces $q = \pm \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.

[006413]

Ejercicio 6263

Sea $q, r \in (\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4)$, entonces demostrar que $\langle q, r\rangle = \frac{1}{2}(\overline{q}r + \overline{r}q)$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto escalar euclidiano de $\mathbb{R}^4$, y se denota $\overline{q} = \overline{z} - wj$ si $q = z + wj$. [006414]

Ejercicio 6264

1. Se considera la aplicación $\xi_s(q) = -sqs^{-1}$ $(s \in (\mathbb{R}^3)^*,\ q \in \mathbb{R}^3)$. Demostrar que ξ_s es la reflexión en $\mathbb{R}^3$, con respecto al plano $s^{\perp}$.
2. Demostrar la sobreyectividad de la aplicación $\varphi : S^3 \to SO(3)$, donde $\varphi(s) = \rho_s$, y $\rho_s(q) = sqs^{-1}$ $(s \in S^3,\ q \in \mathbb{R}^3)$.

[006415]

Ejercicio 6265

Si $q \in S^3$ tal que $q = \cos\theta + I \operatorname{sen}\theta,\ I \in S^2$, entonces demostrar que $\rho_q \in SO(3)$ es la rotación del ángulo 2θ alrededor del eje OI. [006416]

Ejercicio 6266

Demostrar sin cálculo que la siguiente matriz A, con coeficientes complejos es invertible

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6267

Determinar la órbita y el estabilizador de un vector de norma 1 bajo la acción del grupo ortogonal del producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que el grupo $O(n-1)$ es isomorfo a un subgrupo O_{n-1} de $O(n)$. ¿Es este subgrupo normal ? [007802]

Ejercicio 6268 Descomposición polar de un endomorfismo

Sea H un espacio hermitiano y a un endomorfismo invertible de H. Demostrar que a se escribe de manera única en la forma $a = hu$, donde h es un endomorfismo autoadjunto positivo y u unitario. Determinar h y u por el endomorfismo a cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. [007803]

Ejercicio 6269 Involuciones

Sea f una forma bilineal simétrica no degenerada en un espacio vectorial E.

1. Sea $u \in \mathrm{GL}(E)$ una involución. Demostrar que u es ortogonal si y solo si $E_+(u) = E_+ := \ker(u - \mathrm{Id})$ y $E_- := \ker(u + \mathrm{Id})$ son ortogonales. Demostrar entonces que $(E_+)^\perp = E_-$ y que E_+ no es isotrópico.
2. Sea $F \subset E$ un subespacio no isotrópico. Demostrar que existe una única involución ortogonal tal que $E_+(u) = F$.
3. Demostrar que $O(f) \equiv SO(f) \ltimes \{-1, 1\}$.

[007804]

Ejercicio 6270 Dilataciones

Sea f una forma sesquilineal no degenerada. Determinar las dilataciones ortogonales (resp. unitarias, resp. simplécticas.) [007805]

Ejercicio 6271

Sea k un cuerpo con una característica diferente de 2. Sea E un k-espacio vectorial de dimensión $n \geqslant 2$ y ϕ una forma sesquilineal no degenerada en E simétrica, hermitiana o alternada. Sea τ una transvección de E dada usando una forma lineal no nula f sobre E y un vector a de $\ker f$ por $\forall x \in E, \tau(x) = x + f(x)a$.

1. Se supone ahora que τ es una isometría relativa a ϕ. Demostrar que a es isotrópica.
2. Demostrar que f y $\phi(\cdot, a)$ son proporcionales. Se denota $\lambda \in k^\star$ tal que $f = \lambda\phi(\cdot, a)$.
3. Demostrar que si $\sigma \neq \mathrm{Id}$ y ϕ es hermitiana o simétrica, entonces $\lambda + \sigma(\lambda) = 0$.
4. Demostrar que no existen transvecciones ortogonales, que existen transvecciones unitarias si y solo si el índice es mayor que 1 y que siempre existen transvecciones simplécticas.

[007806]

Ejercicio 6272 Sobre las similitudes

Sea f una forma sesquilineal no degenerada simétrica (resp. hermitiana, alternada) en un K-espacio vectorial E. Se denota $GO(f)$ (resp. $GU(f)$, $GSp(f)$) el grupo de similitudes de f. Se denota μ la aplicación que a una similitud asocia su multiplicador en $K^\star$.

1. Determinar las similitudes de la forma simpléctica estándar en K^2.

2. Demostrar que u es una similitud si y solo si conserva la ortogonalidad.
3. Se supone f simétrico. Demostrar que $Im(\mu) = \{\lambda \in K^\star / q \equiv \lambda q\} \supset (K^\star)^2$.

[007807]

Ejercicio 6273 Estudio del grupo ortogonal $O(1,1)$

1. Demostrar que en un plano de Artin existen exactamente dos rectas isotrópicas I y J.
2. Sea $u \in O(1,1)$. Demostrar que u envía $I \cup J$ en sí mismo.
3. Sea $u \in O(1,1)$. Demostrar que u es directa si y solo si u deja fija cada recta isotrópica.
4. Deducir la forma de los elementos de $O(1,1)$.

[007808]

Ejercicio 6274

Se considera la forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x^t\, y' - y^t\, x'$$

donde x, y, x', y' están en $\mathbb{R}^n$.

1. Descomponiendo por bloque $n \times n$ una métrica cualquiera g de $M_{2n}(\mathbb{R})$ bajo la forma $\left(\begin{smallmatrix} AB \\ CD \end{smallmatrix}\right)$, caracterizar las matrices simplécticas en términos de sistemas de ecuaciones para A, B, C, D.
2. Determinar todas las matrices simplécticas verificando además $B = C = 0$.
3. Determinar todas las matrices simplécticas que satisfacen $A = D = I_n$ y $C = 0$.
4. Determinar todas las matrices simplécticas que satisfacen $C = 0$.
5. Determinar todas las matrices Q de $M_n(\mathbb{R})$ tales que el espacio $W_Q := \left\{\left(\begin{smallmatrix} Qy \\ y \end{smallmatrix}\right) / y \in \mathbb{R}^n\right\}$ sea totalmente isotrópico. ¿Cuál es el vínculo con las preguntas anteriores?

[007809]

Ejercicio 6275 El grupo $SO(2)$

1. Recordar un isomorfismo de grupos entre $SO(2)$ y S^1.
2. ¿La aplicación $SO(2) \to SO(2), A \mapsto A^2$ es un morfismo de grupo? Determinar su imagen y su núcleo.

[007893]

Ejercicio 6276 El espacio V de matrices anti-hermitianas de traza nula

1. Determinar la naturaleza del espacio vectorial V de matrices anti-hermitianas (i. E. $M^\star := -M$) de $M(2,\mathbb{C})$ de traza nula.
2. Escribir la forma general de una matriz de V utilizando tres números reales. Deducir una base de V.
3. Demostrar que $\ll P, P' \gg := -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(PP')$ define un producto escalar en V.

[007894]

Ejercicio 6277 El grupo $SU(2)$

1. Sea $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(2)$. Demostrar que $c = -\overline{b}$, $d = \overline{a}$ y $\overline{a}a + \overline{b}b = 1$ y escribir la forma general de una matriz P de $SU(2)$ utilizando dos números complejos, luego de cuatro números reales.
2. Deducir un homeomorfismo de $SU(2)$ en la esfera unitaria S^3 de $\mathbb{C}^2$. (Se provee aquí S^3 de la topología inducida por la de $\mathbb{C}^2$ y $SU(2)$ de la topología inducida por la topología de una norma en el espacio vectorial $M(2,\mathbb{C})$.)
3. Sea $-1 < c < 1$. Describir topológicamente el subespacio de $SU(2)$ de matrices de traza c, llamado "latitud c".
4. Demostrar que las latitudes son clases de conjugación en $SU(2)$. (Se puede notar que los elementos de $SU(2)$ están asociados a endomorfismos normales (i.e. que conmutan con su adjunta)).
5. ¿Cuáles son las otras clases de conjugación ?
6. Describir topológicamente el subgrupo D de matrices diagonales de $SU(2)$.

[007895]

Ejercicio 6278 Los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$

1. Demostrar que la clase de conjugación C de $SU(2)$ de matrices de traza nula (i.e. la latitud 0) es la esfera unitaria del espacio euclidiano $(V, \ll, \gg)$ de matrices anti-hermitianas de traza nula.
2. Demostrar que $SU(2)$ actúa por conjugación en el espacio V.
3. Demostrar que esta acción es transitiva.
4. Deducir un morfismo de grupos ϕ de $SU(2)$ en el grupo ortogonal de $(V, \ll, \gg)$.
5. Determinar el núcleo de ϕ.
6. Utilizando la conexión de $SU(2)$ demostrar que la imagen de ϕ está incluido en $SO(V)$.
7. Demostrar que la imagen por ϕ del subgrupo D de matrices diagonales de $SU(2)$ es el subgrupo de rotaciones de V que fijan $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.
8. Deducir la imagen de ϕ.

[007896]

Ejercicio 6279 Representación matricial de números complejos y de cuaterniones

1. Determinar en $M(2,\mathbb{R})$ una matriz I tal que $I^2 = -\mathrm{Id}$.
2. Deducir un morfismo no nulo de anillos de $\mathbb{C}$ en $M(2,\mathbb{R})$.
3. Sea
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$
Establecer la tabla de multiplicar de $G := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$. ¿Es un grupo ? ¿Es cíclico ?
4. ¿La sub-álgebra H de $M(2,\mathbb{C})$ generado por G es conmutativa ?, ¿un cuerpo izquierdo ?

[007901]

263 314.00 Geometría proyectiva

Ejercicio 6280

Encontrar la siguiente fórmula explícita para la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to S^n$:

$$\pi(x) = \Big(\frac{2x_1}{1+||x||^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+||x||^2}, \frac{||x||^2-1}{||x||^2+1}\Big),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Indicación :* Escribir $\pi(x) - e_{n+1} = t(x - e_{n+1})$, $t \in \mathbb{R}$. [006417]

Ejercicio 6281

Sea L un espacio vectorial de dimensión $n+1$.

1. Demostrar que si M_i $(i \in I)$ son subespacios vectoriales de L, entonces $P(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} P(M_i)$.
2. Sean M_i $(i \in \{1, \dots, k\}$ subespacios lineales de L, demostrar que
$$\langle P(M_1), \dots, P(M_k)\rangle = P(M_1 + \dots + M_k).$$
3. Sean $p : L^* \to P(L) = L^*/\sim$ la aplicación de la proyectivización (que se asocia a cada $x \in L^*$ su clase $[x] \in P(L)$) y S un subconjunto del espacio $P(L)$. Entonces demostrar que $< S >= P(D)$, donde D es el subespacio de L generado por $p^{-1}(S)$.

[006418]

Ejercicio 6282

1. Demostrar que el plano proyectivo P_1 y la recta P_2 en $\mathbb{P}^3$ ya sea se intersecan en un punto o ya sea $P_2 \subset P_1$.
2. Sean $P_i = P(M_i)$ dos subespacios proyectivos $(i = 1, 2)$. Demostrar que si $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, entonces la suma $M_1 + M_2$ es directa.

[006419]

Ejercicio 6283

Demostrar que la fibración de Hopf $FH : S^3 \to S^2$ ($FH^{-1}(x)$ es un gran círculo de S^3 $(\forall x \in S^2)$) se escribe así :

$$FH(z, z') = (2z'\bar{z}, |z'|^2 - |z|^2).$$

[006420]

Ejercicio 6284

1. Demostrar que todo subespacio proyectivo de dimensión $k-1$ en $\mathbb{P}^n$ puede ser recubierto por al menos k aplicaciones afines.
2. Encontrar el número de elementos de un espacio proyectivo de dimensión n en un cuerpo con q elementos.

[006421]

Ejercicio 6285

1. Demostrar que el grupo proyectivo $P\mathrm{GL}(L)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de subespacios proyectivos de dimensión k fija.
2. Demostrar que $P\mathrm{GL}(L)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de pares ordenados $\{(P_1,P_2)\mid \dim P_1 = k_1,\ \dim P_2 = k_2, \dim(P_1 \cap P_2) = k_3\}$, donde k_1,k_2,k_3 son fijos.
3. Demostrar que $P\mathrm{GL}(L)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de bandas proyectivas que se escribe $\mathscr{D} = \{(P_1,\ldots,P_k) \mid P_1 \subset \cdots \subset P_k\}$, donde la longitud k es fija y P_i es un subespacio proyectivo de $P(L)$ de dimensión i fija $(i = 1,\ldots,k)$.

[006422]

Ejercicio 6286

---

1. Demostrar que toda homografía $\gamma \in P\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ tiene al menos un punto fijo.
2. Demostrar que toda homografía $\gamma : \mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$ siempre tiene al menos un punto fijo.
3. Sea $\gamma \in P\mathrm{GL}(L)$ tal que $\mathrm{card}(\mathrm{fijo}(\gamma)) < \infty$ y $\dim P(L) = n$, entonces demostrar que $\mathrm{card}(\mathrm{fijo}(\gamma)) \leqslant n+1$, donde $\mathrm{fijo}(\gamma) = \{x \mid \gamma(x) = x\}$.

[006423]

Ejercicio 6287

Este ejercicio no se relaciona directamente con la geometría proyectiva, pero se usará más adelante.

1. Demostrar que toda reflexión con respecto a un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación conforme en $\mathbb{R}^n$. Deducir que cada isometría euclidiana y cada isometría esférica son conformes en $\mathbb{R}^n$ y en S^n respectivamente.
2. Demostrar que una aplicación lineal $A : E \mapsto E$ conserva ángulos no orientados entre vectores no nulos si y solo si A es una matriz conforme.
3. Demostrar que una aplicación $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ de un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ es conforme en D si y solo si conserva los ángulos en D.

[006424]

Ejercicio 6288

Demostrar que toda aplicación de Möbius $\gamma \in M(2)$ es compatible con $\overline{\mathbb{C}}$. [006425]

Ejercicio 6289

Recordar que un círculo generalizado es ya sea un círculo euclidiana $\Sigma(z_o,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, o ya sea una recta a la que se adjunta el punto $\{\infty\}$ (usando proyección estereográfica).
Se denota $M = \left\{\frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0\right\}$.

1. Demostrar que el grupo $P\mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ actúa tres veces transitivamente sobre $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Verificar que cada círculo generalizado en $\overline{\mathbb{C}}$ se escribe en la forma :
$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D = 0,\ B^2+C^2 > 4AD$$
3. Sea $C_1 \in \mathbb{C}$ un círculo generalizado, entonces demostrar que un subespacio $C_2 \subset \mathbb{C}$ es un círculo generalizado si y solo si existe $\gamma \in M$ tal que $\gamma(C_1) = C_2$.

4. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un círculo generalizado y $f \in M(2)$ tal que $f|_K \equiv \mathrm{id}_K$, entonces demostrar que ya sea $f \equiv \mathrm{id}$ o ya sea f es la reflexión con respecto a K.

[006426]

Ejercicio 6290

Demostrar que

$$M(2) = \left\{ \frac{a_2\bar{z}+b_2}{c_2\bar{z}+d_2};\ \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \;\middle|\; a_i,b_i,c_i,d_i \in \mathbb{C};\ a_id_i - b_ic_i \neq 0 \right\}$$

y deducir que $|M(2):M| = 2$, donde $M = M_+(2)$ es el grupo de las transformaciones de Möbius pares. [006427]

Ejercicio 6291

Sea τ_Σ la reflexión en relación con el círculo euclidiana $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}$, entonces demostrar que

$$|\tau_\Sigma(z) - \tau_\Sigma(w)| = r^2 \frac{|z-w|}{|z-z_0||w-z_0|}.$$

[006428]

Ejercicio 6292

1. Demostrar que cada aplicación $g \in M$ tiene ya sea un punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$, o ya sea dos puntos fijos. ¿Se cumple esta afirmación para los elementos de $M(2)$?
2. Denotemos fijo(g) el conjunto $\{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid g(x) = x\}$ de puntos fijos de g. Demostrar que si $\gamma = fgf^{-1}$, entonces fijo$(\gamma) = f(\text{fijo}(g))$.
3. Sean C_i $(i = 1,2)$ dos círculos generalizados. Demostrar que $\exists\ \gamma \in M :\ \tau_{C_1} = \gamma\tau_{C_2}\gamma^{-1}$, donde τ_{C_i} denota la inversión con respecto a C_i.

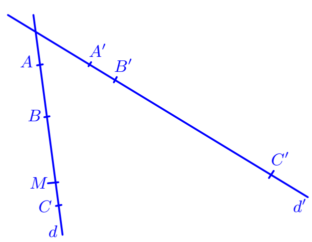
[006429]

Ejercicio 6293

Sean C_i $(i = 1,2)$ dos círculos generalizados. Demostrar que τ_{C_1} y τ_{C_2} conmutan si y solo si el círculo C_1 es ortogonal a C_2 (e.g. si C_i son dos circunferencias euclidianas, entonces son ortogonales si los ángulos entre dos radios en los puntos de intersección C_1 y C_2 son iguales a $\frac{\pi}{2}$). [006430]

Ejercicio 6294 Homografía

Sea d y d' dos rectas de un plano proyectivo. Sea h una homografía de d en d' tal que $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$. Construir $h(M)$.



[007733]

Ejercicio 6295 Preguntas del curso

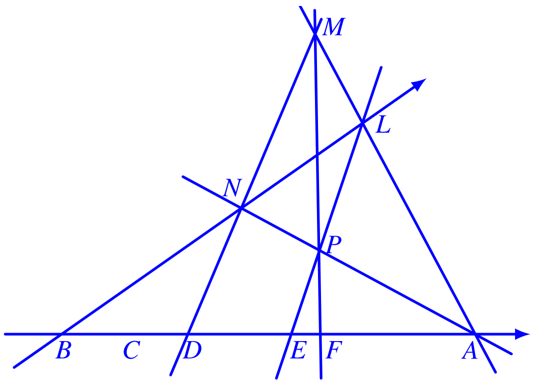
1. ¿El conjunto de permutaciones de perfil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ con la identidad es un subgrupo normal de $\mathscr{A}_6$?
2. Describir las diferentes posibilidades para la dimensión de la intersección de dos planos proyectivos de $\mathbb{P}^3$. Describir las diferentes posibilidades para la dimensión de la intersección de dos planos proyectivos de $\mathbb{P}^4$.
3. Dar un ejemplo de dos quíntuples de puntos dos a dos distintos de una recta proyectiva que no pueden ser la imagen uno del otro por una homografía.

Solución ▼ [007738]

Ejercicio 6296 Una homografía

Sea 9 puntos $A,B,\ldots,I$ del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $ABED$, $BCFE$, $DEHG$ y $EFIH$ son cuadrados. Dadas las imágenes $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $E'=h(E)$ y $D'=h(D)$ por una homografía de $P^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, construir con regla las imágenes de los otros puntos. [007742]

Ejercicio 6297



1. Dibujar la configuración correspondiente en el plano afín $P(V)-(AM)$.
2. Escoger coordenadas homogéneas tales que se tiene $A=(1:0:0)$, $B=(0:1:0)$, $L=(0:0:1)$ y $C=(1:1:0)$. Determinar las ecuaciones de las rectas proyectivas $(BL),(DM),(NA),(LE),(MP)$ y las coordenadas homogéneas de los puntos $N=(BL)\cap(DM), P=(NA)\cap(LE)$ y $F=(AB)\cap(MP)$ en términos las coordenadas de puntos homogéneos D,E y M.
3. Expresar el bicociente $[A,B,C,F]$ en términos de $x=[A,B,C,D]$ y $y=[A,B,C,E]$.

[007743]

Ejercicio 6298 Homografía plana

1. Dadas las imágenes $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $C'=h(C)$, y $D'=h(D)$ por una homografía h de $P^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, construir con regla las imágenes de los otros puntos. Debe indicarse el orden en que se realizan las construcciones.
2. ¿Es suficiente conocer las imágenes $A'=h(A)$, $B'=h(B)$ y $C'=h(C)$?

Ejercicio 6299

Sea F una homografía del plano proyectivo P^2 que admite una recta d de puntos fijos.

1. Demostrar que se puede elegir $f \in \mathrm{GL}(3,k)$ tal que $F = P(f)$ y f admite un plano de puntos fijos.
2. Demostrar que existe un punto O de P^2 (llamado centro de F) tal que para todo punto M de P^2 no fijado por F, la recta $(MF(M))$ pasa por O.
3. Sea d una recta y O un punto fuera de d. Sea A y A' dos puntos de d y $A \neq O$ y O, A, A' alineados. Demostrar eligiendo un marco adecuado, que existe una única homografía F tal que d sea una recta de puntos fijos y O el centro y que envía A sobre A'.
4. Sea F una homografía del plano proyectivo P^2 que admite una recta d puntos fijos y centro O. Sabiendo que $F(A) = A'$, construir la imagen del punto M por F en los siguientes casos.

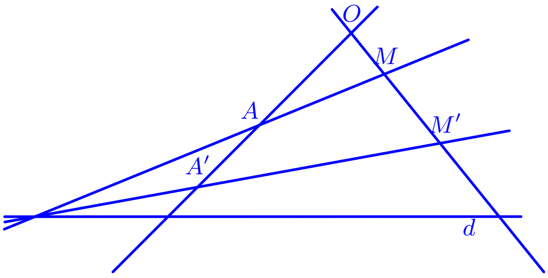


Figura 1

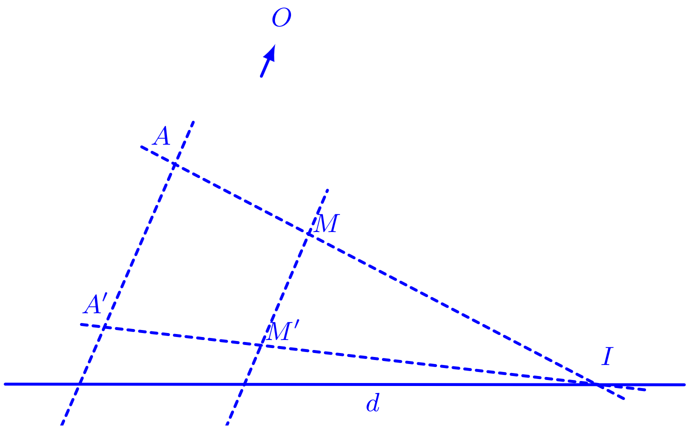


Figura 2 : el punto O está en infinito

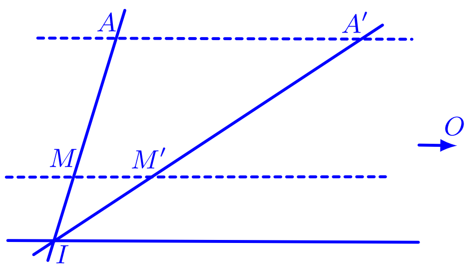


Figura 3 : el punto 0 está en infinito en la dirección de d

5. Sea H una involución. Se consideran dos puntos P y Q tales que con su imagen P' y Q' forman una referencia proyectiva (ningún triplete se compone de puntos alineados). Se define $O := (PP') \cap (QQ')$ y d la recta que une $(PQ') \cap (QP')$ y $(PQ) \cap (P'Q')$. Demostrar que H es la homografía de recta fija d de centro O que envía P sobre P'.

Solución ▼ [007745]

Ejercicio 6300 Geometría proyectiva

Sea $\Delta = P(E)$ una recta proyectiva. Sean $F = P(f)$ y $F' = P(f')$ dos homografías de Δ en sí mismas tales que $F^2 \neq \mathrm{Id}_\Delta$, $F'^2 \neq \mathrm{Id}_\Delta$ y que cada uno tiene exactamente dos puntos fijos distintos.
Se propone demostrar que F y F' conmutan si y solo tienen los mismos puntos fijos. Se denota A y B los puntos fijos de F y se denota A' y B' los puntos fijos de F'.

1. Se supone que F y F' tienen los mismos puntos fijos. ¿Cómo traducir esta hipótesis usando las aplicaciones lineales asociadas f y f'? Demostrar que F y F' conmutan (se puede considerar un marco proyectivo de Δ).

   En lo que sigue del ejercicio, se demuestra la implicación inversa : se supone de modo que F y F' conmutan.
2. Recordar la demostración del hecho de que una homografía de una recta proyectiva en sí misma que tiene tres puntos fijos dos a dos distintos es la identidad.
3. Considerando la imagen de $F \circ F'$ de puntos A, B, A', B' demostrar que $\{F'(A), F'(B)\} = \{A, B\}$ y que $\{F(A'), F(B')\} = \{A', B'\}$.
4. Se supone que $F(A') = A'$ y $F(B') = B'$, demostrar que $\{A', B'\} = \{A, B\}$.
5. Se supone que $F(A') = B'$ y $F(B') = A'$, demostrar que $\{A', B'\} = \{A, B\}$, y deducir que este segundo caso no puede darse.
6. Concluir.

Solución ▼ [007746]

Ejercicio 6301 Plan $P(\mathbb{F}_2^3)$

1. Determinar el número de puntos y rectas del plano proyectivo $P(\mathbb{F}_2^3)$. Representar las relaciones de incidencia.
2. Determinar el número de puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ de dimensión n en el cuerpo $\mathbb{F}_q$.

[007747]

Ejercicio 6302

Se recuerda que el número de raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{F}_q$ es $mcd(n, q-1)$. Considerando, el morfismo $SL(E) \to \mathscr{S}(P(E))$ asociada a la acción de $SL(E)$ en las rectas de E, demostrar la existencia de los siguientes isomorfismos

— $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = SL(2, \mathbb{F}_2) = PSL(2, \mathbb{F}_2) = P\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = \mathscr{S}_3$
— $P\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) = \mathscr{S}_4$ y $PSL(2, \mathbb{F}_3) = \mathscr{A}_4$.
— $P\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_4) = PSL(2, \mathbb{F}_4) = \mathscr{A}_5$.

[007748]

Ejercicio 6303

El propósito del ejercicio es demostrar el teorema de Pappus afín : *Sea d y d' dos rectas de un plano afín E. Sea A,B,C (resp. A',B',C') tres puntos en d (resp. sobre d'). Si las rectas (AB') y (BA') son paralelas al igual que las rectas (BC') y (CB'), entonces las rectas (CA') y (AC'), lo son también.*
En el caso donde d y d' son secantes en I.

1. Se considera la homotecia h de centro I que envía A sobre B. Determinar la imagen de B' por h.
2. Se considera la homotecia H de centro I que envía B sobre C. Determinar la imagen de C' por H.
3. Determinar la imagen de A y la de C' por $H \circ h$.
4. Concluir.

¿Cómo razonar en el caso en que d y d' son paralelas ? [007749]

Ejercicio 6304 Con un sistema de referencia proyectivo

En un plano proyectivo real, se considera el sistema de referencia proyectivo $(A,B,C;I)$. Sea A',B',C' respectivamente en $(BC),(CA)$ y (AB) tales que $(AA'),(BB')$ y (CC') sean concurrentes en I. Demostrar analíticamente que los puntos $P := (BC) \cap (B'C')$, $Q := (CA) \cap (C'A')$ y $R := (AB) \cap (A'B')$ están alineados. [007750]

Ejercicio 6305

Sea $F = P(f)$ una homografía de una recta proyectiva en sí misma. ¿A qué corresponden en términos de f los puntos fijos de F ? Demostrar que si F admite tres puntos fijos de dos en dos distintos, F es la identidad. [007751]

Ejercicio 6306 Perspectiva

Sea $\overrightarrow{V}$ un espacio vectorial y $P := P(\overrightarrow{V})$.

1. Sea F y G dos subespacios proyectivos disjuntos de P. Demostrar que existe un único subespacio proyectivo $< F,G >$ de P de dimensión $\dim F + \dim G + 1$ conteniendo F y G.
2. Sea F y G dos subespacios proyectivos disjuntos de P tales que $\dim F + \dim G = \dim P - 1$. ¿Cuál es el dominio de definición de la aplicación (llamado perspectiva) ?
$$\begin{array}{ccccc} P(\overrightarrow{V}) & \to & G & \subset & P(\overrightarrow{V}) \\ M & \mapsto & G \cap < M,F > & = & P(\overrightarrow{G} \cap (\overrightarrow{M} \oplus \overrightarrow{F})) \end{array}$$
Demostrar que es una aplicación proyectiva.

[007752]

Ejercicio 6307 Cuádrica

Sea $\overrightarrow{V}$ un espacio vectorial y q una forma cuadrática en $\overrightarrow{V}$. Se llama cuádrica proyectiva asociada a q el subconjunto de $P := P(\overrightarrow{V})$ definido por (p es la proyección canónica $\overrightarrow{V} \setminus \{0\} \to P$)
$$Q := p\left(\{x \in \overrightarrow{V} \setminus \{0\} / q(x) = 0\}\right).$$

1. Se supone $\dim P = 1$. Demostrar que si Q contiene tres puntos distintos, $Q = P$.
2. Se supone $\dim P = 2$. Demostrar que si Q contiene una recta d, ya sea $Q = P$, o ya sea existe una recta d' tal que $Q = d \cup d'$.

3. Sea d una recta de P. Demostrar que si d interseca Q al menos tres puntos, d está incluido en Q. Demostrar que si $k=\mathbb{C}$, entonces d interseca Q.

[007753]

Ejercicio 6308 Coordenadas

1. Sea $\overrightarrow{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n+1$ dotado de una base $\mathscr{B} := (\overrightarrow{v_i})$ y (x_i) las coordenadas cartesianas asociadas. Sea $\mathscr{R}$ el sistema de referencia proyectivo asociado de $P(\overrightarrow{V})$. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector de $\overrightarrow{V}$. Determinar un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathscr{R}$, por vect$(\overrightarrow{v})$ en función de las coordenadas cartesianas de $\overrightarrow{v}$ en $\mathscr{B}$.
2. Sea E un espacio afín de dimensión n y $\widehat{E}$ su vectorial completado. Se identifica E a un abierto afín de $P(\widehat{E})$ por la aplicación natural $M \mapsto vect\left(((1,M))\right)$. Sea $\mathscr{A} := (A_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ un sistema de referencia afín de E.
   (a) Se considera primero la base $\mathscr{B}_1 := (((1,A_i)))$ de $\widehat{E}$ y $\mathscr{R}_1$ el sistema de referencia proyectivo asociado. Determinar un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathscr{R}_1$ de $M\in E$ considerado en $P(\widehat{E})$ en función de sus coordenadas baricéntricas en $\mathscr{A}$. Dar una ecuación del hiperplano al infinito.
   (b) Se considera ahora la base $\mathscr{B}_2 := \left(((1,A_0)),((0,\overrightarrow{A_0A_i}))\right)$ de $\widehat{E}$ y $\mathscr{R}_2$ el sistema de referencia proyectivo asociado. Determinar un sistema de coordenadas homogéneas en $\mathscr{R}_2$ de $M\in E$ considerado en $P(\widehat{E})$ en función de sus coordenadas cartesianas en $\mathscr{A}$. Dar una ecuación del hiperplano al infinito.

[007754]

Ejercicio 6309 Caso particular de un gran teorema

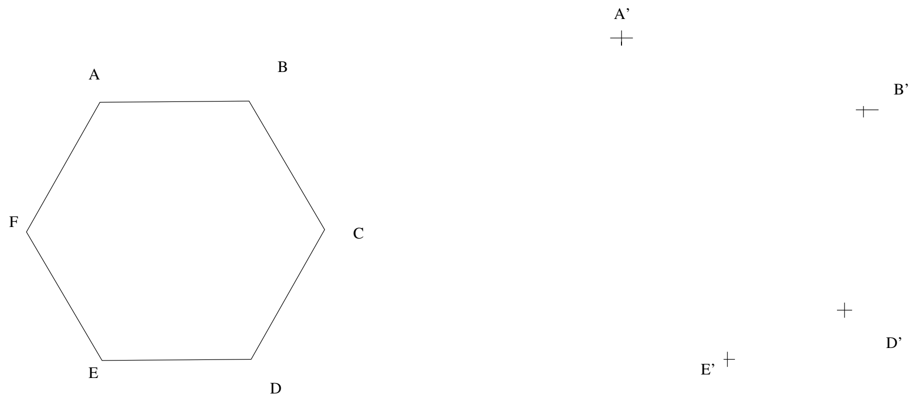
Sea E un plano afín provisto de un marco afín $\mathscr{A}' := (A_0,A_1,A_3)$ y $\mathscr{C}$ la cónica de ecuación cartesiana $x^2+y^2=1$. Sea $\mathscr{A} := (A_1, A_2 = s_{A_0}(A_1), A_3)$ un nuevo sistema de referencia afín de E.

1. Determinar una ecuación baricéntrica homogénea en $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}$.
2. Sea B_1,B_2,B_3 tres puntos de $\mathscr{C}$ distintos de A_1,A_2,A_3. Demostrar usando un cálculo en coordenadas baricéntricas que los puntos de intersección $P=(A_1B_2)\cap(A_2B_1)$, $Q=(A_2B_3)\cap(A_3B_2)$ y $R=(A_3B_1)\cap(A_1B_3)$ están alineados.

[007755]

Ejercicio 6310

1. Sean seis puntos $A,B,\dots,F$ del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $ABCDEF$ sea un hexágono regular, dadas las imágenes $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $D'=h(D)$ y $E'=h(E)$ por una homografía h de $P^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, construir con regla las imágenes de los otros puntos.



2. La misma pregunta asumiendo dadas esta vez, las imágenes $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ y $D' = h(D)$.

Solución ▼ [007756]

Ejercicio 6311

1. Sea d y d' dos rectas del plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$ y O un punto fuera de $d \cup d'$ (figura 1). Construir el eje de la proyección de d sobre d' desde O.
2. Dos rectas se cortan fuera de la hoja en un punto I. Sea A un punto de la hoja. construir la recta (AI). (ver figura 2)

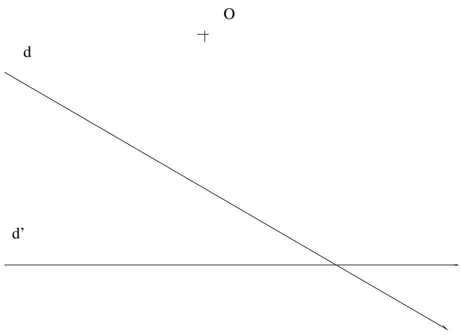


fig 1

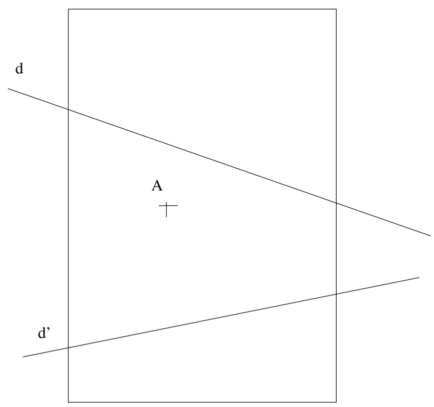


fig 2

[007757]

Ejercicio 6312 Rectas y cuadráticas

Una cuádrica de un espacio proyectivo $P(V)$ es el lugar geométrico de los ceros de una forma cuadrática f sobre V.

1. Demostrar que toda cuádrica que contenga tres puntos distintos de una recta d contiene toda la recta d.
2. Determinar la dimensión del espacio de cuádricas de $P^3(K)$.
3. Sean d_1, d_2, d_3 tres rectas de $P^3(K)$. Demostrar que existe una cuádrica que los contiene.

Ejercicio 6313 Polaridad

Sea $\mathscr{Q}$ una cuádrica de $P(E)$ (dotado de un sistema proyectivo) de ecuación $q(x)=0$, donde q es la forma cuadrática de una forma bilineal simétrica no degenerada f en un espacio vectorial E. Si $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son dos subespacios ortogonales en E, se denota $P(\overrightarrow{A}) \perp P(\overrightarrow{B})$. Se llama hiperplano polar de un punto $A=P(\overrightarrow{A})$ de $P(E)$ el hiperplano proyectivo $A^{\perp} := P(\overrightarrow{A}^{\perp})$.

1. Se provee al plano proyectivo de un sistema de referencia. Determinar una ecuación de la recta polar del punto $M(x_0,y_0,1)$, con respecto a la cuádrica de la ecuación $x^2+y^2-z^2=0$. Representarlo en el espacio afín de ecuación $z \neq 0$.
2. Sea F un subespacio no isotrópico de E. Sean A y B dos puntos de $P(F)$. Demostrar si $A \perp B$, para f, entonces $A \perp B$, para $f_{|F}$.
3. Sea $\mathscr{Q}$ una cuádrica de $P^1(K)$ cuya imagen está compuesta por los dos puntos A y B. Demostrar utilizando un buen sistema de referencia que para todo M en $P^1(K)$,
$$M \perp N \iff M \text{ y } N \text{ son conjugados armónicos con respecto a } M \text{ y } N.$$
4. Deducir una construcción geométrica de la polar de un punto con respecto a una cónica.

[007800]

264 315.00 Geometría y trigonometría hiperbólica

Ejercicio 6314

Se denota $\mathbb{H}^2$ el plano de Poincaré en uno de los dos modelos de disco o semiplano, provisto de la distancia hiperbólica ρ.

1. Demostrar que $\mathbb{H}^2$ es un espacio métrico completo pero no compacto.
2. En el modelo de semiplano se supone que z,w son dos puntos distintos en $\mathbb{H}^2$, demostrar que $\rho(z,w)=|\ln([z^*,z,w,w^*])|$, donde $[z^*,z,w,w^*]$ designa el bicociente de cuatro puntos, donde z^*,w^* son los extremos de la geodésica que pasa por z y w en el orden indicado en la Figura 1 :

[006431]

Ejercicio 6315

Sea $\triangle abc$ un triángulo en $\mathbb{H}^2$ (es decir el subconjunto de $\mathbb{H}^2$ bordeada por tres geodésicas cuyos puntos de intersección son a,b,c) de ángulos interiores α,β,γ. Se supone que $\gamma=\frac{\pi}{2}$; utilizando las notaciones que se muestran en la figura 2 demostrar las identidades siguientes :

1. $\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$
2. $\operatorname{th} b = \sinh a \cdot \tan\beta$
3. $\cosh a \cdot \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$

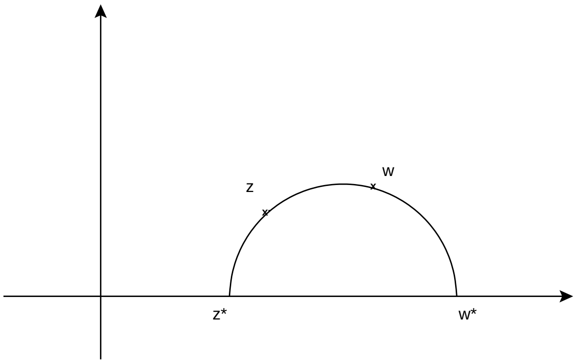


FIGURE 1 – Una geodésica

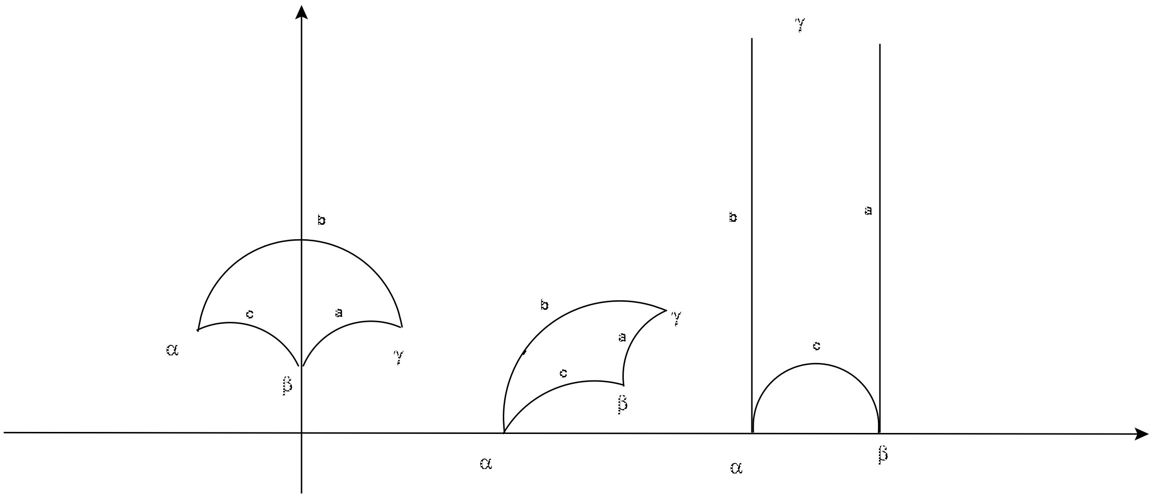


FIGURE 2 – Triángulos geodésicos

[006432]

Ejercicio 6316

Sean α, β, γ tres números positivos tales que $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \pi$; $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, entonces demostrar que existe un triángulo hiperbólico con ángulos interiores α, β, γ. [006433]

Ejercicio 6317

Usando el teorema del curso de que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo n vértices en $\mathbb{H}^2$ es inferior a $(n-2)\pi$ demostrar que :

1. Sean $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ una colección ordenada de números tales que $0 \leqslant \theta_i < \pi$ $(i = 1, \ldots, n)$. Para que exista un polígono convexo con ángulos interiores θ_i es necesario y suficiente que $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n < (n-2)\pi$.
2. Un polígono en n lados y ángulos rectos existen si y solo si $n \geqslant 5$.

Ejercicio 6318

1. Demostrar que toda homografía no trivial $g \in M^+(2) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tiene ya sea un punto fijo o ya sea dos. Un elemento $g \in M^+(2)$ se dice *parabólico* si su conjunto de puntos fijos : $\text{fijo}(g) = \{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid f(x) = x\}$ es un punto aislado. Demostrar que un elemento es parabólico si y solo si es conjugado en $M^+(2)$ a la traslación $z \mapsto z+1$.
2. Un elemento $f \in M^+(2)$ se dice *elíptico* si es conjugado en $M^+(2)$ en una rotación $z \mapsto k \cdot z$, donde $|k| = 1$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Un elemento $g \in M^+(2)$ se dice *loxodrómica* si es conjugado en $M^+(2)$ a $z \mapsto k \cdot z$, donde $|k| \neq 1$. Además, un elemento loxodrómico se dice *hiperbólico* si $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; un elemento loxodrómico se dice estrictamente loxodrómico si $k = \lambda \cdot e^{i\theta}$, $\lambda > 0$ $\theta \neq 2\pi m$, para un elemento $g \in M^+(2)$ se utiliza la misma letra para uno de dos matrices en $SL_2(\mathbb{C})$ que lo representan (de hecho, es g o $-g$). Demostrar que para todo elemento $g \in M^+(2)$ una de las siguientes posibilidades puede ocurrir :
   (a) g es parabólico si y solo si $\text{tr}^2(g) = 4$, donde tr^2 es la traza al cuadrada de la matriz g.
   (b) g es elíptica si y solo si $\text{tr}^2(g) \in [0, 4[$.
   (c) g es hiperbólica si y solo si $\text{tr}^2(g) \in]4, \infty[$.
   (d) g es estrictamente loxodrómica si y solo si $\text{tr}^2(g) \notin [0, \infty[$.
3. Usando el modelo del semi-plano, demostrar que los puntos fijos de un elemento parabólico o hiperbólico siempre se encuentran en el borde $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{H}^2$.
   Utilizando el modelo del disco, demostrar que un elemento elíptico tiene exactamente uno de dos puntos fijos en $\mathbb{H}^2$.

[006435]

Ejercicio 6319

Sea $g \in M$ una homografía. Demostrar que

1. Si g es parabólico $\text{fijo}(g) = \{x\}$, entonces
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \to \pm\infty} g^n(z) = x.$$
2. Si g es loxodrómico y $\text{fijo}(g) = \{x, y\}$, entonces
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{y\} : \lim_{n \to +\infty} g^n(z) = x,$$
   y el punto x se dice *punto fijo atractivo* de g.
$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{x\} : \lim_{n \to +\infty} g^{-n}(z) = y,$$
   y el punto y se dice *punto fijo repulsivo* de g.

[006436]

Ejercicio 6320

Demostrar que si un elemento $g \in M$ no es estrictamente recta loxodrómica conjugada, con $z \to ke^{i\theta}$, $(\theta \neq \pi + \pi m,\ k > 0)$, entonces existen dos familias $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2)$ de círculos generalizados verificando las siguientes condiciones :

1. $\forall C \in \mathscr{C}_1 : \; g(C) = C$
2. $\forall C \in \mathscr{C}_2 : \; g(C) = \mathscr{C}_2 \setminus \{C\}$
3. $\forall C_1 \in \mathscr{C}_1, \, \forall C_2 \in \mathscr{C}_2 : \; C_2 \perp C_1$.

Además, si $g \in M$ es estrictamente loxodrómica conjugada a $z \to ke^{i\theta}$ $(\theta \neq \pi + \pi m, \; k > 0)$, entonces demostrar que g no tiene círculo invariante. [006437]

---

265 316.00 Otro

266 320.00 Grupo

Ejercicio 6321

Sea G un grupo y S una parte de G.

1. Demostrar que $H := \{a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_n}^{\varepsilon_n}, a_i \in S, \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\}$ es el subgrupo generado por S (i.e el más pequeño subgrupo de G conteniendo S), denotado $< S >$.
2. Sea A una parte de G, se llama *centralizador* de A, el conjunto : $C_A := \{g \in G : \forall a \in A \; ga = ag\}$.
   (a) Demostrar que C_A es un subgrupo de G.
   (b) Demostrar que $C_A = C_{<A>}$
3. Dar una condición necesaria y suficiente en S, para que $< S >$ sea abeliano, $< S >$ sea normal en G.

[006369]

Ejercicio 6322

Sea G un grupo y A, B dos subgrupos de G, se denota $AB := \{g = ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Demostrar que AB es un subgrupo de G si y solo si $AB = BA$.
2. Demostrar que si AB es un subgrupo de G, entonces $AB =< A, B >$.

[006370]

Ejercicio 6323

En $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$: el grupo matriz $(2,2)$ invertibles con coeficientes reales.

1. (a) Demostrar que $H := \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p \in \mathbb{Z}$ es un subgrupo abeliano.
   (b) Demostrar que es cíclico, ¿es normal ?
2. Sean $A := \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 \; 1 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dos matrices.
   (a) Demostrar que A y B pertenecen a $SL(2, \mathbb{Z})$, calcular su orden y demostrar que H está contenido en $< A, B >$. ¿Qué se puede decir de las afirmaciones siguientes ?
   — "un grupo generado por elementos de orden finito es finito."
   — "todos los elementos de un grupo generado por elementos de orden finito son de orden finito."
   (b) ¿El grupo generado por A y B es abeliano ?
   (c) Calcular la intersección del grupo cíclico generado por A y del grupo cíclico generado por B.

Ejercicio 6324

1. Demostrar que todo subgrupo de un grupo cíclico (monogénico) es cíclico.
2. Recordar que un grupo se llama localmente cíclico si cada subconjunto finito genera un subgrupo cíclico. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es localmente cíclica, pero no cíclica y deducir que $\mathbb{Q}$ no es de tipo finito.

[006372]

Ejercicio 6325

Sea G un grupo.

1. Sean A, B dos subgrupos de G.
   (a) Se supone que A es de índice finito en G, demostrar entonces que $A \cap B$ es de índice finito en B.
   (b) Se supone que A y B tienen un índice finito en G, demostrar entonces que $A \cap B$ es de índice finito en G, generalizar al caso de un número finito de subgrupos.
2. Demostrar que $\cap\{A : A$ es de índice finito en $\mathbb{Z}\} = \{\mathrm{Id}\}$. (Comparar con 1.b).

[006373]

Ejercicio 6326

1. Se supone que H es de índice finito en G demostrar que existe $K < \infty$ tal que $\forall g \in G\ \exists n_g \in \mathbb{N}^*$: $g^{n_g} \in H$ y $n_g \leqslant K$.
2. Demostrar que $\mathbb{Q}$ no tiene un subgrupo de índice finito (distinto de sí mismo).

[006374]

Ejercicio 6327

1. Sea G un grupo y A un subgrupo de G de índice finito. Demostrar que existe un subgrupo B de A normal en G y con índice finito en G. (*Indicación* : considerar $B = \bigcap_{g\in G} gAg^{-1}$.)
2. Demostrar que un grupo infinito simple no contiene un subgrupo propio de índice finito.

[006375]

Ejercicio 6328

Sea G un grupo, A y B dos subgrupos de G tales que $A \subset B$. Se supone que A es de índice finito en G. Demostrar que $|G : A| = |G : B||B : A|$. [006376]

Ejercicio 6329

El objetivo de este ejercicio es dar la construcción de un grupo libre e introducir la noción de presentación de un grupo.
Sea $S = \{s_i\}_{i\in I}$ un conjunto cualquiera que se llama alfabeto. Una palabra en el alfabeto S es por definición una sucesión finita (o vacío) :

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_k}^{\varepsilon_k},\ où\ \varepsilon_i = \pm 1\ y\ s_{i_j} \in S,\ k \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Denotemos W el conjunto de todas las palabras. Una palabra $w \in W$ se dice reducida si su escritura (1) no contiene dos letras consecutivas del tipo s_i^{ε} y $s_i^{-\varepsilon}$. Palabras w_1 y w_2 se dice que son vecinas si $w_2 = g s_i^{\varepsilon} s_i^{-\varepsilon} h$ y $w_1 = gh$. Dos palabras f y g se llaman equivalentes (se denota $f \sim g$) si existe una sucesión finita de palabras : $f = w_0, w_1, \ldots, w_n = g$, donde las palabras w_i y w_{i-1} son vecinas ($i \in \{1, \ldots, n\}$).

1. Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Dada una palabra $f = a_1 ... a_t$ (donde $a_j = s_{i_j}^{\varepsilon_j}$) se define una sucesión de transformaciones llamada R-procedimiento : $R_0 = e$ (la palabra vacía), $R_1 = a_1$ y
$$R_{i+1} = \begin{cases} R_i a_{i+1} & \text{si } R_i \text{ no es una palabra reducida del tipo } X a_{i+1}^{-1} \\ X & \text{si } R_i \text{ es una palabra reducida del tipo } X a_{i+1}^{-1}. \end{cases}$$
En otras palabras, un R-procedimiento consiste a hacer todas las simplificaciones de derecha a izquierda.
2. Se supone que $w_1 = a_1 ... a_r a_{r+1} ... a_t$ y $w_1 = a_1 ... a_r s_j^{\varepsilon} s_j^{-\varepsilon} a_{r+1} ... a_t$ son dos palabras y que R^i designa el R-procedimiento aplicada a la palabra w_i. Demostrar que $R_t^1 = R_{t+2}^2$, es decir $R^1(w_1) = R^2(w_2)$. Deducir que cada clase de $W/\sim$ contiene una palabra reducida y solo una.
Para dos clases $[w_i] \in W/\sim$ $(i = 1, 2)$ definamos ahora su producto del siguiente modo (de izquierda a derecha) :
$$[w_1][w_2] = [w_1 w_2] \qquad (2).$$
3. Demostrar que (2) no depende de la elección de representantes de las clases $[w_i]$. Demostrar que el conjunto $F = W/\sim$ dotado con la operación (2) es un grupo. Este grupo se llama grupo libre generado por S, se llama a los elementos de S generadores libre de F. Sea ahora G un grupo cualquiera generado por un sistema X, donde $x = \{x_i\}_{i \in I}$ y F es el grupo libre generado por S. Se supone que existe una biyección $f : S \mapsto X$ tal que $f(s_i) = x_i$ $(i \in I)$.
4. (a) Demostrar que f se extiende a un homomorfismo $f : F \mapsto G$.
   (b) En particular, deducir que si $\text{Card}(S) = \text{Card}(S')$, entonces el grupo libre generado por S es isomorfo al grupo libre generado por S'.

   Si además $\text{Card}(S) = n$ este grupo es denotado F_n.

   Denotemos $H = \ker f$, y llamamos a un subconjunto $H' \subset H$ conjunto de relaciones de G si el más pequeño subgrupo normal de G conteniendo H' coincide con H. Al proporcionar el par S, H' define el grupo G a un isomorfismo cerca (G es isomorfo al grupo cociente X/H). La par tal, es denotado $\langle S | H' \rangle$ y se llama presentación de G.
5. Demostrar que el grupo libre no contiene ningún elemento de orden no trivial finito.

[006377]

Ejercicio 6330

Demostrar que el grupo G dado por su presentación :
$$< x_1, \ldots, x_n \mid [x_i, x_j], \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} > \qquad (3)$$
es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

[006378]

Ejercicio 6331

1. Sea el conjunto $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dotado de la operación binaria $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_2 y_1 + y_2)$. ¿Es $(E, *)$ un monoide ? ¿Un grupo ? ¿La operación es conmutativa ?

2. Las mismas preguntas para el conjunto de matrices

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{Z}, a+b=c+d \right\} ,$$

dotado de la multiplicación de matrices.

[006438]

Ejercicio 6332

Sea el conjunto $G = [0,1[$ dotado con la ley de composición interna $x * y = \{x+y\}$, donde $\{x\}$ representa la parte fraccionaria del número real x. Demostrar que $(G,*)$ es un grupo. Demostrar que $\mathbb{Q} \cap G$ es un subgrupo. [006439]

Ejercicio 6333

Sea el conjunto de matrices

$$K := \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \right\},$$

dotado de la multiplicación de matrices. Demostrar que es un grupo conmutativo (abeliano). [006440]

Ejercicio 6334

Sean a,b,c los elementos de un grupo. Demostrar que la ecuación $xaxba = xbc$ admite una y solo una solución. [006441]

Ejercicio 6335

En el grupo de los enteros módulo 11 dotado del operador de multiplicación, ¿cuáles de los siguientes conjuntos forman subgrupos ?

$$(a)\ \{1,3,4,5,9\}, \quad (b)\ \{1,3,5,7,8\}, \quad (c)\ \{1,8\}, \quad (d)\ \{1,10\}, \quad (e)\ \{1,3,10\}.$$

[006442]

Ejercicio 6336

Demostrar que un grupo que tiene a lo sumo 4 elementos, es abeliano. (*Indicación* : Comparar los elementos e,a,b,ab,ba.) [006443]

Ejercicio 6337

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números son grupos ?

1. Números irracionales provistos de la suma ; de la multiplicación ;
2. Números complejos de valor absoluto 1 dotados de la adición ; de la multiplicación ;
3. Números complejos con operación binaria $z * z' = |z| \cdot z'$.

Ejercicio 6338

¿Cuál de las siguientes tablas de Cayley describe un grupo ?

*	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

*	a	b	c	d	e
a	e	d	b	c	a
b	c	e	d	a	b
c	d	a	e	b	c
d	b	c	a	e	d
e	a	b	c	d	e

[006445]

Ejercicio 6339

Demostrar que si un conjunto E es provisto de una operación binaria que verifica las propiedades

— (P_1) $(ab)c = a(cb)$;

— (P_2) existe $e \in E$ tal que $ea = a$, $\forall a$;

— (P_3), para todo $a \in E$ existe $b \in E$ tal que $ba = e$;

entonces es un grupo abeliano. [006446]

Ejercicio 6340

Demostrar que, en un grupo G, para todo elemento $a \in G$, el conjunto de los $x \in G$ tales que $ax = xa$ es un subgrupo (llamado el *centralizador de a en G*).

Demostrar que el conjunto de $x \in G$ tales que $ax = xa$, $\forall a \in G$, es un subgrupo (llamado el *centro de G*). [006447]

Ejercicio 6341

¿Cuántos generadores diferentes tiene un grupo cíclico de orden 6 ? [006448]

Ejercicio 6342

Sea G un grupo generado por dos elementos x e y que controlan las relaciones $x^2 = y^3 = e$, $xy = yx$. Escribir todos los elementos de G y su tabla de multiplicación. [006449]

Ejercicio 6343

Encontrar una descomposición en producto de transposiciones de las siguientes permutaciones :

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_3$;
2. $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_4$;
3. $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5$.

¿Cuál es su signo ? [006450]

Ejercicio 6344

Determinar el signo de las permutaciones :

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & n-k+1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n$;
2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-p & n-p+1 & \dots & n \\ p+1 & p+2 & \dots & n & 1 & \dots & p \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n$, donde p es fijado, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ y $n \geqslant 2$.

[006451]

Ejercicio 6345

Descomponer en producto de ciclos con soporte dos a dos disjuntos, admite las siguientes las permutaciones siguientes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_7\,, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_9\,.$$

Deducir el signo. [006452]

Ejercicio 6346

Escribir los siguientes productos como productos de ciclos disjuntos.

$$(a)\ (1234)(567)(261)(47) \quad (b)\ (12345)(67)(1357)(163) \quad (c)\ (14)(123)(45)(14)$$

Encontrar el signo de cada producto. [006453]

Ejercicio 6347

1. Verificar que para todo ciclo $(i_1\, i_2 \dots i_p)$, $p \geqslant 2$, en S_n y toda permutación $\sigma \in S_n$,
$$\sigma(i_1\, i_2 \dots i_p)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p))\,.$$
2. Verificar que para todo los enteros distintos $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$ se tiene $(i\, j) = (i\, k)(j\, k)(i\, k)$.
3. Deducir que las familias de transposiciones $\{(1\, i) \mid i \in \{1, 2, \dots n\}\}$ y $\{(i\, i+1) \mid i \in \{1, 2, \dots n-1\}\}$ generan S_n.
4. Sean $\tau = (1\, 2)$ y $c = (1\, 2\, \dots n)$. Calcular $c^{i-1}\tau c^{1-i}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots n-1\}$. Demostrar que toda permutación de S_n se escribe como producto de potencias de τ y c.

[006454]

Ejercicio 6348

En el grupo simétrico S_4 encontrar los siguientes subgrupos

1. El subgrupo de elementos σ tales que la imagen por σ del conjunto $\{1, 2\}$ es $\{1, 2\}$.
2. El subgrupo de elementos τ tales que si $a \equiv b \bmod 2$, entonces $\tau(a) \equiv \tau(b) \bmod 2$.
(*Indicación* : $(13)(24)$ forma parte de este subgrupo).

[006455]

Ejercicio 6349 Grupo unipotente

1. ¿A qué grupo, el grupo U de matrices de la forma $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}$ es isomorfo ?
2. ¿Es un subgrupo normal de $SL(2,\mathbb{R})$?
3. Determinar el inverso de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[007887]

267 321.00 Subgrupo, morfismo

Ejercicio 6350

1. Encontrar el orden de las siguientes permutaciones

$$(abcdef)(ghij)(klm)\,; \quad (123456)(1234)(123)\,.$$

2. Demostrar que toda permutación de orden 10 en S_8 es impar.

[006456]

Ejercicio 6351

Sea el conjunto $E = \{a,b,c,d,e\}$ quién, dotado de la operación binaria $*$, se convierte en un grupo. Encontrar la tabla de multiplicar de este grupo sabiendo que $a*b = d,\ c*a = e,\ d*c = b$. [006457]

Ejercicio 6352

1. Sea $n \geqslant 2$ un número entero. Demostrar que n es primo si y solo si todo grupo de orden n tiene solo dos subgrupos.
2. Demostrar que un grupo de orden p^m, $m \geqslant 1$, donde $p \in \mathbb{N}$ es un número primo, contiene un subgrupo de orden p.

[006458]

Ejercicio 6353

Demostrar que los siguientes grupos no son isomorfos :

1. $(\mathbb{Z},\ +)$ y $(\mathbb{Z}[X],\ +)$;
2. $(\mathbb{Q},\ +)$ y $(\mathbb{Q}[i],\ +)$, donde $\mathbb{Q}[i] := \{a+ib \in \mathbb{C} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

[006459]

Ejercicio 6354

Sea $K = \{e,a,b,c\}$ un grupo de orden 4 tal que $x^2 = e, \forall x$.

1. Escribir la tabla de multiplicar de K.
2. Demostrar que K es isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ +)$ y no es isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Demostrar que todo grupo de orden 4 es o bien isomorfo a K o bien a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

[006460]

Ejercicio 6355

Sea $(G,\cdot)$ un grupo finito de orden n. Encontrar todos los morfismos de grupo $\phi : (\mathbb{Q},+) \to (G,\cdot)$. [006461]

Ejercicio 6356

Sea $(G,\cdot)$ un grupo. Se llama subgrupo *característico* de G un subgrupo invariante bajo todo automorfismo de G. Demostrar que cada subgrupo característico es normal. [006462]

Ejercicio 6357

1. Demostrar que S_3 contiene un subgrupo H normal de orden 3 y que G/H es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Demostrar que los únicos grupos de orden 6 son, módulo isomorfismo, el grupo cíclico y S_3.

[006463]

Ejercicio 6358

¿Cuántos automorfismos tiene un grupo cíclico de orden p, donde p es un número primo? ¿Y un grupo cíclico de orden pq, donde p y q son números primos distintos? [006464]

Ejercicio 6359

Demostrar que los únicos grupos normales de S_5 son $\{e\}$, S_5, A_5. [006465]

Ejercicio 6360

Sea $(G,\cdot)$ un grupo. Se llama *conmutador* un elemento de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. Se denota $[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

1. Demostrar que el conjunto $G' = [G,G]$ de productos de conmutadores es un subgrupo normal de G. Demostrar que G/G' es un grupo abeliano. En particular, esto implica que $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ abeliano.
2. Sea $N \lhd G$ tal que G/N es abeliano. Demostrar que $G' \subset N$.
3. Encontrar G', para $G = S_3,\ A_5,\ S_5$.
4. Demostrar que si $\phi : G \to A$ es un morfismo de G a un grupo abeliano A, entonces existe un morfismo $\psi : G/G' \to A$ tal que $\phi = \psi \circ \pi$, donde $\pi : G \to G/G'$ es la proyección canónica.

[006466]

Ejercicio 6361

Sea $V_4 := \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14)\} \subset S_4$.

1. Demostrar que es un subgrupo normal de S_4.
2. Demostrar que $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Sea $H = \{e,\ (12)(34)\}$. Demostrar que $H \lhd V_4$, pero que H no es un subgrupo normal de S_4.
4. Demostrar que S_4/V_4 es isomorfo a S_3.

[006467]

Ejercicio 6362

1. Demostrar que todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.
2. Sea $d \in \mathbb{N}^*$ un divisor de $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que existe un único subgrupo de orden d en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[006468]

Ejercicio 6363

1. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice p, donde p es el factor primo más pequeño de $|G|$. Demostrar que $H \lhd G$.
2. Sea $H < S_4$, H de cardinal 12. Demostrar que $H = A_4$.
3. Demostrar que A_4 no es simple.
4. Demostrar que A_4 no tiene subgrupo de orden 6.

[006469]

Ejercicio 6364

Demostrar las siguientes propiedades

1. $(\mathbb{C}/\mathbb{R},+) \simeq (\mathbb{R},+)$;
2. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{S}^1$;
3. $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$;
4. $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \{\pm 1\}$;
5. $(\mathbb{C}/\mathbb{Z},+) \simeq \mathbb{C}^*$;
6. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$.

[006470]

Ejercicio 6365

Demostrar que las permutaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

son conjugados en S_6. [006471]

Ejercicio 6366

Sea G un subgrupo del grupo simétrico S_n, $n \geqslant 2$, conteniendo una permutación impar. Demostrar que $GA_n = S_n$ y deducir que G contiene al menos un subgrupo normal de índice 2. [006472]

Ejercicio 6367

Sea $SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M = \pm 1\}$ y sea la acción del grupo $SL(n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} SL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (M,X) &\to MX. \end{aligned}$$

1. Encontrar las órbitas de esta acción. Demostrar que el centro de $SL(n,\mathbb{R})$ es $\{\pm I\}$.

2. Demostrar que, para todo vector $X \in \mathbb{R}^n$, su estabilizador es conjugado al subgrupo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & SL(n-1,\mathbb{R}) \end{pmatrix}.$$

3. Sea $SL(2,\mathbb{Z})$ dotado de su acción sobre $\mathbb{Z}^2$ definida por

$$\begin{aligned} SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 &\to \mathbb{Z}^2 \\ (M,X) &\to MX. \end{aligned}$$

Encontrar sus órbitas. Demostrar que el conjunto $\Gamma(2)$ de matrices M tales que $M = I$ (mod 2) es un subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$. Encontrar sus órbitas en $\mathbb{Z}^2$.

[006473]

Ejercicio 6368

Sea D_∞ el grupo de isometrías de la recta afín $\mathbb{R}$ formado por todos los elementos de la forma τ_1^n y $\tau_1^n \circ \sigma$, donde $n \in \mathbb{Z}$, $\tau_1(x) = x+1$ y $\sigma(x) = -x$. Se llama D_∞ *el grupo diedro infinito*.

1. Demostrar que $H =< \tau_1 >$ es el único subgrupo cíclico infinito de índice 2 de D_∞. Demostrar que H es un subgrupo normal de D_∞.
2. Demostrar que, para todo subgrupo S de orden 2 de D_∞, se tiene $D_\infty = SH$.
3. Sea $K < D_\infty$ tal que $K \not\subset H$. Demostrar que $D_\infty = HK$. Deducir que $K \cap H$ es de índice 2 en K. Demostrar que $K \cap H \neq (e)$ implica $K \simeq D_\infty$.
4. Demostrar que todo subgrupo propio de D_∞ es isomorfo ya sea a $\mathbb{Z}$, ya sea a (± 1), ya sea a D_∞.
5. Se denota $\mathscr{S}_n$ el conjunto de subgrupos $K < D_\infty$ tales que $K \not\subset H$ y $K \cap H = H_n$, donde $H_n :=< \tau_1^n >$. Demostrar que $\mathscr{S}_n$ contiene n elementos.

[006474]

---

268 322.00 Grupo finito

Ejercicio 6369

1. Sean las aplicaciones $T : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $T(x) = x+4$, $T(\infty) = \infty$, y $g : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-2x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\ ; \\ \infty & \text{si} \quad x = \frac{1}{2}\ ; \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \infty \end{cases}$$

Demostrar que $T^k([-2,2]) \subset]-\infty,-2]\cup[2,\infty[$, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$ y que $g^m(]-\infty,-1]\cup[1,\infty[) \subset [-1,1]$, $\forall m \in \mathbb{Z}^*$.

2. Sea G el grupo de aplicaciones biyectivas $h : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, dotado con la operación de composición. Demostrar que G tiene una acción natural sobre $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
3. Demostrar que el subgrupo Γ de G generado por T y g es un grupo libre.
   Indicación : Se observa las órbitas de los números en el intervalo $]1,2[$.

[006475]

Ejercicio 6370

1. Sea G el grupo generado por dos elementos a,b, definido por las relaciones $a^m = b^2 = e,\ (ab)^2 = e$, donde $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Demostrar que $G \simeq D_m$, donde D_m es el grupo diédrico de grado m.
2. Demostrar que para todo grupo H generado por dos elementos $\alpha,\ \beta$, que controlan las relaciones $\alpha^m = \beta^2 = e,\ (\alpha\beta)^2 = e$ hay un epimorfismo de D_m en H.

[006476]

Ejercicio 6371

Sea H_i y N_i dos pares de grupos y $\phi_i : H_i \to Aut\,(N_i)$ dos morfismos, $i = 1,2$. Demostrar que si existen dos isomorfismos $\alpha : H_1 \to H_2$ y $\beta : N_1 \to N_2$ tales que $\phi_2(\alpha(h_1)) = \beta \circ \phi_1(h_1) \circ \beta^{-1}, \forall h_1 \in H_1$, entonces $N_1 \rtimes_{\phi_1} H_1 \simeq N_2 \rtimes_{\phi_2} H_2$. [006477]

Ejercicio 6372

Sea H y N dos grupos y $\phi,\ \psi : H \to Aut\,(N)$ dos morfismos. Demostrar que

1. si existe $\alpha \in Aut\,(H)$ tal que $\psi = \phi \circ \alpha$, entonces $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.
2. si existe $u \in Aut\,(N)$ tal que $\psi(h) = u\phi(h)u^{-1}$, entonces $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.

[006478]

Ejercicio 6373

1. (Teorema de Euler) Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $a \in \mathbb{Z}^*$ primero con n. Demostrar que $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod n), donde ϕ es la función de Euler.
2. (Teorema de Fermat) Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$. Demostrar que $a^p \equiv a(\text{mod } p)$.

[006479]

Ejercicio 6374

Sea ϕ un automorfismo de S_n. Demostrar que si ϕ transforma toda transposición en una transposición entonces ϕ es un automorfismo interno. *Indicación* : Utilizar el hace que S_n es generado por $\{(12),\ (13), \ldots,\ (1n)\}$.
[006480]

Ejercicio 6375

1. Demostrar que todo grupo de orden pq, con p,q primos distintos, es un producto semidirecto de dos subgrupos cíclicos.
2. Determinar módulo un isomorfismo todos los grupos de orden pq.

[006481]

Ejercicio 6376

Sea G un grupo finito que opera en un conjunto finito E.

1. Se supone que la acción es tal que toda órbita de G contiene al menos 2 puntos. Si $|G| = 15$ y card E=17, encontrar el número de órbitas de G en E y el cardinal de cada una.
2. Demostrar que si $|G| = 33$ y card E=19, existe al menos una órbita que contiene un solo punto.

[006482]

Ejercicio 6377

Sea G un p-grupo operando en un conjunto finito X y sea $Fix(G) := \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$. Demostrar que $X =$ card $Fix(G)$ (mod p). Deducir que el centro de un p-grupo es siempre no-trivial. [006483]

Ejercicio 6378

Demostrar que un grupo infinito G que tiene un subgrupo propio de índice finito H no es simple. *Indicación* : Estudiar la acción de G sobre G/H. [006484]

Ejercicio 6379

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\mathrm{GL}(V)$ el grupo de automorfismos lineales. Para $f \in \mathrm{GL}(V)$ y $a \in V$ se considera la aplicación $A_{f,a} : V \to V$, $A_{f,a}(v) = f(v) + a$.

1. Demostrar que $\mathscr{A} := \{A_{f,a} \mid f \in \mathrm{GL}(V),\ a \in V\}$ dotado con la operación de composición es un grupo. Este grupo se llama *el grupo de transformaciones afines*.
2. Encontrar dos subgrupos de $\mathscr{A}$ isomorfos a $(\mathrm{GL}(V), \cdot)$ y a $(V, +)$, respectivamente.
3. Demostrar que $\mathscr{A}$ es el producto semidirecto de los dos subgrupos obtenidos en 2.

[006485]

Ejercicio 6380

Demostrar que todo subgrupo de orden 35 es cíclico. [006486]

Ejercicio 6381

Sea G un grupo finito con $|G| = p^2q$, donde p, q son dos números primos distintos tales que $p^2 \not\equiv 1$ (mod q) y $q \not\equiv 1$ (mod p). Demostrar que G es abeliano. [006487]

Ejercicio 6382

1. Demostrar que un grupo de orden p^2q no puede ser simple.
2. Demostrar que un grupo de orden 63 no es simple.

[006488]

Ejercicio 6383

Determinar módulo un isomorfismo todos los grupos de orden 12. Reconocer entre ellos D_6 y A_4. La misma pregunta para grupos de orden 18. [006489]

Ejercicio 6384

Sea G un grupo de orden 399. Verificar que G tiene un subgrupo normal de orden 19 y un subgrupo normal de orden 133. Deducir que G es un producto semidirecto de dos grupos cíclicos. [006490]

Ejercicio 6385

Sea G un grupo de cardinal 24. Demostrar que, si ninguno de sus subgrupos de Sylow es normal, $G \simeq S_4$. *Indicación* : Operar G en sus 3-subgrupos de Sylow. [006491]

Ejercicio 6386

Sea G un grupo y K un subgrupo normal finito. Demostrar que todo p-subgrupo de Sylow normal de K es normal en G. [006492]

Ejercicio 6387

Sea G un grupo finito, H un subgrupo normal y p un número primo dividiendo $[G : H]$. Demostrar que Σ es un p-subgrupo de Sylow de G/H si y solo si existe un p-subgrupo de Sylow S de G tal que $\Sigma = SH/H$. [006493]

Ejercicio 6388

Sea G un grupo abeliano de tipo finito. Demostrar que si todo elemento de G es de orden finito, entonces G es finito. [006494]

Ejercicio 6389

Demostrar que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano infinito cuyos elementos son de orden finito. Deducir que no puede haber una familia finita de generadores. [006495]

Ejercicio 6390

Sea G un grupo finito abeliano. Demostrar que para todo divisor d de $|G|$ existe un subgrupo de G de orden d. [006496]

Ejercicio 6391

1. Encontrar los invariantes y la descomposición canónica del grupo abeliano finito cuyos divisores elementales (llamadas también *invariantes primarios*) son $2^3,\ 2,\ 3^2,\ 3,\ 3$.
2. Encontrar los divisores elementales/invariantes primarios, los invariantes y la descomposición canónica de $G = \mathscr{C}_{30} \times \mathscr{C}_{18}$.
3. Encontrar los divisores elementales/invariantes primarios, los invariantes y la descomposición canónica de los siguientes grupos abelianos :
   (a) G_1 generado por a y b tales que $10a = 9b = 0$;
   (b) G_2 generado por $a,\ b$ y c tales que $15a = 6b = 4c = 0$.

[006497]

Ejercicio 6392

Sea $\mathbb{C}$ equipado con operaciones binarias

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2,\ z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + Im\, z_1 Im\, z_2.$$

1. Demostrar que $(\mathbb{C},*,\perp)$ es un anillo. Encontrar sus elementos invertibles.
2. Demostrar que el conjunto de matrices

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \; ; \, a \in \mathbb{R}, \, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

dotado de la suma y multiplicación de matrices es un anillo.
3. Demostrar que la función $f : \mathbb{C} \to D$,

$$f(x+iy) := \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo de anillos.

[006498]

Ejercicio 6393

Sea A un anillo no necesariamente conmutativo. Sea $a,b \in A$ tales que a, b, $ab-1$ son invertibles. Demostrar que $a-b^{-1}$ y $(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$ son invertibles. Demostrar que se tiene la igualdad

$$[(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}]^{-1} = aba-a.$$

[006499]

Ejercicio 6394

Demostrar que los anillos de polinomios $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ no son isomorfos. [006500]

Ejercicio 6395

Sea A un anillo no necesariamente conmutativo, A^* el grupo de elementos invertibles e I un ideal bilateral de A. Sea $U = \{a \in A^* \mid a \equiv 1 \; mod \; I\}$. Demostrar que I es un subgrupo normal de A^*. [006501]

Ejercicio 6396

1. Demostrar que los morfismos de un grupo simple a un grupo arbitrario son constantes o inyectivos.
2. ¿Cuál es el número promedio de puntos fijos de una permutación de $\mathscr{S}_n$?
3. Demostrar que si G es un grupo finito, S un p-Sylow de G, y H un subgrupo de G, existe un conjugado de S que cumple H en un p-Sylow de H.

[007718]

Ejercicio 6397

Sea G un grupo finito. Sea p el factor primo más pequeño del orden de G. Sea H un subgrupo de G de índice $p>1$.

1. Demostrar que las órbitas de acción de H sobre G/H por traslación a la izquierda se reducen a puntos.
2. Demostrar que H es normal.

[007719]

Ejercicio 6398

1. Explicitar un 7-Sylow del grupo simétrico $\mathscr{S}_9$
2. Determinar el número de elementos de orden 7 en $\mathscr{S}_9$.
3. Determinar el número de 7-Sylow.
4. Verificar las congruencias dadas por el teorema de Sylow sobre el número de 7-Sylow.

[007720]

Ejercicio 6399

Sea G un grupo y $f : G \to A$ un morfismo de grupos de G en un grupo abeliano A. Se supone además que el núcleo $N(f)$ de f es resolube.

1. Demostrar que el grupo derivado $D(G)$ de G está incluida en el núcleo de F.
2. Demostrar que G es resolube.

[007721]

Ejercicio 6400

Un grupo G de cardinal 169 actúa sobre un espacio X a 207 elementos. Se supone que existe exactamente 15 órbitas distintas. Determinar el número de órbitas de cada cardinal. [007722]

Ejercicio 6401

¿Cuántos 5-Sylows contiene el grupo $\mathscr{S}_5$?

Solución ▼ [007723]

Ejercicio 6402 Plan $P(\mathbb{F}_2^3)$

Determinar el número de puntos y rectas del plano proyectivo $P(\mathbb{F}_2^3)$. Representar relaciones de incidencia.
[007724]

Ejercicio 6403

1. Determinar el centro de $SL(4,\mathbb{F}_2)$ y calcular el orden de $PSL(4,\mathbb{F}_2)$.
2. En $SL(4,\mathbb{F}_2)$ determinar el orden de
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y de } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
¿Son estas dos matrices conjugadas en $SL(4,\mathbb{F}_2)$?
3. Determinar el centro de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ y calcular el orden de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$.
4. El propósito de esta pregunta es demostrar que todas las involuciones de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ son las aplicaciones proyectivas asociadas a las transvecciones. Sea F una homografía de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ involutivo (i.e. $F^2 = \mathrm{Id} \in PSL(3,\mathbb{F}_4)$) y $f \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ tal que $P(f) = F$.
   (a) Demostrar que $P(f^3) = F$ y que f^3 es de orden 2 en $SL(3,\mathbb{F}_4)$. Se denota $g = f^3$.
   (b) ¿Cuál es la característica de $\mathbb{F}_4$? Demostrar que $(g-\mathrm{Id})^2 = 0$. Determinar $\dim\ker(g-\mathrm{Id})$ y $\dim Im(g-\mathrm{Id})$.

(c) Concluir.

5. Estudiando las clases de conjugación de los elementos de orden 2, determinar si $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ y $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ son isomorfos.

Solución ▼ [007725]

269 323.00 Anillos, cuerpos

Ejercicio 6404

1. Encontrar $999 \cdot 1998 \bmod 1999$, $136^7 \bmod 137$, $1997 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 \bmod 2001$.
2. Encontrar $2792^{217} \bmod 5$ y $10^{1000} \bmod 13$.

[002240]

Ejercicio 6405

1. Examinar los cuadrados $a^2 \bmod n$, para $n = 3,\ 4,\ 8$.
2. Examinar $a^3 \bmod 9$ y $b^4 \bmod 16$.

[002241]

Ejercicio 6406

Pasar $\bmod n$, con un módulo apropiado y demostrar que cada una de las siguientes ecuaciones no tiene solución en $\mathbb{Z}$:

1. $3x^2+2=y^2$;
2. $x^2+y^2=n$, para $n=2003,\ 2004$;
3. $x^2+y^2+z^2=1999$;
4. $x^3+y^3+z^3=5$;
5. $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{15}^4=7936$.

[002242]

Ejercicio 6407

Se dice que $a \bmod n$ es invertible si existe $b \bmod n$ tal que $ab \equiv 1 \bmod n$.

1. Encontrar todos los elementos invertibles módulo 5, 6, 9, 11.
2. Encontrar $\mathrm{mcd}(107,281)$ y su representación lineal utilizando *el algoritmo de Euclides*.
3. Encontrar el inverso de $107 \bmod 281$ y el reverso de $281 \bmod 107$.
4. Demostrar que $a \bmod n$ es invertible si y solo si a y n son primos entre sí.

[002243]

Ejercicio 6408

Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{Z}$:

1. $2x+3 \equiv 10 \bmod 13$;

2. $\begin{cases} 2x+3y \equiv 5 \bmod 7 \\ 5x+2y \equiv 2 \bmod 7; \end{cases}$

3. $x^2+2x+14 \equiv 0 \bmod 17.$

[002244]

Ejercicio 6409 El pequeño teorema de Fermat

Sea p un número primo y a un número primo a p. Demostrar que :

1. $am \equiv an \bmod p$ si y solo si $m \equiv n \bmod p$;
2. La sucesión a, $2a$, $3a, \ldots, (p-1)a \bmod p$ es una permutación de la sucesión 1, 2, $3, \ldots, (p-1) \bmod p$;
3. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

[002245]

Ejercicio 6410

1. Examinar $7^n + 11^n \bmod 19$.
2. Encontrar $2792^{217} \bmod 5$ y $10^{1000} \bmod 13$.
3. Demostrar que 13 divide $2^{70}+3^{70}$ y 11 divide $2^{129}+3^{118}$.

[002246]

Ejercicio 6411 Teorema de Wilson

Sea $p = 2m+1$ un número primo. Demostrar que :

1. $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$;
2. $(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \bmod p$.

[002247]

Ejercicio 6412

Sea $p > 2$ un número primo.

1. Sea a primo con p. Se supone que la congruencia $x^2 \equiv a \bmod p$ tiene una solución. Demostrar que $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$.
2. La congruencia $x^2 \equiv -1 \bmod p$ tiene solución si $p \equiv 1 \bmod 4$.

[002248]

Ejercicio 6413

Dar la definición de cuerpo. ¿Las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ son equivalentes en la definición ?

Solución ▼ [002249]

Ejercicio 6414

Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones :

1. $ax+b=c$ $(a,b,c \in K$, K es un cuerpo$)$;

2. $2x \equiv 3 \bmod 10$ y $2x \equiv 6 \bmod 10$ en el anillo $\mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002250]

Ejercicio 6415

Sea A un anillo. Demostrar que :

1. $\forall a \in A \;\; 0_A \cdot a = 0_A$;
2. $(-1_A) \cdot a = -a$;
3. $|A| \geqslant 2 \iff 1_A \neq 0_A$ en A.

Solución ▼ [002251]

Ejercicio 6416

1. Si $x \cdot y$ es invertible en un anillo A, entonces x e y son invertibles.
2. En un anillo, un elemento invertible no es divisor de cero y un divisor de cero no es invertible.

Solución ▼ [002252]

Ejercicio 6417

Demostrar que todo anillo íntegro finito es un campo.

Indicación ▼ Solución ▼ [002253]

Ejercicio 6418

¿Cuáles de estos subconjuntos dados de $\mathbb{C}$ son anillos ? ¿Cuáles son cuerpos ?

1. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;
2. $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1, p \nmid n\}$ (p es un número primo fijo) ;
3. $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, $\;\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$;
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $\;\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Solución ▼ [002254]

Ejercicio 6419

Los elementos invertibles de un anillo A forman el grupo multiplicativo $(A^\times, \cdot)$.

1. Encontrar $A^\times$, para los anillos 1. y 2. del ejercicio 6418.
2. Encontrar el grupo $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ usando la norma compleja.
3. Demostrar que el grupo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ es infinito.

[002255]

Ejercicio 6420

Un elemento a de un anillo A se llama nilpotente, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Encontrar todos los elementos invertibles, divisores de cero, los nilpotentes de los siguientes anillos :

1. $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$;
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;

3. Demostrar que, para todo nilpotente x de A, el elemento $1+x$ es invertible.

[002256]

Ejercicio 6421

Sea I un ideal de un anillo A. Se denota por $(a) = a \cdot A$ el ideal principal generado por a. Demostrar que :

1. $I = A$ si y solo si I contiene una unidad ;
2. $(a) = A$ si y solo si a es invertible ;
3. Un anillo A es un cuerpo si y solo si (0) es el único ideal propio de A.

[002257]

Ejercicio 6422

Demostrar que los elementos nilpotentes de un anillo forman un ideal. [002258]

Ejercicio 6423 Sumas y productos de ideales

1. Sean I, J dos ideales de un anillo A. Demostrar que
$$I \cap J, \quad I+J = \{x+y \,|\, x \in I, y \in J\}$$
son de los ideales de A.
2. Demostrar que $I+J$ es el ideal más pequeño de A conteniendo I y J.
3. Sea $n, m \in \mathbb{Z}$, $I = (n) = n\mathbb{Z}$, $J = (m) = m\mathbb{Z}$. Encontrar $I \cap J$ y $I+J$.
4. Demostrar que
$$I \cdot J = \{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \,|\, n \in \mathbb{N},\ x_k \in I,\ y_k \in J \text{ para } 1 \leqslant k \leqslant n\}$$
es un ideal. Se llama *producto de ideales* I y J.
5. Se consideran los ideales $I = (x_1, \ldots x_n) = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ y $J = (y_1, \ldots y_m) = Ay_1 + \cdots + Ay_m$. Describir los ideales $I+J$, $I \cdot J$, I^2 en función de x_k, y_l.

[002259]

Ejercicio 6424 Ideales extranjeros

1. Demostrar que $I \cdot J \subset I \cap J$ y $(I+J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
2. Se dice que dos ideales I y J de A son *extranjeros* si $I+J = A$. Demostrar que $I \cap J$=$I \cdot J$ si I, J son extranjeros.

[002260]

Ejercicio 6425

Sean A un anillo, I y J los ideales de A tales que $I+J = (1)$. Demostrar que $I^n + J^m = (1)$ cualesquiera que sean enteros positivos no nulos n y m.

Solución ▼ [002300]

Ejercicio 6426

Encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas :

1. $\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \equiv 997 \bmod 2001 \\ x \equiv 998 \bmod 2002 \\ x \equiv 999 \bmod 2003. \end{cases}$

Solución ▼ [002301]

Ejercicio 6427

Demostrar que los siguientes anillos son isomorfos

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}.$$

Solución ▼ [002302]

Ejercicio 6428

1. Demostrar que $20^{15} - 1$ es divisible por $11 \times 31 \times 61$.
2. Hallar el resto de la división de 2^{6754} por 1155.

Solución ▼ [002303]

Ejercicio 6429

1. ¿Cuáles son los restos de la división de 10^{100} por 13 y por 19 ?
2. ¿Cuál es el resto de la división de 10^{100} por $247 = 13 \cdot 19$? Deducir que $10^{99} + 1$ es múltiplo de 247.

Solución ▼ [002304]

Ejercicio 6430

Sea $C = A \times B$ el producto directo de dos anillos. Describir conjuntos de elementos invertibles, divisores de cero y elementos nilpotentes del anillo C.

Solución ▼ [002305]

Ejercicio 6431

1. Determinar la estructura de los anillos cocientes siguientes :

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + x + 1), \quad \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1), \quad \mathbb{Q}[x]/(x^8 - 1).$$

2. Se considera el anillo cociente $K[x]/(f^n g^m)$, donde f y g son dos polinomios irreducibles distintos sobre el cuerpo K. Describir los divisores de cero y los elementos nilpotentes del anillo $K[x]/(f^n g^m)$.
3. ¿Cuáles son los ideales de este anillo ?
4. Sea K el cuerpo finito de p elementos. Encontrar el número de elementos del grupo multiplicativo del anillo $K[x]/(f^m g^l)$.
5. Dar una generalización de la pregunta 4) en el caso del producto de n polinomios irreducibles sobre un campo finito K de q elementos.

Solución ▼ [002306]

Ejercicio 6432

Encontrar los factores múltiplos de los siguientes polinomios :

1. $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;
2. $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$.

Solución ▼ [002307]

Ejercicio 6433

Encontrar el polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$ del grado más pequeño tal que

$$\begin{cases} f \equiv 2x \bmod (x-1)^2 \\ f \equiv 3x \bmod (x-2)^3. \end{cases}$$

[002308]

Ejercicio 6434

Sea $\sqrt{d}$ no racional. En el anillo

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{n + m\sqrt{d} \,|\, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

se define la "conjugación" $\bar{z}$:

$$\text{si } z = n + m\sqrt{d}, \text{ entonces } \bar{z} = n - m\sqrt{d}.$$

También podemos definir la norma $N_d : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}$ por $N_d(z) = z\bar{z} = (n + m\sqrt{d})(n - m\sqrt{d})$.

Demostrar que las aplicaciones $\bar{z}$ y $N(z)$ son multiplicativas :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \qquad N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2).$$

Solución ▼ [002309]

Ejercicio 6435

1. Demostrar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es invertible si y solo si $N_d(z) = \pm 1$. Determinar los elementos invertibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. Demostrar que si $N_d(z) = \pm p$, donde p es un primo, entonces z es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Dar algunos ejemplos de elementos irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, para $d = -1, 2, -6, p$, donde p un primo.
3. Se denota $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Demostrar que 3 y $2 + \sqrt{-5}$ son irreducibles en A.
4. Encontrar todos los irreducibles de A de norma 9.
5. Encontrar todos los divisores de 9 y de $3(2 + \sqrt{-5})$ en el anillo A módulo asociación.
6. Encontrar un *mcd* $(3, 2 + \sqrt{-5})$, y demostrar que 3 y $2 + \sqrt{-5}$ no tiene *mcm* en el anillo A.
7. Demostrar que el ideal $I = (3, 2 + \sqrt{-5}) \subset A$ no es principal. Entonces el anillo A no es principal. ¿Es factorial ?
8. Demostrar que 9 y $3(2 + \sqrt{-5})$ no tiene *mcd* en A. ¿Tienen un *mcm* ?

Solución ▼ [002310]

Ejercicio 6436

Sea $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ el anillo de enteros módulo 36.

1. Describir todos los elementos invertibles, todos los divisores de cero y todos los elementos nilpotentes del anillo $\mathbb{Z}_{36}$. (*Un elemento a de un anillo A se dice nilpotente si existe n tal que* $a^n = 0$.)
2. Encontrar todos los ideales de anillo $\mathbb{Z}_{36}$.
3. Sea A un anillo arbitrario. Demostrar que
$$(a \in A^\times \text{ y } b \in A^\times) \Longleftrightarrow (a \cdot b) \in A^\times.$$
4. Dar un ejemplo de un polinomio invertible de grado 1 sobre $\mathbb{Z}_{36}$.
5. Describir todos los elementos invertibles del anillo $\mathbb{Z}_{36}[x]$.

Solución ▼ [002311]

Ejercicio 6437

Demostrar que los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$:

1. $P = x^{2004} + 4x^{2002} + 2000x^4 + 2002$;
2. $Q = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 25$.

Solución ▼ [002312]

Ejercicio 6438

Sea p un número primo impar. Demostrar que la congruencia $x^2 \equiv -1 \bmod p$ tiene solución si y solo si $p \equiv 1 \bmod 4$.

Solución ▼ [002313]

Ejercicio 6439

Sean $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ dos polinomios sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$.

1. Usando el algoritmo de Euclides encontrar el m.c.d. de f y g y su representación lineal.
2. ¿Los polinomios f y g son irreducibles ?
3. Sea (g) el ideal principal generado por g. ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $A = \mathbb{Z}_2[x]/(g)$?
4. Sea $\pi : \mathbb{Z}_2[x] \to A$ la proyección canónica. Se define $\pi(x) = \bar{x} \in A$. Encontrar el inverso del elemento $\pi(f)$ en el anillo cociente A.
5. ¿El anillo cociente $B = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ es un cuerpo ? Justificar la respuesta, i.e. dar una demostración si B es un cuerpo o encontrar un elemento no invertible en B en el caso contrario.

Solución ▼ [002314]

Ejercicio 6440

¿Son anillos los siguientes conjuntos con respecto a las operaciones usuales de suma y multiplicación ? ¿Son cuerpos ?

(a) $\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{1,2,4\}\right\}$; (b) $\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{2^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\right\}$; (c) $\mathbb{Z} + \sqrt{5}\mathbb{Z}$;
(d) $\mathbb{Z} + \sqrt[3]{5}\mathbb{Z}$; (e) $\mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z} + \sqrt[3]{4}\mathbb{Z}$;

Ejercicio 6441

1. Demostrar que existe un morfismo de anillos y solo uno de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Demostrar que no existe morfismo de anillos de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. m y n son enteros positivos, encontrar las condiciones para que exista un morfismo de anillos de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[006503]

Ejercicio 6442

Demostrar que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tiene exactamente tres subanillos. [006504]

Ejercicio 6443

En $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ demostrar que los múltiplos de 5 forman un anillo isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que no es un subanillo de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. [006505]

Ejercicio 6444

Sea $M_n(F)$ el anillo de matrices en un cuerpo F.

1. Demostrar que si X es una matriz no degenerada, entonces $XY \neq 0$ y $YX \neq 0$, $\forall Y \neq 0$.
2. Sea $X \in M_n(F)$ y sea la aplicación lineal $f_X : F^n \to F^n$, $f_X(v) := Xv$. Encontrar una escritura de la relación $XY = 0$, X, $Y \in M_n(F)$ en términos de núcleos e imágenes de aplicaciones f_X, f_Y. La misma pregunta para la relación $YX = 0$. Deducir que toda matriz degenerada no-nula es un divisor de 0.
3. Demostrar que todo ideal bilateral de $M_n(F)$ contiene, con una matriz de rango r, todas las matrices diagonales de rango r.
4. Demostrar que un ideal que contiene una matriz no degenerada coincide con $M_n(F)$.
5. Para demostrar que los únicos ideales de $M_n(F)$ son 0 y $M_n(F)$.

[006506]

Ejercicio 6445

1. Demostrar que la imagen inversa de un ideal por un morfismo de anillo es un ideal.
2. Demostrar con un contra-ejemplo que la imagen de un ideal por un morfismo de anillo no siempre es un ideal. Demostrar que la afirmación anterior es verdadera si el morfismo es sobreyectivo.
3. ¿Qué se puede decir sobre la imagen inversa y la imagen de un ideal primo/maximal por un morfismo de anillo eventualmente sobreyectivo ?

[006507]

Ejercicio 6446

Encontrar los ideales maximales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [006508]

Ejercicio 6447

Demostrar que todo anillo íntegro finito es un cuerpo. [006509]

Ejercicio 6448

Sea A un anillo principal. Demostrar que $(a_1,\dots,a_n)=(d)$ si y solo si $d\sim \mathrm{mcd}(a_1,\dots,a_n)$. [006510]

Ejercicio 6449

Demostrar que todo morfismo de cuerpo es inyectivo. [006511]

Ejercicio 6450

Sea p un número primo y A un anillo íntegro de característica p.

1. Demostrar que $p\cdot a=0$, para todo $a\in A$.
2. Demostrar que $p|C_p^k$, $\forall k=1,\dots p-1$, y deducir que la aplicación $F_p:A\to A$, $F_p(a)=a^p$, es un endomorfismo de anillo. Se llama F_p *el endomorfismo de Frobenius*.
3. Demostrar que $F_p(a)=a$, para todo a en el subanillo más pequeño A_0 de A conteniendo 1.
4. Demostrar que F_p es un automorfismo si A es finito.
5. Demostrar que $(\Sigma a_i b_i)^{p^k}=\Sigma a_i^{p^k} b_i^{p^k}$, $\forall a_i,\ b_i\in A,\ k\in\mathbb{N}^*$.

[006512]

Ejercicio 6451

Sea A un anillo íntegro y $a,b,c\in A\setminus\{0\}$. Demostrar que, siempre que existan los siguientes mcd, se tiene las igualdades :

1. $\mathrm{mcd}(ca,cb)\sim c\,\mathrm{mcd}(a,b)$
2. $\mathrm{mcd}(\mathrm{mcd}(a,b),c)\sim \mathrm{mcd}(a,\mathrm{mcd}(b,c))$.

   Si A es además factorial, demostrar que

3. $\mathrm{mcd}(a,b)\sim 1$ y $\mathrm{mcd}(a,c)\sim 1$ implica $\mathrm{mcd}(a,bc)\sim 1$.
4. Si $a|bc$ y $\mathrm{mcd}(a,b)\sim 1$, entonces $a|c$.
5. Si $b|a$ y $c|a$ y $\mathrm{mcd}(b,c)\sim 1$, entonces $(bc)|a$.

[006513]

Ejercicio 6452

Demostrar que en $\mathbb{Z}[i]$ 3 es primo y 2 no lo es. [006514]

Ejercicio 6453

Demostrar que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ y $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ no son anillos factoriales. [006515]

Ejercicio 6454

1. Demostrar que $\mathbb{Z}[X]$ es un anillo factorial.
2. En $\mathbb{Z}[X]$ demostrar que el conjunto de polinomios de término constante un número par es un ideal pero no principal. Deducir que $\mathbb{Z}[X]$ es un anillo no principal.
3. Demostrar que el ideal (X) es primo pero no maximal en $\mathbb{Z}[X]$.

[006516]

Ejercicio 6455

Demostrar que el anillo de los enteros $\mathfrak{o}_{19}$ del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}[i\sqrt{19}]$ es principal pero no euclidiano. [006517]

Ejercicio 6456

Sea A un anillo conmutativo y sea

$$Nil\ (A) := \{a \in A \mid \exists n \in N,\ a^n = 0\}\ .$$

1. Demostrar que $Nil\ (A)$ es un ideal de A.
2. Demostrar que si P es un ideal primo de A, entonces $Nil\ (A) \subset P$.
3. Demostrar que para todo $x \notin Nil\ (A)$ existe un ideal primo P tal que $x \notin P$. (*Indicación* : Utilizar el teorema de Zorn).
4. Deducir que
$$Nil\ (A) = \bigcap_{P \text{ primo}} P\ .$$

[006518]

Ejercicio 6457

1. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}),\ d = 7,\ 11$, es un cuerpo.
2. Demostrar que $a + b\sqrt{7} \to a + b\sqrt{11}$ no es un isomorfismo de campo entre $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.
3. Demostrar que los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ no son isomorfos.

[006519]

Ejercicio 6458

F y F' son dos cuerpos, demostrar que $F \times F'$ tiene solo dos ideales no triviales, y que es un anillo principal. [006520]

Ejercicio 6459

Demostrar que $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \text{ impar }\}$ es un anillo principal. [006521]

Ejercicio 6460

Resolver las siguientes congruencias simultáneas :

1. $x \equiv 2 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod 6$;

2. $3x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 1 \pmod 6$.

[006522]

Ejercicio 6461

Demostrar que dos congruencias en $\mathbb{Z}$ de la forma

$$mx \equiv c \pmod a, \; nx \equiv d \pmod b$$

tienen una solución común $x \in \mathbb{Z}$ cuando los coeficientes satisfacen las condiciones $\text{mcd}(a,b) = 1$, $\text{mcd}(a,m) = 1$, $\text{mcd}(n,b) = 1$. [006523]

Ejercicio 6462

1. Para los anillos de polinomios sobre un cuerpo F demostrar que $F[x]/(x^2-1) \simeq F[x]/(x^2-4)$, $F[x]/(x^2+1) \simeq F[x]/(x^2+2x+2)$, $F[x,y]/(x+y) \simeq F[x]$, $F[x]/(x+1) \simeq F$.
2. Demostrar que $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Z}[i]$. Deducir del último isomorfismo que (x^2+1) es un ideal primo no maximal.

[006524]

Ejercicio 6463

Si M es un ideal maximal de un anillo íntegro A demostrar que el anillo local A_M tiene exactamente un ideal maximal. [006525]

Ejercicio 6464 Polarización

1. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{F}_3[X]/X^2+1$ es un cuerpo que se denota $\mathbb{F}_9$. Se denota $\xi := [X]$ la clase del polinomio X. Demostrar que $(1,\xi)$ es una base de $\mathbb{F}_9$ como $\mathbb{F}_3$-espacio vectorial.
   Se definen las aplicaciones $\ell_i : \mathbb{F}_9 \to \mathbb{F}_3$, para $i = 1,2$ por condición
   $$\forall \lambda \in \mathbb{F}_9, \quad \lambda = \ell_1(\lambda) + \ell_2(\lambda)\xi.$$
2. Sea $\sigma : \mathbb{F}_9 \mapsto \mathbb{F}_9$ definido por $\sigma(x) = x^3$. Demostrar que σ es un automorfismo de campo de $\mathbb{F}_9$ de orden 2. Calcular $\sigma(\xi)$.
3. Demostrar que, para todo $\lambda \in \mathbb{F}_9$,
   $$\begin{aligned} \ell_2(\lambda) &= -\ell_1(\xi\lambda) \\ 2\ell_1(\lambda) &= \lambda + \sigma(\lambda) \\ 2\xi\ell_2(\lambda) &= \lambda - \sigma(\lambda). \end{aligned}$$
4. *(Polarización)* Sea E un $\mathbb{F}_9$-espacio vectorial. Sea h una forma σ-hermitiana sobre E. Sea q la forma cuadrática asociada (i.e. para $x \in E$, $q(x) = h(x,x)$). Sea $(x,y) \in E^2$. Calcular $\ell_1(f(x,y))$ en función de q y deducir $f(x,y)$ en función de q.
5. Deducir que los subespacios totalmente isotrópicos para h son exactamente los subespacios vectoriales de E contenidos en el cono isotrópico de h.

Ejercicio 6465

1. Se considera la aplicación $\sigma : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Demostrar que es un automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{F}_{25}$.
2. ¿Las siguientes formas en $\mathbb{F}_{25}^3$ son σ-sesquilineales ?

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5.$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5.$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.$$

3. ¿Entre las formas σ-sesquilineales precedentes, cuáles son equivalentes ?

[007736]

Ejercicio 6466

Sea E un $\mathbb{F}_{3^2}$ espacio vectorial. Sea $\sigma : \mathbb{F}_{3^2} \mapsto \mathbb{F}_{3^2}$ definido por $\sigma(x) = x^3$.

1. Demostrar que σ es un automorfismo de campo de $\mathbb{F}_{3^2}$ de orden 2. Sea h una forma σ-hermitiana sobre E.
2. Demostrar que existe un elemento $\xi \in \mathbb{F}_{3^2}$ tal que $\xi^2 + 1 = 0$ y $\mathbb{F}_{3^2} = \mathbb{F}_3[\xi]$.
3. Demostrar $\xi^3 = -\xi$. Se define las aplicaciones $\ell_i : \mathbb{F}_{3^2} \to \mathbb{F}_3$, para $i = 1,2$ por condición
$$\forall x \in \mathbb{F}_{3^2}, x = \ell_1(x) + \ell_2(x)\xi.$$
4. Demostrar que, para todo $x \in \mathbb{F}_{3^2}$, $x + \sigma(x) = \ell_1(x)$ y $x - \sigma(x) = \xi\ell_2(x)$.
Sea W un subespacio vectorial de E. Sean $x, y \in W$.
5. *(Polarización)* Describir $h(x,y)$ como un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}_{3^2}$ en los $(h(u,u))_{u \in W}$.
6. Deducir que los subespacios totalmente isotrópicos para h son exactamente los subespacios vectoriales de E contenidos en el cono isotrópico de h.

[007737]

270 324.00 Polinomio

Ejercicio 6467

1. Sea A un anillo cualquiera. Entonces el anillo de polinomios $A[x]$ no es un cuerpo.
2. Demostrar que para un anillo íntegro A, los polinomios lineales unitarios de $A[x]$ son irreducibles.

3. Describir todos los polinomios irreducibles de $\mathbb{C}[x]$ y de $\mathbb{R}[x]$.
4. Demostrar que para todo cuerpo K, el anillo de polinomios $K[x]$ tiene una infinidad de polinomios mónicos irreducibles.

Solución ▼ [002261]

Ejercicio 6468

1. Demostrar que el ideal (x,n), donde $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ del anillo $\mathbb{Z}[x]$ no es principal.
2. Sea A un anillo íntegro. Demostrar que $A[x]$ es principal si y solo si A es un cuerpo.

Solución ▼ [002262]

Ejercicio 6469

Sea $f(x) \in A[x]$ un polinomio sobre un anillo A. Se supone que $(x-1) \mid f(x^n)$. Demostrar que $(x^n-1) \mid f(x^n)$.

Solución ▼ [002263]

Ejercicio 6470

Para $n,m \geqslant 2$, determinar el resto de la división euclidiana de polinomio $(x-2)^m + (x-1)^n - 1$ por $(x-1)(x-2)$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución ▼ [002264]

Ejercicio 6471

1. Si K es un cuerpo, demostrar que un polinomio P de grado 2 o 3 en $K[x]$ es irreducible si y solo si no hay ningún cero en K.
2. Encontrar todos los polinomios irreducibles de grado 2, 3, con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Usando la parte anterior, demostrar que los polinomios $5x^3+8x^2+3x+15$ y $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$.
4. Describir todos los polinomios irreducibles de grado 4 y 5 sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002265]

Ejercicio 6472

1. Encontrar todos los polinomios irreducibles de grado 2, 3, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. Descomponer los siguientes polinomios en factores irreducibles en $\mathbb{F}_3[x]$.

$$x^2+x+1, \qquad x^3+x+2, \qquad x^4+x^3+x+1\ .$$

Solución ▼ [002266]

Ejercicio 6473

Usando las reducciones $\bmod 2$ o $\bmod 3$ demostrar que los polinomios

$$x^5-6x^3+2x^2-4x+5, \quad 7x^4+8x^3+11x^2-24x-455$$

son irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución ▼ [002267]

Ejercicio 6474

Sean $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1, \quad g(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$, donde $a_1,\ldots a_n\in\mathbb{Z}$ son dos a dos distintos. Demostrar que f y g son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.

Solución ▼ [002268]

Ejercicio 6475

Sean $f,g\in\mathbb{Q}[x]$. Se supone que f sea irreducible y que existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $f(\alpha)=g(\alpha)=0$. Entonces f divide g.

Solución ▼ [002269]

Ejercicio 6476

¿Para cuál n, m en $\mathbb{Z}$ la fracción

$$\frac{11n+2m}{18n+5m}$$

es reducible ?

Solución ▼ [002270]

Ejercicio 6477

Encontrar el $\operatorname{mcd}(x^n-1,\ x^m-1)$ en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución ▼ [002271]

Ejercicio 6478

Encontrar el $\operatorname{mcd}(f,g)$ en $\mathbb{Z}_2[x]$ y su representación lineal $fu+gv$, donde $d,u,v\in\mathbb{Z}_2[x]$:

1. $f=x^5+x^4+1, \quad g=x^4+x^2+1$;
2. $f=x^5+x^3+x+1, \quad g=x^4+1$.

Solución ▼ [002272]

Ejercicio 6479

Encontrar el $\operatorname{mcd}(f,g)$ en $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$ de $f=x^4+1$, $g=x^3+x+1$.

Solución ▼ [002273]

Ejercicio 6480

Encontrar el $\operatorname{mcd}(f,g)$ en $\mathbb{Z}[x]$ de $f=x^4+x^3-3x^2-4x-1$ y $g=x^3+x^2-x-1$.

Solución ▼ [002274]

Ejercicio 6481

Demostrar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$:

1. $f=x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
2. $f=x^5-12x^3+36x-12$;
3. $f=x^4-x^3+2x+1$;
4. $f=x^{p-1}+\cdots+x+1$, donde p es primo.

Solución ▼ [002275]

Ejercicio 6482

Sean $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y K su cuerpo de fracciones. Demostrar que $x^2 - x + 1$ es irreducible en $A[x]$, sin por lo tanto ser irreducible en $K[x]$. Explicar la aparente contradicción con el corolario del lema de Gauss.

Solución ▼ [002276]

Ejercicio 6483

Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$.

1. Se supone que $P(0)$, $P(1)$ son impares. Demostrar que P no tiene raíz en $\mathbb{Z}$.
   (*Indicación :* Utilizar la reducción módulo 2.)
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que ninguno de los enteros $P(0), \ldots, P(n-1)$ no es divisible por n. Demostrar que P no tiene raíz en $\mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002277]

Ejercicio 6484

1. Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$. Sea $\frac{a}{b}$ su raíz racional : $P(\frac{a}{b}) = 0$, $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$. Demostrar que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (a - bk)$ divide $P(k)$.
2. ¿Qué raíces racionales tienen los polinomios $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ y $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$?

Solución ▼ [002278]

Ejercicio 6485

1. Sean $P \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, $m = P(n)$. Demostrar que $\forall k \in \mathbb{Z} \quad m \mid P(n + km)$.
2. Deducir que no existe polinomio $P \in \mathbb{Z}[x]$, no constante, tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ sea un número primo.

Solución ▼ [002279]

Ejercicio 6486

En el curso ya hemos demostrado que el producto de polinomios primitivos es también primitivo y que

$$c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g) \qquad \forall f, g \in \mathbb{Z}[x].$$

1. Dado $f \in \mathbb{Q}[x]$, entonces $f = \alpha \cdot f_0$, donde $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio primitivo y $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Sea $g \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio primitivo, $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \cdot g \in \mathbb{Z}[x]$. Entonces $\alpha \in \mathbb{Z}$.
3. Se consideran dos polinomios d, f sobre $\mathbb{Z}$. Si d es primitivo y d divide f en $\mathbb{Q}[x]$, entonces d divide f en $\mathbb{Z}[x]$.
4. Se supone que $d = \mathrm{mcd}_{\mathbb{Q}[x]}(f, g)$ ya sea el m.c.d. en el anillo $\mathbb{Q}[x]$ de dos polinomios primitivos f y g de $\mathbb{Z}[x]$. Sea $d = \alpha \cdot d_0$ su representación de tipo 1). Demostrar que : $d_0 = \mathrm{mcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f, g)$ en el anillo $\mathbb{Z}[x]$.
5. Sean f, $g \in \mathbb{Z}[x]$, $f = c(f) f_0$, $g = c(g) g_0$. Entonces

$$\mathrm{mcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f, g) = \mathrm{mcd}_{\mathbb{Z}}(c(f), c(g)) \cdot \mathrm{mcd}_{\mathbb{Z}[x]}(f_0, g_0).$$

Solución ▼ [002280]

Ejercicio 6487

Demostrar que todo morfismo de un campo en un anillo no trivial es inyectivo.

Solución ▼ [002281]

Ejercicio 6488

Sea R un anillo íntegro en el que cada cadena decreciente de ideales es finita. Demostrar que R es un cuerpo.

Solución ▼ [002282]

Ejercicio 6489

Demostrar que en un anillo finito todo ideal primo es maximal.

Solución ▼ [002283]

Ejercicio 6490

Demostrar que un ideal propio I del anillo A es primo si y solo si cuando el producto de dos ideales está contenido en I, entonces uno de ellos está contenido en I. Deducir que si M es un ideal maximal de A, entonces el único ideal primo de A que contiene M^n es M.

Solución ▼ [002284]

Ejercicio 6491

Sea A un anillo. Encontrar los anillos cocientes

$$A[x]/(x), \quad A[x,y]/(x), \quad A[x,y]/(x,y), \quad A[x_1,x_2,\ldots,x_n]/(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

donde (x), (x,y), $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ son los ideales engendrados respectivamente por x, x e y, $x_1,x_2,\ldots,x_n$. ¿Bajo qué condición sobre el anillo A estos ideales son primos (maximales)?

Solución ▼ [002285]

Ejercicio 6492

1. Encontrar el número de elementos del anillo cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$.
2. ¿El ideal principal generado por 2 es primo en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Solución ▼ [002286]

Ejercicio 6493

Sea A un anillo íntegro. Se llama *elemento primario* de A un elemento que genera un ideal principal primo.

1. Demostrar que un elemento primo es irreducible.
2. Según el curso todo elemento irreducible en un anillo factorial es primo. Demostrar que en un anillo factorial, cada ideal primo no nulo contiene un elemento irreducible.
3. Se ha visto que el elemento $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es irreducible. Demostrar que 3 no es el primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
4. ¿El elemento 2 es irreducible en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

Solución ▼ [002287]

Ejercicio 6494

1. Sea A un anillo principal, I un ideal de A. Demostrar que todos los ideales del anillo cociente A/I son principales.
2. Encontrar todos los ideales de los siguientes anillos : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]/(f)$, donde (f) es el ideal principal generado por un polinomio f.
3. Encontrar los ideales maximales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.

Solución ▼ [002288]

Ejercicio 6495

Sea I y J dos ideales del anillo A. Se considera la proyección canónica $\pi_I : A \to A/I$ y la imagen $\bar{J} = \pi_I(J)$ del ideal J.

1. Demostrar que $\bar{J}$ es un ideal del anillo cociente A/I.
2. Demostrar que se tiene el siguiente isomorfismo : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I+J)$.
   (*Indicación :* Considerar el morfismo $a+I \mapsto a+(I+J)$ del anillo A/I al anillo $A/(I+J)$.)

Solución ▼ [002289]

Ejercicio 6496

Sea f un morfismo del anillo A al anillo B.

1. Demostrar que la imagen inversa de un ideal primo es también un ideal primo. ¿Es esta proposición cierta para los ideales maximales ?
2. Demostrar con un ejemplo, que la imagen $f(I)$ de un ideal I de A no es necesariamente un ideal B. Demostrar sin embargo, que si f es sobreyectiva, entonces $f(I)$ es un ideal para todo ideal I de A. (Ver el curso.)
3. Todavía bajo la hipótesis que f es sobreyectiva, demostrar que la imagen de un ideal maximal por f es ya sea B todo entero, o ya sea un ideal máximo de B.
4. Se considera la reducción de polinomios en $\mathbb{Z}$ módulo m : $r_m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_m[x]$ y dos ideales primos principales (x) y (x^2+1). Los ideales $r_6((x))$ y $r_2((x^2+1))$ son primos ?

Solución ▼ [002290]

Ejercicio 6497

Sea A un anillo, B un subanillo de A, I un ideal de A.

1. Demostrar que $B \cap I$ es un ideal de B, $B+I = \{b+i \,|\, b \in B,\ i \in I\}$ es un subanillo del anillo A e I es un ideal de este subanillo.
2. Demostrar que el anillo cociente $B/(B \cap I)$ es isomorfo al anillo cociente $(B+I)/I$.
   (*Indicación :* Considerar la composición de la inclusión $B \to B+I$, con la proyección canónica $B+I \to (B+I)/I$.)

Solución ▼ [002291]

Ejercicio 6498

Sea (x^3-x+2) el ideal principal generado por x^3-x+2 en el anillo $\mathbb{Q}[x]$.

1. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ es un cuerpo.
2. Sea y la imagen de x en $\mathbb{Q}[x]/(x^3-x+2)$ por sobreyección canónica. Calcular su inversa.
3. Demostrar que $1+y+y^2$ es no nulo y calcular su inversa.

Solución ▼ [002292]

Ejercicio 6499

Sea $f \in A[x]$ un polinomio primitivo de grado positivo sobre el anillo factorial A. Sea $\pi \in A$ un elemento irreducible. Suponga que el coeficiente principal de f no es divisible por π y que $f \bmod \pi$ es irreducible en el anillo cociente $A/(\pi)$. Demostrar que f es irreducible en $A[x]$.

Solución ▼ [002293]

Ejercicio 6500

¿Son irreducibles los siguientes polinomios ?

1. $X^5+121X^4+1221X^3+12221X^2+122221X+222222$ en $\mathbb{Q}[X]$.
2. $f(X,Y)=X^2Y^3+X^2Y^2+Y^3-2XY^2+Y^2+X-1$ en $\mathbb{C}[X,Y]$ y $\mathbb{F}_2[X,Y]$.
3. $f(X,Y)=Y^7+Y^6+7Y^4+XY^3+3X^2Y^2-5Y+X^2+X+1$ en $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Solución ▼ [002294]

Ejercicio 6501

¿El ideal principal (x^2+y^2+1) es maximal en los anillos $\mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{R}[x,y]$, $\mathbb{Q}[x,y]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x,y]$?

Solución ▼ [002295]

Ejercicio 6502

1. Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$. Se considera la reducción del polinomio f módulo m : $f \bmod m \in \mathbb{Z}_m[x]$. Demostrar que
$$\mathbb{Z}[x]/(m,f) \cong \mathbb{Z}_m[x]/(f \text{ mod } m)$$
donde (m,f) es el ideal generado por m y f en $\mathbb{Z}[x]$ y $(f \text{ mod } m)$ es el ideal generado por $f \bmod m$ en $\mathbb{Z}_m[x]$. (*Indicación :* Utilizar el ejercicio 10 de registro 4.)
2. Si p es un número primo y f es un polinomio tal que $f \bmod p$ es irreducible en el cuerpo $\mathbb{Z}_p$, entonces el ideal (p,f) es maximal en $\mathbb{Z}[x]$.

[002296]

Ejercicio 6503

Sea A un anillo factorial.

1. Para $a,b \neq 0$ se tiene $(a)\cdot(b)=(a)\cap(b)$ si y solo si $\operatorname{mcd}(a,b)\sim 1$.
2. Si (a,b) es principal, entonces $(a,b)=(\operatorname{mcd}(a,b))$.

Solución ▼ [002297]

Ejercicio 6504

1. Demostrar que los ideales $(5,x^2+3)$, $(x^2+1,x+2)$, (x^3-1,x^4-1) no son principales en $\mathbb{Z}[x]$.

2. Los ideales $(x,x+1)$, $(5,x^2+4)$ y $(x^2+1,x+2)$ son primos o maximales en $\mathbb{Z}[x]$?

Solución ▼ [002298]

Ejercicio 6505

Demostrar que si J es un ideal primo del anillo $\mathbb{Z}[x]$, entonces

$$J=(0), \quad (p), \quad (f) \quad \text{o} \quad (p,g),$$

donde p es primo, $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio irreducible de grado positivo y g es un polinomio, tal que su reducción módulo p es irreducible en $\mathbb{Z}_p$. El último caso, $J=(p,g)$, da la forma general de un ideal maximal en $\mathbb{Z}[x]$. *El plan de la demostración es el siguiente.*

1. Sea B un subanillo del anillo A, I un ideal primo de A. Demostrar que $B \cap I$ es ya sea un ideal primo de B, o ya sea el anillo B mismo.
2. Sea J un ideal primo de $\mathbb{Z}[x]$. Demostrar que $\mathbb{Z} \cap J=(0)$ o (p), donde p es primo.
3. Se supone que $\mathbb{Z} \cap J=(0)$. Demostrar que si $J \neq (0)$, entonces J es generado por un polinomio primitivo de J de grado minimal.
4. Se supone que $\mathbb{Z} \cap J=(p)$. Sea $r_p : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ la reducción módulo p. Demostrar que el ideal $r_p(J)$ es primo y que $J=(p,g)$.
5. Demostrar que J es maximal si y solo si $J=(p,g)$, donde p es primo y $r_p(g)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$.

Solución ▼ [002299]

Ejercicio 6506

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y P, $Q \in \mathbb{F}[X]$ tales que $\operatorname{mcd}(P,Q)=1$. Demostrar que existe U, $V \in \mathbb{F}[X]$ tales que $UP+VQ=1$, $d^0\,U < d^0\,Q$, $d^0\,V < d^0\,P$. [006526]

Ejercicio 6507

Encontrar todos los automorfismos del anillo $\mathbb{F}[X]$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo. [006527]

Ejercicio 6508

Utilizar el algoritmo de Euclides en $\mathbb{Q}[X]$, para expresar el mcd solicitado como una combinación lineal de los dos polinomios dados :

1. $(X^4+2X^3-X^2-4X-2, X^4+X^3-X^2-2X-2)$,
2. $(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1, X^4+2X^3+X+2)$,
3. $(3X^3-2X^2+X+2, X^2-X+1)$.

[006528]

Ejercicio 6509

Demostrar que todo monomorfismo $A \to A'$ de anillos íntegros genera un monomorfismo de los campos de las fracciones. [006529]

Ejercicio 6510

Si Q es el campo de fracciones del anillo íntegro A, demostrar que el campo de las fracciones $Q(X)$ es isomorfo al campo de fracciones de $A[X]$. [006530]

Ejercicio 6511

Sea $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ y sea $c \in \mathbb{Q}$ una raíz de P. Demostrar que $c = \frac{p}{q}$, donde $p|a_0$ y $q|a_n$. [006531]

Ejercicio 6512

1. Sea $a \in \mathbb{Z}$ un número sin factores cuadrados, $a \notin \{-1, 0, 1\}$. Demostrar que $X^n - a$ es irreducible en $\mathbb{Q}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Demostrar que $2X^{10} - 21$, $3X^5 - 35$, $X^5 + 1000X^2 + 6$ son irreducibles en $\mathbb{Q}$.
3. Demostrar la irreductibilidad en $\mathbb{Q}[X]$ de polinomios $X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 6X + 2$ y $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$.

[006532]

Ejercicio 6513

Demostrar que el polinomio $X^2 - 1$ tiene cuatro ceros en $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. ¿Esto contradice un teorema del curso ? [006533]

Ejercicio 6514

Demostrar que $X^2 + 1$ es irreducible como elemento de $\mathbb{Q}[X]$, pero reducible como un elemento de $\mathbb{F}_5[X]$. [006534]

Ejercicio 6515

1. Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo, demostrar que un polinomio P de grado 2 o 3 en $\mathbb{F}[X]$ es irreducible si y solo si no hay ningún cero en $\mathbb{F}$.
2. Descomponer los siguientes polinomios en factores irreducibles en $\mathbb{F}_3[X]$.

$$X^2 + X + 1, \qquad X^3 + X + 2, \qquad X^4 + X^3 + X + 1 .$$

[006535]

Ejercicio 6516

¿Cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$?

$$X^3 + 4X^2 - 5X + 7 ; \quad X^3 - 6X^2 - 4X - 13 ; \quad X^3 + 4X^2 - 4X + 25 ;$$

$$X^3 - X^2 - X - 1 ; \quad X^4 + 7X^2 + 4X + 1 ; \quad X^6 + X^3 + 1 ; \quad X^6 + X^2 + 1 .$$

[006536]

Ejercicio 6517

---

1. Sea A un anillo conmutativo y $I \subset A$ un ideal. Demostrar que $I[X]$ es un ideal de $A[X]$. Demostrar que $A[X]/I[X] \simeq A/I[X]$. Demostrar que si I es primo, $I[X]$ es primo.
2. Sea p un número primo. Demostrar que $\mathbb{Z}[X]/(p) \simeq \mathbb{F}_p[X]$.
3. Demostrar que los ideales primos no nulos de $\mathbb{Z}[X]$ son :
   (a) (p), donde $p \in \mathbb{N}$ es un número primo ;
   (b) $(R(X))$, donde $R \in \mathbb{Z}[X]$ es un polinomio irreducible ;
   (c) $(p, R(X))$, donde $p \in \mathbb{N}$ es un número primo y $R \in \mathbb{Z}[X]$ es un polinomio irreducible cuya reducción módulo p, $\overline{R}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, es un polinomio irreducible.

[006537]

Ejercicio 6518

Sean $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ y K su cuerpo de fracciones. Demostrar que $X^2 - X + 1$ es primitivo e irreducible en $A[X]$ sin por ser irreducible en $K[X]$. ¿Esto contradice un teorema del curso ? [006538]

Ejercicio 6519

Sea $p \in \mathbb{N}^*$ un número primo. Demostrar que los polinomios $P = \sum_{i=1}^{p} C_p^i X^{i-1}$ y $Q = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} X^i$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$. [006539]

Ejercicio 6520

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de característico $p > 0$.

1. Demostrar que
   (a) $X^n - a^n$, $a \in \mathbb{F}^*$, no tiene raíces múltiples si y solo si $p|n$;
   (b) a es la única raíz de $X^p - a^p$ y su multiplicidad es p.
2. Sea $a \in \mathbb{F}_p$. Escribir la descomposición en factores irreducibles del polinomio $X^p + a \in \mathbb{F}_p[X]$.

[006540]

Ejercicio 6521

Sea D un anillo íntegro finito que contiene n elementos distintos $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Sea el polinomio $P_0 := \prod_{i=1}^{n} (X - c_i)$.

1. Demostrar que dos polinomios Q, R en $D[X]$ tienen la misma función polinomial asociada si y solo si $P_0 | Q - R$.
2. Calcular el polinomio P_0, para $D = \mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$.

[006541]

Ejercicio 6522

Sea A un anillo conmutativo. Demostrar la equivalencia de las dos afirmaciones siguientes :

(i) A es un cuerpo finito ;

(ii) Todo polinomio $P \in A[X]$ de grado $n \geqslant 1$ tiene como máximo n raíces en A y toda función $f : A \to A$ es polinomial.

[006542]

Ejercicio 6523

Calcular la derivada del polinomio $(3X^2+2X-4)(4X^3-2X+3) \in \mathbb{F}_5[X]$. [006543]

Ejercicio 6524

1. Demostrar que si $A[X]$ es principal, entonces A es principal.
2. Demostrar que si $A[X]$ es principal y si A no es un cuerpo, entonces existe un cuerpo K tal que $K[X]$ sea un cuerpo.
3. Deducir que $A[X]$ es principal si y solo si A es un cuerpo.
   Observación : Esto implica que si $A[X]$ es principal, entonces $A[X]$ es euclidiano.

[006544]

Ejercicio 6525

Sea K un cuerpo y sea $K(X)$ el cuerpo de fracciones del anillo $K[X]$. Demostrar que si P es un elemento de $K[X]$ que admite al menos una raíz simple entonces, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $Y^n - P$ es un elemento irreducible de $K[X,Y]$ y de $K(X)[Y]$. [006545]

Ejercicio 6526

Demostrar que si K es un cuerpo de característica diferente de 2, entonces X^2+Y^2-1 es irreducible en $K[X,Y]$. [006546]

Ejercicio 6527

1. Calcular la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^3+2x-3=0$.
2. Calcular $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$, donde $x_1,\ x_2,\ x_3$ son las raíces de la ecuación $x^3-x^2-4x+1=0$.

[006547]

Ejercicio 6528

Expresar usando los polinomios simétricos fundamentales :

1. $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;
2. $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$;
3. $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$.

[006548]

Ejercicio 6529

Sean $x_1,x_2,\dots,x_n$ los ceros del polinomio $X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n$. Demostrar que todo polinomio simétrico en $x_2,x_3,\dots,x_n$ se puede representar como un polinomio en x_1. [006549]

Ejercicio 6530

Calcular la resultante de los polinomios :

1. $2X^3-3X^2-X+2$ y X^4-2X^2-3X+4;
2. $3X^3+2X^2+X+1$ y $2X^3+X^2-X-1$;
3. $a_0X^2+a_1X+a_2$ y $b_0X^2+b_1X+b_2$.

[006550]

Ejercicio 6531

¿Para qué valor de λ los siguientes polinomios tienen un cero en común ?

1. $X^3-\lambda X+2$ y $X^2+\lambda X+2$;
2. $X^3+\lambda X^2-9$ y $X^3+\lambda X-3$.

[006551]

---

271 325.00 Extensión de cuerpos

Ejercicio 6532

Sea K un cuerpo y k, A, B sub-cuerpos tales que $k\subset A$ y $k\subset B$, $[A:k]=m$, $[B:k]=n$. Sea L el sub-cuerpo más pequeño de K que contiene $A\cup B$.

1. Demostrar que $[L:A]\leqslant n$, $[L:B]\leqslant m$, $[L:k]\leqslant mn$. Caracterizar el caso $[L:k]=mn$ utilizando una propiedad de A, con respecto a B.
2. Si $[K:k]=4$, $m=n=2$, demostrar la equivalencia de las siguientes propiedades
   - (b_1) $A\neq B$;
   - (b_2) $L=K$;
   - (b_3) existe $a\in A$ y $b\in B$ tales que $\{1,a,b,ab\}$ es una base de L sobre k.

[006552]

Ejercicio 6533

¿Es una extensión algebraica siempre finita ? [006553]

Ejercicio 6534

Comparar los campos de descomposición de los polinomios X^2+X+1, $X^2+3\in\mathbb{Q}[X]$. [006554]

Ejercicio 6535

Sea E una extensión del cuerpo k. Se dice que E es una *extensión cuadrática* de k si $[E:k]=2$.

1. Se supone k de característica $\neq 2$. Demostrar que las extensiones cuadráticas de k (si existen) son cuerpos de ruptura de los polinomios irreducibles de la forma X^2-a, $a\in k$. Deducir todas las extensiones cuadráticas de $\mathbb{Q}$ módulo isomorfismo.
2. Se supone k de característica 2. Demostrar que las extensiones cuadráticas de k (si existen) son cuerpos de ruptura de los polinomios irreducibles de una de las dos formas : X^2-a o X^2-X-a, $a\in k$. ¿Pueden una extensión cuadrática del primer tipo y una extensión cuadrática del segundo tipo ser isomorfas por encima de k ?

[006555]

Ejercicio 6536

1. Demostrar que un campo finito nunca es algebraicamente cerrado.
2. ¿Cuál es el cierre algebraico del campo finito $\mathbb{F}_{p^n}$?

[006556]

Ejercicio 6537

Sea K un cuerpo y $\overline{K}$ una clausura algebraica de K. Sean $a,b \in \overline{K} \setminus K$. Establecer equivalencia de las condiciones :

1. existe un automorfismo ϕ de $\overline{K}$ sobre K tal que $\phi(a) = b$;
2. a y b tienen el mismo polinomio minimal $f(X) \in K[X]$.

[006557]

Ejercicio 6538

¿Para qué números primos p, q se tiene $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$? [006558]

Ejercicio 6539

Sean $K \subset L \subset M$ extensiones. Se supone $K \subset L$ y $L \subset M$ algebraicos. Demostrar que $K \subset M$ es algebraico. [006559]

Ejercicio 6540

Dar los polinomios minimales en $\mathbb{Q}$ de los elementos siguientes de $\mathbb{C}$: $j\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{7}$, $i+j$, $i+\sqrt{2}$, $j+\sqrt{3}$. [006560]

Ejercicio 6541

Sea $P \in K[X]$ un polinomio de grado n y $E \supset K$ su cuerpo de descomposición. Demostrar que $[E:K]$ divide $n!$. [006561]

Ejercicio 6542

1. Sea $P \in K[X]$ un polinomio irreducible de grado n y $E \supset K$ una extensión de grado m. Demostrar que si $(m,n) = 1$, entonces P es irreducible en $E[X]$.
2. Demostrar que X^3+X+1 es irreducible en $\mathbb{Q}[i]$.

[006562]

Ejercicio 6543

Sea p, $q \in \mathbb{N}^*$ dos números primos distintos. Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. Encontrar el polinomio minimal de $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ sobre $\mathbb{Q}$. Determinar todas las incrustaciones de $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ en $\mathbb{C}$. [006563]

Ejercicio 6544

Sea $p \neq 2$ un número primo. Demostrar que -1 es un cuadrado módulo p si y solo si p es de la forma $4k+1$.
[006564]

Ejercicio 6545

1. ¿Son 2 y 3 cuadrados módulo 7 ?
2. ¿Es 23 un cuadrado módulo 59 ?

[006565]

Ejercicio 6546

Sean k, K dos cuerpos finitos, $k \subset K$, $[K:k] = m$. Demostrar que para todo d divisor de m existe un único cuerpo intermediario $k \subset L \subset K$ tal que $[K:L] = d$. [006566]

272 326.00 Extensión de anillo

Ejercicio 6547

Dar un ejemplo de extensión infinita y extensión finita de $\mathbb{C}$. [006567]

Ejercicio 6548

Sea $p > 2$ un número primo y sea $\left(\frac{x}{p}\right)$ el símbolo de Legendre para $x \in \mathbb{F}_p^*$. Demostrar que se tiene $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) = 0$. [006568]

Ejercicio 6549

Sea p un número primo.

1. Sea a una raíz de $X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$, $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Demostrar que $a+k$ es también una raíz de $X^p - X - 1$, para todo $k \in \mathbb{F}_p$.
2. Demostrar que $X^p - X - 1$ es irreducible en $\mathbb{F}_p$ y en $\mathbb{Z}$.

[006569]

Ejercicio 6550

1. Sea K un cuerpo y $P \in K[X]$ un polinomio de grado n. Demostrar que P es irreducible en K si y solo si P no tiene raíces en las extensiones E de K de grado como máximo $\frac{n}{2}$.
2. Demostrar que $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ es irreducible en $\mathbb{F}_2$.
3. Demostrar que $X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 13X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}$.
4. Demostrar que $X^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}$ y es reducible en $\mathbb{F}_p$, para todo número primo p.

[006570]

Ejercicio 6551

Sea $K \subset E$ una extensión finita.

1. Demostrar que la traza tr_K^E es una forma lineal en E en tanto que K-espacio vectorial.
2. Calcular la norma $N_K^E(\alpha\beta)$ en función de $N_K^E(\alpha)$ y de $N_K^E(\beta)$. Calcular $N_K^E(a)$, donde $a \in K$.

[006571]

Ejercicio 6552

1. Escribir una base de $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$ sobre $\mathbb{Q}$.
2. En esta base, escribir la matriz de aplicación m_α^E, donde $\alpha = i + \sqrt{2}$. Deducir el polinomio minimal de α en $\mathbb{Q}[X]$ a partir de esta matriz.
3. Encontrar el polinomio minimal de α en $\mathbb{Q}[X]$ por cálculo directo.

[006572]

Ejercicio 6553

Sean A un anillo completamente cerrado, K su cuerpo de fracciones y $P \in A[X]$ un polinomio mónico. Si P es reducible en $K[X]$, demostrar que es reducible en $A[X]$.
Indicación : Considerar las raíces de P en una extensión de K. [006573]

Ejercicio 6554

Dar un ejemplo de un anillo íntegro que no es completamente cerrado. [006574]

Ejercicio 6555

Para todo $n \geqslant 1$, se designa por $f(n)$ el número de polinomios unitarios irreducibles de grado n sobre $\mathbb{F}_q$. Demostrar que se tiene

$$\sum_{d|n} d f(d) = q^n \ .$$

Deducir los valores de $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ y $f(p)$, para p primo. [006575]

Ejercicio 6556

Sean R un anillo, A un subanillo de R y x un elemento invertible de R. Demostrar que todo $y \in A[x] \cap A[x^{-1}]$ es entero en A. *Indicación* : Demostrar que existe un entero n tales que el A-módulo $M = A + Ax + \cdots + Ax^n$ verifica $yM \subset M$. [006576]

Ejercicio 6557

¿Cuántas soluciones racionales tienen las siguientes ecuaciones ?

$$a)\ x^2 + 2y^2 = 5\ ; \qquad b)\ 19x^2 - 12xy + 2y^2 = 4\ ; \qquad c)\ x^2 + y^2 = 3.$$

[006577]

Ejercicio 6558

Eliminar x del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0 \\ x^2 + x - y^2 = 1. \end{cases}$$

[006578]

Ejercicio 6559

Demostrar las fórmulas

$$R(fg,h) = R(f,h)R(g,h), \qquad D(fg) = D(f)D(g)(R(f,g))^2\,.$$

[006579]

273 327.00 Otro

274 328.00 Forma bilineal

Ejercicio 6560

Demostrar que toda forma cuadrática no degenerada de índice 1 en dimensión 3 es módulo un escalar, equivalente a la forma de Lorentz $x^2+y^2-y^2$. [007715]

Ejercicio 6561

Dar un ejemplo de dos formas bilineales con el mismo rango, mismo índice y mismo discriminante pero no equivalentes. [007716]

Ejercicio 6562

Sea P un plano provisto de una forma cuadrática. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes.

— P es un plano hiperbólico.

— q es no degenerada de índice 1.

— El discriminante de q es igual a -1, módulo un cuadrado (y por lo tanto, en base ortonormada, la expresión de q es $q(x) = ax_1^2 + bx_2^2$, con escalares a y b tales que $-ab$ es un cuadrado).

[007717]

Ejercicio 6563

1. Demostrar que dos formas cuadráticas equivalentes en un espacio E se toman los mismos valores en k.
2. Sea (E,f) un espacio dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada de forma cuadrática asociada q. Demostrar que si f admite un vector isotrópico no nulo, la forma q toma todos los valores de k.
3. Demostrar que E se descompone como suma directa ortogonal de planos hiperbólicos y de un subespacio en el cual la forma cuadrática no tiene vector isotrópico no nulo.
4. Demostrar que el número de planos hiperbólicos en tal descomposición es independiente de la descomposición. Describirlo con ayuda de un invariante definido en curso.

Solución ▼ [007726]

Ejercicio 6564 Formas σ-sesquilineales sobre $\mathbb{F}_{25}$

1. Se considera la aplicación $\sigma: \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Demostrar que es un automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{F}_{25}$.
2. Las siguientes formas en $E := \mathbb{F}_{25}^3$ son σ-sesquilineales ?

$$f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5.$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5.$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.$$

3. ¿Entre las formas σ-sesquilineales precedentes, cuáles son equivalentes ?

Solución ▼ [007727]

Ejercicio 6565 Acción simpléctica sobre rectas y planos

1. Sea E un espacio dotado de una forma alterna no degenerada f. Sea G el grupo (llamado simpléctico) de isometrías de (E, f). ¿Cuántos órbitas hay en la acción del grupo G sobre el conjunto $P(E)$ de las rectas de E ?
2. Sea E un espacio dotado de una forma alterna no degenerada f. ¿Cuáles son las posibles restricciones módulo equivalencia de f sobre los planos de E ?
3. ¿Cuántas órbitas hay en la acción del grupo simpléctico de un espacio vectorial E de dimensión 6, dotado de una forma alternada no degenerada en el conjunto de los planos de E ?

Solución ▼ [007728]

Ejercicio 6566 Signo de una restricción

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n dotado de una forma bilineal simétrica f de signo (p, q). Sea V un subespacio vectorial de E de dimensión r. Demostrar el signo (p', q') de f restringida a V verifica $p' \leqslant p$ y $p' \geqslant p + r - n$. [007732]

Ejercicio 6567

Sea E un espacio dotado de una forma sesquilineal reflexiva no degenerada. Sea V un subespacio de E. Se supone que el radical $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^\perp$ de V es de dimensión 2, $\mathrm{rad}(V) = (N_1, N_2)$. Sea W un suplemento de $\mathrm{rad}(V)$ en V. Calcular en detalle el radical de $V' = (N_1) \oplus W$. [007734]

Ejercicio 6568

1. Sea E un espacio dotado de una forma sesquilineal reflexiva no degenerada. Sea V un subespacio de E. Se supone que el radical $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^\perp$ de V es de dimensión 2, $\mathrm{rad}(V) = \overrightarrow{(} N_1, N_2)$. Sea W un suplemento de $\mathrm{rad}(V)$ en V. Calcular en detalle el radical de $V' = \overrightarrow{(} N_1) \oplus W$.

2. Sea E un espacio dotado de una forma alterna no degenerada f. Sea G el grupo (llamado simpléctico) isometrías de (E,f). ¿Cuántos órbitas hay en la acción del grupo G sobre el conjunto $P(E)$ de las rectas de E ?
3. Sea E un espacio dotado de una forma alterna no degenerada f. ¿Cuáles son las posibles restricciones módulo equivalencia de f sobre los planos de E ?
4. ¿Cuántas órbitas hay en la acción del grupo simpléctico de un espacio vectorial E de dimensión 6 dotado de una forma alternada no degenerada en el conjunto de los planos de E ?

[007735]

Ejercicio 6569 Formas muy degeneradas

Determinar todas las formas sesquilineales simétricas, anti-simétricos y hermitianos f en un espacio E, con $\dim E = \dim \ker f + 1$. [007788]

Ejercicio 6570 Isótropos

1. Demostrar que si un subespacio de un espacio no singular (E,f) es totalmente isotrópico, es de dimensión inferior a $\dim E/2$.
2. Determinar los vectores isotrópicos y un subespacio totalmente isotrópico maximal para las siguientes formas no degeneradas (dadas por su forma cuadrática). En cada caso, se da el índice, es decir la dimensión de los subespacios totalmente isotrópicos maximales.
   (a) $k=\mathbb{R} : q = x^2+y^2,\, x^2-y^2, x^2+y^2-z^2,\, x^2+y^2+z^2-t^2,\, x^2+y^2-z^2-t^2.$
   (b) $k=\mathbb{C} : q = x^2+y^2,\, x^2+y^2+z^2.$

[007789]

Ejercicio 6571

1. Determinar si es posible un plano totalmente isotrópico para cada una de las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{C}^4$.
$$P(x,y,z,t) = xy+zt \quad \text{y} \quad Q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+t^2.$$
2. ¿El entero -3 es un cuadrado módulo 7 ?
3. Determine si es posible un vector isotrópico no nulo para cada una de las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^4$.
$$R(x,y,z,t) = xy+zt \quad \text{y} \quad S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+t^2.$$

[007790]

Ejercicio 6572

Dar un ejemplo de dos formas bilineales con el mismo rango, mismo índice y mismo discriminante pero no equivalentes. [007791]

Ejercicio 6573

¿Las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^3$ son equivalentes ?

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2 \quad \text{y} \quad Q(x,y,z) = xy + 3z^2.$$

[007792]

Ejercicio 6574

1. ¿Cuáles son los subespacios propios de la matriz J de tamaño $n \times n$, donde todos los coeficientes son iguales a 1 ?
2. Diagonalizar en una base ortonormada para el producto escalar estándar, la forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^n$. Discutir su rango y su signo.

$$f(x,y) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

[007793]

Ejercicio 6575 En característica 2

Sea g la forma bilineal simétrica en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que g es no degenerada. ¿Se puede completar e_1 a una base ortogonal ? [007794]

Ejercicio 6576 Espacio de matrices

Sea $E := M_n(\mathbb{R})$. Determinar el signo de formas cuadráticas

1. $q_1(A) = \operatorname{tr}(A^2)$. Se buscan subespacios «grandes» donde q_1 es definida positiva o definida negativa.
2. $q_2(A) = \operatorname{tr}(A^2) - (\operatorname{tr} A)^2$.

[007795]

Ejercicio 6577

Sea $(E, q(xe_1 + ye_2) = 2xy)$ un plano hiperbólico orientado. ¿Se puede extender la aplicación u definida en $vect(e_1)$ por $u(e_1) = e_2$ en una isometría de E ? ¿En una isometría directa de E ? [007796]

Ejercicio 6578

Demostrar el teorema de Witt en el siguiente caso particular :
Sea E y E' dos espacios simplécticos no singulares de dimensión 4. Sea $d \subset E$ y $d' \subset E'$ dos rectas y f una aplicación lineal biyectiva de d sobre d'. Demostrar que existe una isometría de E sobre E' que extiende f.
[007797]

Ejercicio 6579 Acción de grupos ortogonales

Sea $E = \mathbb{R}^2$ provisto de la forma cuadrática $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ no degenerada de signo $(1,1)$. El grupo $O(1,1)$ es por definición el grupo de isometrías de (E,q).

1. ¿El grupo $O(1,1)$ actúa transitivamente sobre las rectas de $\mathbb{R}^2$?

2. Sea q una forma cuadrática real no degenerada. Demostrar que si q tiene el mismo signo con restricción a F y a F', entonces F y F' están en la misma órbita bajo la acción de $O(q)$.
3. Describir las órbitas de la acción de $O(2,1)$ en las rectas de $\mathbb{R}^3$.

[007798]

Ejercicio 6580

Diagonalizar en una base ortonormada para el producto escalar estándar, la forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

Discutir su rango y su signo. [007810]

Ejercicio 6581

Se considera en $\mathbb{C}^4$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Demostrar sin cálculo que A es invertible. [007811]

Ejercicio 6582 Descomposición polar de un endomorfismo

Sea H un espacio hermitiano y a un endomorfismo de H.

1. Demostrar que $b = aa^*$ es un endomorfismo autoadjunto positivo.
2. Demostrar usando una diagonalización que existe un único endomorfismo autoadjunto positivo c de H tal que $c^2 = b$.
3. Se supone ahora que a es invertible. Demostrar que a se escribe de manera única en la forma $a = hu$, donde h es un endomorfismo autoadjunto positivo y u un endomorfismo unitario.
4. Determinar h y u por el endomorfismo a cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

.

[007812]

Ejercicio 6583 Isótropos

Determinar el conjunto de vectores isotrópicos y los subespacios totalmente isotrópicos maximales para las siguientes formas no degeneradas. En cada caso, se da el índice, es decir la dimensión de los subespacios totalmente isotrópicos maximales.

1. $k = \mathbb{R} : q = x^2+y^2, x^2-y^2, x^2+y^2-z^2, x^2+y^2+z^2-t^2, x^2+y^2-z^2-t^2.$
2. $k = \mathbb{C} : q = x^2+y^2, x^2+y^2+z^2.$

[007813]

Ejercicio 6584 Formas muy degeneradas

Determinar todas las formas sesquilineales reflexivas f en un espacio E, con $dimE = \dim\ker f + 1$. [007814]

Ejercicio 6585 En característica 2

Sea g la forma bilineal simétrica en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ cuya matriz en la base canónica (e_1, e_2, e_3) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que g es no degenerada. ¿Se puede completar e_1 en una base ortogonal ? [007815]

Ejercicio 6586 Involuciones

Sea f una forma bilineal simétrica no degenerada en un espacio vectorial E.

1. Sea $u \in \mathrm{GL}(E)$ una involución. Demostrar que u es ortogonal si y solo si $E_+(u) = E_+ := \ker(u - \mathrm{Id})$ y $E_- := \ker(u + \mathrm{Id})$ son ortogonales. Demostrar entonces que $(E_+)^\perp = E_-$ y que E_+ no es isotrópico.
2. Sea $F \subset E$ un subespacio no isotrópico. Demostrar que existe una única involución ortogonal tal que $E_+(u) = F$.
3. Demostrar que $O(f) \equiv SO(f) \rtimes \{-1, 1\}$.

[007816]

Ejercicio 6587 Dilataciones

Sea f una forma sesquilineal no degenerada. Determinar las dilataciones

1. ortogonales
2. unitarios
3. simplécticas.

[007817]

Ejercicio 6588

Sea k un cuerpo con una característica diferente de 2. Sea E un k-espacio vectorial de dimensión $n \geqslant 2$ y ϕ una forma sesquilineal no degenerada en E simétrico, hermitiana o alternada. Sea τ una transformación de E dada usando una forma lineal no nula f sobre E y un vector a de $\ker f$ por $\forall x \in E, \tau(x) = x + f(x)a$.

1. Determinar la naturaleza de τ.
2. Se supone ahora que τ es una isometría relativa a ϕ. Demostrar que a es isotrópico.
3. Demostrar que f y $\phi(\cdot, a)$ son proporcionales. Se denota $\lambda \in k^\star$ tal que $f = \lambda\phi(\cdot, a)$.
4. Demostrar que si $\sigma \neq \mathrm{Id}$ y ϕ es hermitiana o simétrica, entonces $\lambda + \sigma(\lambda) = 0$.
5. Demostrar que no existen transvecciones ortogonales, que existen transvecciones unitarias si y solo si el índice es mayor que 1 y que siempre existen transvecciones simplécticas.

[007818]

Ejercicio 6589 Espacio de matrices

Sea $E := M_n(\mathbb{R})$. Determinar el signo de formas cuadráticas

1. $q_1(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.
2. $q_2(A) = \mathrm{tr}(A^2) - (\mathrm{tr}A)^2$.

[007819]

Ejercicio 6590 Producto de formas lineales

1. Demostrar que el polinomio cuadrático con coeficientes complejos con $a \neq 0$

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

es el producto de dos polinomios lineales si y solo si

$$aa' - b''^2 = aa'' - b'^2 = ab - b'b'' = 0.$$

2. ¿Es cierto el análogo con coeficientes reales ?

[007820]

Ejercicio 6591 Espacio de Artin

Se llama espacio de Artin (o espacio hiperbólico) todo espacio vectorial E dotado de una forma cuadrática q equivalente a

$$x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2p} \qquad q(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}.$$

1. Demostrar que en $\mathbb{C}^{2p}$, toda forma cuadrática no degenerada define un espacio de Artin. Caracterizar usando la signo los espacios de Artin en $\mathbb{R}^{2p}$. Caracterizarlos usando el índice asumiendo la forma no degenerada.
2. Demostrar que todo espacio de Artin es una suma directa ortogonal de planos de Artin ortogonales.
3. Sea (E, q) arbitrario, x un vector isotrópico pero no en el núcleo de q. Demostrar que existe un plano P que contiene x y tal que $(P, q_{|P})$ es un plano de Artin.

[007821]

Ejercicio 6592 Completado no singular

Sea (E, q) un espacio vectorial dotado de una forma cuadrática no degenerada q. Un subespacio vectorial F de E se dice isotrópico (o singular) si $F^\perp \cap F \neq \{0\}$. Verificar que si F y G son dos subespacios ortogonales con G no isotrópicos, entonces la suma $F + G$ es directa.
Sea F un subespacio singular de E. Se denota s la dimensión de $F^\perp \cap F$, G un suplemento de $F^\perp \cap F$ en F y $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ una base de $F^\perp \cap F$.

1. Demostrar que G no es isotrópico.
2. Demostrar que $G^\perp$ contiene estrictamente $F^\perp$.

3. Se supone que $s = 1$. Demostrar que existe un plano de Artin P_1 conteniendo x_1 y tal que $G \oplus^\perp P_1$ sea no singular.
4. Demostrar que existen planos de Artin $(P_i, q_{|P_i})$ conteniendo x_i y tales que $\widehat{F} := G \oplus^\perp P_1 \oplus^\perp P_2 \cdots \oplus^\perp P_s$ sea no singular. (Se puede considerar $G' := G \oplus^\perp \mathrm{vect}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$)
5. Sea F un subespacio singular de E. Demostrar que si H es un subespacio no singular que contiene F, entonces $\dim H \geqslant \dim F + \dim F^\perp \cap F$.
6. Demostrar que todo espacio cuadrático no degenerado que contiene un subespacio totalmente isotrópico de dimensión, la mitad es un espacio de Artin.
7. Demostrar que toda isometría $u : F \to F'$ se extiende en una isometría $\widehat{u} : \widehat{F} \to \widehat{F'}$, para una buena elección de base de $F^\perp \cap F$ y $F'^\perp \cap F'$

[007822]

Ejercicio 6593

Sea $(E, q(xe_1 + ye_2) = 2xy)$ un plano de Artin. ¿Se puede extender la aplicación u definida en $\mathrm{vect}(e_1)$ por $u(e_1) = e_2$ en una isometría de E ? ¿En una isometría directa de E ? [007823]

Ejercicio 6594 El teorema de Witt

Sea (E, q) un espacio vectorial dotado de una forma cuadrática q no degenerado.

1. Demostrar que si $q(x) = q(y) \neq 0$, entonces uno de los dos vectores $x + y$ y $x - y$ es no isotrópico.
2. Demostrar que si F es no singular de dimensión al menos 2, se puede escribir $F = F_1 \oplus^\perp F_2$, con F_i no singular de dimensión $\dim F_i < \dim F$.
3. Sea $F = F_1 \oplus^\perp F_2$ (F_i no singular) y sea $u : F \to F'$ una isometría. Sea $v : E \to E$ una isometría que coincide con u sobre F_1. Sea $F_1' = u(F_1)$. Demostrar que $F_1'^\perp$ contiene $u(F_2)$ y $v(F_2)$ y que $u \circ v^{-1} : v(F_2) \to u(F_2)$ es una isometría.
4. Demostrar el teorema de Witt
   Sea F y F' dos subespacios de (E, q) (q no degenerado) y $u : (F, q_{|F}) \to (F', q_{|F'})$ una isometría. Demostrar que existe una isometría de E que extiende u.

[007824]

Ejercicio 6595 Acción de grupos ortogonales

1. ¿El grupo $O(1,1)$ actúa transitivamente sobre las rectas de $\mathbb{R}^2$?
2. Sea q una forma cuadrática real no degenerada. Demostrar que si q tiene el mismo signo con restricción a F y a F', entonces F y F' están en la misma órbita bajo la acción de $O(q)$.
3. Describir las órbitas de la acción de $O(2,1)$ en las rectas de $\mathbb{R}^3$.

[007825]

Ejercicio 6596 Estudio del grupo ortogonal $O(1,1)$

1. Demostrar que en un plano de Artin existen exactamente dos rectas isotrópicas I y J.
2. Sea $u \in O(1,1)$. Demostrar que u envía $I \cup J$ a sí mismo.
3. Sea $u \in O(1,1)$. Demostrar que u es directa si y solo si u deja fija cada recta isotrópica.

4. Deducir la forma de los elementos de $O(1,1)$.

[007826]

Ejercicio 6597 Sobre las similitudes

Sea f una forma sesquilineal no degenerada simétrica (resp. hermitiana, alternada) en un K-espacio vectorial E. Se denota $GO(f)$ (resp. $GU(f)$, $GSp(f)$) el grupo de semejanzas de f. Se denota μ la aplicación que a una semejanza asocia su multiplicador en $K^\star$.

1. Determinar las semejanzas de la forma simpléctica estándar en K^2.
2. Demostrar que u es una semejanza si y solo si conserva la ortogonalidad.
3. Se supone f simétrica. Demostrar que $\mathrm{Im}(\mu) = \{\lambda \in K^\star / q \equiv \lambda q\} \supset (K^\star)^2$.

[007827]

Ejercicio 6598

Determinar la órbita y el estabilizador de un vector de norma 1 bajo la acción del grupo ortogonal del producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que el grupo $O(n-1)$ es isomorfo a un subgrupo O_{n-1} de $O(n)$. ¿Es este subgrupo normal ? [007828]

Ejercicio 6599

1. Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\to H_0 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y el $\mathbb{R}$-espacio vectorial H_0 de matrices hermitianas de traza nula.
2. Demostrar que el grupo $SU(2)$ actúa sobre H_0 por conjugación.
3. Por el isomorfismo h, esta acción se utiliza para definir una acción de $SU(2)$sobre $\mathbb{R}^3$. Demostrar que esta acción es por isometría del determinante 1. (Se puede usar la conexión de $SU(2)$ homeomorfa a S^3 esfera unidad del cuerpo de cuaterniones.). Deducir un homomorfismo ϕ de $SU(2)$ en $SO(3)$.
4. Demostrar que las únicas matrices de $SU(2)$ que conmutan a todos los elementos de H_0 son Id y $-$Id. Deducir el núcleo de ϕ.
5. Usando las formas reducidas de las matrices de $SO(3)$, demostrar que la aplicación exponencial del espacio $so(3)$ de matrices antisimétricas reales 3×3 (de traza nula) sobre $SO(3)$ es sobreyectiva.
6. Utilizando la diagonalización de matrices unitarias en una base ortonormada para el producto escalar hermitiano estándar en $\mathbb{C}^2$, demostrar que la aplicación exponencial del espacio $su(2)$ de matrices anti-hermitianas de traza nula en $SU(2)$ es sobreyectiva.
7. Determinar la imagen por ϕ de matrices (con $a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$\exp\begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix};\ \exp\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix};\ \exp\begin{pmatrix} 0 & ic \\ ic & 0 \end{pmatrix}.$$

   Deducir que ϕ es sobreyectiva.

[007829]

Ejercicio 6600

Sea d_1, d_2, d_3 tres rectas de $P^3(K)$. Demostrar que existe una cuádrica que los contiene. [007830]

Ejercicio 6601 Polaridad

Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica de $P(E)$ (dotado de un sistema proyectivo) de ecuación $q(x) = 0$, donde q es la forma cuadrática de una forma bilineal simétrica no degenerada f en un espacio vectorial E. Si $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$ son dos subespacios ortogonales en E, se denota $P(\overrightarrow{A}) \perp P(\overrightarrow{B})$. Se llama hiperplano polar de un punto $A = P(\overrightarrow{A})$ de $P(E)$ el hiperplano proyectivo $A^{\perp} := P(\overrightarrow{A}^{\perp})$.

1. Se provee al plano proyectivo con un sistema de referencia. Determinar una ecuación de la recta polar del punto $M(x_0, y_0, 1)$, con respecto a la cuádrica de la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Representarlo en el espacio afín de ecuación $z \neq 0$.
2. Sea F un subespacio no isotrópico de E. Sean A y B dos puntos de $P(F)$. Demostrar si $A \perp B$, para f, entonces $A \perp B$, para $f_{|F}$.
3. Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica de $P^1(K)$ cuya imagen está compuesta por los dos puntos A y B. Demostrar utilizando un buen sistema de referencia que para todo M en $P^1(K)$,

$$M \perp N \iff M \text{ y } N \text{ son conjugados armónicos con respecto a } M \text{ y } N.$$

4. Deducir una construcción geométrica de la polar de un punto con respecto a una cónica.

[007831]

Ejercicio 6602 Clasificación euclidiana de cuádricas

Se considera en el espacio euclidiano E de dimensión 3 una cuádrica $\mathcal{Q}$ de ecuación $q(x,y,z) = 0$, donde q es un polinomio de grado 2. Se denota h su parte homogénea de grado 2. Es una forma cuadrática en $\overrightarrow{E}$. Se llama forma cuadrática en el infinito. Se denota Q la homogeneización de q. Es una forma cuadrática en $\widehat{E}$ que define la completación proyectiva de $\mathcal{Q}$.

1. Demostrar que cada argumento de la firma de Q es más grande que el argumento correspondiente del signo de h.
2. Se supone que el signo de h es $(3,0)$ o $(0,3)$. Determinar, siguiendo el signo de Q una forma reducida (en un buen sistema de referencia) para q y representar en cada caso la cuádrica $\mathcal{Q}$.
3. Indicar el resultado para los demás signos.
4. Asigne los siguientes nombres a los diferentes casos : plano doble real, par de planos imaginarios conjugados paralelos distintos, par de planos reales paralelos distintos, cilindro con base parabólica, cilindro con base hiperbólica, cilindro a base elíptica, cilindro imaginario, cono imaginario con vértice real, cono con base una cónica propia real, elipsoide imaginario, elipsoide real, paraboloide hiperbólico, paraboloide elíptico, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas.

[007832]

Ejercicio 6603 Isometrías

1. Sea (V, f) un espacio vectorial dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada. Demostrar que toda aplicación $f : V \to V$ que conserva f es una biyección lineal.

2. Sea (E,d) un espacio euclidiano afín. Demostrar que toda aplicación $f : E \to E$ que conserva la distancia es una biyección afín cuya parte lineal es ortogonal.

[007833]

Ejercicio 6604 Recta y cónica plana

1. Sea $(A,B,C;D)$ un marco de referencia proyectivo del plano proyectivo P^2. Escribir en coordenadas homogéneas la proyección p de centro A en la recta (BC).
2. Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica proyectiva no singular de P^2 que pasa por el punto A. Demostrar que la proyección p se extiende en una biyección entre $\mathcal{Q}$ y la recta (BC).

[007834]

Ejercicio 6605 Sistema de rectas en una cuádrica

Sea el espacio P^3 provisto de un sistema de coordenadas homogéneas y $\mathcal{Q}$ la cuádrica proyectiva de ecuación $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$.

1. Determinar un sistema de coordenadas homogéneo en el que $\mathcal{Q}$ tiene la ecuación $Y_0Y_3 - Y_1Y_2 = 0$.
2. Demostrar entonces que la aplicación $v : ((a:b),(c:d)) \to (ac:ad:bc:bd)$ realiza una biyección de $P^1 \times P^1$ sobre $\mathcal{Q}$.

[007835]

Ejercicio 6606 Con un teorema conocido

Resolver en $\mathbb{Z}^3$ la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. [007836]

Ejercicio 6607

Se considera la forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x^t\, y' - y^t\, x'$$

donde x, y, x', y' están en $\mathbb{R}^n$.

1. Descomponiendo por bloque $n \times n$ una métrica cualquiera g de $M_{2n}(\mathbb{R})$ bajo la forma $\begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$, caracterizar las matrices simplécticas en términos de sistemas de ecuaciones para A,B,C,D.
2. Determinar todas las matrices simplécticas verificando además $B = C = 0$.
3. Determinar todas las matrices simplécticas que satisfacen $A = D = I_n$ y $C = 0$.
4. Determinar todas las matrices simplécticas que satisfacen $C = 0$.
5. Determinar todas las matrices Q de $M_n(\mathbb{R})$ tales que el espacio $W_Q := \left\{ \begin{pmatrix} Qy \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}^n \right\}$ sea totalmente isotrópico. ¿Cuál es el vínculo con las preguntas anteriores?

[007837]

Ejercicio 6608

Sea n un entero superior a 3. ¿El grupo D_{2n} de isometrías de un polígono regular a n lados de un plano euclidiano real es resoluble?

Solución ▼ [007838]

Ejercicio 6609

¿Las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^3$ son equivalentes? $q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$ y $Q(x,y,z) = xy + 3z^2$.

Solución ▼ [007839]

Ejercicio 6610

Demostrar el teorema de Witt en el siguiente caso particular :
Sea E y E' dos espacios simplécticos no singulares de dimensión 4. Sea $d \subset E$ y $d' \subset E'$ dos rectas y f una aplicación lineal biyectiva de d sobre d'. Demostrar que existe una isometría de E sobre E' que extiende f.

Solución ▼ [007840]

Ejercicio 6611

1. Dar la lista los elementos del grupo D de isometrías que mantienen un hexágono regular.
2. Dar un 3-Sylow de este grupo.
3. ¿Cuáles son los posibles órdenes de los elementos de un 2-Sylow de D?
4. Explicitar un 2-Sylow de D.
5. ¿Es normal en D?
6. ¿Cuántos 2-Sylows tiene D?

[007841]

Ejercicio 6612

1. ¿Cuántos elementos de orden 3 tiene el grupo $\mathscr{A}_5$?
2. Demostrar que los desplazamientos que conservan un número finito $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de puntos del plano euclidiano son rotaciones de orden finito de los cuales especificaremos el centro.
3. ¿El grupo $\mathscr{A}_5$ puede ser el conjunto de desplazamientos que conservan un número finito de puntos del plano euclidiano?
4. ¿El grupo $\mathscr{A}_5$ se puede ser el grupo de isometrías que conservan un número finito de puntos del plano euclidiano? (Indicación : ¿Cuál es entonces el subgrupo de desplazamientos?)

[007842]

Ejercicio 6613

1. Determinar si es posible un plano totalmente isotrópico para cada una de las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{C}^4$.
$$P(x,y,z,t) = xy + zt \ \text{ y } \ Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$
2. ¿El entero -3 es un cuadrado módulo 7?
3. Determine si es posible un vector isotrópico no nulo para cada una de las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^4$.
$$R(x,y,z,t) = xy + zt \ \text{ y } \ S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Ejercicio 6614 Descomposición polar de un endomorfismo

Sea H un espacio hermitiano y a un endomorfismo invertible de H. Demostrar que a se escribe de manera única en la forma $a = hu$, donde h es un endomorfismo autoadjunto positivo y u unitario. Determinar h y u por el endomorfismo a cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{C}^2$ es $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. [007888]

Ejercicio 6615 Forma alternada

Una forma bilineal f en un k-espacio vectorial E se dice alternada, si todo vector de E es isotrópico. Sea (E, f) un k-espacio vectorial de dimensión finita dotado de una forma bilineal alternada.

1. Sea (V, f) un k-espacio vectorial de dimensión 2, dotado de una forma alternada no degenerada. Sea x un vector no nulo. Demostrar que existe un vector isotrópico y tal que $f(x, y) = 1$. Se dice entonces que (V, f) es un plano simpléctico.
2. Sea V un subespacio vectorial de E. Demostrar que si $(V, f_{|V})$ es un espacio no singular (i.e. $f_{|V}$ no degenerado) entonces $E = V \oplus^{\perp} V^{\perp}$.
3. Demostrar que E es la suma directa ortogonal de rectas isotrópicas y planos simplécticos.
4. Demostrar que todos los subespacios isotrópicos maximales de E tienen el mismo tamaño. Determinar esta dimensión en función de la dimensión de E y del rango de f.
5. Encontrar este resultado usando el teorema de Witt simpléctico : Sea (E, f) y (E', f') dos k-espacios vectoriales de dimensión finita provisto de una forma simpléctica (i.e. bilineal alternada no degenerada). Se supone (E, f) y (E', f') isométricos. Entonces, toda isometría de un subespacio de (E, f) en un subespacio de (E', f') se extiende en una isometría de (E, f) sobre (E', f').

[007889]

Ejercicio 6616

Demostrar que en dimensión 2 el grupo simpléctico de una forma alterna no degenerada es isomorfo al grupo lineal especial $SL(2, k)$. [007890]

Ejercicio 6617

1. Las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^3$ son equivalentes ?
$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2 \text{ y } Q(x, y, z) = xy + 4z^2.$$
2. Demostrar que dos formas cuadráticas equivalentes en un espacio E se toman los mismos valores en k.
3. ¿La forma q toma todos los valores de $\mathbb{F}_7$? Verificar que toma los valores 3 y 5.

[007891]

Ejercicio 6618

1. Demostrar que dos formas cuadráticas equivalentes en un espacio E toman los mismos valores en k.

2. Sea a lo largo del ejercicio (E, f) un espacio dotado de una forma bilineal simétrica no degenerada de forma cuadrática asociada q. Demostrar que si f admite un vector isotrópico no nulo, la forma q toma todos los valores de k.
3. Demostrar que E se descompone como suma directa ortogonal de planos hiperbólicos y de un subespacio en el cual la forma cuadrática no tiene ningún vector isotrópico distinto de cero.
4. Demostrar que el número de planos hiperbólicos en tal descomposición es independiente de la descomposición.

[007892]

Ejercicio 6619

Se busca describir el grupo G de isometrías de un plano euclidiano afín que conservan globalmente un triángulo $\mathscr{T} = ABC$ isósceles en A no equilátero no aplanado.

1. Determinar dos elementos diferentes del grupo G.
2. Sea f un elemento de G.
   (a) Demostrar que f tiene un punto fijo.
   (b) Demostrar que $f(A) = A$ y que ($f(B) = B$ o $f(B) = C$).
   (c) Demostrar que f es ya sea la identidad o ya sea una reflexión.
3. Escribir la tabla de multiplicar del grupo G.

[007897]

Ejercicio 6620

Sea D_8 el grupo de isometrías del cuadrado. Determinar un morfismo inyectivo de grupos de D_8 en $\mathscr{S}_4$. ¿Los elementos $(1,3)$ y $(1,2,3,4)$ generan el grupo simétrico $\mathscr{S}_4$? [007898]

Ejercicio 6621 Sylow de grupos diédricos

Sea $\mathscr{P}_n$ un polígono regular en n lados en el plano euclidiano orientado. Se llama grupo diédrico D_n el grupo de isometrías de $\mathscr{P}_n$.

1. Entre las traslaciones, rotaciones, las simetrías ortogonales, y simetrías deslizantes (composición de una simetría ortogonal y una traslación en el eje de simetría), describir las isometrías del plano que conservan el polígono regular $\mathscr{P}_n$.
2. Determinar, utilizando la acción natural de D_n en el conjunto de los vértices de $\mathscr{P}_n$, el cardinal de D_n. Deducir la lista completa de los elementos de D_n.
3. Se supone n impar. Determinar el 2-Sylow de D_n y comprobar (sin referencia al curso) que son conjugados.
4. Se supone $n = 6$. Determinar un 2-Sylow de D_6. Determinar el número de 2-Sylow de D_6. Determinar dos subgrupos de orden 2 de D_6 no conjugados en D_6. Dar un 3-Sylow de D_6.

[007899]

Ejercicio 6622 Subgrupo finito de $SO(3)$

1. Demostrar el *teorema de Burnside* : Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito E, entonces el número N de órbitas es la media de los cardinales de los puntos fijos de los elementos de G y también
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}\, Fijo(\phi(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in E} \mathrm{Card}\, establ(x).$$
Se puede considerar $\{(x,g) \in E \times G / g \cdot x = x\}$.
2. Sea G un subgrupo finito de $SO(3)$. Se considera su acción sobre la esfera unidad. Sea X el conjunto de puntos fijos por uno de los elementos de G diferentes de la identidad. Demostrar que X es estable por la acción de G. Demostrar que el estabilizador de un elemento de X es un grupo cíclico. Se denota N el número de órbitas de la acción de G sobre X y n_j el cardinal del estabilizador de un elemento de la órbita O_j.
3. Demostrar que
$$N|G| = 2(|G|-1) + \mathrm{Card} X.$$
4. Demostrar que
$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^{N} (1 - \frac{1}{n_j}).$$
5. Deducir que $N = 2$ o $N = 3$.
6. Demostrar que si $N = 2$, G es un subgrupo cíclico de rotaciones.
7. Si $N = 3$, determinar las posibilidades para los n_j.

[007900]

Ejercicio 6623 Rectas y cuadráticas

Una cuádrica de un espacio proyectivo $P(V)$ es el lugar geométrico de los ceros de una forma cuadrática f sobre V.

1. Demostrar que toda cuádrica que contenga tres puntos distintos de una recta d contiene toda la recta d.
2. Determinar la dimensión del espacio de cuádricas de $P^3(K)$.
3. Sea d_1, d_2, d_3 tres rectas de $P^3(K)$. Demostrar que existe una cuádrica que los contiene.

[007902]

Ejercicio 6624

Se considera el plano euclidiano equipado con una referencia ortonormada $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ y la curva (C) de ecuación
$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

1. Demostrar que (C) es una parábola.
2. Encontrar un sistema de referencia ortonormado $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tal que (C) tiene una ecuación de la forma $x^2 = 2py$ en este sistema de referencia.

[007903]

Ejercicio 6625

1. Construir con regla y compás la tangente a un círculo $\mathscr{C}$ pasando por un punto A fuera del disco delimitado por $\mathscr{C}$.
2. Sea ahora $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos círculos no concéntricos. construir los centros Ω y O homotecias que envían $\mathscr{C}$ sobre $\mathscr{C}'$.
3. Construir dos tangentes comunes a $\mathscr{C}$ y a $\mathscr{C}'$.

[007904]

275 350.00 Variedad

276 351.00 Inmersión, sumersión, inmersión

277 352.00 Sub-variedad

Ejercicio 6626

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, sea $S_\lambda = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$.

1. Determinar los $\lambda \in \mathbb{R}$, para los cuales S_λ es una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$. Dibujar S_λ en función de λ.
2. Para $x, y \in \mathbb{R}^3$, sea $B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Sea $x \in S_\lambda$, expresar T_xS_λ, con ayuda de B.

Solución ▼ [002547]

Ejercicio 6627

Se provee $\mathbb{R}^n$ de la norma $\|x\| =< x,x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$. Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal tal que $< u(x),y >=< x,u(y) >$ y sea $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; < u(x),x >= 1\}$. Demostrar que Q es una sub-variedad y determinar el plano tangente.

Solución ▼ [002548]

Ejercicio 6628

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(\theta,\varphi) = (\cos\theta(1+1/2\cos\varphi), \operatorname{sen}\theta(1+1/2\cos\varphi), 1/2\operatorname{sen}\varphi)$ y sea $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Sea R_θ la rotación de ángulo θ alrededor de $(0z)$, y sea $C = \{(1+1/2\cos\varphi, 0, 1/2\operatorname{sen}\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que $f(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dibujar T.
2. Demostrar que $f(\theta,\varphi) = f(\theta_0,\varphi_0)$ si y solo si existe $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ y $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Demostrar que para todo abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ es un abierto de T.
4. Demostrar que T es una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$.

[002549]

Ejercicio 6629

Sea $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ definida por $f(A) = det(A)$.

1. Demostrar que $\lim_{\lambda\to 0} \frac{\det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = \operatorname{tr}(X)$ (pensar en el polinomio característico). Deducir $D_{\mathrm{Id}_n} f(X)$.

2. En notando que $\dfrac{\det(A+\lambda X)-\det(A)}{\lambda}$ es igual a $\det(A)\dfrac{\det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, para A invertible, calcular $D_Af(X)$, cuando A es invertible.
3. Demostrar que $Sl_n(\mathbb{R})$ es una sub-variedad de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de dimensión n^2-1, cuyo espacio tangente en Id es $\{X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R});\mathrm{tr}(X)=0\}$.

[002550]

Ejercicio 6630

Sea E el espacio vectorial de matrices simétricas reales de orden n. Sea $f:\mathscr{M}(\mathbb{R})\to E$ definida por $f(A)={}^tAA$.

1. Demostrar que $D_Af(X)={}^tAX+{}^tXA$.
2. Sea $A\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $S\in E$ y $X=1/2AS$. Demostrar que $D_Af(X)=S$. Deducir que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ es una sub-variedad de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensión $n(n-1)/2$, cuyo espacio tangente en Id es $\{X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tX=-X\}$.

[002551]

Ejercicio 6631

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, $a\in E$ y $f:E\to E$ un difeomorfismo de clase C^1. Se supone que $f^n=\mathrm{Id}$ y $f(a)=a$. Se define $A=D_af$ y $u(x)=\sum\limits_{p=1}^{n}A^{-p}f^p(x)$, para $x\in E$.

1. Demostrar que u es un difeomorfismo local en a tal que $u\circ f=A\circ u$.
2. Sea F el conjunto de puntos fijos de f. Demostrar que F es una sub-variedad de E.
3. Sea $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(x,y+y^3-x^2)$. Demostrar que g es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Deducir que 2/ ya no es necesariamente cierto si eliminamos la hipótesis $f^n=\mathrm{Id}$.

[002552]

Ejercicio 6632

Determinar, entre los subconjuntos definidos a continuación, aquellos que son sub-variedades :

1. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^3+y^3+z^3-3xyz=1\}$;
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy=0\}$;
3. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2+z^2=1 \text{ y } x^2+y^2-x=0\}$;
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y^2=x^3\}$;
5. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2=\tan(\alpha)z^2\}$;

[006280]

Ejercicio 6633

Sean α y β funciones de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Se considera la aplicación $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x)=(\alpha(x),0,\beta(x))$. Dar condiciones a α,β, para que $\mathscr{C}=\varphi(\mathbb{R})$ ya sea una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$.
2. Sea ahora $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la aplicación $f(x,y)=(\alpha(x)\cos(y),\alpha(x)\operatorname{sen}(y),\beta(x))$. Se buscan todavía las condiciones para α,β bajo las cuales $\mathscr{S}=f(\mathbb{R}^2)$ ya sea una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$.
3. Denotemos $p=f(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$. ¿Cuál es la relación entre los espacios tangentes $T_p\mathscr{S}$ y $T_p\mathscr{C}$?

[006281]

Ejercicio 6634

1. Demostrar que la ecuación $xy+xz+yz+2x+2y-z=0$ define en un vecindario de $(0,0,0)$ una superficie. Dar la ecuación del plano tangente de esta superficie en el origen.
2. Demostrar que las ecuaciones $4xy+2xz+4y-z=0$ y $xy+xz+yz+2x+2y-z=0$ definiendo en un vecindario del origen una curva. Determinar el espacio tangente de esta curva en el origen.

[006282]

Ejercicio 6635

Sea $F=(F_1,\dots,F_k)$ una aplicación C^1 de un abierto U de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^k$. Denotemos $M=\{x\in U\ ;\ F(x)=0\}$ y sea $a\in M$.

1. Establecer la equivalencia de las siguientes propiedades :
   — $DF(a)$ es sobreyectiva.
   — formas lineales $DF_1(a),\dots,DF_k(a)$ son linealmente independientes.
   — $\ker DF(a)=\bigcap_{i=1}^{k}\ker DF_i(a)$ es de dimensión $m-k$.
2. Un punto $a\in M$ se dice *punto regular* si $DF(a)$ es sobreyectiva. Demostrar que el conjunto de puntos regulares de M es un abierto de M.

[006283]

Ejercicio 6636

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un polinomio homogéneo de grado $\alpha>0$ a n variables.

1. Calculando la derivada de $\lambda\mapsto f(\lambda x)$ de dos maneras diferentes, establecer la identidad de Euler :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\alpha f(x)\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^n.$$
2. Sea a un real no nulo. Demostrar que $X_a=f^{-1}(\{a\})$ es una sub-variedad de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$. Establecer entonces que, para $a_1>a_2>0$, X_{a_1} y X_{a_2} son difeomorfos.
3. Se supone que φ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, con $\varphi(X_{a_1})=X_{a_2}$ y sea $p\in X_{a_1}$. Expresar el espacio tangente $T_{\varphi(p)}X_{a_2}$ en función de $T_pX_{a_1}$.

[006284]

Ejercicio 6637

Sea $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ la aplicación C^∞ dada por $f(A)=\det(A)$.

1. Demostrar que
$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\det(I+\lambda X)-1}{\lambda}=\operatorname{tr}(X),\ \ X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ .$$
   Deducir $Df(I)(X)$.
2. Notando que
$$\frac{\det(A+\lambda X)-\det(A)}{\lambda}=\det(A)\frac{\det(I+\lambda A^{-1}X-1)}{\lambda},$$
   para A una matriz invertible, calcular $Df(A)(X)$, cuando A es invertible.

3. Demostrar que $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \det(A) = 1\}$ es una sub-variedad de $M_n(\mathbb{R})$ de dimensión $n^2 - 1$ (se puede hacer la conexión con el ejercicio 6636) cuyo espacio tangente en I es

$$T_I Sl_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; \mathrm{tr}(X) = 0\} \; .$$

[006285]

Ejercicio 6638

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, $a \in E$ y $f : E \to E$ un difeomorfismo de clase C^1. Se supone que $f^n = id$ y $f(a) = a$. Se define $A = Df(a)$ y $u(x) = \sum_{p=1}^{n} A^{-p} f^p(x)$, para $x \in E$.

1. Demostrar que u es un difeomorfismo local en a tal que $u \circ f = A \circ u$.
2. Sea F el conjunto de puntos fijos de f. Demostrar que F es una sub-variedad de E.
3. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Demostrar que g es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Deducir que 2) ya no es necesariamente cierto si eliminamos la hipótesis $f^n = id$.

[006286]

Ejercicio 6639 Hélice

1. Sean r y h dos números reales estrictamente positivos. ¿La curva parametrizada siguiente, llamada hélice, es regular ?

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\,\mathrm{sen}\, t \\ ht \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2. ¿Son regulares las siguientes curvas paramétricas ?

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} e :]0, +\infty[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

[007642]

Ejercicio 6640 Reparametraje de una curva regular

1. Demostrar que la reparametrización de una curva regular es aún regular.
2. ¿Se puede reparametrizar todo curva parametrizada por su longitud de arco ?
3. Determinar una reparametrización de la curva $\left\{ \begin{aligned} c : [0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$ que cambia de orientación.

[007643]

Ejercicio 6641 Equivalencia

1. ¿Son equivalentes las siguientes curvas paramétricas ?

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} d : [0, 2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. ¿Son equivalentes las siguientes curvas paramétricas ?

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} d : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. ¿Dos curvas paramétricas equivalentes tienen la misma imagen ? ¿El recíproco es cierto ?
4. ¿Se puede encontrar una curva a partir de su imagen ?

[007644]

Ejercicio 6642 Cálculo de longitud

1. Calcular la longitud de la parte de la hélice

$$\begin{aligned} c : [0,1] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\operatorname{sen} t \\ ht \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Determinar una parametrización de esta porción de hélice por su longitud de arco.

[007645]

Ejercicio 6643 Diferentes configuraciones por longitud de arco

Demostrar que dos parametrizaciones por longitud de arco de la misma curva regular orientada difieren a lo sumo por un cambio de parametrización de la forma $t \mapsto t_0 + t$. [007646]

Ejercicio 6644 Aproximación por líneas poligonales

Verificar la aproximación poligonal para un círculo de radio r aproximado por polígonos regulares a n lados. [007647]

Ejercicio 6645 Cicloides

Se considera un círculo $\mathscr{C}_1$ radio 1 que se rueda sin resbalar sobre el eje de las x del plano euclidiano orientado $\mathbb{R}^2$, y para todo número real r estrictamente positivo el círculo $\mathscr{C}_r$ de radio r, concéntrico con $\mathscr{C}_1$ y firmemente sujeta a $\mathscr{C}_1$.

1. Determinar por parametrización, la trayectoria T_r, llamada “cicloide” del punto M de coordenadas $(0, 1-r)$ de $\mathscr{C}_r$ cuando $\mathscr{C}_1$ rueda en el eje de las x.
2. Hacer un borrador de T_r siguiente la posición de r, con respecto a 1.
3. ¿T_r es una curva regular ?
4. Calcular la longitud de T_1 cuando $\mathscr{C}_1$ realiza una vuelta.

[007648]

Ejercicio 6646 Aproximación por líneas poligonales

1. Se recuerda que una recta poligonal P de $\mathbb{R}^n$ está dada por un k-tuple $P = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Se supone también que dos puntos consecutivos son distintos. Recordar la fórmula para la longitud de una línea poligonal P.

2. Se busca demostrar el siguiente teorema.

Teorema. *Sea* $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva paramétrica. Entonces, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta >$ *tal que para toda partición* $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ *de* $[a,b]$ *de paso inferior a* δ*,*

$$L[P] \leqslant L[c] \leqslant L[P] + \varepsilon$$

donde $P = (c(t_0), c(t_1), \ldots, c(t_m))$ *es la línea poligonal simplemente inscrita en la curva* c *asociada a la partición* $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ *de* $[a,b]$*.*

(a) Escribir en términos de cuantificadores, a partir de un $\varepsilon_1 > 0$, el teorema de las sumas de Riemann para la función $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$.

(b) Escribir en términos de cuantificadores a partir de un $\varepsilon_2 > 0$ la propiedad de continuidad uniforme de funciones componentes $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$.

(c) Sea una partición $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$. Escribir en términos de cuantificadores el teorema de incrementos finitos para la función $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto c_j(t)$.

3. Mayorar la cantidad $|\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| - \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i)|$ por $\sqrt{n}\varepsilon_2(t_{i+1} - t_i)$.
4. Mayorar la cantidad $|L[c] - L[P]|$ por $\varepsilon_1 + \sqrt{n}\varepsilon_2(b-a)$.
5. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta >$ tal que para toda partición $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$ de paso inferior a δ,
$$L[P] - \varepsilon \leqslant L[c] \leqslant L[P] + \varepsilon.$$
6. Concluir usando la desigualdad triangular en los polígonos.

[007649]

Ejercicio 6647 Cálculo de curvatura

Se considera el espacio afín euclidiano orientado $\mathbb{R}^2$ dotado de un sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calcular la función de curvatura de un círculo de radio $r > 0$.
2. Sea $c : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por la longitud del arco. Sea R la rotación de centro 0 y de ángulo α, y S la simetría de eje $x = y$. Determinar la función curvatura de $R \circ c$ y la de $S \circ c$.
3. Calcular la función de curvatura de la curva de Lissajous $\begin{cases} c : \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \mapsto \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} \end{cases}$.
4. Determinar una curva cerrada con curvatura en todas partes estrictamente negativa.
5. Demostrar que una curva plana regular de curvatura nula es un segmento de recta.

[007650]

Ejercicio 6648 Curvatura en un punto extremo

Sea $c : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por la longitud del arco. Se supone que c permanecer en el disco de radio r y que en el punto de parámetro τ, $\|c(\tau)\| = r$.

1. Demostrar derivando una vez la función $t \mapsto \|c(t)\|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ es colineal a $c(\tau)$?
2. Demostrar derivando la función de nuevo $t \mapsto \|c(t)\|^2$ que la curvatura en τ verifica $|\kappa(\tau)| \geqslant 1/r$.

Ejercicio 6649 Construcción de una curva plana con curvatura prescrita

El objetivo del ejercicio es de demostrar el teorema siguiente.

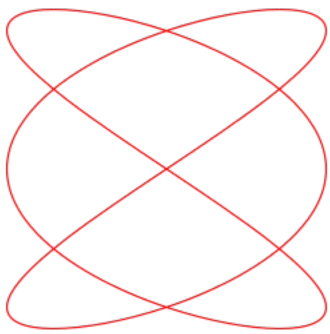
Teorema. *Sea I un intervalo y $\kappa : I \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^\infty$. Entonces, existe una curva plana $c : I \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco y de función de curvatura κ. Esta curva es única, módulo una composición al final por un desplazamiento.*

1. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}.$$
donde las funciones $c, v, n : I \to \mathbb{R}^2$ son las incógnitas. Demostrar que este sistema admite una única solución $(c(t), v(t), n(t))$, con un vector fijo como valor inicial (c_0, v_0, n_0), con (v_0, n_0) base ortonormada directa.
2. Escribir un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden satisfecho por el vector $(< v, v >, < n, n >, < v, n >)$.
3. Demostrar que para las soluciones obtenidas previamente, $(v(t), n(t))$ es un marco ortonormado directo.
4. Deducir que la curva c obtenida se parametriza por la longitud del arco y su función de curvatura es κ.
5. Concluir.

[007652]

Ejercicio 6650 Número de rotaciones

Calcular el número de rotación de la siguiente curva regular cerrada.



[007653]

Ejercicio 6651 Curvatura total

1. Calcular la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo y un cuadrado.
2. Determinar la función de curvatura y la curvatura total del óvalo parametrizado por $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t))$.

[007654]

Ejercicio 6652 Fórmulas de Frénet

Demostrar las fórmulas de Frénet para curvas parametrizadas por longitud de arco en $\mathbb{R}^3$. [007655]

Ejercicio 6653 Torsión

1. Calcular la torsión de la hélice $\begin{cases} c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\operatorname{sen} t \\ ht \end{pmatrix} \end{cases}$.
2. Calcular la torsión de la curva de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $t \mapsto (4\cos t, 5-5\operatorname{sen} t, -3\cos t)$.
3. ¿La curva anterior es plana?

[007656]

Ejercicio 6654 Curvas en una superficie

Sea C la curva dibujada en la superficie de ecuación $3z = xy + x^3$ y cuya proyección ortogonal en el plano de ecuación $z = 0$ es la curva parametrizada C' definida por $x = t$, $y = t^2$, para t recorriendo $[0,1]$.

1. Dar una expresión integral para la longitud de C', luego el de C, luego compararlos.
2. Calcular la longitud de C', luego el de C.

[007657]

Ejercicio 6655 Construcción de las curvas de $\mathbb{R}^3$

Enunciar para curvas del espacio $\mathbb{R}^3$, el teorema análogo a la caracterización de curvas planas módulo desplazamientos por su curvatura. [007658]

Ejercicio 6656 Difeomorfismo local, global

1. Sea U el plano $\mathbb{R}^2$ privado del origen. Demostrar que la aplicación
$$\begin{aligned} f : U &\to U \\ (x,y) &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$
es un difeomorfismo en un vecindario de cada uno de los puntos de U.
2. ¿Es un difeomorfismo de U?

[007659]

Ejercicio 6657 Sub-variedad de $\mathbb{R}^2$

Sea
$$\mathscr{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

1. ¿En un vecindario de qué puntos de $\mathscr{C}$, esta ecuación define y como función de x? ¿Cuál es la derivada de esta función?

2. Parametrar $\mathscr{C}$, con ayuda de t tal que $y = tx$.
3. Representar $\mathscr{C}$, con sus asíntotas.
4. ¿El subconjunto $\mathscr{C}$ es una sub-variedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$?

[007660]

Ejercicio 6658 Superficies paramétricas

¿La superficie parametrizada por $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ es regular en las cercanías de $A(1,-1,-1)$?
[007661]

Ejercicio 6659 Superficies implícitas

1. ¿El conjunto de ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = 4$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$? Describirla.
2. ¿El conjunto de ecuaciones $(x^2+y^2+z^2-4)^2 = 0$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$? Describirla.
3. ¿El conjunto de ecuaciones $x^2+y^2-z^2 = 0$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$. Describirla. Demostrar que todos los caminos del punto $A(1,0,1)$ al punto $B(1,0,-1)$ pasan por un mismo punto a determinar.
4. ¿Los respectivos conjuntos de ecuaciones

$$a)\ x^2+3y^2+z^2+4xy+2z = 5 \qquad b)\ 2x^2+3y^2 = 1$$
$$c)\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4} = 1 \qquad d)\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4} = -1.$$

son superficies regulares de $\mathbb{R}^3$? Describirlas.

[007662]

Ejercicio 6660 Parametraje de la esfera

Se considera la esfera S unidad en $\mathbb{R}^3$.

1. Determinar por una expresión en coordenadas de la proyección estereográfica de un abierto U de S (por determinar) desde el polo norte en el plano de ecuación $z = 0$. Verificar que se trata bien de una parametrización de U.
2. Hacer lo mismo desde el polo sur.
3. Demostrar que el cambio de parámetro es de clase $\mathscr{C}^\infty$.
4. Interpretar las coordenadas esféricas como una parametrización de la esfera S.

[007663]

Ejercicio 6661 Parametraje

Se considera la aplicación

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los desplazamientos del espacio $\mathbb{R}^3$ que preservan la imagen de F.

2. Demostrar que la imagen de F es el conjunto de ecuación $y^2 = x^2(1-x)$.
3. ¿La imagen de F es una subsuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^3$?

[007670]

Ejercicio 6662 Aplicaciones diferenciables entre superficies

Sea S_1 y S_2 dos sub-superficies diferenciables de $\mathbb{R}^3$.

1. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$. Se supone que $g(S_1) \subset S_2$. Se denota $f : S_1 \to S_2$ la restricción de g a S_1. Demostrar f es una aplicación diferenciable.
2. Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable y p un punto de S_1. Demostrar que existe un vecindario de p en $\mathbb{R}^3$ en el cual f se extiende a una aplicación $\mathscr{C}^\infty$, con valores en $\mathbb{R}^3$.
3. Demostrar que la composición de dos aplicaciones diferenciables entre subsuperficies diferenciables de $\mathbb{R}^3$ es diferenciable y explicitar el diferencial de la composición.

[007671]

Ejercicio 6663 Diferencial

Sea S_1 de ecuación $x^6 + y^6 + z^6 = 1$ y S_2 de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Demostrar que S_1 y S_2 son dos sub-superficies diferenciables de $\mathbb{R}^3$.
2. Se considera la aplicación f de S_1 hacia S_2, que a p de coordenadas (x, y, z) asocia el punto de coordenadas (x^3, y^3, z^3). Demostrar que f es biyectiva de S_1 sobre S_2.
3. Demostrar que f es diferenciable.
4. Determinar el diferencial de f. ¿Es invertible ?
5. ¿La biyección recíproca f^{-1} es diferenciable ?
6. Retomar el ejercicio para la aplicación g de S_1 al plano de ecuación $z = 0$, que a p de coordenadas (x, y, z) asocia el punto de coordenadas $(x, x, 0)$.

[007672]

Ejercicio 6664 Teorema de inversión local

Enunciar y demostrar el teorema de inversión local para una aplicación entre dos subsuperficies diferenciables de $\mathbb{R}^3$. [007673]

Ejercicio 6665 Extremos

1. Encontrar los extremos de la función $f : (x, y, z) \mapsto xy$ en la esfera unitaria.
2. Encontrar los extremos de la función $f : (x, y, z) \mapsto xy$ en el elipsoide de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$.

[007674]

Ejercicio 6666 Primera forma fundamental

Calcular la primera forma fundamental del gráfico S de una aplicación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Primero se puede determinar una parametrización global de S. [007675]

Ejercicio 6667 Dependencia de la parametrización

1. Se considera el plano de ecuación $z=0$, con el parametraje $\begin{cases} F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y)\mapsto (x,y,0). \end{cases}$
   Determinar la matriz de la primera forma fundamental en la base $\mathscr{B}_F$ correspondiente.
2. Se considera el plano de ecuación $z=0$, con el parametraje local

$$\begin{aligned} G :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0). \end{aligned}$$

   Determinar la matriz de la primera forma fundamental en la base $\mathscr{B}_G$ correspondiente.
3. Determinar la matriz de cambio de base en el punto de coordenadas $(1,0,0)$ de la base $\mathscr{B}_F$ en la base $\mathscr{B}_G$. Conectar las dos matrices obtenidas para la primera forma fundamental.

[007676]

Ejercicio 6668 Esfera

1. Calcular el área de la esfera en coordenadas esféricas.
2. Calcular el área del elipsoide $\mathscr{E}$ de ecuación $x^2+y^2+5z^2=1$.

[007677]

Ejercicio 6669 Cálculo de área

Se considera la aplicación f de la esfera unitaria $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$, con valores en el cilindro $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2+y^2=1$ dada en coordenadas cartesianas por

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Hacer una figura para describir geométricamente esta aplicación.
2. Se considera una parametrización local de la esfera unitaria $\mathscr{S}$ en coordenadas polares

$$F : (\theta,\phi) \in]0,2\pi[\times]0,\pi[\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

   Determinar la primera forma fundamental de la esfera en esta parametrización.
3. Se considera la aplicación $G = f\circ F$. Demostrar que es una parametrización local del cilindro $\mathscr{C}$ y calcular la primera forma fundamental del cilindro en esta parametrización.
4. ¿La aplicación f es un difeomorfismo local ? ¿Un difeomorfismo de $\mathscr{S}$ sobre $\mathscr{C}$?
5. ¿La aplicación f es una isometría local ? ¿Conserva las áreas ?
6. Deducir el área de la porción de esfera comprendida entre dos grandes círculos pasando por los polos norte y sur y forman entre ellos un ángulo de medida α. Verificar determinando el área de la esfera.

[007678]

Ejercicio 6670 Aplicaciones conformes

Sea g y g' dos productos escalares euclidianos en $\mathbb{R}^n$. Demostrar usando la regla del seno en un triángulo $a/\operatorname{sen}\hat{A} = b/\operatorname{sen}\hat{B}$ que g y g' definiendo las mismas medidas de ángulos no orientados si y solo si existe una constante $c > 0$ tal que $g = cg'$. [007679]

Ejercicio 6671 Cartas

Se buscan aplicaciones de un abierto del plano $\mathbb{R}^2$ en un abierto de la esfera S^2 de $\mathbb{R}^3$ que conservan las longitudes, o las medidas de ángulos, o las áreas.

1. Traducir cada una de estas tres propiedades usando las formas fundamentales.
2. ¿Las coordenadas esféricas dan una aplicación que conserva las longitudes, o las medidas de ángulos, o las áreas ?
3. ¿La proyección estereográfica desde el polo norte conserva las longitudes, o las medidas de ángulos, o las áreas ?
4. ¿La aplicación del cilindro a la esfera
$$\begin{aligned}]0,2\pi[\times]-1,1[&\to S^2 \\ (\theta,h) &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2}\operatorname{sen}\theta \\ h \end{pmatrix} \end{aligned}$$
conserva las longitudes, o las medidas de ángulos, o las áreas ?
5. ¿La aplicación del cilindro a la esfera
$$\begin{aligned}]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[&\to S^2 \\ (\theta,x) &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2(x)}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2(x)}\operatorname{sen}\theta \\ h(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
con $h(x) = \operatorname{th}(x)$ conserva las longitudes, o las medidas de ángulos, o las áreas ?

[007680]

Ejercicio 6672 Esfera

Calcular la segunda forma fundamental de la esfera. Deducir su curvatura gaussiana y sus direcciones principales. [007681]

Ejercicio 6673 Cilindro

---

1. Determinar los planos tangentes y un campo vectorial normal al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.
2. Determinar la aplicación de Weingarten en cada punto p del cilindro.
3. Deducir su curvatura gaussiana y sus direcciones principales.
4. Retomar las preguntas anteriores para el paraboloide hiperbólico de ecuación $z = y^2 - x^2$ en el punto $p(0,0,0)$.

[007682]

Ejercicio 6674 Punto hiperbólico/elíptico

Dar un ejemplo de una subsuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^3$, con un punto hiperbólico y un punto elíptico. [007683]

Ejercicio 6675 Estudio hasta el orden 2

Sea Σ la gráfica de la función $f(x,y) = xy$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

1. ¿Es una subsuperficie diferenciable de $\mathbb{R}^3$?
2. Determinar una parametrización de Σ.
3. En esta parametrización, calcular la primera y la segunda forma fundamental.
4. Determinar la curvatura gaussiana y la curvatura media.

[007684]

Ejercicio 6676 Estudio hasta el orden 2

Sea el abierto $W =]0;1[\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Se considera la superficie M de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\begin{aligned} F : W &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v) \end{aligned}$$

1. Hacer un dibujo dando la apariencia de M.
2. Calcular el área de la parte de M comprendida entre los planos de ecuaciones $z = 0$ y $z = 2\pi$.
3. Calcular, en las parametrizaciones F, la curvatura de Gauss K, la curvatura media H, las principales curvaturas de la superficie M.

[007685]

Ejercicio 6677 Definición

1. Una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ se dice reglada si admite parametrizaciones locales de la forma $F(t,s) = c(t) + sv(t)$, para $t,s) \in I \times J$, donde c es una curva regular de $\mathbb{R}^3$, parametrizada en el intervalo I de $\mathbb{R}$, y $v : I \to \mathbb{R}^3_{ev}$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$, con $v(t)$ y $\dot{c}(t)$ en todas partes independiente. Demostrar que si J es un pequeño intervalo alrededor 0, F es entonces una parametrización regular.
2. Demostrar que la curvatura de Gauss de una superficie reglada es negativa en todos los puntos.

[007686]

Ejercicio 6678 Ejemplos

1. Demostrar que un cilindro es una superficie reglada.
2. Demostrar que la superficie de un paraboloide hiperbólico de ecuación $z = xy$ es reglada sobre la recta de ecuación $y = z = 0$.
3. Demostrar que la superficie de un hiperboloide a una hoja de ecuación $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ es reglada sobre el círculo de altura 0.

[007687]

Ejercicio 6679

Calcular la torsión de la curva de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $c: \ t \mapsto (4\cos t, 5-5\,\mathrm{sen}\,t, -3\cos t)$. ¿La curva es plana?

Solución ▼ [007688]

Ejercicio 6680

Sea C la curva dibujada en la superficie de ecuación $3z = xy + x^3$ y cuya proyección ortogonal en el plano de ecuación $z = 0$ es la curva parametrizada C' definida por $x = t$, $y = t^2$, para t recorriendo $[0,1]$.

1. Dar una expresión integral para la longitud de C', luego el de C, luego compararlos.
2. Calcular la longitud de C' y luego la de C.

Solución ▼ [007689]

Ejercicio 6681

Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.

1. ¿La superficie S es regular?
2. Parametrar la superficie S (de manera polinomial) tomando los parámetros u y v entre las variables x, y y z.
3. Determinar una base del espacio tangente a la superficie S en $A(-6,1,-1)$.
4. Calcular un vector normal a la superficie S en $A(-6,1,-1)$.
5. ¿El vector $V = (27,-29,-1)$ pertenece al plano tangente a S en $A(-6,1,1)$?

Solución ▼ [007690]

Ejercicio 6682

Calcular el área del elipsoide $\mathscr{E}$ de ecuación $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

Solución ▼ [007691]

Ejercicio 6683 Paraboloide hiperbólico

Calcular una aplicación de Weingarten del paraboloide hiperbólico S de ecuación $z = x^2 - y^2$ en el punto $p(0,0,0)$. Deducir su curvatura gaussiana y sus direcciones principales.

Solución ▼ [007692]

Ejercicio 6684

Sea C una curva regular plana convexa cerrada simple parametrizada por la longitud de arco por la aplicación $[0,\ell] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$. Una esquina es un punto en la curva donde la función de curvatura tiene derivada nula. El propósito del ejercicio es demostrar que la curva C tiene al menos tres esquinas. Se supone que C no es un círculo. Se denota $v(t) = \dot{c}(t)$ y $\gamma(t) = \ddot{c}(t)$ y $\kappa(t)$ la curvatura en el punto del parámetro t.

1. Demostrar que C tiene al menos dos esquinas distintas P y Q. Hacer una figura.
2. Demostrar usando integración por partes que $\displaystyle\int_0^\ell \dot{\kappa}(t)c(t) = 0$.
3. Se supone que P y Q están en el eje de x y que no existe otros rincones. Encontrar una contradicción.
4. Demostrar que la curva C tiene al menos cuatro esquinas.

Ejercicio 6685

Se considera en $\mathbb{R}^3$ euclidiano el cilindro $\mathscr{C}$ de ecuación $x^2+y^2=1$ dotado de la métrica de Riemann restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

1. Demostrar que $\mathscr{C}$ es una superficie regular.
2. Demostrar que la aplicación $F :]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $(\theta,h)\mapsto(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,h)$ da un parametraje de $\mathscr{C}$ en un vecindario del punto p de coordenadas $(1,0,0)$.
3. Calcular la matriz $G(u)$ de la primera forma fundamental I en la base
$$(X_\theta(\theta,h) := \frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta,h),\quad X_h := \frac{\partial F}{\partial h}(\theta,h))$$
de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C}$ correspondiente a este parametraje F.
4. Determinar un campo de vectores normales unitarios $N(\theta,h)$ en el punto $F(\theta,h)$.
5. Calcular los símbolos de Christoffel de la base $(X_\theta(\theta,h),X_h(\theta,h))$ de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C}$.
6. Sea a un número real fijo y $c:\mathbb{R}\to S$, $t\mapsto(\cos t,\operatorname{sen} t,at)$ la curva paramétrica dibujada en el cilindro $\mathscr{C}$. Expresar el vector velocidad en el punto de parámetro t en la base $(X_\theta(u),X_h)$ de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C})$.
7. ¿Son las curvas paramétricas anteriores geodésicas ?
8. ¿Son las secciones planas del cilindro parametrizadas por la longitud de arco geodésicas ?

[007694]

Ejercicio 6686

Demostrar que la imagen de una geodésica por una isometría entre dos superficies dotadas de métricas riemannianas es una geodésica. Encontrar las geodésicas del cilindro $\mathscr{C}$ de ecuación $x^2+y^2=1$ del ejercicio anterior.

[007695]

Ejercicio 6687 Métrica riemanniana

Sea $\kappa\in\mathbb{R}^+$. Se considera en el plano afín $\mathbb{R}^2$, la métrica de Riemann dada por
$$g_{ij}(x_1,x_2) = \frac{1}{(1+\kappa(x^2+y^2))^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
en la parametrización Id de $\mathbb{R}^2$.

1. Calcular los símbolos de Christoffel, por la fórmula
$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)g^{mk}.$$
2. Se recuerda la fórmula de los coeficientes del endomorfismo de curvatura
$$R(X_i,X_j)X_k = \sum_l\left(\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial u^j}+\sum_m\left(\Gamma_{mi}^l\Gamma_{kj}^m-\Gamma_{mj}^l\Gamma_{ki}^m\right)\right)X_l$$
Calcular la curvatura de Gauss de $(\mathbb{R}^2,g)$.

Ejercicio 6688

1. ¿La siguiente curva paramétrica es regular? $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\operatorname{sen} t \\ t \end{pmatrix}.$$
2. Se fijan dos números reales $a < b$. Comparar la longitud de la porción de la curva c, parametrizada por $[a,b]$ y $\sqrt{2}(b-a)$.
3. Determinar una superficie cuádrica que contenga la imagen $\mathscr{C}$ de la curva c.
4. Determinar un desplazamiento (no igual a la identidad) del espacio $\mathbb{R}^3$ que conserva la imagen $\mathscr{C}$ de la curva c.
5. Describir la forma de la curva $\mathscr{C}$.
6. Calcular la función de torsión de la curva c.

Solución ▼ [007697]

Ejercicio 6689

¿La curvatura media de la siguiente superficie paramétrica es nula en todas partes?

$$F : \mathbb{R}\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\operatorname{sen}(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [007698]

Ejercicio 6690

Se considera la aplicación

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los desplazamientos del espacio $\mathbb{R}^3$ que preservan la imagen de F.
2. Demostrar que la imagen de F es el conjunto de ecuación $y^2 = x^2(1-x)$.
3. ¿La imagen de F es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$?

Solución ▼ [007699]

Ejercicio 6691

Encontrar los extremos de la función $f : (x,y,z) \mapsto xy$ en la esfera unitaria.

Solución ▼ [007700]

Ejercicio 6692

Se considera la curva parametrizada

$$\begin{aligned} c:]0,1[&\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\,\mathrm{sen}\, t \\ 4t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. ¿La curva c es regular ?
2. Parametrar la imagen de c por longitud de arco.
3. Determinar en todo punto de c el sistema de referencia de Frénet.

Solución ▼ [007701]

Ejercicio 6693

Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} F:]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Representar la imagen T de F.
2. Demostrar que T es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.
3. Determinar la curvatura gaussiana K de T, con la métrica inducida por el producto escalar en $\mathbb{R}^3$, es decir la primera forma fundamental. (Explicar primero su enfoque global. Todo resultado intermediario se tendrá en cuenta).
4. Calcular $\displaystyle\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Solución ▼ [007702]

Ejercicio 6694

Se considera la aplicación

$$\begin{aligned} F:]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[&\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\,\mathrm{sen}(\theta) \\ r\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Demostrar que se define una métrica riemanniana en $\mathrm{Im}(F) = T$ poniendo $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}) = g(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = 1$ y $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta}) = 0$.
2. Determinar la curvatura gaussiana K de T, con la métrica g.
3. Calcular $\displaystyle\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Solución ▼ [007703]

Ejercicio 6695

Sea S una superficie diferenciable dotada de una métrica de Riemann g. Sea p y q dos puntos fijos en S. Sea ε un número real estrictamente positivo. Sea $a \leqslant b$ dos números reales. Sea $C:]-\varepsilon,\varepsilon[\times[a,b] \to S$ una aplicación diferenciable que verifica para todo $s \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $C(s,a)=p$ y $C(s,b)=q$. Se denota $c_s(t) := C(s,t)$, $V(t) := \frac{\partial C}{\partial s}_{(0,t)}$. Se admite la identidad de las derivadas covariantes

$$\nabla_{V(t)}\dot{c_0}(t) = \nabla_{\dot{c_0}(t)}V(t).$$

1. Representar en un dibujo S, la aplicación C y el campo de vectores V, en particular $V(a)$ y $V(b)$.
2. Recordar la definición de energía $E[c_s]$ de la curva $c_s : [a,b] \to S$.
3. Expresar usando la derivada covariante $\nabla_{\dot{c_0}(t)}\dot{c_0}(t)$, la derivada $\frac{dE[c_s]}{ds}_{s=0}$.

[007704]

Ejercicio 6696

Sea Σ la gráfica de la función $f(x,y)=xy$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

1. ¿Es una superficie regular?
2. Determinar una parametrización de Σ.
3. En esta parametrización, calcular la primera y la segunda forma fundamental.
4. Determinar la curvatura gaussiana y la curvatura media.

[007705]

Ejercicio 6697

Sea el abierto $W =]0;1[\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Se considera la superficie M de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\begin{aligned} F : W &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v) \end{aligned}$$

1. Hacer un dibujo dando la apariencia de M.
2. Calcular el área de la parte de M comprendida entre los planos de ecuaciones $z=0$ y $z=2\pi$.
3. Calcular, en las parametrizaciones F, la curvatura de Gauss K, la curvatura media H, las principales curvaturas de la superficie M.

[007706]

Ejercicio 6698

Encontrar los extremos de la función $\phi(x,y,z)=xy$ definida en el elipsoide de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2+y^2+3z^2 = 1$. [007707]

Ejercicio 6699

Se considera en $\mathbb{R}^4$ la intersección de los conjuntos de ecuaciones $x^2+y^2+z^2+t^2=8$ y $x^2+y^2=4$.

1. ¿Es una superficie diferenciable?
2. Determinar un sistema de ecuaciones para sus espacios tangentes.

[007708]

Ejercicio 6700

Demostrar las fórmulas de Frénet para curvas parametrizadas por longitud de arco en $\mathbb{R}^3$. [007709]

Ejercicio 6701

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $c : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por la longitud del arco. Se supone que c permanece en el disco de radio $r > 0$ y que en el punto de parámetro τ, $\|c(\tau)\| = r$.

1. Recordar el valor absoluto de la curvatura de un círculo de radio r.
2. Demostrar derivando una vez la función $\phi : t \mapsto \|c(t)\|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ es colineal a $c(\tau)$.
3. Demostrar derivando la función de nuevo ϕ que la curvatura en τ verifica $|\kappa(\tau)| \geqslant 1/r$.
4. Interpretar este resultado gráficamente.

Solución ▼ [007710]

Ejercicio 6702

1. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente en la superficie $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $F : (u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ en el punto $M(u_0,v_0)$ de parámetros (u_0,v_0).
2. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie Σ de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^5+y^5+z^5 = 1$ en el punto $M(x_0,y_0,z_0)$ de coordenadas (x_0,y_0,z_0).
3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente al gráfico de f en cada uno de sus puntos.

Solución ▼ [007711]

Ejercicio 6703

1. Determinar los planos tangentes y un campo de vectores normales unitarios al paraboloide hiperbólico $\mathscr{P}$ de ecuación $z = y^2 - x^2$ en el vecindario del punto $A(0,0,0)$ de coordenadas $(0,0,0)$.
2. Determinar la aplicación de Weingarten en el punto A del paraboloide hiperbólico $\mathscr{P}$.
3. Deducir la curvatura gaussiana y las direcciones principales del paraboloide hiperbólico $\mathscr{P}$ en el punto A.

Solución ▼ [007712]

Ejercicio 6704

Se considera la esfera de centro 0 y de radio 1 de $\mathbb{R}^3$. ¿La proyección estereográfica de centro el Polo Norte sobre el plano de altura nula (de ecuación $z = 0$) conserva longitudes, ángulos, áreas ?

Solución ▼ [007713]

Ejercicio 6705

¿La intersección de dos superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ es una curva regular de $\mathbb{R}^3$?

Solución ▼ [007714]

278 353.00 Espacio tangente, aplicación lineal tangente

Ejercicio 6706

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función derivable y sea $M = f^{-1}(\mathbf{0})$. Se supone que M es una sub-variedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.

1. Dar la definición de un vector tangente a M en el punto $x \in M$. Dar la definición de un campo vectorial en M.
2. Sea f una función en M y α una 1-forma sobre M. Dar la definición de df sin usar una carta de M. Dar la definición de $d\alpha$.
3. Sea X un vector tangente a M en el punto $x \in M$. Demostrar que $\big(\, df|_x(X) \equiv \,\big)\, Xf = \mathbf{0}$. Deducir que $X \in \ker(J(x))$ (donde $J(x)$ es la matriz jacobiana de f en x).
4. Sea X un vector tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto $x \in M$, y se supone que $Xf = \mathbf{0}$, y que $\operatorname{rang}(J(x)) = p$. Demostrar que $k = n - p$ y que X es un vector tangente $\underline{\text{a } M}$.

[006793]

Ejercicio 6707 Aplicaciones regulares ?

1. ¿La restricción a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la función $(x,y,z) \mapsto 5x^6 + 7xy^4 - 2$ es diferenciable ?
2. ¿La restricción a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = -5$ de la función $(x,y,z) \mapsto \sqrt{|x|}$ es diferenciable ?

[007664]

Ejercicio 6708 Difeomorfismos

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$. Demostrar que el gráfico de f es difeomorfa a U.
2. ¿Las superficies $\mathscr{E}$ de ecuación $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ y $\mathscr{S}$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ son difeomorfas ?
3. ¿Las superficies $\mathscr{C}$ de ecuación $2x^2 + 3y^2 = 1$ y $\mathscr{S}$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ son difeomorfas ?

[007665]

Ejercicio 6709 Determinación del plano tangente

1. Determinar el plano tangente en $A(1,-1,-1)$ a la superficie parametrizada por $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2 - v^2, v)$.
2. Determinar el plano tangente en $A(1,1,-1)$ a la superficie de ecuación $x^5 + y^5 + z^5 = 1$.
3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$. Determinar el plano tangente al gráfico de f en cada uno de sus puntos.

[007666]

Ejercicio 6710 Plano tangente

Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.

1. ¿La superficie S es regular ?
2. Parametrar la superficie S (de manera polinomial) tomando los parámetros u y v entre las variables x, y y z.
3. Determinar una base del espacio tangente a la superficie S en $A(-6,1,-1)$.
4. Calcular un vector normal a la superficie S en $A(-6,1,-1)$.
5. ¿El vector $V = (27,-29,-1)$ pertenece al plano tangente a S en $A(-6,1,-1)$?

[007667]

Ejercicio 6711 Plano tangente

1. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente en la superficie $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $F:(u,v)\mapsto(u+v^2,u^2-v^2,v)$ en el punto $M(u_0,v_0)$ de parámetros (u_0,v_0).
2. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie Σ de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^5+y^5+z^5=1$ en el punto $M(x_0,y_0,z_0)$ de coordenadas (x_0,y_0,z_0).
3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f:U\to\mathbb{R}$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^\infty$. Determinar una ecuación cartesiana del plano tangente al gráfico de f en cada uno de sus puntos.

[007668]

Ejercicio 6712 Determinación de mínimos

En todo el ejercicio, r y h recorren $]0,+\infty[$.

1. Determinar el volumen $V(r,h)$ de un cilindro de altura h y de radio r.
2. Determinar el área $A(r,h)$ de una caserola de altura h y de radio r.
3. Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (r,h,v) de ecuación $1=V(r,h)$ es una superficie regular.
4. Determinar el gradiente de la función $\alpha:(r,h,v)\mapsto A(r,h)$ y el de la función $\nu:(r,h,v)\mapsto V(r,h)-1$
5. Sea (r_0,h_0,v_0) un mínimo de la función α en la superficie de ecuación $1=V(r,h)$. Comparar $\operatorname{grad}_{(r_0,h_0,v_0)}\alpha$ y $\operatorname{grad}_{(r_0,h_0,v_0)}\nu$.
6. Determinar el mínimo de $A(r,h)$ en la superficie de ecuación $V(r,h)=1$. Interpretar este resultado.

[007669]

---

279 354.00 Campo de vectores

Ejercicio 6713 Preguntas del curso

1. Dar las definiciones de :
   (a) una norma en un espacio vectorial,
   (b) un espacio vectorial normado completo,
   (c) una sub-variedad M de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k,
   (d) un campo de vectores en M,
   (e) un campo de vectores completo en M.

2. Enunciar el teorema de la función implícita.
3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, sea $\mathscr{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua } \}$, y $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Demostrar que $(\mathscr{C}^0(A), \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

[006776]

Ejercicio 6714

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una sub-variedad de dimensión k, y sea X un campo de vectores en M. Se define $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ y $S = \overline{D} =$ clausura D. Se pide probar el enunciado : "si S es compacto, entonces x es completo". Las siguientes preguntas pueden guiar.

1. Para $x \notin S$ encontrar la curva integral maximal $\gamma : J_x \to M$ pasando por x.
2. Demostrar que si $x \in S$, y si $\gamma : J \to M$ es una curva integral que pasa por x, entonces $\forall t \in J : \gamma(t) \in S$.
3. Usando la compacidad de S, demostrar que x es completo (sobre M !).

[006777]

Ejercicio 6715

Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ y $N \subset \mathbb{R}^p$ dos sub-variedades de dimensión k y ℓ respectivamente. Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable y sea X un campo de vectores en M. Encontrar un contraejemplo para el enunciado :

$$F(m) = F(\widehat{m}) \Longrightarrow TF(m)(X(m)) = TF(\widehat{m})(X(\widehat{m})).$$

Recordar : $TF(m) \equiv F'(m)$ es la "derivada" de F en el punto m. [006778]

Ejercicio 6716

Sea $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la carta de la esfera S^2 dada por la proyección estereográfica del polo norte. Identificando $\mathbb{R}^2$, con el plano complejo $\mathbb{C}$, se define la aplicación $F : \mathbb{R}^4 \to S^2$ por :

$$F(x,y,z,t) = \phi_2(\frac{z+it}{x+iy}).$$

1. Calcular la expresión explícita de F y demostrar que la restricción de F a la esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ es una aplicación $F : S^3 \to S^2$ que está bien definida.
2. Sobre $\mathbb{R}^4$ se define el campo de vectores
$$X(x,y,z,t) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial z}.$$
Calcular el flujo de X ; es este que X es completo ?
3. Usando el resultado de 2., demostrar que si $m \in S^3$, entonces $X(m) \in T_m S^3$.
4. Para todo $m \in S^3$ calcular $TF(m)(X(m)) \in T_{F(m)} S^2$.

[006779]

Ejercicio 6717

Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ definido por $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^2-1,x_3^2+x_4^2-1)$, sea $M=f^{-1}(0,0)$, y sea X el campo de vectores en $\mathbb{R}^4$ definido por :

$$X|_x=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha(x_3\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3})$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}$ es un parámetro.

1. Demostrar que para todo $(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv x\in M$ el vector $X|_x$ es tangente a M.
2. Expresar los vectores tangentes $X|_x$, $x\in M$ en la carta

$$(\theta,\psi)\mapsto(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),\cos(\psi),\operatorname{sen}(\psi)).$$

3. Calcular el flujo ϕ_t del campo de vectores $x|_x$, $x\in M$ sobre M (por ejemplo usando la carta (θ,ψ)). ¿Este campo es completo ?
4. Determinar los 6-tuples $(\alpha,t,x_1,x_2,x_3,x_4)$, $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in M$, tales que $\phi_t(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

[006794]

Ejercicio 6718

Sea $M\subset\mathbb{R}^3$ el cilindro definido por la ecuación $x^2+y^2=1$. En la carta $(\theta,z)\mapsto(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),z)$ de M se da el campo de vectores X definido por :

$$X(\theta,z)=\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{(\theta,z)}+\tfrac{1}{2}z(z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{(\theta,z)}.$$

1. Decir por qué X define un campo vectorial en M.
2. Esbozar el campo X en la carta y calcular su flujo ϕ_t sobre M.
3. ¿El campo X es completo ?
4. Calcular los puntos (t,θ,z) tal que $\phi(t,\theta,z)=(\theta,z)$ **en el cilindro** M.

[006800]

Ejercicio 6719

1. Dar la definición de una sub-variedad M de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.
2. Enunciar el teorema de la función implícita.
3. Sea $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2+1=0\ z>0\}$. Demostrar que M es una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

   Se define la proyección estereográfica s de $\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z)\mid z=-1\}$ sobre $\mathbb{R}^2\cong\{(x,y,z)\mid z=0\}$ por el siguiente procedimiento. Para un punto $P=(x,y,z)$ se traza la recta $d=\overline{PS}$, donde $S=(0,0,-1)$. La imagen $s(P)$ es la intersección de la recta d, con el plano $z=0$.
4. Calcular explícitamente la aplicación s.
5. Calcular la imagen $D=s(M)$.
6. Calcular la "inversa" de la aplicación $s:M\to D$. Sea X el campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$X_{|(x,y,z)}=x\frac{\partial}{\partial z}_{|(x,y,z)}+z\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y,z)}\ \cong\ (z,0,x).$$

7. Calcular flujo del campo X.
8. Demostrar que X es tangente a M, es decir que para todo $(x,y,z) \in M$ el vector $x_{|(x,y,z)}$ pertenece al espacio tangente $T_{(x,y,z)}M$.
9. Calcular la expresión de X en la carta D de M.
10. Calcular el flujo de campo en D obtenido en i).

[006802]

Ejercicio 6720

Para la esfera S^2 se considera la aplicación $U =]0,\infty[\,\times\,]0,2\pi[$ dada por :

$$\varphi :\ U \to S^2, \quad (r,\theta) \mapsto \Big(\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta), \frac{2r}{r^2+1}\operatorname{sen}(\theta), \frac{r^2-1}{r^2+1}\Big).$$

En la carta U se da el campo de vectores X por :

$$X_{|(r,\theta)} = f(r)\frac{\partial}{\partial r}_{|(r,\theta)} \ \cong\ (f(r),0).$$

1. Calcular el campo en S^2, es decir los vectores $\varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$.
2. Sea $f(r) = r^2$. ¿Existe un campo de vectores continuo Y en la esfera S^2 **entera** tal que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$, para todo (r,θ) ?
3. La misma pregunta que en 2. En el caso $f(r) = \dfrac{r^2-1}{r^2+1}$.
4. ¿Qué condición necesaria y suficiente (lo más simple posible) debe verificar la función continua $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, para que exista un campo vectorial continuo Y en la esfera S^2 **entera** tal que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$, para todo (r,θ) ?

[006803]

Ejercicio 6721

Sea $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores $Y(x,y) = (1, 1+y^2)$.

1. Encontrar las soluciones maximales del campo Y, incluyendo su dominio de definición.
2. Esbozar el diagrama de fase del campo Y.
3. Determinar el flujo del campo Y, incluyendo su dominio de definición.

[006823]

Ejercicio 6722

Sea $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores $Y(x,y) = (x^2, xy)$.

1. Encontrar las soluciones maximales del campo Y, incluyendo su dominio de definición.
2. Esbozar el diagrama de fase del campo Y.
3. Determinar el flujo del campo Y, incluyendo su dominio de definición.

[006829]

Ejercicio 6723

Sea $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores $Y(x,y) = (x^2y, xy^2)$.

1. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es solución de la ecuación $\gamma'(t) = Y(\gamma(t))$, ¿qué se puede decir de la derivada de y/x, con respecto a t ?
2. Encontrar las soluciones maximales del campo Y (incluyendo su dominio de definición).
3. Esbozar el diagrama de fase del campo Y.
4. Determinar el flujo del campo Y (incluyendo su dominio de definición).

[006840]

Ejercicio 6724

Sea $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ y sea $Y : U \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores $Y(x,y) = \left(1, \frac{2x}{3y^2}\right)$.

1. Encontrar las soluciones maximales del campo Y, incluyendo su dominio de definición (no olvidar que se está en U).
2. Esbozar el diagrama de fase del campo Y.
3. Determinar el flujo del campo Y, incluyendo su dominio de definición.

[006846]

---

280 355.00 Forma diferencial

Ejercicio 6725

Sea $\alpha(x,y,z,t) = x\,dy - (1+t^2)y\,dx - z^3\,dt$ una 1-forma sobre $\mathbb{R}^4$, sea $D = \{\,(x,y,z,t) \in S^3 \mid t = 0, z \geqslant 0\,\}$, y sea $C = \partial D$ la frontera de D.

1. Calcular la 2-forma $d\alpha$ sobre $\mathbb{R}^4$.
2. Demostrar que D es una semi-esfera de dimensión 2 y que C es un círculo.
3. Usando coordenadas esféricas, dar una carta $\phi_D : I_1 \times I_2 \to D \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$, y una carta $\phi_C : I_3 \to C \subset D \subset \mathbb{R}^4$, donde los $I_j \subset \mathbb{R}$ son intervalos abiertos.
4. Calcular explícitamente $\displaystyle\int_D d\alpha$ y $\displaystyle\int_{\partial D} \alpha$. ¿El resultado confirma el teorema de Stokes ?

[006780]

Ejercicio 6726

En todo lo que sigue, (x,y) denota las coordenadas en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $z = x + iy$, y se separan sistemáticamente las partes real e imaginario de todos los objetos. Sea $z_o \in \mathbb{C}$, y sea C_r, $r \in \mathbb{R}^+$ la curva dada por la ecuación $|z - z_o| = r$.

1. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ la aplicación $f(z) = (z - z_o)^n$. Calcular para todo $n \in \mathbb{Z}$ la integral $\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz$ (Indicación : usar una variante de coordenadas polares). Sea $g, h : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones de clases C^1 verificando las ecuaciones :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

y sea $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ la aplicación $f(x,y) = g(x,y) + ih(x,y)$.

2. Demostrar que la 1-forma $\frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_o\}$ es cerrada (no olvidar separar la parte real de la imaginaria). Deducir (Stokes !) que $\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz$ es independiente de $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Haciendo un desarrollo limitado de g y de h de orden 1 alrededor $z_o = (x_o, y_o)$, demostrar que
$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_o}\,dz = 2\pi i\, f(z_o).$$
Indicación : Utilizar el resultado de 1. ; se puede ser poco preciso en lo que concierne los ε en desarrollo limitado.

[006785]

Ejercicio 6727

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro definido por la ecuación $x^2+y^2=1$, sea $V \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto definido por $V = \{\,(x,y,z) \mid z \geqslant 0 \;\&\; (x/2)^2+(2y)^2+z^2 \leqslant 1\,\}$, sea $K = M \cap V$, y sea ∂K el borde de K. Sea finalmente α la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$ definida por $\alpha = z^2x\,dy - z^2y\,dx + (xz - yz^3)\,dz$.

1. Calcular $d\alpha$.
2. Expresar α y $d\alpha$ en la carta $(\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), z)$ de M.
3. Expresar K y ∂K en esta carta.
4. Calcular por separado $\displaystyle\int_K d\alpha$ y $\displaystyle\int_{\partial K} \alpha$ sin usar el teorema de Stokes. ¿El resultado confirma el teorema ?

[006795]

Ejercicio 6728

Sea $\alpha = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ una 1-forma cerrada ($d\alpha = 0$) sobre $\mathbb{R}^2$, y sean (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x,y) tres puntos. Se definen las curvas $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ por :
$$\gamma_i(t) = (1-t)(x_i,y_i) + t(x,y)$$
y las funciones $h_0, h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por : $h_i(x,y) = \displaystyle\int_{\gamma_i} \alpha$.

1. Demostrar que $dh_i = \alpha$ (Indicación : calcular $\frac{d}{dt} f(\gamma_i(t))$ y $\frac{d}{dt} g(\gamma_i(t))$ y usar $d\alpha = 0$).
2. Demostrar que $h_1 - h_0$ es constante y dar una expresión explícita en términos de α para esta constante. (Indicación : usar el teorema de Stokes).
3. Sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se da la 1-forma $\alpha = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Demostrar que $d\alpha = 0$, y decir por qué no existe función $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha = dh$.
4. ¿Por qué la construcción dada en 1. no funciona en el caso de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (ver 3.) ?

[006801]

Ejercicio 6729

En $\mathbb{R}^3$ se da $M = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2-1 = 0\,\}$, con la carta φ definida por :
$$\varphi :]0,2\pi[\times\mathbb{R}, \quad (\theta,z) \mapsto \left(\left(\sqrt{z^2+1}\right)\cos(\theta), \left(\sqrt{z^2+1}\right)\operatorname{sen}(\theta), z\right).$$
Se considera también la 2-forma $\alpha = z\,dx \wedge dy$ sobre $\mathbb{R}^3$.

1. Calcular la 3-forma $d\alpha$.
2. Calcular la 2-forma α sobre M en la carta φ. Sea $a < b$, y sea $\widehat{M}$ la parte de M comprendida entre $z = a$ y $z = b$, es decir $\widehat{M} = \{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,\ a \leqslant z \leqslant b \}$.
3. Calcular $\int_{\widehat{M}} \alpha$. (Nota : para la orientación no olvidar que θ es la primera coordenada, y que z es la segunda en la carta φ.)

   Sea V la parte de $\mathbb{R}^3$ dado por las desigualdades $a \leqslant z \leqslant b$ y $x^2 + y^2 - z^2 - 1 \leqslant 0$. Se pide que se use el teorema de Stokes para calcular el volumen de V, que viene dada por la fórmula $\int_V d\alpha$. Las cuestiones siguientes llevan a este objetivo.
4. Enunciar el teorema de Stokes.
5. Describir el borde ∂V de V.
6. Calcular $\int_{\partial V} \alpha$.

[006804]

---

281 356.00 Orientación

282 357.00 Integración en variedades

283 358.00 Otro

284 370.00 Diferenciabilidad, cálculo de diferenciales

Ejercicio 6730

1. Demostrar que $d(x,y) = |x - y|$ es de hecho una distancia sobre el conjunto de números reales.
2. Para todo par de elementos $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define $d(X,Y) = \sup_{i=1..n} |x_i - y_i|$. Demostrar que d es de hecho una distancia en $\mathbb{R}^n$.
3. Hacer lo mismo con $d(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$.

[002494]

Ejercicio 6731

Describir la bola de centro de origen y radio 1 en los espacios siguientes :

1. $\mathbb{R}$ provisto con la distancia $d(x,y) = |x - y|$.
2. $\mathbb{R}^2$ provisto con la distancia $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.
3. $\mathbb{R}^2$ provisto con la distancia $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.
4. $\mathbb{R}^2$ provisto con la distancia $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Demostrar que los 3 últimas distancias son equivalentes.

Solución ▼ [002495]

Ejercicio 6732

Sea E el conjunto de funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que la aplicación $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ es una norma en E. Demostrar que E no es completo.

Solución ▼ [002496]

Ejercicio 6733

Estudiar la continuidad de las siguientes aplicaciones :

1. $f(x) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
3. $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{-1}{x^2+y^2})}{|x|+|y|}$.

[002497]

Ejercicio 6734

Sean E y F dos espacios normados reales y $f : E \to F$ una aplicación acotada en la bola unidad de E y verificando

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Demostrar que f es lineal continua.

Solución ▼ [002498]

Ejercicio 6735

Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas en $\mathbb{R}^2$ y $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Se define la norma de M (o la aplicación lineal asociada) de la siguiente manera :

$$\|M\| = \sup_{X \in S_1(0,1)} \|M \cdot X\|_2$$

donde $S_1(0,1)$ es la esfera unitaria para la norma $\|\cdot\|_1$. En cada uno de los casos siguiente, calcular la norma de M.

1. $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sup(|x|,|y|)$.
2. $\|(x,y)\|_1 = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $\|(x,y)\|_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\|(x,y)\|_2 = \sup(|x|,|y|)$.

Solución ▼ [002499]

Ejercicio 6736

Continuidad en $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones :

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

Ejercicio 6737

Calcular la norma de los siguientes operadores :

1. El cambio de l^∞ definido por $S(x)_{n+1} = x_n, S(x)_0 = 0$ (sobre l^∞ se define $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$).
2. $X = \mathscr{C}([0,1])$, con la norma sup y el operador $Tf(x) = f(x)g(x)$, donde $g \in X$.
3. $X = \mathscr{C}([0,1])$ dotado con la norma sup y $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, donde $g \in X$ es una función que se anula solo en $x = 1/2$.
4. $X = l^2$ y $u(x) = \sum a_n x_n$, donde (a_n) está en X.
5. X el espacio de sucesiones convergentes dotado de la norma sup y $u : X \to \mathbb{R}$ la aplicación $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Solución ▼ [002501]

Ejercicio 6738

Sea $X = \mathscr{C}([0,1])$, con la norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$. Demostrar que la forma lineal $T : X \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = f(0)$ no es continua en 0. ¿Qué se puede deducir para el subespacio de funciones de X nulas en 0 ?

[002502]

Ejercicio 6739

Sea f una aplicación f de E en F espacios vectoriales normados de dimensión finita. Se recuerda las implicaciones siguientes : si $x_0 \in E$, "f de clase C^1 en x_0" $\Rightarrow$ "f diferenciable en x_0" $\Rightarrow$ "f continua en x_0". También se sabe que "f diferenciable en x_0" $\Rightarrow$ "f admite derivadas parciales en x_0" demostrar que los recíprocos son falsos en general inspirándose en :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + y^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \\ y^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

o de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución ▼ [002503]

Ejercicio 6740

1. Sea f una aplicación de E en F espacios vectoriales normados y supongamos f diferenciable en a; demostrar que para todo vector $u \in E^*$, la derivada de f en a en la dirección u existe, i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$ y expresarlo usando $f'(a)$.

2. Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ y, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$. Demostrar que f es derivable en $(0,0)$ en todas las direcciones, pero que f no es diferenciable en $(0,0)$.

[002504]

Ejercicio 6741

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2 y $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \;\; F(x,x) = g'(x).$$

Demostrar que F es de clase C^1 en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y calcular su diferencial.

Solución ▼ [002505]

Ejercicio 6742

Sea E^n el espacio de polinomios de grado $\leqslant n$. Estudiar la diferenciabilidad de las aplicaciones $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\, dt$ y $P \mapsto P' - P^2$.

Solución ▼ [002506]

Ejercicio 6743

Sea f una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, propio (i.e. $\|f(x)\|$ tiende a ∞, cuando $\|x\| \to \infty$), tal que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ $Df(x)$ sea inyectiva. Se va a demostrar que f es sobreyectiva. Sea $a \in \mathbb{R}^2$ y $g(x) = \|f(x) - a\|^2$;

1. Calcular $Dg(x)$.
2. Demostrar que g alcanza su límite inferior en un punto x_0 de $\mathbb{R}^2$, y que $Dg(x_0) = 0$; deducir el resultado.

Solución ▼ [002507]

Ejercicio 6744

Sea, en $\mathbb{R}^n$, F un subespacio cerrado, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,F)$. Se recuerda que f es 1-lipschitziana, y que para cada x existe $y \in F$ tal que $f(x) = d(x,y)$.

1. Se supone que f es diferenciable en $x \notin F$. Demostrar que $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leqslant 1$.
2. Se considera la función $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x+ty)$; calculando $\varphi'(0)$ de dos maneras, demostrar que $Df(x).\frac{x-y}{\|x-y\|} = 1$ y $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. Deducir que y es único.

Solución ▼ [002508]

Ejercicio 6745

Sea E un espacio de Banach y $\mathscr{L}(E)$ el espacio de endomorfismos lineales continuos de E.

1. Sea $A \in \mathscr{L}(E)$; demostrar que la aplicación $\varphi : t \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{tA}$ es derivable y calcular su derivada.
2. Se supone que la norma de E está asociado al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $x \in E$. Demostrar que la aplicación $\Phi : t \to \langle \mathrm{e}^{tA}x, \mathrm{e}^{tA}x \rangle$ es derivable y calcular su derivada.

3. Se supone que A es antisimétrica. Demostrar que para todo t, e^{tA} es unitario.

[002509]

Ejercicio 6746

Sea $\alpha > 0$. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que se define por $f(0,0) = 0$ y por

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) .$$

[002510]

Ejercicio 6747

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

y $f(0,0) = 0$. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$, que para todo $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe, pero que f no es diferenciable en $(0,0)$. [002511]

Ejercicio 6748

Sea $X = \mathscr{C}([0,1])$ equipado con la norma uniforme y sea f una aplicación de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Se denota F la aplicación $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X en X. Demostrar que para cada $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ es el operador lineal de multiplicación por $f' \circ \varphi$ en X :

$$DF(\varphi) \cdot (h) = h f' \circ \varphi ,$$

y que DF es continua. [002512]

Ejercicio 6749

Sea $\mathscr{F}$ el álgebra de matrices cuadradas $p \times p$ dotada con una norma.

1. Sea $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ la aplicación que se asocia a una matriz A su determinante $f(A) = \det(A)$. Demostrar que es diferenciable y determinar Df.
2. Para $n \geqslant 1$, se considera la aplicación $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{F}$. Demostrar que es diferenciable en toda matriz $A \in \mathscr{F}$.
3. Se designa por U el conjunto de matrices invertibles de $\mathscr{F}$. Demostrar que U es un abierto de $\mathscr{F}$ y calcular la diferencial de la aplicación $A \mapsto A^{-1}$ de U en U.

[002513]

Ejercicio 6750

1. ¿Qué se puede decir sobre la diferenciabilidad de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x_1,x_2) = \|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$?
2. Generalizar el resultado a $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, con $\mathscr{F} = \mathbb{R}^n$ o $\mathscr{F}$ el conjunto de sucesiones que convergen a cero.

Ejercicio 6751

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación $x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. ¿Es diferenciable?
Se considera ahora l^1 el espacio de las sucesiones reales dotado de la norma $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

1. Demostrar que para toda forma lineal continua L sobre l^1 existe una sucesión acotada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ tal que
$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j.$$
2. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_1 : l^1 \to \mathbb{R}$ no es diferenciable en ningún punto de l^1 (razonar por reducción al absurdo usando 1.).

[002515]

Ejercicio 6752

En un espacio normado $(\mathscr{F}, N)$, se considera la aplicación $x \mapsto N(x)$. Recordar que, cuando esta aplicación N es diferenciable en $x \in \mathscr{F}$, entonces
$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(N(x + th) - N(x) \right).$$
Deducir que N no es diferenciable en $0 \in \mathscr{F}$. Se supone N diferenciable en $x \in \mathscr{F}$, entonces justificar que N es también en λx, donde $\lambda > 0$, y que $DN(x) = DN(\lambda x)$. Considerando la derivada en $\lambda = 1$ de la aplicación $\lambda \mapsto N(\lambda x)$, demostrar que $DN(x) \cdot (x) = N(x)$ y deducir $|||DN(x)||| = 1$. [002516]

Ejercicio 6753

Sea $\mathscr{E}$ un espacio vectorial real con un producto escalar $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ y la norma asociada $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Sea u un endomorfismo continuo de $\mathscr{E}$ se supone que es simétrico, i.e.
$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathscr{E}.$$

1. Demostrar que la aplicación $x \in \mathscr{E} \mapsto \langle u(x), x \rangle$ es diferenciable en $\mathscr{E}$ y calcular su diferencial. La aplicación $x \mapsto \|x\|^2$ es, por lo tanto diferenciable.
2. Se define una aplicación $\varphi : \mathscr{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ poniendo $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$. Establecer que se trata de una aplicación diferenciable. Calcular entonces $D\varphi$. Demostrar que, para un elemento no nulo $a \in \mathscr{E}$, se tiene $D\varphi(a) = 0$ si y solo si a es un vector propio de u.

[002517]

Ejercicio 6754

1. Sea f una aplicación real continua y derivable en $]a, b[$ tal que $f'(x)$ tiene un límite cuando $x \overset{<}{\to} b$; entonces f se extiende a una función continua y derivable a la izquierda en el punto b.
2. Sea f una aplicación continua y derivable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y de derivada creciente; demostrar que f es convexa en I i.e. $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$, para todo $x < y$ de I y $t \in [0, 1]$. (Expresar $z = (1-t)x + ty$ y aplicar C.F. a $[x, z]$, luego $[z, y]$.)

Solución ▼ [002518]

Ejercicio 6755

Demostrar que la identidad de incrementos finitos no es cierta para funciones vectoriales considerando $f(x) = \mathrm{e}^{ix}$.

Solución ▼ [002519]

Ejercicio 6756 Parcial de 5 diciembre 1999

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ y $g = f \circ f$.

1. Demostrar que f y g son de clase C^1.
2. Calcular en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matriz jacobiana de f denotada $Df(x,y)$; calcular la matriz jacobiana de g en el punto $(0,0)$, denotada $Dg(0,0)$.
3. Demostrar que existe $\rho > 0$ tal que para todo $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la bola cerrada del centro $(0,0)$ y de radio ρ) se tiene $\|Dg(x,y)\| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Demostrar que la función g admite un único punto fijo en $\overline{B_\rho((0,0))}$.

Solución ▼ [002520]

Ejercicio 6757

Se considera la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (\cos x - \operatorname{sen} y,\ \operatorname{sen} x - \cos y)$; se denota $F^{(k)}$ la aplicación F compuesta k-veces.

1. Demostrar que $\|DF(x,y)\| \leqslant \sqrt{2}$, para todo (x,y).
2. Deducir que la sucesión recurrente definida por x_0, y_0 y para $n \geqslant 1$

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\cos x_n - \operatorname{sen} y_n), \quad y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x_n - \cos y_n)$$

   converge para todo (x_0, y_0). Dar la ecuación que verifica su límite.

Solución ▼ [002521]

Ejercicio 6758

Sea f una aplicación diferenciable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$; se supone que existe $k > 0$ tal que

$$\|f'(x)\| \leqslant k\|f(x)\|, \ \forall x \in]a,b[.$$

Demostrar que si f se anula en un punto $x_0 \in]a,b[$, f es idénticamente nula en $]a,b[$ (demostrar que $E = \{x \in]a,b[;\ f(x) = 0\}$ es abierto). [002522]

Ejercicio 6759

Sea E un espacio de Banach, U un abierto de E y f una aplicación diferenciable de U en $\mathbb{R}$ tal que se tiene $\|f'(x)\| \leqslant k|f(x)|, \ \forall x \in U$. Demostrar que para x bastante cerca de $a \in U$,

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{k\|x-a\|}\ |f(a)|.$$

Indicación : Considerar la aplicación $t \in [0,1] \to f(a + t(x-a))$. [002523]

Ejercicio 6760

Se considera la aplicación $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y)=(x^2+y^2,y^2)$; se denota $F^{(k)}$ la aplicación F compuesta k-veces con ella misma. Se considera $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \lim\limits_{k\to\infty}F^{(k)}(x,y)=(0,0)\}$.

1. Verificar que $(x,y)\in\Omega\Longleftrightarrow F(x,y)\in\Omega$.
2. Demostrar que existe $\varepsilon>0$ tal que $\|(x,y)\|<\varepsilon\Longrightarrow\|F'(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2}$; deducir que 0 es interior a Ω ya que Ω es abierto.
3. Demostrar que Ω es conexo.

[002524]

Ejercicio 6761

Se considera la aplicación $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y)=(x^2+y^2,y^2).$$

Sea $\Omega=\{p\in\mathbb{R}^2;\ \lim\limits_{k\to\infty}F^k(p)=(0,0)\}$.

1. Verificar que $p\in\Omega$ si y solo si $F(p)\in\Omega$.
2. Demostrar que existe $\delta>0$ tal que $|||DF(p)|||<\frac{1}{2}$ si $\|p\|<\delta$. Deducir que $(0,0)$ está en el interior de Ω ya que Ω es un abierto.
3. Utilizar la homogeneidad de F, para demostrar que Ω es conexo.

[002525]

Ejercicio 6762

Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 que es inyectiva en Ω y tal que $Df(x)$ sea inyectiva para todo $x\in\Omega$. Demostrar que, para todo $a,b\in\Omega$,

$$\|f(b)-f(a)-Df(a)(b-a)\|\leqslant\|b-a\|\sup_{c\in[a,b]}\|Df(c)-Df(a)\|.$$

Solución ▼ [002526]

Ejercicio 6763

Sea H un espacio prehilbertiano en $\mathbb{R}$, y $f(x)=\|x\|$ de H en $\mathbb{R}$; demostrar que f es diferenciable en todo punto de $H\backslash\{0\}$, y calcular su diferencial. (Indic. estudiar directamente $\|x+h\|$ o considerar la función compuesta $x\to\|x\|^2\to\sqrt{\|x\|^2}$.) Describir el núcleo $\ker f'(x)$ en todo $x\neq 0$. [006255]

Ejercicio 6764

Sea $a\in\mathbb{R}^n$ y $f:\mathbb{R}^n\backslash\{a\}\to\mathbb{R}^n$ definida por $f(x)=\dfrac{a-x}{\|x-a\|^2}$.

1. Calcular $f'(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{a\}$.
2. Demostrar que $f'(x)\cdot h=\dfrac{Sh}{\|x-a\|^2}$, donde S es la simetría ortogonal del eje $x-a$. ¿Qué se puede decir de la transformación $f'(x)$ de $\mathbb{R}^n$?

Ejercicio 6765

Sea B una aplicación bilineal de $E\times F$ en G, donde E,F,G son evn de dimensión finita.

1. Calcular $B'(a)$ su diferencial de un punto $a=(a_1,a_2)$ de $E\times F$.
2. Deducir, para f y g dos aplicaciones diferenciables de I intervalo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, el diferencial de $t\to f(t)\wedge g(t)$ y de $t\to\langle f(t),g(t)\rangle$ en todo $t\in I$.
3. Aplicación : Sea A un operador de $\mathbb{R}^n$ tal que $Ax\perp x$, para todo x; demostrar que e^{tA} es una isometría para todo real t. (Derivar $t\to\|\mathrm{e}^{tA}x\|^2$.)

[006257]

Ejercicio 6766

Sea E y F dos evn en $\mathbb{C}$. Una aplicación de E en F $\mathbb{C}$-lineal es $\mathbb{R}$-lineal, pero el recíproco es falso.

1. Sea $\varphi: E\to F$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Demostrar que φ es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\varphi(ix)=i\varphi(x)$, para todo $x\in E$. Deducir las aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que son $\mathbb{C}$-lineales. Sea U un abierto de E y $f:U\to F$. Se supone f $\mathbb{R}$-diferenciable en $a\in U$. Está claro que f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si y solo si $f'(a)$ es $\mathbb{C}$-lineal.
2. Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ se escribe $f(z)=u(z)+iv(z)=f(x+iy)$, con u y v reales, que se identifica con $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$, traducir usando 1. "f es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a=\alpha+i\beta$". ¿En qué puntos las aplicaciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$-diferenciables : $f_1(z)=\mathrm{e}^x$; $f_2(z)=|z|^2$; $f_3(z)=\mathrm{e}^{x-iy}$?
3. (Extraído de setiembre 99) Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f:U\to\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-diferenciable en $a=\alpha+i\beta\in U$, tal que $f(a)\neq 0$. Demostrar que si $g=|f|$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a=\alpha+i\beta\in U$, entonces $f'(a)=0$.

Solución ▼ [006258]

Ejercicio 6767

1. Demostrar que la identidad de incrementos finitos no es cierta para funciones vectoriales considerando $f(x)=\mathrm{e}^{ix}$.
2. Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, se tiene visto que $f'(]a,b[)$ es conexo. Demostrar que esto es falso para funciones vectoriales considerando $f(x)=(x^2\cos(\frac{1}{x}),x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$.

[006259]

Ejercicio 6768

Sea $E=C([0,1],\mathbb{R}^n)$ y sea F un subespacio vectorial de E constituido por funciones diferenciables, tales que

$$\|f'(x)\|\leqslant M,\ \ \forall x\in[0,1],\ \ \forall f\in F,\ \|f\|\leqslant 1$$

donde M es una constante fija de antemano. Demostrar que la bola unidad de F es compacta ; ¿qué se puede decir de F ?

[006260]

Ejercicio 6769

Sean E,F espacios estandarizados, Ω un abierto de E y $f:\Omega\to F$ una aplicación continua.

1. Sea a un punto de Ω. Si f es diferenciable en $\Omega\setminus\{a\}$ y si la aplicación $x\in\Omega\setminus\{a\}\mapsto Df(x)$ admite un límite $T\in\mathscr{L}(E,F)$, cuando x tiende a a en Ω, demostrar que f es diferenciable en el punto a y que $Df(a)=T$ (aplicar el teorema de incrementos finitos a la función $g: x\mapsto f(x)-T(x)$).
2. Se supone f diferenciable en Ω. Demostrar que $Df:\Omega\to\mathscr{L}(E,F)$ es continua en $a\in\Omega$ si y solo si, para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que
$$\|f(a+h)-f(a+k)-Df(a)(h-k)\|\leqslant\varepsilon\|h-k\|,\quad \text{si } \|h\|<\delta \text{ y } \|k\|<\delta.$$
3. Ahora se supone que existe una aplicación continua $x\in\Omega\mapsto T_x\in\mathscr{L}(E,F)$ tal que para todo $x\in\Omega$ y todo $h\in E$
$$\lim_{t\to 0, t\neq 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=T_x(h).$$
Demostrar que f es de clase C^1 y que $Df(x)=T_x$, para todo $x\in\Omega$. (Se puede considerar la función $g(t)=f(x+th)-tT_x(h)$).

[006261]

Ejercicio 6770

Sean E,F espacios de Banach, Ω un abierto conexo de E y $f_n:\Omega\to F$ una sucesión de aplicaciones diferenciables. Se supone que esta sucesión verifica :

(i) Existe $x_0\in\Omega$ tal que $(f_n(x_0))$ converge en F.

(ii) La sucesión (Df_n) converge uniformemente en toda bola cerrada $B_F(a,r)\subset\Omega$.

Entonces, demostrar que (f_n) converge uniformemente en toda bola cerrada de Ω y que, si $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ y $L_x=\lim_{n\to\infty}Df_n(x)$, entonces f es diferenciable con $Df(a)=L_a$, $a\in\Omega$. [006262]

Ejercicio 6771

Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 que es inyectiva en Ω y tal que $Df(x)$ sea inyectiva para todo $x\in\Omega$.

1. Demostrar que, para todo $a,b\in\Omega$,
$$\|f(b)-f(a)-Df(a)(b-a)\|\leqslant\|b-a\|\sup_{c\in[a,b]}\|Df(c)-Df(a)\|.$$
2. Sea (f_n) una sucesión de funciones de clase C^1 tal que $f_n\to f$ y $Df_n\to Df$ uniformemente en todo compacto de Ω. Se va a demostrar : *para todo compacto K de Ω existe n_0 tal que f_n sea inyectiva en K, para $n\geqslant n_0$.*
   — Razonando por reducción al absurdo, demostrar que existe K compacto y, para una infinidad de enteros n, de puntos $a_n,b_n\in K$ tales que $f_n(a_n)=f_n(b_n)$.
   —
   — Utilizar (1.) para deducir una contradicción.

[006263]

Ejercicio 6772

1. Enunciar el teorema de incrementos finitos de una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

2. Sea $B_\varepsilon(x_o)$ la bola de radio ε en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : \overline{B_\varepsilon(x_o)} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que f es lipschitziana y dar una expresión para su cociente.

[006796]

Ejercicio 6773

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación derivable.

1. Enunciar la desigualdad de los incrementos finitos. (Para esta pregunta se puede suponer que U es convexe.)
2. Demostrar, con ayuda de 1., la proposición siguiente :
   Si para todo $x \in U$ la derivada de f en x es nula : $Df(x) = 0$, entonces para todo x en U existe un vecindario V de x en U (por ejemplo una bola centrada en x) tal que f es constante en V.
3. Con ayuda de 2., demostrar que si además U es conexa, entonces f es constante en U.

[006832]

Ejercicio 6774

Sea $O \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : O \to \mathbb{R}^p$ una función. Se supone que existe una función continua $L : O \times O \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ (el conjunto de aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ dotado de la norma de operadores) tal que para todo $x, y \in O$ se tiene

$$f(x) - f(y) = L(x,y)\,(x-y).$$

Demostrar que f es de clase C^1 sobre O y que $Df(x) = L(x,x)$.

[006839]

---

285 371.00 Diferencial de orden superior, fórmula de Taylor

Ejercicio 6775

Calcular $D^2 f(x)$ en los siguientes casos :

1. $f \in L(E,G)$ continua
2. $f : E \times F \to G$, bilineal continua.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^2$.

Solución ▼ [002553]

Ejercicio 6776

Estudiar los extremos locales y globales de las siguientes funciones :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$
2. $f(x,y) = x^2 y - \frac{1}{2}x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
4. $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sh}^2 y$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3$
6. $f(x,y) = y^2 - 3x^2 y + 2x^4$

Solución ▼ [002554]

Ejercicio 6777

Encontrar el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Solución ▼ [002555]

Ejercicio 6778

Determinar el paralelepípedo rectángulo de volumen V dado cuya superficie total es minimal. [002556]

Ejercicio 6779 Recordatorio del curso

Sean E_1, E_2 y F espacios normados y $B: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal continua. Demostrar que B es de clase C^∞ y determinar los diferenciales $D^k B$. [006287]

Ejercicio 6780

Sean E y F Espacios de Banach y $f: E \to F$ una aplicación de clase C^2.

1. Sea $h \in E$ y $\varphi_h: E \to F$ la aplicación definida por $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justificar que
$$D^2 f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k), \quad \text{para todo } k \in E .$$
2. Se supone que, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Demostrar que $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$, para todo $x \in E$.
3. Sea $a,h,k \in E$ y sea $\Psi: \mathbb{R}^2 \to F$ definida por $\Psi(t,s) = f(a+th+sk)$. Calcular $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

[006288]

Ejercicio 6781

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $Df(x)$ es un automorfismo ortogonal, i.e. $Df(x)$ es biyectiva lineal y conserva el producto escalar :
$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle = \langle h,k\rangle \quad \text{para todo } h,k \in \mathbb{R}^n .$$
Demostrar que la aplicación f es en sí misma un automorfismo ortogonal.
Indicaciones :

1. Determinar el diferencial de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle$.
2. Verificar que $A(h,k,l) = \langle Df(x)(h), D^2 f(x)(k,l)\rangle$ es antisimétrica con respecto a las dos primeras variables y simétrica con respecto a las dos últimas variables.
3. Deducir que $A(h,k,l) = 0$, para todo $h,k,l \in \mathbb{R}^n$, luego concluir.

[006289]

Ejercicio 6782

1. Encontrar las aplicaciones $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.
2. Encontrar las aplicaciones $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 soluciones de
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ .$$
(Indicación : escribir $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ y $G = F \circ \varphi$).

Ejercicio 6783

Sean E,F,G de Banach y $u : E \to F$, $v : F \to G$ dos aplicaciones C^2. Calcular, usando la definición, el segundo diferencial de $w = v \circ u$. [006291]

Ejercicio 6784

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación C^∞ y sea $n \geqslant 1$. Establecer la equivalencia de las siguientes propiedades :
   — $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
   — $f(x) = x^n g(x)$, con $g \in C^\infty$.
2. Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ conteniendo 0 y sea $f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Se supone $f(0) = Df(0) = 0$. Demostrar que existen $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ tales que $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x)$.

[006301]

Ejercicio 6785

Determinar aproximadamente el valor de $1,05^{1,02}$, con un error de a lo sumo $\varepsilon < 10^{-2}$ (Indicación : Aplicar Taylor a la función $f(x,y) = x^y$). [006302]

Ejercicio 6786

Demostrar que si $x = 1,32 \pm 10^{-2}$ y $y = 0,45 \pm 10^{-2}$, entonces $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = 0,14 \pm 10^{-2}$. [006303]

Ejercicio 6787

Escribir la expansión de Taylor-Young de orden 2 en un vecindario de (0,0) para la función $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$. Deducir el límite $\dfrac{\mathrm{e}^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$, cuando (x,y) tiende a (0,0). [006304]

Ejercicio 6788

Sea $f(x,y)$ una función de clase C^2 al vecindario del círculo $x^2+y^2 = 1$. Se define $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = b$. Para todo número real θ, sea $F(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Calcular $F''(0)$ en función de a y b. [006305]

286 372.00 Difeomorfismo, teorema de inversión local y funciones implícitas

Ejercicio 6789

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = ((x-2)^2 + y^2 - 4)((x-1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

1. Trazar rápidamente la curva C de ecuación $f(x,y)=0$.
2. ¿En qué puntos de C la relación $f(x,y)=0$, permite definir una función implícita de la forma $y=\phi(x)$?

[001858]

Ejercicio 6790

Demostrar que las relaciones propuestas se definen en un vecindario del par (a,b) indica una función implícita $y=\phi(x)$. Dar un desarrollo limitado de orden 3 de ϕ en a.

1. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1=0, \quad (a,b)=(0,1)$.
2. $f(x,y)=2e^{x+y-1}+\ln(x-y)-2x+y^3, \qquad (a,b)=(1,0)$.

[001859]

Ejercicio 6791

Demostrar que la relación

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2z(x+y)-2x+y-2z-1=0$$

define en un vecindario de $(0,0,-1)$ una función implícita $z=\phi(x,y)$. Dar un desarrollo limitado de ϕ de orden 2 en $(0,0)$. [001860]

Ejercicio 6792

1. Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ y tal que, para todo x de $\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$. Demostrar que f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $f(\mathbb{R})$ y que f^{-1} es diferenciable en todo punto de $f(\mathbb{R})$.
2. Sea f definida por $f(x)=x+x^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$. Demostrar que $f'(0)$ existe y es $\neq 0$, pero que f no es invertible en ningún vecindario de 0. Explicar.

Solución ▼ [002527]

Ejercicio 6793

1. Demostrar que la aplicación $\varphi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ es un C^1-difeomorfismo del abierto $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ en el plano privado de la semirrecta $\mathbb{R}^-$. Si $f(x,y)=g(r,\theta)$ dar las fórmulas de pasaje entre las derivadas parciales de f y las de g.
2. Sea U el plano privado del original, y $f(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$. Demostrar que f es un difeomorfismo local en un vecindario de todo punto de U, pero no es un difeomorfismo global.
3. Sea g la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y)=(x+y,xy)$. Encontrar un abierto conexo maximal $U\subset\mathbb{R}^2$ tal que g sea un difeomorfismo de U sobre $g(U)$.
4. Sea h la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $(x,y)\to(e^x\cos y, e^x\operatorname{sen} y)$. Demostrar que h es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$; que $h'(x,y)$ es un elemento de $\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ para todo (x,y) de $\mathbb{R}^2$; pero que h no es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $h(\mathbb{R}^2)$.

Solución ▼ [002528]

Ejercicio 6794

Sea φ la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(x,y) = (\operatorname{sen}(y/2) - x, \operatorname{sen}(x/2) - y).$$

1. Justificar que φ es de clase C^1, calcular su diferencial y ver que $D\varphi(x,y)$ es invertible para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Demostrar que φ es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\varphi(\mathbb{R}^2)$ y justificar que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ es un abierto.
3. Demostrar que φ^{-1} es lipschitziana (se toma como norma en $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$).
4. Deducir que φ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$
5. Calcular $D\varphi^{-1}(p)$, donde $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Solución ▼ [002529]

Ejercicio 6795

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1. Se supone que existe $\alpha > 0$ tal que para todo $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h\rangle \geqslant \alpha\langle h, h\rangle.$$

1. Considerando la función $t \to \varphi(t) = \langle f(a + t(b-a)), b_a)\rangle$, demostrar que
$$\langle f(b) - f(a), b-a\rangle \geqslant \alpha\langle b-a, b-a\rangle \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}^n.$$
Deducir que f es una aplicación cerrada.
2. Demostrar que, para todo $x \in E, Df(x)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Deducir que f es una aplicación abierta.
3. Concluir que f es un difeomorfismo de clase C^1 de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.

Solución ▼ [002530]

Ejercicio 6796

Sea U el abierto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Sea $(x,y,z) \to (X,Y,Z)$ la aplicación de inversión de polos 0, de potencia 1, definida en U, con valores en $\mathbb{R}^3$, por las fórmulas

$$X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}; \quad Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}; \quad Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Calcular la matriz jacobiana de esta transformación (se escribe $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) y comprobar que esta matriz es igual a su inversa. [002531]

Ejercicio 6797

Reconsiderar el ejercicio 6795 en el espíritu siguiente : "si f es un difeomorfismo, la matriz inversa de la matriz jacobiana de f es la matriz jacobiana de f^{-1}." [002532]

Ejercicio 6798

Sea $E = M_n(\mathbb{R})$ e I la matriz unitaria en E. Considerando $\varphi : E \to E$ tal que $\varphi(A) = A^2$, demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que toda matriz A verificando $\|A - I\| < \alpha$ admite una raíz cuadrada. [002533]

Ejercicio 6799

1. Demostrar que si a, b son vecinos de 1, se puede encontrar $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y + \mathrm{e}^{xy} = a$, $x + \mathrm{e}^{-xy} = b$.
2. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en sí misma definida por $f(x,y) = (x\operatorname{sen}(xy) + y, y\cos(xy) + x)$, y sea (a_n, b_n) una sucesión que tiende a $(0,0)$. Demostrar que si $f(a_n, b_n) = 0$, para todo n, la sucesión (a_n, b_n) es estacionaria.

[002534]

Ejercicio 6800

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 ; $\varphi = (f, g)$. Se considera u, v reales y se busca x, y tales que

$$f(x,y) = u, \quad g(x,y) = v. \tag{$*$}$$

1. Se supone que el diferencial de φ es de rango 2 en todo punto de U. Demostrar que para todo (u, v) el sistema $(*)$ admite una solución, única localmente. ¿Qué se puede decir si el diferencial es de rango 2 en un punto de U solamente ?
2. ¿Tenemos soluciones si el diferencial es de rango 0 ?
3. Se supone ahora que el diferencial de φ es de rango 1 en todo punto de U. Si f'_x no se anula en U, demostrar que $\psi : (x,y) \to (f(x,y), y)$ define un difeomorfismo de un abierto $V \subset U$ sobre $\psi(V)$. Deducir G tal que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sobre V. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones del sistema $(*)$?

[002535]

Ejercicio 6801

Sea $E = \mathbb{R}^n$ dotado de cualquier norma, y B_r la bola cerrada $\|x\| \leqslant r$. Sea f un C^1-difeomorfismo entre dos abiertos U y V de E, conteniendo 0, tal que $f(0) = 0$. Se define $A = f'(0) \in \mathscr{L}(E)$. Sea $0 < \varepsilon < 1$.

1. Demostrar que existe $R > 0$ tal que para todo $x \in B_R$,
$$\|A^{-1}(f(x)) - x\| \leqslant \varepsilon \, \|x\|.$$
2. Demostrar que existe $R' > 0$ tal que para $0 \leqslant r \leqslant R'$,
$$(1-\varepsilon)\, A(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\varepsilon)\, A(B_r).$$
3. Deducir que $\lim_{r \to 0} \dfrac{\operatorname{vol} f(B_r)}{\operatorname{vol}\,(B_r)} = |\det A|$.

[002536]

Ejercicio 6802

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x + a\operatorname{sen} y, y + b\operatorname{sen} x)$.

1. Demostrar que si $|ab| < 1$, f es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.
2. Demostrar que si $|ab| = 1$, f ya no es un difeomorfismo pero es aún un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

[002537]

Ejercicio 6803

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$$

para todo $x, h \in \mathbb{R}^n$, k es una constante > 0. Se va a demostrar que f es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.

1. Demostrar que f es inyectiva y que $f(\mathbb{R}^n)$ es cerrada en $\mathbb{R}^n$.
2. Demostrar que $f'(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Deducir que $f(\mathbb{R}^n)$ es un abierto-cerrado de $\mathbb{R}^n$.

[002538]

Ejercicio 6804

Sea G un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua en $\overline{G}$ y C^1 en G. Para todo $x \in G$, se supone $Df(x)$ invertible. Demostrar que, bajo estas condiciones, la aplicación $x \mapsto \|f(x)\|$ alcanza su máximo en un punto del borde $\partial G = \overline{G} \setminus G$. [002539]

Ejercicio 6805

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, Ω un abierto conexo de E y sea $f : \Omega \to E$ una aplicación de clase C^1 tal que $|||Df(x)\,|| \leqslant c$, para todo $x \in \Omega$, donde $0 \leqslant c < 1$. Demostrar que $\mathrm{Id}_{|E} - f$ es un difeomorfismo C^1 de Ω en su imagen. [002540]

Ejercicio 6806

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Demostrar que existe un intervalo I conteniendo x_0 y una aplicación $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tales que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ y $f(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in I$.

Solución ▼ [002541]

Ejercicio 6807

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Demostrar que, para x suficientemente cerca de 0, existe un único $y = y(x) > 0$ tal que $F(x,y) = 0$. Verificar, sin resolución explícita, que $y'(x) = -x/y$. [002542]

Ejercicio 6808

Se considera el sistema de ecuaciones :

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que, para x cerca del origen, existen funciones positivas $y(x)$ y $z(x)$ tales que $(x, y(x), z(x))$ sea solución del sistema. Se determina y' en función de x, y y z' en función de x, z. [002543]

Ejercicio 6809

Se considera $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polinomio con coeficientes variables. Se supone :

1. Las funciones $x \to a_j(x)$ son C^1, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, el polinomio $y \to F(x_0, y)$ tiene un solo cero $y_0 \in \mathbb{R}$.

Demostrar que, en estas condiciones, $F(x,y)$ tiene, para x en un vecindario de x_0, un cero $y(x)$ que está cerca del y_0 y que la dependencia $x \to y(x)$ es C^1. [002544]

Ejercicio 6810

Dar la forma de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0\}$ en un vecindario de los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Solución ▼ [002545]

Ejercicio 6811

Demostrar que la ecuación $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + x + y - 2 = 0$ define, en un vecindario del origen, una función implícita φ de x cuyo desarrollo limitado se calcula de orden tres en 0. [002546]

Ejercicio 6812

Sea $i = \sqrt{-1}$. Calcular la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y) \to (X,Y)$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $X + iY = (x+iy)^3$. [006264]

Ejercicio 6813

Demostrar el siguiente resultado (teorema de inversión global) :
Sea E, F dos espacios de Banach, U un abierto de E y $f : U \to F$ una aplicación de clase C^1 sobre U. Entonces f es un C^1-difeomorfismo de U sobre $f(U)$ si y solo si :

(i) f es inyectiva ;
(ii) $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$, para todo $x \in U$. [006265]

Ejercicio 6814

1. Se considera la aplicación φ de $\mathbb{R}^3$ en sí misma definida por $(x,y,z) \to (\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^{2z}, \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2z}, x - y)$. Demostrar que φ es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en su imagen que se debe especificar.
2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y F la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en sí misma definida por $(x,y,z) \to (\mathrm{e}^{x-y+2z} + \mathrm{e}^{-x+y+2z}, \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2y} - 2\lambda \mathrm{e}^{x-y}, \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2y} - 2\mathrm{e}^{-x+y})$. Demostrar que F se escribe $G \circ \varphi$, G a precisar, y eso es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en su imagen si y solo si $\lambda \geqslant 0$.

[006266]

Ejercicio 6815

Se van a proponer tres posibles demostraciones del siguiente ejercicio clásico : sea f una aplicación de clase C^1 de $\mathbb{R}$ en sí mismo, tal que $|f'(x)| \leqslant k$, para todo x real, donde $k \in]0,1[$. Entonces F definida por $F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$ es un difeomorfismo de clase C^1 de $\mathbb{R}^2$ **sobre** él mismo.

1. Se observa que F es inyectiva y $F'(x,y) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ para todo (x,y). Queda por establecer la sobreyección.
2. 1er método : Demostrar que F es propio ($\lim \|F(x,y)\| = +\infty$ cuando $\|(x,y)\| \to +\infty$) y que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la función $g(x,y) = \|F(x,y) - (a,b)\|^2$ es diferenciable y alcanza su cota inferior en un punto anulando $g'(x,y)$; concluir.
3. 2o método : Demostrar que $F(\mathbb{R}^2)$ es a la vez abierto y cerrado. Concluir.

4. 3o método : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, aplicar el teorema del punto fijo a la aplicación $\phi(x,y) = (a - f(y), b - f(x))$; concluir.

[006267]

Ejercicio 6816

Sea P un polinomio de grado 3 normado, de raíces $x_1 < x_2 < x_3$:

$$P(t,x_1,x_2,x_3) = \prod_{l=1}^{3}(t - x_l) = t^3 + \sum_{k=1}^{3} a_k t^{k-1}.$$

Los coeficientes a_k son funciones polinómicas, por lo tanto de clase C^1, de las raíces. Se define $\Omega = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ y se define $f : x \in \Omega \to (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$. Se va a demostrar que f es un C^1–difeomorfismo de Ω sobre $f(\Omega)$.

1. Verificar que f es inyectiva en Ω.
2. Se llama J la matriz jacobiana de f, y V la matriz de coeficientes $v_{ij} = x_i^{j-1}$. Calculando $\dfrac{\partial P}{\partial x_k}(t,x_1,x_2,x_3)$ de dos maneras, demostrar que VJ es una matriz diagonal invertible si $x \in \Omega$. Concluir.
3. Deducir la derivada de f^{-1} en todo punto de $f(\Omega)$.

[006268]

Ejercicio 6817

1. Sea f la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ y C el conjunto de los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y) = 0$. ¿En qué puntos (a,b) se puede aplicar el teorema de la función implícita? Calcular la derivada de la función implícita cuando existe y escribir la ecuación de la tangente a C.
2. Demostrar que la ecuación $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + x + y - 2 = 0$ define en un vecindario de 0, una función implícita φ de x cuyo desarrollo limitado se calcula de orden 3 en 0.
3. Demostrar que las ecuaciones $x + y - zt = 0,\ xy - z + t = 0$ definen en un vecindario de $(0,1)$ dos funciones implícitas $x = \varphi_1(z,t),\ y = \varphi_2(z,t)$, con $\varphi_1(0,1) = 1$, cuyos diferenciales se deben calcular en este punto.

[006269]

Ejercicio 6818

Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \to F(u,v) \in \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1, tal que $F(0,0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) \neq 0$. Se considera $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x,y,z) = (xy, x^2 - y^2 - z)$ y la aplicación $f = F \circ \varphi$. Demostrar que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define en un vecindario de $(0,0)$ una aplicación $z = \psi(x,y)$ verificando

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2(x^2 + y^2).$$

[006270]

Ejercicio 6819 noviembre 1999

Sea O un abierto de $\mathbb{R}^3$, $f : O \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y $(a,b,c) \in O$ tal que $f(a,b,c) = 0$.

1. Dar una condición suficiente para que se pueda resolver : x en función de (y,z), y en función de (x,z) y z en función de (x,y). Más precisamente, dar una condición suficiente para que exista U vecindario de a, V vecindario de b, W vecindario de c, con $U\times V\times W\subset O$, y $\varphi : V\times W\to U$, $\chi : U\times W\to V$, $\psi : U\times V\to W$ funciones de clase C^1 tales que para $(x,y,z)\in U\times V\times W$:

$$f(x,y,z)=0\Longleftrightarrow x=\varphi(y,z)\Longleftrightarrow y=\chi(x,z)\Longleftrightarrow z=\psi(x,y).$$

2. Si la condición dada en 1.) se satisface, demostrar solo para $(x,y,z)\in U\times V\times W$ tal que $f(x,y,z)=0$ se tiene

$$\partial_1\varphi(y,z)\partial_2\chi(x,z)\partial_1\psi(x,y)=-1.$$

[006271]

Ejercicio 6820

Se considera $E=M_n(\mathbb{R})$, $F=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ y la aplicación Ψ de $F\times E$ en E definida por $\Psi(A,B)=AB-I$. Demostrar usando el teorema de la función implícita que $\varphi : A\in F\to A^{-1}$ es diferenciable en todo punto de F y re-encontrar su diferencial. [006272]

Ejercicio 6821

Se considera el sistema de ecuaciones de incógnitas x e y :

$$x=\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y)+t-1,\quad y=\tfrac{1}{2}\cos(x-y)-t+\tfrac{1}{2}.$$

1. Demostrar que para cada $t_0\in\mathbb{R}$, existe una única solución (x_0,y_0), y que la función así definida es continua..
2. Demostrar considerando la función $F(x,y,t)=(x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+y)+t-1,y-\frac{1}{2}\cos(x-y)-t+\frac{1}{2})$, que el sistema admite una única solución $x=x(t),\ y=y(t)$ constituida de funciones C^∞.
3. Dar un desarrollo limitado de orden 2 de $x(t),y(t)$ en el punto $(0,0)$.

[006273]

Ejercicio 6822

Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(x^2-y^2+z^2-1,xyz-1)$. Sea $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x_0,y_0,z_0)=(0,0)$. Demostrar que existe un intervalo I conteniendo x_0 y una aplicación $\varphi : I\to\mathbb{R}^2$ tales que $\varphi(x_0)=(y_0,z_0)$ y $f(x,\varphi(x))=0$, para todo $x\in I$. [006274]

Ejercicio 6823

Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la aplicación $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Demostrar que, para x suficientemente cerca de 0, existe un único $y=y(x)>0$ tal que $F(x,y)=0$. Verificar, sin resolución explícita, que $y'(x)=-\frac{x}{y}$. [006275]

Ejercicio 6824

Se considera el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2 &= 0\\ x^2+2y^2+z^2 &= 4.\end{cases}$$

Demostrar que, para x cerca del origen, existen funciones positivas $y(x)$ y $z(x)$ tales que $(x,y(x),z(x))$ sea solución del sistema. Se determina y' en función de x,y y z' en función de x,z. [006276]

Ejercicio 6825

Se considera $F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x)$ un polinomio con coeficientes variables. Se supone :

1. las funciones $x \mapsto a_j(x)$ son C^1, $j = 0,1,\ldots,n-1$,
2. para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, el polinomio $y \mapsto F(x_0,y)$ tiene un solo cero $y_0 \in \mathbb{R}$.

Demostrar que, en estas condiciones, $F(x,y)$ tiene, para x en un vecindario de x_0, un cero $y(x)$ que está en un vecindario de y_0 y que la dependencia $x \mapsto y(x)$ es C^1. [006277]

Ejercicio 6826

Dar la forma de $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ en un vecindario de los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. [006278]

Ejercicio 6827

Demostrar que la ecuación $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + x + y - 2 = 0$ define, en un vecindario del origen, una función implícita φ de x cuyo desarrollo limitado se calcula de orden tres en 0. [006279]

Ejercicio 6828

1. Dar la definición de una sub-variedad M de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k.
2. Enunciar el teorema de la función implícita.

   Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función de clase C^1 y sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \mathbf{0}\}$. Se supone además que f verifica la condición : $\forall x \in M$: rango$(J(x)) = p$, donde $J(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,p}$ es la matriz Jacobiano de f en x de tamaño $n \times p$.
3. Demostrar, utilizando el teorema de la función implícita, que M es una sub-variedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k = n - p$.

[006792]

Ejercicio 6829

Sea $E = \mathbb{R}^n$ dotado de la norma euclidiana y $F = M(n,\mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$, con coeficientes reales ; se identifica F, con el conjunto de aplicaciones lineales de E en E. Sea $\|\cdot\|_{op}$ la norma de los operadores en F.

1. Demostrar que $\forall A,B \in F : \|AB\|_{op} \leqslant \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$.
2. Demostrar que para $A \in F$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ es una serie normalmente convergente en todo compacto de F. (Nota bene : $A^0 = \mathrm{Id} \in F$ denota la matriz identidad.) Se denota $\exp : F \to F$ la aplicación $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$.
3. Calcular $D_{\mathbf{0}}\exp$, donde $\mathbf{0}$ es la aplicación nula de E en E. ¿Cuál es la dimensión de la matriz $D_{\mathbf{0}}\exp$? Deducir que existe un vecindario U de $\mathbf{0} \in F$ y un vecindario V de $\mathrm{Id} = \exp(\mathbf{0})$ tales que exp es un C^1–difeomorfismo de U sobre V. Justificar la respuesta !

Ejercicio 6830

Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el abierto O y $(x_o, y_o, z_o) \in O$ tal que $f(x_o, y_o, z_o) = 0$.

1. Dar una condición suficiente para que se pueda resolver : x en función de (y,z), y en función de (x,z) y z en función de (x,y). Más precisamente, dar una condición suficiente para que exista U un vecindario de x_o, V un vecindario de y_o, W un vecindario de z_o, $U \times V \times W \subset O$, y $\phi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$ y $\psi : U \times V \to W$ funciones de clase C^1 tales que $\forall\,(x,y,z) \in U \times V \times W$:
$$f(x,y,z) = 0 \iff x = \phi(y,z) \iff y = \chi(x,z) \iff z = \psi(x,y).$$
Justificar la respuesta.
2. Si la condición dada en 1. Es satisfaite, demostrar que $\forall\,(x,y,z) \in U \times V \times W$ tales que $f(x,y,z) = 0$ se tiene
$$(\partial_1 \phi)(y,z) \cdot (\partial_2 \chi)(x,z) \cdot (\partial_1 \psi)(x,y) = -1.$$
(Observe, esta relación se usa mucho en termodinámica, donde se escribe como $(\frac{x}{y})_z \cdot (\frac{y}{z})_x \cdot (\frac{z}{x})_y = -1$, con la interpretación que $(\frac{x}{y})_z$ es la derivada de x, con respecto a y guardando z constante.)

[006821]

Ejercicio 6831

En este ejercicio, $\mathscr{O}$ denota un abierto de $\mathbb{R}^n$.

1. ¿Cuándo se dice que una función $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ es de clase C^k $(k \geqslant 1)$?
2. Demostrar por inducción sobre k que si $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathscr{O} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son de clase C^k, entonces $h : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)/g(x)$ es también de clase C^k.
3. Demostrar por inducción sobre k como la composición de dos funciones de clase C^k es también de clase C^k.
4. Sea $Gl(2,\mathbb{R})$ el conjunto de matrices con coeficientes reales 2×2 invertibles. Demostrar que la aplicación $I : Gl(2,\mathbb{R}) \to Gl(2,\mathbb{R})$, $I(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ es de clase C^k, para todo $k \geqslant 1$.
5. Enunciar el teorema de inversión local para una función $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$.
6. Se limita al caso $n = 2$ y se coloca bajo las condiciones del teorema de inversión local. Demostrar que si f es de clase C^k, $k > 1$, entonces la inversa f^{-1} (dada por el teorema de inversión local) es de clase C^k.

[006833]

287 373.00 Extremo, extremo condicionado

Ejercicio 6832

Sea f la función definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Demostrar que $(0,0)$ es el único punto crítico de f, que no es un extremo local, pero que sin embargo la restricción de f a toda recta pasando por $(0,0)$ admite en este punto un mínimo local. [001823]

Ejercicio 6833

Escribir la fórmula de Taylor de segundo orden para cada uno de las funciones siguientes en el punto (x_0, y_0) dado.

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1},\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cos xy,\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = \mathrm{e}^{(x-1)^2}\cos y,\ (x_0,y_0) = (1,0)$.

[001824]

Ejercicio 6834

Para cada una de las siguientes funciones estudiar la naturaleza del punto crítico dado :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en el punto crítico $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ en el punto crítico $(0,0)$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$ en el punto crítico $(0,0,0)$;
4. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ en el punto crítico $(0,0)$.

[001825]

Ejercicio 6835

Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son mínimos locales, máximos locales o puntos de silla.

1. $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2. $f(x,y) = \operatorname{sen} x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \operatorname{sen} y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

[001826]

Ejercicio 6836

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Estudiar los extremos locales de f.
2. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Demostrar que f tiene un máximo M y un minino m sobre D.
3. Sea $(x,y) \in D$. Demostrar que si $f(x,y) = M$ o $f(x,y) = m$, entonces $x^2 + y^2 = 1$.
4. Estudiar la función $t \mapsto f(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Deducir los valores de M y m.

[001827]

Ejercicio 6837

Encontrar el punto del plano $(2x - y + z = 16)$ más cercano al origen. [001828]

Ejercicio 6838

Determinar los extremos de $f(x,y) = xy(1-x^2-y2)$ sobre $[0,1]^2$. [001829]

Ejercicio 6839

Sea $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$. Demostrar que f admite a lo sumo un extremo. Escribir $f(x,y)+9$ como la suma de dos cuadrados y deducir que f admite -9 como valor minimal. [001830]

Ejercicio 6840

Determinar un triángulo de área máxima inscrito en un círculo dado. [001831]

Ejercicio 6841

Sea $f(x,y) = (x^2-y)(3x^2-y)$. Demostrar que f admite un mínimo local en 0 según todo vector de $\mathbb{R}^2$, pero no admite un mínimo local en $(0,0)$. [001832]

Ejercicio 6842

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$.
Demostrar que $(-1,-1)$ es el único extremo posible. Con la ayuda de un desarrollo limitado de $\varphi(h) = f(-1+h,-1+h)$ y de $\psi(h) = f(-1+h,-1-h)$, demostrar que f no tiene extremo. [001833]

Ejercicio 6843

Determinar los extremos de $f : (x,y,z) \to x^2+y^2+z^2+2xyz$. [001834]

Ejercicio 6844

Determinar $\max\limits_{|z|\leqslant 1} |\operatorname{sen} z|$. Recordar que : $\operatorname{sen} z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$. [001835]

Ejercicio 6845

Si f es cóncava en un convexo abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y si :

$$\exists a \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

entonces f admite un máximo local en a. [001836]

Ejercicio 6846

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, se define $\mathscr{S}(A)$ como el conjunto $\{x \in A | \exists \rho > 0, B(x,\rho) \subset A\}$. Se supone que A es cerrado acotado y $\mathscr{S}(A) \neq \varnothing$. Se supone que f es una función C^1 sobre A tal que f es constante en $A \setminus \operatorname{Int}(A)$. Demostrar que existe $z \in \operatorname{Int}(A)$ tal que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

[001837]

Ejercicio 6847

Encontrar los extremos en $\mathbb{R}^2$ de las aplicaciones :

$$(x,y) \to x^4+y^4-4xy; \quad (x,y) \to (x-y)e^{xy}; \quad (x,y) \to xe^y+ye^x; \quad (x,y) \to e^{x \operatorname{sen} y}; \quad (x,y) \to x^3+y^3.$$

[001838]

Ejercicio 6848

Sea f una función real de clase $\mathscr{C}^2$ en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$.

1. Recordar una condición necesaria para f tiene un extremo local en (x_0,y_0). En lo que sigue del ejercicio, $\mathbf{a}=(x_0,y_0)$ verifica esta condición, es decir es un *punto crítico* de f. Se define

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$

$$Q(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2, \quad \Delta=B^2-AC,$$
$$R(t)=At^2+2Bt+C, \quad S(t)=Ct^2+2Bt+A.$$

2. Se supone $\Delta<0$ y $A(\text{o } C)>0$.
   (a) Demostrar que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R(t) \geqslant \delta$ y $S(t) \geqslant \delta$, para cierto $\delta>0$.
   (b) Se define $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, con $r=\sqrt{x^2+y^2}$, y se supone que $\operatorname{sen}\theta.\cos\theta \neq 0$. Demostrar sucesivamente :

$$Q(x,y) \geqslant r^2\delta \operatorname{sen}^2\theta, \qquad Q(x,y) \geqslant r^2\delta\cos^2\theta, \qquad Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\delta.$$

   Deducir que

$$\forall (x,y)\ Q(x,y) \geqslant \frac{r^2}{2}\inf(\delta,2A,2C).$$

   (c) Demostrar que $\mathbf{a}$ es un punto de mínimo local estricto de f. Para esto, se escribe la fórmula de Taylor-Young para f en este punto.
3. Se supone $\Delta<0$ y $A(\text{o } C)<0$. Demostrar que en (x_0,y_0) hay un máximo local estricto de f.
4. Se supone ahora $\Delta>0$.
   (a) Demostrar que existen $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $S(t_1)>0$ y $S(t_2)<0$.
   (b) Sean $\theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\tan\theta_1=t_1$ y $\tan\theta_2=t_2$. Examinando las funciones

$$g(t):=f(x_0+t\cos\theta_1,y_0+t\operatorname{sen}\theta_1), \quad h(t):=f(x_0+t\cos\theta_2,y_0+t\operatorname{sen}\theta_2)$$

   para $t \in \mathbb{R}$ bastante pequeño, demostrar que $\mathbf{a}$ no es ni un punto de máximo local, ni un punto mínimo local de f.
5. Dibujar la forma de la gráfica de f al vecindario del punto $(\mathbf{a},f(\mathbf{a}))$ en los tres casos estudiados anteriormente (preguntas 1, 3 y 4).
6. ¿Qué se puede decir en general cuando $\Delta=0$? Para responder a esta pregunta, se puede confiar en el estudio de los siguientes dos casos en un vecindario de $(0,0)$:

$$f_1(x,y)=x^2+x^4+y^4 \quad \text{y} \quad f_2(x,y)=x^2-y^4.$$

Ejercicio 6849

¿Existe un triángulo de máxima área inscrito en un círculo dado ? Determinarlo por un método geométrico.

[001840]

Ejercicio 6850

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que :

$$\lim_{\|x\|\to\infty} |f(x)| = +\infty.$$

Demostrar que f es minorada y alcanza su cota inferior. [001841]

Ejercicio 6851

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación $(x,y) \mapsto 6xy + (y-x)^3$. Se denota $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

1. Dibujar Δ. Demostrar que f está acotada y alcanza sus cotas sobre Δ.
2. Calcular los extremos de f sobre el borde de Δ, luego en el interior de Δ.
3. Deducir las cotas de f sobre Δ.

[001842]

Ejercicio 6852

$S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Sea f la aplicación de D en $\mathbb{R}$ definida por $f(z) = |\operatorname{sen} z|$.

1. ¿Por qué razón f es acotada en D ? Se denota $M = \sup_{z\in D} f(z)$ y $m = \inf_{z\in D} f(z)$. ¿M y m se alcanzan ? Dar el valor de m.
2. Sea $z = x+iy \in \mathbb{C}, x,y \in \mathbb{R}$. Demostrar que $|\operatorname{sen} z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$. (Se recuerda que $\operatorname{sen} z = \frac{\mathrm{e}^{i(x+iy)} - \mathrm{e}^{-i(x+iy)}}{2i}$ y $\operatorname{ch} y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}$.)
3. Deducir que M se alcanza en un punto de S.
4. Demostrar que $M = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}}$.

[001843]

Ejercicio 6853

Se establece $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Demostrar que f es diferenciable en Ω y calcular su diferencial.
2. Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$ y su diferencial es nulo.
3. Demostrar que f admite en todo punto segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y calcular el valor de estas derivadas en $(0,0)$. ¿Qué se puede deducir de la continuidad de estas derivadas parciales en $(0,0)$?

[001844]

Ejercicio 6854

Determinar los extremos (locales y/o globales) de :

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = x^3 - y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[006306]

Ejercicio 6855

Discutir, según los valores del parámetro real λ, la naturaleza de los extremos de la función $f(x,y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y)$. [006307]

Ejercicio 6856

Sea $f : (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(t,x,y) \in \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^2 tal que

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial(x,y)^2}$ sea una matriz definida positiva en todo punto y

— $(x,y) \mapsto f(0,x,y)$ alcanza su mínimo en (x_0,y_0).

Demostrar que, si t está en n vecindario de 0, la aplicación $(x,y) \mapsto f(t,x,y)$ alcanza su mínimo en $(x(t),y(t))$, donde $t \mapsto (x(t),y(t))$ es una aplicación de clase C^1 sobre este vecindario de 0. [006308]

Ejercicio 6857

Sea $g(x,y,z) = xyz - 32$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g(x,y,z) = 0\}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación $f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz$. Determinar $\min\{f(x,y,z) : \ (x,y,z) \in S\}$. [006309]

Ejercicio 6858

Determinar punto p del plano $\Sigma = \{(x,y,x+y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$ que realiza la distancia $\operatorname{dist}(\Sigma,(1,0,0))$. [006310]

Ejercicio 6859

1. Determinar los extremos de la función $f(x,y) = xy$ en el círculo unidad $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.
2. La misma pregunta para la función $f(x,y) = xy^2$.

[006311]

Ejercicio 6860

Determinar el mínimo y el máximo de la función $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ en la intersección del plano $\Sigma = \{x + y + z = 0\}$, con la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$. [006312]

Ejercicio 6861

Determinar los extremos de la función $f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z$ en la intersección del plano de ecuación $x + z = 1$, con el cilindro $\mathscr{X} = \{x^2 + y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$. [006313]

Ejercicio 6862

1. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, F un cerrado no vacío de E y $x \in E$ un punto, perteneciendo o no a F. Demostrar que existe un punto $\bar{x} \in F$ tal que
$$\|x-\bar{x}\| = \inf_{z \in F} \|x-z\|.$$
(Cuestión subsidiaria : ¿es este punto único ?)
2. Ahora se está en el espacio vectorial $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de matrices 2×2, con coeficientes reales, dotado con la norma
$$\left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
y se considera el conjunto $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, con determinante igual a 1.
   (a) Demostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es cerrado en $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Demostrar que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es *no* acotada.
   (c) Sea $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función que tiene a una matriz M asociada $f(M) = \|M\|$. Se busca la(s) matriz(ces) M alcanzando el mínimo de la función f sobre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, en otras palabras, la o las matrices más cercanas a la matriz nula.
      i. Demostrar que $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ es minorada y alcanza a su ínfimo.
      ii. Calcular el gradiente de f. ¿Está siempre definido ?
      iii. Encontrar el o los extremas de $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Demostrar que se trata del mínimo y deducir
$$\inf_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\|.$$

Solución ▼ [006883]

288 374.00 Otro

Ejercicio 6863

Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *armónica* si $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$, para todo $x \in U$. Una función $f(x,y)$ se dice *radial* si sus valores del punto (x,y) solo depende de la distancia $r = \sqrt{x^2+y^2}$ en el origen, es decir si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, donde $F = F(r)$ es una función de una sola variable. Demostrar que las únicas funciones radiales y armónicas, en $\mathbb{R}^2$ privado del origen, son las funciones $C\ln(r)+D = C\ln(\sqrt{x^2+y^2})+D$, donde C y D son constantes. [006292]

Ejercicio 6864

Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $\mathbb{R}^2$:

1. $\mathrm{e}^x \cos y$;
2. $x^3 - 3xy^2$;

3. para todo entero $k \geqslant 0$, la función $f(x,y) = r^k \cos(k\theta)$, donde r y θ son las coordenadas polares de (x,y).

[006293]

Ejercicio 6865

Expresar en coordenadas polares : $y^2\dfrac{\partial^n f}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^n f}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^n f}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$. [006294]

Ejercicio 6866

Sea U el abierto $\mathbb{R}^3$ privado del eje de las z.

1. Verificar que la función $f(x,y,z)$, que vale $\mathrm{e}^z \cos\frac{\theta}{2}\frac{\operatorname{sen} r}{\sqrt{r}}$ en coordenadas cilíndricas, es armónica en U.
2. Sea λ una constante real. Demostrar que una función del tipo $f(x,y,z) = \mathrm{e}^z\cos(\lambda\theta)u(r)$ es armónica en U si y solo si $u = u(r)$ es solución de la ecuación diferencial (llamada de *Bessel*) :
$$r^2u''(r) + ru'(r) + [r^2 - \lambda^2]u(r) = 0. \qquad (E_\lambda)$$
3. Verificar, solo para $\lambda = 3/2$, la función $u(r) = \dfrac{\operatorname{sen} r - r\cos r}{r\sqrt{r}}$ sirve.

[006295]

Ejercicio 6867

En $\mathbb{R}^3$ privado del origen, demostrar que las únicas funciones armónicas y *radiales* (es decir, dependiendo solo de la distancia ρ de (x,y,z) en el origen) son las funciones $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho} + D = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$, donde C y D son constantes. [006296]

Ejercicio 6868

Sean ρ, θ, φ las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$. Se define $\operatorname{sen}\varphi = t$. Demostrar que, para que una función de la forma $f(x,y,z) = \rho^n P(t)$, donde n es un entero $\geqslant 0$, sea armónica, es necesario y suficiente que la función $t \mapsto P(t)$ sea solución de la ecuación diferencial (llamada *de Legendre*) :
$$(1-t^2)P''(t) - 2tP'(t) + n(n+1)P(t) = 0. \qquad (D_n)$$
Para $n = 0,1,2,3,4,5$, verificar, calculando por el método de los coeficientes indeterminados, que existe un polinomio $P_n(t)$, y solo uno, de grado n, solución de (D_n), y tal que $P_n(1) = 1$. [Observación : este hecho vale para todo n; los polinomios P_n se llaman polinomios de Legendre]. [006297]

Ejercicio 6869

En $\mathbb{R}^n$, se establece $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n^2}$, y $\rho = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Sea una función *radial* $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(\rho)$. Demostrar que $\Delta f = F''(\rho) + (n-1)F'(\rho)$. Si $n \geqslant 3$, deducir que las únicas funciones radiales y armónicas en $\mathbb{R}^n$ privado del origen son las $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho^{n-2}} + D$, donde C y D son constantes. [006298]

Ejercicio 6870

$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \langle \nabla f \mid \nabla g\rangle$. [006299]

Ejercicio 6871

Una función f de clase C^4 (por ejemplo a 2 variables) se dice *biarmónica* si

$$\Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \equiv 0.$$

Estas funciones intervienen en la teoría de la Elasticidad. Por supuesto, toda función armónica es biarmónica. Demostrar que, si f y g son dos funciones armónicas, entonces la función $xf + (x^2+y^2)g$ es biarmónica. [006300]

289 380.00 Solución maximal

Ejercicio 6872

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, donde $y = y(x)$ es real de variable real, describir las soluciones especificando su intervalo máximo de definición y dibujar las trayectorias :

   (i) $y' = \mathrm{e} - y$ (ii) $y' - y = \mathrm{e}^x$ (iii) $xy' - 2y = 0$.

2. ¿Cuáles son las curvas isoclinas de la ecuación $y' = y^2 - x$; deducir la forma de las trayectorias.

[002557]

Ejercicio 6873

Se considera la ecuación

$$x' = 3x^{2/3} \tag{1}$$

con condición inicial $x(0) = 0$.

1. Sea φ una solución de (1) definida en $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(0) = 0$; se establece $\lambda = \inf\{t \leqslant 0; \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Demostrar que φ es idénticamente nula en (λ, μ).
2. Demostrar que φ vale $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sobre $[\lambda, \mu]$ y $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; deducir todas las soluciones maximales de (1) definidas en $\mathbb{R}$, con $x(0) = 0$.

Solución ▼ [002558]

Ejercicio 6874

Se considera la ecuación diferencial $x' = |x| + |t|$.

1. Demostrar que para todo real x_0, existe una solución maximal (φ, J) tal que $\varphi(0) = x_0$.
2. Determinar la solución máxima correspondiente a $x_0 = 1$, distinguiendo los casos $t \geqslant 0$ y $t < 0$, y comprobar que está definida en todo $\mathbb{R}$. ¿Cuántas veces es derivable ?

Solución ▼ [002559]

Ejercicio 6875

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = 4\frac{t^3x}{t^4+x^2}$ si $(t,x) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Interesa la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t,x(t)). \tag{2}$$

1. ¿La aplicación f es continua?, ¿es localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable? ¿Qué se puede deducir de la ecuación (2)?
2. Sea φ una solución de (2) que se define en un intervalo I no contiene 0. Se define una aplicación ψ por $\varphi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Determinar una ecuación diferencial (E) tal que ψ sea solución de esta ecuación, luego resolver esta ecuación (E).
3. ¿Qué se puede deducir de la existencia y unicidad de la ecuación diferencial (2), con valores iniciales $(t_0,x_0) = (0,0)$.

Solución ▼ [002560]

Ejercicio 6876

Sea la ecuación diferencial

$$x''' - xx'' = 0$$

donde x es una aplicación tres veces derivable, definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$.

1. Expresar esta ecuación diferencial en la forma canónica $y'(t) = f(t,y(t))$, donde f es una aplicación que vamos a determinar.
2. Sean $t_0,a,b,c \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe una única solución maximal φ de la ecuación (3) que satisface las condiciones iniciales

$$\varphi(t_0) = a, \varphi'(t_0) \;\text{ y }\; \varphi''(t_0) = c.$$

3. Sea φ tal solución maximal. Calcular la derivada de la función

$$t \to \varphi''(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\varphi(u)du\right)$$

Deducir que la función φ es ya sea convexa, o ya sea cóncava en su intervalo de definición. Determinar φ en el caso que $\varphi''(t_0) = 0$.

Solución ▼ [002561]

Ejercicio 6877

Se considera la ecuación $xx'' = (x')^2 + 1$ sobre $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que, $x_0 \neq 0$ y x_0' dados en $\mathbb{R}$, existe una única solución φ definida en un vecindario de 0, tal que $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi'(0) = x_0'$.
2. Si además $x_0' \neq 0$, se puede asumir que φ es un C^1-difeomorfismo de un vecindario de 0 en un vecindario de x_0 (¿por qué?); se denota ψ la aplicación inversa y se establece $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calcular $z'(x)$, encontrar la ecuación satisfecha por z y explicitar z; deducir una expresión de φ.
3. ¿Cuál es la solución φ de la ecuación tal que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ y $\varphi'(0) = 0$.

Ejercicio 6878

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones donde $y = y(x)$ es real de variable real, describir las soluciones especificando su intervalo máximo de definición y dibujar las trayectorias :

$$\text{(i) } y' = \mathrm{e}^{-y}; \qquad \text{(ii) } y' - y = \mathrm{e}^{x}; \qquad \text{(iii) } xy' - 2y = 0; \qquad \text{(iv) } x^2y' - y = x^2 - x.$$

2. ¿Cuáles son las curvas isoclinas de la ecuación $y' = y^2 - x$? ; deducir la forma de las trayectorias.

[006314]

Ejercicio 6879

Sea f, g dos funciones reales continuas en un intervalo I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, y se supone que $g^{-1}(0)$ es finito o discreto ; demostrar que la solución de ecuación $y' = f(x)g(y),\ y(x_0) = y_0$ se obtiene en forma implícita, y precisar su intervalo de definición.
Ejemplos : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(y) = \sqrt{1-y^2}$; $f(x) = 1$, $g(y) = y - y^2$. [006315]

Ejercicio 6880

Se considera la ecuación diferencial

$$y'' + y' + y = 0 \tag{E}$$

1. Resolver la ecuación diferencial (E) y estudiar el comportamiento de las soluciones en $+\infty$ y $-\infty$.
2. Sea f una función de clase $\mathscr{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $f'' + f' + f$ sea T-periódica. Demostrar que $f(x+T) - f(x)$ es solución de (E). Deducir que si f es acotada en $\mathbb{R}$, f es ella misma T-periódica.

[006316]

Ejercicio 6881

Se consideran las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$(\mathscr{E}_1)\ y'' = \operatorname{sen} x \qquad\qquad (\mathscr{E}_2)\ y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} x$$

donde ω es un número real de módulo estrictamente menor que 1.

1. Encontrar la solución y de la ecuación $\mathscr{E}_1$ verificando $y(0) = 0,\ y(\pi) = 4\pi$.
2. Describir la solución general de la ecuación $\mathscr{E}_2$, y así demostrar que la solución y_ω verificando $y_\omega(0) = 0,\ y_\omega(\pi) = 4\pi$, tiene la expresión

$$y_\omega(x) = 4\pi \frac{\operatorname{sen} \omega x}{\operatorname{sen} \pi\omega} - \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \omega^2}.$$

3. Encontrar, para x fijo, el límite de $y_\omega(x)$, cuando ω tiende a 0. Interpretación.
4. Se restringe x, para cubrir el intervalo $[0, \pi]$, y se supone $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}$. Usando la fórmula de Taylor, a la función $f(\omega) = \pi \operatorname{sen} \omega x - x \operatorname{sen} \pi\omega$, demostrar que $|\pi \operatorname{sen} \omega x - x \operatorname{sen} \pi\omega| \leqslant \pi^3\omega^3$. Deducir : $|y_\omega(x) - y(x)| \leqslant A\omega^2$, donde A es una constante.

Ejercicio 6882

Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + y = f(x) \qquad (\mathscr{E})$$

donde f es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

1. Se supone que f es un polinomio de grado n. Se denota E el espacio vectorial de polinomios reales de grado $\leqslant n$. Demostrar que la aplicación u, definida en E por $u(P) = P'' + P$, es una aplicación inyectiva de E en sí mismo. Deducir que la ecuación $(\mathscr{E})$ tiene una y solo una solución polinomial g que es del mismo grado que f.
2. Se supone ahora que f es una función continua cualquiera en $\mathbb{R}$. Demostrar que la función
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\;dt$$
es una solución particular de $(\mathscr{E})$; deducir la solución general de la ecuación.
3. Demostrar que si f verifica la desigualdad $f(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, todas las soluciones de $(\mathscr{E})$ son funciones mayoradas. ¿Se tiene la misma conclusión si la función f es solo acotada en $\mathbb{R}$?

[006318]

Ejercicio 6883 Método de Picard

Se construye paso a paso la sucesión de funciones reales (y_n) por la relación

$$y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = 1 + \int_0^x (y_{n-1}(t))^2 dt.$$

1. Primero se supone $x \in [0,1[$. Demostrar que la sucesión (y_n) es creciente y es acotada superiormente por $\frac{1}{1-x}$. Deducir que y_n tiende, cuando $n \to \infty$, a un límite que es la solución de la ecuación diferencial $y' = y^2$ valiendo 1 en 0.
2. Si $-1 < x \leqslant 0$, demostrar que (y_{2n}) y (y_{2n+1}) son sucesiones adyacentes, tales que, para $n \geqslant 1$, $\frac{1}{1-x} \leqslant y_{2n} \leqslant 1$ y $1 + x \leqslant y_{2n+1} \leqslant \frac{1}{1-x}$; encontrar la solución de la ecuación en $]-1,1[$ valiendo 1 en 0.

[006319]

Ejercicio 6884

1. Siguiendo el método de iteración de Picard, encontrar la solución de ecuaciones con condición inicial :
   (i) $x'(t) = ax(t) + b$; $x(0) = 0$. (ii) $x'(t) = \mathrm{sen}\, x(t)$; $x(0) = 0$.
2. Sea A una matriz $n \times n$ constante. Encontrar por el método de Picard la solución de $X'(t) = A\,X(t); X(0) = X_0$; así hallar la solución de $x''(t) = -x(t)$; $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
3. Sea esta vez $A(t)$ una familia de matrices $n \times n$ de funciones continuas, tales que para s,t, se tiene $A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Encontrar la solución de la ecuación $X'(t) = A\,X(t); X(0) = X_0$ (se demuestra que $B(s)B(t) = B(t)B(s)$, donde $B(t) = \int_0^t A(u)\,du$).

Ejercicio 6885

Se considera la ecuación $(1)\quad x' = 3x^{2/3}$, con condición inicial $x(0) = 0$.

1. Sea φ una solución de (1) definida en $\mathbb{R}$ tal que $\varphi(0) = 0$; se establece $\lambda = \inf\{t \leqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \geqslant -\infty$ y $\mu = \sup\{t \geqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Demostrar que φ es idénticamente nula en (λ, μ).
2. Demostrar que φ vale $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sobre $[\lambda, \mu]$ y $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; deducir todas las soluciones maximales de (1) definidas en $\mathbb{R}$, con $x(0) = 0$.

[006321]

Ejercicio 6886

Se considera la ecuación diferencial $x' = |x| + |t|$;

1. Demostrar que para todo x_0 real, existe una solución maximal (φ, J) tal que $\varphi(0) = x_0$.
2. Determinar la solución maximal correspondiente a $x_0 = 1$, distinguiendo los casos $t \geqslant 0$ y $t < 0$, y comprobar que está configurado para todo $\mathbb{R}$. ¿Cuántas veces es derivable?

[006322]

Ejercicio 6887

Se considera la ecuación diferencial $x' = |x| + |t|$.

1. Demostrar que para todo real x_0, existe una solución maximal (φ, J) tal que $\varphi(0) = x_0$.
2. Determinar la solución maximal correspondiente a $x_0 = 1$, distinguiendo los casos $t \geqslant 0$ y $t < 0$, y comprobar que está configurado para todo $\mathbb{R}$. ¿Cuántas veces es derivable?

[006323]

Ejercicio 6888

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = 4\dfrac{t^3x}{t^4+x^2}$ si $(t,x) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Se interesa en la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad . \tag{6}$$

1. ¿La aplicación f, es continua y/o localmente Lipschitz con respecto a su segunda variable? ¿Qué se puede deducir de la ecuación (6)?
2. Sea φ una solución de (6) que se define en un intervalo I que no contiene a 0. Se define una aplicación ψ por $\varphi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Determinar una ecuación diferencial ($6'$) tal que ψ sea solución de esta ecuación, luego resolver la ecuación ($6'$).
3. ¿Qué se puede deducir de la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial (6) con valores iniciales $(t_0, x_0)) = (0,0)$?

[006324]

Ejercicio 6889

Sea la ecuación diferencial

$$x''' - xx'' = 0\,. \tag{7}$$

donde x es una aplicación tres veces derivable, definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$.

1. Expresar esta ecuación diferencial en la forma canónica

$$y'(t) = f(t, y(t)) ,$$

donde f es una aplicación que vamos a determinar.

2. Sean $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe una única solución maximal φ de la ecuación (7) que satisface las condiciones iniciales

$$\varphi(t_0) = a \text{ , } \varphi'(t_0) = b \text{ y } \varphi''(t_0) = c.$$

3. Sea φ tal solución maximal. Calcular la derivada de la función

$$t \mapsto \varphi``(t) \exp\left(-\int_a^t \varphi(u)\, du\right) .$$

Deducir que la función φ es ya sea convexa, ya sea cóncava en su intervalo de definición. Determinar φ en el caso donde $\varphi''(a) = 0$.

[006325]

Ejercicio 6890

Introducción. Si A es una matriz $n \times n$, con coeficientes reales, Se sabe que las soluciones de la ecuación

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \qquad (*)$$

están definidas (al menos) en el intervalo $[0, \infty[$ (y con valores en $\mathbb{R}^n$). En la pregunta 1. Se pide de demostrar que, bajo algunas hipótesis sobre A, se tiene $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. El propósito de las preguntas 2. y 3. es de probar los mismos resultados para la ecuación perturbada

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + g(\varphi(t)) \qquad (**)$$

donde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 verificando $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$.

Las preguntas 1. y 2. son independientes. La cuestión 3. utiliza los resultados de las preguntas 1. y 2.

1. Sea $M(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas $n \times n$, con coeficientes reales y $M(n, \mathbb{C})$ el conjunto de matrices $n \times n$, con coeficientes complejos. Sea $\|\ \ \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ la norma definida por $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max_i |x_i|$.

   (a) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $B \in M(n, \mathbb{C})$ se tiene :

   $$\max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j \right| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}|) \cdot (\max_j |x_j|)$$

   es decir $\|Bx\| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}) \cdot \|x\|$.

   (b) Sea $D \in M(n, \mathbb{C})$ una matriz diagonal con $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ en la diagonal. Demostrar que $\forall x \in \mathbb{C}^n$: $\|Dx\| \leqslant (\max_i |\lambda_i|) \cdot \|x\|$.

   (c) Sea $A \in M(n, \mathbb{C})$ diagonalizable y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus propios valores. Sea $\alpha = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$. Demostrar que existe una constante $K > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall t \in [0, \infty[$: $\|e^{tA} x\| \leqslant K e^{\alpha t} \|x\|$.

(d) Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$ diagonalizable en $\mathbb{C}$ y $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sus propios valores (Nota : aquí A es con coeficientes reales). Sea además $\alpha = \max_i \operatorname{Re}\lambda_i$ estrictamente inferior a 0. Deducir de esto que precede que si $\varphi(t)$ es solución de la ecuación (*), entonces $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

2. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como en la introducción.
   (a) Demostrar que $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\eta > 0, \forall x,y \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \eta,\ \|y\| < \eta \implies \|g(x)-g(y)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x-y\|$.
   (b) ¿Cuál es la solución del dominio de definición maximal (a precisar) de la ecuación (**) verificando la condición inicial $\varphi(0) = 0$?
   (c) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo conteniendo a 0. Demostrar que una aplicación continúa $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación (**) con condición inicial $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ si y solo si se tiene en I :
   $$\varphi(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}g(\varphi(s))\,ds.$$
   Indicación : para $\Rightarrow$ se puede considerar la función $\psi(t) = \mathrm{e}^{-tA}\varphi(t)$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como en la introducción; sea A y α como en 1.(d) y K como en 1.(c). Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \beta < 0$. Usando$\varepsilon = (\beta-\alpha)/K$, la pregunta 2.(a) da un $\eta > 0$. Sea finalmente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_0\| < \eta/K$. Se define una sucesión de función $\varphi_p : [0,\infty[\, \to \mathbb{R}^n$ por las fórmulas $\varphi_0(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0$ y
   $$\varphi_{p+1}(t) = \mathrm{e}^{tA}x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}g(\varphi_p(s))\,ds.$$
   (a) Demostrar por inducción que $\forall\,p \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[\, : \|\varphi_p(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{t\beta}\|x_0\|$.
   (b) Demostrar que $\chi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|$ es una función acotada en $[0,\infty[$.
   (c) Demostrar por inducción que $\forall\,p \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[$:
   $$\|\varphi_{p+1}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|.$$
   (d) Deducir que $\forall\,p,q \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,\infty[$:
   $$\|\varphi_{p+q}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \left(1 - \frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^{-1} \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|.$$
   (e) Demostrar que la sucesión (φ_p) converge a una función $\varphi : [0,\infty[\, \to \mathbb{R}^n$ y que la convergencia es uniforme.
   (f) Demostrar que φ es continua y solución de la ecuación (**) verificando $\varphi(0) = x_0$.
   (g) Demostrar que $\forall t \in [0,\infty[\, : \|\varphi(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{t\beta}\|x_0\|$.
   (h) Deducir de lo anterior que existe un vecindario U de $0 \in \mathbb{R}^n$ (a precisar) tal que $\forall x_0 \in U$ existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ verificando
      i. φ es la única solución de (**) verificando $\varphi(0) = x_0$,
      ii. $[0,\infty[\, \subset I$,
      iii. $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$.

[006809]

Ejercicio 6891

Para una función real x de la variable t se considera el sistema
$$x'''' + 2x'' + x = 0 \ \text{ y } \ x(0) = 2. \tag{*}$$

1. ¿El sistema (*) tiene una solución única ? ¿Por qué ?

   Si su respuesta a la pregunta 1. es sí, responder a la pregunta 2., si su respuesta a la pregunta 1. es no, responder a la pregunta 3.
2. Encontrar la solución única de (*). ¿Es periódica ?
3. Encontrar todas las soluciones de (*). ¿Hay soluciones periódicas ? Si es sí, explicitarlos.

[006822]

Ejercicio 6892

Para una función **real** x de la variable t se considera el sistema

$$\begin{cases} x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x'' - 2x' + x = 0 \\ x(0) = 0, \qquad x''(0) = -2, \qquad x^{(3)}(0) = 0. \end{cases} \tag{*}$$

1. ¿El sistema (*) tiene una solución única ? ¿Por qué ?

   Si la respuesta a la pregunta 1. es sí, responder a la pregunta 2., si su respuesta a la pregunta 1. es no, responder a la pregunta 3.
2. Encontrar la solución única de (*). ¿Es periódica ?
3. Encontrar todas las soluciones de (*). ¿Hay soluciones periódicas ? Si es sí, explicitarlas.

[006828]

Ejercicio 6893

Sea $f :]0,+\infty[\, \times\,]0,+\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x,t,c) = x - \ln(x) - t + \ln(t) - c$.

1. Demostrar que si una función derivable de t, $x = \gamma_c(t)$ es solución de la ecuación $f(\gamma_c(t),t,c) = 0$, entonces es una solución de la ecuación diferencial $t(x-1)x' = (t-1)x$.
2. ¿Existe una función $g(t,c)$ definida en un vecindario de $(2,0)$ verificando $g(2,0) = 2$ y $f(g(t,c),t,c) = 0$? (Justificar). Si es sí, calcular el desarrollo limitado (polinomio de Taylor) de orden 2 de esta solución.

[006837]

Ejercicio 6894

Para una función **real** x de la variable t se considera el sistema

$$\begin{cases} x^{(4)} - 2x^{(3)} + x'' + 2x' - 2x = 0, \\ x(0) = 0, \quad x''(0) = 0. \end{cases} \tag{*}$$

1. ¿El sistema (*) tiene una solución única ? ¿Por qué ?

   Si la respuesta a la pregunta 1. es sí, responder a la pregunta 2, si su respuesta a la pregunta 1. es no, responder a la pregunta 3.
2. Encontrar la solución única de (*). ¿Es periódica ?
3. Encontrar todas las soluciones de (*). ¿Hay soluciones periódicas ? Si es sí, explicitarlas.

[006845]

Ejercicio 6895

Se considera la ecuación diferencial (de Riccati) sobre $\mathbb{R}$:

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t), \qquad (\mathscr{E})$$

donde $a, b, c \in C(\mathbb{R}, R)$. Sea $x_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$, cuatro soluciones distintas definidas en I. Se define $B = \dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\dfrac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$.

1. Demostrar que B está bien definida en I.
2. Demostrar que B es una función constante en I. (Utilizar la derivada logarítmica).

[006326]

Ejercicio 6896

Se considera la ecuación diferencial (de Bernoulli) sobre $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad y' + y + xy^2 = 0.$$

1. Buscar las soluciones que nunca se anulen. Transformar la ecuación por el difeomorfismo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to (x, \frac{1}{y})$ en una ecuación $(\mathscr{E}')$ que se va a resolver. Deducir una familia (φ_λ) de soluciones de $(\mathscr{E})$, con su máximo intervalo de definición.
2. Demostrar que en todo punto (x_0, y_0) del plano con $y_0 \neq 0$, pasa una solución φ_λ. Deducir todas las soluciones de $(\mathscr{E})$.

[006327]

Ejercicio 6897

Sea f campo de vectores de clase C^1 en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, y $\;(1)\;\; x' = f(x),\;$ la ecuación asociada.

1. Sea $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = 0$. Si $\varphi : J \to U$ es una solución de (1) tal que $\varphi(t_0) = x_0$, para un $t_0 \in J$, entonces $\varphi(t) = x_0$, para todo $t \in J$.
2. Si f es acotada en U y $\varphi : J \to U$ es una solución de (1), donde $J =]a, b[$, $b \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{t \to b} \varphi(t)$ existe.
3. Sea $\varphi : J \to U$ una solución de (1), donde $J \supset]0, +\infty[$, y además se supone que $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = a \in U$. Demostrar que $f(a) = 0$.

[006328]

Ejercicio 6898

Sea f campo de vectores de clase C^1 de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, y se supone (para simplificar) que, para todo valor inicial x de $\mathbb{R}^n$, existe una única solución pasando por x en el tiempo $t = 0$, definida en todo $\mathbb{R}$. Se denota $\phi(t, x)$ esta solución (o ϕ el flujo del campo).

1. Demostrar que se tiene $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$, y verificarla sobre la ecuación $x' = x^2$, $x(0) = \alpha \geqslant 0$, luego de especificar el dominio de definición del flujo.
2. Se hace $n = 2$; describir el flujo cuando $f(x, y) = (-x, y)$; $\quad (y, x)$; $\quad (-y, x)$, y comprobar la relación anterior.

Ejercicio 6899 Funciones implícitas y Cauchy-Lipschitz

Sea $f:\mathbb{R}^2\to R$, de clase C^2, y (a,b) un punto tal que $f(a,b)=0$, y $f'_y(a,b)\neq 0$. Demostrar que si $y=\varphi(x)$ es la función implícita asociada a $f(x,y)=0$, φ es solución de la ecuación diferencial :

$$y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)};\;\; y(a)=b.$$

Recíproco. [006330]

Ejercicio 6900 Desigualdad de Gronwall

Sea u,v dos aplicaciones de $[0,\beta]$ en $\mathbb{R}$ continuas y positivas tales que

$$u(t)\leqslant C+\int_0^t u(s)v(s)\,ds,$$

donde C es una constante positiva o nula. Demostrar que $u(t)\leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^t v(s)\,ds}$. [006331]

Ejercicio 6901

Sea f una aplicación K-lipschitziana en un abierto $U\subset\mathbb{R}^n$. Demostrar que el flujo de las soluciones de $x'=f(x)$, se supone definido en un intervalo $[t_0,t_1]$, depende continuamente de la condición inicial $x(t_0)=x_0$.

1. Sean x_1, x_2 dos de esas soluciones ; demostrar que si $t\in[t_0,t_1]$,

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\leqslant\|x_1(t_0)-x_2(t_0)\|\mathrm{e}^{K(t-t_0)}$$

2. Deducir el resultado y verificarlo en el ejemplo : $x'=x^2$ sobre $\mathbb{R}$.

[006332]

Ejercicio 6902

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $E=\mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ una función continua de $I\times E$ en E tal que $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant k(t)\,\|x_1-x_2\|$, donde k es una función continua $\geqslant 0$ definida en I.

1. Se considera J intervalo compacto $\subset I$ y el operador T definido en $C(J,\mathbb{R}^n)$ por

$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds;$$

demostrar que para p bastante grande, T^p es contractante ; deducir que la ecuación $x'=f(t,x)$ admite una única solución definida en todo J tal que $x(t_0)=x_0$.

2. Demostrar que la ecuación $x'=f(t,x)$ admite una única solución tal que $x(t_0)=x_0$, definida en todo I (se puede escribir I como unión de intervalos compactos).
3. Ejemplos : Demostrar que las soluciones maximales de las ecuaciones $y''=-\operatorname{sen} y$, $y(0)=a$, $y'(0)=b$ (que se escribe en forma canónica), y $x'=A(t)\cdot x$, $x(0)=x_0$, donde $A(t)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ que está constituido de funciones continuas en $\mathbb{R}$, están definidas en todo $\mathbb{R}$.

[006333]

Ejercicio 6903

Se considera la ecuación $xx'' = (x')^2 + 1$ sobre $\mathbb{R}$.

1. Demostrar que, $x_0 \neq 0$ y x'_0 dados en $\mathbb{R}$, existe una única solución φ definida en un vecindario de 0, tal que $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Si además $x'_0 \neq 0$, se puede asumir que φ es un C^1–difeomorfismo de un vecindario de 0 en un vecindario de x_0 (por qué ?) ; se denota ψ la aplicación inversa y se establece $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calcular $z'(x)$, encontrar la ecuación que satisface z y explicitar z ; deducir una expresión de φ.
3. ¿Cuál es la solución φ de la ecuación tal que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ y $\varphi'(0) = 0$?

[006334]

Ejercicio 6904

1. Se busca resolver el problema
$$x' = t^2 + tx, \quad x(0) = 0.$$
Escribir la ecuación integral asociada y utilizar los cilindros de seguridad para justificar que el procedimiento iterativo de Picard da una sucesión de funciones (x_n) convergente uniformemente en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ hacia una solución del problema. Partiendo de $x_0 \equiv 0$, determinar entonces esta sucesión (x_n) y la solución del problema dado.
2. Resolver con este proceso iterativo el problema, luego también
$$x' = tx,\ x(0) = 1; \qquad x'_1 = x_2x_3,\ x_1(0) = 0;$$
$$x'_2 = -x_1x_3,\ x_2(0) = 1; \qquad x'_3 = 2,\ x_3(0) = 0;$$
comenzando con $x_0(t) = (0,1,0)$.

[006335]

Ejercicio 6905

Calcular los primeros términos de la iteración de Picard con las condiciones iniciales dadas. Si es posible encontrar soluciones explícitas, incluyendo sus dominios de definición.

1. $x' = x + 2$; $x(0) = 2$.
2. $x' = x^{4/3}$; $x(0) = 0$.
3. $x' = x^{4/3}$; $x(0) = 1$.
4. $x' = 1/(2x)$; $x(1) = 1$.

[006336]

291 382.00 Sistema lineal con coeficientes constantes

Ejercicio 6906

Se recuerdan los diferentes métodos para resolver un sistema diferencial lineal con coeficientes constantes $X'(t) = A \cdot X(t)$ sobre E de dimensión finita :

1. Se escribe A en forma triangular y se resuelve paso a paso el nuevo sistema obtenido cambiando la base antes de volver al sistema inicial.
2. Se escribe A en la forma de Dunford, $P^{-1}AP = D+N$, donde D es semisimple y N nilpotente, que conmutan. Se calcula así $\mathrm{e}^{tA} \cdot X_0$, la solución valiendo X_0 en el tiempo $t=0$.
3. Se utiliza el teorema de Cayley-Hamilton para establecer relaciones entre las potencias de A y calcular así e^{tA}.
4. (cf. Cartan) Se descompone $E = \oplus_i E_i$ en subespacios característicos, se calcula e^{tA_i}, donde $A_i = A_{|E_i}$, luego $x(t) = \sum\limits_i \mathrm{e}^{tA_i} v_i$, si $X_0 = \sum\limits_i v_i$.
5. Se busca una base de soluciones por identificación bajo la forma de polinomios-exponenciales, siguiendo el resultado del curso.

Resolver los sistemas diferenciales de matriz :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 \\ -1 & 2 & -20 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[006337]

Ejercicio 6907

Sea A un operador de $\mathbb{R}^n$ y $x' = Ax$ el sistema asociado.

1. Se supone que A deja un espacio E invariante; demostrar que si φ es una solución de condición inicial $\varphi(t_0) \in E$, entonces $\varphi(t) \in E$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones del sistema si A es nilpotente?
3. Se supone que A tiene un valor propio de parte real < 0; demostrar que existe al menos una solución φ tal que $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.
4. ¿Bajo qué condiciones el sistema solo tiene soluciones acotadas?

[006338]

Ejercicio 6908

Demostrar que $\left(I + \dfrac{A}{n}\right)^n$ converge a e^A, cuando $n \to \infty$ mayorando la diferencia. Encontrar así el valor de $\det \mathrm{e}^A$.

[006339]

Ejercicio 6909

Sea $E = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathscr{L}(E,E)$ y el sistema diferencial $X' = AX$.

1. Se supone que $X = \mathrm{e}^{r_1 t} u_1 + \mathrm{e}^{r_2 t} u_2$ es solución, donde $u_i \in E$ y $r_i \in \mathbb{C}$ distintos. Demostrar que $\mathrm{e}^{r_1 t} u_1$ y $\mathrm{e}^{r_2 t} u_2$ son soluciones.
2. Se supone que $\mathrm{e}^{rt}(u + tv)$ es solución donde $u, v \in E$ y $v \neq 0$. Demostrar que u no es proporcional a v y que $\dim \operatorname{Ker}(A - rI_E)^2 \geqslant 2$.

[006340]

Ejercicio 6910

Encontrar la solución general de la ecuación $y^{(4)}+y=0$ en forma real. Se admite que la función $f(a)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(at)}{1+t^4}\,dt$ verifica esta ecuación. Sabiendo que $\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, demostrar que para $a\geqslant 0$

$$f(a)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\Big(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}})+\operatorname{sen}\big(\frac{a}{\sqrt{2}}\big)\Big).$$

[006341]

Ejercicio 6911

Resolver el sistema

$$(S)\qquad \begin{cases} x_1' &= x_2\\ x_2' &= x_1\end{cases}$$

usando primero los valores propios de la matriz A definiendo este sistema, luego calculando A^n y e^{tA}. [006342]

Ejercicio 6912

1. Sea el sistema
$$x'=Ax\quad\text{con}\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&0&-1\\4&-2&-1\end{pmatrix}.$$
Determinar los valores propios de A, luego un sistema de soluciones de $x'=Ax$.
2. El mismo ejercicio con
$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-3\end{pmatrix}\ \text{ o aún }\ A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&0&-1&0\\1&2&1&0\\-1&2&2&1\end{pmatrix}.$$

[006343]

Ejercicio 6913

Se considera el sistema lineal $x'(t)=A(t)x(t)$, donde $A\in\mathscr{C}([0,\infty))$. Sea φ una solución no trivial de este sistema y sea

$$\gamma=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\varphi(t)\|,\ \ -\infty\leqslant\gamma\leqslant\infty.$$

1. Demostrar que γ no depende de la elección de la norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$.
2. Demostrar que γ es un valor finito si se asume que los coeficientes de la matriz $A(t)$ son funciones mayoradas. (Utilizar la desigualdad de Gronwall).
3. En el caso donde A es una matriz constante diagonalizable, demostrar que γ es forzosamente la parte real de un valor propio de A.

[006344]

Ejercicio 6914

Resolver el sistema $x' = 2x - y$, $y' = x + 2y$. ¿Cuál es la solución que verifica $x(0) = 1$, $y(0) = -2$? [006345]

Ejercicio 6915

Sea E un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $A \in M(n,\mathbb{R})$ una matriz preservando E. Si $x(t)$ es una solución de la ecuación $x' = Ax$ tal que $x(t_0) \in E$, demostrar que $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \in E$. [006346]

Ejercicio 6916

Clasificar y esbozar los diagramas de fase de las ecuaciones $x' = Ax$, para $A \in M(2,\mathbb{R})$ teniendo cero como valor propio. [006347]

Ejercicio 6917

¿Para qué valor(es) de k es el origen un sumidero para la ecuación $x' = Ax$?

$$1.\ \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}, \qquad 2.\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix}, \qquad 3.\ \begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad 4.\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

[006348]

Ejercicio 6918

Encontrar las soluciones del sistema $x' = -y$, $y'' = -x - y + y'$. [006349]

Ejercicio 6919

Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$. Demostrar que si todas las soluciones de la ecuación $x' = Ax$ son periódicas de mismo periodo, entonces A es semisimple y el polinomio característico es una potencia de $\lambda^2 + b^2$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. [006350]

Ejercicio 6920

Sea $A \in M(4,\mathbb{R})$ semisimple, y sean $\pm ai$, $\pm bi$, $a > 0$, $b > 0$ valores propios.

1. Demostrar que si a/b es racional, entonces todas las soluciones de $x' = Ax$ son periódicas.
2. Demostrar que si a/b es irracional, entonces existe una solución no periódica $x(t)$ tal que $M < |x(t)| < N$, para ciertas constantes $M, N > 0$.

[006351]

Ejercicio 6921

Si A es nilpotente, ¿cuál es la forma de las soluciones de ecuación $x' = Ax$? [006352]

Ejercicio 6922

Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sea :

(a) diagonalizable, (b) semisimple, (c) nilpotente. [006353]

Ejercicio 6923

Encontrar todas las soluciones periódicas de la ecuación $x^{(4)}+2x''+x=0$. [006354]

292 383.00 Estudio cualitativo : equilibrio, estabilidad

Ejercicio 6924

Sea $A\in M(n,\mathbb{R})$ una matriz de tamaño $n\times n$, con coeficientes en $\mathbb{R}$.

1. ¿Cuándo se dice que $0\in\mathbb{R}^n$ es una fuente para la ecuación diferencial lineal $x'=Ax$?
2. Demostrar que $0\in\mathbb{R}^n$ es una fuente para la ecuación diferencial lineal $x'=Ax$ si y solo si para toda solución $x(t)$ de la ecuación diferencial se tiene $\lim_{t\to-\infty}x(t)=0$.

[006841]

293 384.00 Ecuación en derivadas parciales

Ejercicio 6925

Resolver usando coordenadas polares la ecuación en derivadas parciales :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

[001845]

Ejercicio 6926

Resolver la ecuación de la cuerda vibrante : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ usando el cambio de variables $u=\frac{x+y}{2}$ y $v=\frac{x-y}{2}$ (se supone que f es C^2). [001846]

Ejercicio 6927

Resolver la ecuación en derivadas parciales :

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=f$$

pasando a coordenadas polares. [001847]

Ejercicio 6928

Resolver usando el cambio de variable $x=u, y=uv$ la siguiente ecuación diferencial parcial :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

[001848]

Ejercicio 6929

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una aplicación C^1 homogénea de grado $s>0$, i.e. tal que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall x\in\mathbb{R}^2,\ \ f(\lambda x)=\lambda^s f(x).$$

Demostrar que las derivadas parciales de f son homogéneas de grado $s-1$ y :

$$sf(x)=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

[001849]

Ejercicio 6930

Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ derivable. Se define $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$. Calcular $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}$. [001850]

Ejercicio 6931

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función C^2. Se define $g(x,y)=f(x^2-y^2,2xy)$. Calcular $\triangle(g)$ en función de $\triangle(f)$. [001851]

Ejercicio 6932

Se buscan las funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tales que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)+2u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0,\quad \text{para todo } (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{8}$$

Sea $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $\phi(x,y)=(x,y+x^2)$.

1. Calculando la aplicación inversa, demostrar que ϕ es biyectiva. Verificar que ϕ y ϕ^{-1} son de clase $\mathscr{C}^1$.
2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$. Se define $g=f\circ\phi$.
   (a) Demostrar que g es de clase $\mathscr{C}^1$.
   (b) Demostrar que f es solución de (8) si y solo si $\frac{\partial g}{\partial x}=0$.
3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que f verifica (8) si y solo si existe una función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que $f(u,v)=h(v-u^2)$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

[001852]

Ejercicio 6933

Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f\left(\mathrm{e}^x\operatorname{sen}x,\ln(1+x^2)\right)$. Demostrar que g es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada en función de las derivadas parciales de f. [001853]

Ejercicio 6934

Sean $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0\}$ y $V=]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Se define la función

$$\begin{aligned}\Psi: V&\to\mathbb{R}^2\\ (r,\theta)&\mapsto(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

1. Demostrar que U y V son abiertos de $\mathbb{R}^2$ y que Ψ es de clase C^1 y biyectiva de V sobre U. Determinar Ψ^{-1}.
2. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre U. Se define

$$F(r,\theta) = f \circ \Psi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

   (a) Demostrar que f es de clase C^1 sobre U y calcular $\frac{\partial F}{\partial r}$ y $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en función de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) Demostrar que f verifica la ecuación

$$(E) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right), \ \forall (a,b) \in U$$

   si y solo si F verifica la ecuación

$$(E') \qquad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \theta_0, \ \forall (r_0,\theta_0) \in V.$$

   (c) Determinar todas las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre U que verifican la ecuación (E).

[001854]

Ejercicio 6935

Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. Se buscan las funciones $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ que verifica

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ \forall (x,y) \in D.$$

1. Verificar que $\varphi(x,y) = y/x$ es solución de (E).
2. Sea $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Demostrar que $g \circ \varphi$ es solución de (E).
3. Sea f una solución de (E). Demostrar que $f(u,uv)$ solo depende de v.
4. Dar el conjunto de las soluciones de (E).

[001855]

Ejercicio 6936

Determinar las funciones $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ verificando

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se puede hacer el cambio de variables $u = x+y$, $v = x-y$. [001856]

Ejercicio 6937

Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Usando las propiedades del diferencial, demostrar que $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$. [001857]

Ejercicio 6938

Se considera la ecuación diferencial $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$. Escribir el sistema diferencial de primer orden asociado y determinar el núcleo resolvente $R(t, t_0)$ de este sistema. Deducir e^{tA}, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[006355]

Ejercicio 6939

1. Demostrar que la matriz $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}\cos t & -\operatorname{sen} t \\ \mathrm{e}^{-2t}\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$ es la resolución del sistema lineal $x'(t) = A(t).x(t)$, donde
$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-\operatorname{sen} 2t \\ 1-\operatorname{sen} 2t & -2\operatorname{sen}^2 t \end{pmatrix}.$$
Deducir la solución del sistema $x'(t) = A(t)\cdot x(t) + b(t)$, con $b(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos t \\ \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$.
2. Se considera ahora la ecuación diferencial $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = f(t)$, donde f es una aplicación continua en $\mathbb{R}$. Aplicando el método de variación de Lagrange, encontrar la solución del sistema tal que $x(0) = x_0$.

[006356]

Ejercicio 6940

Se consideran las ecuaciones

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

donde p, q y r son funciones continuas de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Establecer lo que sigue :

1. Para todo $x_0 \in I$, y todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (1) admite una solución maximal establecida en todo I, tal que $y(x_0) = a$, $y'(x_0) = b$.
2. Sea $x_0 \in I$; las soluciones de (1) forman un espacio vectorial V de dimensión 2, donde una base es (y_1, y_2), con $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$.
3. Sea u y v dos soluciones de (1) y $W = u'v - uv'$ su wronskiano ; encontrar una ecuación diferencial satisfecha por W ; deducir que W es ya sea idénticamente nulo, o ya sea nunca nula, y que $W \neq 0 \iff (u,v)$ es una base de V. ¿Cuál es la relación entre W y la resolvente del sistema asociado ?
4. La solución y de (2) verificando $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$, donde x_0 es fijo en I, es
$$y(x) = y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{r(t)\Big(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\Big)}{W(t)}\, dt.$$
5. Ejemplo : Resolver $y'' + 4y = \tan x$.

[006357]

Ejercicio 6941

Se considera la ecuación diferencial lineal en $\mathbb{R}^n$

$$y' = A(x) \cdot y \tag{1}$$

donde $A(x)$ es continua en un intervalo I.

1. Demostrar que si suponemos $A(x)A(x') = A(x')A(x)$, para todo $x, x' \in I$, la resolvente de (1) es

$$R(x,x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} A(s)\, ds\right) =: \exp B(x).$$

   (Indic. : Se observa que $B(x)B(x') = B(x')B(x)$.)

2. Demostrar que si $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix}$, se tiene que A verifica la hipótesis de 1. y $B(x)$ es de la forma $\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$.

3. Resolver la ecuación $y' = A(x) \cdot y$, cuando $a(x) = -\frac{x}{2(1+x^2)}$ y $b(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

4. Resolver la ecuación $y' = A(x) \cdot y + C(x)$, cuando $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(x) & 1 \\ -1 & \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$ y $C(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \ \mathrm{sh}(x) \\ \cos x \ \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$.

[006358]

Ejercicio 6942

Sea E un espacio de Banach y $t \to A(t)$ una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathscr{L}(E,E)$. Se supone que A es periódica de periodo ω. Esto no implica necesariamente que las soluciones de (1) $x' = A(t) \cdot x$ sean también ω-periódicas.

1. En el caso donde E es un espacio de dimensión 2 y A es una matriz constante, dar una condición necesaria y suficiente para que las soluciones de (1) sean ω-periódicas.
2. En el caso general, sea $R(t,a)$ el núcleo de resolución asociado con (1).
   (a) Demostrar que $R(t+\omega, a+\omega) = R(t,a)$, para todo t.
   (b) Demostrar que la solución $x(t)$ de (1) tal que $x(0) = x_0$ es ω-periódica si y solo si $R(\omega,0)x_0 = x_0$.
   (c) ¿Bajo qué condiciones la ecuación $x' = A(t) \cdot x$ tiene una solución ω-periódica ?
3. Se considera la ecuación (1) $x'' + f(t)x = 0$, donde f es una función continua, ω-periódica. Calcular $\det R(a+\omega, a)$; ¿(1) tiene siempre una solución ω-periódica ?

[006359]

Ejercicio 6943

Se considera la ecuación del péndulo $x'' + \operatorname{sen} x = 0$. Se sabe que las soluciones máximas están definidas en $\mathbb{R}$ todo entero.

1. Sea φ la solución maximal de la condición inicial $\varphi(0) = a, \varphi(0) = 0$; demostrar que $\varphi'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a)$ y deducir que $|x(t)| \leqslant a$, para todo t.
2. Sea $y'' = -y$, $y(0) = a$, $y'(0) = 0$ el problema linealizado correspondiente. Demostrar que Z definida por $Z = (x-y,\ x'-y')$ verifica un sistema diferencial de primer orden de la forma $Z'(t) = AZ(t) + B(t)$, donde A es antisimétrica. Deducir, para todo t, $|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{a^3}{6}|t|$.

Ejercicio 6944

Sea V un campo de vectores definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que una aplicación $h : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es una *integral primera* de V, si $h \circ \varphi(t)$ es constante en J, para toda solución (φ, J) de la ecuación autónoma asociada. Se supone el campo de clase C^1 sobre Ω.

1. Demostrar que h es una integral primera de V si y solo si $h'(x) \cdot V(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$.
2. Dar una primera integral sobre $\mathbb{R}^n$ del sistema diferencial $X' = AX$, donde A es una matriz antisimétrica $n \times n$ (empezar con $n = 2$).
3. Sea f una aplicación de clase C^∞ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, y se denota $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\ du$. Demostrar que la función $(x, y) \to y^2 + 2F(x)$ es una integral primera sobre $\mathbb{R}^2$ del campo de vectores $V(x, y) = (y,\ -f(x))$ definido en $\mathbb{R}^2$. Se supone que F tiende a $+\infty$, cuando x tiende a $\pm\infty$. Demostrar que si una solución $(x(t), y(t))$ de $X' = V(X)$ se define en un intervalo cualquiera I, las funciones x e y están acotadas en I. (Se observa que F es acotada inferiormente).

[006361]

Ejercicio 6945 Extraído de examen septiembre 97

Sea f una aplicación de clase C^1 de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. Se considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1}$$

1. Sea F un difeomorfismo de clase C^1 de Ω en un abierto Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ tal que $F(0) = 0$, y se denota G difeomorfismo inverso. Demostrar que si φ es solución de (1), $\psi = F \circ \varphi$ es solución de la ecuación
$$\frac{dy}{dt} = g(y), \tag{2}$$
donde g es una aplicación de clase C^1 de Ω_1 en $\mathbb{R}^n$ que se va a determinar. Se supone ahora $n = 3$.
2. Demostrar que la aplicación F de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $F(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - x_3, x_1 - x_2^2, x_3)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de clase C^∞ tal que $F(0) = 0$.
3. Deducir usando 1. y 2. las soluciones de la ecuación diferencial
$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 2(x_1 - x_2^2) - 2x_2 + x_3 + 2x_2(x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3) \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= 2(x_1 - x_2^2) + 4x_2 + x_3.
\end{aligned}$$

[006362]

Ejercicio 6946 Cálculo funcional holomorfo

Sea $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \rho = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valor propio de } A\}$. Se va a demostrar en un ejemplo que se puede calcular $f(A)$, para toda f suma de una serie entera de radio $> \rho$. Sea así A un operador de $\mathbb{R}^n$ tal que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

1. Se denota $E_1 = \ker(A-I)^2$, $E_2 = \ker(A-2I)$, p_i el proyector sobre E_i (paralelamente a la otra). Calcular p_1 y p_2 en función de A.
   (Solución : $p_1 = -A(A-2I)$ y $p_2 = (A_I)^2$.)
2. Calcular $A^n x$, para $x \in E_1$, luego $x \in E_2$. Deducir de 1. la expresión de A^n, para todo $n \geqslant 0$.
   (Solución : $A^n = (I+n(A-I))A(2I-A)+2^n(A_I)^2)$.
3. Sea f un polinomio de grado > 2 y P el polinomio minimal de A. Demostrar que $\frac{f(x)}{P(x)} = g(x) + \frac{f(2)}{x-2} - \frac{xf(1)}{(x-1)^2} - \frac{f'(1)}{x-1}$, donde g es en sí mismo un polinomio. Deducir $f(A)$, para f polinomio, luego f suma de una serie entera de radio > 2.
4. Encontrar así e^{tA} si $t \in \mathbb{R}$ y resolver el sistema $x' = A \cdot x$, donde $A =$ **?**

[006363]

Ejercicio 6947

Se considera A la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcular A^3 y demostrar que $\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} f & g & h \\ h & f & g \\ g & h & f \end{pmatrix}$, donde $f(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n}}{3n!}$, $g(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+1}}{3n+1!}$, $h(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+2}}{3n+2!}$. Demostrar que $f(t) = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{jt} + \mathrm{e}^{j^2 t})$ y dar la expresión de h.
2. Se considera $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^∞. Demostrar que una solución particular de la ecuación $\quad (\mathscr{E}) \quad y''' - y = \varphi(t) \quad$ es
$$y(t) = \int_0^t h(t-s)\varphi(s)\, ds.$$
3. Se supone φ 1-periódica (i.e. $\varphi(t+1) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$). Sea y una solución de $(\mathscr{E})$ tal que $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, $y''(0) = y''(1)$. Demostrar que y es 1-periódica. Demostrar que $(\mathscr{E})$ tiene una y solo una solución 1-periódica.

[006364]

Ejercicio 6948

Sea $E = \mathbb{R}^n$ y $t \to A(t)$, $t \to B(t)$ dos aplicaciones de J en $\mathscr{L}(E)$, donde $J =]\alpha, +\infty[$. Se consideran las dos ecuaciones
$$(1)\ \ x' = A(t) \cdot x \qquad\qquad (2)\ \ x' = \big(A(t) + B(t)\big) \cdot x,$$
y $a \in J$. Se denota $R(t,a)$ la resolvente de (1) tal que $R(a,a) = I_E$.

1. Si y es una solución de (2), demostrar que la función z definida por $y(t) = R(t,a) \cdot z(t)$ es la solución de una ecuación de la forma $\quad (3) \quad z' = C(t) \cdot z$, donde $C(t) = R(a,t)B(t)R(t,a)$.
2. Se supone que $||R(t,s)|| \leqslant k$, para todo $t, s \in J$, donde k es una constante y que $||B(t)|| \leqslant \varepsilon(t)$, donde ε es continua en J. Demostrar que $||C(t)|| \leqslant k^2 \varepsilon(t)$.
3. Se supone además que $\int_a^\infty \varepsilon(t)\, dt$ converge. Demostrar (usando Gronwall) que si z es tal que $z(a) \neq 0$, $||z(t)||$ es uniformemente acotada en $[a, +\infty[$, ya que z tiene un límite cuando $t \to +\infty$.

Ejercicio 6949

Sea $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ una aplicación acotada y sea φ la solución maximal del problema

$$x'(t) = f(t,x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

que se supone definido en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. (Recordar por qué existe tal solución). Demostrar que φ se define en todo $I = \mathbb{R}$.
(Indicación : suponer $\beta = \sup\{t\ ;\ t \in I\} < \infty$. Establecer que φ es acotada en $[t_0,\beta[$ y que $\lim_{t\to\beta}\varphi(t)$ existe. Concluir). [006366]

Ejercicio 6950

Sea f una aplicación C^1 y acotada de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0, x_0' \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el problema

$$x''(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0'$$

admite una única solución maximal establecida en $\mathbb{R}$.
Ejemplo : $x'' + \operatorname{sen}(x) = 0$, la ecuación del péndulo simple. [006367]

Ejercicio 6951

Sea $a > 0$ y sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 verificando

$$|\langle x, f(t,x)\rangle| \leqslant a\langle x,x\rangle, \quad \text{para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Sea φ una solución de la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$ que se supone definido en el intervalo I.

1. Se define $N(t) = \langle\varphi(t),\varphi(t)\rangle$. Demostrar que la aplicación N es derivable en I, calcular su derivada y demostrar que verifica $|N'(t)| \leqslant 2aN(t)$.
2. Sean t y t_0 dos puntos de I. Comparar $N(t)$ y $N(t_0)$.
3. Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación diferencial en consideración están definidas en $\mathbb{R}$.
4. Demostrar que las soluciones maximales del sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) + t x_2(t) + x_2^2(t) \\ x_2'(t) &= -t x_1(t) + x_2(t) - x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

   están definidas en $\mathbb{R}$.

[006368]

Ejercicio 6952

Sea $W = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\,\}$ y $\Omega = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\,\}$. Se quiere estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{2y}{x} \end{cases} \qquad (^*)$$

1. Para cada condición inicial $(x_0,y_0)\in W$, encontrar la solución $(x(t),y(t))$ en un intervalo maximal I del sistema $(^*)$ (precisar I). Trazar algunas curvas integrales en W, para condiciones iniciales variadas en W.
2. Para cada condición inicial $(x_0,y_0)\in \Omega$, encontrar la solución $(x(t),y(t))$ en un intervalo maximal I del sistema $(^*)$ (precisar I). Trazar algunas curvas integrales en Ω, para condiciones iniciales variadas en Ω.
3. Encontrar todas las curvas $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de clase C^1 verificando $\gamma(0)=(-1,1)$ y tales que γ es solución de $(^*)$ en todas partes donde $\gamma(t)$ pertenece a Ω.
4. La misma pregunta para las curvas γ de clase C^2.
5. La misma pregunta para las curvas γ de clase C^3.

[006810]

295 400.00 Tribu, función medible

Ejercicio 6953

Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos :

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\,]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}[\qquad \text{y}\qquad]a,b[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$$

Solución ▼ [005933]

Ejercicio 6954

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida y $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una función $(\Sigma$–$\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible. Demostrar que el truncamiento f_A de f definida por :

$$f_A(x)=\begin{cases} -A & \text{si} \quad f(x)<-A\\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)|\leqslant A\\ A & \text{si} \quad f(x)>A\end{cases}$$

es $(\Sigma$–$\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible.

Solución ▼ [005934]

Ejercicio 6955

Sea $\Omega=\mathbb{N}$, $\Sigma=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo en $\mathbb{N}$ definida por :

$$\mu(E)=\#E=\sum_{k\in E}1,$$

donde $E\in\Sigma$. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una función positiva o nula. Demostrar que f es $(\Sigma$–$\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible y que :

$$\int_\Omega f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

Solución ▼ [005935]

Ejercicio 6956

Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Se dice que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es una *función simple* o *escalonada* si φ es medible y solo toma un número finito de valores, i.e. si φ se escribe :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

donde J es un conjunto finito, los conjuntos E_j son medibles y donde, para $i \neq j$, $c_i \neq c_j$ y $E_i \cap E_j = \varnothing$. Sea φ una función simple positiva. Se recuerda que la integral de φ, con respecto a una medida μ es definida por :

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_0^\infty \mu\left(S_\varphi(t)\right) dt,$$

donde $S_\varphi(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$.

1. Demostrar que

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Demostrar que para toda función real medible positiva, $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples positivas tales que :
   (a) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Solución ▼ [005936]

Ejercicio 6957

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f es una función real medible positiva). Para todo $E \in \Sigma$, se establece :

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \cdot f \, d\mu.$$

Demostrar que λ define una medida sobre (Ω, Σ).

Solución ▼ [005937]

Ejercicio 6958

Sea $p > 0$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la función definida por

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

Calcular la integral de f, con respecto a la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de dos maneras diferentes :

(i) Usando coordenadas polares y los métodos estándar de cálculo de integrales.

(ii) Calculando la medida de conjuntos $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ y la definición de la integral de Lebesgue.

Solución ▼ [005938]

296 401.00 Medida

Ejercicio 6959

Demostrar que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra si y solo si $\mathscr{A}$ es un álgebra y una clase monótona.

Solución ▼ [005926]

Ejercicio 6960

Sea (Ω,Σ) un espacio medible (i.e. un conjunto Ω dotado de una tribu $\Sigma\subset\mathscr{P}(\Omega)$). Sea μ una medida finita en (Ω,Σ). Demostrar que las propiedades siguientes : $(A,B,A_i$ son los elementos de $\Sigma)$

1. Si $A_1,A_2,\dots,A_k$ son dos a dos disjuntos, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i).$$
2. Si $B\subset A$, entonces $\mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(B)$.
3. *Monotonía :* Si $B\subset A$, entonces $\mu(B)\leqslant\mu(A)$.
4. *Principio de inclusión-exclusión :* $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)$.
5. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)$. *(Recordar que se tiene igualdad si la unión es disjunta.)*

Solución ▼ [005927]

297 402.00 Lema de Fatou, convergencia monótona

Ejercicio 6961

1. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Demostrar que
$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty}g_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$
2. Demostrar que
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,dx=\Gamma(s)\zeta(s),$$
donde Γ es la función de Euler y donde $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-s}$. (Se puede considerar las funciones $g_n(x)=x^{s-1}\mathrm{e}^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$.)

Solución ▼ [005939]

Ejercicio 6962

Sea $\Omega=\mathbb{R}$, $\Sigma=\mathscr{B}(\mathbb{R})$ y μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Si se escribe $f_n=\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n\in\mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente hacia $f=\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Aunque las funciones f_n son uniformemente acotadas por 1 y que las integrales de los f_n son finitas, se tiene :
$$\int_\Omega f\,d\mu=+\infty.$$

¿El teorema de convergencia monótona se aplica en este caso ?

Solución ▼ [005940]

Ejercicio 6963

Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ y μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Si se escribe $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y converge uniformemente a 0, pero

$$0 = \int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu = +\infty.$$

¿Contradice el teorema de convergencia monótona ?

Solución ▼ [005941]

Ejercicio 6964

Sea $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f = 0$. Demostrar que f_n converge uniformemente a f, pero que

$$\int_\Omega f\,d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\,d\mu$$

¿Contradice el teorema de convergencia monótona ?

Solución ▼ [005942]

Ejercicio 6965

Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ y μ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Sea $f_n = -\frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f = 0$. Demostrar que f_n converge uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$, pero que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu < \int_\Omega f\,d\mu.$$

¿Contradice el lema de Fatou ?

Solución ▼ [005943]

Ejercicio 6966

1. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es una sucesión creciente y
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
2. Calcular el límite
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx}\,d\lambda(x)$$
donde $b > 1$.

Solución ▼ [005950]

Ejercicio 6967

Sea $f \in \mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ tal que $\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$. Demostrar que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

Se puede considerar las funciones $f_n = n\mathbf{1}_{\{f \geqslant n\}}$.

Solución ▼ [005944]

Ejercicio 6968

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida con $\mu(\Omega) < +\infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que convergen casi en todas partes a una función medible f. Se supone que existe una constante $C > 0$ tal que $|f_n| \leqslant C$, para todo $n \geqslant 1$. Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Solución ▼ [005945]

Ejercicio 6969

Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. ¿Cuánto vale el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x)\ ?$$

Solución ▼ [005946]

Ejercicio 6970

Se recuerda que una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ se dice integrable si $f_+ := \max\{f,0\}$ y $f_- = \max\{-f,0\}$ verifican $\int_\Omega f_+\,d\mu < +\infty$ y $\int_\Omega f_-\,d\mu < +\infty$. Se denota $\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ el conjunto de funciones reales integrables. Para $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$, se establece

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu.$$

1. Demostrar la equivalencia

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$$

y

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu. \tag{9}$$

2. Demostrar que si f es medible, g integrable y $|f| \leqslant |g|$, entonces f es integrable y

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \leqslant \int_\Omega |g|\,d\mu.$$

3. Se recuerda que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice integrable si la parte real $\mathrm{Re} f$ y la parte imaginaria $\mathrm{Im} f$ de f son integrables. Se define así

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int_\Omega \mathrm{Im} f\,d\mu.$$

Demostrar que la desigualdad (9) es verificada.

Solución ▼ [005947]

Ejercicio 6971

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que f_n converge a f *en medida* si para todo ε,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in \Omega,\ |f_n(x) - f(x)|\ > \varepsilon\}\ = 0.$$

Demostrar que si $f_n \to f$ en medida, entonces existe una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a f μ-casi en todas partes.

Solución ▼ [005948]

Ejercicio 6972

Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea integrable en el sentido de Lebesgue pero no en el sentido de Riemann.

Solución ▼ [005949]

Ejercicio 6973

Demostrar que

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m dx = m!$ (para todo $m \in \mathbf{N}$).
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} dx = 1.$

Solución ▼ [005951]

Ejercicio 6974

Demostrar el teorema siguiente, Ω es un espacio medible. (Se puede utilizar el teorema de incrementos finitos.)

Teorema. (Derivación bajo el signo de $\int$)

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función tal que :

(i) para todo $s \in [s_1, s_2]$, la función $x \mapsto f(x,s)$ es integrable ;

(ii) para casi todo x, la función $s \mapsto f(x,s)$ es derivable en (s_1, s_2) ;

(ii) existe $g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tal que para todo $s \in [s_1, s_2]$ y para casi todo $x \in \Omega$ se tiene $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \leqslant g(x)$.

Entonces la función $I(s) := \displaystyle\int_\Omega f(x,s)\,d\mu(x)$ es derivable en (s_1, s_2) y

$$\frac{dI}{ds} = \int_\Omega \frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,d\mu(x).$$

Solución ▼ [005952]

Ejercicio 6975

Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. La *transformada de Fourier* es la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy} f(x) dx.$$

Demostrar que

1. $\hat{f}$ es continua,
2. $\hat{f}$ es acotada y $\sup |\hat{f}| \leqslant \|f\|_{L^1}$ $\left(= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx\right)$,
3. Si $x \to x f(x)$ es integrable, entonces $\hat{f}$ es derivable y se tiene

$$\frac{d}{dy} \hat{f} = -\widehat{ixf(x)}.$$

Solución ▼ [005953]

299 404.00 Integrales múltiples, teorema de Fubini

Ejercicio 6976

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dx \right) dy \neq \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dy \right) dx.$$

¿Contradice el teorema de Fubini ? (Se puede calcular la integral de $|f|$ sobre el anillo $S_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.)

Solución ▼ [005957]

Ejercicio 6977

Demostrar que la función $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-y} \operatorname{sen} 2xy$ es integrable para la medida de Lebesgue sobre $[0,1] \times (0,+\infty)$; deducir el valor de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} (\operatorname{sen} y)^2 \mathrm{e}^{-y} dy.$$

Solución ▼ [005958]

Ejercicio 6978

Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, donde $\mathbb{R}^n$ es dotado de la medida Lebesgue. Demostrar que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ y que el *producto de convolución* de f y g definido por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

verifica $f * g(x) = g * f(x)$ y

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

Solución ▼ [005959]

Ejercicio 6979

Sean $a,b>0$, y f y g las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ por $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ y $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calcular $f*g(x)$.

Solución ▼ [005960]

Ejercicio 6980

1. Para todo $t>0$, se establece :
$$f_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$
   (a) Demostrar que, para todo $t>0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx=1$.

   (b) Demostrar que, para todo $\delta>0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\{|x|>\delta\}} f_t(x)\,dx=0$.

   (Se dice que f_t es una *aproximación de la distribución de Dirac*.)
2. Sea g una función continua acotada. Demostrar que f_t*g está bien definida y que
$$\lim_{t\to 0} f_t*g(x)=g(x).$$

Solución ▼ [005961]

Ejercicio 6981

Sean $f,g\in L^1(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Se denota $\hat{f}$ la transformada de Fourier definida por
$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$
donde $(\cdot,\cdot)$ designa el producto escalar de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\,dx$.
2. $\widehat{f*g}=\hat{f}\,\hat{g}$.

Solución ▼ [005962]

Ejercicio 6982

Calcular la transformada de Fourier de la gaussiana definida, para $x\in\mathbb{R}^n$, por $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, donde $a>0$.

Solución ▼ [005963]

300 405.00 Integral dependiendo de un parámetro

301 406.00 Espacio Lp

Ejercicio 6983

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in]0,1]$. Se recuerda que se denota $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones g de clase C^k sobre $\mathbb{R}$, cuyo la k-ésima derivada es hölderiana, es decir verifica

$$\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}.$$

(En particular, si $\alpha = 1$, estas son las funciones de k-ésima derivada lipschitziana.)

— Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, con soporte compacto, y $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. Demostrar que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$. Deducir que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$.

— Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, con cualquier soporte, y $g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ *acotada*. Demostrar que $f * g \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ y es acotada. Deducir que si $g \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$, acotada así como todas sus derivadas, entonces $f * g$ también.

Solución ▼ [002692]

Ejercicio 6984

1. Sea $a, b \geqslant 0$ y sea $p, q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(se dice que p y q son conjugados en el sentido de Young)*. Demostrar la desigualdad de Young :
$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
Se puede considerar la función $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.
2. Sea de nuevo $p, q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. Utilizando la pregunta precedente, demostrar que para todo $\lambda > 0$
$$\int_{\Omega} |fg|\, d\mu \leqslant \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p\, d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q\, d\mu.$$
Optimizar esta desigualdad con respecto a λ y demostrar la desigualdad de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$
¿Esta desigualdad es cierta para $p = 1$ y $q = +\infty$?
3. Sean p y p' en $[1, +\infty[$ (no necesariamente conjugados). Demostrar que si f pertenece a $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, entonces f pertenece a $L^r(\mu)$, para todo r comprendido entre p y p'.
4. Demostrar que si μ es una medida finita entonces
$$L^{\infty}(\mu) \subset \bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\mu),$$
y, para todo f,
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$
5. Demostrar que si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, entonces $f \cdot g \in L^r(\mu)$ y
$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Solución ▼ [005954]

Ejercicio 6985

Teorema 1. (Teorema de Riesz)
Para todo $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, el espacio $L^p(\mu)$ es completo.

Teorema 2. Sea p tal que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ convergiendo a una función $f \in L^p(\mu)$. Entonces existe una sub-sucesión de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente casi-en todas partes hacia f.

El propósito de este ejercicio es de demostrar los teoremas 1 y 2.

1. *Caso de $L^\infty(\mu)$.*
   (a) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Para $k,m,n \geqslant 1$, se considera los conjuntos
   $$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}; \qquad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}.$$
   Demostrar que $E := \bigcup\limits_k A_k \bigcup\limits_{n,m} B_{m,n}$ es de medida nula.
   (b) Demostrar que en el complemento a E, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f.
   (c) Deducir que $L^\infty(\mu)$ es completo.
2. *Caso de $L^p(\mu)$.*
   (a) Sea $1 \leqslant p < +\infty$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Demostrar que existe una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leqslant 2^{-k}$.
   (b) Se define
   $$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{y} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$
   donde g tiene valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Demostrar que para todo $k \geqslant 1$, se tiene $\|g_k\|_p < 1$, ya que $\|g\|_p \leqslant 1$.
   (c) Deducir que la serie
   $$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$
   es absolutamente convergente para casi todo $x \in \Omega$. Denotemos $f(x)$ su suma cuando es finita y pongamos $f(x) = 0$ si no. Verificar que f es el límite puntual de las $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, para casi todo $x \in \Omega$.
   (d) Demostrar que $f - f_m \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ y que $\|f - f_m\|_p \to 0$, cuando $m \to +\infty$. Concluir.

Solución ▼ [005955]

Ejercicio 6986

Sean f y g dos funciones de $L^p(\mu)$, con $1 < p < +\infty$. Demostrar que la función $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + t \cdot g(x)|^p \, d\mu$$
es diferenciable y que su derivada en $t = 0$ es dada por :
$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu,$$

donde por convención $|f(x)|^{p-2}f(x)=0$, cuando $f=0$.

Solución ▼ [005956]

Ejercicio 6987

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyo medida de Lebesgue es *finita* : $\mu(\Omega)<+\infty$. Para todo $1\leqslant p<+\infty$, se denota $L^p(\Omega)$ el espacio de funciones $f:\Omega\to\mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ módulo la equivalencia $f\sim g \Leftrightarrow f-g=0$ μ–c.p.d. El espacio de funciones esencialmente acotadas es denotado $L^\infty(\Omega)$.

1. Demostrar que si $q\leqslant p$, entonces $L^p(\Omega)\subset L^q(\Omega)$. En particular, para $1<q<2<p$, se tiene :
$$L^\infty(\Omega)\subset L^p(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset L^q(\Omega)\subset L^1(\Omega).$$
2. Sea $\mathscr{B}^n(0,1)$ la bola unidad centrada en 0 de $\mathbb{R}^n$. Considerando las funciones
$$f_\alpha(x)=|x|^{-\alpha},$$
demostrar solo para $q<p$, la inclusión $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))\subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ es estricta.

Solución ▼ [005964]

Ejercicio 6988

Sea $\Omega=\mathbb{N}$ provisto de la medida de conteo. Para todo $1\leqslant p<+\infty$, se denota ℓ^p el espacio de las sucesiones complejas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. El espacio de las sucesiones acotadas es denotado ℓ^∞.

1. Demostrar que si $q\leqslant p$, entonces $\ell^q\subset\ell^p$. En particular, para $1<q<2<p$, se tiene :
$$\ell^1\subset\ell^q\subset\ell^2\subset\ell^p\subset\ell^\infty.$$
2. Considerando las sucesiones $u_n^{(\alpha)}=n^{-\alpha}$, demostrar que para $q<p$, la inclusión $\ell^q\subset\ell^p$ es estricta.

Solución ▼ [005965]

Ejercicio 6989

Sea $\Omega=\mathbb{R}^n$ dotado de la medida Lebesgue. Para todo $1\leqslant p<+\infty$, se denota $L^p(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ módulo la equivalencia $f\sim g\Leftrightarrow f-g=0$ μ–c.p.d. El espacio de funciones esencialmente acotadas es denotado $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. — ¿Para qué valor de α la función $x\mapsto \dfrac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   — ¿Para qué valor de β la función $x\mapsto \dfrac{1}{|x|^\beta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   — Sea $1\leqslant q<p\leqslant+\infty$. Utilizando (a) y (b), encontrar una función f que pertenece a $L^q(\mathbb{R}^n)$, pero no a $L^p(\mathbb{R}^n)$ y una función g que pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$, pero no a $L^q(\mathbb{R}^n)$.
2. — Sea $1\leqslant q<p<+\infty$. Demostrar que el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach para la norma $\|\cdot\|_{p,q}=\|\cdot\|_p+\|\cdot\|_q$.

— Sea r tal que $q < r < p$. Demostrar que

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Se puede escribir $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ y usar la desigualdad de Hölder para un par real conjugados bien elegido.

— Deducir que si f_n converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces f_n converge a f en $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Sea $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$, con $1 \leqslant q < 2 < p$. Demostrar que la función h definida por $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ pertenece a $L^1([0,+\infty[)$ y encontrar constantes $C_{p,q}$ y γ tales que $\|h\|_1 \leqslant C_{p,q} \|f\|_q^{\gamma} \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Solución ▼ [005966]

Ejercicio 6990

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definidas por :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Demostrar que f_n converge débilmente hacia 0 en $L^2([0,+\infty[)$, pero no converge fuertemente en $L^2([0,+\infty[)$.
2. Demostrar que f_n converge fuertemente hacia 0 en $L^p([0,+\infty[)$, para $p > 2$.

Solución ▼ [005967]

Ejercicio 6991

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definidas por :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\, \mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Demostrar que f_n converge débilmente hacia 0 en $L^2([0,+\infty[)$, pero no converge fuertemente en $L^2([0,+\infty[)$.
2. Demostrar que f_n converge fuertemente hacia 0 en $L^p([0,+\infty[)$, para $p < 2$.

Solución ▼ [005968]

---

302 407.00 Transformada de Fourier

Ejercicio 6992

El propósito de este ejercicio es de demostrar el teorema de Plancherel.
Definición. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se denota $\hat{f}$ la transformada de Fourier definida por

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i (y,x)}\, dx,$$

donde $(\cdot,\cdot)$ designa el producto escalar de $\mathbb{R}^n$.

Teorema de Plancherel. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Demostrar que $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.
2. Demostrar que la función $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 \,\mathrm{e}^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Demostrar que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x)f(y)\mathrm{e}^{2\pi i(k,x-y)}\mathrm{e}^{-\varepsilon\pi|k|^2}\,dx\,dy\,dk.$$
4. Sabiendo que la transformada de Fourier de la gaussiana $h_\varepsilon(x) = \mathrm{e}^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$) es dada por $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, demostrar que
$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}}\bar{f}(x)f(y)\,dx\,dy.$$
5. Sea $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la familia de funciones definidas por :
$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}}\bar{f}(x)\,dx.$$
¿Cuál es el límite en $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε, cuando ε tiende a 0 ?
6. Demostrar que
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^n}(\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon)f(y)\,dy.$$
7. Demostrar que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. Deducir que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Solución ▼ [005977]

Ejercicio 6993

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función radial, i.e. tal que $f(x) = h(r)$, donde $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $r = |x|$ y $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Demostrar que la transformada de Fourier $\hat{f}$ de f se escribe :
$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r)r\,\mathrm{sen}(2\pi|k|r)\,dr.$$

Solución ▼ [005978]

303 408.00 Otro

Ejercicio 6994

El propósito de este ejercicio es de demostrar el Teorema de Carathéodory.

Definición. Una medida exterior en un conjunto Ω es una aplicación $m_* : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ tal que

(i) $m_*(\varnothing) = 0$;

(ii) (monotonía) $A \subset B \Rightarrow m_*(A) \leqslant m_*(B)$;

(iii) (σ-sub-aditividad) Para toda sucesión de conjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ se tiene
$$m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_*(A_i).$$

Teorema de Carathéodory Sea m_* una medida exterior sobre Ω. Un conjunto $A \subset \Omega$ se dice m_*-medible si para todo $Q \subset \Omega$ se tiene

$$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap A) + m_*(Q \cap A^c).$$

Denotemos $\mathscr{M}_{m_*} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ el conjunto de partes m_*-medibles. Entonces

1. $\mathscr{M}_{m_*}$ es una σ-álgebra.
2. $m = m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}}$ es una medida en $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*})$.
3. El espacio de medida $(\Omega, \mathscr{M}_{m_*}, m)$ es completo, i.e. si $E \in \mathscr{M}_{m_*}$ y $m(E) = 0$, entonces todo subconjunto $A \subset E$ pertenece a $\mathscr{M}_{m_*}$.

Inicio del ejercicio :

1. (a) Recordar la definición de una σ-álgebra.
   (b) Verificar que $\varnothing$ y $\Omega \in \mathscr{M}_{m_*}$, y $A \in \mathscr{M}_{m_*} \Rightarrow A^c \in \mathscr{M}_{m_*}$.
   (c) Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión cualquiera de conjuntos m_*-medibles. Se define $B_1 = \varnothing$, $B_2 = A_1$ y $B_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$, para $j \geqslant 2$. Sea Q un subconjunto de Ω. Demostrar por inducción que la afirmación (P_k) siguiente se verifica para todo $k \geqslant 1$:

   $$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

   (d) Sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, deducir de la pregunta precedente que

   $$m_*(Q) \geqslant m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

   (e) Notando que $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)$, demostrar :

   $$m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) \leqslant m_*(Q),$$

   y concluir.
2. (a) Recordar la definición de una medida.
   (b) Utilizando la pregunta 1.d), demostrar la σ-aditividad de m.
3. Demostrar que m es completo.

Solución ▼ [005928]

Ejercicio 6995

Se define la medida exterior de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, $m_* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, por la fórmula

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i-1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}.$$

Demostrar que se trata bien de una medida exterior.

Solución ▼ [005929]

Ejercicio 6996

Se define $m_* : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$m_*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing \\ 1 & \text{si no.} \end{cases}$$

1. Demostrar que m_* es una medida exterior.
2. ¿Cuáles son conjuntos m_*-medibles ?
3. Verificar el teorema de Carathéodory sobre este ejemplo.

Solución ▼ [005930]

Ejercicio 6997

1. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$.

   Indicación : Se puede primeramente calcular $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ pasando a coordenadas polares.

2. *Cálculo del área de la esfera unitaria de* $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathscr{S}_{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$ la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$. Se denota $\mathscr{A}_{n-1}$ su área. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\, dx_1 \ldots dx_n$$

   en función de $\mathscr{A}_{n-1}$. Deducir la expresión de $\mathscr{A}_{n-1}$ en función de la función Γ :

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

3. *Cálculo del volumen de la bola unidad de* $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathscr{B}_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$ la bola cerrada radio 1 en $\mathbb{R}^n$. Se denota $\mathscr{V}_n$ su volumen. Demostrar que $\mathscr{V}_n = \frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}$. Deducir que :

$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

4. *Aplicación :* ¿Cuál es el área de la esfera de radio R en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$? ¿Cuál es el volumen de la bola de radio R en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$?

Solución ▼ [005931]

Ejercicio 6998

Este ejercicio proporciona otro método de cálculo del volumen de la bola unidad $\mathscr{B}_n$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y del área de la esfera* $\mathscr{S}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Se conserva las notaciones del ejercicio anterior.

1. Demostrar que $\mathscr{V}_n = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}$, donde $I_n = \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^n\, d\theta$.

2. Verificar que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. Calcular $\mathscr{V}_n$, para $n = 1, 2, \ldots, 7$.
4. Calcular $\mathscr{A}_{n-1}$, para $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Solución ▼ [005932]

Ejercicio 6999

Definición Se dice que un espacio métrico E es *separable* si existe un subconjunto $\mathscr{F} \subset E$ numerable y denso.

Teorema El espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ es separable para $1 \leqslant p < +\infty$.

El objetivo de este ejercicio es de demostrar este teorema.

1. Para $j = 1, 2, 3, \ldots$ y $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, se consideran los cubos
$$\Gamma_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ 2^{-j} m_i < x_i \leqslant 2^{-j}(m_i + 1),\ i = 1, \ldots, n\}.$$
Demostrar que para todo $j \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.
2. Para $j \in \mathbb{N}^*$, se considera el conjunto $\mathscr{F}_j$ de funciones φ de la forma :
$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbf{1}_{\Gamma_{j,m}},$$
donde las constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ y son nulas excepto un número finito. Demostrar que el conjunto
$$\mathscr{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j$$
es numerable.
3. El propósito de esta pregunta es demostrar que toda función continua con soporte compacto puede ser aproximada módulo un ε en norma L^p por un elemento de la familia $\mathscr{F}$. Sea $\tilde{f}$ una función continua con soporte compacto y sea $\varepsilon > 0$ fijo.
— Demostrar que para todo $\varepsilon' > 0$, existe $j \in \mathbb{N}^*$, tal que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
$$x, y \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon'.$$
— Sea $\varepsilon' > 0$ fijo y j como en la pregunta precedente. Se considera la función $\tilde{f}_j$ definida por :
$$\tilde{f}_j(x) = 2^{nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \tilde{f}(y)\, dy, \quad \text{cuando } x \in \Gamma_{j,m},$$
i.e. el valor de $\tilde{f}_j$ en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es el valor medio de la función $\tilde{f}$ en el cubo $\Gamma_{j,m}$ de lado 2^{-j} que contiene x. Demostrar que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
$$x \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)| < \varepsilon',$$
y deducir que
$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\|_p < \text{Volume}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'$$
donde γ es un cubo de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n, -2^J \leqslant x_i \leqslant 2^J\}$ fuera del cual $\tilde{f}$ es nula.

— Deducir que existe $f_j \in \mathscr{F}_j$ tal que $\|\tilde{f} - f_j\|_p < \varepsilon$. (Se recuerda que los elementos de $\mathscr{F}_j$ solo toman valores racionales.)

4. Demostrar que toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, puede ser aproximada con un error ε en norma L^p por un elemento de la familia $\mathscr{F}$. Concluir.

Solución ▼ [005969]

Ejercicio 7000

Teorema. El espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es separable.
El objetivo de este ejercicio es de demostrar este teorema.

1. Sea E un espacio de Banach. Se supone que existe una familia $(O_i)_{i \in I}$ tal que
   — Para todo $i \in I$, O_i es un abierto no vacío de E.
   — $O_i \cap O_j = \varnothing$ si $i \neq j$.
   — I no es numerable.
   Demostrar que E no es separable. (Se puede razonar por contradicción).
2. Para todo $a \in \mathbb{R}^n$, se establece $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$, donde $\mathscr{B}(a,1)$ es la bola de $\mathbb{R}^n$ radio 1 centrada en a. Demostrar que la familia
$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \tfrac{1}{2}\},$$
   donde a recorre los puntos de $\mathbb{R}^n$, satisface 1. y 2. Concluir.

Solución ▼ [005970]

Ejercicio 7001

Definición. Sean μ y ν dos medidas en un espacio de medida (Ω, Σ). Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ y se escribe $\nu \ll \mu$ si
$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$
para todo $S \in \Sigma$.

Teorema de Radon-Nikodym. Sean μ y ν dos medidas finitas en un espacio de medida (Ω, Σ). Si ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe una función positiva $h \in L^1(\Omega, \mu)$ tal que para toda función positiva medible F se tiene :
$$\int_\Omega F(x)\, d\nu(x) = \int_\Omega F(x) h(x)\, d\mu(x). \tag{10}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar este teorema de Radon-Nikodym.

1. Se define
$$\alpha = \mu + 2\nu, \qquad \omega = 2\mu + \nu.$$
   Se considera el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida α y la aplicación lineal $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ dada por :
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\, d\omega(x).$$
   Demostrar que $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ es una aplicación lineal continua.

2. Deducir que existe $g \in L^2(\Omega,\alpha)$ tal que para todo $f \in L^2(\Omega,\alpha)$:

$$\int_\Omega f(2g-1)\,d\nu = \int_\Omega f(2-g)\,d\mu.$$

3. Demostrar que los conjuntos $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ y $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$, donde $l \in \mathbb{N}^*$ verifican $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. Deducir que se puede elegir la función g de tal manera que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. Demostrar que el conjunto $Z = \{x \in \Omega : g(x) = \frac{1}{2}\}$ es de μ-medida 0.
4. Demostrar que la función

$$h(x) = \frac{2-g(x)}{2g(x)-1}$$

está bien definida, positiva, pertenece a $L^1(\Omega,\mu)$ y satisface (10).

Solución ▼ [005971]

Ejercicio 7002

1. Se define la función Beta por $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$, demostrar que

$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1}dr$$

2. Demostrar que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
3. Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\,dx$ en función de la función Beta.

Solución ▼ [005972]

Ejercicio 7003 Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$

Sea Ω' el abierto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Omega' = \{(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r,\ 0 < \theta_1,\ldots,\theta_{n-2} < \pi,\ 0 < \theta_{n-1} < 2\pi\}.$$

Sea la aplicación S de Ω' en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_2 &= r\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2,\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= r\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\\
x_{n-1} &= r\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cdots\mathrm{sen}\,\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
x_n &= r\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cdots\mathrm{sen}\,\theta_{n-2}\,\mathrm{sen}\,\theta_{n-1},
\end{aligned}$$

donde $(x_1,\ldots,x_n)$ son las coordenadas cartesianas de $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Sea $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ y } x_{n-1} \geqslant 0\}$. Demostrar que Ω es una parte abierta de $\mathbb{R}^n$ cuyo complemento tiene medida cero, y que S es un difeomorfismo de Ω' sobre Ω.

2. Sea f una función de Borel positiva en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\,r^{n-1}\operatorname{sen}^{n-2}\theta_1\,\operatorname{sen}^{n-3}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}\\ &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\,r^{n-1}\,dr\,d\sigma,\end{aligned}$$

donde $d\sigma$ es la medida uniforme en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$.

3. Usando coordenadas esféricas, calcular el volumen $\mathscr{V}_4$ de la bola unidad de $\mathbb{R}^4$ y el área $\mathscr{A}_3$ de la esfera unitaria $\mathscr{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

Solución ▼ [005973]

Ejercicio 7004 Teorema de Newton

Sea g una función en $\mathbb{R}^+$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=g(|x|)$, donde $|x|$ denota la norma de x en $\mathbb{R}^3$.

1. Demostrar que para $r=|x|$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy = 4\pi\frac{1}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

2. ¿Qué se puede deducir de una distribución de masa $f(x)=g(|x|)$, cuando g es a soporte en $[0,R]$?

Solución ▼ [005974]

Ejercicio 7005

Sea $x\in\mathbb{R}^d$, $d=1,2$ y $r=|x|$. Se considera $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. Calcular para $d=1$ el reordenamiento con simetría esférica decreciente f^* de f.
2. La misma pregunta para $d=2$.
3. Calcular $\|f\|_2^2$, para $d=1$, luego $d=2$.

Solución ▼ [005975]

Ejercicio 7006

Sea $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2+ax}$, donde $a\in\mathbb{R}$. Calcular el reordenamiento con simetría esférica decreciente f^* de f.

Solución ▼ [005976]

Ejercicio 7007

Definición. Sea $h\in\mathbb{R}^n$. Se define el operador de traslación por h, denotado τ_h, actuando sobre una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ por $\tau_h f(x) := f(x-h)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Teorema. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1\leqslant p<+\infty$, entonces $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tiende a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$, cuando h tiende a 0.

El objetivo de este ejercicio es demostrar este teorema. Sea $1\leqslant p<+\infty$.

1. Demostrar que si f es continua con soporte compacto en la bola $\mathscr{B}(0,M)$ centrada en 0 y de radio M, y si $|h| \leqslant 1$, entonces
$$|f(x-h)-f(x)|^p \leqslant \mathbf{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p,$$
donde $\mathscr{B}(0,M+1)$ es la bola centrada en 0 radio $M+1$.
2. Deducir que para f continua con soporte compacto, se tiene
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
3. Demostrar el teorema para una función cualquiera en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$.
4. ¿Qué pasa para $p=\infty$?

Solución ▼ [005979]

Ejercicio 7008

Teorema Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ tales que :

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$

(ii) existe una constante $K>0$ tal que $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx \leqslant K$

(iii) Para todo $\varepsilon>0$, se tiene $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} |\varphi_n(x)|\,dx = 0.$

Entonces, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0.$

El objetivo de este ejercicio es de demostrar este teorema. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones verificando las hipótesis (i), (ii) y (iii) del teorema, y sea $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Denotando q el exponente conjugado de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), y usando la desigualdad de Hölder para la medida $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, demostrar que
$$|\varphi_n * f - f|^p(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p |\varphi_n|(y)\,dy\right).$$
2. Deducir que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy.$$
3. Sea $\delta>0$, demostrar que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leqslant\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy\right).$$
4. Deducir el teorema buscado.

Solución ▼ [005980]

Ejercicio 7009

Sea f una función en $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0<\alpha<n$. Se define $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. Utilizando la identidad
$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi|k|^2\lambda} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda,$$

demostrar que

$$c_\alpha \left(|k|^{-\alpha}\hat{f}(k)\right)^\vee(x) = c_{n-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)dy,$$

donde la notación $h^\vee$ denota la transformada de Fourier inversa de una función h dada por $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.

Solución ▼ [005981]

304 420.00 Espacio topológico, espacio métrico

Ejercicio 7010

Sea (E,d) un espacio métrico. Sea $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, estrictamente creciente, verificando :

$$f(0)=0 \text{ y } \forall\ (u,v)\in\ \mathbb{R}_+^2,\ f(u+v)\leqslant f(u)+f(v).$$

1. Demostrar que $d'(x,y)=\sqrt{d(x,y)}$ es una distancia en E. Indicar condiciones suficientes sobre una función f, definida de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}_+$, para que $(x,y)\longrightarrow f(d(x,y))$ sea una distancia en E.
2. Demostrar que la aplicación d'' definida en $E\times E$ por $d''(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es una distancia en E.
   Indicación : Se utiliza el crecimiento de la función $u\longrightarrow \dfrac{u}{1+u}$.
3. Comparar las distancias d y d''.
4. En el caso que E es el conjunto de los números reales y donde d es la distancia valor absoluto, construir $B_{d''}(0,a)$, donde a es un real.

[001867]

Ejercicio 7011

Sea (E,d) un espacio métrico completo, y f una aplicación de E en E tal que existe $k\in\mathbb{R}$, $0<k<1$ tal que $d(f(x),f(y))\leqslant k\,d(x,y)$, $\forall x\in E$, $\forall y\in E$.

1. Demostrar que f es continua en (E,d).
2. Sean $x_0\in E$ y para $n\geqslant 0$, $x_{n+1}=f(x_n)$. Demostrar que la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 0}$ es de Cauchy en (E,d).
3. Demostrar que esta sucesión converge a un punto fijo de f, es decir una solución de $f(l)=l$. Demostrar que este punto fijo es único.
4. Aplicación : Demostrar que el sistema $\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{5}(2\operatorname{sen}x_1+\cos x_2)\\ x_2 &= \frac{1}{5}(\cos x_1+3\operatorname{sen}x_2)\end{cases}$ admite una solución única $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

[001868]

Ejercicio 7012

1. Recordar las definiciones de una cota superior (inferior) de un conjunto de números reales. Si A y B son dos conjuntos acotados no vacíos de $\mathbb{R}$, comparar con $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ y $\inf B$ los siguientes números :
   (i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.
2. Para $x\in\mathbb{R}^n$ y $A\subset\mathbb{R}^n$ se define $d(x,A)=\inf\limits_{a\in A}||x-a||$. Encontrar $d(0,\mathbb{R}-\mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$, $d(M,\mathscr{D})$, donde $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y $\mathscr{D}$ es la recta del vector unitario (a,b,c).

3. Para $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define $d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} ||a-b||$. Encontrar $d(A,B)$, cuando A es una rama de la hipérbola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ y B una asíntota.
4. Se define $\operatorname{diam} A = \sup_{a,b \in A} ||a-b||$. ¿Cuál es $\operatorname{diam}(]0,1[\cap \mathbb{Q})$, $\operatorname{diam}([0,1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$?

Indicación ▼ Solución ▼ [002340]

Ejercicio 7013

Demostrar que todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos. (*Indicación :* si $x \in O$ abierto, considerar J_x que es la unión de los intervalos abiertos incluidos en O y conteniendo x). Enunciar un resultado similar para los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002341]

Ejercicio 7014

Se va a demostrar que el conjunto D de reales de la forma $p + q\sqrt{2}$, donde p y q recorre $\mathbb{Z}$, es denso en $\mathbb{R}$.

1. Se observa que D es estable para la suma y la multiplicación.
2. Se define $u = \sqrt{2} - 1$; demostrar que para todo $a < b$, se puede encontrar $n \geqslant 1$ tal que $0 < u^n < b - a$, luego $m \in \mathbb{Z}$ verificando $a < mu^n < b$. Deducir el resultado.

Indicación ▼ Solución ▼ [002342]

Ejercicio 7015

Demostrar que en todo espacio métrico (E,d) una bola cerrada es un cerrado, pero que la adherencia de una bola abierta $B(a,r)$ no coincide necesariamente con la bola cerrada $B'(a,r)$ (se puede considerar en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $E = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$ y la bola centrada en $(\frac{1}{2}, 0)$ radio $\frac{1}{2}$).

Indicación ▼ Solución ▼ [002343]

Ejercicio 7016

$(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado.

1. Demostrar que en este caso la bola cerrada $B'(a,r)$ es la adherencia de la bola abierta $B(a,r)$.
2. Demostrar que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R) \iff r \leqslant R$ y $||a-b|| \leqslant R - r$.

Solución ▼ [002344]

Ejercicio 7017

1. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se establece $||(x,y)|| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Demostrar que se trata de una norma sobre $\mathbb{R}^2$ y dibujar su bola unidad cerrada.
2. Sea p, q dos normas en $\mathbb{R}^n$, B_p y B_q sus bolas unitarias cerradas. Demostrar que
$$B_q \subset B_p \iff p \leqslant q.$$
¿Que significa $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Ejemplos.

Solución ▼ [002345]

Ejercicio 7018

Se denota $X = l^\infty$ el espacio de sucesiones reales acotadas, y $Y = c_0$ el espacio de sucesiones reales que tienden a 0, ambos dotados de la métrica (a verificar) $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Demostrar que Y es cerrado en X. Demostrar que el conjunto de sucesiones nulas de cierto rango es denso en Y, pero no en X.

Indicación ▼ Solución ▼ [002346]

Ejercicio 7019

Sea $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R});\ f(0) = 0\}$. Se define

$$||f|| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ y } N(f) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)|.$$

Demostrar que estas dos normas son equivalentes en E.

Indicación ▼ Solución ▼ [002347]

Ejercicio 7020

Se designa por $d(a,b)$ la distancia euclidiana usual de $a,b \in \mathbb{R}^2$ y se pone

$$\delta(a,b) = \begin{cases} d(a,b) & \text{si } a,b \text{ están alineados con el origen } O \\ d(0,a) + d(0,b) & \text{si no.} \end{cases}$$

1. Demostrar que δ es una distancia en $\mathbb{R}^2$ (“distancia SNCF”) más fino que la distancia usual. En lo que sigue, se supone $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología asociada a δ.
2. Sea H el semi-plano $\{(x,y);\ y > 0\}$; demostrar que H es un abierto ; determinar $\overline{H}$.
3. ¿Cuál es la topología inducida en una recta vectorial ; en el círculo unidad Γ ?
4. ¿Cuáles de las siguientes transformaciones son continuas : homotecia de centro O ; rotaciones de centro O ; traslaciones ?

[002348]

Ejercicio 7021

1. Demostrar que $||f||_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$ y $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ son dos normas en $C([0,1],\mathbb{R})$. ¿Son equivalentes ?
2. ¿Las dos métricas relacionadas son topológicamente equivalentes ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002349]

Ejercicio 7022

Sea $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Comparar las normas $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002350]

Ejercicio 7023

Sea (x_n) una sucesión de un espacio topológico X separado ; se denota A el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

1. Todo valor de adherencia a de la sucesión es un punto de $\overline{A}$: dar un ejemplo donde a es un punto aislado de A ; un ejemplo donde a es un punto de acumulación en A ; un ejemplo donde a es un punto de acumulación en $\overline{A}\backslash A$.
2. Demostrar que todo punto de acumulación de A es valor adherente de la sucesión.

Solución ▼ [002351]

Ejercicio 7024

Sea $\mathbb{R}^n$ considerado como un grupo aditivo dotado de su topología usual. Sea G un subgrupo de $\mathbb{R}^n$.

1. Se supone que 0 es aislado en G. Demostrar que todo punto es aislado, que G es discreto y cerrado en $\mathbb{R}^n$. Se considera ahora el caso $n = 1$.
2. Demostrar que entonces, G es ya sea $\{0\}$, o ya sea de la forma $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Demostrar que si 0 es punto de acumulación, G es denso en todas partes en $\mathbb{R}$. Deducir así los subgrupos cerrados de $\mathbb{R}$.
4. Se considera $\alpha \notin \mathbb{Q}$; demostrar que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ es un subgrupo denso de $\mathbb{R}$. Deducir los valores de adherencia de la sucesión $(\mathrm{e}^{2i\pi n\alpha})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Solución ▼ [002352]

Ejercicio 7025

Sea $X = \{a,b,c,d\}$. ¿Cuál de las siguientes colecciones de subconjuntos determinan una topología en X ? Justificar.

1. $\varnothing$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b\}$;
2. $\varnothing$, X, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,d\}$;
3. $\varnothing$, X, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$.

Solución ▼ [002418]

Ejercicio 7026

Sea $\mathbb{R}$ y sea $\mathscr{T}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ conteniendo $\varnothing$, $\mathbb{R}$ y todos los complementos de conjuntos finitos. ¿Es una topología en $\mathbb{R}$? ¿Es una topología separada ?

Solución ▼ [002419]

Ejercicio 7027

Se llama *base* de una topología $\mathscr{T}$ un subconjunto $\mathscr{B}$ de $\mathscr{T}$ tal que todo abierto $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ se escribe como $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$, donde $B_i \in \mathscr{B}$, para todo $i \in I$.

1. Demostrar que $\mathscr{B}$ es una base de $\mathscr{T}$ si y solo si para todo abierto $\mathscr{O}$ y todo punto $x \in \mathscr{O}$ existe un $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset \mathscr{O}$.
2. Sea $\mathscr{T}_n$ la topología en $\mathbb{R}^n$ inducida por la métrica euclidiana
$$\operatorname{dist}(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\,.$$
Demostrar que el conjunto $\mathscr{B}$ de bolas abiertas que tienen su centro en $\mathbb{Q}^n$y su radio en $\mathbb{Q}$ es una base de $\mathscr{T}_n$.

3. Sea $\mathscr{B}'$ el conjunto de paralelepípedos abiertos en $\mathbb{R}^n$ cuyos bordes son paralelos a los ejes de coordenadas. ¿$\mathscr{B}'$ es una base de $\mathscr{T}_n$?
4. ¿$\{]-\infty,a[\,;\, a\in\mathbb{R}\}\cup\{]b,+\infty[\,;\, b\in\mathbb{R}\}$ es una base para $\mathscr{T}_1$?
5. Para todo $a\in\mathbb{Q}$ se denota δ_a la recta de ecuación $y=ax$ en $\mathbb{R}^2$, y se denota por Y la unión de las rectas δ_a. Sea $\mathscr{T}$ la topología en Y inducida por la topología en $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathscr{T}'$ la topología de base $\mathscr{B}'$ compuesta por todos los segmentos abiertos $]M,N[\subset\delta_a$, $O\notin]M,N[$, y para todas las uniones $\bigcup\limits_{a\in\mathbb{Q},O\in]M_a,N_a[}]M_a,N_a[$. ¿Las dos topologías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}'$ son equivalentes?

Solución ▼ [002420]

Ejercicio 7028

Sea X un espacio con una métrica $\operatorname{dist}: X\times X\to\mathbb{R}_+$.

1. Demostrar que si $f:\mathbb{R}_+\to R_+$ es una función creciente tal que $f(0)=0$ y $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$, entonces $\operatorname{dist}_f(x,y)=f(\operatorname{dist}(x,y))$ es una métrica en X.
2. Demostrar que
$$\operatorname{dist}'(x,y)=\frac{\operatorname{dist}(x,y)}{1+\operatorname{dist}(x,y)},\quad \forall x,y\in X,$$
es una métrica en X.
3. Demostrar que las métricas dist y dist$'$ son topológicamente equivalentes.

Solución ▼ [002421]

Ejercicio 7029

$$\forall\,(x,y,z)\in E^3\qquad d(x,z)\leqslant\sup\left(d(x,y),d(y,z)\right).$$

Esta desigualdad obviamente conduce a la desigualdad triangular.

1. Demostrar que E provisto con la distancia d definida por
$$d(x,y)=1,\ \text{ si }\ x\neq y,\quad d(x,x)=0$$
es un espacio ultramétrico. Se supone ahora que (E,d) es ultramétrico.
2. Demostrar que si $d(x,y)\neq d(y,z)$, se tiene $d(x,z)=\sup\left(d(x,y),d(y,z)\right)$.
3. Demostrar que una bola abierta (resp. cerrada) es una parte que es a la vez abierta y cerrada.
4. Demostrar que si dos bolas tienen un punto común, una está contenida en la otra. Demostrar además que si estas bolas tienen el mismo radio y ambas son bolas abiertas (resp. cerradas) se confunden.
5. Demostrar que si dos bolas abiertas distintas B_1,B_2 radio r están contenidos en una bola cerrada del mismo radio, entonces su distancia es igual a r :
$$d(B_1,B_2):=\inf_{(a,b)\in B_1\times B_2}d(a,b)=r.$$

Solución ▼ [002422]

Ejercicio 7030

Para $x=\pm\frac{a}{b}$, $(a,b\in\mathbb{N}^*)$, se define $\nu(x)=\nu(a)-\nu(b)$.

1. Demostrar que $\nu(x)$ es independiente de la elección de la representación $\pm\frac{a}{b}$.
2. Demostrar que $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}$.
3. Demostrar que $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$, para $x, y \in \mathbb{Z}$, luego para $x, y \in \mathbb{Q}$.
4. Demostrar que en $\mathbb{Q}$, d definida por :

$$d(x,y) = p^{-\nu(x-y)}, \text{ si } x \neq y, \quad d(x,x) = 0,$$

es una distancia ultramétrica.

Solución ▼ [002423]

Ejercicio 7031

1. Sea E un espacio métrico y $A \subset E$ una de sus partes. Se designa por $\overline{A}$ la adherencia de A y por $\mathrm{Fr}(A)$ la frontera de A en E. Se tiene que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
   (a) Demostrar que $x \in \mathrm{Fr}(A)$, si y solo si existe una sucesión (x_n) de elementos de A y una sucesión (y_n) de elementos complementarios $E \setminus A$ de A en E, que convergen una y la otra a x.
   (b) Sea $E =]-\infty, -1] \cup [0, 1[\cup [2, +\infty[$ dotado de la topología inducida por $\mathbb{R}$. ¿Con $A = [0, \frac{1}{2}]$ cuál es la frontera de A en E. Considerada como una sub parte de $\mathbb{R}$, ¿cuál sería la frontera de A en $\mathbb{R}$?
2. Sean E y F dos espacios métricos respectivamente por medio de las distancias d y d'.
   (a) Especificar qué se entiende por la distancia $\sup(d, d')$ sobre $E \times F$. Explicar rápidamente por qué esta distancia define en $E \times F$ el producto de topologías métricas en E y F.
   (b) Sean $A \subset E$ y $B \subset F$. Demostrar que el interior $A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ en $E \times F$ es el producto cartesiano del interior $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A en E, con el interior $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B en F.
3. E y F son siempre como en la segunda pregunta anterior.
   (a) Si (ξ_n, ξ'_n) es una sucesión de puntos en el complemento $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ en $E \times F$, demostrar que al menos una de las siguientes dos alternativas (i) o (ii) es verificada :
   (i) existe una sucesión extraída ξ_{n_k}, donde todos los términos están en $E \setminus A$.
   (ii) existe una sucesión extraída ξ'_{n_k}, donde todos los términos están en $F \setminus B$.
   (b) Deducir, de todo lo anterior, que la frontera $\mathrm{Fr}(A \times B)$ de $A \times B$ en $E \times F$ es dada por la fórmula :

$$\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\big).$$

4. Se supone E y F como antes, pero con la hipótesis adicional de estar relacionado, y con inclusiones estrictas $A \subset E$ y $B \subset F$.
   (a) Sean, en $E \times F$, los puntos $(x, x') \notin A \times B$ y $(y, y') \notin A \times B$. Se supone que $x \in A$ y $y \notin A$; demostrar que existe una parte conexa contenida enteramente en el complemento de $A \times B$ que contiene (x, x') y (y, y').
   (b) Deducir, bajo las presentes hipótesis de esta cuarta pregunta, que el complemento de $A \times B$ en $E \times F$ es conexo.

Solución ▼ [002424]

Ejercicio 7032

1. Sea $X = \{0,1\}$ provisto de la familia de abiertos $\{\varnothing, \{0\}, X\}$. ¿Ésta topología es separada ?
2. Sea X un conjunto no vacío. Describir la topología cuyos puntos aislados forman una base de abiertos.
3. Describir la topología en $\mathbb{R}$ cuya familia de intervalos cerrados forma una base de abiertos ; la misma pregunta con los intervalos abiertos simétricos.
4. Sea X un conjunto infinito. Demostrar que la familia de conjuntos que consiste en el conjunto vacío y las partes de X de complemento finito define una topología sobre X.

[006034]

Ejercicio 7033

Sea X un espacio topológico, y f una aplicación cualquiera de X en un conjunto Y. Se dice que una parte A de Y es abierta, si $f^{-1}(A)$ es un abierto de X. Verificar que se ha definido una topología en Y. [006035]

Ejercicio 7034

Demostrar que se puede construir sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una topología separada tomando como abiertos, los abiertos $\mathbb{R}$ y los conjuntos de la forma $\{x / |x| > a\} \cup \{\infty\}$, donde a es real. ¿Cómo construir una topología independiente en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$? [006036]

Ejercicio 7035

Sea X un conjunto no vacío y Σ una familia de partes de X estable por intersección finita y conteniendo X. Demostrar que la más pequeña topología $\mathscr{T}$ conteniendo Σ (la topología generada por Σ) consiste en las uniones de conjuntos de Σ, o, de manera equivalente,

$$A \in \mathscr{T} \iff \forall x \in A\ \exists S \in \Sigma;\ x \in S \subset A.$$

Demostrar que se puede debilitar la hipótesis de estabilidad por intersección finita en :

$$\forall S_1, S_2 \in \Sigma,\ \forall x \in S_1 \cap S_2,\ \exists S_3 \in \Sigma;\ x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2. \qquad (*)$$

[006037]

Ejercicio 7036

Sea C el conjunto de funciones continuas reales en $[0,1]$. Para toda $f \in C$ y $\varepsilon > 0$ se define

$$M(f,\varepsilon) = \{g / \int_0^1 |f-g| < \varepsilon\}.$$

Demostrar que la familia M de conjuntos $M(f,\varepsilon)$, cuando $f \in C$ y $\varepsilon > 0$ es una base topológica. La misma pregunta para la familia

$$U(f,\varepsilon) = \{g / \sup_x |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}.$$

[006038]

Ejercicio 7037

U en $\mathbb{N}$ se dice abierto si es estable por divisibilidad, es decir todo divisor de $n \in U$ está aún en U. Demostrar que se ha definido así una topología en $\mathbb{N}$ que no es la topología discreta. [006039]

Ejercicio 7038

Se considera en $\mathbb{N}^*$, la familia de las progresiones aritméticas

$$P_{a,b} = \{a + bn / n \in \mathbb{N}^*\},$$

donde a y b son dos enteros primos entre sí.

1. Demostrar que la intersección de dos de tales progresiones es ya sea vacía, o ya sea una progresión aritmética de la misma naturaleza, más precisamente,

$$P_{a,b} \cap P_{a',b'} = P_{\alpha,\beta}$$

   donde α es el mínimo del conjunto $P_{a,b} \cap P_{a',b'}$, y $\beta = \mathrm{mcm}(b, b')$.
2. Deducir que esta familia de conjuntos (añadiendo $\varnothing$) forma una base de topología en $\mathbb{N}^*$ de los que se describen los abiertos.
3. Demostrar que esta topología es separada.

[006040]

Ejercicio 7039

1. Demostrar que si B es un abierto del espacio topológico X y $A \cap B = \varnothing$, entonces $\overline{A} \cap B = \varnothing$, pero que $\overline{A} \cap \overline{B}$ no está necesariamente vacío.
2. Demostrar con ayuda de ejemplos que la igualdad $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$ no tiene lugar en general para una infinidad de índices.

[006041]

Ejercicio 7040

Determinar la adherencia y el interior de los siguientes conjuntos : $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < 1, y = 0\}$; $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 0\}$ $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$; el círculo unitario de $\mathbb{R}^2$. [006042]

Ejercicio 7041

Si A es una parte del espacio topológico X, se establece $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Demostrar que α y β son las aplicaciones crecientes para la inclusión de $\mathscr{P}(X)$ en $\mathscr{P}(X)$.
2. Demostrar que si A es abierto, $A \subset \alpha(A)$ y si A es cerrado, $\beta(A) \subset A$. Deducir que $\alpha^2 = \alpha$ y $\beta^2 = \beta$.
3. Construir $A \subset \mathbb{R}$ tal que los cinco conjuntos : A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$ sean todos distintos.

[006043]

Ejercicio 7042

Determinar la adherencia en $\mathbb{R}^2$ del gráfico

$$G = \{(x,y) / y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \ \ 0 < x \leqslant 1\}.$$

[006044]

Ejercicio 7043

En un espacio topológico, se define la frontera de una parte A como es $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1. Demostrar que $\partial A = \partial(A^c)$ y que $A = \partial A \iff A$ cerrado de interior vacío.
2. Demostrar que $\partial(\overline{A})$ y $\partial(\overset{\circ}{A})$ ambos están incluidos en ∂A, y dar un ejemplo donde estas inclusiones son estrictas.
3. Demostrar que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, y que la inclusión puede ser estricta ; demostrar que existe igualdad cuando $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$ (establecer $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$). Demostrar que $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ es aún cierto cuando $\partial A \cap \partial B = \varnothing$ (razonar por contradicción).

[006045]

Ejercicio 7044

1. Sea X un espacio topológico, y D un subconjunto (en todas partes) denso en x. Demostrar que es también equivalente a decir :

   (i) El complemento de D es de interior vacío.

   (ii) Si F es un cerrado conteniendo D, entonces $F = X$.

   (iii) D interseca todo abierto no vacío de X.

   Demostrar que un conjunto $A \subset X$ interseca toda parte densa en X si y solo si es de interior no vacío.
2. Sea E y G dos abiertos densos en X ; demostrar que $E \cap G$ es aún denso en X. Deducir que toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos es una intersección decreciente de abiertos densos.

[006046]

Ejercicio 7045

Establecer las siguientes propiedades de la adherencia de un conjunto en un espacio topológico :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Demostrar que la fórmula $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ no es cierto en general ; demostrar que 3. no es cierto en general para una infinidad de conjuntos. [006047]

Ejercicio 7046

Establecer la equivalencia entre las siguientes propiedades :

1. $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A.
2. $a \in \overset{\circ}{A}$ si y solo si existe un vecindario de a enteramente contenido en A.

Establecer para el interior de un conjunto de las propiedades análogas a las del ejercicio 7045. [006048]

Ejercicio 7047

Se recuerda la construcción del conjunto triádico de Cantor : se parte del segmento $[0,1]$ del cual eliminamos el intervalo medio $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$; en la segunda etapa, se suprimen los intervalos $]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[$ y $]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[$ etc. Se denota K_n la unión de los intervalos restantes en la n-ésima étape, y $K = \bigcap K_n$. ¿Cuál es la adherencia y el interior de K ?
[006049]

Ejercicio 7048

Sea X un espacio topológico, y D un subconjunto denso en X. Demostrar que es también equivalente a decir

1. El complemento de D es de interior vacío.
2. Si F es un cerrado conteniendo D, entonces $F = X$.
3. D interseca todo abierto de X.

Demostrar que un conjunto $A \in X$ interseca toda parte densa en X si y solo si es de interior no vacío.
[006050]

Ejercicio 7049

Sea E y G dos abiertos densos en X ; demostrar que $E \cap G$ es aún denso en X. [006051]

Ejercicio 7050

Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a > 0$, el conjunto de los x verificando $|f(x)| > a$ es finito. Demostrar que $\{x/f(x) = 0\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Verificarlo en el siguiente ejemplo : se enumeran los racionales $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ y se escribe $f(r_n) = \frac{1}{n}$ si $n \geqslant 1$, $f(x) = 0$ en otro lugar. [006052]

Ejercicio 7051

Demostrar que $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n}), n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0,1]$, donde $E(x)$ representa la parte entera de x.
[006053]

Ejercicio 7052

Sea E un conjunto no vacío, y $X = E^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones $x = (x_n)$ de elementos de E. Para $x, y \in X$, se establece $p(x,y) = \min\{n/x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, y ∞ si $x = y$.

1. Demostrar que $d(x,y) = \dfrac{1}{p(x,y)}$ (con $\frac{1}{\infty} = 0$) es una distancia en X que verifica la desigualdad ultramétrica
$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$
2. ¿Qué son las bolas abiertas y las bolas cerradas para esta métrica ?

[006054]

Ejercicio 7053 Espacio cuasi-separado

Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico.

1. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes :
   (i) $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists V$ vecindario de x; $y \notin V$.
   (ii) $\forall x \in X,\ \{x\}$ es cerrado.
   (iii) $\forall x \in X,\ \cap\{V;\ V$ vecindario de $x\} = \{x\}$.

2. Sea $(X,\mathscr{T})$ así y $A\subset X$ tal que $\overline{A}\neq A$. Demostrar que si $x\in\overline{A}\backslash A$, todo vecindario de x corta A en una infinidad de puntos.

[006060]

Ejercicio 7054 Ejemplo de topología no separada

En $\mathbb{C}$, se denota $[z_0\to[$ la semi-recta $\{\rho e^{i\theta_0}\ \ \rho\geqslant\rho_0\}$, si $z_0=\rho_0 e^{i\theta_0}$. Se declara abierta toda unión (eventualmente vacía) de tales semi-rectas.

1. Demostrar que se ha definido así en $\mathbb{C}$ una topología $\mathscr{T}$ no separada.
2. Demostrar que la adherencia del punto $\{z_0\}$, para esta topología es $[0,z_0]$.
3. Deducir que los cerrados de $\mathscr{T}$ son los conjuntos estrellados con respecto a 0 (A se dice “estrellado con respecto a 0” si, para todo $z\in A$, el segmento $[0,z]$ está aún en A).

Solución ▼ [006061]

Ejercicio 7055

Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico separado. Demostrar que la diagonal Δ de $X\times X$ es cerrada en $X\times X$. [006062]

Ejercicio 7056

1. ¿Cuáles son los abiertos $[1,2]\cup\{3\}$ inducidos por los de $\mathbb{R}$?
2. ¿Cuál es la topología inducida en $\mathbb{Z}$ por la de $\mathbb{R}$?
3. ¿Cuáles son los extremos abiertos del círculo $\Gamma=\{z/|z|=1\}$?, ¿del semiplano $\{z/\operatorname{Im}z>0\}$?, ¿del semiplano $\{z/\operatorname{Im}z\geqslant 0\}$ en $\mathbb{C}$?

[006063]

Ejercicio 7057

Sea Y un subconjunto del espacio topológico X, provisto de la topología inducida. Describa lo abierto (cerrados) inducidos de Y, cuando Y es abierto (cerrado). Sea $A\subset Y$. Demostrar que la adherencia de A en Y, $\overline{A}^Y=Y\cap\overline{A}$; ¿se tiene para el interior de A en Y, $\overset{\circ}{A}^Y=Y\cap\overset{\circ}{A}$? [006064]

Ejercicio 7058

Se dice que un espacio topológico X tiene la propiedad (P) si la familia de partes de X que son a la vez abiertos y cerrados es una base para los abiertos de X.

1. Demostrar que un espacio topológico discreto tiene esta propiedad.
2. Demostrar que la topología inducida en $\mathbb{Q}$ por la topología usual de $\mathbb{R}$ no es la topología discreta, pero que también tiene la propiedad (P).
3. ¿Puede dar otro ejemplo ?

[006065]

Ejercicio 7059

Si A es una parte acotado de un espacio métrico (E,d), se establece $\operatorname{diam}A=\sup_{a,b\in A} d(a,b)$.

1. Demostrar que $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.
2. Encontrar el diámetro de $\{f \in C([0,1]);\ 0 \leqslant f \leqslant 1\}$; de $\{f \in C([0,1]);\ 0 \leqslant f \leqslant 1,\ f(0) = 0\}$, C es provisto de la métrica d_1.

[006082]

Ejercicio 7060

¿Se puede construir en $\mathbb{R}$ un conjunto infinito, cerrado, constituida solo de irracionales ? [006090]

Ejercicio 7061

Demostrar que en $\mathbb{R}^n$, las distancias d euclidiana, d_∞ y d_1 definen la misma topología. [006091]

Ejercicio 7062

1. En $\mathbb{R}^2$, se considera $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant 0\}$. Verificar que es abierto y que se puede escribir como unión numerable de cerrados (dicho conjunto se dice que es de tipo F_σ).
2. En $\mathbb{R}^n$, se considera el subconjunto de puntos con coordenadas enteras, y el subconjunto de puntos con coordenadas racionales. Verificar que el primero es cerrado, pero el segundo no es ni abierto ni cerrado.

[006092]

Ejercicio 7063

Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de orden n, provisto con la distancia $d(A,B) = \max\limits_{i,j} |a_{i,j} - b_{i,j}|$, donde $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$.

1. Demostrar que el conjunto de matrices invertibles es un conjunto abierto denso de $M_n(\mathbb{R})$.
2. En el caso $n = 2$, decidir si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, ni abiertos ni cerrados : $\mathscr{A}$ = matrices teniendo dos valores propios distintos y > 0. $\mathscr{B}$ = matrices teniendo dos valores propios > 0.

[006093]

Ejercicio 7064

Se denota X el espacio de las sucesiones reales $x = (x(n))$ y se provee de la topología cuyos abiertos elementales son

$$V(x; n_1, n_2, \ldots, n_k; \varepsilon) = \{y \in X / |x(n_i) - y(n_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Verificar que se ha definido una base de topología. Comparar la topología que genera en l^∞ y c_0, con la topología métrica del ejercicio anterior. [006094]

Ejercicio 7065

Sea X un espacio topológico. Se consideran las siguientes propiedades :

(i) X contiene un conjunto numerable denso.

(ii) la topología en X tiene una base numerable de abiertos.

Demostrar que (ii) implica (i) y la recíproca tiene lugar si X es metrizable. Un espacio verificando (i) se dice separable. [006095]

Ejercicio 7066

Sea X un espacio métrico separable (ver ejercicio 7065), y A una parte cualquiera de X. Demostrar que A es aún separable. [006096]

Ejercicio 7067

Se considera en $\mathbb{R}$ las tres topologías $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_3$, generadas respectivamente por los intervalos de la forma $]a,b[$, $[a,b[$, $[a,b]$, a y b recorriendo $\mathbb{R}$. Comparar las topologías, y describir las funciones continuas de $(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$ en $(\mathbb{R},\mathscr{T}_2)$; de $(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$ en $(\mathbb{R},\mathscr{T}_3)$. [006097]

Ejercicio 7068

Sea $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}'$ dos topologías en X. Demostrar que $\mathscr{T}'$ es más fino que $\mathscr{T}$ si y solo si $(X,\mathscr{T}') \xrightarrow{\text{Id}} (X,\mathscr{T})$ es continua. Demostrar que entonces $\overline{A}^{\mathscr{T}'} \subset \overline{A}^{\mathscr{T}}$; ¿qué inclusión se tiene entre $\overset{\circ}{A}{}^{\mathscr{T}'}$ y $\overset{\circ}{A}{}^{\mathscr{T}}$? [006098]

Ejercicio 7069

Comparar en $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, el espacio de sucesiones de $0-1$, las topologías definidas por las distancias :
$d(x,y) = \dfrac{1}{\min\{n/x_n \neq y_n\}}$ si $x \neq y$, 0 si no, y $\delta(x,y) = \sup\limits_n |x(n) - y(n)|$. [006099]

Ejercicio 7070

Se da una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, y se denota d la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$. ¿Bajo qué condiciones en f, $\delta(x,y) = d(f(x), f(y))$ define una distancia en $\mathbb{R}$ equivalente topológicamente a la distancia usual (i.e. definiendo la misma topología.) ? [006100]

Ejercicio 7071

Sea E un conjunto no vacío, y $X = E^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones $x = (x_n)$ de elementos de E. Para $x, y \in X$, se establece $p(x,y) = \min\{n/x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, y ∞ si $x = y$. Demostrar que $d(x,y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (con $\frac{1}{\infty} = 0$) es una distancia en X que verifica la desigualdad ultramétrica

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

[006101]

Ejercicio 7072

Se dice que una distancia es *ultramétrica* si verifica la desigualdad triangular reforzada :

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

Establecer las siguientes afirmaciones :

1. Si $d(x,y) \neq d(y,z)$, entonces $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$. Deducir que todo triángulo en E es isósceles.

2. Toda bola abierta $B(x,r)$ es un conjunto que es a la vez abierto y cerrado, y
$$B(x,r)=B(y,r) \ \ \forall y\in B(x,r).$$
3. Toda bola cerrada $B'(x,r)$ es un conjunto que es a la vez abierto y cerrado, y
$$B'(x,r)=B'(y,r) \ \ \forall y\in B'(x,r).$$
4. Si dos bolas tienen un punto en común, están anidados.

[006102]

Ejercicio 7073

Sea (X,d) un espacio métrico, y sea φ una función real definida para $x\geqslant 0$, verificando (i) $\varphi(0)=0$, (ii) φ creciente, (iii) $\varphi(u)>0$ si $u>0$, (iv) $\varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v)$.

1. Demostrar que $\delta(x,y)=\varphi(d(x,y))$ define una distancia en X.
2. Verificar que las funciones $\varphi_1(u)=\inf(u,1)$, $\varphi_2(u)=\frac{u}{1+u}$, $\varphi_3(u)=\log(1+u)$, y $\varphi_4(u)=u^\alpha$, donde $0<\alpha<1$ cumplen las condiciones (i) (ii) y (iii); más generalmente, demostrar que toda función f estrictamente creciente, cóncava, tal que $f(0)=0$ cumple con estas condiciones.
3. Se supone además que la función φ es continua en 0. Demostrar que las métricas d y δ son topológicamente equivalentes.
4. Demostrar que $\delta_1=\varphi_1(d)$ y $\delta_2=\varphi_2(d)$ son Lipchitz-equivalentes.

[006103]

Ejercicio 7074

Sea (X,d) un espacio métrico con métrica acotada. Se denota $\mathscr{F}$ el conjunto de cerrados no vacíos de X, y se define para A y B en $\mathscr{F}$,
$$\delta(A,B)=\|d_A-d_B\|_\infty$$
donde d_A es la función acotada $x\to d(x,A)$. Demostrar que se ha definido así una métrica en $\mathscr{F}$, y que la aplicación $a\to\{a\}$ es una isometría de X en $\mathscr{F}$. [006104]

Ejercicio 7075

Encontrar los valores de adherencia de la sucesión : $0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\ldots,0,\frac{1}{2^k},\frac{2}{2^k},\ldots,\frac{2^k-1}{2^k},1,0,\ldots$
[006105]

Ejercicio 7076

1. Sea (u_n) una sucesión real tal que e^{iu_n} y $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergente. Demostrar que (u_n) tiene como máximo un valor de adherencia.
2. Sea (u_n) una sucesión real tal que e^{itu_n} converge para $t\in T$, donde T es no numerable. Misma conclusión.

[006106]

Ejercicio 7077

Sea (u_n) una serie positiva divergente tal que u_n decrece hacia 0 y se escribe $A = \{\pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n,\ n \geqslant 1\}$. Demostrar que $\overline{A} = \mathbb{R}$. [006107]

Ejercicio 7078

Sea en un espacio métrico (X,d) una sucesión (x_n) tal que las tres sub-sucesiones (x_{2n}), (x_{2n+1}), y (x_{3n}) son convergentes. Demostrar que la sucesión misma converge. [006108]

Ejercicio 7079

Sea $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ una sucesión de un espacio métrico (X,d). Se supone que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n} = a_m$, y que $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$. Demostrar que existe una sub-sucesión de la sucesión inicial (a_{p,n_p}) tal que $\lim\limits_{p\to\infty} a_{p,n_p} = a$. [006109]

Ejercicio 7080

Sea (F_n) una sucesión decreciente de cerrados en un espacio topológico x, y sea (x_n) una sucesión convergente en X tal que para cada n, $x_n \in F_n$. Verificar que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n \in \bigcap F_n$. ¿Qué se puede decir si la sucesión de cerrados no es decreciente ? [006110]

Ejercicio 7081

Se va a demostrar que los polinomios son densos en funciones continuas en $[-1,1]$. Para empezar, se aborda la función $|t|$.

1. Demostrar que la sucesión de polinomios definida por inducción :

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \tfrac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)),\ \ p_0(t) = 0,$$

   converge a $|t|$.
2. Deducir que toda función afín a trozos en $[-1,1]$ es el límite de una sucesión de polinomios.
3. Demostrar que los polinomios son densos en las funciones continuas en $[-1,1]$.

[006111]

Ejercicio 7082

1. Determinar el conjunto de valores de adherencia de la sucesión de reales $x_n = (1+\frac{1}{n})\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{6})$; de la sucesión $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})_{m\geqslant 1, n\geqslant 1}$.
2. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{R}$ si α es irracional. Deducir el conjunto de valores de adherencia de la sucesión $x_n = \cos(2\pi n\alpha)$. (*Indicación :* Se puede demostrar que todo subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$ es ya sea $\mathbb{R}$, o ya sea discreto, de la forma $a\mathbb{Z}$.)

[006112]

Ejercicio 7083

Se sabe que el conjunto de valores de adherencia de una sucesión real es un cerrado de $\mathbb{R}$. Demostrar que todo cerrado de $\mathbb{R}$ es el conjunto de valores de adherencia de una sucesión real : si F es finito, Encontrar una sucesión que tome una infinidad de veces cada valor de F ; si F es infinito, demostrar que F contiene un numerable denso D y encontrar una sucesión que tome una infinidad de veces cada valor de D. [006113]

Ejercicio 7084

Sea (ε_k) una sucesión de valores en $\{-1,1\}$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$. Demostrar que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión (S_n) es un intervalo de $\mathbb{Z}$. [006114]

Ejercicio 7085

Se considera una sucesión (x_n) de $[0,1]$ tal que $x_{n+1} - x_n$ tiende a 0.

1. Demostrar que el conjunto A de sus valores de adherencia es un intervalo cerrado de $[0,1]$.
2. Se supone además que esta sucesión es una sucesión recurrente i.e. definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, donde f es continua de $[0,1]$ en sí mismo, y un punto inicial $x_0 \in [0,1]$. Demostrar que la sucesión converge (se comienza por notar que si $x \in A$, entonces $x = f(x)$, y que si $x_m \in A$, para un índice m, entonces la sucesión converge.)
3. Sea $x = (x_n)$ una sucesión de l^∞; demostrar que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión y de término general $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ es un intervalo. Deducir que la aplicación f de l^∞ en sí mismo que se asocia y a x, no es biyectiva.

[006115]

Ejercicio 7086

Se considera el espacio métrico $E = C([0,1])$ provisto de d_∞, y para $f \in E$, se denota $M(f)$ el máximo de f sobre $[0,1]$. Demostrar que la aplicación $f \to M(f)$ es 1-lipschitziana. [006136]

Ejercicio 7087

Sea (f_n) una sucesión de polinomios que converge uniformemente en $[0,1]$ a una función que no es un polinomio. Demostrar que la sucesión de grados de los polinomios tiende al infinito. [006137]

Ejercicio 7088

Se considera la sucesión de polinomios en $[-1,1]$

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n \, dt}{\int_0^1 (1-t)^n \, dt}.$$

1. Demostrar que para todo ε, esta sucesión converge uniformemente a 1 en el intervalo $[\varepsilon,1]$, y hacia -1 en el intervalo $[-1,-\varepsilon]$. *Indicación :* Comparar $\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$ a $\int_0^1 (1-t)^n \, dt$.
2. Deducir que la sucesión $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) \, dt$ converge uniformemente a $|x|$ sobre $[-1,1]$.
3. Demostrar que en el ejercicio 7081 la convergencia es también uniforme en $[-1,1]$, estableciendo una relación de recurrencia satisfecha por el error $\varepsilon_n(t) = |t| - p_n(t)$.

[006138]

Ejercicio 7089

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice reglada, si tiene en todo punto un límite a la derecha y un límite a la izquierda (y por supuesto, un límite a la derecha 0, un límite a la izquierda en 1.) Demostrar que una límite uniforme de funciones en escalera es una función reglada (el recíproco se establecerá más adelante).
[006139]

Ejercicio 7090

Sea E el espacio $C_b(\mathbb{R},C)$ funciones continuas acotadas en $\mathbb{R}$ dotado de la métrica de convergencia uniforme d.

1. Se recuerda que un espacio topológico es separable si contiene un conjunto numerable denso. Demostrar que en un espacio métrico separable, toda colección de abiertos dos a dos disjuntos es a lo sumo numerable.
2. Sea λ y μ dos reales distintos. Demostrar que $d(\mathrm{e}^{i\lambda x},\mathrm{e}^{i\mu x}) \geqslant 2$. Deducir que E no es separable.

[006140]

Ejercicio 7091 Preguntas del curso

1. Dar las definiciones de una topología, de un espacio topológico de Hausdorff, de un espacio topológico cuasi-compacto, de un espacio topológico compacto, de un espacio topológico conexo, y de un espacio topológico conexo por arcos.
2. Dar un ejemplo de espacio topológico conexo pero no conexo por arcos (¡no se requiere una demostración !).
3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que A es cuasi-compacto si y solo si A es cerrado y acotado (enunciar claramente los teoremas utilizados !).
4. Sea X un espacio topológico. Demostrar que si x contiene un solo elemento, entonces X es compacto.
5. Sea (X,d) un espacio métrico. Dar la definición de una sucesión de Cauchy en X. ¿En qué condiciones se dice que una sucesión x_n converge a $a \in X$ (denotado $x_n \to a$) ?
6. Sea (X,d) un espacio métrico y x_n una sucesión en X. Demostrar que (1) si x_n es una sucesión de Cauchy, entonces x_n es acotada, y (2) si $x_n \to a$, entonces x_n es una sucesión de Cauchy.

[006772]

Ejercicio 7092

Sean X y Y espacios topológicos, y sea $Y^X = \{f : X \to Y\}$ el espacio de todos las funciones de X en Y. Para $A \subset X$ y $B \subset Y$ se define $V(A,B) \subset Y^X$ por $V(A,B) = \{f : X \to Y \mid f(A) \subset B\}$. La topología compacta-abierta en Y^X tiene una sub-base formada por los conjuntos $V(A,B)$, donde $A \subset X$ es compacto y $B \subset Y$ es abierto. Demostrar que Y^X, con la topología compacta-abierta es Hausdorff si y solo si Y es Hausdorff.
(Indicación : para el "solo si" pensar en una función constante.) [006774]

Ejercicio 7093

1. Dar la definición de un espacio topológico T_1.
2. Demostrar que un espacio topológico X es T_1 si y solo si : $\forall x \in X :\ \{x\}$ es cerrado.
3. Sea X un espacio topológico conteniendo un número finito de puntos. Demostrar que si X es T_1, entonces su topología es la topología discreta.

4. Sea X un espacio topológico T_1 teniendo la propiedad : $\forall x \in X, \forall A \subset X$: A cerrado y $x \notin A \implies \exists U, V$ abiertos : $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \varnothing$. Demostrar que X es T_2.

[006786]

Ejercicio 7094

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cerrado tal que $K \subset B(x_0, R)$ (donde $B(x_0, R)$ es la bola abierta de centro x_0 y radio R). Demostrar que existe un $R' < R$ tal que $K \subset B(x_0, R')$. (Indicación : observar $\sup d(x, x_0)$) [006787]

Ejercicio 7095

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, se escribe $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid f(x,y) = 0 \}$ y $V = \{ g : M \to \mathbb{R} \mid g$ derivable, $\forall x \in M : g'(x) = 0 \}$.

1. Demostrar que M es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y que V es un espacio vectorial.
2. Calcular la dimensión del espacio V en los siguientes casos :
   — $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
   — $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)$,
   — $f(x,y) = y^2 - x(x-1)(x-t)$.
   En el último caso, se le pide que calcular la dimensión de V en función de $t \in [0,1]$ (Indicación : esbozar el conjunto $f(x,y) = 0$ y distinguir los casos $t = 0$, $t = 1$, $0 < t < 1$).

[006798]

Ejercicio 7096

1. Sea X un espacio T_2 y K un subconjunto cuasi-compacto. Demostrar que K es cerrado.
2. Dar la definición de un espacio T_4. Demostrar que un espacio X es T_4 si y solo si : para todo cerrado A contenida en un abierto U existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas y Y un espacio Hausdorff.
3. Demostrar que $\{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ es cerrado.
4. Demostrar que si f y g coinciden en un conjunto denso en X, entonces $f = g$.

[006799]

Ejercicio 7097

Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico separado, $U \subset X$ un subconjunto denso de x, y sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Demostrar que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es un cerrado. Deducir que si f y g coinciden en U, entonces f y g coinciden en X. [006843]

---

305 421.00 Compacidad

Ejercicio 7098

Sea X un espacio métrico.

1. Sean A y B dos compactos disjuntos en X. Demostrar que tienen vecindarios abiertos disjuntos (empezar con el caso donde B se reduce a un punto).

2. Sea K un compacto no vacío de X y U un abierto de X conteniendo K. Demostrar que existe $r>0$ tal que para todo $x\in X$, se tiene la implicación :

$$d(x,K)<r\Rightarrow x\in U\ .$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002370]

Ejercicio 7099

Demostrar que una sucesión convergente y su límite forman un conjunto compacto.

Indicación ▼ Solución ▼ [002371]

Ejercicio 7100

Sean $K,F\subset\mathbb{R}^n$ de partes no vacías, K compacto y F cerrado. Demostrar que existe $a\in K$ y $b\in F$ tal que $\|a-b\|=\operatorname{dist}(K,F)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002372]

Ejercicio 7101

Sea E un espacio compacto y sea (F,d) un espacio métrico. Sea $f:E\to F$ una aplicación localmente acotada, lo que significa que, para todo $y\in E$, existe un vecindario V_y de y en el cual f es acotada. Demostrar que f es acotada en E.

Solución ▼ [002373]

Ejercicio 7102

Sea X un espacio métrico.

1. Sea $(F_n)_n$ una sucesión decreciente de cerrados de X y sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente tal que $x_n\in F_n$, para todo $n\geqslant 0$. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}x_n\in\bigcap_{n\geqslant 0}F_n\ .$$

Dar un ejemplo para el cual $\bigcap_{n\geqslant 0}F_n=\varnothing$.

2. Sea ahora $(K_n)_n$ una sucesión descendente de *compactos* no vacíos de X. Verificar que $K=\bigcap_{n\geqslant 0}K_n$ es no vacío y que todo abierto Ω que contiene K contiene todos los K_n a partir de un cierto rango.

Solución ▼ [002374]

Ejercicio 7103

Sea X un espacio topológico y $f:X\times[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que la aplicación $g:x\in X\to\int_0^1 f(x,y)\,dy$ es continua.

Solución ▼ [002375]

Ejercicio 7104

Sea E un espacio normado. Si A y B son dos partes de E, se denota $A+B$ el conjunto $\{a+b\,;\,a\in A\ \text{ y }\ b\in B\}$.

1. Demostrar que si A es compacto y B es cerrado, entonces $A+B$ es cerrado.

2. Dar un ejemplo de dos conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ cuya suma no es cerrada.

Indicación ▼ Solución ▼ [002376]

Ejercicio 7105

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Se dice *propio* si para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, la imagen inversa $f^{-1}(K)$ es compacta.

1. Demostrar que, si f es propio, entonces la imagen por f de todo cerrado de $\mathbb{R}^n$ es un cerrado.
2. Establecer la siguiente equivalencia : la aplicación f es propia si y solo si tiene la propiedad :

$$\|f(x)\| \to \infty, \text{ cuando } \|x\| \to \infty.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002377]

Ejercicio 7106

Sea $E = \{f:[0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$. Se provee E de la métrica $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. Demostrar que la bola unidad cerrada de E no es compacto (se puede construir una sucesión en la cual ninguna sub-sucesión sea de Cauchy). ¿Qué se puede decir de la bola unidad cerrada de l^∞ (el espacio de sucesiones acotadas dotado de la norma sup) ?

Solución ▼ [002378]

Ejercicio 7107

Sea (X,d) un espacio métrico, sea (Y,δ) un espacio métrico compacto y sea $f:X\to Y$ una aplicación cuyo gráfico

$$G = \{(x,f(x))\, x\in X\} \subset X\times Y$$

es cerrado en $X\times Y$. Denotemos $p:G\to X$ y $q:G\to Y$ las restricciones de las dos proyecciones $p(x,y)=x$ y $q(x,y)=y$. Demostrar que p es un homeomorfismo de G sobre X. Deducir que f es continua. [002379]

Ejercicio 7108

Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $f:X\to X$ una aplicación que verifica

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y), \quad \text{para todo } x,y\in X,\ x\neq y\,.$$

El objetivo aquí es de demostrar que f tiene un único punto fijo $p\in X$.

1. Justificar que f puede tener como máximo un punto fijo.
2. Demostrar que los conjuntos $X_n = f^n(X)$, $n\in\mathbb{N}$, forman una sucesión decreciente de compactos y que $Y = \bigcap_{n\geqslant 0} X_n$ no es vacío.
3. Demostrar que Y es un conjunto invariante, i.e. $f(Y)=Y$, y deducir que el diámetro de este conjunto es cero.
4. Concluir que f tiene un único punto fijo $p\in X$ y que para todo $x_0\in X$ la sucesión $x_n = f^n(x_0)\to p$, cuando $n\to\infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002380]

Ejercicio 7109

Sean (E,d) un espacio métrico compacto y $f:E\to E$ una aplicación que verifica

$$d(f(x),f(y))\geqslant d(x,y),\quad \text{para todo } x,y\in E\,.$$

Se propone demostrar que f es una isometría sobreyectiva. Sean $a,b\in E$ y se pone, para $n\geqslant 1$, $a_n=f^n(a)=f\circ f^{n-1}(a)$ y $b_n=f^n(b)$.

1. Demostrar que para todo $\varepsilon>0$, existe $k\geqslant 1$ tal que $d(a,a_k)<\varepsilon$ y $d(b,b_k)<\varepsilon$. (Considerar un valor adherente de la sucesión $z_n=(a_n,b_n)$).
2. Deducir que $f(E)$ es denso en E y que $d(f(a),f(b))=d(a,b)$ (Considerar la sucesión $u_n=d(a_n,b_n)$).

Solución ▼ [002381]

Ejercicio 7110

Se da una métrica d sobre $X=[0,1]$ tal que la identidad $i:(X,|\cdot|)\to(X,d)$ sea continua (i.e. la topología definida por d es menos fina que la topología usual de X).

1. Demostrar que todo subconjunto de X compacto para la topología usual es también compacto para la topología definida por d; luego demostrar esta propiedad para los cerrados.
2. Deducir que la topología definida por d es la topología usual.

Solución ▼ [002382]

Ejercicio 7111

1. Sea X un espacio topológico separado. Demostrar que es compacto y discreto si y solo si es finito.
2. Demostrar que en un espacio topológico separado, el conjunto formado por una sucesión convergente y su límite es compacto.

[006164]

Ejercicio 7112

Sea X un espacio topológico compacto y $f_1,f_2,\dots,f_n$, n funciones continuas reales que separan los puntos de X. Demostrar que X es homeomorfa a una parte de $\mathbb{R}^n$. [006165]

Ejercicio 7113

Sea X,Y dos espacios topológicos separados y (K_n) una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos de X. Sea $f:X\to Y$ una aplicación continua. Demostrar que $f(\bigcap_n K_n)=\bigcap_n f(K_n)$. [006166]

Ejercicio 7114

Sea X un espacio topológico separado y A y B dos compactos disjuntos en x. Demostrar que tienen vecindarios abiertos disjuntos. (Comenzar por el caso donde B se reduce a un punto). [006167]

Ejercicio 7115

Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones reales definidas en un espacio topológico compacto X, convergiendo simplemente a una función f; se supone que las funciones f_n y f son continuas. Demostrar que la convergencia es uniforme sobre X. Aplicación : Demostrar que la sucesión de funciones f_n definidas en $[0,1]$ por $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k}$ converge a 0 uniformemente en $[0,1]$. [006168]

Ejercicio 7116

Sea X un espacio topológico compacto y $C(X)$ el espacio de funciones reales continuas en X, con norma uniforme. Sea J un ideal propio de $C(X)$; se va a demostrar por reducción al absurdo que todas las funciones de J se anulan en el mismo punto de X.

1. Si no, demostrar que se puede encontrar n puntos de X, $x_1,\dots,x_n$, $V_1,\dots,V_n$, donde V_i vecindario de x_i y n funciones de J, $f_1,\dots,f_n$ tales que
$$X=\bigcup_i V_i,\quad f_{i|V_i}\neq 0.$$
2. Construir entonces una función g en J nunca se anula y deducir que $\mathbf{1}\in J$, de ahí la contradicción.

[006169]

Ejercicio 7117

Sea X un espacio topológico y $f: X\times[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que la aplicación $g: x\in X\to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ es continua. [006170]

Ejercicio 7118

Sea $X=[a,b]$ y se da una métrica d sobre X tal que la topología definida por d es menos fina en X que la topología usual. Demostrar que todo subconjunto de X compacto para la topología usual es también compacto para la topología definida por d ; luego demostrar esta propiedad para los cerrados. Deducir que la topología definida por d es la topología usual. [006171]

Ejercicio 7119

Sea X un espacio topológico separado y (K_n) una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos de X. Demostrar que $K=\cap K_n$ es no vacío y que si Ω es un abierto conteniendo K, contiene todos los K_n a partir de un cierto rango. [006172]

Ejercicio 7120

Sea f y g dos funciones reales continuas en un espacio topológico compacto X, tales que $f\geqslant 0$, y $f(x)>0$ si $g(x)\leqslant 0$. Demostrar que existe una constante $A>0$ tal que
$$Af(x)+g(x)>0,\ \forall x\in X.$$
(*Indicación :* razonar por contradicción, y considere los conjuntos $A_n=\{x\in X/nf(x)+g(x)\leqslant 0\}$). [006173]

Ejercicio 7121

Sea X un espacio topológico compacto y $f_1,f_2,\dots,f_n$, n funciones continuas reales que separan los puntos de X. Demostrar que X es homeomorfa a una parte de $\mathbb{R}^n$. [006174]

Ejercicio 7122

Demostrar que toda función reglada en $[0,1]$ se aproxima uniformemente por las funciones en escalera. [006175]

Ejercicio 7123

Sea (f_n) una sucesión creciente de funciones reales definidas en un espacio topológico compacto X, convergiendo simplemente a una función f ; se supone que las funciones f_n y f son continuas. Demostrar que la convergencia es uniforme sobre X. [006176]

Ejercicio 7124

Sea X un espacio topológico compacto y $C(X)$ el espacio de funciones continuas en X, con norma uniforme.

1. Sea J un ideal propio de $C(X)$; demostrar que todas las funciones de J se anulan en el mismo punto de X. *Indicación :* razonar por contradicción, utilizar el hecho de que una función continua $\neq 0$ en x, es $\neq 0$ en un vecindario de x y recubrir X, con tales vecindarios.

   Para $f \in J$, se denota $Z_f = f^{-1}(\{0\})$, el conjunto de ceros de f.
2. Sea J un ideal de $C(X)$ y $Z = \bigcap_{f \in J} Z_f$; Z es cerrado.
   (a) Sea K un cerrado de X disjunto de Z. Por un razonamiento similar al de 1., construir $f \in J$, $f \geqslant 0$ y no se anula en K. Estudiar el límite F de $\frac{nf}{1+nf}$ en $C(X)$.
   (b) Demostrar que si $g \in C(X)$ se anula en un abierto que contiene Z, entonces $g \in J$ y $Z \neq \varnothing$.
   (c) Sea $g \in C(X)$ nula en Z ; por una buena elección de K, demostrar que $g \in \overline{J}$.

[006177]

Ejercicio 7125

Demostrar que los subgrupos compactos del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ están contenidos en $\mathbb{U}$ el subgrupo de números complejos de módulo 1. [006178]

Ejercicio 7126

Se recuerda la construcción del conjunto triádico de Cantor : se parte del segmento $[0,1]$ del cual eliminamos el intervalo medio $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$; en la segunda etapa, se suprimen los intervalos $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ y $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ etc. Se denota K_n la unión de los intervalos restantes en la n-ésima étape, y $K = \bigcap K_n$. Demostrar que K es un compacto de interior vacío, sin puntos aislados. [006179]

Ejercicio 7127

Se considera en $M_n(\mathbb{R})$ el subconjunto de matrices con determinante igual a 1. ¿Es compacto ? Se denota $O(n)$ el subconjunto de matrices ortogonales (${}^tA.A = I$) ; demostrar que $O(n)$ es compacto. [006180]

Ejercicio 7128

Demostrar que en un evn, la bola unidad cerrada es compacta si y solo si la esfera unitaria es compacta. [006181]

Ejercicio 7129

Sea A una parte de un espacio normado E. Se denota $\text{co}(A)$, la envolvente convexa de A i.e. el conjunto $\{\sum_{\text{finita}} \lambda_j a_j, \lambda_j \geqslant 0, \sum \lambda_j = 1\}$ combinaciones convexas de puntos de A.

1. Demostrar que si A es finito, $\text{co}(A)$ es compacto.
2. Demostrar que si E es de dimensión finita n y A compacto, $\text{co}(A)$ es compacto (se admite que todo punto de $\text{co}(A)$ es una combinación convexa de a lo sumo $n+1$ puntos de A).

[006182]

Ejercicio 7130

Sea (X,d) un espacio métrico.

1. Sea A una parte compacta de X ; demostrar que existen $x,y \in A$ tales que $\text{diam}A = d(x,y)$.
2. Sean A y B dos partes compactas disjuntas de x. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $d(a,b) \geqslant \delta \; \forall a \in A, b \in B$.
3. Demostrar que el resultado es aún verdadero si uno es compacto y el otro cerrado, pero se vuelve falso si ambas partes solo son cerradas.

[006183]

Ejercicio 7131

Sea f una sobreyección continua de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Se va a demostrar que la imagen inversa de todo punto es no acotada. Se razona por reducción al absurdo :
Si no, existe $a \in \mathbb{R}$ y un disco cerrado D del plano tal que $f^{-1}(\{a\}) \subset D$; estudiando $f(D^c)$ y $f(D)$ demostrar que $f(\mathbb{R}^2)$ no puede ser igual a todo $\mathbb{R}$. [006184]

Ejercicio 7132

Sea $F_1, F_2, \dots, F_p$, p cerrados de un espacio métrico compacto E, tales que $F_1 \cap \cdots \cap F_p = \varnothing$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que toda parte A de E intersecando todos los F_i tiene un diámetro $\geqslant \varepsilon$ (razonar por contradicción). [006185]

Ejercicio 7133

Sea $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, donde los X_i son n espacios métricos, y se denota p_i la proyección de X sobre X_i. Demostrar que $A \subset X$ es compacto si y solo si A es cerrado en X y los $p_i(A)$ son todos compactos. [006186]

Ejercicio 7134

1. Demostrar que la bola unidad cerrada de un evn de dimensión finita es compacta.
2. Sea E un espacio vectorial normado y F un subespacio de E de dimensión finita. Demostrar que $d(x,F) = \inf\{d(x,y),\ y \in F,\ ||y|| \leqslant 2||x||\}$; deducir que F es cerrado en E.
3. Sea (f_n) una sucesión de polinomios que converge uniformemente en $[0,1]$ a una función que no es un polinomio. Demostrar que la sucesión de los grados tiende al infinito (razonar por contradicción).

Ejercicio 7135 Parcial de diciembre 1998

Sea E un espacio vectorial normado en $\mathbb{C}$ de bola unidad cerrada $\overline{B}$ y F un subespacio vectorial cerrado de E. Se ha demostrado en la lista anterior que si $F \neq E$, $\sup_{x \in \overline{B}} d(x, F) = 1$. Se va a demostrar que un evn cuya bola unidad cerrada es compacta es necesariamente de dimensión finita. Se supone de modo que $\overline{B}$ es compacto.

1. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número finito de puntos $x_1, \dots, x_k \in \overline{B}$ tales que $\overline{B} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon)$.
2. Demostrar que E es de dimensión finita : para eso, considerar el subespacio vectorial generado por $x_1, \dots, x_k$.

[006188]

Ejercicio 7136

Aquí existen algunas aplicaciones del siguiente hecho importante : en un espacio métrico compacto, toda sucesión que tenga un solo valor adherente converge.

1. Sea (a_n) una sucesión acotada de reales, tal que (e^{ita_n}) converge para un conjunto no numerable de $t \in \mathbb{R}$; demostrar que la sucesión (a_n) converge.
2. Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y G su gráfico. Demostrar que si G es conexo por arcos, f es continua.
3. Sea f una aplicación de X en Y, espacios métricos y G la gráfica de f. Demostrar que G es cerrado en $X \times Y$ si f es continua. Demostrar que el recíproco es cierto cuando Y es compacto.
4. Sea X un espacio métrico, Y un espacio métrico compacto y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que, para todo $x \in X$, la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene una sola solución $y \in Y$. Demostrar que la aplicación $u : x \in X \to y \in Y$ así definida es continua.

[006189]

Ejercicio 7137

Se considera una sucesión (x_n) de $[0, 1]$ tal que $x_{n+1} - x_n$ tiende a 0. Sea A el conjunto de sus valores de adherencia.

1. Justificar el hecho de que A es no vacío. Si $\alpha \notin A$, demostrar que existe $\varepsilon > 0$ y n_0 tales que los puntos x_n, $n \geqslant n_0$, están fuera de $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Demostrar así como A es un intervalo (si α y $\beta \in A$, $\frac{\alpha + \beta}{2} \in A$).
2. Se supone además que esta sucesión es una sucesión recurrente i.e. definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, donde f es continua de $[0, 1]$ en sí mismo, y un punto inicial $x_0 \in [0, 1]$. Demostrar que la sucesión converge (se comienza por notar que si $x \in A$, entonces $x = f(x)$, y eso si $x_m \in A$, para un índice m, entonces la sucesión converge.)
3. Sea $x = (x_n)$ una sucesión de l^∞ ; demostrar que el conjunto de valores de adherencia de la sucesión y de término general $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ es un intervalo. Deducir que la aplicación f de l^∞ en sí mismo que se asocia y a x, no es biyectiva.

Ejercicio 7138

Se denota $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, y h la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1 : t \to (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$.

1. Demostrar que el círculo desprovisto de un punto, $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, es homeomorfo al intervalo $]0,1[$.
2. Demostrar que h es una biyección continua de $[0,1[$ sobre $\mathbb{S}^1$, pero no es un homeomorfismo.

[006191]

Ejercicio 7139

Demostrar de varias maneras que el círculo unitario $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ es compacto. [006192]

Ejercicio 7140

Sea (X,d) un espacio métrico, A y B dos partes de X. Se define $d(A,B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} d(a,b)$.

1. Si A y B son disjuntos, uno compacto y el otro cerrado, demostrar que $d(A,B) > 0$.
2. Demostrar, por un contra-ejemplo, que esto puede ser falso si las dos partes solo son cerradas.

[006193]

Ejercicio 7141

Sea E un espacio normado, X y Y dos subconjuntos de E. Demostrar que

1. $X+Y$ es abierto si X es abierto ;
2. $X+Y$ es compacto si X y Y son compactos ;
3. $X+Y$ es cerrado si X es compacto y Y cerrado.

¿Qué se puede decir de $X+Y$ si X y Y son solamente cerrados ? [006194]

Ejercicio 7142

Sea E un espacio normado, X y Y dos partes compactas de E. Demostrar que la unión de segmentos uniendo un punto $x \in X$ en un punto $y \in Y$ es aún compacto. [006195]

Ejercicio 7143

Sea K un convexo compacto simétrico de $\mathbb{R}^n$ conteniendo 0 como un punto interior. Entonces K es la bola unidad cerrada asociada a una norma de $\mathbb{R}^n$: considerar para esto

$$p(x) = \inf\left\{t > 0 / \frac{x}{t} \in K\right\}.$$

[006196]

Ejercicio 7144

Encontrar el conjunto de valores de adherencia cuando $x \to 0$ de $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. [006197]

Ejercicio 7145

1. Sea X un espacio métrico compacto y (f_n) una sucesión de aplicaciones continuas con valores en un espacio métrico Y, convergiendo hacia f uniformemente en X. Demostrar que si (x_n) es una sucesión de puntos de X convergiendo hacia $x \in X$, entonces $f_n(x_n)$ tiende a $f(x)$.
2. Aplicación : Sea X un espacio métrico compacto, y sea (f_n) una sucesión de aplicaciones X en X, teniendo cada uno un punto fijo ; se supone que la sucesión (f_n) converge a una función f uniformemente en X. Demostrar que f también tiene un punto fijo.
3. Sea K un convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ y f una aplicación continua de K en K verificando
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|;$$
considerando las funciones f_n definidas en K por $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, donde $x_0 \in K$, demostrar que f tiene un punto fijo. ¿Es único ? ¿Qué sucede si K ya no es convexo ?

[006198]

Ejercicio 7146

Sea A una parte de un espacio normado E. Se denota $\mathrm{co}(A)$, la envolvente convexa de A i.e. el conjunto $\{ \sum_{finita} \lambda_j a_j, \lambda_j \geqslant 0, \sum \lambda_j = 1\}$ combinaciones convexas de puntos de A.

1. Demostrar que si A es finito, $\mathrm{co}(A)$ es compacto.
2. Demostrar que si E es de dimensión finita y A compacto, $\mathrm{co}(A)$ es compacto.

[006199]

Ejercicio 7147

Sea $E = C_b(\mathbb{R})$ dotado con la norma uniforme ; para $f \in E$, se denota f_a la traslación de f por a, i.e. la función $x \to f(x-a)$, y O_f el conjunto de traslaciones de f.

1. Demostrar que si f es periódica, O_f es compacto (considerar la aplicación $a \to f_a$).
2. Sea f un límite uniforme en $\mathbb{R}$ de funciones periódicas ; demostrar que O_f es precompacto.
3. Se supone esta vez O_f precompacto ; se va a demostrar que f es uniformemente continua.
   (a) De toda sucesión (f_{a_n}) de O_f se puede extraer una sub-sucesión convergente en E.
   (b) Si $x_n - y_n$ tiende a 0, demostrar que $(f_{x_n - y_n})$ no tiene que un valor de adherencia f ; deducir que $f(x_n) - f(y_n)$ tiende a 0.
   (c) Demostrar que f es uniformemente continua.

[006200]

Ejercicio 7148

Sea E el conjunto de sucesiones infinitas de números reales $x = (x_1, x_2, \ldots)$, con valores 0 o 1. Si x e y son dos elementos de E, se establece $d(x,y) = \sup_{k \geqslant 1} (\frac{1}{k} |x_k - y_k|)$.

1. Demostrar que d es una distancia en E.
2. Sea $\varepsilon > 0$; demostrar que existe una parte finita E_ε de E que tiene la siguiente propiedad : bolas cerradas de radio ε centradas en un punto E_ε recubren E.
3. Demostrar que E es compacto.

Ejercicio 7149

Sea K un convexo compacto de $\mathbb{R}^2$.

1. Si K es de interior vacío, demostrar que K es homeomorfo al segmento $[0,1]$.
2. Si K no es de interior vacío, demostrar que K es homeomorfa al disco unitario cerrado considerando la aplicación $p(x) = \inf\{a > 0;\ \frac{x}{a} \in K\}$; se demuestra que 0 es un punto interior, que $\delta||x|| \leqslant p(x) \leqslant C||x||$ ya que p es continua.

[006202]

Ejercicio 7150

Sea (A_n) una sucesión decreciente de compactos conexos no vacíos en un espacio topológico separado. Demostrar que $\bigcap_n A_n$ es aún un compacto conexo no vacío. (Para la conexidad se puede razonar con conjuntos cerrados y usar el ejercicio 7114.) [006203]

Ejercicio 7151

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto de X.

1. Demostrar que si X es casi compacto y A es cerrado en X, entonces A es casi compacto.
2. Demostrar que si X es Hausdorff y A es casi compacto, entonces A es cerrado en X.

[006783]

Ejercicio 7152

Sea (X,d) un espacio métrico compacto, y sea $f : X \to X$ una aplicación continua verificando $\forall x \neq y :$ $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Demostrar que existe un punto fijo único para f. (Indicación : observar $\inf d(x, f(x))$) [006788]

Ejercicio 7153

Sea K un compacto contenido en U un abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea K_ε definido por $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) \leqslant \varepsilon\}$.

1. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto K_ε es compacto.
2. Demostrar que existe un $\varepsilon > 0$ tal que K_ε está contenido en U (Indicación : observar la función $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ definida en K).

[006797]

Ejercicio 7154

Sea (X,d) un espacio métrico. Se supone que *todas* bolas cerradas (es decir, los conjuntos de la forma $\{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$) son compactas.

1. Demostrar que X es completo.
2. Demostrar que si $A \subset X$ es cerrado y acotado, entonces A es compacto.

[006817]

Ejercicio 7155

Sea (X,d) un espacio métrico compacto y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solo tiene un valor de adherencia $x \in X$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. (Indicación : suponer que la sucesión no converge a x.)

[006818]

Ejercicio 7156

Sea X un espacio topológico compacto. Sea $\mathscr{F}$ una colección de funciones continuas en X, con valores en $\mathbb{R}$. La colección $\mathscr{F}$ tiene las siguientes dos propiedades :

1. Si f y g pertenecen a $\mathscr{F}$, entonces su producto $f\cdot g$ pertenece a $\mathscr{F}$.
2. Para todo $x\in X$ existe un vecindario U de x y una función $f\in\mathscr{F}$ tal que f es idénticamente nula en U.

Demostrar que la función que es idénticamente nula en X pertenece a $\mathscr{F}$. [006827]

Ejercicio 7157

Sea X un espacio topológico separado y sea ∞ un punto que no pertenece a X. Se define $x_\infty = X\cup\{\infty\}$ y se define $\mathscr{T}_\infty \subset \mathscr{P}(X_\infty)$ por : $A\in\mathscr{T}_\infty$ si y solo si

$$\infty\notin A \Rightarrow\ A \text{ es un abierto de } X\,;$$
$$\infty\in A \Rightarrow\ X\setminus A \text{ es un compacto de } X.$$

1. Demostrar que si A pertenece a $\mathscr{T}_\infty$, entonces $A\cap X$ es un abierto de X.
2. Demostrar que $\mathscr{T}_\infty$ es una topología sobre X_∞.
3. Demostrar que X es denso en X_∞.
4. Demostrar que X_∞ es compacto.

[006835]

306 422.00 Continuidad, continuidad uniforme

Ejercicio 7158

Sea X un espacio topológico y $f : X\to\mathbb{R}$.

1. Demostrar que f es continua si y solo si para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, conjuntos $\{x;\ f(x)<\lambda\}$ y $\{x;\ f(x)>\lambda\}$ son abiertos de X.
2. Demostrar que si f es continua, para todo ω abierto de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ es un F_σ abierto de X (F_σ= unión numerable de cerrados).

Indicación ▼ Solución ▼ [002353]

Ejercicio 7159

1. Sea C el espacio de funciones continuas reales en $[0,1]$ dotado de la métrica $d_1(f,g)=\int_0^1 |f-g|\,dx$, luego de la métrica $d_\infty(f,g)=\sup\limits_x |f(x)-g(x)|$. Verificar que la aplicación $f\to\int_0^1 |f|dx$ de C en $\mathbb{R}$ es 1-lipschitziana en los dos casos.

2. Sea c el espacio de sucesiones reales convergentes, dotado de la métrica $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si se denota por $\ell(x)$ el límite de la sucesión x, demostrar que ℓ es una aplicación continua de c en $\mathbb{R}$. Deducir que c_0 es cerrado en c.

Indicación ▼ Solución ▼ [002354]

Ejercicio 7160

Sea f, g dos aplicaciones continuas de X en Y, espacios topológicos, Y es separado. Demostrar que $\{f = g\}$ es cerrado en X ; deducir que si f y g coinciden en una parte densa de X, entonces $f = g$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002355]

Ejercicio 7161

Una aplicación de X en Y se dice *abierta* si la imagen de todo abierto de X es un abierto de Y ; *cerrada* si la imagen de todo cerrado de X es un cerrado de Y.

1. Demostrar que una función polinomial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una aplicación cerrada.
2. Demostrar que la aplicación $(x,y) \in X \times Y \to x \in X$ es abierta, pero no necesariamente cerrada (considerar la hipérbola equilátera de $\mathbb{R}^2$).
3. Demostrar que la función indicatriz del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, como aplicación de $\mathbb{R}$ en $\{0,1\}$, es sobreyectiva, abierta, cerrada, pero no continua.
4. Demostrar que toda aplicación abierta de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y continua es monótono.

Indicación ▼ Solución ▼ [002356]

Ejercicio 7162

1. Demostrar que f es continua si y solo si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo A en X. ¿Qué se puede decir entonces de la imagen por f de un conjunto denso en X ?
2. Demostrar que f es cerrada si y solo si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, y que f es abierta si y solo si $f(\mathring{A}) \subset f(\mathring{A})$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002357]

Ejercicio 7163

1. Sea f una función real continua en $[0,1]$; demostrar que f es "casi lipschitziana" en el sentido : $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon;\ \forall x,y \in [0,1]\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant C_\varepsilon |x-y| + \varepsilon$.
2. Demostrar que una función f uniformemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ verifica para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$, donde a y b son constantes.

[002358]

Ejercicio 7164

Sea f una función continua de $]0,1[$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que, si f es uniformemente continua, es acotada. ¿Recíproco ? [002359]

Ejercicio 7165

Sea f una función uniformemente continua en $\mathbb{R}$ tal que $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge. Demostrar que f tiende a 0, cuando $x \to +\infty$. Encontrar así el hecho de que la función $\operatorname{sen}(x^2)$ no es uniformemente continua.

Indicación ▼ Solución ▼ [002360]

Ejercicio 7166

Sea f una isometría de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que se tiene $f(x) = a - x$, o $f(x) = a + x$, donde $a = f(0)$. (Llevarlo al caso $a = 0$.) [006066]

Ejercicio 7167

Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Se va a demostrar que f es nula, o la función de identidad.

1. Se observa que $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ y así, que f es creciente.
2. Demostrar que para todo x real se puede construir una sucesión (R_k) y una sucesión (s_k) de racionales tales que $r_k \uparrow x$ y $s_k \downarrow x$. Deducir el resultado.

[006067]

Ejercicio 7168

Sea f una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se recuerda que t es un periodo de f si $f(x+t) = f(x)$, para todo x real. Sea E el grupo de periodos de f, se supone no vacío y $T = \inf\{t \in E;\ t > 0,\}$.

1. Demostrar que si $T = 0$, entonces f es constante.
2. Si $T > 0$, f es T-periódica y $E = \mathbb{Z}.T$.

[006068]

Ejercicio 7169

Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y ω su función oscilación definida para $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ por

$$\omega(x_0, \delta) = \sup_{\substack{|x_0 - y| = \delta \\ |x_0 - z| = \delta}} |f(y) - f(z)|.$$

1. Verificar que f es continua en x_0 si y solo si
$$\omega(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega(x_0, \delta) = 0.$$
2. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, $O_\varepsilon = \{x;\ \omega(x) < \varepsilon\}$ es un abierto. Deducir que $C(f)$, el conjunto de puntos de continuidad de f, es un G_δ.

[006069]

Ejercicio 7170

¿Existe una aplicación continua f de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)$ sea racional si x es irracional, y $f(x)$ irracional si x es racional ? [006070]

Ejercicio 7171

Se denota para todo $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$.

1. Demostrar que la función φ es continua, 1-periódica, y estudiar la función f tal que
$$f(x) = \sum_n \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$
2. Se fija $x_0 \in \mathbb{R}$, y se consideran las dos sucesiones de términos
$$z_k = \frac{1}{2^k} E(2^k x_0), \quad y_k = z_k + \frac{1}{2^k}.$$
Demostrar que la sucesión (z_k) crece a x_0 y que la sucesión (y_k) decrece hacia x_0. Calcular $\frac{f(z_k) - f(y_k)}{z_k - y_k}$ y deducir que f no es derivable en x_0. Sea ha construido así una función continua, en ninguna parte derivable.

[006071]

Ejercicio 7172

Sea X un conjunto infinito dotado de la topología cuyos únicos abiertos son : el conjunto vacío, y las partes complementarias finitas. Demostrar que si Y es un espacio separado, toda aplicación continua de X en Y es constante. [006072]

Ejercicio 7173

Sean E y F dos espacios vectoriales normados y denotamos B_E la bola unidad cerrada de E. Sea u una aplicación de E en F tal que
(i) $u(x+y) = u(x) + u(y),\ \forall x, y \in E$. (ii) $u(B_E)$ es acotada en F.

1. Calcular $u(rx)$, $x \in E$, r racional.
2. Demostrar que u es continua en 0, más precisamente :
$$\exists M > 0;\ \forall x \neq 0,\ \ ||u(x)|| \leqslant M||x||.$$
3. Demostrar que u es continua y lineal.

[006073]

Ejercicio 7174

Sea O un abierto del espacio topológico producto $X \times Y$. Demostrar que para todo $x \in X$, el conjunto $A_x = \{y \in Y/(x,y) \in O\}$ es un abierto de Y. Verificarlo sobre $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy > 1,\ x+y < 4\}$. [006074]

Ejercicio 7175

Demostrar que si f es continua de X en Y, espacios topológicos, Y es separado, su gráfico G es cerrado en $X \times Y$. Estudiar el recíproco considerando la hipérbola equilátera. [006075]

Ejercicio 7176

Sea $f : X \to Y$, espacios topológicos. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes :
(i) f es continua.
(ii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$, para toda parte B de Y.
(iii) $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$, para toda parte B de Y.

Deducir $\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$, para toda parte B de Y. [006076]

Ejercicio 7177

Sea C el espacio de funciones continuas reales en $[0,1]$ dotado de la métrica $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|\, dx$, luego de la métrica $d(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$. Verificar que la aplicación $f \to \int_0^1 f dx$ de C en $\mathbb{R}$ es continua en ambos casos. [006077]

Ejercicio 7178

Sea c el espacio de sucesiones reales convergentes, dotado de la métrica $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si se denota por $l(x)$ el límite de la sucesión x, demostrar que l es una aplicación continua de c en $\mathbb{R}$. [006078]

Ejercicio 7179

Sea X un conjunto infinito dotado de la topología cuyos únicos abiertos son : el conjunto vacío, y las partes complementarias finitas. Demostrar que si Y es un espacio separado, toda aplicación continua de X en Y es constante. [006079]

Ejercicio 7180

Sea X un espacio métrico y Y un subconjunto de X. Demostrar que Y es cerrado si y solo si existe una aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $Y = \{x / f(x) = 0\}$. [006080]

Ejercicio 7181

Sea f una aplicación abierta de X en $\mathbb{R}^n$, y A una parte de x. Demostrar que para todo a en el interior de A,

$$\|f(a)\| < \sup_{x \in A} \|f(x)\|.$$

[006081]

Ejercicio 7182

Sea (X,d) un espacio métrico ; demostrar que la aplicación $(x,y) \to d(x,y)$ es continua en el producto $X \times X$. [006083]

Ejercicio 7183

Sea (E,d) un espacio métrico y A una parte de E ; verificar las propiedades de la función $d_A : x \to d(x,A)$:

1. d_A es 1-lipschitziana ; $d(x,A) = d(x,\overline{A})$ y $d_A(x) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$.
2. Demostrar que $\{x \in E;\ d(x,A) < \varepsilon\}$ es un abierto conteniendo A.
3. Demostrar que todo cerrado de E es un G_δ y que todo abierto es un F_σ.

[006084]

Ejercicio 7184 Soporte de una función continua

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un espacio topológico E. Se llama soporte (cerrado) de f, $S = S(f) = \overline{\{x \in E;\ f(x) \neq 0\}}$.

1. Demostrar que $S = \overline{\overset{\circ}{S}}$.
2. Recíproco. Se supone E métrico y $A \subset E$ cerrado verificando $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Demostrar que existe $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $A = S(f)$.

[006085]

Ejercicio 7185

1. Demostrar que un espacio métrico tiene una fuerte propiedad de separación, a saber : dos cerrados disjuntos F_1 y F_2 puede estar separados por dos conjuntos abiertos disjuntos, considerando $\{x/d(x,F_1) > d(x,F_2)\}$.
2. Demostrar que la propiedad anterior es equivalente a la existencia de una función continua f valiendo 0 sobre F_1 y 1 sobre F_2. (Considerar $f(x) = \dfrac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$).

[006086]

Ejercicio 7186

Sea (X,d) un espacio métrico con métrica acotada. Se denota $\mathscr{F}$ el conjunto de cerrados no vacíos de X, y se define para A y B en $\mathscr{F}$,

$$\delta(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$$

donde d_A es la función acotada $x \to d(x,A)$. Demostrar que se ha definido así una métrica en $\mathscr{F}$, y que la aplicación $a \to \{a\}$ es una isometría de X en $\mathscr{F}$. [006087]

Ejercicio 7187

1. Demostrar que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ (dotados de la topología inducida por la de $\mathbb{R}$) no son homeomorfos. También se puede demostrar que dos subconjuntos numerables densos de $\mathbb{R}$ son siempre homeomorfos.
2. Encontrar un homeomorfismo de $]-1,1[$ en $\mathbb{R}$; de $]-1,1[$ en $]a,b[$.
3. Demostrar que si I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y c un punto que no pertenece a I, los conjuntos I y $I\cup\{c\}$ no son homeomorfas aunque estén en biyección.

[006116]

Ejercicio 7188

Sea f una inyección continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

1. Demostrar usando el teorema de valores intermedios que f es estrictamente monótona.
2. Demostrar que la imagen por f de un intervalo abierto es aún un intervalo abierto ; deducir que f es abierto y por lo tanto, un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $f(\mathbb{R})$.

[006117]

Ejercicio 7189

Sea f una aplicación de X en Y separado. Demostrar que si f es continua, su gráfico G es cerrado en $X\times Y$, y la aplicación $x \to (x, f(x))$ es un homeomorfismo de X en el gráfico G de f. Demostrar en un ejemplo que la recíproca es falso en general (pero cierta si Y es compacto). [006118]

Ejercicio 7190

Demostrar que el cuadrado unitario cerrado y el disco cerrado en $\mathbb{R}^2$ son homeomorfas. [006119]

Ejercicio 7191

Demostrar que la bola unidad abierta de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a todo $\mathbb{R}^n$, y dos bolas abiertas son homeomorfas entre sí. [006120]

Ejercicio 7192

Se denota $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$, y h la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1 : t \to (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$.

1. Demostrar que el círculo desprovisto de un punto, $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, es homeomorfa al intervalo $]0,1[$.
2. Demostrar que h es una biyección continua de $[0,1[$ sobre $\mathbb{S}^1$, pero no es un homeomorfismo.
3. Sea f una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, esta vez inmerso en $\mathbb{C}$. Demostrar que f admite un "logaritmo continuo", es decir que existe g continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f = \mathrm{e}^{ig}$.

[006121]

Ejercicio 7193

Sea F la aplicación de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{C}^2$ que a x asociada $(\exp(2i\pi x), \exp(2i\pi x\sqrt{2}))$ cuya imagen es la curva γ.

1. Demostrar que F es continua inyectiva.
2. Demostrar que la adherencia de γ en $\mathbb{C}^2$ es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
3. Demostrar que F^{-1} no es continua en ningún punto de γ.

[006122]

Ejercicio 7194 Proyección estereográfica

Sea $S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \|x\|^2 = \sum_1^n x_i^2 = 1\}$, la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$, p su polo norte i.e. el punto $p = (0, \ldots, 0, 1)$, y $A = S^{n-1} \backslash \{p\}$.

1. Demostrar que el "plano" del ecuador E es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$.
2. En todo punto x de A se asocia $h(x)$ el punto de intersección de la recta saliendo de p pasando por este punto, con el plano E. Explicitar h, luego h^{-1} y demostrar que la esfera es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$. (Se establece $h(x) = p + \frac{x-p}{1-x_n}$ y $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\|y\|^2} + p\frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}$).
3. Deducir un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

[006123]

Ejercicio 7195

1. Demostrar que si dos funciones continuas en un espacio topológico X coinciden en un conjunto denso en X, son iguales.

2. Sea f una función real definida continua en $[-1,1]$. Demostrar que si para todo n, $\int_{-1}^{1} f(x)\, x^n\, dx$ es nula, entonces f es nula. (*Indicación :* Considerar la aplicación $g \to \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$.)

[006131]

Ejercicio 7196

Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$, y f una aplicación continua de F en $\mathbb{R}$. Demostrar que f se extiende a una función continua en $\mathbb{R}$ todo entero. ¿Se puede reemplazar "cerrado" por "abierto" ? [006132]

Ejercicio 7197

Sea $n \to r_n$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, y f la función definida en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ por

$$f(x) = \sum_{r_n < x} 2^{-n}.$$

Demostrar que f es continua, pero que no puede prolongarse a ninguna función continua en $[0,1]$. [006133]

Ejercicio 7198

Sea (X,d) un espacio métrico ; primero se recuerdan las propiedades de la función $d_A : x \to d(x,A)$, donde A es una parte de X :

1. d_A es 1-lipschitziana, y $d_A(x) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$. Se deduce que todo cerrado es un G_δ y que todo abierto es un F_σ.
2. Demostrar que un espacio métrico tiene una fuerte propiedad de separación, a saber : dos cerrados disjuntos F_1 y F_2 puede estar separados por dos conjuntos abiertos disjuntos, considerando $\{x / d(x,F_1) > d(x,F_2)\}$.
3. Demostrar que la propiedad anterior es equivalente a la existencia de una función continua f valiendo 0 sobre F_1 y 1 sobre F_2.
4. Sea $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n cerrados disjuntos en X, y $c_1, c_2, \ldots, c_n$, n números reales. Demostrar que la función f valiendo c_i sobre F_i puede extenderse a una función continua en todo X.

[006134]

Ejercicio 7199

Sea (X,d) un espacio métrico, y Y un subespacio no vacío de X. Se va a demostrar que toda función $f : Y \to \mathbb{R}$, k-lipschitziana, admite una extensión $g : X \to \mathbb{R}$ la cual es también k-lipschitziana. Sea entonces f así ; para todo $x \in X$ y $y \in Y$, se establece

$$f_y(x) = f(y) + kd(x,y).$$

1. Demostrar que para x fijo, el conjunto $\{f_y(x)\}$, cuando y recorre Y es minorado. Se define $g(x) = \inf\limits_{y \in Y} \{f_y(x)\}$.
2. Demostrar que la aplicación g así definida en X, realiza una extensión k-lipschitziana de f.
3. Dar una condición suficiente para que esta extensión sea única.

Ejercicio 7200

1. Demostrar que una función de (X,d) en (Y,δ) no es uniformemente continua, si y solo si se puede encontrar $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones de puntos de x, (x_n) y (y_n) verificando
   (i) $d(x_n, y_n)$ tiende a 0
   (ii) $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$.
2. Entre las siguientes funciones de variable real, ¿cuáles son uniformemente continuas : $\operatorname{sen}(x^2)$, $x \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$?

[006241]

Ejercicio 7201

Sea $E = C_b(\mathbb{R})$ dotado con la norma uniforme ; para $f \in E$, se denota f_a la traslación de f por a, i.e. la función $x \to f(x-a)$, y O_f el conjunto de traslaciones de f. Sea f una función continua periódica de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$;

1. Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que O_f es compacto y conexo (considerar la aplicación $a \to f_a$).

[006242]

Ejercicio 7202

Sea (f_n) una sucesión de aplicaciones crecientes de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, que converge simplemente a una función f continua. Demostrar que la convergencia es uniforme sobre $[0,1]$. *Indicación :* $\varepsilon > 0$ es fijo, demostrar que existe $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$ tales que $f(x_{j+1}) - f(x_j) \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1$ y establecer $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup\limits_j |f_n(x_j) - f(x_j)| + \varepsilon$. [006243]

Ejercicio 7203

Entre las siguientes métricas establecidas en $\mathbb{R}$, ¿cuáles son uniformemente equivalentes a la métrica usual ?

1. $|x^3 - y^3|$
2. $|\arctan x - \arctan y|$
3. $\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

[006244]

Ejercicio 7204

Sea d_1 y d_2 dos distancias en un espacio X. Se consideran las cuatro afirmaciones siguientes :
(i) Las métricas son topológicamente equivalentes.
(ii) Las métricas son uniformemente equivalentes.
(iii) Las métricas son equivalentes a Lipschitz (existe A y B constantes tales que $A\,d_1 \leqslant d_2 \leqslant B\,d_1$).
(iv) (X,d_1) y (X,d_2) son simultáneamente completos.
Establecer las implicaciones entre estas propiedades y dar contraejemplos cuando las implicaciones no se cumplan. [006245]

Ejercicio 7205

Sea d_1 y d_2 dos distancias en un espacio X. Demostrar que son uniformemente equivalentes si y solo si (X,d_1) y (X,d_2) tienen los las mismas aplicaciones reales uniformemente continuas.
Indicación : Razonar por contraposición y considerar por (x_n) y (y_n) verificando $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,y_n)=0$ y $d_2(x_n,y_n)\geqslant\varepsilon$, $A=\overline{\{x_1,x_2,\dots\}}$, $B=\overline{\{y_1,y_2,\dots\}}$ en (X,d_2), y

$$f(x)=\frac{d_2(x,A)}{d_2(x,A)+d_2(x,B)}.$$

[006246]

Ejercicio 7206

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales que convergen uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$ y sea g una función uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Demostrar que la sucesión $(g\circ f_n)$ converge uniformemente a $g\circ f$ sobre $\mathbb{R}$.
[006247]

Ejercicio 7207

Sea X un espacio métrico.

1. Demostrar que si X no es completo, existe una sucesión de Cauchy (a_n), no convergente, y tal que $a_p\neq a_q$, para $p\neq q$.
2. Sea (b_n) una sucesión de Cauchy no convergente; demostrar que el conjunto $B=\{b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ es cerrado en X.
3. Deducir de las preguntas anteriores que si X no es completo, se puede encontrar una función continua $f:X\to[0,1]$ que no es uniformemente continua. *Indicación :* Si (a_n) es definida por 1., construir $f:X\to[0,1]$ tal que $f(a_{2n})=0$ y $f(a_{2n+1})=1$.

[006248]

Ejercicio 7208

Sea f una aplicación biyectiva de espacios métricos $f:X\to Y$ uniformemente continua y de inversa continua. Demostrar que si Y es completo, X, lo es también. [006249]

Ejercicio 7209

Sea (X,d) y (Y,δ) dos espacios métricos; sea f una aplicación sobreyectiva de X sobre Y tal que $\delta(f(x),f(x'))=d(x,x')$, para todo x,x' en X. Verificar que f es un homeomorfismo uniformemente continuo, así como f^{-1}. Dar ejemplos de $\mathbb{R}^n$ y describir las isometrías de $\mathbb{R}$. [006250]

Ejercicio 7210

Se considera l^1 y l^2 los espacios de sucesiones reales absolutamente y cuadrado sumables, y la aplicación F (no lineal) de l^1 en l^2 definida por $F(a)=b$ si $a=(a_n)$, $b=(b_n)$, con $b_n=\operatorname{sign}(a_n)\sqrt{|a_n|}$. Verificar que F es un homeomorfismo de l^1 sobre l^2, uniformemente continua pero de inversa no uniformemente continua.
[006251]

Ejercicio 7211

1. (Primero un caso particular) En $\mathbb{R}^3$ se consideran los siguientes objetos : el semi-espacio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 1\}$, el plano $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, la esfera unidad $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1=0\}$, y el polo norte $N = (0,0,1)$.
   (a) Se define una aplicación $p : D \to P$ por el siguiente procedimiento : para un punto $A \in D$, la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por A y N corta el plano P en $p(A)$. Encontrar la expresión explícita de la aplicación p y deducir que es continua.
   (b) Se define una aplicación $i : P \to S^2$ por el siguiente procedimiento : para $B \in P$, la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por B y N corta la esfera unitaria S^2 en $i(B)$. Encontrar la expresión explícita de la aplicación i y deducir que es continua.
   (c) Usando de aplicaciones p y i, demostrar que P es homeomorfa a $S^2 \setminus \{N\}$.
   (d) Demostrarque S^2 es compacto.
2. (El caso general) Sea X un espacio topológico Hausdorff y ∞ un elemento que no pertenece a X. Se define $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ y se dice que un subconjunto $U \subset \widehat{X}$ es abierto si y solo si : o bien $\infty \notin U$ y U abierto en X, o bien $\infty \in U$ y $X \setminus U$ es casi compacto en X.
   (a) Demostrar que si U es un abierto de $\widehat{X}$ conteniendo ∞, entonces $X \setminus U$ es cerrado en x.
   (b) Demostrar que los abiertos en $\widehat{X}$ forman una topología.
   (c) Demostrar que $\widehat{X}$, con la topología descrita anteriormente es cuasi-compacto.
   (d) Considerando $X \subset \widehat{X}$, se da X la topología inducida por $\widehat{X}$. Demostrar que esta topología coincide con la topología inicial de X.

[006775]

Ejercicio 7212

Sea X un espacio topológico y Y un espacio topológico separado. Sea $f,g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas.

1. Demostrar que $U = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ es un abierto de X.
2. Sea $D \subset X$ una parte densa. Demostrar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

[006816]

307 423.00 Aplicación lineal acotada

Ejercicio 7213

Sean E_1, E_2 y F espacios normados en $\mathbb{R}$ y sea $B : E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal. Demostrar que B es continua si y solo si existe $M > 0$ tal que

$$\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|, \quad \text{para todo } x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002361]

Ejercicio 7214

Sean E y F dos espacios normados y $L : E \to F$ una aplicación lineal verificando : $(L(x_n))_n$ *es acotada en* F*, para toda sucesión* $(x_n)_n$ *de* E *tendiendo a* $0 \in E$. Demostrar que L es continua.

Indicación ▼ Solución ▼ [002362]

Ejercicio 7215

Sean E y F dos espacios normados reales y $f : E \to F$ una aplicación acotada en la bola unidad de E y revisando

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Demostrar que f es lineal continua.

Indicación ▼ Solución ▼ [002363]

Ejercicio 7216

Calcular la norma de los siguientes operadores :

— El cambio de l^∞ definido por $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ dotado con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $Tf(x) = f(x)g(x)$, donde $g \in X$.

Calcular la norma de las siguientes formas lineales :

— $X = \mathscr{C}([0,1])$ dotado con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $u(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, donde $g \in X$ es una función que se anula solo en $x = \frac{1}{2}$.

— $X = l^2$ y $u(x) = \sum a_n x_n$, donde (a_n) está en X.

— $X = l^1$ y $u(x) = \sum a_n x_n$, donde (a_n) está en l^∞.

— X el espacio de sucesiones convergentes dotado de la norma sup y $u : X \to \mathbb{R}$ la aplicación $u(x) = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002364]

Ejercicio 7217

Sea $X = \mathbb{R}[x]$ el conjunto de polinomios. Para $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$ se establece $\|P\| = \sup\limits_k |a_k|$, $U(P)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} a_k x^k$ y $V(P)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^k$.

1. Demostrar que $\|\cdot\|$ define una norma y que U y V definiendo aplicaciones lineales de X en X.
2. Examinar si U y V son continuas.

Indicación ▼ Solución ▼ [002365]

Ejercicio 7218

Sea l^∞ el espacio de sucesiones reales dotado de la norma uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Se considera la aplicación $A : l^\infty \to l^\infty$ definida por

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots).$$

Demostrar que :

1. A es inyectiva y continua con $\|A\| = 1$. Sin embargo, A no es sobreyectiva.
2. A admite una inversa por la izquierda que no es continua.

Solución ▼ [002366]

Ejercicio 7219

Sea X un espacio normado, $L : X \to \mathbb{R}$ una forma lineal no nula y $H = L^{-1}(\{0\})$ su núcleo.

1. Demostrar que, si L es continua, entonces H es un subespacio cerrado en X. Establecer la relación
$$\operatorname{dist}(a,H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|}, \quad \text{para todo } a \in X.$$
2. Recíprocamente, se supone que el núcleo H es un cerrado. Demostrar entonces que $\operatorname{dist}(a,H) > 0$ desde que $a \in X \setminus H$ y deducir que L es continua de norma a lo sumo $|L(a)|/\operatorname{dist}(a,H)$.
3. ¿Se puede generalizar esto a aplicaciones lineales entre espacios normados ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002367]

Ejercicio 7220

Sea $X = \mathscr{C}([0,1])$, con la norma $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$. Demostrar que la forma lineal $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ no es continua. ¿Qué se puede deducir del subespacio de funciones de X nulas en 0 ?

Solución ▼ [002368]

Ejercicio 7221

Sea $X = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ sea acotada}\}$. Se define $N(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Verificar que N es una norma, luego demostrar que la siguiente forma lineal L es continua y calcular su norma :
$$L : X \to \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002369]

Ejercicio 7222

Se designa por E el espacio $C([-1,1])$ equipado con la norma uniforme y por T la forma lineal definida por
$$Tf = \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(\pi t)\, f(t)\, dt$$
para $f \in E$. Verificar que T es continua y calcular la norma de T. [006204]

Ejercicio 7223

Sea $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$.

1. Calcular $\|\mu\|$ y $\|\mu_n\|$.
2. Demostrar que $\mu_n(x)$ converge a $\mu(x)$, para toda x en E, pero que $\|\mu-\mu_n\| = 2$.

[006205]

Ejercicio 7224

Se designa por E el espacio $C([0,1])$ provisto de la norma uniforme y el operador A definido por

$$Af(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt$$

para $f \in E$ y $x \in [0,1]$.

1. Verificar que A es continuo y calcular su norma operador.
2. ¿La ecuación $Af = f$ tiene en E soluciones f no nulas ?

[006206]

Ejercicio 7225

Sea K un compacto convexo de un evn E. Sea u una aplicación lineal continua de E en E tal que $u(K) \subset K$. Se va a demostrar que u tiene un punto fijo en K.

1. Se puede suponer que $0 \notin K$. Para cada $n \geqslant 1$, se designa por S_n la aplicación definida en E por $S_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x))$. Demostrar que $S_n(K) \subset K$.
2. Demostrar que para todos los enteros $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en número finito, $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(K) \subset S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K)$. Deducir que $A = \bigcap_{n\geqslant 1} S_n(K)$ es no vacío.
3. Demostrar que todo $x \in A$ es punto fijo de u.

Solución ▼ [006207]

Ejercicio 7226

1. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \sup\{|\langle x,y\rangle|;\ ||y|| \leqslant 1\}$.
2. Demostrar que el espacio de formas lineales $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ (más generalmente $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, donde $\dim E$ finita) es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ (o E).

[006208]

Ejercicio 7227

Sobre $M_n(\mathbb{R})$ se denota $|A| = \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax||$ la norma operador de la matriz A, donde $||x||$ denota la norma euclidiana de x. Demostrar que

$$|A| = \sup_{\substack{||x||\leqslant 1\\ ||y||\leqslant 1}} |\langle Ax,y\rangle|$$

y deducir que $|A| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. [006209]

Ejercicio 7228

Sea $E = \mathbb{R}^n$ dotado de su norma euclidiana y f una aplicación continua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $\left\| \int_{[0,1]} f(t)\,dt \right\| \leqslant \int_{[0,1]} ||f(t)||\,dt$. [006210]

Ejercicio 7229 Normas sobre $\mathbb{R}^2$

Para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se establece $N_1(x,y) = \max(\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|)$ y $N_2(x,y) = \sqrt{x^2/9+y^2/4}$.

1. Demostrar que N_1 y N_2 son normas en $\mathbb{R}^2$ y representan las bolas unitarias cerradas asociadas con estas normas.
2. Demostrar que $N_2 \leqslant \|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant N_1 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant 4N_2$.
3. Determinar el menor real $k > 0$, tal que $\|\cdot\|_1 \leqslant kN_2$. (Utilizar Cauchy-Schwarz)

[001865]

Ejercicio 7230

Se consideran las tres normas definidas en $\mathbb{R}^2$ por :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|X\|_2 = (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Representar gráficamente las bolas unitarias de cada una de ellas. ¿Se pueden “comparar” estas tres normes ? Escribir las definiciones de distancias d_1, d_2 y d_∞ asociadas a cada una de ellas. [001869]

Ejercicio 7231

Sea E el espacio vectorial de funciones con valores en $\mathbb{R}$, definidas y continuas sobre $[-1,1]$.

1. Demostrar que las siguientes tres aplicaciones son normas sobre E :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}, \quad f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,+1]} \{|f(x)|\}.$$

2. Se considera la sucesión $(f_n)_{n\in N^*}$ de funciones definidas por $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

   ¿La sucesión f_n es de Cauchy en $(E, \|\cdot\|_1)$, $(E, \|\cdot\|_2)$ y en $(E, \|\cdot\|_\infty)$? ¿Conclusiones ?

[001870]

Ejercicio 7232

Sea E el espacio vectorial de funciones con valores en $\mathbb{R}$, definidas, continuas y derivables en [0,1] y verificando $f(0) = 0$. Se define en este espacio las siguientes dos normas :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ y } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Demostrar que $N_1(f) \leqslant N_2(f)$. Deducir que la aplicación identidad de (E, N_2) hacia (E, N_1) es continua.
2. Usando la función $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, demostrar que la aplicación identidad de (E, N_1) hacia (E, N_2) no es continua.

Ejercicio 7233

Cuando un espacio vectorial E se provee de una multiplicación, la aplicación $N : E \to \mathbb{R}$ se llama norma multiplicativa si :

— N es una norma,

— para todo A y B en E, $N(A \cdot B) \leqslant N(A) \cdot N(B)$.

Sea $E = M_n(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de matrices cuadradas de n filas y n columnas. $A \in E$ se denota $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

1. Demostrar que $N_\infty(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \}$ define una norma multiplicativa en E.
2. Demostrar que $N_\infty(A) = \max\limits_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\|_\infty = 1}} \|A \cdot X\|_\infty$.
3. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ y D la matriz diagonal formada con los elementos diagonales de A. Sea también F un vector de $\mathbb{R}^n$. Se considera la sucesión de los $X^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ definida para $p \geqslant 0$ por :
$$\begin{cases} X^{(0)} = X_0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{(p+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(p)} + D^{-1}F, \text{ para p} \geqslant 0. \end{cases}$$
Demostrar que es convergente y calcular su límite.

[001872]

Ejercicio 7234 parcial 1999

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, x un elemento de E y A un compacto de E.

1. Demostrar que la aplicación de E en $\mathbb{R}$ que a y asocia $\|y\|$ es continua.
2. Demostrar que la aplicación de E en $\mathbb{R}$ que a y asocia $\|y - x\|$ es continua.
3. Demostrar que la distancia de x a A se alcanza, es decir que existe $a \in A$ tal que
$$\inf_{y \in A} \|y - x\| = \|a - x\|.$$

[001873]

Ejercicio 7235

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados. Sea L una aplicación lineal de E en F.

1. Demostrar que L es continua en 0 si y solo si es continua en todos los puntos de E.
2. Se supone que existe una constante $K > 0$ tal que
$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$
Demostrar que L es continua.

3. En lo que sigue, se supone que L es continua y se define

$$K = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

(a) Se supone que $K = +\infty$. Demostrar que entonces existe una sucesión (x_n) en E tal que $\|x_n\| = 1$, para todo n y tal que $\|L(x_n)\|_F$ tiende a $+\infty$. Deducir que existe una sucesión y_n tendiendo a 0 y tal que $\|L(y_n)\|_F = 1$.

(b) Deducir que $K \in \mathbb{R}_+$ y que para todo $x \in E$ se tiene

$$\|L(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E.$$

[001874]

Ejercicio 7236

Sea E el espacio vectorial de funciones continuas de $[-1,1]$, con valores en $\mathbb{R}$ dotado con la norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Se considera la aplicación $L : E \to \mathbb{R}$ definida por $L(f) = f(1)$.

1. Demostrar que L es una aplicación lineal.
2. Considerando las funciones $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, demostrar que L no es continua.

[001875]

Ejercicio 7237

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E. Se supone que (x_n) es de Cauchy. Demostrar que converge si y solo si admite una sub-sucesión convergente. [001876]

Ejercicio 7238

Sea E el espacio vectorial de funciones continuas de $[-1,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Se define una norma en E poniendo

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt.$$

Se va a demostrar que E provisto de esta norma no es completo. Por esto, se define una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ por

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Verificar que $f_n \in E$, para todo $n \geqslant 1$.
2. Demostrar que

$$\|f_n - f_p\| \leqslant \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$

y deducir que (f_n) es de Cauchy.

3. Se supone que existe una función $f \in E$ tal que (f_n) converge a f en $(E, \|\cdot\|_1)$. Demostrar que entonces se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(t)-f(t)|\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(t)-f(t)|\,dt = 0$$

para todo $0 < \alpha < 1$.

4. Demostrar que se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\alpha}|f_n(t)+1|\,dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{1}|f_n(t)-1|\,dt = 0$$

para todo $0 < \alpha < 1$. Deducir que

$$\begin{array}{ll} f(t) = -1, & \forall t \in [-1, 0[\\ f(t) = 1, & \forall t \in]0, 1]. \end{array}$$

Concluir.

[001877]

Ejercicio 7239

Sea $E = \mathbb{R}^d$ dotado con una norma $\|\cdot\|$. Se recuerda que una aplicación continua g de E en E se dice *contractante* si existe $K \in]0, 1[$ tal que

$$\|g(x)-g(y)\| \leqslant K\|x-y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

Recordamos también que toda aplicación contractante admite un único punto fijo. Sea f una aplicación continua de E en E tal que existe un entero n tal que f^n sea contractante. Se denota x_0 el punto fijo de f^n.

1. Demostrar que todo punto fijo de f es un punto fijo de f^n.
2. Demostrar que si x es un punto fijo de f^n, es lo mismo para $f(x)$.
3. Deducir que x_0 es el único punto fijo de f.

[001878]

Ejercicio 7240

Sea $E = \mathbb{R}^d$ dotado con una norma $\|\cdot\|$. Se define la *distancia* de un elemento x_0 de E a una parte de A de E, denotada $d(x_0, A)$, por la fórmula

$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A}\|x-x_0\|.$$

1. Se supone A compacto. Demostrar que para todo $x_0 \in E$ existe $y \in A$ tal que $d(x_0, A) = \|y-x_0\|$.
2. Demostrar que el resultado es aún cierto si solo suponemos que A es cerrado. (Se observa que para toda parte B de A se tiene $d(x_0, B) \geqslant d(x_0, A)$.)
3. Demostrar que la aplicación que a x_0 asociada $d(x_0, A)$ es continua en E (sin hipótesis sobre A).
4. Deducir que si A es un cerrado de E y B un compacto de E tales que A y B son disjuntos, entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$\|a-b\| \geqslant \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Demostrar con un contra-ejemplo que el resultado es falso si solo se supone que A y B son dos cerrados disjuntos.

[001879]

Ejercicio 7241

¿$N : (x,y) \longmapsto |5x+3y|$ es una norma de $\mathbb{R}^2$? [001880]

Ejercicio 7242

1. Demostrar que $\forall\, p \geqslant 1$, la aplicación $\begin{array}{rcl} N_p : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \end{array}$ es una norma (se utiliza la convexidad de x^p).
2. Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, demostrar que $\lim\limits_{p\to+\infty} N_p(x) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$, y que define una norma, llamada **norma infinita**, y denotada N_∞.
3. Establecer las siguientes desigualdades :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \sqrt{n} N_2(x) \leqslant n N_\infty(x).$$
¿Qué se puede en deducir ?
4. Dibujar las bolas unitarias de las normas 1,2, y ∞ en $\mathbb{R}^2$.

[001881]

Ejercicio 7243

Sea $\begin{array}{rcl} N : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} |\sum\limits_{i=1}^{k} x_i|. \end{array}$ Demostrar que N es una norma. [001882]

Ejercicio 7244

A se dice *convexo* si el contiene todo segmento conectando cualesquiera dos de sus puntos :
$$\forall\,(x,y) \in A^2,\ [x,y] = \{x+t(y-x), t \in [0,1]\} \subset A.$$
Sea E un espacio vectorial dotado de una norma N. Demostrar que toda bola cerrada (o abierta) es convexa y simétrica con respecto a su centro. [001883]

Ejercicio 7245

Sea (E,N) un espacio vectorial normado. Demostrar :
$$\forall\,(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2,\ \ N(x-y) \geqslant \tfrac{1}{2}\sup(N(x),N(y)) \cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

[001884]

Ejercicio 7246

Sea E un espacio vectorial normado, y $(a,a') \in E^2$, $(r,r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Demostrar :

1. $B(a,r) = \{a\} + B(0,r)$
2. $B(a,r) = B(a',r') \Leftrightarrow a = a'$ y $r = r'$
3. $B(a+a',r+r') = B(a,r) + B(a',r')$
4. $B(a,r) \cap B(a',r') \neq \varnothing \Leftrightarrow \|a'-a\| < r+r'$.

[001885]

Ejercicio 7247

Sea (E,N) un espacio vectorial. Demostrar las equivalencias :

$$\begin{aligned} A \subset E \text{ es acotado } &\Leftrightarrow \exists (a,r) \in E \times \mathbb{R}^+ : A \subset B(a,r) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geqslant 0 : A \subset B(0,R) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geqslant 0 : A \subset B_f(0,R) \\ &\Leftrightarrow A \text{ está incluido en una bola de } E. \end{aligned}$$

[001886]

Ejercicio 7248 Topología del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$

1. ¿Cuáles son todas las normas en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$?
   Ahora nos situamos en $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.
2. ¿Qué son las bolas abiertas, cerradas ?
3. Abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$:
   (a) Sea $(I_a)_{a\in A}$ una familia de intervalos abiertos no vacíos de $\mathbb{R}$, dos a dos disjuntos. Demostrar que A es a lo sumo numerable.
   (b) Sea O un abierto de $\mathbb{R}$, y $a \in O$. Se define $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ y } x > a\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ y } x < a\}$. Estudiar la existencia de $\inf A$ y $\sup B$.
   (c) Deducir que :
   — todo abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia a lo sumo numerable de los intervalos abiertos
   — todo cerrado de $\mathbb{R}$ es la unión de una familia a lo sumo numerable de los intervalos cerrados.

[001887]

Ejercicio 7249

Sea E el espacio vectorial de las funciones de clase C^1 sobre $[0,1]$ tales que $f(0) = 0$.

1. Se define para todo $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty$ y $N'(f) = \|f'\|_\infty$. Demostrar que N y N' son normas.
2. Demostrar que N y N' no son equivalentes.

[001888]

Ejercicio 7250

Sea E el espacio vectorial de las funciones de clase C^1 sobre $[0,1]$ tales que $f(0) = 0$.

1. Se define para todo $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Demostrar que N es una norma en E
2. Demostrar que, si $f \in E$, entonces, para todo $x \in [0,1]$: $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t))dt$.

3. Se pone, para todo $f \in E$, $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Demostrar que N' es una norma en E, equivalente a N.

[001889]

Ejercicio 7251

Sea E un espacio vectorial normado, A una parte de E y x un elemento de E. Comparar las dos afirmaciones :
i) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $A \cap B(x, \varepsilon)$ es infinito.
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento y distinto de x en $A \cap B(x, \varepsilon)$. [001890]

Ejercicio 7252

Sea A el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ tales que $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [0,1]$.

1. Se provee $C[0,1]$ de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Demostrar que A es cerrado y calcular su interior.
2. Se provee $C[0,1]$ de la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Demostrar que el interior de A es vacío y que A es cerrado.

[001891]

Ejercicio 7253

Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado en $\mathbb{R}$. Se define

$$\mu(E) = \sup_{x,y \in E \setminus (0,0)} \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Demostrar que $1 \leqslant \mu(E) \leqslant 2$.
2. Calcular $\mu(\mathbb{R}^2)$, cuando $\mathbb{R}^2$ es provisto de la norma euclidiana y luego de la norma $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

[001892]

Ejercicio 7254

Sea $\| \ \|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Se pone :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

1. Demostrar que se define así una norma sobre $M_n(\mathbb{R})$.
2. Se provee $\mathbb{R}^n$ de la norma $\| \ \|_1$. Demostrar que $\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$.

[001893]

Ejercicio 7255

Se provee $C[0,1]$, el espacio vectorial de funciones continuas en $[0,1]$ a valores reales, de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Sea $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Se define $N(\varphi) = \sup_{\substack{f \in C[0,1] \\ \|f\|_\infty = 1}} |\varphi(f)|$. Demostrar que φ es continua si y solo si $N(\varphi)$ es finito.
2. Calcular $N(\psi)$, cuando $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. Se pone, para toda función $f \in C[0,1] : \varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$. Demostrar que $N(\varphi) = 1$.

[001895]

Ejercicio 7256

Se provee E, el espacio vectorial de funciones continuas en $[0,1]$, con valores reales tales que $f(0) = 0$ de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Se define $N(\varphi) = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_\infty = 1}} |\varphi(f)|$. Demostrar que φ es continua si y solo si $N(\varphi)$ es finito. Demostrar que $\varphi \mapsto N(\varphi)$ es una norma sobre el espacio vectorial de formas lineales continuas en E.
2. Calcular $\mu = N(\psi)$, cuando ψ se define estableciendo, para toda función $f \in E : \psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
3. ¿Se puede encontrar una función $f \in E$ tal que $|\psi(f)| = \mu$ y $\|f\|_\infty = 1$?

[001896]

Ejercicio 7257

Se provee $E = C^1[0,1]$ y $F = C[0,1]$ de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Sea $\varphi : E \to F$ una aplicación lineal. Se define $N(\varphi) = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_\infty = 1}} |\varphi(f)|$. Demostrar que φ es continua si y solo si $N(\varphi)$ es finito.
2. Demostrar que la aplicación $f \mapsto f'$ no es continua.

[001897]

Ejercicio 7258

Sea $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio euclidiano y $S = \{x \in E ; \|x\| = 1\}$.

1. Sean $x, y \in E$ e I el segmento $[x,y]$. Calcular $S \cap I$.
2. ¿Las normas $\| \quad \|_1$ y $\| \quad \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ son euclidianos ?

[001898]

Ejercicio 7259

1. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar que existe una sucesión de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ invertibles convergiendo a A (en un sentido que se debe especificar).
2. Sea $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente. Calcular los valores propios de N. Demostrar que $\det(I+N) = 1$.

3. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $AN = NA$. Calcular $\det(A+N)$.

[001899]

Ejercicio 7260

I Préliminaires

1. Sea $\mathscr{P}$ el espacio vectorial de funciones polinomiales de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que $\mathscr{P}$ es de dimensión infinita.
2. Sea X una parte acotada de $\mathbb{R}$. Demostrar que $\sup(X) = \sup \bar{X}$.

II

Se denota $\mathscr{L}$ el conjunto de funciones *lipschitzianas* de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$, es decir tal que existe $k \in \mathbb{R}_+$ tal que, para todo $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Se denota $\mathbb{C}^1$ el conjunto de funciones de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$ de clase C^1, es decir derivable con derivada continua.

1. Demostrar que $\mathscr{L}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de funciones de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$, que $\mathscr{L}$ contiene $\mathbb{C}^1$ y es de dimensión infinita.
2. Se pone, para todo $f \in \mathscr{L}$:

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in]0,1]} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

   (a) Demostrar que N_1, N_2, $\| \ \|_\infty$ y λ son normas en $\mathscr{L}$.

   (b) Considerando la sucesión $f_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi n x)$, demostrar que N_2 no es equivalente a $\| \ \|_\infty$.

   (c) Demostrar que N_1 no es equivalente a $\| \ \|_\infty$, ni a N_2.

   (d) Construir una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{L}$ que converge a 0, para $\| \ \|_\infty$, pero no para N_2. Deducir (de nuevo) que N_2 no es equivalente a $\| \ \|_\infty$.

   (e) Demostrar que λ y N_1 son equivalentes.
3. Se pone, para todo $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ y $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

   (a) Demostrar que ν_1 y ν son normas en $\mathbb{C}^1$.

   (b) Demostrar que $\nu_1(f) = N_1(f)$, para todo $f \in \mathbb{C}^1$.

   (c) ¿Las normas ν y ν_1 son equivalentes ?

4. Sea $(E,\| \ \|)$ un espacio vectorial normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E se dice de *Cauchy* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que, si $m,n \geqslant N$, entonces $\|x_n - x_m\| \leqslant \varepsilon$. Se dice que $(E,\| \ \|)$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente. Se recuerda que $\mathbb{R}$ dotado con la norma $x \mapsto |x|$ es completo.
   (a) Sea C^0 el espacio vectorial de funciones continuas de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Demostrar que $(C^0,\| \ \|_\infty)$ es completo.
   (b) ¿El espacio vectorial normado $(\mathbb{C}^1,\nu)$ es completo? ¿Qué pasa con $(\mathbb{C}^1,\nu_1)$?
   (c) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathscr{L},\lambda)$. Demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función continua f.
   (d) Demostrar que para n bastante grande $f - f_n$ es lipschitziana.
   (e) Deducir que $(\mathscr{L},\lambda)$ es completo.

III

Se provee $\mathbb{C}^1$ de una norma N y C^0 de la norma $\| \ \|_\infty$. Se denota d la aplicación $f \mapsto f'$ de $\mathbb{C}^1$, con valores en $\mathbb{C}^0$.

1. Sea $\varphi : \mathbb{C}^1 \to C^0$ una aplicación lineal. Se define $N(\varphi) = \sup_{f;N(f)\leqslant 1} \|\varphi(f)\|_\infty$. Demostrar que φ es continua si y solo si $N(\varphi)$ es finito. Verificar que N es una norma en el espacio vectorial de aplicaciones lineales continuas de $\mathbb{C}^1$, con valores en $\mathbb{C}^0$.
2. Demostrar que la aplicación d no es continua si $N = \| \ \|_\infty$.
3. Se provee $\mathbb{C}^1$ de la norma ν. Demostrar que d es continua y calcular $N(d)$.

Solución ▼ [001900]

Ejercicio 7261

1. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y K su bola unidad cerrada. Demostrar que
   (i) K es simétrica, (ii) K es convexo, cerrado, acotado, (iii) 0 es un punto interior a K.
2. Recíprocamente, demostrar que si K tiene las tres propiedades anteriores, existe una norma la cual K sea la bola de unidad cerrada, considerando $p(x) = \inf\left\{a > 0;\ \frac{x}{a} \in K\right\}$.

Solución ▼ [006055]

Ejercicio 7262

Demostrar que en un espacio normado, la bola unidad es convexa. Recíprocamente, se supone que el espacio vectorial está dotado de una aplicación N de E en $\mathbb{R}^+$ tal que $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, y tal que $\{y/N(y) \leqslant 1\}$ sea convexa. Demostrar que

$$N(x+y) \leqslant 2\sup(N(x),N(y)), \quad x,y \in E.$$

[006056]

Ejercicio 7263

Se consideran en $\mathbb{R}^2$, ambas aplicaciones

$$n((x,y)) = \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|, \qquad m((x,y)) = \int_0^1 |x+ty|\,dt.$$

1. Demostrar que n y m definiendo dos normas sobre $\mathbb{R}^2$.
2. Dibujar las bolas unitarias cerradas asociadas, y encontrar constantes efectivas A,B, tales que $A\, n((x,y)) \leqslant m((x,y)) \leqslant B\, n((x,y))$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[006057]

Ejercicio 7264

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las 4 bolas euclidianas cerradas de radio 1 centradas en los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$; A su unión contiene 0 como un punto interior. Encontrar el radio de la bola abierta más grande centrada en 0 y contenida en A.
2. El problema se plantea de manera más general en $\mathbb{R}^n$: A designa la unión $\bigcup_j \overline{B}(e_j,1) \bigcup_j \overline{B}(-e_j,1)$, donde (e_j) es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que $x \in A$ si y solo si $\|x\|_2^2 \leqslant 2\|x\|_\infty$. Deducir que el radio de la mayor bola abierta centrada en 0 y contenida en A es $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

[006058]

Ejercicio 7265

Sea N un entero $\geqslant 1$, y E, el espacio de polinomios trigonométricos p de grado $\leqslant N$, $p(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikt)$. Se pone, para $p \in E$, $\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} |p(t)|$, y $\|p\| = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|$. Demostrar, usando la identidad de Parseval, que estas dos normas verifican

$$\|p\|_\infty \leqslant \|p\| \leqslant \sqrt{2N+1}\|p\|_\infty.$$

[006059]

Ejercicio 7266

Sea E un espacio vectorial normado en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Verificar que la aplicación $(\lambda,x) \to \lambda x$ es continua ; que $(x,y) \to x+y$ es lipschitziana, así como la aplicación $x \to \|x\|$; y que las traslaciones y las homotecias son homeomorfismos de E.
2. Demostrar que la bola unidad abierta es homeomorfa a todo E (considerar la aplicación $x \to \frac{x}{1-\|x\|}$).
3. Demostrar que dos bolas abiertas de $(E, \|\cdot\|)$ son homeomorfas entre sí.
4. Demostrar que el único subespacio abierto de E es E él mismo, y que todo subespacio propio tiene un interior vacío en E.
5. Demostrar que la clausura de un subespacio vectorial es aún un subespacio vectorial ; deducir que un hiperplano de E es cerrado o en todas partes denso en E.

[006088]

Ejercicio 7267 Extraído del parcial de diciembre 98

Sea E un espacio vectorial normado en $\mathbb{C}$ de bola unidad cerrada $\overline{B}$ y F un subespacio vectorial cerrado de E. Se va a demostrar que si $F \neq E$,

$$\sup_{x\in\overline{B}} d(x,F) = 1.$$

1. Establecer propiedades para $x, x' \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{C}$:
   (i) $d(x,F) \leqslant ||x||$.
   (ii) $d(\lambda x,F) = |\lambda| d(x,F)$.
   (iii) $d(x-y,F) = d(x,F)$
   (iv) $d(x+x',F) \leqslant d(x,F) + d(x',F)$.
2. Sea $x \in \overline{B}$ tal que $\alpha = d(x,F) > 0$. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in F$ tal que :
$$\alpha \leqslant ||x-y|| < \alpha(1+\varepsilon).$$
3. Demostrar que existe $x' \in \overline{B}$ tal que : $\frac{1}{1+\varepsilon} = d(x',F) < 1$.
4. Deducir el resultado.

[006089]

---

309 425.00 Espacio métrico completo, espacio de Banach

Ejercicio 7268

¿El espacio $(\mathbb{R}, d)$ es completo si d es una de las métricas siguientes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1+|x-y|)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002395]

Ejercicio 7269

Se considera por $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, donde f es una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que esta distancia es completa si y solo si f es de imagen cerrada en $\mathbb{R}^2$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002396]

Ejercicio 7270

Se considera el espacio de funciones continuas $X = \mathscr{C}([a,b])$.

1. Sea $\omega \in X$ una función que no se anula en $[a,b]$. Se define
$$d_\omega(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f(t) - g(t))|.$$
¿El espacio (X, d_ω) es completo ?
2. Demostrar que el espacio $(X, \|\cdot\|_1)$ no es completo (donde $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$).

Indicación ▼ Solución ▼ [002397]

Ejercicio 7271

Sea $X = C^1([a,b])$.

1. ¿Es un espacio completo si lo dotamos de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$?

2. Se considera ahora, para $f \in X$, la norma

$$N(f) = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\| \,.$$

El espacio (X,N) ¿es completo ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002398]

Ejercicio 7272

Sea X el espacio de sucesiones reales nulas a partir de un cierto rango, y sea

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|}, \quad \text{para } x,y \in X \,.$$

1. Demostrar que X no es completo para la métrica ρ.
2. Encontrar un espacio de sucesiones Y tal que (Y,ρ) es completo y tal que X sea denso en Y.
3. ¿Qué sucede con el ejercicio si reemplazamos ρ por la norma uniforme ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002399]

Ejercicio 7273

Sea E un espacio vectorial normado. Se dice que una serie $\sum u_k$ es normalmente convergente si la serie $\sum \|u_k\|$ es convergente. Se quiere demostrar que E es completo si y solo si toda serie normalmente convergente es convergente.

1. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de E ; demostrar que se puede extraer una sub-sucesión (x_{n_k}) tal que el término general serie $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ sea normalmente convergente. Deducir que si toda serie normalmente convergente es convergente, entonces E es completo.
2. Sea $\sum u_k$ una serie normalmente convergente. Se denota $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Demostrar que S_n es una sucesión de Cauchy. Deducir que si E es completo, entonces toda serie normalmente convergente es convergente.

Indicación ▼ Solución ▼ [002400]

Ejercicio 7274

Sean E,F espacios normados y $A_n, A \in \mathscr{L}(E,F)$. Demostrar la equivalencia entre :

1. $A_n \to A$ en $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Para toda parte acotada $M \subset E$, la sucesión $A_n x$ converge uniformemente a Ax, $x \in M$.

Solución ▼ [002401]

Ejercicio 7275 Curso

Sea E un espacio normado y F un espacio de Banach. Entonces $\mathscr{L}(E,F)$ es también un espacio de Banach.

Solución ▼ [002402]

Ejercicio 7276

Sea δ la métrica en $\mathbb{R}$ definida por $\delta(x,y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$. Demostrar, usando el teorema de extensión de la función uniformemente continua, que la identidad $i : (\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$ no es uniformemente continua.
[002403]

Ejercicio 7277

1. Para $n,m \in \mathbb{N}^*$, se establece $d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$. Demostrar que d es una distancia en $\mathbb{N}^*$ que induce la topología discreta en $\mathbb{N}^*$; ¿es completa ?
2. Demostrar que $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio métrico completo para la distancia $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

[006211]

Ejercicio 7278

Sea E un espacio normado. Demostrar que es completo si y solo si la esfera unidad $S = \{x/\|x\| = 1\}$ es completo. [006212]

Ejercicio 7279

1. Para $x,y \in \mathbb{R}^*$ se establece $d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Demostrar que d define una distancia en $\mathbb{R}^*$ que induce la topología usual y que $(\mathbb{R}^*,d)$ es completo.
2. De manera más general, sea U un abierto de un espacio completo (X,d) ; ¿cómo se puede definir una métrica δ sobre U, equivalente a la métrica inicial, que haga de U un espacio completo ?

[006213]

Ejercicio 7280

Sea E un espacio vectorial normado.

1. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de E ; demostrar que se puede extraer una sub-sucesión (x_{n_k}) tal que el término general serie $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ sea normalmente convergente.
2. Deducir que E es completo si y solo si toda serie normalmente convergente es convergente.

[006214]

Ejercicio 7281

1. Demostrar que el espacio $C([0,1])$ es completo para la norma uniforme pero no para la norma $\|\cdot\|_1$.
2. Demostrar que el espacio S de sucesiones reales nulas a partir de un cierto rango, dotado con la norma uniforme, no es completo. Encontrar un espacio métrico completo que contenga S como subespacio denso.

[006215]

Ejercicio 7282

1. Sea f un homeomorfismo de espacios métricos $f : X \to Y$; demostrar que X puede ser completo sin que Y, lo sea.
2. Se supone además que f es uniformemente continua. Demostrar que si Y es completo, X, lo es también.

3. Se considera $E = \{f \in C^1([0,1]);\ f(0) = 0\}$, dotado de la métrica $d(f,g) = \inf(1, \sup|f'(t) - g'(t)|)$. Demostrar que E es completo para esta métrica.

[006216]

Ejercicio 7283

Sea E un Banach, A,B dos subespacios de E tales que $A \cap B = \{0\}$, A es cerrado y B de dimensión finita.

1. Para $b \in B$, se define $[b] = d(b,A) = \inf_{a \in A} ||a+b||$. Verificar que $[\cdot]$ es una norma en B.
2. Deducir que existe $C > 0$ tal que $||a+b|| \geqslant C||b||$, para todo $a \in A$ y $b \in B$.
3. Demostrar que $A \oplus B$ es aún un subespacio cerrado de E.

[006217]

Ejercicio 7284

Sea (X,d) un espacio métrico, y (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Verificar :

1. La sucesión (x_n) es acotada incluso, si la métrica no lo es acotada, pero existen sucesiones acotadas de las cuales ninguna sub-sucesión es de Cauchy.
2. Si (x_n) contiene una sub-sucesión convergente, es convergente.
3. Sea (ε_k) una sucesión cualquiera de números reales > 0; existe una sub-sucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant \varepsilon_k$.
4. Sea (y_n) una sucesión cualquiera de X. Si $\sum_1^\infty d(y_n, y_{n+1}) < \infty$, la sucesión (y_n) es de Cauchy. ¿Recíproco ?
5. Esta vez se supone la distancia d ultramétrica. En este caso (y_n) es Cauchy si y solo si $d(y_n, y_{n+1})$ tiende a 0.

[006218]

Ejercicio 7285

Verificar que $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio métrico completo para la distancia $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. [006219]

Ejercicio 7286

En el conjunto $\mathbb{N}$ de enteros naturales, se definen

$$\begin{aligned} d(n,m) &= 0, \quad \text{para } m = n \\ &= 1 + \frac{1}{n+m}, \quad \text{para } m \neq n. \end{aligned}$$

1. Demostrar que d es una métrica en $\mathbb{N}$ por lo que es completo.
2. Construir en $(\mathbb{N}, d)$ una sucesión de bolas cerradas no vacías anidadas cuyos radios no tienden a 0, y de intersección vacía.

[006220]

Ejercicio 7287

Sea U un abierto de un espacio completo (X,d) ; se denota $F = U^c$ y $f(x,y) = \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$, para $x,y \in U$. Demostrar que $\delta(x,y) = \max(d(x,y), f(x,y))$ define una distancia en U equivalente (topológicamente) a d y que (U,δ) es completo. [006221]

Ejercicio 7288

Sea X un espacio métrico y (a_n) una sucesión de Cauchy en X.

1. Demostrar que para todo $x \in X$, la sucesión de reales $(d(a_n,x))$ tiene un límite. Se denota $f(x)$ este límite ; demostrar que la aplicación $x \to f(x)$ es continua de X en $\mathbb{R}$.
2. Calcular $\inf_{x\in X} f(x)$. ¿Cuándo se alcanza esta cota inferior ?
3. Deducir de lo anterior que si X no es completo, existe una aplicación $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua y no acotada.

[006222]

Ejercicio 7289

Se considera por f y g en $E = C(\mathbb{R},C)$,

$$d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \min(1, \sup_{|x|\leqslant n} |f(x) - g(x)|).$$

Verificar que d es una métrica en E por lo que es completo. Demostrar que la convergencia para d no es otra cosa que la convergencia uniforme en cada compacto de $\mathbb{R}$. [006223]

Ejercicio 7290

Sea (X,d) un espacio métrico y Y una parte de X ; se considera f una aplicación sobreyectiva de X sobre Y, y se escribe para u y v en Y

$$D(u,v) = d(f^{-1}(\{u\}), f^{-1}(\{v\})) = \inf_{\substack{x\in f^{-1}(\{u\}) \\ y\in f^{-1}(\{v\})}} d(x,y).$$

1. Demostrar que para u y v en Y, $D(u,v) \geqslant 0$; que $D(u,u) = 0$ y $D(u,v) = D(v,u)$; ¿D verifica la desigualdad triangular ?
2. Se supone que para u en Y, $f^{-1}(\{u\})$ es un cerrado de Y, y que para u y v en Y

   $$d(x, f^{-1}(\{v\})) = d(x', f^{-1}(\{v\}))$$

   para todo x y x' en $f^{-1}(\{u\})$. Demostrar entonces que D es una distancia.
3. Se suponen las condiciones de 2. verificadas. Demostrar que Y es completo si x es completo.

[006224]

Ejercicio 7291

Se considera en $C^1([0,1],\mathbb{R})$ las siguientes normas :

1. $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$
2. $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + |f(0)|$
3. $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) + f(x)| + |f(0)|$

¿Cuáles son completas en $C^1([0,1],\mathbb{R})$? [006225]

Ejercicio 7292

Sea $(B, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y M, N dos subespacios de B tales que $B = M \oplus N$. Se define en B una nueva norma $\|z\|' = \|x\| + \|y\|$ si $z = x + y$.

1. Verificar que $\|\cdot\|'$ es de hecho una norma en B y que $(B, \|\cdot\|')$ es completo si y solo si M y N son cerrados.
2. Demostrar que si las proyecciones P_M y P_N sobre M y N son continuas, $(B, \|\cdot\|')$ es aún un Banach.

[006226]

Ejercicio 7293

Se considera $E = c$, el espacio de sucesiones reales convergentes ; demostrar que, dotado con la norma uniforme, E es completo y describir su dual topológico. [006227]

Ejercicio 7294

Se considera E el espacio de series convergentes, y se escribe

$$\|\xi\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} \xi_k|$$

1. Verificar que esto define una norma en E por lo que es completo.
2. El espacio l^1 de series absolutamente convergentes es un subespacio de E ; demostrar que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes a l^1 (considerando una serie de término general $\xi_k = \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.)
3. Demostrar que l^1 es denso en $(E, \|\cdot\|)$.

[006228]

Ejercicio 7295

Para todo $k > 0$ se denota H_k el subespacio de $C([0,1])$ constituido de las funciones de Lipschitz de constante k i.e. de las funciones f verificando $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$, para todo x e y en $[0,1]$. Se define así $H = \bigcup_{k>0} H_k$.

1. Demostrar que H contiene las funciones de clase C^1 sobre $[0,1]$, pero que la función $\sqrt{x}$ no está en H.
2. Demostrar que para todo k, H_k es un espacio de Banach para la norma uniforme.
3. Demostrar que existe una sucesión de funciones de H que converge uniformemente en $[0,1]$ hacia $\sqrt{x}$. Deducir que H no es completo para la norma uniforme.
4. Demostrar que si se establece

$$\|f\| = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + |f(0)|,$$

se define así una norma sobre el espacio E, para el cual el espacio es completo.

[006229]

Ejercicio 7296

Sea E un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(E)$, y $s,t \in \mathbb{R}$.

1. Se recuerda que $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ $in \mathscr{L}(E)$. Demostrar que $\|e^{tA}\| \leqslant e^{|t|\|A\|}$ y que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.
2. Sea $u_0 \in E$ y u la función vectorial de variable real definida por $u(t) = e^{tA}u_0$. Demostrar que u es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.

[006230]

Ejercicio 7297

Sea E un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de E.

1. Demostrar que $N(\bar{x}) = \inf_{y \in F} \|x+y\| = d(x,F)$ define una norma en el espacio vectorial cociente E/F.
2. Demostrar con ayuda del criterio de las series que E/F provisto de N es un espacio de Banach.

[006231]

Ejercicio 7298

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, sea $\mathscr{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua } \}$, y $||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Demostrar que $(\mathscr{C}^0(A), || \, ||_\infty)$ es un espacio de Banach. [006781]

Ejercicio 7299

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una sub-variedad de dimensión k, y sea X un campo de vectores en M. Se define $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ y $S = \overline{D} =$ clausura D. Se pide probar el enunciado : “si S es compacto, entonces x es completo”. Las siguientes preguntas pueden guiar.

1. Para $x \notin S$ encontrar la curva integral maximal $\gamma : J_x \to M$ pasando por x.
2. Demostrar que si $x \in S$, y si $\gamma : J \to M$ es una curva integral que pasa por x, entonces $\forall t \in J : \ \gamma(t) \in S$.
3. Usando la compacidad de S, demostrar que x es completo (sobre M !).

Nota Bene : S no es una sub-variedad de un $\mathbb{R}^m$; demostrar el resultado (del curso !) “si M es compacto, entonces X es completa” aporta menos puntos. [006784]

Ejercicio 7300

Sea (X,d) un espacio métrico y sea $a : \mathbb{N} \to X$ una sucesión en X.

1. ¿Cuándo es que a es una sucesión de Cauchy, una sucesión convergente ?
2. Dar las definiciones de un punto de acumulación de la sucesión a, y de “(X,d) es completo”.
3. Enunciar el teorema de Bolzano-Weierstrass.
4. Demostrar que si a es de Cauchy y si x es un punto de acumulación de a, entonces a converge a x.
5. Demostrar que si X es compacto, entonces X es completo.

[006789]

Ejercicio 7301

Sea B y C dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, y sea $E = \{f : B \to C \mid f \text{ continua}\}$. Se define $d(f,g) = \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|$.

1. Demostrar que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una métrica en E.
2. Demostrar que (E,d) es un espacio métrico completo.

[006791]

Ejercicio 7302

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. El objetivo de este ejercicio es demostrar que E es completo si y solo si cualquier serie absolutamente convergente converge.

1. Sea E completo y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge. Demostrar que la sucesión $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ es una sucesión de Cauchy ; deducir que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
2. Se supone que toda serie absolutamente convergente converge, es decir si $\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Encontrar una sucesión estrictamente creciente $i \mapsto n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i : \|a_{n_{i+1}} - a_{n_i}\| < 2^{-i}$. Deducir que $\sum_{i=0}^{\infty} (a_{n_{i+1}} - a_{n_i})$ converge. Deducir de este resultado que E es completo.

[006819]

310 426.00 Teorema del punto fijo

Ejercicio 7303

Sea $\alpha_n > 0$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación para la cual

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \alpha_n d(x,y) \quad \text{para todo } x,y \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\,.$$

Demostrar que, bajo estas condiciones, f tiene un único punto fijo $p \in X$, que para todo punto inicial $x_0 \in X$, la sucesión de las iteradas $(x_n = f^n(x_0))_{n\geqslant 0}$ converge a p y que la velocidad de convergencia de tal sucesión está controlada por

$$d(p, x_n) \leqslant \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \right) d(x_1, x_0).$$

Indicación ▼ Solución ▼ [002404]

Ejercicio 7304

Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una aplicación tal que una de las iteraciones f^n es estrictamente contractante, i.e. existe $\rho < 1$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \rho d(x,y), \text{ para todo } x,y \in X.$$

Demostrar que f tiene un único punto fijo. Hacer el enlace con el ejercicio 7303.

Indicación ▼ Solución ▼ [002405]

Ejercicio 7305

Sea $X = (C^1([0,1]), N)$, con $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Demostrar que existe una función $f \in X$ que es el punto fijo del operador T dada por

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\,dt.$$

Se puede empezar estableciendo que $T \circ T$ es una contracción. Utilizar esto para establecer la existencia de una función única $f \in X$ que verifica $f(0) = 1$ y $f'(x) = f(x - x^2)$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002406]

Ejercicio 7306

Sean $y \in \mathscr{C}([a,b])$ y $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$ funciones continuas. Se propone resolver la ecuación (Integral de Fredholm) siguiente :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt = y(s), \quad \text{para } s \in [a,b], \tag{11}$$

de incógnita $x \in \mathscr{C}([a,b])$. Para hacer esto, se supone que el "núcleo" k satisface la siguiente hipótesis :

$$\lambda := \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1 \quad \left(\text{o incluso} \quad \max_{a \leqslant s,t \leqslant b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}\right).$$

1. Recordar que $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio completo.
2. Sea $x \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathscr{C}([a,b])$ la aplicación dada por

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s).$$

   Notar que (11) equivale a $Ax = x$ y por lo tanto, estamos buscando un punto fijo de $x \mapsto Ax$. Deducir de las suposiciones hechas sobre k que un tal punto fijo $x \in \mathscr{C}([a,b])$ existe y que toda sucesión $A^n x_0$, $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, converge uniformemente a este punto fijo x.
3. *Dependencia continua de la solución $x = x(y)$.* Sean $y_1, y_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ dos funciones y $x_1, x_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ las dos soluciones asociadas de (11) o, de manera equivalente, los puntos fijos de las aplicaciones asociadas $x \mapsto A_i x$. Demostrar que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1x_1 - A_2x_2\|_\infty \leqslant \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda\|x_1 - x_2\|_\infty.$$

   Deducir que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

   y por lo tanto, la solución x de (11) depende continuamente de la función y.

Solución ▼ [002407]

Ejercicio 7307

1. Sea X un espacio métrico y (f_n) una sucesión de aplicaciones continuas con valores en un espacio métrico Y, convergiendo hacia f uniformemente en X. Demostrar que si (x_n) es una sucesión de puntos de X convergiendo hacia $x \in X$, entonces $f_n(x_n)$ tiende a $f(x)$.

2. Aplicación : Sea X un espacio métrico compacto, y sea (f_n) una sucesión de aplicaciones continuas de X en X, teniendo cada uno un punto fija ; se supone que la sucesión (f_n) converge a una función f uniformemente en X. Demostrar que f también tiene un punto fijo.
3. Sea K un convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ y f una aplicación continua de K en K verificando

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\|;$$

considerando las funciones f_n definidas en K por $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1-\frac{1}{n})f(x)$, donde $x_0 \in K$, demostrar que f tiene un punto fijo. ¿Es único ? ¿Qué sucede si K ya no es convexo ?

[006232]

Ejercicio 7308

Sea E un espacio métrico compacto, f una aplicación continua de E en E y se denota Ω el conjunto de sus puntos fijos.

1. Demostrar que Ω es un compacto, que no es vacío en el caso en que $E = [a,b]$.
2. Si $\Omega = \varnothing$, demostrar que existe $r > 0$ tal que $d(x, f(x)) \geqslant r$, para todo $x \in E$.
3. Se supone que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, para todo $x \neq y$ de E. Demostrar que Ω se reduce a un punto a y que para toda elección inicial de $x_0 \in E$, la sucesión recurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a a.

[006233]

Ejercicio 7309

Para $x,y \in X =]0,+\infty[$ se establece $\delta(x,y) = |\log x - \log y|$

1. Demostrar que X provisto de δ es completo mientras que no lo es para la métrica usual de $\mathbb{R}$.
2. Sea f una aplicación de clase C^1 de X en X verificando para todo $x \in X$

$$x|f'(x)| \leqslant kf(x)$$

donde k es un real de $]0,1[$ fijo. Demostrar que f tiene un solo punto fijo en X.

[006234]

Ejercicio 7310

1. Se considera una matriz $A = (a_{ij})$, con coeficientes reales tales que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$. Utilizando el teorema del punto fijo, demostrar que cualesquiera que sean los reales $b_1, b_2, \ldots, b_n$, el sistema de ecuaciones lineales

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

admite siempre una solución única. Deducir $\det(I-A) \neq 0$.
2. Demostrar bajo las mismas hipótesis que el sistema no lineal

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen}(a_{ij}x_j) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

admite una única solución.

Ejercicio 7311

Se va a demostrar que existe una y solo una h continua en $[0,1]$ verificando $h(0)=0$ y $h'(t)=\cos(th(t))$, para todo $t\in[0,1]$. Se denota E el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ dotado de la métrica uniforme.

1. h es solución si y solo si h es continua y $h(s)=\displaystyle\int_0^s \cos(th(t))\,dt$.
2. El operador $T:E\to E$ definido por $Tf(s)=\displaystyle\int_0^s \cos(tf(t))\,dt$ es $\frac{1}{2}$-contractante. Concluir.

[006236]

Ejercicio 7312

Sea $a,b\in E$ evn, $B_1=\{x\in E/\|x-a\|=\|x-b\|=\frac{1}{2}\|a-b\|\}$, y para $n>1$, $B_n=\{x\in B_{n-1}/\|x-y\|\leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y\in B_{n-1}\}$, donde $\delta(B)$ denota el diámetro del conjunto B.

1. Demostrar que $\delta(B_n)\leqslant\frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, y que $\bigcap\limits_n B_n=\{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Sea f una isometría de E *sobre* F evn, tal que $f(0)=0$. Demostrar considerando la sucesión $(f(B_n))$ solo para todo $a,b\in E$,
$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
Inferir que f es una isometría lineal. ¿Qué más se puede decir generalmente de la forma isométrica f de E sobre F ?

[006237]

Ejercicio 7313

Se va a demostrar que existe uno y solo uno h continua en $[0,1]$ verificando $h(0)=0$ y $h'(t)=\cos(th(t))$, para todo $t\in[0,1]$. Se denota E el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ dotado de la métrica uniforme.

1. h es solución si y solo si h es continua y $h(s)=\displaystyle\int_0^s \cos(th(t))\,dt$.
2. El operador $T:E\to E$ definido por $Tf(s)=\displaystyle\int_0^s \cos(tf(t))\,dt$ es $\frac{1}{2}$-contractante. Concluir.

[006238]

Ejercicio 7314

Se designa por E el espacio $C([0,1])$ provisto de la norma uniforme y el operador A definido por

$$Af(x)=\int_0^x tf(t)\,dt+x\int_x^1 f(t)\,dt$$

para $f\in E$ y $x\in[0,1]$.

1. Verificar que A es continuo y calcular su norma operador.
2. ¿La ecuación $Af=f$ tiene en E soluciones f no nulas?

[006239]

Ejercicio 7315

Se considera $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ que a f asociada F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{3}{/}4\, f(3t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, f(2-3t) & \text{si } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\, f(3t-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

1. Verificar que F es de hecho continua y que T es $\frac{3}{4}$-contractante.
2. Se denota h el punto fijo de T. Demostrar por recurrencia $|h(\frac{k-1}{3^n}) - h(\frac{k}{3^n})| \geqslant 2^{-n}$.

   Sea $a \in [0,1]$; demostrar que existe una sucesión (t_n) tal que $\lim t_n = a$ y $\lim |\frac{h(t_n)-h(a)}{t_n - a}| = +\infty$.
3. Deducir la existencia de una función continua derivable en ninguna parte.

[006240]

Ejercicio 7316

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado acotado y sea $f : I \to I$ una aplicación derivable que verifica $\forall x \in I :\ |f'(x)| < 1$. Para un $x_0 \in I$ se define la sucesión recurrente $a : \mathbb{N} \to I$ por $a_0 = x_0$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Se busca demostrar que existe un único $\ell \in I$, independiente de x_0, tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Las siguientes cuestiones pueden guiarlo a través de la demostración.

1. Demostrar que f admite un único punto fijo ℓ.
2. Demostrar que $d(a_n, \ell)$ converge.
3. Demostrar que la sucesión a admite una sub-sucesión convergente b.
4. Denotemos $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ y $\lim_{n\to\infty} d(a_n, \ell) = r$. Demostrar : $d(\beta, \ell) = r = d(f(\beta), \ell)$.

¿El resultado es verdadero si I no es cerrado ? Justificar la respuesta. [006790]

Ejercicio 7317

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$. Se define la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $g = f \circ f$.

1. Demostrar que f y g son de clase C^1.
2. Calcular para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matriz Jacobiano de f en (x,y) denotada $D_{(x,y)}f$; calcular la matriz jacobiana de g en $(0,0)$ denotada $D_{(0,0)}g$.
3. Demostrar que existe $\rho > 0$ tal que para todo $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la bola cerrada del centro $(0,0)$ y de radio ρ) se tiene $\|D_{(x,y)}g\| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Demostrar que la función g admite un único punto fijo en $\overline{B_\rho((0,0))}$, con ρ como en 3).

[006805]

311 427.00 Espacio de Hilbert, teorema de proyección

Ejercicio 7318

1. Demostrar que la aplicación $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ es un producto escalar euclidiano en $C[0,1]$, el espacio vectorial de funciones continuas en $[0,1]$, con valores reales.

2. Se denota $C = \{f \in C[0,1]; \int_0^1 f(t)dt = 1\}$. Demostrar que $\inf_{f \in C} \int_0^1 f^2(t)dt = 1$ y que esta cota inferior se alcanza.

[001894]

312 428.00 Teorema de Baire

Ejercicio 7319

Usando el teorema de Baire, demostrar que un cerrado numerable no vacío X de $\mathbb{R}$ tiene al menos un punto aislado. *Indicación :* Se puede considerar $\omega_x = X \setminus \{x\}$. ¿Qué se puede decir del conjunto de Cantor ?

Indicación ▼ Solución ▼ [002392]

Ejercicio 7320

Sea f una aplicación definida en un espacio métrico completo (X,d), a valores reales y semicontinua inferiormente. Demostrar que existe un abierto no vacío O en el cual f es mayorada. Aplicación : Sea (f_n) una sucesión de formas lineales continuas en un Banach B, verificando

$$\forall x \in B, \ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

Utilizando esto que precede, demostrar que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002393]

Ejercicio 7321

Se sabe que l^1 está incluido en l^2 (¿por cierto por qué ?) pero no es cerrado en l^2 (¿por qué ?) ; se va a demostrar que es de primera categoría en l^2, es decir unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío (en l^2).

1. Se considera para cada $p \geqslant 1$,

$$F_p = \{(a_n) \in l^2 / \sum |a_n| \leqslant p\}.$$

Demostrar que F_p es cerrado en l^2 y de interior vacío.

2. Deducir el resultado.

[002394]

Ejercicio 7322

Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ, es decir no es una intersección numerable de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. *Indicación :* Se puede razonar por reducción al absurdo y considerar $\omega_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ si $\mathbb{Q} = \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$.
[006141]

Ejercicio 7323

Sea B un espacio de Banach ; se recuerda que todo subespacio propio de B es de interior vacío en B. Demostrar que si B es de dimensión infinita, B no tiene una base algebraica numerable. Deducir que el espacio de polinomios no es completo para ninguna norma. [006142]

Ejercicio 7324

Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico de Baire, es decir por lo que el teorema de Baire es válido. Se va a demostrar que todo abierto de X dotado de la topología inducida es aún un espacio de Baire.

1. Sea (O_n) una sucesión abiertos densos en O; demostrar que cada $\omega_n = O_n \cup \overline{O}^c$ es un abierto denso en X (recordar que un conjunto es denso en X si interseca todo abierto de X).
2. Demostrar que para todo abierto ω de O,

$$(\bigcap_n O_n) \cap \omega \neq \varnothing$$

Deducir el resultado.

[006143]

313 429.00 Dualidad, topología débil

Ejercicio 7325

Sea E un evn, f un elemento no nulo del dual de E, y L el hiperplano afín $\{x \in E / f(x) = 1\}$.

1. Demostrar que
$$\inf_{x \in L} \|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|}.$$
2. Se puede encontrar en la esfera unitaria una sucesión (x_n) tal que $|f(x_n)| \geqslant \frac{n}{n+1}\|f\|$. (Justificar) y, usando esta sucesión, demostrar que se tiene finalmente
$$\inf_{x \in L} \|x\| = \frac{1}{\|f\|}.$$

[006124]

Ejercicio 7326

Sea $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$.

1. Calcular $\|\mu\|$ y $\|\mu_n\|$.
2. Demostrar que $\mu_n(x)$ converge a $\mu(x)$, para todo x en E, pero que $\|\mu - \mu_n\| = 2$.

[006125]

Ejercicio 7327

Sea $E = C([0,1])$ y (t_n) una sucesión de puntos distintos, convergente en $[0,1]$. Demostrar que f definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x(t_n)$ es un elemento de E' de norma 1 que no alcanza su norma en ningún punto de la bola unidad de E.

[006126]

Ejercicio 7328

Sea $a, b \in E$ evn, $B_1 = \{x \in E / \|x-a\| = \|x-b\| = \frac{1}{2}\|a-b\|\}$, y para $n > 1$, $B_n = \{x \in B_{n-1} / \|x-y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y \in B_{n-1}\}$, donde $\delta(B)$ denota el diámetro del conjunto B.

1. Demostrar que $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, y que $\bigcap\limits_n B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Sea f una isometría de E *sobre* F evn, tal que $f(0) = 0$. Demostrar considerando la sucesión $(f(B_n))$ solo para todo $a, b \in E$,
$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
Inferir que f es una isometría lineal. ¿Qué más se puede decir generalmente de la forma isométrica f de E sobre F ?
3. Se denota l_n^∞ el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado con la norma $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, y se considera la aplicación $f : l_n^\infty \to l_{n+1}^\infty$ definida por $f(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n, \operatorname{sen} x_1)$. Verificar que f es una isometría no lineal entre evn ; ¿por qué no existe contradicción con lo anterior ?

[006127]

Ejercicio 7329

1. Sea (u_n) una sucesión de números complejos. Se supone que, para toda sucesión acotada de complejos (v_n), la serie $\sum u_n v_n$ converge. Demostrar que (u_n) está en el espacio l^1.
2. Sea (u_n) una sucesión de números complejos. Se supone que, para toda sucesión (v_n) en l^2, la serie $\sum u_n v_n$ converge. Demostrar que (u_n) está en el espacio l^2. *Indicación :* Sea (a_n) una serie positiva divergente. Demostrar que la serie de término general $\frac{a_n}{S_n^\alpha}$, donde $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si no. Utilizar luego esta observación para llevar a cabo un razonamiento por contradicción.

[006128]

Ejercicio 7330

Se va a demostrar que el dual de l^2 es isométricamente isomorfo a l^2. Se denota como de costumbre e_n el elemento de l^2 en el que todas las componentes son nulas, excepto la n-ésima que vale 1.

1. Sea $x \in l^2$. Demostrar que la sucesión de elementos de l^2 $x_n = \sum\limits_1^n x(k)e_k$ converge a x en l^2 (dicho de otro modo, las sucesiones nulas a partir de cierto rango son densos en l^2). Deducir que si $f \in (l^2)'$, $f(x) = \sum\limits_1^\infty x(n) f(e_n)$.
2. Demostrar que $\|f\| \geqslant (\sum\limits_1^n |f(e_k)|^2)^{\frac{1}{2}}$, y que $(f(e_n))_n$ es un elemento de l^2.
3. Demostrar entonces que para todo $x \in l^2$, $|f(x)| \leqslant \|x\|_2 \|(f(e_n))\|_2$, y que $\|f\| = \|(f(e_n))\|_2$. Deducir que la aplicación $f \to (f(e_n))$ es un isomorfismo isométrico del dual de l^2 sobre l^2.

[006129]

Ejercicio 7331

Siguiendo el mismo enfoque que el ejercicio 7330, demostrar que el dual topológico de c_0 es isométricamente isomorfo a l^1. [006130]

314 430.00 Conexidad

Ejercicio 7332

Sea X un espacio métrico.

1. Demostrar que X es conexo si y solo si toda aplicación continua $f : X \to \{0,1\}$ es constante.
2. Sea A una parte de X conexa. Demostrar que toda parte $B \subset E$ verificando $A \subset B \subset \overline{A}$ es conexo.
3. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de partes conexas de x tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$, para todo $n \geqslant 0$. Demostrar que $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ es conexo.

Indicación ▼ Solución ▼ [002383]

Ejercicio 7333

Determinar las partes conexas de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq y\}$ y de $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ z \neq w\}$.

Solución ▼ [002384]

Ejercicio 7334

Sean A y B de partes de X. Se supone B conexo y que $B \cap A$ y $B \cap \complement A$ no son vacíos. Demostrar que B cruza la frontera de A.

Indicación ▼ Solución ▼ [002385]

Ejercicio 7335

Denotemos $T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\}$ dotado de la topología inducida por la de $\mathbb{R}^2$.

1. Demostrar que T es compacto y conexo y que $f(T)$ es un segmento si $f : T \to \mathbb{R}$ es una función continua.
2. Determinar los puntos $x \in T$, para los cuales $T \setminus \{x\}$ es conexo.
3. Demostrar que T no es homeomorfo a ninguna parte de $\mathbb{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002386]

Ejercicio 7336

1. Demostrar que existe una sobreyección continua de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \ |z| = 1\}$ y que no existe inyección continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}$.
2. Demostrar que no existe inyección continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002387]

Ejercicio 7337

En $\mathbb{R}^2$, sea B_a el conjunto $\{a\}\times]0,1]$ si a es racional y $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a es irracional. Demostrar que $B = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} B_a$ es una parte conexa de $\mathbb{R}^2$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002388]

Ejercicio 7338

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una aplicación derivable. Denotemos $A = \{(x,y) \in I \times I\ ;\ \ x < y\}$.

1. Demostrar que A es una parte conexa de $\mathbb{R}^2$.
2. Para $(x,y) \in A$, se escribe $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Demostrar que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Demostrar que $f'(I)$ es un intervalo.

Este resultado significa que *la derivada de toda función derivable tiene la propiedad de los valores intermedios* (un teorema de Darboux).

Indicación ▼ Solución ▼ [002389]

Ejercicio 7339

Sea X un espacio métrico y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de partes conexas por arcos de X tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Demostrar que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo por arcos.

Solución ▼ [002390]

Ejercicio 7340

En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto $A = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))\ ;\ x > 0\}$.

1. Demostrar que A es una parte conexa y conexa por arcos de $\mathbb{R}^2$.
2. Determinar $\overline{A}$ y justificar que $\overline{A}$ es conexo.
3. Demostrar que $\overline{A}$ no es conexo por arcos.

Indicación ▼ Solución ▼ [002391]

Ejercicio 7341

Demostrar que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ (dotados de la topología inducida por la de $\mathbb{R}$) no son homeomorfos, pero ambos son "totalmente discontinuos" en el siguiente sentido : sus únicos conexos son los puntos. (Se observa que A conexo en $Y \Rightarrow A$ conexo en X si $Y \subset X$). [006144]

Ejercicio 7342

Sea A una parte del círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \partial D$; demostrar que $D \cup A$ es conexo. [006145]

Ejercicio 7343

1. Demostrar que existe una equivalencia para X espacio topológico entre :
   i) Toda aplicación continua $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ es constante. ii) X es conexo.
2. Encontrar así diferentes resultados del curso ($f(C)$ conexo si C conexo y f continua ; B conexo si A conexo y $A \subset B \subset \overline{A}$; un producto de dos conexos es aún conexo ; etc)
3. Sea A, B conexo de X tales que $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$; demostrar con ayuda de a) que $A \cup B$ es conexo.

[006146]

Ejercicio 7344

¿Existe una aplicación continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \notin \mathbb{Q}$ y $f(x) \notin \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$? (Se observa la imagen de f.) [006147]

Ejercicio 7345

Sea $X=\mathbb{Q}$ dotado de la topología inducida por la de $\mathbb{R}$. Demostrar que los únicos conexos de X son los puntos. (A es conexo en $X \Rightarrow A$ es conexo en $\mathbb{R}$) [006148]

Ejercicio 7346

Sea X un abierto de un espacio vectorial normado E; demostrar que X es conexo si y solo si es conexo por arcos. (*Indicación :* fijar $a \in X$ y considerar $A=\{x \in X, \text{relacionado a } a \text{ por un camino en } X\}$.) [006149]

Ejercicio 7347

Sea f una sobreyección continua de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Demostrar que la imagen inversa de todo punto es no acotada (razonar por reducción al absurdo y usar que el complemento de un disco en $\mathbb{R}^2$ es conexo). [006150]

Ejercicio 7348

Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de raíces $z_1,\dots,z_n$ distintas o no, ubicado en un convexo K de $\mathbb{C}$.

1. Se supone que $P'(z)=0$ y $z \notin \{z_1,\dots,z_n\}$; demostrar que existen reales $\lambda_1(z),\dots,\lambda_n(z)$, desconocidas pero >0, tales que se tiene : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(z)(z-z_k)=0$. (Indicación : considerar $\frac{P'(z)}{P(z)}$ y su conjugado).
2. Demostrar que P' también tiene todas sus raíces en K (teorema de Gauss-Lucas).

[006151]

Ejercicio 7349

Se dice que un espacio topológico tiene la propiedad de punto fijo si toda función continua de X en X admite un punto fijo.

1. Demostrar que un espacio topológico con esta propiedad es necesariamente conexo.
2. Demostrar que si X tiene esta propiedad, todo Y homeomorfo a X, lo tiene también.
3. Demostrar así que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a un segmento.

[006152]

Ejercicio 7350

Sea $I=[a,b]$ y $f: I \to \mathbb{R}$ derivable; sea $A=\big\{(x,y) \in I \times I; y>x\big\}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

1. Demostrar que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
2. Demostrar que f' tiene la propiedad del valor intermedio : si toma los valores α y β, toma todo valor $\gamma \in [\alpha,\beta]$.

[006153]

Ejercicio 7351

Se va a demostrar usando la conexidad, el resultado clásico : "$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua inyectiva $\Longrightarrow f$ estrictamente monótona". Por esto, Se considera la aplicación F definida en $\mathbb{R}^2$ por $F(x,y)=f(x)-f(y)$ y $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x>y\}$

1. Demostrar que $F(C)$ es un conexo de $\mathbb{R}$.

2. Deducir el resultado.

[006154]

Ejercicio 7352

Se define la proyección estereográfica h de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $h(x,y)$ es el punto de intersección con el eje real de la recta de $(0,1)$ pasando por (x,y) si $(x,y)\neq(0,1)$ y $h(0,1)=\infty$. Verificar que se trata de un homeomorfismo. Deducir que $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ no son homeomorfos. [006155]

Ejercicio 7353

Sea X un espacio métrico. Establecer la equivalencia de las siguientes afirmaciones :

1. X es compacto conexo.
2. Para todo recubrimiento abierto $(U_i)_{i\in I}$, existe $n\in\mathbb{N}$ y $i_1,\ldots,i_n\in I$ tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}=X \quad y \quad U_{i_k}\cap U_{i_{k+1}}\neq\varnothing \text{ para } k=1,\ldots,n-1.$$

[006156]

Ejercicio 7354

Sean A y B partes de un espacio topológico X. Verdadero o falso.

1. ¿Si A es conexo, ∂A es conexo ?
2. ¿Si $\overline{A}$ es conexo, A es conexo ?
3. ¿Si A y B son conexos y $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap B$ es conexo ?
4. ¿Si X es un evn y A y B convexos con $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap B$ es conexo ?
5. ¿Si A y B son conexos, $A\cup B$ es conexo ?
6. Sea f continua de X en Y espacio topológico. ¿Si A es conexo por arcos, $f(A)$ es conexo por arcos ?
7. Sea f continua de X en Y evn. ¿Si A es convexo, $f(A)$ es convexo ?

[006157]

Ejercicio 7355

En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto A de puntos con al menos una coordenada irracional.

1. Sea $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; describir el conjunto $A\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=\alpha\}$.
2. Demostrar que A es conexo por arcos (más precisamente dos puntos de A pueden ser conectados por una recta poligonal).

[006158]

Ejercicio 7356

1. Demostrar que en $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, los subconjuntos siguientes son conexos :

$$B(0,r);\quad \mathbb{R}^n\backslash B(0,r);\quad S^{n-1}(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n\ /\ ||x||=r\}.$$

2. Demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos (si no quitar un punto de $\mathbb{R}$).

[006159]

Ejercicio 7357

Se recuerda que si X es unión disjunta de partes no vacías ω_i abiertas y conexas, los ω_i son las componentes conexas de X. Encontrar las componentes conexas del complemento de conjuntos siguientes :

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2-x=0\};\quad \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0<x^2+y^2+z^2\leqslant 1\};\quad S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n/||x||=1\};\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}^2.$$

[006160]

Ejercicio 7358

Sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Demostrar que

1. si $\dim H=n-1$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ tiene dos componentes conexas ;
2. si $\dim H\leqslant n-2$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ es conexo.

[006161]

Ejercicio 7359

Se considera el siguiente subconjunto del plano complejo :

$$C=\bigcup_{n\geqslant 1}[0,1+\tfrac{i}{n}]\cup\,[\tfrac{1}{2},1]=A\cup\,[\tfrac{1}{2},1]$$

1. Demostrar que C es conexo. Sea γ un camino que conecta un punto de A en un punto de $[\frac{1}{2},1]$ y de imagen en C.
2. Si γ no pasa por 0, demostrar que $\gamma(t)=r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$, donde $r(t)>0$ y $0\leqslant\theta(t)<\frac{\pi}{2}$, y r,θ continuas.
3. Demostrar que θ solo toma un número numerable de valores y da como resultado una contradicción.
4. En todos los casos, demostrar que existe $t_0\in]0,1[$ tal que $\gamma(t)$ no pasa por 0, para $t\geqslant t_0$. Deducir que C no es conexo por arcos.

[006162]

Ejercicio 7360

Sea f una aplicación continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ verificando

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big),\quad \forall x,y\in[a,b].$$

1. Se supone $f(a)=f(b)=0$. Se considera $E=\{x\in]a,b[\ /\ f(x)=\sup\limits_{t\in[a,b]}f(t)\}$. Demostrar que E es abierto y cerrado en $]a,b[$. Deducir que f es <0 o idénticamente nula en $]a,b[$.
2. Demostrar en todos los casos que f es convexa, es decir f verifica $f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$, para todo $x,y\in[a,b]$ y $t\in[0,1]$. (Se lleva al caso a) considerando f privada de su cuerda en $[a,b]$).

[006163]

Ejercicio 7361

Sea A un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $a\in A$. Sea G_a el conjunto de los puntos de A se puede vincular a a por un camino contenido en A.

1. Demostrar que G_a y $A \setminus G_a$ son abiertos.
2. Deducir que A es conexo por arcos.

[006773]

Ejercicio 7362

1. Dar la *definición* de un intervalo en $\mathbb{R}$ y demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ es conexo, entonces A es un intervalo.
2. Usando la noción de conexidad, demostrar que no existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[006782]

Ejercicio 7363

Sea X un espacio topológico, I un conjunto de índices y para cada $\alpha \in I$, sea $A_\alpha \subset X$ una parte conexa de X. Se supone que $\forall\, \alpha, \beta \in I : A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$. Demostrar que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es conexo. [006814]

Ejercicio 7364

Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ una parte y $C \subset X$ una parte conexa tal que $C \cap A \neq \varnothing$ y $C \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

1. Demostrar que C contiene puntos de la frontera de A.
2. ¿Por qué $A = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$ y $C = \{(0, 0, z) \mid |z| \leqslant 1\}$ no es un contraejemplo de la propiedad enunciada en 1. ?

[006815]

Ejercicio 7365

Sea X un espacio topológico conexo, sea $\mathscr{U}$ un recubrimiento de X por abiertos y sea $x_0 \in X$ un punto de X. Se dice que x es n-alejado de x_0 si existe $U_0, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ tales que $x_0 \in U_0$, $U_{i-1} \cap U_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$ y $x \in U_n$. Tomar el tiempo para dibujar lo que significa n-alejado. Se define el conjunto $A \subset X$ por

$$A = \{\, x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \text{ es } n\text{-alejado de } x_0 \,\}.$$

Demostrar que A es abierto y cerrado en X. Deducir que $A = X$. [006834]

---

315 431.00 Otro

Ejercicio 7366 Desigualdad por Cauchy-Schwarz

1. Demostrar que : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.
2. Determinar : $m = \inf\{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} 1/x_i)$ tales que $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\}$.
3. Determinar : $M = \sup\{|x + 2y + 3z + 4t|$ tales que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 1\}$.

[001864]

Ejercicio 7367

Sean $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ y $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dos familias de n números reales. Demostrar, estudiando la señal del trinomio $\lambda \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2$ que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. [001866]

Ejercicio 7368

Sea E un espacio vectorial normado en $\mathbb{C}$. Se designa por $\overline{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la bola cerrada del centro 0 y de radio 1. Sea $F \subset E$ un subespacio vectorial **cerrado** de E. Para $x \in E$ se establece :

$$d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| \equiv \inf\{\, \|x-y\| \mid y \in F\,\}.$$

1. Demostrar que para todo $x \in E$ se tiene $0 \leqslant d(x,F) \leqslant \|x\|$.
2. Demostrar que las dos condiciones siguientes son equivalentes.
   (a) $d(x,F) = 0$;
   (b) $x \in F$.
3. (a) Demostrar que, cualesquiera que sean $x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$, se tiene :
$$\forall x \in E,\ \lambda \in \mathbb{C} : d(\lambda x,F) = |\lambda|\, d(x,F)$$
$$\forall x \in E,\ y \in F : d(x-y,F) = d(x,F)$$
$$\forall x, x' \in E : d(x+x',F) \leqslant d(x,F) + d(x',F).$$
   (b) Demostrar que la aplicación $x \mapsto d(x,F)$ es uniformemente continua en E.
4. Sea $x \in \overline{B}$. Se define $\alpha = d(x,F)$ y se supone $\alpha > 0$. Sea además $\varepsilon > 0$.
   (a) Demostrar que existe $y \in F$ tal que
$$\alpha \leqslant \|x-y\| < \alpha(1+\varepsilon).$$
   (b) Demostrar que existe $x' \in \overline{B}$ tal que
$$\frac{1}{1+\varepsilon} = d(x',F) < 1.$$
   (c) Demostrar que, si $F \neq E$, $\sup_{x\in\overline{B}} d(x,F) = 1$.
5. Sabiendo que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es completo, demostrar que todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio vectorial normado es cerrado.
6. Se supone ahora que $\overline{B}$ es compacto.
   (a) Demostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número finito k puntos de $\overline{B}$: $x_1, \ldots, x_k \in \overline{B}$ tales que
$$\overline{B} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_\varepsilon(x_j)$$
   donde $B_\varepsilon(x_j)$ designa la bola abierta de centro x_j y de radio ε.
   (b) Deducir de lo anterior que E es de dimensión finita (se puede considerar el subespacio vectorial generado por los vectores $x_1, \ldots, x_k$).

7. Se vuelve al caso general (es decir : no se supone más que $\overline{B}$ es compacto). Sea $u : E \to E$ una aplicación lineal continua. Se supone que $\overline{u(\overline{B})}$ (la adherencia de la imagen de $\overline{B}$ por u) es compacto. Sea $\lambda \neq 0$ un valor propio de u (es decir : existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tal que $u(x_0) = \lambda x_0$). Se define $V_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$.
   (a) Demostrar que V_λ es un subespacio vectorial cerrado de E.
   (b) Demostrar que $\overline{B} \cap V_\lambda \subset \frac{1}{\lambda} u(\overline{B})$.
   (c) Demostrar que V_λ es de dimensión finita.

[006807]

---

316 432.00 Teorema de Stone-Weirstrass, teorema de Ascoli

Ejercicio 7369

Sea $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b f(t)t^n \, dt = 0.$$

Demostrar que f es la función nula.

Indicación ▼ Solución ▼ [002408]

Ejercicio 7370

Demostrar que una función de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admitiendo un límite finito en $+\infty$ no es un límite uniforme de polinomios de $\mathbb{R}[x]$.

Indicación ▼ [002409]

Ejercicio 7371

Sea E un espacio compacto. Sea f_i, $i = 1,\ldots,n$ una familia de n elementos de $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$ que separa los puntos de E. Demostrar que E es homeomorfo a una parte de $\mathbb{R}^n$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002410]

Ejercicio 7372

Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de combinaciones lineales finitas $f \in \mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{R})$ de la forma :

$$f(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(x) \cdot v_i(y), \quad \text{con } u_i \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R}),\ v_i \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R},\ I \text{ finito}.$$

Demostrar que toda función de $\mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{R})$ es un límite uniforme de sucesiones de elementos de $\mathscr{A}$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002411]

Ejercicio 7373

1. Sea $k > 0$ y $\mathscr{F}$ el conjunto de funciones derivables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $|f'(t)| \leqslant k$, para todo $t \in]a,b[$. Demostrar que $\mathscr{F}$ es una familia equicontinua.
2. Si $L > 0$ y $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un conjunto de aplicaciones L-lipschitzianas con $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, entonces Demostrar que se puede extraer una sub-sucesión convergente de (f_n).

Indicación ▼ Solución ▼ [002412]

Ejercicio 7374

Sean E,F espacios normados y (f_n) una sucesión de aplicaciones E en F equicontinua en $a \in E$. Demostrar que, si la sucesión $(f_n(a))$ converge a b, entonces $(f_n(x_n))$ converge también a b, si (x_n) es una sucesión de E tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ¿La equicontinuidad es necesaria aquí?

Indicación ▼ Solución ▼ [002413]

Ejercicio 7375

Sean E,F espacios normados y (f_n) una sucesión de aplicaciones equicontinuas de E en F. Demostrar que el conjunto de $x \in E$, para los cuales $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en F, es un cerrado.

Solución ▼ [002414]

Ejercicio 7376

Sean (E,d) un espacio métrico y $\mathscr{H}$ una familia equicontinua de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Establecer :

1. El conjunto A de los $x \in E$, para los cuales $\mathscr{H}(x)$ es acotado, es abierto y cerrado.
2. Si E es compacto y conexo y si $\mathscr{H}(x_0)$ es acotada para todo punto $x_0 \in E$, entonces $\mathscr{H}$ es relativamente compacto en $\mathscr{C}(E,\mathbb{R})$.

Indicación ▼ Solución ▼ [002415]

Ejercicio 7377

Se considera la sucesión de funciones $f_n(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$, $t \in [0,\infty[$.

1. Demostrar que se trata de una sucesión de funciones equicontinuas que converge simplemente a $f \equiv 0$.
2. La sucesión (f_n) es relativamente compacta en $(\mathscr{C}_b([0,\infty[), \|\cdot\|_\infty)$, ¿el conjunto de funciones continuas y acotadas? ¿Qué dice el teorema de Ascoli?

Indicación ▼ Solución ▼ [002416]

Ejercicio 7378

Sea $K : \mathscr{C}([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ dada por $(Kf)(s) = \displaystyle\int_a^b k(s,t)f(t)\,dt$, $k \in \mathscr{C}([a,b]\times[a,b])$, y sea (f_n) una sucesión acotada de $X = (\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Recordar por qué k es uniformemente continua.
2. Deducir la equicontinuidad de (Kf_n).
3. Demostrar que (Kf_n) contiene una sub-sucesión convergente en X.

Solución ▼ [002417]

Ejercicio 7379

Sea $X = [0,1]$, $Y = [-1,1]$, $f_n(x) = frac1n \operatorname{sen}(n^2 x)$; se denota A el subconjunto de $C(X,Y)$ constituido de las (f_n), $n \geqslant 1$.

1. Demostrar sin cálculos que A es equicontinuo.

2. Demostrar que se tiene más precisamente $|f_n(x)-f_n(y)| \leqslant \sqrt{2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$, para todo n,x,y. Deducir que el módulo de equicontinuidad de A es $\geqslant \varepsilon^2/2$.

[006252]

Ejercicio 7380

¿Para qué valores de $\alpha \geqslant 0$, la función $f(x)=\cos x^{\alpha}$ es uniformemente continua ?
Se supone que esta condición se cumple y se define f_n por $f_n(x)=f(x+n)$. Demostrar que se puede extraer de (f_n) una sucesión que converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{R}^+$. ¿Se puede tener una convergencia uniforme en todo $\mathbb{R}^+$? [006253]

Ejercicio 7381

Sea $H=\{f\in C^1(\mathbb{R})\ /\ \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx+\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|^2dx\leqslant 1\}$.

1. Demostrar que si $f\in H$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$.
2. Demostrar que $||f||_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, para toda $f\in H$.
3. Demostrar que H es una parte equicontinua y acotada de $C_0(\mathbb{R})$.
4. Sea $\varphi(x)=(x^2-1)^2\,\mathbf{1}_{|x|\leqslant 1}$, y $f_n(x)=\varphi(x-n)$; demostrar que $\lambda f_n\in H$, para una constante λ bien elegido y que esta sucesión no tiene valor de adherencia en $C(\mathbb{R})$. ¿Conclusión ?

[006254]

---

317 440.00 Función holomorfa

Ejercicio 7382

Todo complejo z que no es un real positivo o nulo se puede escribir en la forma $z=re^{i\theta}$, con $r>0$ y $\theta\in\,]0,2\pi[$. Se define una función f sobre $\Omega=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$ por

$$f(z)=P(r,\theta)+iQ(r,\theta)$$

donde P y Q son funciones reales dadas. Dar condiciones sobre las derivadas parciales de P, Q, para que f sea holomorfa en Ω. Deducir que la función

$$\log z=\log r+i\theta$$

es holomorfa en Ω. ¿Cuál es su derivada ?

Solución ▼ [002681]

Ejercicio 7383

Sea a un real en $]0,1[$. Se quiere calcular la integral

$$I_a=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx.$$

Por esto, se define una función f sobre $\Omega=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$ de la siguiente manera :

$$f(z)=\frac{\exp\left((a-1)\log z\right)}{1+z},$$

donde la función log se define como en el ejercicio anterior.

— Demostrar que f es meromorfa en Ω. ¿Cuáles son los polos ?

— Sea $\varepsilon \in]0,1[$ y $R > 1$ dos reales. Se considera ahora el camino C unión del segmento $[\varepsilon, R] + 0i$, del círculo de radio R, recorrido positivamente, del segmento $[R, \varepsilon] - 0i$ y del círculo de radio ε recorrido negativamente. Calcular $\int_C f(z)\,dz$; deducir el valor de I_a.

Solución ▼ [002682]

Ejercicio 7384

Demostrar que la función $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y comprobar $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Solución ▼ [002783]

Ejercicio 7385

Si f y g son dos funciones derivables en el sentido complejo en el punto z_0 ; demostrar que $f+g$, $f-g$ y fg, lo son y dar el valor de sus derivadas en el punto z_0.

Solución ▼ [002784]

Ejercicio 7386

Si f y g son dos funciones derivables en el sentido complejo en el punto z_0 demostrar que $\frac{f}{g}$ es derivable en el sentido complejo y dar el valor de la derivada cuando $g(z_0) \neq 0$.

Solución ▼ [002785]

Ejercicio 7387

Demostrar la fórmula de la derivada de una composición $g \circ f$.

Solución ▼ [002786]

Ejercicio 7388

Sea f y g dos funciones n-veces derivables en el sentido complejo en un abierto no vacío U (nota : según el curso es suficiente que sean derivables una vez en U, para que sean derivables cualquier número de veces). Demostrar la fórmula generalizada de Leibniz :

$$\forall z \in U, \quad (fg)^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z) g^{(n-j)}(z).$$

Solución ▼ [002787]

Ejercicio 7389

Se dan dos series enteras $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ radio de convergencia R_1 y R_2 no nulos. Demostrar usando el teorema de la serie doble $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, para $|z| < R = \min(R_1, R_2)$, con (fórmulas llamadas de Cauchy) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

¿El radio convergente de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es siempre igual a $\min(R_1, R_2)$ o puede ser más grande ?

Solución ▼ [002788]

Ejercicio 7390

Encontrar el resultado del ejercicio anterior (el ejercicio 7389) de manera más indirecta demostrando que los coeficientes $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ son los de la serie de Taylor en el origen de la función holomorfa $k(z) = f(z)g(z)$.

Solución ▼ [002789]

Ejercicio 7391

¿En qué puntos la función $z \mapsto \bar{z}$ es derivable en el sentido complejo, y/o holomorfa ? La misma pregunta para las funciones $z \mapsto x$ y $z \mapsto y$.

Solución ▼ [002790]

Ejercicio 7392

Demostrar que una función holomorfa en un abierto conexo, con derivada idénticamente nula, es constante. ¿Y si el abierto no es conexo ?

Solución ▼ [002791]

Ejercicio 7393

En un abierto conexo U se da una función holomorfa f que tiene la propiedad de tomar solo valores reales. Usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann, demostrar que f es constante.

Solución ▼ [002792]

Ejercicio 7394

Este ejercicio propone una variante para desarrollar la teoría de la función exponencial.

1. Se da una función f que es $n+1$-veces derivable en el sentido complejo en el disco abierto $D(0,R)$ (se sabe que una vez es suficiente pero no vamos a usar este teorema difícil aquí). Sea $z \in D(0,R)$. Aplicando la fórmula de Taylor con resto integral de Lagrange a la función de variable real $t \mapsto g(t) = f(tz)$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$, demostrar :
$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + z^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tz)\,dt$$
2. Se supone que f es derivable en el sentido complejo una vez en $D(0,R)$ y verifica $f' = f$ y $f(0) = 1$. Demostrar que f es infinitamente derivable en el sentido complejo. Usando la pregunta anterior demostrar :
$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \Big(\sup_{|w| \leqslant |z|} |f(w)| \Big) \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$
y deducir que, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene : $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.
3. Recíprocamente, se considera la función $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Verificar que el radio de convergencia es infinito. Establecer por cálculo directo que $F'(0)$ existe y vale 1. Usando el teorema de la serie doble, demostrar $F(z+w) = F(z)F(w)$. Deducir a continuación que F es holomorfa en $\mathbb{C}$ y comprobar $F' = F$.

Solución ▼ [002793]

Ejercicio 7395

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia R. ¿Es cierto que para $|z| > R$ se tiene $\lim |a_n z^n| = +\infty$?

Solución ▼ [002794]

Ejercicio 7396

Determinar las series de Taylor en el origen de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Solución ▼ [002795]

Ejercicio 7397

Determinar en todo $z_0 \neq 1$ la serie de Taylor y su radio de convergencia para la función analítica $\frac{1}{z-1}$.

Solución ▼ [002796]

Ejercicio 7398

Determinar en todo $z_0 \neq 1,\ 2$ la serie de Taylor y su radio de convergencia para la función analítica $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Se tiene interés en reducir a elementos simples. Además, solicitamos indicar el radio de convergencia *antes* de determinar explícitamente la serie de Taylor.

Solución ▼ [002797]

Ejercicio 7399

Determinar en todo punto z_0, donde se define la serie de Taylor de la función $\frac{1}{z^3-1}$. Se determina su radio de convergencia en función de z_0. [002798]

Ejercicio 7400

Se considera la serie entera $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$. ¿Cuál es su radio de convergencia ? Se denota $f(z)$ su suma. ¿Cuánto vale $\lim_{t\to 1} f(t)$? (se toma $0 < t < 1$; minorar f por las sumas parciales). ¿Más generalmente qué vale $\lim_{t\to 1} f(tw)$ (aquí todavía t es tomado en $]0,1[$), cuando w verifica una ecuación $w^{2^N} = 1$? Deducir que es imposible encontrar un abierto U conexo intersecando $D(0,1)$, pero no incluido enteramente en $D(0,1)$ y una función holomorfa $g(z)$ sobre U tales que $g = f$ sobre $U \cap D(0,1)$. Para todo $z_0 \in D(0,1)$ determinar entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en el punto z_0.

Solución ▼ [002799]

Ejercicio 7401

Demostrar que el radio de convergencia de cada una de las series en cuestión es 1 y probar :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ no converge en ningún punto del círculo $|z| = 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en todo punto del círculo $|z| = 1$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en todo punto del círculo $|z| = 1$ **excepto** en $z = 1$.

Para este último caso se define $S_0 = 1$, $S_1 = 1 + z$, $S_2 = 1 + z + z^2$, ... (se establece también $S_{-1} = 0$). Escribiendo $z^n = S_n - S_{n-1}$ expresar $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}$ en función de los S_n. Demostrar que los S_n están acotadas cuando $|z| = 1$, $z \neq 1$. Concluir.

[002800]

Ejercicio 7402

Demostrar que un entero $k \geqslant 1$ se escribe de manera única en la forma $2^n(2m+1)$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Luego probar para $|z| < 1$:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

Se justificará las inversiones de series. Demostrar también :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

[002801]

Ejercicio 7403

Cuando z es complejo las funciones $\operatorname{sen}(z)$, $\cos(z)$, $\operatorname{sh}(z)$ y $\operatorname{ch}(z)$ están definidas por las fórmulas :

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

1. Demostrar que cos y ch son funciones pares y sen y sh funciones impares y dar sus representaciones como series enteras. Demostrar $e^{iz} = \cos(z) + i\operatorname{sen}(z)$, $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{sh}(z)$, $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$, $\operatorname{sh}(iz) = i\operatorname{sen}(z)$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Establecer las fórmulas : $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$
$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\operatorname{sen}(w).$$
Escribir de dos maneras diferentes $e^{\pm i(z+w)}$. Dar otra prueba utilizando el principio de extensión analítica y la validez (admitida) de las fórmulas para z y w reales.
3. Probar para todo z compleja $\cos(\pi + z) = -\cos(z)$, $\operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen}(z)$. Demostrar $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{sen}(z)$.
4. Demostrar las fórmulas $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ y $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución ▼ [002802]

Ejercicio 7404

Demostrar $\operatorname{sen}(a+ib) = \operatorname{sen}(a)\operatorname{ch}(b) + i\cos(a)\operatorname{sh}(b)$. Luego tomando de ahora en adelante a y b reales, demostrar : $a, b \in \mathbb{R} \implies |\operatorname{sen}(a+ib)|^2 = \operatorname{sen}^2(a) + \operatorname{sh}^2(b)$.
Determinar entonces los números complejos $z = a + ib$ tales que $\operatorname{sen}(z) = 0$. Dar otra prueba.

Solución ▼ [002803]

Ejercicio 7405

Demostrar : $a, b \in \mathbb{R} \implies |\cos(a+ib)|^2 = \cos^2(a) + \operatorname{sh}^2(b) = \operatorname{ch}^2(b) - \operatorname{sen}^2(a)$.

Determinar los números complejos z, con $\cos(z) = 0$. [002804]

Ejercicio 7406

Las funciones de Bessel son muy importantes en Análisis. Aparecen a menudo en problemas de física matemática. El análisis complejo permite estudiar en profundidad estas funciones. Aquí nos contentamos con los inicios de la teoría. Solo se consideran las funciones [4] $J_0, J_1, J_2, \ldots$, que se definen por las fórmulas : [5]

$$\nu \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}, \quad J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}.$$

1. Demostrar que el radio de convergencia de la serie definiendo J_ν es $+\infty$.
2. Derivando término a término probar las fórmulas :

$$\begin{aligned} (z^\nu J_\nu)' &= z^\nu J_{\nu-1} \qquad &(\nu \geqslant 1) \\ (z^{-\nu} J_\nu)' &= -z^{-\nu} J_{\nu+1} \qquad &(\nu \geqslant 0) \end{aligned}$$

   en particular se tiene $(zJ_1)' = zJ_0$ y $J_0' = -J_1$.
3. Reescribir las ecuaciones anteriores en la forma $(z\frac{d}{dz} + \nu)J_\nu = zJ_{\nu-1}$ $(\nu \geqslant 1)$ y $(z\frac{d}{dz} - \nu)J_\nu = -zJ_{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 0)$ y deducir $-(\frac{d}{dz} + \frac{\nu+1}{z})(\frac{d}{dz} - \frac{\nu}{z})J_\nu = J_\nu$, después, luego de la simplificación, la ecuación diferencial de Bessel :

$$z^2 J_\nu'' + zJ_\nu' + (z^2 - \nu^2)J_\nu = 0.$$

4. Demostrar, para todo $\nu \in \mathbb{N}$, que la serie entera definiendo J_ν es la única (salvo una constante multiplicativa) que da una solución de la ecuación diferencial de Bessel. [6]

[002805]

Ejercicio 7407

1. Demostrar que $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ es armónica.
2. Determinar v tal que $f = u + iv$ sea holomorfa.
3. Escribir la función f encontrada arriba como una función de una variable compleja.

[006580]

Ejercicio 7408

Demostrar que

$$f(x+iy) = x^2 + iy^3$$

---

4. dicen “funciones de Bessel de primera especie (e índices enteros)”.
5. Dicho de otro modo :

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2\cdot 4\cdots(2\nu)}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot(2\nu+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)\cdot(2\nu+4)} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2\nu+2)\cdot(2\nu+4)\cdot(2\nu+6)} + \ldots\right)$$

Se observa que solo la constante $2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2\nu) = 2^\nu \nu!$ se restringe (por el momento) a valores enteros de ν. Si no los se tiene en cuenta, obtendremos con $\nu = -\frac{1}{2}$ la función “multiforme” $z^{-1/2}\cos(z)$; mientras que con $\nu = +\frac{1}{2}$ se obtiene $z^{-1/2}\operatorname{sen}(z)$. Las definiciones exactas son $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z)$ y $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sen}(z)$.

6. Las otras soluciones de la ecuación diferencial son singulares en $z = 0$, con componente logarítmica ($\nu \in \mathbb{Z}$). Para $\nu \notin \mathbb{Z}$ hay una solución en $z^\nu(\sum_{k\geqslant 0} c_k z^k)$ y otro en $z^{-\nu}(\sum_{k\geqslant 0} d_k z^k)$.

no es holomorfa en ningún punto aunque las ecuaciones de Cauchy–Riemann sean verificadas en el origen, incluso en una parábola que se debe precisar. [006581]

Ejercicio 7409

Estudio de la exponencial compleja $f(z) = \mathrm{e}^z$ y del logaritmo complejo.

1. Describir la imagen de una recta $y = c$, c es una constante, con respecto a f.
2. Describir la imagen de una recta $x = c$, c es una constante, con respecto a f.
3. Verificar que la restricción de f en el dominio
$$W = \{z = x + iy;\ |y| < \pi\}$$
es una biyección de W sobre
$$D = \mathbb{C} \setminus \{z;\ z = -x,\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}.$$
4. Deducir la existencia de una única función compleja Φ, con dominio de definición $D_\Phi = D$, de manera que
$$\mathrm{e}^{\Phi(z)} = z, \quad |\mathrm{Im}\Phi(z)| < \pi.$$
Esta función se llama *determinación principal* del logaritmo, denotada Log ; usando un poco más de teoría se demuestra que es holomorfa, con $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

[006582]

Ejercicio 7410

Verificar que, para todo número complejo z, con $|z| < 1$, se tiene
$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots .$$

[006583]

Ejercicio 7411

Desarrollar en serie entera $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$. [006584]

Ejercicio 7412

Verificar que
$$\mathrm{Arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \cdots$$
en un dominio de convergencia que se precisará. [006585]

Ejercicio 7413

Evaluar
$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$$

1. a lo largo de la parábola $y = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

2. a lo largo del segmento de recta $(1+i),(2+4i)$;
3. a lo largo de los segmentos $(1+i),(2+i)$ y $(2+i),(2+4i)$.

[006586]

Ejercicio 7414

Para todo $z \in \mathbb{C}$, se define $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

1. Demostrar que la función exp es continua y verifica :
   $\exp(0) = 1;\ \forall a,b \in \mathbb{C},\ \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.
2. Se denota $\mathrm{e} = \exp(1)$ y $f(z) = \exp(z) = \mathrm{e}^z$. Establecer los siguientes resultados :
   (a) $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z \neq 0$.
   (b) $f'(z) = f(z)$.
   (c) $f_{|\mathbb{R}}$ es creciente, positiva, tiende a $+\infty$, cuando $x \to +\infty$, tiende a 0, cuando $x \to -\infty$.
   (d) existe un número positivo π tal que $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$ y tal que $\mathrm{e}^z = 1$ si y solo si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
   (e) f es periódica de periodo $2i\pi$.
   (f) $t \to \mathrm{e}^{it}$ es una sobreyección de $\mathbb{R}$ en el círculo unidad.
   (g) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

[006620]

Ejercicio 7415

Encontrar el máximo dominio de convergencia de la siguiente serie entera :

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \cos n\theta, \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

[006621]

Ejercicio 7416

Desarrollar las siguientes funciones en series enteras y precisar el dominio maximal de convergencia ($a,b \neq 0$) :

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}, \qquad h(z) = \frac{z \operatorname{sen} a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}.$$

[006622]

Ejercicio 7417

Desarrollar en serie entera en $\mathbb{R}$: $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\, dt$. [006623]

Ejercicio 7418

Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Demostrar que f es de clase C^∞ y desarrollable en serie entera. [006624]

Ejercicio 7419

Encontrar las soluciones de la ecuación diferencial : $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ comenzando por buscar soluciones desarrollables en series enteras. [006625]

Ejercicio 7420

Sea $\sum a_n z^n$ una serie entera de radio 1. Demostrar las equivalencias (i)$\Longleftrightarrow$(ii) $\Longleftrightarrow$(iii), donde

(i) La serie converge uniformemente en D.

(ii) La serie converge uniformemente en $\overline{D}$.

(iii) La serie converge uniformemente en ∂D.

(*Indicación* : para la implicación (iii) $\Longrightarrow$ (ii), se escribe $r_N = \sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{en\theta}$ y se hace una transformación de Abel en la suma $\sum\limits_{n=M}^{N} a_n \rho^n \mathrm{e}^{en\theta}$, donde $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.) [006626]

Ejercicio 7421

Sea $\sum a_n z^n$ una serie entera de radio 1. Se define $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$, $u(z) = \sum s_n z^n$ y $v(z) = \sum t_n z^n$.

1. Demostrar que los radios de convergencia de u y de v son iguales a 1.
2. Establecer para todo $|z| < 1$, $u(z) = \frac{1}{1-z}\sum a_n z^n$. Encontrar así el teorema de Abel : sea $f(z) = \sum a_n z^n$ una serie entera de radio 1, tal que $\sum a_n$ converge a A. Entonces $f(z)$ tiende a A, cuando $z \to 1$ no tangencialmente.

[006627]

Ejercicio 7422

Sea $(u_n)_{n\geqslant 0}$ una sucesión de reales. Se dice que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ es un valor adherente de la sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$ si existe una sub-sucesión de la sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$ que tiende a a. Demostrar que $L = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_{n} \sup\limits_{k\geqslant n} u_k$ y $l = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_{n} \inf\limits_{k\geqslant n} u_k$ son valores de adherencia de la sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Verificar que son respectivamente el mayor y el menor de los valores de adherencia. [006628]

Ejercicio 7423

Sea $(u_n)_{n\geqslant 0}$ y $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dos sucesiones de reales. Establecer las proposiciones siguientes :

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n; \quad (\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Dar un ejemplo de dos sucesiones para las cuales la primera desigualdad es estricta. [006629]

Ejercicio 7424

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia R. Se supone que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe en $\overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

[006630]

Ejercicio 7425

Determinar el radio de convergencia de las series $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n z^n$ $(a \in \mathbb{C})$; $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\sqrt{n}} z^n$; $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n/n!$; $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{2n}$; $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{n!}$.
Comparar el radio de convergencia de series $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^{2n}$. Si el radio de convergencia de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ es estrictamente positivo y finito, ¿cuál es el de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^{n^2}$? [006631]

Ejercicio 7426

Demostrar que el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ es superior o igual que el menor de los radios de convergencia de las series $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Demostrar con un ejemplo que la desigualdad puede ser estricta. [006632]

Ejercicio 7427

Se considera una serie entera $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ radio de convergencia $R > 0$. Su suma es denotada $f(z)$.

1. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n!} z^n$ tiene un radio de convergencia infinito. Su suma denotada $F(z)$ es llamada transformada de Borel.
2. Sea r un real verificando $0 < r < R$. Demostrar que existe un polinomio P tal que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{n!} z^n\right| \leqslant P(|z|) + \exp\left(\frac{|z|}{r}\right).$$
Se puede considerar un entero n_0 tal que, para todo $n > n_0$, se tiene $|c_n| \leqslant r^{-n}$.
3. Demostrar que, para todo z de $\mathbb{C}$ tal que $|z| < R$, se tiene
$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(tz)\mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

[006633]

Ejercicio 7428

1. Demostrar que $L = \limsup u_n \in \mathbb{R}$ se caracteriza por la siguiente condición :
Para todo $\varepsilon > 0$, todos los u_n excepto un número finito de ellos son $\leqslant L + \varepsilon$, y una infinidad entre ellos es $\geqslant L - \varepsilon$.
2. Escribir el análogo para el $\liminf$.

[006634]

Ejercicio 7429

---

1. Determinar usando la fórmula de Hadamard el radio de convergencia de las siguientes series :

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^n z^{n^2} \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

2. Encontrar el radio de convergencia de la serie $\sum a_n z^n$, donde

$$a_n = q^{n^2}\ (|q|<1); \quad a_n = C_{kn}^n; \quad a_n = \mathrm{e}^{n^\alpha}\ (0<\alpha<1).$$

[006635]

Ejercicio 7430

1. Encontrar el radio de convergencia de la serie $\sum a_n z^n$, donde $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ y $a_{2n} = b^{2n}$, con $0 < a, b < 1$.
2. Para la serie $\sum a_n z^n$, donde $a_{2n} = a^n b^n$ y $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$, con $a, b > 0$, comparar el inverso del radio, R^{-1}, con $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

[006636]

Ejercicio 7431

Demostrar que si la serie $\sum a_n z^n$ tiene un radio $0 < R < +\infty$, la serie lagunar $\sum a_n z^{\lambda(n)}$, donde $\lim \frac{\lambda(n)}{n} = +\infty$, tiene radio $R' = 1$. Demostrar con un ejemplo que lo contrario puede ser falso. [006637]

Ejercicio 7432

1. Sea $f = P + iQ$ una función holomorfa en un abierto conexo no vacío Ω de $\mathbb{C}$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes :
   (i) f es constante, (ii) P es constante, (iii) Q es constante, (iv) $\bar{f}$ es holomorfa en U, (v) $|f|$ es constante.
2. Sea $f, g \in H(U)$. Se supone que g no se anula en U y $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$, para $z \in U$. Demostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = cg$.

[006638]

Ejercicio 7433

1. Para $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, se establece $f(z) = x + iy^2$. Demostrar que f es $\mathbb{R}$-diferenciable sobre $\mathbb{C}$ y calcular su diferencial. ¿Hay un abierto U de $\mathbb{C}$ tal que $f_{|U} \in H(U)$?
2. La misma pregunta para $f(z) = |\operatorname{sen} z|$.

[006639]

Ejercicio 7434

1. Sea $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Sea $P(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cosh y}$, para $z \in U$. Demostrar que existe $f \in H(U)$ única tal que $f(0) = 0$ y $P = \operatorname{Re} f$.

2. Sea $a,b,c \in \mathbb{R}$. Se define $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, para $x,y \in \mathbb{R}$. Dar una CNS para que exista $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $P = \operatorname{Re} f$. Bajo esta condición, encontrar entonces todas las aplicaciones $f \in H(\mathbb{C})$ tales que $P = \operatorname{Re} f$.

[006640]

Ejercicio 7435

1. Demostrar que las ecuaciones de Cauchy–Riemann en polares se escriben $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.
2. Escribir los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en coordenadas polares.
3. Si $f = u + iv$ es holomorfa en U, demostrar que en todo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ de U, se tiene
$$f'(z) = \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}(z) - i\frac{\partial u}{\partial \theta}(z)\right).$$
4. Sea P un polinomio no constante, se supone sin ceros. Se define así $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(r\mathrm{e}^{i\theta})}$. Demostrar que $I'(r) = 0$. Calculando $\lim_{r\to\infty} I(r)$ y $I(0)$, conducir a una contradicción. ¿Conclusión?

[006641]

Ejercicio 7436

¿En qué puntos la función $f(z) = z \operatorname{Re} z$ es $\mathbb{C}$-diferenciable? La misma pregunta para $f(z) = \exp \bar{z}$. [006642]

Ejercicio 7437

Escribir las ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares. Deducir que toda determinación del logaritmo es holomorfa. [006643]

Ejercicio 7438

Sea f la función definida en $\mathbb{C}$ por
$$\begin{cases} f(z) = \mathrm{e}^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$
Demostrar que f verifica las ecuaciones de Cauchy–Riemann en todo punto de $\mathbb{C}$, pero no es holomorfa en $\mathbb{C}$. [006644]

Ejercicio 7439

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω. Se designa por P y Q respectivamente sus partes real e imaginaria. Se supone que existen constantes reales distintas de cero a, b y c tales que la función $aP + bQ + c$ sea idénticamente nula en Ω. Demostrar que f es constante en Ω. [006645]

Ejercicio 7440

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, u su parte real y v su parte imaginaria. Se supone que las segundas derivadas parciales de u y v existen y son continuas en Ω. Demostrar que u (resp. v) es armónica (es decir $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). [006646]

Ejercicio 7441

Se dice que dos funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son conjugados armónicos si satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

1. Demostrar que si u y v son conjugados armónicos, entonces u y v son armónicos.
2. Encontrar los conjugados armónicos de las siguientes funciones armónicas en los abiertos indicados :
   (a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ sobre $\mathbb{C}$
   (b) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   (c) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ sobre
      i. $\mathbb{C} \setminus \{x+iy \mid y=0, x \leqslant 0\}$
      ii. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[006647]

Ejercicio 7442

Encontrar los dominios de definición Ω (tan grande como sea posible) y de las funciones holomorfas $f = u+iv$ sobre Ω dada la parte real u o la parte imaginaria v.

1. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
2. $u = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y) + 2\,\mathrm{sen}\, x\,\mathrm{sh}\, y + x^3 - 3xy^2 + y$
3. $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

[006648]

Ejercicio 7443

Sea $f(z) = u+iv$ una función holomorfa en un abierto conexo Ω. Demostrar que las familias de curvas $u(x,y) = c_1$ y $v(x,y) = c_2$ son ortogonales ; más precisamente, demostrar que en todo punto de intersección $z_0 = x_0 + iy_0$ de dos de estas curvas tales que $f'(z_0) \neq 0$, sus respectivas tangentes son perpendiculares. [006649]

Ejercicio 7444

Demostrar que si $f(z)$ es holomorfa en un abierto conexo Ω y si $f'(z) \neq 0$ en todo punto de Ω, entonces la transformación $w = f(z)$ conserva los ángulos. [006650]

Ejercicio 7445

1. Demostrar las siguientes desigualdades, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|\mathrm{e}^z - 1| \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|} \ \text{ y } \ |\mathrm{e}^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2}\mathrm{e}^{|z|}.$$

2. Sea K un compacto incluido en $\mathbb{C}$, f una función continua en K y $(f_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de funciones definidas en K convergiendo uniformemente hacia f sobre K. Demostrar que $(\exp f_n)_{n\geqslant 1}$ tiende a $\exp f$ uniformemente en K (se puede aplicar la primera desigualdad de a) a $f_n(z) - f(z)$).

3. Demostrar que $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ tiende a e^z uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$.

[006651]

Ejercicio 7446

1. Sean ρ un real estrictamente positivo, z y w de números complejos tales que $|z|>\rho$ y $|w|>\rho$, y n un entero natural. Demostrar que

$$\left|\frac{1}{w^n}-\frac{1}{z^n}\right| \leqslant |z-w|\frac{n}{\rho^{n+1}}$$

y que

$$\left|\frac{1}{z-w}\left(\frac{1}{w^n}-\frac{1}{z^n}\right)-\frac{n}{z^{n+1}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{w^k}-\frac{1}{z^k}\right)\frac{1}{z^{n-k+1}}\right| \leqslant |z-w|\frac{n^2}{\rho^{n+2}}.$$

Sean ahora σ y ϕ dos funciones continuas en valores complejos definidos en un intervalo $I=[a,b]$. Se fija un punto $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(I)$ y se escribe $\rho=\frac{1}{2}\inf\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|\sigma(t)-z|$.

2. Sea $g(z)=\displaystyle\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^n}dt$. Reemplazando en 1.) z por $\sigma(t)-z$ y w por $\sigma(t)-z-h$, con $|h|<\rho$, demostrar que

$$\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h}-n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}}dt\right| \leqslant \frac{|h|n^2}{\rho^{n+2}}\int_a^b |\phi(t)|dt.$$

Inferir que $g(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\sigma(I)$ y que g' es dada por

$$g'(z)=n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}}dt.$$

[006652]

Ejercicio 7447

Sea f una aplicación holomorfa (es decir $\mathbb{C}$-diferenciable) de un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

1. Sea $z_0\in\Omega$ tal que $f'(z_0)=0$. Demostrar que $z\mapsto|f(z)|$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0. (Se puede usar la expansión en serie entera de f en un vecindario de z_0.)
2. Sea $z_1=x_1+iy_1\in\Omega$ tal que $f(z_1)\neq 0$. Demostrar que $(x,y)\mapsto|f(x+iy)|$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_1,y_1).
3. Sea $z_2=x_2+iy_2\in\Omega$ tal que $f(z_2)\neq 0$ y tal que $z\mapsto|f(z)|$ sea $\mathbb{C}$-diferenciable en z_2. Demostrar que $f'(z_2)=0$. (Se pueden usar las condiciones de Cauchy–Riemann.)
4. Sea $z_3=x_3+iy_3\in\Omega$ tal que $f(z_3)=0$ y $f'(z_3)\neq 0$. ¿La aplicación $(x,y)\mapsto|f(x+iy)|$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_3,y_3)? ¿La aplicación $z\mapsto|f(z)|$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en z_3?
5. Dar el dominio donde $z\mapsto|f(z)|$ es continua, luego aquel donde $z\mapsto|f(z)|$ es $\mathbb{C}$-diferenciable, y finalmente aquel donde $(x,y)\mapsto|f(x+iy)|$ es $\mathbb{R}$-diferenciable.

[006813]

Ejercicio 7448

Se considera la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\sqrt{|xy|}$, donde notamos $z=x+iy$ la forma algebraica de z. Demostrar que satisface las condiciones de Cauchy–Riemann en el origen, pero que no es $\mathbb{C}$–derivable en el origen.

Solución ▼ [007214]

Ejercicio 7449

Se considera la función $f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|$, donde $z=x+iy$. Determinar el conjunto donde f es $\mathbb{C}$–derivable. [007215]

Ejercicio 7450

Sea $U\subset\mathbb{C}$ un abierto conexo. Sea $f:U\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Se denota $f=u+iv$ escribiendo en forma algebraica de los valores de f. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. f es constante.
2. $2u+3v=5$.
3. $v=u^2$.
4. $u^2+3v^2=1$.

[007216]

Ejercicio 7451

Sea $U\subset\mathbb{C}$ un abierto conexo. Sea $f:U\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Se denota $f=u+iv$ escribiendo en forma algebraica de los valores de f. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. f es constante.
2. Existe una función $\phi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $v=\phi(u)$.
3. Existe una función $\psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ cuyo diferencial se anula solo en un número finito de puntos, y tal que $\psi(u,v)$ es constante.

[007217]

Ejercicio 7452

Sea $U\subset\mathbb{C}$ un abierto. Sea $f:U\to\mathbb{C}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$. Demostrar que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\bar{z}}\quad\text{y}\quad\overline{\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}.$$

[007218]

Ejercicio 7453

Para cada una de las funciones f, determinar el conjunto de definición de f y calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$ y $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$.

1. $f(z)=z^2\bar{z}$
2. $f(z)=e^{\bar{z}}$
3. $f(z)=\dfrac{\bar{z}-i}{z^2+iz-2}$
4. $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}$.

[007219]

Ejercicio 7454

Demostrar que si f es holomorfa y nunca se anula, entonces $\log|f|$ es armónica. [007220]

Ejercicio 7455

Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto y sea $g : V \to \mathbb{C}$ una función armónica. Se supone que f es holomorfa y que $f(U) \subset V$. Demostrar que $g \circ f$ es armónica. [007221]

Ejercicio 7456

Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica. Sea $F : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $F' = f$. Demostrar que F es analítica. Deducir que el logaritmo principal Log es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. [007222]

Ejercicio 7457

Demostrar que la función $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

es analítica, luego para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ calcular el desarrollo en serie entera de f centrado en z_0. [007223]

Ejercicio 7458

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Se denota $\mathscr{A}(U)$ el conjunto de funciones analíticas en U. Demostrar que, dotado con suma y multiplicación de funciones, $\mathscr{A}(U)$ es un anillo íntegro. ¿Qué sucede si se elimina la hipótesis de conexidad ?

Indicación ▼ [007224]

Ejercicio 7459

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia $R > 0$. Un punto $z_0 \in \partial B(0,R)$ es un *punto regular* de f si existe una extensión analítica de f en un vecindario de $B(0,R) \cup \{z_0\}$. Si $z_0 \in \partial B(0,R)$ no es normal para f, se dice que es un *punto singular* de f. Se denota $\mathrm{Sing}(f) \subset \partial B(0,R)$ el conjunto de puntos singulares de f.

1. Determinar los puntos regulares y singulares para $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$.
2. ¿Cuál es la conexión entre la regularidad de un punto $z_0 \in \partial B(0,R)$ y la convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$?
3. Demostrar que $\mathrm{Sing}(f)$ es cerrado.
4. Se considera $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.
   (a) Demostrar que el radio de convergencia de f es 1.
   (b) Demostrar que 1 es un punto singular de f. (Indicación, demostrar que $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^n} = +\infty$).

(c) Demostrar que para todo $m \in \mathbb{N}$, toda raíz 2^m–ésima de 1 es un punto singular de f. (Indicación, observar que para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in B(0,1)$, $f\left(z^{2^{m+1}}\right) = f\left(z^{2^m}\right) - z^{2^m}$).

(d) Deducir que $\operatorname{Sing}(f) = \partial B(0,1)$.

[007225]

Ejercicio 7460

Sea $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia $R > 0$ y tal que $a_0 \neq 0$. El objetivo de este ejercicio es demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es desarrollable en serie entera en 0.

1. Se supone que este es el caso y que $\dfrac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. ¿Qué relación de recurrencia verifica la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que satisface la relación de recurrencia anterior. Demostrar que existe $C > 0$ tal que para todo $n \geqslant 0$, se tiene
$$|b_n| \leqslant \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. Deducir que $\frac{1}{f}$ es desarrollable en serie entera en 0.

[007226]

Ejercicio 7461 $\mathbb{C}$-derivabilidad

1. Escribir en términos de ε y δ la definición de la $\mathbb{C}$-derivabilidad de una función $f : D \to \mathbb{C}$ de un abierto D de $\mathbb{C}$ en un punto a de D.
2. Sea n un entero natural no nulo. Sea a un punto de $\mathbb{C}$. Determinar una función $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que en $\mathbb{C}$,
$$z^n = a^n + (z-a) f_1(z).$$
Deducir que la aplicación $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ es $\mathbb{C}$–derivable en a y determinar su derivada en a.
3. Demostrar que si f y g son dos aplicaciones de un abierto D de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que son $\mathbb{C}$–derivables en a, entonces su producto es $\mathbb{C}$–derivable en a. Determinar entonces la derivada del producto en a utilizando las derivadas en a de f y de g.
4. Dar un ejemplo de aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua pero en ninguna parte $\mathbb{C}$–derivable.

[007524]

Ejercicio 7462 Ecuaciones de Cauchy–Riemann

1. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación $\mathbb{C}$–derivable en un punto a de D. Enunciar las ecuaciones de Cauchy–Riemann.
2. Escribir las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la aplicación $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$.
3. Dar un ejemplo de una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en todo punto y que no satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en ningún punto.

[007525]

Ejercicio 7463 holomorfía

1. Dar el ejemplo de una función holomorfa f sobre $\mathbb{C}$.
2. Verificar calculando Δu, que su parte real u es armónica.

[007526]

Ejercicio 7464 Un ejemplo

Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3$ y $g = f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación real asociada.

1. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$, g es diferenciable ?
2. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$, g verifica las ecuaciones de Cauchy–Riemann ?
3. ¿En qué puntos de $\mathbb{C}$, f es $\mathbb{C}$–derivable ?
4. ¿En qué puntos de $\mathbb{C}$, f es holomorfa ?

[007527]

Ejercicio 7465 Exponencial

1. Retomar el ejercicio anterior para la función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto \mathrm{e}^x \cos y + i\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$.
2. Determinar la derivada de esta aplicación, ahí donde es $\mathbb{C}$–derivable.
3. Demostrar o refutar : la función $f(z) = \exp(\bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

[007528]

Ejercicio 7466 Logaritmo

Se considera $D := \{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re}(z) \neq 0.\}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} \ell : D &\to \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \tfrac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \arctan \tfrac{y}{x}. \end{aligned}$$

1. Demostrar que ℓ es $\mathbb{C}$–derivable en D.
2. Determinar su derivada en D.

[007529]

Ejercicio 7467 En coordenadas polares

Determinar las ecuaciones de Cauchy Riemann en coordenadas polares. [007530]

Ejercicio 7468 Ejemplos

Demostrar que un polinomio $P(z, \bar{z})$ es holomorfa si y solo ningún monomio contiene el factor $\bar{z}$. [007531]

Ejercicio 7469 Funciones localmente constantes

1. Demostrar que una función holomorfa en un abierto D de $\mathbb{C}$ que toma solo valores reales es localmente constante.
2. ¿Qué pasa con una función holomorfa en un abierto de $\mathbb{C}$ cuya parte real es constante ?
3. ¿Qué pasa con una función holomorfa $f = u + iv$ en un abierto de $\mathbb{C}$ cuyo conjugado $\overline{f} := u - iv$ es también holomorfa ?

4. Demostrar que una función holomorfa que solo toma valores de módulo 1 es localmente constante.

Indicación ▼ [007532]

Ejercicio 7470 Funciones armónicas

1. Determinar, si es posible, una función holomorfa en $\mathbb{C}$ cuya parte real es $u(x,y) = x^2 + y^2$.
2. Determinar, si es posible, una función holomorfa en $\mathbb{C}$ cuya parte real es $u(x,y) = x^2 - y^2$.
3. Demostrar sin cálculo que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto 2xy$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

[007533]

Ejercicio 7471 Funciones holomorfas

1. Determinar, si es posible, una función holomorfa en $\mathbb{C}$ cuya parte real es $u(x,y) = \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}(x) - \mathrm{e}^{y}\cos(x)$.
2. Determinar todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ cuya parte real es $u(x,y) = \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}(x) - \mathrm{e}^{y}\cos(x)$.

[007534]

Ejercicio 7472 Polinomios armónicos

Sea $u(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio armónico. Demostrar que la función

$$p(z) := 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0)$$

es holomorfa de parte real u. [007535]

Ejercicio 7473 Laplaciano

Sea una función holomorfa f definida en un abierto de $\mathbb{C}$. Demostrar que

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2; \quad \Delta \ln(1+|f|^2) = \frac{4|f'|^2}{(1+|f'|^2)^2}.$$

[007536]

Ejercicio 7474 Conservación de los ángulos

Se considera la aplicación $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^2$.

1. Demostrar que f conserva los ángulos.
2. Sea a un número real no nulo. Demostrar que la imagen de la recta de ecuación $x = a$ está incluido en la parábola de ecuación $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$. Representar esta parábola para $a = 1$ y $a = 2$.
3. Sea b un número real no nulo. Determinar una parábola conteniendo la imagen de la recta de ecuación $y = b$. Representar esta parábola para $b = 1$ y $b = 2$.
4. Verificar la ortogonalidad en los puntos de intersección de las cuatro parábolas.

[007537]

Ejercicio 7475 Conservación de los ángulos

Se considera la aplicación $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

1. Determinar el lugar donde f preserva los ángulos.
2. Demostrar que si se denota $r = |z|$, $u = re(f)$ y $v = im(f)$, entonces

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\frac{x}{r} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\frac{x}{r}.$$

   luego

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{u^2}{\frac{x^2}{r^2}} - \frac{v^2}{\frac{y^2}{r^2}} = 1.$$

3. Determinar la imagen por f de los círculos de centro O y de radio 1 y 2.
4. Determinar la imagen por f de segmentos radiales $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$ y $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}t$, cuando t varía en $]0,1[$.
5. Demostrar que f es sobreyectiva.
6. Demostrar que la imagen inversa de un punto de $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ se compone de dos puntos, uno en $\Delta^{\times}$ el otro en $\mathbb{C} \setminus \Delta$.
7. Demostrar que f es una biyección holomorfa de $\Delta^{\times}$ sobre $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

[007538]

Ejercicio 7476 Aplicaciones lineales fraccionarias

Se recuerda que para toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, se asocia la aplicación lineal fraccionaria

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

1. Verificar que $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$.
2. Se escoge ahora la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Explicitar el biholomorfismo $h = f_C$ y su inversa h^{-1}.
3. Demostrar que

$$1 - |h(z)|^2 = \frac{4\,\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}, \qquad \mathrm{Im}(h^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

4. Deducir la imagen del semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$ por h.

[007539]

Ejercicio 7477 Biolomorfismos entre dominios

Se recuerda que $\Delta := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} / Im(z) > 0\}$ y $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ y } \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$.

1. Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} q : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^- \\ z &\longmapsto -z^2 \end{aligned}$$

   es holomorfa y biyectiva.
2. Deducir una función holomorfa y biyectiva de Δ sobre $\mathbb{C}^-$.

[007540]

Ejercicio 7478 Biholomorfismo de $\mathbb{H}$

Se recuerda que para toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, se asocia la aplicación lineal fraccionaria

$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

1. Demostrar que h_A envía $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$.
2. Demostrar que para todo elemento z de $\mathbb{H}$, existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tal que $h_A(i) = z$.

[007541]

Ejercicio 7479 Polinomios

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Demostrar que existe una equivalencia entre

1. f es polinomial.
2. Existe $c \in D$ tal que fuera de un número finito de $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(c) = 0$.

[007569]

Ejercicio 7480 Propiedades

Para cada una de las siguientes propiedades, dar un ejemplo de una aplicación holomorfa en un vecindario de 0 que la satisface, o bien demostrar que no existen tales aplicaciones.

1. Para casi todo $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$.
2. Para casi todo $n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{n^2-1}$.
3. Para casi todo $k \in \mathbb{N}$, $|f^{(k)}(0)| \geqslant (n!)^2$.
4. Para casi todo $n \in \mathbb{N}$, $|f(\frac{1}{n})| \leqslant \mathrm{e}^{-n}$ y f es no nulo.

[007570]

Ejercicio 7481 Extensión

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ $a \in D$ y $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Se supone que f' admite una extensión holomorfa a D. ¿Es también el caso para f? [007571]

Ejercicio 7482 Restricciones

1. Sea una función holomorfa f entera definida en todo el plano complejo, se supone que $\mathrm{Re}(f) \leqslant 0$. Demostrar que f es una función constante. Se puede considerar la función $\mathrm{e}^{f(z)}$.
2. Sea una función holomorfa f en un vecindario de 0. Demostrar que si $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$, para todo n, lo suficientemente grande entonces f es una constante.
3. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Se supone que en D, $v = u^2$. Demostrar que f es una función constante.
4. Sea una función entera f tal que $|f|$ tiende a infinito si $|z|$ tiende a infinito. Demostrar que :

(a) f solo admite un número finito de ceros.

(b) f es un polinomio.

5. Sea una función entera f no constante, demostrar que la imagen del plano complejo por f es denso en $\mathbb{C}$.
6. Sea una función f holomorfa en todo el plano complejo, verificando $f(x+1) = f(x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es una función periódica de período 1.

[007572]

318 441.00 Función logaritmo y función potencia

Ejercicio 7483

Demostrar que existe una (única) función analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ que vale $\sqrt{a^2-1}$, para $a > 1$. *Indicación :* demostrar para empezar que la fórmula $f(a) = \exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(a-1) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(a+1))$ da una solución en el abierto $\mathbb{C}\setminus]-\infty,1]$. Luego se demuestra que $g(a) = -\exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(-a-1) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(-a+1)) = -f(-a)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1,+\infty[$. Finalmente, demostrar que $g(a) = f(a)$ en el semiplano superior y también en el semiplano inferior calculando $f(\pm i)$ y entonces $g(\pm i)$ y en explicando por qué a priori el cociente $g(a)/f(a)$ es constante en estos dos semiplanos. [002851]

Ejercicio 7484

1. Se considera la función analítica $\phi(a) = \mathrm{Log}(a-1) - \mathrm{Log}(a+1)$ en el semiplano superior y la función analítica $\psi(a) = \mathrm{Log}(a-1) - \mathrm{Log}(a+1)$ en el semiplano inferior. Demostrar que ϕ y ψ son la restricción a sus semi-planos respectivos de una función analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$. *Indicación :* hay varios razonamientos posibles y varias indicaciones posibles. Entonces, averiguarlo.
2. Se considera la función $a \mapsto \frac{a-1}{a+1}$. ¿Cuál es la imagen por esta función del intervalo $]-1,1[$? ¿Cuál es la imagen de esta función de $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$? Deducir que la función compuesta $\Phi(a) = \mathrm{Log}\frac{a-1}{a+1}$ existe y es analítica en $\mathbb{C} \setminus [-1,+1]$. Encontrar el resultado de la pregunta anterior (y demostrar que ϕ, ψ y Φ coinciden en las intersecciones dos a dos de sus abiertos de definiciones).
3. ¿Cuál es el desarrollo en serie de Laurent de la función analítica Φ en la corona $1 < |a| < \infty$? Por ejemplo, ¿cuánto es $\int_{|a|=2} \Phi(a) a^{18} da$?

[002852]

Ejercicio 7485

Demostrar que no existe una determinación holomorfa del logaritmo de z sobre todo $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (Se razona por reducción al absurdo y se exhibe así una aplicación inyectiva continua del círculo unitario en $\mathbb{R}$). [006653]

Ejercicio 7486

Sea $\mathrm{Log} z$ la determinación principal del logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, ie $\mathrm{Log} z = \mathrm{Ln}|z| + i\mathrm{Arg} z$, donde $|\mathrm{Arg} z| < \pi$, y se define $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Log} z}$

1. Se considera $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$; comparar $\mathrm{Log}(z^2)$ y $2\mathrm{Log} z$.
2. Se considera $z = \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}$; comparar z^{2i}, $(z^2)^i$ y $(z^i)^2$.

[006654]

Ejercicio 7487

Se propone calcular las sumas de series convergentes para $0 < t < 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{n}.$$

1. Recordar por qué $S(z) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ coincide en D, con la determinación principal $\operatorname{Log}(1-z)$.
2. Sea $r < 1$; calcular $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n \cos nt}{n}$ y $\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n \operatorname{sen} nt}{n}$.
3. Deducir el valor de estas sumas (se puede usar el teorema de Abel).

[006655]

Ejercicio 7488

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f una función compleja sin cero sobre Ω. Se recuerda que f admite un logaritmo continuo (resp. holomorfa) sobre Ω si existe una función g continua (resp. holomorfa) sobre Ω tal que $e^{g(z)} = f(z)$. Demostrar que dos determinaciones continuas del logaritmo de f sobre Ω difieren por una constante $2ki\pi$. Reproduciendo la demostración del teorema de la inversión local, demostrar que si f admite en Ω un logaritmo continuo, admite un logaritmo holomorfo. [006656]

Ejercicio 7489

Se recuerda que una función compleja f tiene una raíz n-ésima holomorfa en un abierto conexo Ω si existe $g \in H(\Omega)$ tal que $g^n(z) = f(z)$.

1. Demostrar que si f admite un logaritmo holomorfo en Ω, admite raíces de todo orden; demostrar, en un ejemplo, que una función holomorfa f puede admitir una raíz sin admitir un logaritmo (holomorfa).
2. Si g_1, g_2 son dos funciones continuas de Ω conexo en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, tales que $g_1^n = g_2^n$, para un entero $n \geqslant 1$, demostrar que $g_1 = e^{\frac{2i\pi k}{n}} g_2$, donde k es un entero y $g_1 = g_2$ desde que las funciones coinciden en un punto.

[006657]

Ejercicio 7490

1. Demostrar que $\operatorname{Re}(\cos z) > 0$ si $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$. Deducir una determinación holomorfa del logaritmo de $\cos z$ en $\{|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$.
2. Demostrar que se puede definir una función holomorfa $f(z) = \operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}$ en el abierto $U = \mathbb{C}\backslash S$, donde $S = \{ix;\ |x| \geqslant 1\}$.
3. Demostrar que se puede definir una función holomorfa $f(z) = \operatorname{Log}\sqrt{z^3 - 1}$ en un abierto U por determinar (donde $\sqrt{}$ designa la determinación principal de la raíz).

[006658]

Ejercicio 7491

1. Sea $\Omega = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$; demostrar que la función

$$g(z) = \exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(z+1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}(z-1))$$

se extiende a una función continua en Ω y por lo tanto, proporciona así una raíz cuadrada holomorfa de z^2-1 en Ω, aunque $\mathrm{Log}(z^2-1)$ no tiene una extensión continua a Ω.

2. Construir de manera similar, una raíz cuadrada holomorfa de z^2+1 en el abierto conexo $\Omega' = \mathbb{C}\backslash[-i,i]$.

[006659]

Ejercicio 7492

Demostrar que

$$\mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

deducir que la función Arg es $\mathbb{R}$-diferenciable en el abierto Ω

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) |\ y = 0, x \leqslant 0\}$$

y calcular su diferencial. [006660]

Ejercicio 7493

Sea w en $\mathbb{C}$. Determinar los números complejos z tales que $\cos z = \cos w$. Mismo problema con el seno. [006661]

Ejercicio 7494

Si $z = x+iy$, con x e y reales, demostrar que se tiene

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

Deducir los ceros de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en $\mathbb{C}$. [006662]

Ejercicio 7495

Demostrar que la función $f(z) = \tan z$ definida por $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ realiza una biyección de $T = \{z \in \mathbb{C} | -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re} z \leqslant \frac{\pi}{2},\ z \neq \frac{\pi}{2}\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Se puede escribir $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, con $f_1(z) = 2iz$, $f_2(z) = \mathrm{e}^z$, $f_3(z) = \frac{1-z}{1+z}$, $f_4(z) = iz$. [006663]

Ejercicio 7496

Resolver las ecuaciones $\mathrm{e}^z = -3$, $\cos z = 2$, $\operatorname{sen} z = 2$, $\tan z = 2i$, $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$ de la siguiente manera :

1. identificando las partes real e imaginaria
2. usando el logaritmo

Ejercicio 7497

1. Usando la determinación principal del logaritmo, se definen las funciones $z \mapsto z^{1/2}$, $z \mapsto (1-z)^{1/3}$, $z \mapsto ((1-2i)z)^{2i/5}$. Dar su dominio de definición.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea f una determinación continua de $z^{1/n}$. Demostrar que $f(z)^n = z$ en su dominio de definición.

[006665]

Ejercicio 7498

Se considera $f(z) = \sqrt{z^2} = (z^2)^{1/2}$ definida usando la determinación principal del logaritmo.

1. Encontrar el dominio de definición y dar una expresión explícita de f.
2. ¿Se puede extender f por continuidad en un abierto más grande ?
3. Las mismas preguntas tomando la determinación $\log z = \mathrm{Log} z + 2i\pi$.

[006666]

Ejercicio 7499

Se define con la ayuda de la determinación principal del logaritmo las funciones $f_1(z) = (z^3-1)^{1/2}$, $f_2(z) = (z-1)^{1/2}(z-j)^{1/2}(z-j^2)^{1/2}$, y $f_3(z) = (1-z)^{1/2}(iz-ij)^{1/2}(iz-ij^2)^{1/2}$, donde $j = \mathrm{e}^{i\pi/3}$.

1. Encontrar los dominios de definición de f_k y demostrar que siempre se tiene $f_k(z)^2 = z^3 - 1$.
2. Demostrar que se puede extender f_3 por continuidad en un abierto más grande.

[006667]

Ejercicio 7500

Se quiere demostrar que existe una determinación continua f de $\sqrt{1-z^2}$ sobre $U = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ tal que $f(i) = \sqrt{2}$.

1. Definir f sobre $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$ por medio de las funciones $\mathrm{Arg}(z+1)$ y $\mathrm{Arg}(z-1)$.
2. Sea x un real estrictamente menor que 1. Estudiar $\lim\limits_{y \to 0} f(x+iy)$, cuando y tiende a 0 para valores positivos y luego negativos. Concluir.
3. Demostrar que se tiene así una aplicación f tal que $f(U) \subset U$ y $f \circ f = -\mathrm{Id}_{|\mathrm{U}}$. Deducir que f es una biyección de U en sí mismo.

[006668]

Ejercicio 7501

Se denota $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ la determinación principal del logaritmo, que es real para z real positivo. Se define

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z-1) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(z+1)\right) \\ g(z) &= \exp\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(-z) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}(1-z^2)\right). \end{aligned}$$

1. Determinar los dominios de definición $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ de f y $\Omega_g \subset \mathbb{C}$ de g y demostrar que f y g son las ramas continuas de $\sqrt[3]{z^3 - z}$.
2. ¿Se puede ampliar el dominio de definición de f, es decir : existe un abierto $\widehat{\Omega}_f \subset \mathbb{C}$ y una función continua $\widehat{f} : \widehat{\Omega}_f \to \mathbb{C}$ tal que $\Omega_f \subset \widehat{\Omega}_f$ y para todo $z \in \Omega_f$ se tiene $\widehat{f}(z) = f(z)$? No olvidar justificar la respuesta !
3. ¿Se puede ampliar el dominio de definición de g ?

[006806]

Ejercicio 7502

Se definen las funciones f_1, f_2 y f_3 por las fórmulas

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z-1) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3})]), \\ f_2(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(\sqrt{3}-z) + i\pi]), \\ f_3(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(-1-z) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3}) + i\pi]), \end{aligned}$$

donde Log denota el logaritmo principal.

1. Calcular $f_1(\pm i)$, $f_2(\pm i)$ y $f_3(\pm i)$.
2. Determinar los dominios de definición de f_1, f_2 y f_3.
3. Demostrar que f_1, f_2 y f_3 son determinaciones continuas de $\sqrt[3]{z^4 - \sqrt{3}z^3 - z^2 + \sqrt{3}z}$.
4. ¿Se puede extender f_1 a un abierto más grande ? Si es sí, ¿cuál ?
5. ¿Se puede extender f_2 en un abierto más grande ? Si es sí, ¿cuál ?
6. ¿Se puede extender f_3 en un abierto más grande ? Si es sí, ¿cuál ?
7. ¿Existe un vínculo entre f_1, f_2 y f_3 ?

[006824]

Ejercicio 7503 Trigonometría hiperbólica

Se define $\cosh z$ como la suma de la serie $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ y $\sinh z$ como la suma de la serie $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Determinar su radio de convergencia.
2. Expresar cosh y sinh usando la función exponencial.
3. Demostrar las fórmulas de suma para $\cosh(z+w)$ y $\sinh(z+w)$, para z y w en $\mathbb{C}$.
4. Demostrar que para todo x e y en $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\sinh(y) \\ \mathrm{sen}(x+iy) &= \mathrm{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

[007548]

Ejercicio 7504 Exponencial

1. Encontrar el valor mínimo de $|f(z)|$, donde $f(z) = \mathrm{e}^{z^2}$ en la unidad .
2. Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $2i\,\mathrm{sen}(z) = \mathrm{e}^{-iz}(\mathrm{e}^{2iz} - 1)$. Deducir los ceros de la función seno en $\mathbb{C}$ y en particular que la función seno solo se anula para valores reales.

3. Resolver en $\mathbb{C}$, las siguientes ecuaciones : $e^z = -5$; $\text{sen}(z) = 2$.

[007549]

Ejercicio 7505 Logaritmo

Se considera la rama principal del logaritmo, siempre denotado log.

1. Calcular $\log(i)$.
2. Calcular i^i.
3. Demostrar que para todo α y β fijos en $\mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}^-$,
$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \quad \text{y} \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta.$$
4. Usando la determinación principal del logaritmo, se definen las siguientes funciones :
   a. $z \longmapsto z^{1/2}$
   b. $z \longmapsto (1-z)^{1/3}$.
   Determinar sus dominios de definición.

[007550]

Ejercicio 7506 ¿Otra aplicación logaritmo ?

Se considera la aplicación
$$\begin{aligned} L : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) = 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x+iy &\longmapsto \tfrac{1}{2}\log_{\mathbb{R}}(x^2+y^2) + i\arctan(\tfrac{y}{x}). \end{aligned}$$

1. Demostrar que L es holomorfa.
2. ¿La aplicación L coincide con la rama principal log del logaritmo en $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$?
3. ¿La aplicación L es un logaritmo en $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0\}$?

[007551]

Ejercicio 7507 Propiedades de la rama principal del logaritmo

1. ¿Para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ el número complejo $\exp(z)$ está en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^-$?
2. Verificar que $\exp : B \to \mathbb{C}^-$ y $\log : \mathbb{C}^- \to B$ son dos biholomorfismos recíprocos.
3. ¿Tenemos para todo $z, w \in \mathbb{C}^-$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$
4. ¿Tenemos para todo $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\text{Re}(z) > 0$ y $\text{Re}(w) > 0$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

[007552]

Ejercicio 7508 La función zeta de Riemann

Se recuerda que para todo entero natural n, y todo número complejo z, n^z designa $p_z(n) = \exp(z \log n)$.

1. Determinar el módulo de n^z.
2. Demostrar que la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge normalmente en el abierto $\{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) > 1\}$.

[007553]

---

319 442.00 Fórmula de Cauchy

Ejercicio 7509

El laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es un operador diferencial que juega un papel importante en el análisis complejo. Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función holomorfa en un abierto del plano complejo. Se sabe que f, por lo tanto u y v, admite derivadas parciales de todos los órdenes. Usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann, demostrar que u y v verifican la ecuación de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Se dice de una función que verifica la ecuación de Laplace que es armónica. La función holomorfa $f = u + iv$ es también una función armónica ya que $\Delta(f) = \Delta(u) + i\Delta(v) = 0$.

Solución ▼ [002806]

Ejercicio 7510

Se quiere expresar las ecuaciones de Cauchy–Riemann con las coordenadas polares r y θ. Las ecuaciones de Cauchy–Riemann puede ser escrita en la forma :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F = 0$$

entonces el se trata de expresar $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ en función de $\frac{\partial}{\partial r}$ y de $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Cuando se trabaja en un abierto (que no contiene el origen) en el cual una determinación continua del argumento θ es posible (por ejemplo sobre $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$). Demostrar :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Deducir $\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r} - \operatorname{sen}(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$. Demostrar entonces :

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

Deducir que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy–Riemann pueden ser escritas (en particular) bajo la forma :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\,r\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Solución ▼ [002807]

Ejercicio 7511

Es interesante que la ecuación del ejercicio anterior $\frac{\partial F}{\partial \theta} = i\,r\frac{\partial F}{\partial r}$, se puede reescribir en el sistema de coordenadas $(a,b) = (\log(r), \theta)$ bajo la forma :

$$\frac{\partial F}{\partial b} = i\frac{\partial F}{\partial a},$$

dicho de otro modo exactamente en la misma forma que tienen las ecuaciones de Cauchy–Riemann originales en las coordenadas cartesianas (x,y).[7] Por lo tanto a y b son las partes reales e imaginarias de la combinación $a+ib$ que es holomorfa como función de $x+iy$: $a+ib=\log(x+iy)$. Demostrar que ese es general : en un sistema de coordenadas (a,b) tales que $w=a+ib$ es una función holomorfa de $z=x+iy$ las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la holomorfía (con respecto a (x,y)) de una función F son $\frac{\partial F}{\partial b}=i\frac{\partial F}{\partial a}$ (lo que equivale a la holomorfía de F como función "en el plano de $w=a+ib$"[8]. Indicación : demostrar la identidad :

$$\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial a}{\partial x}-i\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}\right),$$

explotando las ecuaciones de Cauchy–Riemann $\frac{\partial b}{\partial x}=-\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x}=+\frac{\partial b}{\partial y}$, para $a+ib=g(x+iy)$.

Solución ▼ [002808]

Ejercicio 7512

Se quiere expresar el Laplaciano con las coordenadas polares r y θ : dicho de otro modo para toda función dos veces diferenciable Φ se quiere calcular la función $\Delta(\Phi)$, con ayuda de los operadores de derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial \theta}$, cuando se trabaja en un abierto (no contiene el origen) en la cual una determinación continua del argumento θ es posible (por ejemplo sobre $\Omega=\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$). Un método posible es utilizar las expresiones obtenidas en el ejercicio 7510 :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}-\operatorname{sen}(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial}{\partial r}+\cos(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

y calcular $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ y $(\frac{\partial}{\partial y})^2$, luego de sumar. Pero esto da cálculos un poco largos. Aquí hay una astucia : retomado una fórmula ya establecida en el ejercicio 7510 demostrar

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial \theta},\qquad (x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Se observa ahora que el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ aplicado a la función $x+iy$ da cero. Entonces (explicar !) :

$$(x-iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=(x-iy)(x+iy)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Demostrar entonces en conclusión :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left(\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2}.$$

[002809]

Ejercicio 7513

Sea $\gamma=[A,B]+[B,C]+[C,D]+[D,A]$ el borde (recorrido en el sentido directo) del cuadrado de vértices $A=1-i$, $B=1+i$, $C=-1+i$, $D=-1-i$. Determinar las siguientes integrales :

7. $\frac{\partial F}{\partial y}=i\frac{\partial F}{\partial x}$, o, más mnemotécnicamente : $\frac{\partial F}{i\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}$ que dice "holomorfa $\Leftrightarrow$ iy es como x".

8. Dicho de otro modo para que una función sea holomorfa como función de $x+iy$, es necesario y suficiente que sea holomorfa como función de $a+ib$. En particular $x+iy$ es una función holomorfa de $a+ib$: se ha por lo tanto probado que la inversa de una biyección holomorfa es también holomorfa. Se volverá más adelante con otros métodos (incluido el caso muy concreto de la "inversión" de una serie entera).

1. $\int_\gamma dx$, $\int_\gamma x\,dx$, $\int_\gamma x^2\,dx$, $\int_\gamma y\,dx$, $\int_\gamma y^2\,dx$, $\int_\gamma y^3\,dx$,
2. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$, $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$, $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$,
3. $\int_\gamma dz$, $\int_\gamma z\,dz$, $\int_\gamma x\,dz$, $\int_\gamma z\,dx$,
4. $\int_\gamma z^{-1}\,dz$, $\int_\gamma z^{-2}\,dz$, $\int_\gamma z^n\,dz$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002810]

Ejercicio 7514

Con las mismas notaciones queremos evaluar $\int_\gamma \overline{z^n}\,dz$, $n \in \mathbb{Z}$. Justificar los próximos pasos :

$$\int_\gamma \overline{z^n}\,dz = \overline{\int_\gamma z^n\,\overline{dz}}$$
$$\int_\gamma z^n\,\overline{dz} = \int_{[B,C]} z^n\,dz - \int_{[C,D]} z^n\,dz + \int_{[D,A]} z^n\,dz - \int_{[A,B]} z^n\,dz\,,$$

y completar el cálculo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002811]

Ejercicio 7515

Se denota C el círculo de radio 1 recorrido en el sentido directo. Calcular $\int_C z^n\,dz$ y $\int_\gamma z^n\,dz$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, y comprobar que siempre existe igualdad (aquí $\gamma = \partial\mathscr{R}$ es nuevamente el borde del cuadrado que se usó en ejercicios anteriores). Calcular $\int_C \bar{z}^n\,dz$ y $\int_\gamma \bar{z}^n\,dz$ y encontrar los casos de igualdades y desigualdades.

Solución ▼ [002812]

Ejercicio 7516

Sea C un círculo con centro arbitrario, recorrido en el sentido directo, y no pasando por el origen. Calcular $\int_C z^n\,dz$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ en el caso donde C encierra el origen, y en el caso donde C no encierra el origen. *Indicación* para $n = -1$: sea w el afijo del centro del círculo, y R su radio. Parametrar el círculo por $z = w(1 + \frac{R}{|w|}e^{i\theta})$, $-\pi < \theta \leqslant +\pi$, luego se usa una expansión en serie distinguiendo los casos $R > |w|$ y $R < |w|$. O aún invocar la función $\mathrm{Log}(z/w)$.

Solución ▼ [002813]

Ejercicio 7517

Sea $0 < a < b$ en el eje real positivo y sea $C = \{|z| = r\}$ el círculo de radio r centrado en el origen, recorrido en el sentido directo. Demostrar :

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{a-b} & a < r < b \\ 0 & r > b. \end{cases}$$

Se puede reducir la fracción a elementos simples, luego se reduce al resultado del ejercicio anterior. O aún, se puede considerar desarrollos en serie, para reducirse por etapas a las integrales $\int_C z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

Solución ▼ [002814]

Ejercicio 7518

Sea C el círculo unitario recorrido en el sentido directo. Calcular

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

desarrollando por la fórmula binomial y usando los valores conocidos de $\int_C z^k dz$, $k \in \mathbb{Z}$. Deducir $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n t\, dt$. Deducir el valor de $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$, para n par :

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} t\, dt = \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots(2m)}\frac{\pi}{2}.$$

Solución ▼ [002815]

Ejercicio 7519

Se define $J_m = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} t\, dt$, para $m \in \mathbb{N}$. Integrando por partes J_{m+1} obtener la relación de recurrencia $J_{m+1} = \frac{2m+2}{2m+3} J_m$ y probar :[9]

$$J_m = \frac{2\cdot 4\cdots(2m)}{3\cdot 5\cdots(2m+1)}.$$

[002816]

Ejercicio 7520

Utilizando $I_{m+1} \leqslant J_m \leqslant I_m$, obtener :

$$\frac{2m+1}{2m+2}\frac{(1\cdot 3\cdots(2m-1))(3\cdot 5\cdots(2m+1))}{(2\cdot 4\cdots(2m))^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \leqslant \frac{(1\cdot 3\cdots(2m-1))(3\cdot 5\cdots(2m+1))}{(2\cdot 4\cdots(2m))^2}.$$

Deducir la fórmula de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(2m-1)\cdot(2m+1)}{(2m)\cdot(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right).$$

[002817]

Ejercicio 7521

Justificar el siguiente reordenamiento (que sale también del término izquierdo en la desigualdad del ejercicio anterior) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdots} = \frac{1}{2}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)^{-1}$, sea aún :

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right).$$

9. Por convención, cuando un producto se relaciona con un conjunto vacío vale 1. Entonces la fórmula es compatible con $J_0 = 1$.

[002818]

Ejercicio 7522

Justificar igualmente sobre la base de las fórmulas anteriores los equivalentes asintóticos :

$$\binom{2m}{m} \sim_{m\to\infty} \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\cdots(m+\frac{1}{2})}{1\cdot 2\cdots m} \sim 2\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

$$\frac{(\frac{1}{2})_m}{m!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

[002819]

Ejercicio 7523

Sea $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la suma de serie entera de radio infinito. Demostrar que para $r > 0$ y $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\, \mathrm{e}^{-int}\, dt.$$

Deducir que si $|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$, para todo z módulo $\geqslant R$, f es un polinomio. [006669]

Ejercicio 7524

Se propone calcular $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln|r\mathrm{e}^{i\theta} - a|\, d\theta$, donde $0 < r < |a|$.

1. Verificar que I está bien definida.
2. Se considera f la función definida en $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ por $f(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{Log}(1-\frac{z}{a})$, donde Log es la determinación principal del logaritmo en Ω. Demostrar que f es holomorfa en un abierto que contiene el círculo $\{z = r\mathrm{e}^{i\theta}\}$.
3. Deducir $I = 2\pi \ln|a|$.

[006670]

Ejercicio 7525

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ módulo $\neq 0, 1$, y $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\, d\theta}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}$.

1. Verificar que I está bien definida.
2. Se considera f definida por $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}$; calculando la integral de f en el círculo unidad, encontrar el valor de I (distinguir los dos casos $|\lambda| > 1, |\lambda| < 1$).

[006671]

Ejercicio 7526

Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ conteniendo $\bar{D}$ y $f \in H(U)$. Se denota γ el ajuste de ∂D por $t \in [0, 2\pi] \to \mathrm{e}^{it}$.

1. Calcular $I_1 = \int_\gamma (2+z+\frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}\ dz$ y $I_2 = \int_\gamma (2-z-\frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}\ dz$.
2. Deducir el valor de $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\frac{\theta}{2})\ d\theta$ y $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\mathrm{sen}^2(\frac{\theta}{2})\ d\theta$.
3. Para $|a| \neq 1$, evaluar $I(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\ dz$.

[006672]

Ejercicio 7527

1. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, F y G dos funciones holomorfas en Ω y γ: $[a,b] \to \mathbb{C}$ un camino tal que $\gamma^* \subset \Omega$. Demostrar que
$$\int_\gamma F(z)G'(z)\ dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z)\ dz.$$
2. Calcular $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz$, donde γ es el arco de parábola $\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{\pi^2}$ uniendo (0,0) a $(\pi, 1)$.

[006673]

Ejercicio 7528

Evaluando $\int_C e^z\ dz$ en el círculo unidad, demostrar que
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\,\mathrm{sen}(\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\ d\theta = 0.$$

[006674]

Ejercicio 7529

Calcular
$$\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z},$$
donde $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$ y $n \in \mathbb{N}$. Deducir el valor de $\int_0^{2\pi} \cos^n t\ dt$. [006675]

Ejercicio 7530

Calcular las siguientes integrales.

1. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\ dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.
2. $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen}\, z}{z}\ dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.
3. $\int_\gamma \frac{\cos z^2}{z}\ dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.
4. $\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^3+z}\ dz$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.

5. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$, donde γ es un camino cerrado que no pasa por a.
6. $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}\,dz$, donde $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.
7. $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, $n \in \mathbb{N}^*$, donde $\gamma(t) = 1+\mathrm{e}^{it}$ $(t \in [0,2\pi])$.

[006676]

Ejercicio 7531

Sea $I(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+z^2}dt$.

1. ¿Para qué valores de z, $I(z)$ está definida?
2. Demostrar que para $\operatorname{Re} z > 0$, se tiene

$$I(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{Log} z + \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt\right),$$

   donde Log es la determinación principal del logaritmo. Se puede considerar el camino cerrado $\Gamma_{\varepsilon,R} = [\varepsilon, R] + \gamma_R + [R\mathrm{e}^{i\varphi}, \varepsilon\mathrm{e}^{i\varphi}] - \gamma_\varepsilon$, donde $\varphi = \operatorname{Arg} z$ y $\gamma_r \colon t \mapsto r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0,\varphi]$.
3. ¿Qué se obtiene para $\operatorname{Re} z < 0$?

[006677]

Ejercicio 7532

Sea $a > 0$ y $\gamma\colon t \mapsto a+it$, $t \in \mathbb{R}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera

$$J(\alpha) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{z^2}dz.$$

1. Demostrar que esta integral converge.
2. Considerando caminos cerrados $[a-iR, a+iR] + \gamma_R$, donde γ_R^* es un semicírculo de diámetro $[a-iR, a+iR]$, demostrar que $J(\alpha) = 0$ si $\alpha \leqslant 0$ y $J(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \geqslant 0$.

[006678]

Ejercicio 7533

Para $n \geqslant 1$ y $0 \leqslant k \leqslant n$, se designa por C_n^k el coeficiente binomial. Para $r > 0$, sea $c_r \colon t \mapsto r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

1. Demostrar que

$$C_n^k = \frac{1}{2i\pi}\int_{c_r} (1+z)^n \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

   Inferir que $C_{2n}^n \leqslant 4^n$.
2. Demostrar que

$$C_{2n}^n = \frac{1}{2i\pi}\int_{c_r} \left(\frac{1}{z}+2+z\right)^n \frac{dz}{z}$$

   (se puede usar 1.). Deducir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{c_r} \frac{dz}{(3z-1-z^2)} = \sqrt{5},$$

   con la condición de $r_1 < r < r_2$, donde $r_1 < r_2$ son las dos raíces de $3z-1-z^2 = 0$.

3. Demostrar que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_r}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2.$$
Inferir que
$$\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=C_{2n}^n.$$
4. Demostrar que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{(z-1)^{2n}(z+1)^n}{z^{2n+1}}dz=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kC_{2n}^k.$$
Demostrar que si $z\in c_1^*$, $|z-1|^2|z+1|\leqslant\frac{16}{9}\sqrt{3}$. Deducir que
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kC_{2n}^k\leqslant\left(\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)^n.$$

[006679]

Ejercicio 7534

1. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{it}}\,dt$ es independiente de $r>0$.
2. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}(1-r\mathrm{e}^{it})\,dt$ es independiente de $r\in\,]0,1[$ (Log designa la rama principal del logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0]$).

[006680]

Ejercicio 7535

Calcular de dos formas $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z}$, donde $\gamma(t)=a\cos t+ib\,\mathrm{sen}\,t$ ($t\in[0,2\pi]$, $a,b\in\mathbb{R}_+^*$) y deducir el valor de la integral
$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2t+b^2\,\mathrm{sen}^2\,t}$$

[006681]

Ejercicio 7536

Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto conexo Ω conteniendo el disco unitario cerrado y $\gamma(t)=\mathrm{e}^{it}$ ($t\in[0,2\pi]$). Demostrar que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left(\frac{f(z)}{z-a}+\frac{ag(z)}{az-1}\right)dz=\begin{cases}f(a) & \text{si } |a|<1\\ g(1/a) & \text{si } |a|>1.\end{cases}$$

[006682]

Ejercicio 7537

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω conteniendo $\overline{D(a,r)}$. Demostrar que
$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+r\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta.$$

(Propiedad de la media). [006683]

Ejercicio 7538

Sea f una función continua en el sector

$$\{z \in \mathbb{C} | -\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \alpha\}$$

Se supone que $zf(z)$ tiende a $A \in \mathbb{C}$, cuando $|z|$ tiende a infinito, z permaneciendo en este sector. Denotemos C_R la parte del círculo central 0 y de radio R contenida en este sector. Demostrar que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 2i\alpha A.$$

[006684]

Ejercicio 7539

1. Sea $C \subset \mathbb{C}$ una curva dirigida C^1 y cerrada. Sea γ un camino C^1 de origen a y de extremos b, tales que a y b no son puntos de C. Se supone que la intersección de C y γ consta de un número finito de puntos $m_1, \dots, m_n$ y que las tangentes a C y a γ son distintos en estos puntos. Sea $\varepsilon_i = 1$ si el ángulo de la tangente a γ, con la tangente a C en m_i está entre 0 y π, $\varepsilon_i = -1$ si no. Demostrar que

$$\sum_i \varepsilon_i = \operatorname{Ind}_C(a) - \operatorname{Ind}_C(b),$$

donde $\operatorname{Ind}_C(z)$ denota el índice de z, con respecto a C.

2. Calcular el índice de puntos $z = \frac{3}{4}$, con respecto a la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r = \cos\frac{\theta}{3}$, con $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$, recorrida en la dirección de θ creciente.

[006685]

Ejercicio 7540

Se considera la serie entera

$$L(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}.$$

Sea $f(z) = \frac{-\operatorname{Log}(1-z)}{z}$, donde Log designa la determinación principal del logaritmo complejo.

1. Se denota $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Demostrar que f se define en U.
2. Verificar que si $D = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$, se tiene $L'(z) = f(z)$.
3. Deducir que existe una primitiva de f, definida en U todo entero, cuya restricción a D es igual a L. Se denota esta primitiva L por abuso del lenguaje.
4. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Calcular $\lim_{y \to 0} L(x+iy) - L(x-iy)$ como función de x.

[006686]

Ejercicio 7541

1. Sea P un polinomio que no se anula en el círculo $|z|=1$. Demostrar que el número de ceros de P al interior del círculo unitario es
$$\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{Arg}P(\mathrm{e}^{i\theta})\right]_0^{2\pi}$$
(variación de una determinación continua del argumento en el círculo unidad). Se utiliza el teorema de d'Alembert para factorizar P en factores de grado 1, luego se considera el índice de cada uno de las raíces con respecto al círculo.
2. Sea P un polinomio que no tiene cero en el círculo $|z|=1$ y teniendo exactamente k raíces (contadas con multiplicidad) al interior del círculo unitario. Demostrar que la función
$$\theta \mapsto \mathrm{Re}\,P(\mathrm{e}^{i\theta})$$
se anula al menos $2k$ veces para $\theta\in[0,2\pi]$ (Indicación : estudiar los ceros de la función $\cos \mathrm{Arg}P(\mathrm{e}^{i\theta})$, donde Arg es una determinación continua del argumento).

[006687]

Ejercicio 7542

1. Demostrar que existe en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ una determinación holomorfa de $(z^2-1)^{-1/2}$ que toma el valor 1 para $z=\sqrt{2}$. ¿Unicidad ? Se designa por f esta determinación.
2. Para $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, se designa por γ_z el segmento $]0,z]$ orientado desde 0 hacia z y se escribe
$$F(z)=\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$
   (a) Demostrar que F es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (¿cuál es la derivada F' ?).
   (b) Estudiar $\lim\limits_{z'\to z} F(z')$, cuando $z\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.
   (c) Deducir que f no tiene primitiva en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

[006688]

Ejercicio 7543

1. Sea f una función entera tal que $|f(z)|\leqslant 1+\mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{sen}\,|z|$, para todo z. Demostrar que f es una constante.
2. Sea $f\in H(D)$ tal que $|f(z)|(1-|z|)\leqslant 1$, para $z\in D$. Demostrar que para todo n $|a_n|<\mathrm{e}(n+1)$.

[006689]

Ejercicio 7544

Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ todo entero y sea γ_R un parametraje del círculo $C(0,R)$, $R>0$. Calcular para $|z|<R$: $\frac{z}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw$; deducir que si $\sup\limits_R \int_0^{2\pi}|f(Re^{it})|\,dt<\infty$, f es constante. ¿Qué teorema se encuentra ? [006690]

Ejercicio 7545

Sea f un polinomio de grado $n>0$, asumido sin ceros en $\mathbb{C}$, y γ_R el círculo centrado en 0, radio R. Calcular $I_R=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{nf(z)-zf'(z)}{zf(z)}\,dz$, y encontrar su límite cuando $R\to+\infty$. ¿Cuál teorema se re-encuentra ? [006691]

Ejercicio 7546

Sea f una función entera tal que $|f(z)| \to +\infty$, cuando $|z| \to +\infty$.

1. Demostrar que f tiene un número finito de ceros en $\mathbb{C}$ denotados $z_1, \ldots, z_k$.
2. Deducir que f es un polinomio. (Para esto considerar $f(z)/P(z) = g(z)$, donde $P(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)$ y demostrar que $1/g$ es entera).

[006692]

Ejercicio 7547

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo Ω conteniendo 0. Demostrar que :

1. Si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, para n, lo suficientemente grande entonces $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sobre $\Omega \cap D(0,1)$.
2. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$, para n, lo suficientemente grande entonces f es constante en Ω.
3. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1})$, para n, lo suficientemente grande entonces f es constante en Ω.
4. $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$, para n, lo suficientemente grande es imposible.

[006693]

Ejercicio 7548

Se considera la serie entera $\sum_{0}^{\infty} 2^n z^n$. Calcular su suma f en su disco de convergencia. Encontrar el más grande abierto conexo de $\mathbb{C}$ en el cual f se extiende a una función holomorfa. Dar el desarrollo en serie de f en el punto $z = -\frac{1}{4}$ y el radio de convergencia de esta serie. [006694]

Ejercicio 7549

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo Ω en que no se anula. Entonces son equivalentes :

(i) Existe una determinación holomorfa del logaritmo de f sobre Ω.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$, para toda γ una curva cerrada en Ω de clase C^1 por trozos.

(iii) $\frac{f'}{f}$ admite una primitiva en Ω. [006695]

Ejercicio 7550

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo Ω. Se va a demostrar la equivalencia entre :

(i) f admite un logaritmo holomorfo en Ω.

(ii) f admite raíces **de todos los órdenes** holomorfas en Ω.

Sea ha visto que (i) implica (ii). Se supone ahora que (ii) es verificado : para cada n se denota f_n la función de $H(\Omega)$ tal que $f_n^n(z) = f(z)$ si $z \in \Omega$.

1. Sea a un cero de f ; ¿qué se puede decir de la multiplicidad de a ? Deducir que f no se anula en Ω.
2. Sea γ una curva cerrada en Ω de clase C^1 por trozos. Se define $I = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$, y $I_n = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz$. Demostrar que I y I_n son enteros, $I = nI_n$, ya que $I = 0$. Concluir.

Ejercicio 7551

Sea f una función entera; se establece, para $r \in \mathbb{R}_+^*$, $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Se supone que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0.$$
Demostrar que entonces f es un polinomio de grado a lo sumo p.
2. Se supone que existe $R \geqslant 0$, $K > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que
$$|z| > R \Longrightarrow |f(z)| \leqslant K|z|^p.$$
Demostrar que entonces f es un polinomio de grado a lo sumo p. Demostrar que si además $R = 0$, entonces f es un monomio de grado p.
3. Deducir que si f verifica
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f'(z)| \leqslant |z|,$$
entonces f es de la forma $f(z) = a + bz^2$, con $|b| \leqslant \frac{1}{2}$.

[006697]

Ejercicio 7552

Sea $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ una serie entera de radio de convergencia $R > 0$. Para $r < R$, sea $\gamma_r : t \mapsto re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y
$$I(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} |f(z)|^2 \frac{dz}{z}.$$

1. Demostrar que $I(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. Deducir una nueva demostración de las desigualdades de Cauchy y demostrar que si f no es un monomio, estas desigualdades son estrictas.
3. Considerando $f(z) = 1/(1-z)^2$, demostrar que para $r < 1$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 r^{2n-2}.$$

[006698]

Ejercicio 7553

Sea f una función holomorfa en el disco unidad abierto D verificando
$$\forall z \in D,\ |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}.$$
Demostrar que los coeficientes a_n del desarrollo $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ verifican
$$\forall n \geqslant 1,\ |a_n| < (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\mathrm{e} \ \text{ y } \ |a_0| < \mathrm{e}.$$

[006699]

Ejercicio 7554

Demostrar que una función entera admitiendo 1 y i como periodos es constante. [006700]

Ejercicio 7555

Sea f una función entera no constante que no se anula. Demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall r > 0,\ \exists z \in \mathbb{C}, |z| > r \text{ y } |f(z)| < \varepsilon.$$

Aplicación : todo polinomio no constante admite un cero en $\mathbb{C}$ (teorema de d'Alembert). [006701]

Ejercicio 7556

Determinar todas las funciones f holomorfas en el disco $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R\}$ tales que

$$\forall z \in D(0, \frac{R}{2}),\ f(z) = f(2z).$$

[006702]

Ejercicio 7557

Se considera la serie entera $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Demostrar que f admite una extensión analítica sobre un abierto que será definido.
2. Determinar el desarrollo en serie entera de esta extensión en i. ¿Cuál es su radio de convergencia ?

[006703]

Ejercicio 7558

Sea $F_1(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(z+1)^2 t} dt$.

1. Determinar el abierto E en el cual F_1 define una función holomorfa.
2. Demostrar que F_1 se extiende analíticamente a una función F en un abierto que se debe determinar. Calcular $F(2-4i)$.

[006704]

Ejercicio 7559

¿Hay funciones f holomorfas en $D(0,1)$ tales que para todo entero $n > 0$

1. $f(z) = z^2\bar{z}$
2. $f(z) = \mathrm{e}^{\bar{z}}$
3. $f(z) = \dfrac{\bar{z} - i}{z^2 + iz - 2}$
4. $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$.
5. $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$?
6. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?
7. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$?

Ejercicio 7560

Determinar explícitamente para $a \in \mathbb{R}$
$$\max_{|z|\leqslant 1} |z^2 + 2aiz + 1|.$$

[006706]

Ejercicio 7561

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$, k puntos del plano. Se designa por $d(A,B)$ la distancia entre dos puntos A y B del plan. Sea D un abierto acotado conexo del plano. Demostrar que el sup de $\prod_{1\leqslant j\leqslant k} d(M,P_j)$ sobre D se alcanza en la frontera de D. [006707]

Ejercicio 7562

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo Ω y no se anula en Ω. Se supone que existe $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ tales que $|f(z)| \geqslant |f(a)|$, para $|z-a| < \varepsilon$. Demostrar que f es constante. [006708]

Ejercicio 7563

Sea Ω un abierto conexo acotado de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω, continua en $\overline{\Omega}$, no constante, tal que $|f|$ es constante en la frontera de Ω. Demostrar que f admite un cero en Ω. [006709]

Ejercicio 7564

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ conteniendo el disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} | \ |z - z_0| \leqslant r\}$, y f una función holomorfa en Ω tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $|z - z_0| = r$. Demostrar que f es constante (considerar e^{if}). [006710]

Ejercicio 7565

Sean f y g dos funciones holomorfas y no se anulan en un abierto conexo Ω conteniendo el disco unitario cerrado. Se supone que para $|z| = 1$, $|f(z)| = |g(z)|$ y que $f(0)$ y $g(0)$ pertenecen a $\mathbb{R}_+^*$. Demostrar que $f = g$ sobre Ω. [006711]

Ejercicio 7566

Sea f una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} | \ |z| < R\}$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para $|z| < R$, se escribe para $0 \leqslant r < R$:

$$M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad M_1(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n, \qquad M_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}.$$

1. (a) Demostrar que para $0 \leqslant r < R$,
$$M_2(r,f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}.$$

   (b) Deducir de (a) que $r \mapsto M_2(r,f)$ es una función continua creciente.

(c) Deducir de (a) otra prueba de las desigualdades de Cauchy.

2. (a) Demostrar que para $0 \leqslant r < r\alpha < R$, se tiene

$$M(r,f) \leqslant M_1(r,f) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} M(\alpha r, f)$$

(para demostrar la segunda desigualdad, se pueden usar las desigualdades de Cauchy).

(b) Demostrar que la función $r \mapsto M(r,f)$ es continua y creciente, e incluso estrictamente creciente si f no es constante.

3. Se recuerda que si las dos series $\sum\limits_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2$ y $\sum\limits_{n\geqslant 0} |\beta_n|^2$ convergente (donde $\alpha_n \in \mathbb{C}$ y $\beta_n \in \mathbb{C}$), la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n \overline{\beta_n}$ converge y se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \overline{\beta_n} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2 \right) \left(\sum_{n\geqslant 0} |\beta_n|^2 \right).$$

Demostrar que para $\alpha \in]0,1[$, se tiene

$$\sqrt{1-\alpha^2} M_1(r\alpha, f) \leqslant M_2(r,f) \leqslant M(r,f).$$

4. Usando las preguntas 2. y 3., demostrar que si $0 \leqslant r < R$,

$$\lim_{n\to\infty} M_1(r,f^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} M_2(r,f^n)^{1/n} = M(r,f)$$

(se puede notar que $M(r,f^n) = M(r,f)^n$).

[006712]

Ejercicio 7567

Sea f una función holomorfa no idénticamente nula en un abierto Ω conexo que contiene disco cerrado $\overline{D(z_0,r)}$. Sea γ el círculo $\{z/\ |z-z_0| = r\}$ orientado positivamente.

1. Demostrar que f tiene un número finito de ceros en $D(z_0,r)$.
2. Se supone que f no tiene ceros en γ^*. Calcular $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^p dz$, para $p = 0,1,\ldots$ (utilizar los ceros de f en $D(z_0,r)$).
3. Siempre se supone que f no tiene ceros en γ^*. Se toma $p = 0$. Demostrar que la integral anterior es igual al número total de ceros de f en $D(z_0,r)$. Demostrar que este número es también el índice del punto 0, con respecto a la curva cerrada $\Gamma = f(\gamma)$.
4. Sea $w_0 = f(z_0)$ y n la multiplicidad de cero z_0, para la función $f(z) - w_0$. Demostrar que se puede elegir $\varepsilon > 0$ tal que $f'(z)$ no se anula por $0 < |z-z_0| < \varepsilon$, y que existe un $\delta > 0$ tal que para todo a, con $|a-w_0| < \delta$, la ecuación $f(z) = a$ tiene exactamente n raíces en el disco $|z-z_0| < \varepsilon$.
5. Deducir el principio del máximo : si f es holomorfa y no constante en Ω, entonces $|f|$ no tiene máximo en Ω.

[006713]

Ejercicio 7568

Sea D disco unitario abierto :

$$D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$$

y C el círculo unitario :

$$C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}.$$

Para $a \in D$, se considera la aplicación homográfica Φ_a :

$$\Phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Demostrar que $\Phi_a(C) \subset C$, ya que Φ_a es una biyección de D en sí mismo, de recíproco Φ_{-a}.
2. Sea f un biholomorfismo de D, es decir una función holomorfa de D en sí mismo, biyectiva, tal que f^{-1} sea también holomorfa. Sea $a = f^{-1}(0)$. Considerando $f \circ (\Phi_a)^{-1}$ y su recíproco, demostrar que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall z \in D,\ f(z) = \mathrm{e}^{i\varphi}\Phi_a(z),$$

es decir, dentro de la rotación, los únicos biholomorfismos en el disco son los Φ_a.

[006714]

Ejercicio 7569

Sea D abra el disco de la unidad y f una función holomorfa de D en sí mismo. Sea Φ_a la función definida en el ejercicio anterior. ¿Cuál es la imagen de 0 por $h = \Phi_{f(a)} \circ f \circ (\Phi_a)^{-1}$? Deducir que para todo z de D,

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|$$

luego

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

(Lema de Schwarz-Pick). [006715]

Ejercicio 7570

Sea D el disco unidad abierto y f una función holomorfa de D en D. Se supone que f admite al menos dos puntos fijos, es decir que existe a y b en D, $a \neq b$, tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Demostrar que f es la identidad de D. Se puede usar la aplicación Φ_a definida en el ejercicio 7568 para volver al caso en que uno de los puntos fijos es 0. [006716]

Ejercicio 7571

Sea D disco unitario abierto. Se dice que una función E es unitario si es holomorfa en D, continua en $\overline{D}$ y si $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

1. Demostrar que una función unitaria en D solo tiene un número finito de ceros. Demostrar que una función unitaria sin cero es una constante. Demostrar que una función unitaria que tiene los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por ceros (es cada uno contado con su orden de multiplicidad) se escribe

$$E(z) = c\prod_{j=1}^{n} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}.$$

2. Sea f holomorfa en D y no idénticamente nula y se supone que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leqslant M$ sobre D. Sea E una función unitaria en D y tal que $f(z)/E(z)$ es holomorfa en D. Demostrar que se tiene

$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leqslant M|E(z)|.$$

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la sucesión de ceros de f en D, cada uno es contado con su orden de multiplicidad. Demostrar que

$$\forall n \geqslant 1,\ |f(0)| \leqslant M|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$

Inferir que si $f(0) \neq 0$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} (1 - |a_n|)$ converge.

[006717]

Ejercicio 7572

Sea f una función entera tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Sea D el disco unitario cerrado.

1. Se supone que f no tiene ceros en D. Demostrar que existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = k$, para todo z de $\mathbb{C}$.
2. Sea $a_1, \ldots, a_n$ (¿por qué un número finito ?) los ceros de f en D, cada uno es contado con su orden de multiplicidad. Estudiando la función

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a_j} z}{z - a_j},$$

demostrar que existe $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f(z) = kz^n$.

[006718]

Ejercicio 7573 Teorema de los tres círculos de Hadamard

Sea f una función holomorfa en un dominio que contiene la corona cerrada constituida por los $z \in \mathbb{C}$ tales que $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ (donde $0 < r_1 < r_2$). Se define $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, para $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

1. Demostrar que existe un número real α tal que $r_1^{\alpha} M(r_1) = r_2^{\alpha} M(r_2)$.
2. Demostrar que

$$M(r) \leqslant M(r_1)^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} M(r_2)^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}$$

(se aplica el principio del máximo a la función $z^p f(z)^q$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}^*$, luego se considera una sucesión (p_n, q_n), $p_n \in \mathbb{Z}$ y $q_n \in \mathbb{N}^*$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n/q_n = \alpha$).

[006719]

Ejercicio 7574

Representar gráficamente los siguientes caminos de $\mathbb{C}$:

1. $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0,1]$,
2. $\gamma(t) = t^2 - it$, $t \in [0,1]$,
3. $\gamma(t) = |t| + it$, $t \in [-1,1]$,
4. $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ donde : $\gamma_1(t) = it^2$, $t \in [0,1]$; $\gamma_2(t) = t + (1-t)i$, $t \in [0,1]$; $\gamma_3(t) = \mathrm{e}^{-it}$, $t \in [0,\pi]$.

[007227]

Ejercicio 7575

Calcular las siguientes integrales :

1. $\int_\gamma z^2 dz$, para $\gamma(t) = 1 + t(1+i)$, $t \in [0,1]$.
2. $\int_\gamma (z^3+1) dz$, para $\gamma(t) = |t| - it$, $t \in [-1,1]$.
3. $\int_\gamma \operatorname{Im}(z) dz$, para $\gamma(t) = t + i\inf\{t,1\}$, $t \in [0,2]$.
4. $\int_\gamma \operatorname{Re}(z^2) dz$, para $\gamma(t) = 1 - it + t^2$, $t \in [0,1]$.

[007228]

Ejercicio 7576

Se considera la función F definida en el plano complejo por

$$F(z) = z^2 \mathrm{e}^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)}.$$

Se considera también el siguiente camino $\gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\pi t}$ para $t \in [0,1]$.

1. Justificar que F es holomorfa y calcular F'.
2. Deducir
$$\int_\gamma z\left(2 - z\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)\right)\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)} dz.$$

[007229]

Ejercicio 7577

Sea γ un camino $\mathscr{C}^1$ a trozos de $\mathbb{C}$ yendo de 0 a i. Calcular $\int_\gamma f(z) dz$ con :

1. $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$
2. $f(z) = z\mathrm{e}^{iz}$.

[007230]

Ejercicio 7578

(Variaciones en el área.)

1. Para todo $r > 0$, demostrar que
$$\int_{\partial B(0,r)} \bar{z} dz = 2i\,\text{Área}\big(B(0,r)\big).$$
2. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de puntos no alineados. Se denota Δ el triángulo de vértices z_1, z_2, z_3. Demostrar que
$$\int_{\partial\Delta} \bar{z} dz = 2i\,\text{Área}(\Delta).$$
3. De manera general, sea K un compacto de borde regular. Demostrar que
$$\int_{\partial K} \bar{z} dz = 2i\,\text{Área}(K).$$

[007231]

Ejercicio 7579

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conteniendo 0. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Demostrar que para todo $r > 0$ tal que $\overline{B}(0,r) \subset U$, se tiene
$$\int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = 2i \int_{B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy.$$
2. Deducir que
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2i\pi r^2} \int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0).$$

[007232]

Ejercicio 7580

Calcular las siguientes integrales :

$$1.\ I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz, \qquad 2.\ I_2 = \int_{C(2,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz,$$
$$3.\ I_3 = \int_{C(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(z)\cos(z)}{3z - \pi} dz, \qquad 4.\ I_4 = \int_{C(2i,1)} \frac{e^{z^2}}{z^3(z - 2i)} dz.$$

[007233]

Ejercicio 7581

Calcular $\displaystyle\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$ y $\displaystyle\int_{C(-1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$. Deducir $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$. [007234]

Ejercicio 7582

Determinar las raíces del polinomio $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$. Deducir la integral $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z-1}{z^2 + (1-i)z - i} dz$.
[007235]

Ejercicio 7583

Para $r > 0$, calcular la siguiente integral :
$$\int_{C(0,r)} (|z| - e^{\cos(z)} \operatorname{sen}(z) + \bar{z})\, dz.$$

[007236]

Ejercicio 7584

Calcular las siguientes integrales :

$$1.\ I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - i}{(z-1)^2} dz, \quad 2.\ I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^3} dz, \quad 3.\ I_3 = \int_{C(i,5)} \frac{ze^{iz}}{(1+z)^3} dz, \quad 4.\ I_4 = \int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^3(z-2)} dz.$$

Ejercicio 7585

Calcular las integrales $\int_{C(i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3-3}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$ y $\int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3-3}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$. Deducir $\int_{C(0,2)} \frac{iz^3-3}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$.

[007238]

Ejercicio 7586

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conteniendo $B(0,1)$. Sea $f: U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

1. Calcular
$$\int_{C(0,1)} \left(2+z+\frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz.$$
2. Deducir que
$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2(\theta/2) d\theta = 2f(0) + f'(0).$$
3. Utilizar una estrategia similar para calcular $\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \operatorname{sen}^2(\theta/2) d\theta$.

[007239]

Ejercicio 7587

(Generalización de Liouville.) Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera no constante. Demostrar que la imagen $f(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ por f es denso en $\mathbb{C}$.

Indicación ▼ [007240]

Ejercicio 7588

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $\operatorname{Re}(f)$ es acotada. Demostrar que f es constante. [007241]

Ejercicio 7589

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Demostrar que si se verifica
$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(|f(z)| \leqslant |z| \text{ y } |f(z)| \leqslant |z|^2\right),$$
entonces es nula. [007242]

Ejercicio 7590

(Refinamiento de Goursat.) El objetivo de este ejercicio es de demostrar la version siguiente del lema de Goursat :

Lema. (Refinamiento de Goursat)

Sea U un abierto. Sea Δ un triángulo en U. Sea $z_0 \in \Delta$. Sea $f: U \to \mathbb{C}$ una función continua en U holomorfa en $U \setminus \{z_0\}$. Entonces,
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

1. Primero se trata el caso donde z_0 es un vértice del triángulo. Se denotan los otros dos vértices por z_1 y z_2.

(a) Demostrar que para todo z_1' en el segmento $[z_0, z_1]$ y para todo z_2' en el segmento $[z_0, z_2]$, se tiene

$$\int_{\partial\Delta_{z_0z_1z_2}} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz.$$

(b) Demostrar que cuando $z_1' \to z_0$ y $z_2' \to z_0$, entonces $\int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz \to 0$.

(c) Demostrar el lema en este caso.

2. Se supone en esta pregunta que $z_0 \in \partial\Delta$. Usando la pregunta anterior, demostrar el lema en este caso.
3. Se supone ahora que $z_0 \in \mathring{\Delta}$. Demostrar el lema en este caso. Concluir.
4. Deducir de este resultado que si $f : U \to \mathbb{C}$ es una función continua, y holomorfa excepto quizás en un número finito de puntos, entonces f es holomorfa en U.

[007243]

Ejercicio 7591

(Teorema de extensión de Riemann.) El objetivo de este ejercicio es probar el teorema de extensión de Riemann usando el lema de Goursat refinado.
Teorema (de extensión de Riemann)
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $z_0 \in U$ sea $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada en un vecindario de z_0. Entonces f se extiende a una función holomorfa en U.
Para demostrar este teorema, se considera la función $F : U \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = z_0 \\ (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0. \end{cases}$$

1. Usando el lema refinado de Goursat, demostrar que F es holomorfa en U.
2. Utilizando el $\mathbb{C}$-derivabilidad de F en z_0, demostrar que f se extiende como una función continua en U.
3. Concluir.

[007244]

Ejercicio 7592

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $L \subset \mathbb{C}$ una recta. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $f|_{U \setminus L}$ es holomorfa. Demostrar que f es holomorfa.

Indicación ▼ [007245]

Ejercicio 7593

[Principio de reflexión de Schwarz] Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico con respecto al eje real. Denotar $U_+ := U \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ y $U_- := U \cap \{\mathrm{Im}(z) < 0\}$. Sea $f : \overline{U_+} \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $f|_{U_+}$ es holomorfa y tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \overline{U_+} \cap \mathbb{R}$.

1. Demostrar que la función $g : \overline{U_-} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ es continua en $\overline{U_-}$ y holomorfa en U_-.
2. Demostrar que se puede extender la función f en una función continua $h : \overline{U} \to \mathbb{C}$ poniendo $h(z) = f(z)$ si $z \in \overline{U_+}$ y $h(z) = g(z)$ si $z \in \overline{U_-}$.

3. Demostrar que $h|_U$ es holomorfa.

[007246]

Ejercicio 7594

[Extensión de Γ] Denotar $U_{\text{Re}>0} := \{z \in \mathbb{C};\ \text{Re}(z) > 0\}$.

1. Demostrar que para todo $z \in U_{\text{Re}>0}$, se tiene
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$
2. Deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Utilizar la primera pregunta para demostrar que la función Γ se extiende a una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

[007247]

Ejercicio 7595

Este ejercicio pretende dar una introducción a la geometría del disco. Esto da también una interpretación geométrica del lema de Schwarz. Se denota $\mathbb{D}$ la unidad de accionamiento. Dado un vector tangente ξ en un punto $z \in \mathbb{D}$, se denota su norma euclidiana por $\|\xi\|_2$ y se define su norma *hiperbólica* o su norma de *Poincaré* por
$$\|\xi\|_{\text{hyp}} := \frac{\|\xi\|_2}{1-|z|^2}.$$
La *longitud hiperbólica* de un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ es definida por
$$\ell_{\text{hyp}}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\text{hyp}} dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|_2}{1-|\gamma(t)|^2} dt.$$
La *distancia hiperbólica* o *distancia de Poincaré* entre dos puntos $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ es definida por
$$d_{\text{hyp}}(z_0,z_1) := \inf_{\gamma} \ell_{\text{hyp}}(\gamma)$$
donde el inf se toma en todos los caminos $\mathscr{C}^1$ a trozos de $\mathbb{D}$ yendo de z_0 a z_1. El espacio métrico $(\mathbb{D}, d_{\text{hyp}})$ es llamado *disco de Poincaré*. Las curvas de longitud mínima se llaman *geodésicas* o *rectas hiperbólicas*.

1. (a) Usando el lema de Schwarz-Pick, Demostrar que toda aplicación holomorfa $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es decreciente con respecto a la distancia de Poincaré, es decir que para todo $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$,
$$d_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_1)) \leqslant d_{\text{hyp}}(z_0, z_1).$$
   (b) Deducir que para todo automorfismo del disco $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ es una isometría de $(\mathbb{D}, d_{\text{hyp}})$.
2. Ahora se quiere obtener una expresión explícita para d_{hyp}.
   (a) Sea $w \in]0,1[$. Demostrar que la geodésica que va de 0 a w es el segmento $[0,w]$ y demostrar que
$$d_{\text{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$
   (b) Sea $w \in \mathbb{D}^*$. Usando un automorfismo cuidadosamente elegido, demostrar que la geodésica que va de 0 a w es el segmento $[0,w]$ y demostrar que
$$d_{\text{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+|w|}{1-|w|}\right).$$

(c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*$. Usando un automorfismo cuidadosamente elegido, demostrar que la geodésica que va de z_1 a z_2 es una parte del círculo ortogonal a $\partial\mathbb{D}$ pasando por z_1 y z_2 y que

$$d_{\text{hyp}}(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1 - z_1\bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - z_1\bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}\right) = 2\operatorname{argtanh}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|.$$

(d) Demostrar que d_{hyp} es de hecho una distancia en $\mathbb{D}$. Demostrar también que los *bolas hiperbólicas* son bolas euclidianas (no necesariamente con el mismo centro o el mismo radio).

3. La geometría del disco hiperbólico definida anteriormente se llama *geometría hiperbólica*. Verificar que en geometría hiperbólica, Se verifican los axiomas de Euclides, con excepción del quinto postulado.
4. Recordar que $\mathbb{D}$ es biholomorfa al semiplano $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (dice *semi-plano de Poincaré*), a través de la aplicación $\varphi : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Describir las geodésicas de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ donde $d_{\mathbb{H}}$ es la métrica inducida por d_{hyp} a través de φ.
5. Se concluye ahora con una demostración más «geométrica» del teorema de Liouville Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa acotada.

(a) Demostrar que se puede suponer que $f(z) \in \mathbb{D}$ para todo $z \in \mathbb{C}$ (lo que se asume en la sucesión).

(b) Para todo $R \in \mathbb{R}_+^*$ se considera la aplicación $f_R : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por $f_R(z) = f(Rz)\ \forall z \in \mathbb{D}$. Usando la propiedad de disminución de la distancia de Poincaré, demostrar que para todo $R \in \mathbb{R}_+^*$ y para todo $z_1, z_2 \in B(0, R)$,

$$d_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\text{hyp}}\left(f_R\left(\frac{z_1}{R}\right), \left(\frac{z_2}{R}\right)\right) \leqslant d_{\text{hyp}}\left(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\right).$$

(c) Deducir que f es constante.

[007248]

---

320 443.00 Singularidad

Ejercicio 7596

Usando la fórmula

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

donde f es meromorfa en un dominio que contiene el contorno simple Γ, y a es un punto interior a Γ, demostrar que se tiene

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n! z^{n+1}}\,dz$$

donde C es el círculo unitario de $\mathbb{C}$. Deducir que se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta.$$

Solución ▼ [002680]

Ejercicio 7597

Demostrar que la función f definida en $\mathbb{C}^*$ por $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen} z + i \sinh z}$ se extiende a una función holomorfa en 0 ; ¿cuál es el radio de su desarrollo en 0 ? [006720]

Ejercicio 7598

1. Determinar los desarrollos en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ en los dominios $D = D(0,1)$, $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$, luego $C_2 = \{|z| > 3\}$.
2. Determinar los desarrollos en serie de Laurent de $f(z) = \frac{z}{z-1} e^z$ en los dominios $C_1 = \{|z| < 1\}$, luego $C_2 = \{|z| > 1\}$.

[006721]

Ejercicio 7599

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que la expansión en serie de Laurent en 0 de la función $f(z) = \exp \frac{\alpha}{2}(z + \frac{1}{z})$ es de la forma $a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n (z^n + \frac{1}{z^n})$, donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos t)\, dt, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos t) \cos(nt)\, dt, \text{ si } n \geqslant 1.$$

(Calcular f, para $|z| = 1$ y concluir con la extensión analítica.) [006722]

Ejercicio 7600

Desarrollar las siguientes funciones en series de Laurent en cada uno de los conjuntos abiertos dados

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en $|z| < 1$; $1 < |z| < 2$; $2 < |z|$;
2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ en $|z| < |a|$ y en $|z| > |a|$;
3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-a)}$ en $0 < |z| < |a|$ y en $|a| < |z|$;
4. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0 < |a| < |b|)$ en $0 < |z| < |a|$; $|a| < |z| < |b|$; $|b| < |z|$;
5. Una determinación holomorfa f de $[(z-a)(z-b)]^{\frac{1}{2}}$ $(0 < |a| = |b|)$ en $0 < |z| < |a|$; $|b| < |z|$;
6. $f(z) = z^2 \exp(z^{-1})$ en $0 < |z|$.
7. $f(z) = \exp(z + z^{-1})$ en $0 < |z|$.
8. $f(z) = \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen}(z^{-1})$ en $0 < |z|$.
9. $f(z) = \operatorname{cotan} z$ en $k\pi < |z| < (k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{N})$ se puede expresar el resultado en términos de números B_n de Bernoulli, definidos por :
$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!}$$
($B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, y $B_{2n+1} = 0$, para $n \geqslant 1$).

[006723]

Ejercicio 7601

Determinar la corona de convergencia de la serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|!z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)z^n$ (R función racional sin polos en $\mathbb{Z}$). [006724]

Ejercicio 7602

Sea un abierto U de $\mathbb{C}$ y f una función definida en U admitiendo en todo punto a de U un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\geqslant r_a} c_n(z-a)^n$$

($r_a \in \mathbb{Z}$) convergiendo en un disco sin centro $0 < |z-a| < R_a$. Demostrar que para todo compacto $K \subset U$, existe una función racional g_K nula en el infinito y tal que la función $f - g_K$ sea holomorfa en un vecindario de K (f se dice meromorfa en U). [006725]

Ejercicio 7603

Determinar los puntos singulares de las siguientes funciones, luego dar la naturaleza de estos puntos singulares (singularidad borrable, polo de orden n, singularidad esencial aislada, acumulación de puntos singulares).

1. $z \mapsto \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$
2. $z \mapsto \dfrac{1}{\exp(z)-1} - \dfrac{1}{z}$
3. $z \mapsto \operatorname{sen}\dfrac{1}{1-z}$
4. $z \mapsto \exp\dfrac{z}{1-z}$
5. $z \mapsto \operatorname{cotan} z - \dfrac{1}{z}$
6. $z \mapsto \operatorname{cotan}\dfrac{1}{z}$
7. $z \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} a}$
8. $z \mapsto \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{z}}\right)$
9. $z \mapsto \exp\left(\tan\dfrac{1}{z}\right)$.

[006726]

Ejercicio 7604

Exhibir las funciones que tienen en el plano complejo solo las siguientes singularidades :

1. Un polo triple en 0, un solo polo en 1 y un punto singular esencial en i y $-i$.
2. Un punto singular esencial en todo entero.

[006727]

Ejercicio 7605

Determinar singularidades aisladas a funciones f siguientes y calcular $\operatorname{Res}(f,a)$.

1. $z \mapsto \dfrac{1}{z^3-z^5}$
2. $z \mapsto \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$
3. $z \mapsto \exp(z+z^{-1})$
4. $z \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(2z)}{(z+1)^3}$
5. $z \mapsto \cos\left(\dfrac{z^2+4z-1}{z-3}\right)$
6. $z \mapsto z^n \operatorname{sen}(\dfrac{1}{z})$.

[006728]

Ejercicio 7606

Sea U un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en $U\setminus S$, donde S es una parte cerrada discreta de U. Demostrar que f tiene una primitiva en $U\setminus S$ si y solo si para todo punto s de S, el residuo de f en el punto s es nulo. [006729]

Ejercicio 7607

Calcular las siguientes integrales, donde los caminos simples cerrados γ se recorren en el sentido directo.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}dz$, donde γ es el círculo $|z-2|=\frac{1}{2}$;
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp z}{z^2(z-9)^2}dz$, donde γ es el círculo $|z|=1$;
3. $\displaystyle\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{z}\right)\, dz$, donde γ es el círculo $|z|=1$;
4. $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{z}\right)\, dz$, donde γ es el círculo $|z|=r$;
5. $\displaystyle\int_\gamma (z^2+z+1)^{-1/2}\, dz$, donde γ es el círculo $|z|=r\neq 1$.

[006730]

Ejercicio 7608 Ejemplos de singularidades aisladas

Describir el tipo de singularidad (aparente, polo o esencial) de las siguientes aplicaciones

$$f(z)=\frac{1}{\operatorname{sen}(z)^2},\qquad g(z)=\frac{z}{\mathrm{e}^z-1},\qquad h(z)=\mathrm{e}^{1/z}.$$

[007573]

Ejercicio 7609 Teorema de identidad

Si f es una función meromorfa en un abierto D de $\mathbb{C}$, se denota $P(f)$ el lugar geométrico de sus polos.

1. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y f,g dos aplicaciones meromorfas en D. Demostrar que se tiene una equivalencia entre
   (a) $f=g$
   (b) $\{z\in D-P(f)-P(g), f(z)=g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en D.
2. ¿Se puede construir una aplicación meromorfa en $\mathbb{C}^\star$ no nula pero cero en todos los reales de la forma $\frac{1}{n}$, con $n\in\mathbb{N}$?

[007574]

Ejercicio 7610 Funciones racionales

Si f es una función meromorfa en un abierto D de $\mathbb{C}$, se denota $P(f)$ el lugar geométrico de sus polos. Sea f una aplicación meromorfa en $\mathbb{C}$ y n un entero natural y r un número real estrictamente positivo tal que

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus P(f)-\Delta_r,\ \ |f(z)|\leqslant |z|^n.$$

Demostrar que f es una aplicación racional. [007575]

321 444.00 Teorema de residuos

Ejercicio 7611

Calcular por el método de residuos

$$I = \int_0^{\pi} \frac{a\,d\varphi}{a^2 + \operatorname{sen}^2\varphi}, \quad (a > 0).$$

Solución ▼ [002672]

Ejercicio 7612

Calcular las integrales

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}, \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4 + x^2 + 1}\,dx.$$

Solución ▼ [002673]

Ejercicio 7613

Calcular por el método de residuos la integral de Wallis

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\,d\theta.$$

Solución ▼ [002674]

Ejercicio 7614

Desarrollar la función

$$f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$$

en serie de Fourier, calculando los coeficientes por el método de residuos.

Solución ▼ [002675]

Ejercicio 7615

Resolver la ecuación $\cos z = a$, donde a es un real > 1. Dar el seno de las soluciones. Deducir el valor de

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(a - \cos x)}.$$

Solución ▼ [002676]

Ejercicio 7616

Sea $a \in [0,1[$ un real. En integrando $\mathrm{e}^{az}/\cosh z$ a lo largo del rectángulo de vértices $-R$, $+R$, $R + i\pi$, $-R + i\pi$, demostrar que se tiene

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Solución ▼ [002677]

Ejercicio 7617

Integrando e^{2iaz-z^2} a lo largo del rectángulo de vértices 0, R, $R+ia$, ia, y haciendo tender R hacia $+\infty$, demostrar que se tiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

(Se admite la fórmula $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Solución ▼ [002678]

Ejercicio 7618

Sea R una fracción racional, o más generalmente una función meromorfa en $\mathbb{C}$, sin polo real.

— Se quiere calcular
$$I = \int_0^{+\infty} xR(x^4)\,dx$$
Demostrar que esto se puede hacer por el método de residuos, integrando en un contorno formado por el borde del cuarto de círculo $\{0 < \arg z < \frac{\pi}{2}, |z| < a\}$.

— Aplicación : calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^8}\,dx.$$

— Más generalmente, demostrar que si n y p son enteros, y $p \geqslant 3$, se puede calcular
$$I(n,p) = \int_0^{+\infty} x^n R(x^p)\,dx$$
bajo una condición sobre n, p que se deben especificar.

— Aplicación : calcular
$$I_p = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{2p}}\,dx.$$

Solución ▼ [002679]

Ejercicio 7619

Sea $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{]-\infty,0]\}$. Determinar en todo $z_0 \in \Omega$ la serie de Taylor de la función holomorfa $z \mapsto \operatorname{Log} z$ así como su radio de convergencia. Sea z_0, con $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Sea R_0 el radio de convergencia para z_0 y sea $f(z)$ la suma de la serie en $D(z_0,R_0)$. ¿Se tiene $f(z) = \operatorname{Log} z$ en $D(z_0,R_0)$?

Solución ▼ [002820]

Ejercicio 7620

Se considera la función analítica $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ en el abierto U complemento a $\pi\mathbb{Z}$. Verificar que la función $\operatorname{sen}(z)$ nunca ese anula en U. Determinar en todo $z_0 \in U$ da el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor de f. *Observación :* No es recomendable tratar de resolver este problema determinando explícitamente los coeficientes de la serie de Taylor.

Solución ▼ [002821]

Ejercicio 7621

Sean f y g dos funciones enteras con $\forall z$, $f(z)g(z) = 0$. Demostrar que uno de ellos es idénticamente nulo.

Solución ▼ [002822]

Ejercicio 7622

Sea f una función holomorfa en un abierto **convexo** U. Sea $z_1 \in U$, se supone que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en z_1 es R_1. Igualmente, en $z_2 \in U$, se supone que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f es R_2. Sea g_1 en el disco abierto $D(z_1, R_1)$ la suma de la serie de Taylor de f en z_1 e igualmente g_2 sobre $D(z_2, R_2)$. Sea $V = D(z_1, R_1) \cap D(z_2, R_2)$. Demostrar que si V es no vacío entonces $g_1 = g_2$ sobre V. Se comienza demostrando que $V \cap U$ es no vacío también. *Cuidado* : en general, sin hipótesis especial como la convexidad de U esto es completamente falso ; dar un ejemplo, con U conexa, pero no convexa, tal que $g_1 \neq g_2$ sobre V (y se puede incluso hacer con $V \cap U \neq \varnothing$). Es suficiente usar el ejercicio 7619.

Solución ▼ [002823]

Ejercicio 7623

1. Sea Ω el abierto usual sobre la que se define $\operatorname{Log} z$. Justificar para todo $z \in \Omega$
$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)}dt ,$$
y dar una fórmula integral explícita para el resto $R_N(z)$ en :
$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z).$$
2. Se supone $\operatorname{Re}(z) \geqslant \delta$ para cierto $\delta \in]0,1[$. Demostrar :
$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}.$$
Se minora $|1+t(z-1)|$ por δ.
3. Deducir que la serie de Taylor de Log en el punto 1 es uniformemente convergente en el compacto $\{|z-1| \leqslant 1, \delta \leqslant \operatorname{Re}(z)\}$.
4. Para $-\pi < \phi < +\pi$ se establece $z = 1 + \mathrm{e}^{i\phi}$. Determinar las coordenadas polares $|z|$ y $\operatorname{Arg}(z)$ de z en función de ϕ. Deducir de lo anterior las siguientes identidades, para todo $\phi \in]-\pi, +\pi[$:
$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos k\phi}{k}, \qquad \frac{\phi}{2} = \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{\operatorname{sen} k\phi}{k},$$
y el hecho de que estas series son uniformemente convergentes en todo intervalo $[-\pi+\varepsilon, +\pi-\varepsilon]$, $(0 < \varepsilon < \pi)$.

Solución ▼ [002824]

Ejercicio 7624

1. Sea f una función continua en $\overline{D(0,1)}$, holomorfa en $D(0,1)$, nula en el círculo de radio 1. Demostrar que f es idénticamente nula.
2. Más fuerte : no se supone más que $f(\mathrm{e}^{i\theta})$ es nula para todo θ, pero solo para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Demostrar que f es idénticamente nula. *Indicación : $f(z)f(-z)$.*

Solución ▼ [002825]

Ejercicio 7625

Sea $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Demostrar : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. Deducir $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

Solución ▼ [002826]

Ejercicio 7626

Sea F una función entera tal que $|F(z)| \leqslant \frac{1}{n}$, para $|z| = n$, $n \geqslant 1$. Demostrar que F es idénticamente nula.

Solución ▼ [002827]

Ejercicio 7627

1. Sea f analítica en un disco $|z-z_0| \leqslant R$ y existe cierto z_1, con $|z_1 - z_0| < R$ tal que $|f(z)| > |f(z_1)|$, para $|z-z_0| = R$. Demostrar que f se anula al menos una vez en el disco abierto $D(z_0, R)$. *Indicación :* Considerar de otro modo lo que dice el principio del máximo para la función $\frac{1}{f}$.
2. *Teorema de Hurwitz.* Sea f_n de las funciones holomorfas en un vecindario común U de $\overline{D(0,1)}$ que convergen uniformemente en U. Sea F la función límite. Se supone que F no tiene ningún cero en el círculo $|z| = 1$, y que tiene al menos un cero en el disco abierto $D(0,1)$. Demostrar aplicando la pregunta anterior a f_n solo para $n \gg 1$ la función f_n tiene al menos un cero en $D(0,1)$. [10]
Este resultado se aplica a menudo en su forma recíproca : *si las funciones holomorfas f_n sin cero convergen uniformemente en un conexo abierto a F, entonces ya sea F es idénticamente nula o F no tiene ningún cero.* Justificar esta última reformulación.

[002828]

Ejercicio 7628

Demostrar que si una función entera f tiene su parte real acotada superiormente entonces es constante. (considerar $\exp(f)$).

Solución ▼ [002829]

Ejercicio 7629

Sea f una función entera tal que $|f(z)| \leqslant M(1+|z|)^n$ para cierto M y un cierto $n \in \mathbb{N}$. Dar varias demostraciones de que f es un polinomio de grado a lo sumo n :

— usando una fórmula integral de Cauchy para $f^{(n+1)}(z)$, con como contorno los círculos de radio R centrados en el origen, o en z si se quiere,
— utilizando las fórmulas de Cauchy para $f^{(m)}(0)$, con $m \geqslant n+1$,
— aplicando el teorema de Liouville a $(f(z) - P(z))/z^{n+1}$, con P el polinomio de McLaurin-Taylor en el origen para ordenar n.

Solución ▼ [002830]

Ejercicio 7630

Sea f una función entera que verifica $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = +\infty$. Dar varias demostraciones de que f es un polinomio :

10. Se verá más adelante en el curso o en el ejercicio que para $n \gg 1$ cada f_n tiene, contados con sus multiplicidades, exactamente el mismo número de ceros que F en $D(0,1)$.

— mostrando, por un teorema del curso, que $w = 0$ es una singularidad polar de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, y deduciendo que existe un polinomio P tal que $f(z) - P(z)$ tiende a 0, para $|z| \to \infty$, luego Liouville,

— o mostrando que f solo tiene un número finito de ceros z_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, y aplicando a $(z - z_1)\dots(z - z_n)/f(z)$ el resultado del ejercicio anterior, más algunas reflexiones finales para completar la prueba.

Demostrar que la función entera $z + \mathrm{e}^z$ tiende a infinito a lo largo de todo rayo desde el origen. De acuerdo con lo anterior $z + \mathrm{e}^z$ es, por lo tanto un polinomio. ¿Comentarios ?

Solución ▼ [002831]

Ejercicio 7631

Determinar las series de Laurent y los residuos en el origen de las siguientes funciones :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.
3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$.

Solución ▼ [002832]

Ejercicio 7632

Determinar la serie de Laurent en el origen de la función analítica $\exp(\frac{1}{z})$, y su residuo en el origen. ¿En $z_0 \neq 0$ cuál es el residuo de esta función ?

Solución ▼ [002833]

Ejercicio 7633

Determinar la parte singular, el residuo, y el término constante de las series de Laurent en el origen de las funciones :

1. $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z - \operatorname{sh} z}$.
3. $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen}(z) \operatorname{sh}(z)}$.

Solución ▼ [002834]

Ejercicio 7634

Determinar las serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en cada una de las tres coronas abiertas $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, así como la serie de Laurent de f en los puntos 0, 1, 2, y 3. ¿Cuáles son los residuos en $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ y $z = 3$?

Solución ▼ [002835]

Ejercicio 7635

Demostrar que todo circuito es homotópicamente trivial en $\mathbb{C}$.

Solución ▼ [002836]

Ejercicio 7636

Justificar las afirmaciones del folleto relativo a la invariancia del índice de un circuito con respecto a en un punto, cuando se deforma continuamente ya sea la trayectoria, ya sea el punto. Demostrar que cuando γ es un circuito existe R tal que $|z| > R \implies \mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$.

Solución ▼ [002837]

Ejercicio 7637

1. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una trayectoria y sea $N \in \mathbb{Z}$ su índice con respecto a 0. Usando la noción de variación del argumento, Demostrar que existe una función continua $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $\forall t \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{g(t)}$ y $g(1) - g(0) = 2\pi i N$. Demostrar que toda otra función continua G, con $\forall t \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{G(t)}$ es de la forma $g + 2\pi i k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Se define $h(t,u) = (1-u)\, 2\pi i N t + u g(t)$, luego $H(t,u) = \mathrm{e}^{h(t,u)}$. Demostrar que para cada $u \in [0,1]$ la aplicación $t \mapsto H(t,u)$ es un circuito. Deducir que los circuitos $c_N(t) = \mathrm{e}^{2\pi i\, Nt}$ y γ son homotopos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Se considera el circuito obtenido siguiendo primero c_N, luego c_M. Demostrar que este circuito es homotópico en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ al circuito c_{N+M} (¡es suficiente calcular su índice !).

Solución ▼ [002838]

Ejercicio 7638

Se considera un circuito $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (por lo tanto no pasa por el origen). Se supone que solo existe un número finito de $t \in [a,b]$, con $\gamma(t) \in \Delta =]-\infty, 0[$. Se les denota $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$. Por simplicidad, se supone que $\gamma(a)$ está sobre Δ, por lo tanto $t_0 = a$ y $t_N = b$.
Demostrar que para $t = t_j - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el signo μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j - \varepsilon))$ no depende de ε, e igualmente para el signo μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j + \varepsilon))$ (especificar lo que se está haciendo $j = 0$ y $j = N$). Si $\mu_j = +$ y $\mu'_j = -$ se dice que γ cruza Δ en $t = t_j$ en el sentido directo, si $\mu_j = -$ y $\mu'_j = +$ se dice que γ cruza Δ en $t = t_j$ en el sentido retrógrado. Si no se dice que γ toca pero no cruza Δ. Usando la relación entre la función $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ y la variación del argumento de $\gamma(t)$ en cada intervalo $]t_j, t_{j+1}[$, demostrar $\Delta_{\gamma_j} \arg(z) = \pi(\mu_{j+1} - \mu'_j)$, con $\gamma_j = \gamma$ restringido a $[t_j, t_{j+1}]$.
Deducir que $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ es igual al número de valores de t (a y b solo cuenta para uno) para los cuales γ cruza Δ, contados positivamente si el cruce es directo, negativamente si el cruce es retrógrado.
En la práctica, se puede usar cualquier semi-recta saliendo del origen al lugar de Δ a partir del momento donde no se cruza con el circuito γ que en un número finito de puntos (si no se requiere que el circuito sea regular, es decir tener un vector de velocidad en todas partes no nulo, entonces puede permanecer congelada en el mismo punto por un tiempo, y entonces se tiene que modificar un poco la discusión anterior que asume que solo existe un número finito de valores de t, para los cuales $\gamma(t)$ está en la semirrecta). [002839]

Ejercicio 7639

Justificar las siguientes fórmulas : cuando f presenta en z_0 un polo simple se tiene :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Cuando f tiene en z_0 un polo de orden a lo sumo N se tiene :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z).$$

Solución ▼ [002840]

Ejercicio 7640

1. Sea g una función analítica que tiene un solo cero en z_0, y f otra función analítica definida en un vecindario de z_0. Demostrar
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$
2. Se supone que g tiene un cero de orden n : $g(z_0+h) = h^n(c_0+c_1h+\cdots)$, $c_0 \neq 0$, y se escribe $f(z_0+h) = a_0+a_1h+\cdots$. Demostrar :
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = e_{n-1}$$
con e_0, e_1, ..., obtenidos por la división según potencias crecientes (como en los cálculos de desarrollo limitado) :
$$\frac{a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots}{c_0+c_1h+c_2h^2+\cdots} = e_0+e_1h+e_2h^2+\cdots$$

[002841]

Ejercicio 7641

Sea $0 < a < b < c$ y sea C el círculo de radio r centrado en el origen, recorrido en el sentido directo. Calcular $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz$ según el valor de r. Se deben dar dos pruebas, ya sea usando el teorema de residuos, o ya sea descomponiéndolos en elementos simples.

Solución ▼ [002842]

Ejercicio 7642

Sea $\mathrm{R} = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1\}$ un rectángulo. Usando el teorema del residuo, justifique la fórmula integral de Cauchy para z en el interior del rectángulo y f holomorfa en el rectángulo cerrado :
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathrm{R}} \frac{f(w)}{w-z}dw$$
Demostrar este resultado de una manera más simple, directamente del teorema de Cauchy-Goursat para funciones holomorfas sobre rectángulos, usando la función $w \mapsto (f(w)-f(z))/(w-z)$ (y también la noción de índice de un circuito). ¿En el caso donde z está en el *exterior* del rectángulo R, qué vale $\int_{\partial\mathrm{R}} \frac{f(w)}{w-z}dw$?

[002843]

Ejercicio 7643

Sea Ω un dominio, de borde el ciclo $\partial\Omega$ orientado en el sentido directo. Sea f una función holomorfa en $\overline{\Omega}$, sean z_1 y z_2 dos puntos de Ω. ¿Cuánto vale
$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}?$$
¿Qué se obtiene para $z_2 \to z_1$, z_1 fijo ?

Solución ▼ [002844]

Ejercicio 7644

¿Cuánto vale, en función de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} \ ?$$

Se deben precisar los valores excluidos de R.

Solución ▼ [002845]

Ejercicio 7645

Determinar, C designando a su vez al círculo $|z-i| = 1$, o el círculo $|z+i| = 1$, o aún $|z| = 2$, recorridos en el sentido directo, los valores de las integrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\, dz.$$

La misma pregunta para :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1}\, dz \qquad \text{y} \qquad \int_C \frac{1}{z^4-1}\, dz \qquad \text{y} \qquad \int_C \frac{1}{z^5-1}\, dz.$$

[002846]

Ejercicio 7646

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\, dz$, para $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$?

Solución ▼ [002847]

Ejercicio 7647

Determinar para A, B, C reales, con $A^2 > B^2 + C^2$ el valor de :

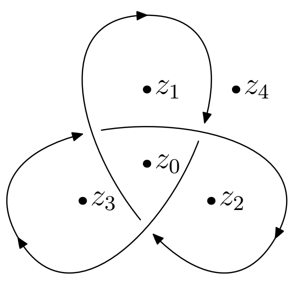
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B \operatorname{sen}\theta + C\cos\theta}.$$

Se tiene interés, como primer paso, escribir $B = R\cos\phi$, $C = R\operatorname{sen}\phi$, pero también se puede tratar más directamente con el residuo. (Utilizar $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ o en este género).

Solución ▼ [002848]

Ejercicio 7648

Se considera en el plano complejo un camino cerrado parametrizado γ que atraviesa la figura de arriba en la dirección indicada.



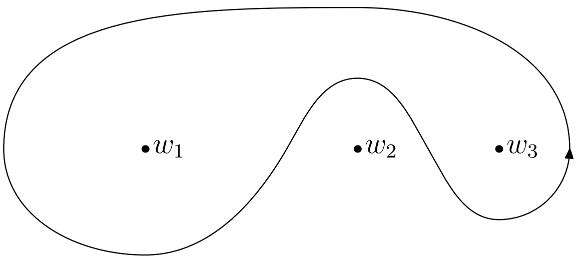
Para $j = 0, 1, 2, 3, 4$ se denota

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_j} \text{ y } B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_j)^2}$$

Determinar, justificando, los valores de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, y de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. Se debe especificar también qué es el nombre que se da en las cantidades dadas por las integrales A_j, $j = 0, \ldots, 4$. [002849]

Ejercicio 7649

Sea γ el contorno, recorrido en el sentido directo, diseñado abajo.



Determinar (con justificación) en función de w_1, w_2, w_3 las siguientes integrales :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3)}$$
$$B = \int_\gamma \operatorname{sen}(z)dz$$
$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z - w_1)^2(z - w_3)}$$

[002850]

Ejercicio 7650

Probar para $a > 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{a + \operatorname{sen}\theta}d\theta = \frac{\sqrt{a^2 - 1} - a}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Utilizando uno de los ejercicios precedentes demostrar que la fórmula tiene un sentido y es válida para $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$.

Solución ▼ [002853]

Ejercicio 7651

¿Cuánto vale en función de $R > 0$

$$\int_{|z|=R} \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^2 - 4z + 4}dz \text{ ?}$$

[002854]

Ejercicio 7652

Sea $P(z) = Az^4 + \cdots$ un polinomio de grado a lo sumo 4. Demostrar que $\int_{|z|=R} \frac{P(z)}{z^5-1}\, dz$ es independiente de R, para $R > 1$. Al hacer tender R hacia el infinito deducir que este valor constante es $2\pi i A$. Probar entonces vía el teorema de los residuos : $A = \frac{1}{5} \sum_{w^5=1} wP(w)$. [002855]

Ejercicio 7653 Residuo en infinito

Sea f una función analítica para $\{|z| > R\}$. Se pone :

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$$

con C_r el círculo $\{|z| = r\}$ recorrido en el sentido directo. Demostrar que el término de la derecha es independiente de $r > R$. Se denota el signo $-$. Se dice que $\mathrm{Res}(f, \infty)$ es el "residuo al infinito" de f. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ a excepción de un número finito de singularidades aisladas. Demostrar el teorema siguiente : *la suma de todos los residuos (incluido al infinito) de f es nula.* [002856]

Ejercicio 7654

Sea f una función holomorfa en $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$, con Ω el dominio interior a una curva de Jordan γ. Sea $g_n(z)$ la parte principal (parte singular) de f en la singularidad aislada z_n. Demostrar *la fórmula general de la integral de Cauchy* :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}, \quad f(z) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Para esto, observar primero $\mathrm{Res}(\frac{f(w)}{w-z}, z_n) = \mathrm{Res}(\frac{g_n(w)}{w-z}, z_n)$; luego demostrar que el residuo en el infinito de la función $\frac{g_n(w)}{w-z}$ de $w \in \mathbb{C} \setminus \{z_n\}$, es nulo. Se puede usar el ejercicio 7653.

Solución ▼ [002857]

Ejercicio 7655 Pedazos de residuos

Sea f presentando en z_0 un *polo simple*. Sea $C_r(\alpha, \beta)$ el arco de un círculo $w = z_0 + re^{i\theta}$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, recorrido en el sentido directo de θ y con $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$. Demostrar :

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r(\alpha,\beta)} f(z)\, dz = 2\pi i\, \frac{\beta - \alpha}{2\pi}\, \mathrm{Res}(f, z_0)$$

¿Qué pasa si el polo es de orden más elevado ?

Solución ▼ [002858]

Ejercicio 7656 Lema de Jordan

Sea f una función definida y continua en el dominio $\{\mathrm{Im}(z) > 0, |z| > R\}$, o solo en una sucesión de semicírculos $\{\mathrm{Im}(z) > 0, |z| = R_n\}$ de radios que tienden al infinito. Se supone $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} |f(z)| = 0$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\substack{\mathrm{Im}(z)>0 \\ |z|=R_n}} |f(z)| = 0$.) Demostrar (se usa $\mathrm{sen}(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$, para $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\substack{z=Re^{i\theta} \\ 0<\theta<\pi}} f(z) e^{iz}\, dz = 0, \quad \text{(o el análogo con los } R_n\text{)}.$$

Solución ▼ [002859]

Ejercicio 7657

Considerando la integral de $\frac{e^{iz}}{z}$ en un contorno que va de $-R$ a $+R$ a lo largo del eje real sin pasar por 0 por un pequeño semicírculo, luego que vuelve de $+R$ a $-R$ por el semicírculo en el semiplano superior, demostrar $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Solución ▼ [002860]

Ejercicio 7658

Determinar las integrales (semi-convergentes) de Fresnel $\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx$ y $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx$, considerando la integral de $\exp(-z^2)$ en el contorno $z = x$, $0 \leqslant x \leqslant R$, $z = R\exp(i\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $z = xe^{i\frac{\pi}{4}}$, $R \geqslant x \geqslant 0$. Se recuerda la identidad $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$.

Solución ▼ [002861]

Ejercicio 7659

¿Cuánto vale $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$? (Hacer un cambio de variable $t = \pi u^2$, para reducirse a la gaussiana). Considerando un contorno que pasa por el eje real, luego un cuarto de círculo, luego el eje imaginario, luego un pequeño cuarto de círculo evitando el origen para probar :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \exp(i\frac{\pi}{4}) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}dx,$$

y deducir los valores de las integrales $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ y $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$ (que solo son semi-convergentes). Comparar con las integrales de Fresnel. [002862]

Ejercicio 7660

Retomar el ejercicio previo y determinar para $0 < a < 1$, los valores de las integrales (semi-convergentes)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^a}dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^a}dx$$

usando la función Gama. Demostrar que estas integrales son solo semi-convergentes (*i.e.* no absolutamente convergentes). [002863]

Ejercicio 7661

Confirmar por el cálculo de los residuos el valor conocido (arctan... !) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Se aplica el teorema del residuo al contorno directo que forma el segmento $[-R,+R]$ y el semicírculo de radio R en el semiplano superior, para $R \to +\infty$. [002864]

Ejercicio 7662

Justificar $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$, para $\xi \in \mathbb{R}$. Demostrar mediante un cálculo residual

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|} .$$

Dependiendo del caso $\xi \geqslant 0$ o $\xi < 0$ se completa el segmento $[-R, +R]$ por un semicírculo en el semiplano superior, o inferior, de modo que la contribución del semicírculo tiende a 0, para $R \to \infty$. También se puede observar que la integral es una función par de ξ y que por lo tanto se puede limitar a $\xi \geqslant 0$. [002865]

Ejercicio 7663

Demostrar, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (\pi e^{-|\xi|}) d\xi = \frac{1}{1+x^2}.$$

Es suficiente evaluar separadamente $\int_{-\infty}^{0}$ y $\int_{0}^{\infty}$ utilizando el hace que exp es su propio primitiva (este cálculo no utiliza entonces la noción de función analítica ni el teorema de residuos). Se observa que se vuelve a caer a la función $1/(1+x^2)$, lo que no es por casualidad (fórmula de inversión para las transformaciones integrales de Fourier). [002866]

Ejercicio 7664

Determinar

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2+x^4} dx.$$

[002867]

Ejercicio 7665

Especificar por qué $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^4} dx$ es una integral convergente para $\xi \in \mathbb{R}$, es una función real y par de ξ, y usar un cálculo de residuos para establecer, para $\xi \geqslant 0$:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\xi/\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right).$$

¿Esta fórmula es válida para $\xi < 0$? [002868]

Ejercicio 7666

1. Determinar
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$
Para este cálculo, se considera el contorno llendo a lo largo del eje real de 0 a R, luego de R a jR a lo largo de un círculo, luego de jR a 0 por un segmento ($j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$). Se debe escribir por un lado, cada una de las tres contribuciones a la integral de contorno, teniendo cuidado con el sentido de recorrido, y se usa por otra lado, el teorema de residuos.

2. Se denota, para $|w| = 1$ y ciertos valores especiales de w (que se deben especificar) son excluidos, $J(w)$ la integral $\displaystyle\int \frac{dz}{1+z^3}$ a lo largo del segmento infinito $w\mathbb{R}^+$. Determinar $J(w)$ en función de w.

[002869]

Ejercicio 7667

1. Probar para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$:
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)},$$
utilizando el sector angular $0 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \frac{2\pi}{n}$, $0 \leqslant |z| \leqslant R$, $R \to +\infty$, y mostrando que la contribución del arco de un círculo, tiende a cero cuando $R \to +\infty$.
2. Demostrar, utilizando los contornos $\varepsilon \leqslant x \leqslant R$, $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{a})$, $z = re^{i\frac{2\pi}{a}}$ $(R \geqslant r \geqslant \varepsilon)$, $z = \varepsilon e^{i\theta}$ $(\frac{2\pi}{a} \geqslant \theta \geqslant 0)$:
$$a \in \mathbb{R},\ a > 1 \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a} = \frac{\pi/a}{\operatorname{sen}(\pi/a)}\ .$$
Para definir z^a como función holomorfa en $\{z = re^{i\alpha}\,|\,0 < r < \infty,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{a}\}$, se establece $z^a = r^a e^{ai\alpha} = \exp(a(\log r + i\alpha))$ (pues $\log r + i\alpha = \operatorname{Log}(ze^{-i\frac{\pi}{a}}) + i\frac{\pi}{a}$; no hay comentarios).
3. Sea $J(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^a}$; justificar que la integral definiendo $J(a)$ es convergente y analítica en función de a, para $\operatorname{Re}(a) > 1$ y probar $J(a) = \dfrac{\pi/a}{\operatorname{sen}(\pi/a)}$.
4. Ahora se define
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$$
para $0 < p < 1$. Justificar las identidades (para $0 < p < 1$) :
$$K(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{1/p}} = \frac{1}{p}J(\frac{1}{p}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}$$
5. Explicar por qué la integral $K(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}dt$ es convergente y analítica para p complejo con $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ y establecer la fórmula $K(p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}$, para $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$.
6. Dar una prueba simple directa de la fórmula $K(p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}$, para todo p complejo con $0 < \operatorname{Re}(p) < 1$ aplicando el teorema de residuos con contornos relacionados con las rectas $z = x$, $x \in \mathbb{R}$ y $z = x + 2\pi i$, $x \in \mathbb{R}$.
7. Deducir de lo anterior con $p = \frac{1}{2} + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\xi t)}{\operatorname{ch}(t/2)}dt = \frac{2\pi}{\operatorname{ch}(\pi\xi)},$$
Demostrar que la transformación de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x} f(x)\,dx$ aplicada a la función $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\pi x)}$ da simplemente $\widehat{f} = f$. (Nota : este es también el caso con $f(x) = e^{-\pi x^2}$).

8. Se vuelve a la fórmula general $K(p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}$. Al separar las partes real e imaginaria en $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$ determinar (simplificando lo más posible) los valores de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\cos(vt)}{1+e^t} dt, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ut}\operatorname{sen}(vt)}{1+e^t} dt \ ,$$

para $0 < u < 1$, $v \in \mathbb{R}$.

Solución ▼ [002879]

Ejercicio 7668

Determinar $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+e^{ix})} dx.$ [002880]

Ejercicio 7669

Determinar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \frac{x-i}{x+i} \frac{1}{x^2+1} dx.$ [002881]

Ejercicio 7670

Determinar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x^2+1)} dx.$ [002882]

Ejercicio 7671

1. Demostrar que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1, \\ 0 & n = 2,3,4,\dots \end{cases}$$

γ es una curva simple cerrada teniendo a en su interior y orientada positivamente.

2. ¿Cuál es el valor de la integral si $n = 0, -1, -2, \dots$?

[006587]

Ejercicio 7672

Evaluar

$$\int_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} dz$$

donde γ es una curva cerrada simple cualquiera encerrando $z = 1$ y orientada positivamente. [006588]

Ejercicio 7673

Evaluar

$$\text{a)} \int_\gamma \frac{\cos z}{z-\pi} dz, \qquad \text{b)} \int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)} dz,$$

donde (i) γ es el círculo positivo $\{z; |z-1| = 3\}$, (ii) γ es el círculo positivo $\{z; |z-1| = 2.1\}$. [006589]

Ejercicio 7674

Evaluar

1. $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$,

2. $\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$,

donde γ es el círculo positivo $\{z; |z| = 3\}$. [006590]

Ejercicio 7675

Demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[006591]

Ejercicio 7676

Localizar las singularidades de cada una de las siguientes funciones y caracterizarlas.

1. $\frac{z^2}{(z+1)^3}$, 2. $\frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$, 3. $\frac{\operatorname{sen} mz}{z^2+2z+2}$,

4. $\frac{1-\cos z}{z}$, 5. $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$.

[006592]

Ejercicio 7677

Encontrar la serie de Laurent con respecto a las singularidades indicadas para cada una de las siguientes funciones. Caracterizar la singularidad en cada caso y dar el dominio de convergencia de cada serie.

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z = 1$, 2. $z \cos \frac{1}{z}$, $z = 0$, 3. $\frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi}$, $z = \pi$, 4. $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -1$.

[006593]

Ejercicio 7678

Determinar los residuos de cada una de las siguientes funciones, en el polo indicado.

1. $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $z = 2$, $z = i$, $z = -i$, 2. $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $z = 0$, $z = -2$,

3. $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, $z = 3$, 4. $\operatorname{cotg} z$, $z = -5\pi$.

[006594]

Ejercicio 7679

Encontrar la serie de Laurent de $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, con respecto a sus polos. [006595]

Ejercicio 7680

Evaluar

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$$

donde γ es el círculo positivo dado por 1. $|z| = \frac{3}{2}$, $|z| = 10$. [006596]

Ejercicio 7681

Evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\operatorname{sen}\theta}.$$

[006597]

Ejercicio 7682

Estudio de la función holomorfa $f(z) = \cos z$.

1. Encontrar la imagen de una recta $x = c$.
2. Encontrar la imagen de una recta $y = c$.
3. Encontrar un abierto maximal U tal que la restricción de f a este abierto sea inyectiva.
4. Encontrar un dominio de definición maximal para la función recíproca, arccos.
5. Verificar que entre las ramas de arccos existen dos que se escriben en la forma $\arccos(w) = \pm i \operatorname{Log}(w + \sqrt{w^2-1})$.
6. Encontrar todas las ramas de la función arccos.

[006598]

Ejercicio 7683

Verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$

[006599]

Ejercicio 7684

Determinar las singularidades de la función $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ y clasificarlas. [006600]

Ejercicio 7685

Demostrar que

1. $\mathscr{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$
2. $\mathscr{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
3. $\mathscr{L}(e^{at})(s) = \dfrac{1}{s-a}$
4. $\mathscr{L}(\operatorname{sen} at)(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
5. $\mathscr{L}(\cos at)(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

6. $\mathscr{L}(U_a)(s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$, donde $U_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant a, \\ 0, & t < a,\ a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0. \end{cases}$

Especificar los dominios de definición de estas transformadas de Laplace. [006601]

Ejercicio 7686

1. Calcular los residuos en los diferentes polos de la función $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$; $f(z) = \dfrac{1}{1+z+\cdots+z^{n-1}}$; $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$.
2. Demostrar que si $f(z) = (z-a)^{-n}g(z)$, donde g es holomorfa en Ω abierto conteniendo a, entonces $\operatorname{Res}(f,a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.

   Encontrar los polos y residuos de las siguientes funciones : $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$, $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$.

[006742]

Ejercicio 7687 Integrales de funciones trigonométricas

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\, dt$ (usar $z = e^{it}$). [006743]

Ejercicio 7688 Integrales de fracciones racionales sin polos en $\mathbb{R}$

1. Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $n \geqslant 2$, integrando $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$ en un semi-círculo.
2. Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

[006744]

Ejercicio 7689 Utilización del logaritmo

1. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, integrando $\dfrac{\log z}{1+z^3}$ en un círculo privado de $\mathbb{R}^+$, log designando aquí la determinación del logaritmo con un corte en $\mathbb{R}^+$.
2. Escogiendo la misma determinación del logaritmo y el mismo contorno, calcular simultáneamente las integrales $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$ y $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^4}\, dx$. (Integrar esta vez $\dfrac{(\log z)^2}{1+z^4}$.)
3. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{1+x^n}\, dx$, $n \geqslant 2$, integrando $\dfrac{\log z}{1+z^n}$ en un sector despuntado bien elegido.

[006745]

Ejercicio 7690 septiembre 1999

Sea a un real tal que $0 \leqslant a < 1$

1. Demostrar que las integrales $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(x)}\, dx$ y $J(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)}\, dx$ son convergentes.
2. Sea ε y R de reales tales que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} < R$, $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}$ el compacto obtenido al quitar del rectángulo de vértices $R, R + i\frac{\pi}{2}, R + i\frac{\pi}{2}, -R$, la semi-bola abierta de centro 0 y de radio ε, y $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z - e^{-z}}$.
   (a) Demostrar que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 0$, cuando γ es el segmento $[R, R + i\frac{\pi}{2}]$; luego el segmento $[-R + i\frac{\pi}{2}, -R]$.
   (b) Calcular $\displaystyle\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz$ y el límite cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$; deducir las expresiones de $I(a)$ y $J(a)$.

[006746]

Ejercicio 7691

Sea a un real > 0 y $\operatorname{Log} z$ la determinación principal del log en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Al integrar la función $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)\operatorname{Log} z}$ en un contorno $\Gamma_{\varepsilon,R}$ constituido por el círculo de radio R evitando el semi-eje $\mathbb{R}^-$, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\operatorname{Ln}^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a(\operatorname{Ln}^2 a + \pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

[006747]

Ejercicio 7692 Cálculo de integrales semi-convergentes

1. Calcular $\displaystyle\int_\mathbb{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ integrando $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ en un contorno bien elegido.
2. Calcular igualmente $\displaystyle\int_\mathbb{R} \frac{x^2-1}{x^2+1}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

[006748]

Ejercicio 7693 Cálculo de transformadas de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de $\dfrac{1}{1+x^4}$ integrando $\dfrac{e^{itz}}{1+z^4}$ en un semi-círculo, en un semiplano bien elegido.
2. Calcular $I(m,a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)(x^2+a^2)}\, dx$ distinguiendo los casos $a = 1, a \neq 1$. Verificar que $I(m,1) = \displaystyle\lim_{a\to 1} I(m,a)$. Deducir sin nuevos cálculos el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} mx}{(1+x^2)^2}\, dx$.

[006749]

Ejercicio 7694

Sea P y Q dos polinomios tales que $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P$.

1. Expresar $\sum \operatorname{Res}(\frac{P}{Q})$ utilizando los coeficientes de P y Q.

2. Sea $P(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_k z^k$ un polinomio cuyas raíces están todas en $D(0,R)$. Demostrar que $f(x) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{xz}}{P(z)}\, dz$ es la solución de la ecuación diferencial de orden n, $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ de condición inicial $y^{(j)}(0) = 0$ si $j < n-1$ y $y^{(n-1)}(0) = 1$.

[006750]

Ejercicio 7695

Calcular

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t},\ (a > 1);$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2},\ (a > b > 0);$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t}{1 - 2a\cos t + a^2}\, dt,\ (a \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\});$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(\cos t)\cos(nt - \operatorname{sen} t)\, dt,\ (n \in \mathbb{Z}).$

[006751]

Ejercicio 7696

En este ejercicio, se justifica cuidadosamente cada pasaje al límite. Calcular las integrales :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6}\, dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1 + x)}\, dx,\ 0 < \alpha < 1.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx$ (se puede considerar la función $\dfrac{1 - e^{2ix}}{x^2}$).
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx$ (se puede usar el rectángulo de vértices $-R$, R, $R + i\pi$, $-R + i\pi$).
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}^2 x}{1 + x^2}\, dx.$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(1 + x)^3}\, dx.$

[006752]

Ejercicio 7697

Sea $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$. Demostrar que f tiene tres de sus ceros en el disco $D(0,1)$ y todos sus ceros en el disco $D(0,3)$. [006753]

Ejercicio 7698

Sea c un número complejo verificando $|c| > e$. Demostrar que la ecuación $e^z = cz$ tiene una solución y solo una en $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} e^z < 1\}$. (Se puede considerar $D_r = H \cap D(1,r)$, con $r \geqslant 2$ y las funciones $e^z - cz$ y $-cz$.) [006754]

Ejercicio 7699

Utilizando el teorema de Rouché, demostrar el teorema de d'Alembert. [006755]

Ejercicio 7700

Sea $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $n \geqslant 1$, $a_j \in \mathbb{C}$. Demostrar que existe un punto c de $\partial D(0,1)$ tal que se tiene $|P(c)| \geqslant 1$. [006756]

Ejercicio 7701

Demostrar que, si f es holomorfa en un vecindario de $\overline{D(0,1)}$ y si $f(\partial D(0,1)) \subset D(0,1)$, entonces existe un z_0 y solo uno en $D(0,1)$ tal que se tiene $f(z_0) = z_0$. [006757]

Ejercicio 7702

Utilizando el teorema de Rouché, se propone dar una prueba del teorema de inversión local "holomorfa" no usando el teorema de inversión local en $\mathbb{R}^2$. Sea así f una función holomorfa en un vecindario de un punto z_0 de $\mathbb{C}$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Se supone sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$, $f(z_0) = 0$, y $f'(z_0) = 1$.

1. Demostrar que existe un vecindario V de z_0 y una constante $K > 0$ tal que se tiene, para todo z en V, $|f(z) - z| \leqslant K|z^2|$.
2. Demostrar que existe $r > 0$ tal que, si se tiene $|\alpha| < r/2$, la ecuación $f(z) = \alpha$ tiene una única solución en el disco $D(0,r)$.
3. Demostrar en fin que existe un abierto U de $\mathbb{C}$ tal que f sea una biyección de U en el disco $D(0,r/2)$.
4. Deducir que $g = f^{-1}$ es continua en el disco $D(0,r/2)$ y, de ahí, que g es holomorfa en este disco.

[006758]

Ejercicio 7703

Se considera la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

1. Demostrar que esta serie converge normalmente en todo compacto K de $\mathbb{C}$. Deducir que $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Verificar que se tiene $f(z+1) = f(z)$.
2. Determinar el residuo de f en cada uno de sus polos. Demostrar que, si se denota $z = x + iy$, $f(z)$ tiende a 0, uniformemente con respecto a x, cuando $|y|$ tiende a ∞.
3. Demostrar que $f(z) = \left(\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right)^2$. (Se puede usar el teorema de Liouville.) Deducir que se tiene $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

[006759]

Ejercicio 7704

Sea γ_n el camino cuya imagen γ_n^* es el rectángulo de vértices $\pm(n+\frac{1}{2}) \pm in$ recorrido una vez en el sentido directo. Evaluar para $a \notin \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_n} \frac{\pi \cotan(\pi z)}{(z+a)^2}\, dz.$$

Demostrar que se tiene
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\frac{\pi\cot an(\pi z)}{(z+a)^2}\,dz=0.$$
(Se puede establecer previamente que, si z pertenece a γ_n^* y si n es bastante grande, se tiene $|\operatorname{cotan}(\pi z)|\leqslant 2$.)

Deducir (cf. Ejercicio 7703) que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(a+n)^2}=\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)}\right)^2.$ [006760]

Ejercicio 7705

Sea α un real tal que $-1<\alpha<2$, y sea $f:\mathbb{C}\setminus\{it\mid t\in]-\infty,0]\}$ definida por
$$f(z)=\frac{e^{iz}e^{\alpha\log z}}{1+z^2}$$
donde $\log z$ designa la rama uniforme del logaritmo complejo que es real para z real estrictamente positivo, con $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$.

1. Demostrar que, para todo θ tal que $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, se tiene : $0\leqslant 2\theta/\pi\leqslant\operatorname{sen}\theta\leqslant\theta$.
2. Sea γ_ε el semi-círculo de radio $\varepsilon>0$, de centro 0, ubicado en el semi-plano Im $z\geqslant 0$. Demostrar que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)\,dz=0$.
3. Sea γ_R el semi-círculo de radio $R>0$, de centro 0, ubicado en el semi-plano $\operatorname{Im}z\geqslant 0$. Demostrar que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=0$.
4. Integrando f en el borde del dominio $\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$, $0\leqslant\arg(z)\leqslant\pi$, deducir de esto que precede, que la integral
$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{x^\alpha\cos(x-\frac{\alpha\pi}{2})}{1+x^2}\,dx$$
es convergente y al mismo tiempo calcular su valor.

[006808]

Ejercicio 7706

Sea a un real tal que $0\leqslant a<1$.

1. Demostrar que las integrales $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(ax)}{\sinh x}\,dx$ y $J(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cosh(ax)}{\cosh x}\,dx$ son convergentes (sinh y cosh denotan los senos y cosenos hiperbólicos).
2. Sea ε y R de reales tales que $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}<R$, sea $f(z)$ la función $f(z)=\dfrac{e^{az}}{e^z-e^{-z}}$ y sea $K_{\varepsilon,R}\subset\mathbb{C}$ el compacto obtenido al quitar la semi-bola abierta de centro 0 y de radio ε del rectángulo de vértices R, $R+i\frac{\pi}{2}$, $-R+i\frac{\pi}{2}$, $-R$.
   (a) Demostrar que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma f(z)\,dz=0$, cuando γ es
   (i) el lado del rectángulo que une R a $R+i\frac{\pi}{2}$ y
   (ii) el lado del rectángulo que une $-R+i\frac{\pi}{2}$ a $-R$.
   (b) Calcular el residuo de f en 0.
   (c) Del cálculo de la integral de f a lo largo del borde orientado de $K_{\varepsilon,R}$ y su límite cuando $\varepsilon\to 0$ y $R\to+\infty$, deducir $J(a)$ y $I(a)$.

Ejercicio 7707 Para aprender el curso

1. Sea $I=[a,b]$ $(a<b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\phi : I \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Demostrar que
$$\left|\int_a^b \phi\right| \leqslant \int_a^b |\phi|.$$
Se puede considerar un número complejo c tal que $\left|\int_a^b \phi\right| = c\int_a^b \phi$.
2. Verificar que la relación definida sobre los caminos parametrizados por $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ si existe una biyección $\alpha : J \to I$ derivable con derivada continua y en todas partes estrictamente positiva tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ es una relación de equivalencia.
3. Dar un ejemplo de D un abierto de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación continua, I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\gamma_1 : I \to D$ una aplicación continua, J un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\alpha : J \to I$ una aplicación continua biyectiva y $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ tales que
$$\int_I f(\gamma_1(t))dt \neq \int_J f(\gamma_2(\tau))d\tau.$$
4. Dar un ejemplo de una función $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y de dos caminos Γ_1 y Γ_2 del mismo origen y fin, tales que
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz \neq \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$
5. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación continua, Γ un camino en D. ¿Se tiene
$$\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma f(z)dz\right) = \int_\Gamma \mathrm{Re}(f(z))dz?$$

[007554]

Ejercicio 7708 Cálculo de integrales

Se parametriza el círculo C_r de centro 0 y de radio $r>0$ orientado en la dirección contraria a las manecillas del reloj del plano complejo definiendo para $t\in\mathbb{R}$, $\xi(t)$ como el punto de intersección de la recta de ecuación $y=t(x+r)$, con el círculo C_r diferente de $-r$.

1. Demostrar que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.
2. Verificar que ξ es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.
3. Deducir que
$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$
4. Deducir que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

[007555]

Ejercicio 7709 Cálculos

1. Se considera el borde $\mathscr{C}$ del triángulo de vértice : $z=0$, $z=1$, y $z=i$, orientado en el sentido directo. Calcular las integrales $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} x dz$ y $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} z\mathrm{e}^{z} dz$.
2. Sea el círculo unidad $\mathscr{C}$ recorrido en el sentido directo. Para todo entero relativo n, calcular la integral $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} z^n dz$. Explicar el caso particular donde $n=-1$.
3. Demostrar $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$, cuando $\gamma(t)=2\mathrm{e}^{it}$, $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$.
4. Demostrar $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z} dz\right| \leqslant \pi e$, cuando $\gamma(t)=\mathrm{e}^{it}$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.

[007556]

Ejercicio 7710 Integral elíptica

Sean dos números reales estrictamente positivos a y b, se establece $\gamma = a\cos(t)+ib\operatorname{sen}(t)$, para $t\in[0,2\pi]$. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deducir : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\operatorname{sen}^2(t)}$. [007557]

Ejercicio 7711 Existencia de primitivos

Sea $D := \mathbb{C}\setminus[0,1]$ y $f : D\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \frac{1}{z(z-1)}$.

1. ¿D es un abierto estrellado ?
2. ¿La función $F : z\mapsto \log(1-\frac{1}{z})$ es bien definida y es continua en D ?
3. Demostrar que para todo camino orientado Γ de D, $\displaystyle\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

[007558]

Ejercicio 7712 Lema de Goursat

Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D\to\mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Sea T un triángulo (completo) incluido en el dominio D. Se denota p su perímetro. El propósito del ejercicio es demostrar que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

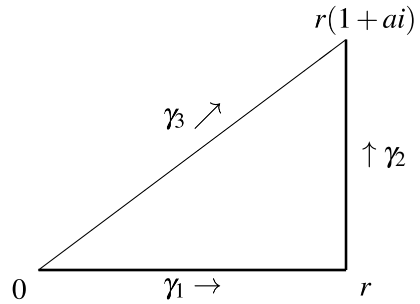
1. Considerando los cuatro triángulos obtenidos al trazar los segmentos entre dos puntos medios de lados de T, demostrar que para uno de estos triángulos denotados T_1,
$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leqslant \left|4\int_{\partial T_1} f(z)dz\right|.$$
2. Iterando esta construcción, demostrar que para todo n, existe un triángulo $T_n\subset T_{n-1}$ de perímetro $\frac{p}{2^n}$ tal que
$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial T_1} f(z)dz\right|.$$
3. Demostrar que la intersección de los T_n es un punto c de D.
4. Demostrar que existe una función continua h sobre D nula en c tal que para todo $z\in D$,
$$f(z) = f(c)+(z-c)f'(c)+(z-c)h(z).$$

5. Calcular $\int_{\partial T_n} f(c)dz$ y $\int_{\partial T_n} (z-c)f'(c)dz$.
6. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $n \geqslant N$,
$$\int_{\partial T_n} (z-c)h(z)dz| \leqslant \left(\frac{p}{2^n}\right)^2 \varepsilon.$$
7. Concluir.
8. Demostrar eligiendo un desglose de T, con un pequeño triángulo alrededor a que si $f : D \to \mathbb{C}$ es una aplicación continua y holomorfa en $D \setminus \{a\}$, entonces para todo triángulo con vértice a en D, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

[007559]

Ejercicio 7713 Cálculo de integrales por camino cerrado

Sea a un número real tal que $|a| \leqslant 1$. Se considera la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$ y para todo real estrictamente positivo r, los siguientes caminos en el plano complejo



1. Calcular $\int_{\gamma_1} f(z)dz$.
2. Demostrar que $\int_{\gamma_2} f(z)dz| \leqslant \frac{1}{r}$.
3. Deducir
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+ai)^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{1+ia}.$$
4. Deducir los valores de las integrales $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{sen}(t^2)dt$.

[007560]

Ejercicio 7714 Cálculo de integrales por la fórmula integral de Cauchy

Calcular
$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-3)^2} dz \quad \int_{\partial\Delta_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)} dz \quad \text{y} \quad \int_{\partial\Delta_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z-3)^2} dz.$$

[007561]

Ejercicio 7715 Cálculo de integrales y teorema de Liouville

1. Sea $r > 0$ y D un vecindario abierto de $\overline{\Delta_r}$. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea a y b dos puntos distintos en Δ_r. Calcular
$$\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)} d\zeta.$$

2. Deducir el teorema de Liouville : Toda función holomorfa acotada en $\mathbb{C}$ es constante.

[007562]

Ejercicio 7716

1. Determinar todas las funciones holomorfas definidas en todo el plano complejo que satisfagan : $|f(z)| \geqslant 1$.
2. Se considera una función f holomorfa en el disco unitario, verificando $|f(z)| \leqslant 1$, ¿qué se puede decir de $|f'(0)|$?
3. Sea n_0 un número entero natural y f una función holomorfa definida en todo el plano complejo que satisface $|f(z)| \leqslant |z|^{n_0}$. Demostrar que f es un polinomio de grado a lo sumo n_0.
4. Sean Ω un abierto conexo y D una recta, f una función continua en Ω, holomorfa en restricción $\Omega \setminus \{D\}$. Demostrar que f se extiende a una función holomorfa en todo Ω.

[007563]

Ejercicio 7717 Propiedad

Sean dos funciones g y h holomorfas en un abierto conexo del plano complejo, a un polo de g/h tal que $h(a) = 0$ y $h'(a)$ sea no nulo. Demostrar que :

$$\operatorname{Res}\left(a, \frac{g}{h}\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

[007577]

Ejercicio 7718 Cálculo de residuos

1. ¿La aplicación $\cot(\pi z) := \dfrac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ es meromorfa ? Si es sí, determinar sus residuos.
2. Calcular los residuos en todos los polos de

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \quad \text{ y } \quad g(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}.$$

[007578]

Ejercicio 7719 Cálculo de integrales

1. Demostrar que

$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{dz}{\operatorname{sen}^2 z \cos z} = 0.$$

2. Calcular las siguientes integrales, donde caminos simples cerrados γ se recorren en el sentido directo.
   (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz$, donde $\gamma = \partial\Delta_{\frac{1}{2}}(2)$ es el círculo centrado en 2 radio $\frac{1}{2}$;
   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2(z-9)^2} dz$, donde $\gamma = \partial\Delta$ es el círculo centrado en el origen de radio 1.

[007579]

Ejercicio 7720 Suma de residuos

Sea $f(z)$ una función racional, cociente de un polinomio $P(z)$ por un polinomio $Q(z)$. Se supone que $\operatorname{grad} P + 2 < \operatorname{grad} Q$. Demostrar que

$$\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_c(f) = 0.$$

[007580]

Ejercicio 7721 Cálculo de integrales trigonométricas

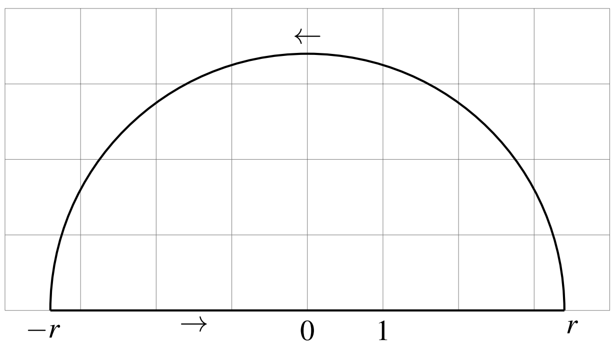
1. Sea a un número complejo de módulos diferentes de 1. Demostrar que
$$i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$
2. Determinar los residuos de los polos de $\dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$ contenidos en el disco unitario abierto.
3. Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$.

[007581]

Ejercicio 7722 Cálculo de integrales racionales

Se considera la función meromorfa $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ sobre $\mathbb{C}$.

1. Demostrar que $zf(z)$ tiene un límite cuando $|z|$ tiende a $+\infty$.
2. Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ converge.
3. Determinar los polos de f contenidos en el semiplano $\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ y sus residuos.
4. Integrando sobre el camino Γ definido por



demostrar que
$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\partial(\Delta_r\cap\mathbb{H})} f(z)dz = 2i\pi\sum_{c\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_c(f).$$
5. Demostrar que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

[007582]

Ejercicio 7723 Restricciones

1. Demostrar que el polinomio $f(z) = 3 + 7z + 2z^4$ tiene, como el polinomio $3 + 7z$, exactamente un cero en Δ.
2. Determinar el número de ceros (contado con multiplicidad) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ en Δ.
3. Determinar el número de ceros (contado con multiplicidad) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ en $\Delta_{\frac{1}{2}}$.
4. Determinar el número de ceros del polinomio $z^4 - 5z - 1$ en la corona $1 < |z| < 2$.

[007583]

322 445.00 Transformada de Laplace y de Fourier

Ejercicio 7724

Calcular las transformadas de Laplace de las siguientes funciones, donde a, b, A, T son números reales positivos.

1. $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a}t, & 0 \leqslant t \leqslant a \\ A, & t \geqslant a. \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} nA, & \text{para } (n-1)T \leqslant t < nT, \text{ donde } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \text{ es decir} \\ A, & 0 \leqslant t < T \\ 2A, & T \leqslant t < 2T, \text{ etc.} \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T}t, & 0 \leqslant t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4A}{T}t + 2A, & \frac{T}{4} \leqslant t < \frac{3}{4}T \\ \frac{4A}{T}t - 4A, & \frac{3}{4}T \leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T. \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < a \\ A, & a \leqslant t < a + b \\ -A, & a + b \leqslant t < a + 2b \\ 0, & t \geqslant a + 2b. \end{cases}$

[006602]

Ejercicio 7725

La transformada de Laplace de la "función" impulso de Dirac : Para $\varepsilon > 0$, se establece

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases}.$$

1. Encontrar $\mathscr{L}(F_\varepsilon)$.
2. Demostrar que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}(F_\varepsilon) = 1$.

Ejercicio 7726

Calcular la transformada de Laplace de la función F, donde $a, b, \omega, k \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$:

1. $F(t) = a \operatorname{sen} \omega t$,
2. $F(t) = a(1 - \mathrm{e}^{-bt})$,
3. $F(t) = a\cos(bt - k)$. N.B. Aquí la fórmula que expresa la transformada de Laplace de la función

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$$

en función de la de F no se aplica a (3). ¿Porqué no?

[006604]

Ejercicio 7727

Verificar las siguientes propiedades de la transformada de Laplace $\mathscr{L}$:

1. $\mathscr{L}(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1\mathscr{L}(F_1) + c_2\mathscr{L}(F_2)$.
2. $\mathscr{L}(\mathrm{e}^{at}F(t))(s) = (\mathscr{L}F)(s-a)$.
3. Para $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t \leqslant a, \end{cases}$ se tiene $(\mathscr{L}G)(s) = \mathrm{e}^{-as}(\mathscr{L}F)(s)$ $(a \geqslant 0)$.
4. Para $F_a(t) = F(at)$ se tiene $(\mathscr{L}F_a)(s) = \frac{1}{a}(\mathscr{L}F)(\frac{s}{u})$.
5. Para $G(t) = \displaystyle\int_0^t F(u)du$ se tiene $(\mathscr{L}G)(s) = \frac{(\mathscr{L}F)(s)}{s}$.
6. $\mathscr{L}(t^nF(t)) = (-1)^n(\mathscr{L}F)^{(n)}$
7. Si $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ existe, $\mathscr{L}(\frac{F(t)}{t})(s) = \displaystyle\int_s^\infty (\mathscr{L}F)(\zeta)d\zeta$.
8. Si F es periódica, $F(t+T) = F(t)$, entonces

$$(\mathscr{L}F)(s) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T F(t)\mathrm{e}^{-st}dt.$$

9. $\lim\limits_{s\to+\infty}(\mathscr{L}F)(s) = 0$.
10. $\lim\limits_{s\to+\infty}(\mathscr{L}F)(s) = 0$.
11. $\lim\limits_{t\to 0, t>0} F(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s(\mathscr{L}F)(s)$ si los límites indicados existen (Teorema del valor inicial).
12. $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{s\to 0} s(\mathscr{L}F)(s)$ si los límites indicados existen (Teorema del valor final).

[006605]

Ejercicio 7728

Encontrar todas las soluciones Y de la ecuación diferencial

$$tY'' + 2Y' + tY = 0, \quad Y(0) = 1,$$

definidas en la recta real entero (i. e. $D_Y = \mathbb{R}$). [006606]

Ejercicio 7729

Estudiar la convergencia de las series

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{e^{inx}}{n!}.$$

[006607]

Ejercicio 7730

Calcular los coeficientes de Fourier de la función periódica f, definida en $[-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \pi - |x|, \quad |x| \leqslant \pi.$$

Estudiar la convergencia de la serie de Fourier resultante. ¿Es absoluta o tal vez uniforme? Deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [006608]

Ejercicio 7731

1. Encontrar los coeficientes de Fourier en sen y cos de la función periódica F, dada en $]-5, 5[\setminus\{0\}$ por
$$F(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}.$$
2. Verificar que F satisface las condiciones de Dirichlet. ¿Cómo debe F estar definida en $x = -5, 0, 5$, para que la serie de Fourier converja hacia $F(x)$, para todo $x \in [-5, 5]$?

[006609]

Ejercicio 7732

Desarrollar la función periódica F, dada en $]-2, 2[$ por $F(x) = x$ (función diente de sierra), en serie trigonométrica. [006610]

Ejercicio 7733

1. Calcular la transformada de Fourier de la función de puerta simétrica
$$f(x) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$
2. Verificar que f satisface las condiciones de Dirichlet. ¿Cómo debe f estar definida en $x = \pm\frac{\tau}{2}$ de modo que la integral de Fourier converge a $f(x)$, para todo x?

[006611]

Ejercicio 7734

1. Utilizar los resultados del ejercicio 7733 para evaluar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} a\lambda \cos b\lambda}{\lambda} d\lambda.$$
2. Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du.$

[006612]

Ejercicio 7735

1. Encontrar la transformada de Fourier del coseno de $f(x) = \mathrm{e}^{-m|x|},\ m > 0.$
2. Utilizar el resultado de 1. para demostrar que, para $p > 0,\ \beta > 0,$
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos pv}{v^2 + \beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} \mathrm{e}^{-p\beta}.$$

[006613]

Ejercicio 7736

Encontrar una función f de manera que se verifica la siguiente ecuación integral :
$$\int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

[006614]

Ejercicio 7737

Demostrar que, para $x \geqslant 0,$
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-x}.$$

[006615]

Ejercicio 7738

Evaluar

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2},$
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2},$ aplicando la identidad de Parseval.

[006616]

Ejercicio 7739

Calcular la transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}(f)$, para :

1. $f(s) = \dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$ 2. $f(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ 3. $f(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
4. $f(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)^2(s^2+4s+5)}$ 5. $f(s) = \dfrac{1}{(s+3)(s+4)}$ 6. $f(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$
7. $f(s) = \dfrac{s+1}{s^2+4s+16}$

[006617]

Ejercicio 7740

Sean a, x de números reales, $0 < x < a$, y se escribe $f(s) = \frac{\operatorname{sh} sx}{s^2 \operatorname{ch} su}$. Determinar $\mathscr{L}^{-1}(f)$. [006618]

Ejercicio 7741

Resolver la ecuación en derivadas parciales :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x < \ell,\ t \geqslant 0,$$

con las condiciones iniciales siguientes :

$$Y(x,0) = 0,\ Y_t(x,0) = 0,\ Y(0,t) = 0,\ Y_x(\ell,t) = \frac{F_0}{E} \text{ (i.e. constante).}$$

[006619]

323 446.00 Otro

Ejercicio 7742

El propósito de este problema es establecer las dos fórmulas importantes :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} + \lim_{\substack{N \to +\infty \\ M \to +\infty}} \sum_{\substack{-M \leqslant n \leqslant N \\ n \neq 0}} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \operatorname{sen}(\pi z) = \lim_{N \to \infty} \pi z \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

1. Demostrar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$ (observar las sumas parciales para los índices pares).
2. Se define $f(w) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi w}$. Sea $z \notin \mathbb{Z}$ fijado, sea $N > |z| - \frac{1}{2}$ y $\mathscr{R}_N$ el cuadrado $\{|x| \leqslant N + \frac{1}{2},\ |y| \leqslant N + \frac{1}{2}\}$, y $C_N = \partial \mathscr{R}_N$ su borde recorrido en el sentido directo. Expresar $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw$, con ayuda del Teorema de residuos.
3. Demostrar $\int_{C_N} \frac{f(w)}{w} dw = 0$ (se denota que f es impar) y deducir :
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi w} \frac{z}{w(w-z)} dw$$
4. Se recuerda la identidad $\operatorname{sen}(w) = \operatorname{sen}(x) \operatorname{ch}(y) + i \cos(x) \operatorname{sh}(y)$, para $w = x + iy$. Demostrar $|\operatorname{sen} w|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ ($x, y \in \mathbb{R} \ldots$). Deducir $|\operatorname{sen}(\pi w)| = \operatorname{ch}(\pi y) \geqslant 1$ en los bordes verticales del cuadrado y $|\operatorname{sen}(\pi w)| \geqslant \operatorname{sh}(\pi(N + \frac{1}{2})) \geqslant \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.301 \ldots \geqslant 1$ en los bordes horizontales. Concluir la prueba de
$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$$
con convergencia uniforme para $|z|$ acotado.

5. Repetir la misma técnica y demostrar :
$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \quad \frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},$$
con convergencia uniforme para $|z|$ acotado.
6. Ahora se quiere demostrar : $\operatorname{sen}(\pi z) = \lim\limits_{N\to\infty} \pi z \prod\limits_{n=1}^{N}(1-\frac{z^2}{n^2})$. Se fija de una vez por todas $R>0$, y se va a demostrar la fórmula para $|z|<R$. Sea N, con $N>R$ y se denota $f_N(z) = \dfrac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)}\prod\limits_{n=1}^{N}(1-\dfrac{z^2}{n^2})$, extendida por continuidad en los n, $|n|\leqslant N$. Demostrar que f_N es holomorfa y no se anula en $D(0,R)$.
7. Sea $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}^*$ el camino $\gamma(t)=f_N(tz)$. Se tiene entonces $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=f_N(z)$,y $\gamma(t)\neq 0$, para todo t. Por un teorema demostrado en clase (¿cuál ?) se tiene $\gamma(1)=\gamma(0)\exp\left(\int_\gamma \frac{dw}{w}\right)$. Deducir $f_N(z)=\exp\left(\int_0^1 \frac{f_N'(tz)}{f_N(tz)}z dt\right)$.
8. Sea $\varepsilon>0$. Usando convergencia uniforme para $|z|$ cota del desarrollo en fracciones de $\pi\operatorname{cotg}(\pi z)$, demostrar que para N suficientemente grande, se tiene $|f_N'(w)|\leqslant\varepsilon|f_N(w)|$, para todo $w\in D(0,R)$, luego deducir
$$N\gg 0,\ \ |z|<R \implies |f_N(z)|\leqslant e^{\varepsilon|z|}\leqslant e^{\varepsilon R}.$$
9. Deducir $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(z)=1$, uniformemente en $D(0,R)$. Concluir la prueba del producto infinito de Euler para $\operatorname{sen}(z)$.

[002870]

Ejercicio 7743 Producto absolutamente convergente

Sea u_n, $n\geqslant 1$ de números complejos. Demostrar : $1+\sum\limits_{n=1}^{N}|u_n|\leqslant\prod\limits_{n=1}^{N}(1+|u_n|)\leqslant e^{\sum_{n=1}^{N}|u_n|}$. Deducir que la sucesión creciente $\prod\limits_{n=1}^{N}(1+|u_n|)$ tiene un límite finito si y solo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|<\infty$. Se supone ahora que estamos en este caso, y además $\forall n,\ 1+u_n\neq 0$. Demostrar entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+u_n)|<\infty$, y deducir que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ converge. Se acuerda así decir que $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ es “absolutamente convergente” si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|<\infty$, y acabamos así de demostrar que un producto absolutamente convergente es convergente. Es principalmente, lo único que se debe saber sobre este tema. [002871]

Ejercicio 7744

¿Para qué valores de p (real) $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+k^{-p})$ converge ? [002872]

Ejercicio 7745

Se admite que $\operatorname{sen}(\pi z)=\pi z\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, demostrar :
$$\operatorname{sen}(\pi z)=\pi z\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}$$

y justificar la convergencia absoluta del producto. [002873]

Ejercicio 7746

Se admite $\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$, demostrar :

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \lim_{N\to\infty} \prod_{\substack{k=-N \\ k\neq 0}}^{+N} \frac{z-k}{-k},$$

luego establecer para todo $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{sen}(\pi(z-\alpha)) = -\operatorname{sen}(\pi\alpha) \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{+N} \left(1 - \frac{z}{\alpha+k}\right)$$

Demostrar que el resultado es válido si se reemplaza en el producto $-N$ por $-N\pm 1$ o $+N$ por $+N\pm 1$. Deducir :

$$\cos(\pi z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\frac{1}{2}+k)^2}\right)$$

con un producto absolutamente convergente. [002874]

Ejercicio 7747

Se recuerda la fórmula $\pi \operatorname{cotg}(\pi\alpha) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{\alpha-k}$, para $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Demostrar :

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi(\alpha-z))}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} = \mathrm{e}^{-\pi\operatorname{cotg}(\pi\alpha)z} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha+k}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\alpha+k}},$$

con un producto absolutamente convergente. [002875]

Ejercicio 7748

Establecer la convergencia y evaluar los productos infinitos siguientes :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right), \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right), \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2},$$

los tres primeros se obtienen por reordenamientos simples. Para el último, utilizar el producto infinito de $\operatorname{sen} z$. [002876]

Ejercicio 7749

Se supone $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^2 < \infty$. Demostrar que las dos series $\sum u_n$ y $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ son ya sea las dos convergentes o ya sea las dos divergentes (se supone $\forall n\ u_n \neq -1$). Entonces si $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|^2 < \infty$ el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ es convergente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. [002877]

Ejercicio 7750

Demostrar que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{i}{k})$ diverge mientras que $\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{k}\right|$ converge. [002878]

Ejercicio 7751

Demostrar que las raíces del polinomio $P(z)=z^{111}+3z^{50}+1$ verificando $|z|<1$ son simples y que tiene exactamente 50. *Indicación :* Utilizar el teorema de Rouché, escribir $P(z)=3z^{50}+(z^{111}+1)$ y calcular P', para asegurarse que las raíces con $|z|<1$ son simples.

Solución ▼ [002883]

Ejercicio 7752

Determinar la imagen por $z\mapsto\frac{3z+5}{z+2}$ del círculo unidad, del círculo de radio 2 centrado en 1, del círculo de radio 2 centrado en el origen; de la recta imaginaria, de la recta de ecuación $x=y$, de la recta vertical pasando en 3, de la recta vertical pasando en -2.

Solución ▼ [002884]

Ejercicio 7753

Pregunta del curso : ¿cuáles son automorfismos de $D(0,1)$, con 0 como punto fijo? [002885]

Ejercicio 7754

Sea α, con $|\alpha|<1$. Se sabe que $z\mapsto\phi_\alpha(z)=\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}$ es un automorfismo del disco unitario $D(0,1)$. Encontrar z_1 y z_2, con $\phi_\alpha(z_1)=z_2$, $\phi_\alpha(z_2)=z_1$. Dos puntos distintos arbitrarios z_1 y z_2 dados en $D(0,1)$, demostrar que existe un automorfismo que los intercambia y que este automorfismo es único salvo una rotación (se llevará al caso donde uno de puntos es el origen).

Solución ▼ [002886]

Ejercicio 7755

Encontrar el único automorfismo del primero cuadrante que intercambia $1+i$ y $2+2i$. Se observa que $z\mapsto z^2$ es una biyección analítica del primero cuadrante en el semiplano superior, y que se puede por lo tanto llevar al problema a una cuestión en el semiplano superior. [002887]

Ejercicio 7756

Sea f holomorfa en $\overline{D(0,1)}$. Se supone $|f(w)|\leqslant 8$, para todo $|w|\leqslant 1$ y $f(\frac{3}{4})=0$. Demostrar $|f(0)|\leqslant 6$. *Indicación :* Encontrar un automorfismo ϕ del disco con $\phi(0)=\frac{3}{4}$ y usar el Lema de Schwarz para la función $\frac{1}{8}f(\phi(z))$. encontrar el z, con $\phi(z)=0$. [002888]

Ejercicio 7757

Calcular $\int_C(x+2y)\,dx+(y-2x)\,dy$ a lo largo de la elipse C definida por $x=4\cos\theta$, $y=3\operatorname{sen}\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.
[006731]

Ejercicio 7758

Calcular $\int_C (z^2+3z)\,dz$ a lo largo de los caminos siguientes :

1. El círculo $|z|=2$ del punto (2,0) en el punto (0,2)
2. El segmento de recta uniendo los puntos (2,0) y (0,2)
3. El contorno poligonal formado por los segmentos de recta uniendo (2,0) a (2,2) y (2,2) a (0,2)

[006732]

Ejercicio 7759

Calcular $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, para $n=1,2,3\ldots$, donde C es un círculo de centro a. [006733]

Ejercicio 7760

Sea $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas con valores reales y con derivadas parciales continuas en un abierto conexo Ω y en su frontera C. La fórmula de Green establece que

$$\int_C Pdx+Qdy = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

1. Demostrar la fórmula de Green para una curva cerrada simple C que tiene la propiedad de encontrarse con paralelas a los ejes de coordenadas en dos puntos como máximo.
2. Si $f(z,\bar{z})=u(x,y)+iv(x,y)$ es continua y tiene derivadas parciales continuas en un abierto conexo Ω y en su frontera C, demostrar que la fórmula de Green se escribe en la forma compleja siguiente

$$\int_C f(z,\bar{z})dz = 2i\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy.$$

3. Si C es una curva cerrada simple que delimita un abierto de área A, demostrar que $A=\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}dz$.
4. Calcular $\int_C \bar{z}dz$ a lo largo de
   (a) del círculo $|z-2|=3$
   (b) del cuadrado de vértices $z=0$, $z=2$, $z=2i$ y $z=2+2i$
   (c) de la elipse $|z-3|+|z+3|=10$

[006734]

Ejercicio 7761

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo Ω. Sea c un punto de Ω y $r_0>0$ tal que $D(c,r_0)\subset\Omega$, donde $D(c,r_0)$ es el disco abierto de centro c y de radio r_0. Se define $\mu(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})d\theta$, para $0<r<r_0$.

1. Demostrar que

$$\lim_{r\to 0^+}\mu(r)=f(c).$$

2. Se supone $f'(z)$ continua. Demostrar que μ es constante (se demuestra que $\dfrac{d\mu}{dr}=0$ derivando bajo el signo de integración).

   Sea ahora $M=\sup\limits_{z\in\Omega}|f(z)|$ y se supone que existe $c\in\Omega$ tal que $|f(c)|=M$.
3. Demostrar que $M=|f(c+re^{i\theta})$, donde $r>0$ es tal que $D(c,r)\subset\Omega$.
4. Sea $V=\{z\in\Omega|\ |f(z)|=M\}$. Demostrar que V es a la vez abierto y cerrado de Ω. Deducir el principio del máximo : si f alcanza su máximo en un punto de abierto conexo Ω, entonces f es constante.

[006735]

Ejercicio 7762

1. Sea $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$. Demostrar que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\ dz$ tiende a 0, cuando R tiende a $+\infty$, donde $\gamma_R(t)=Re^{it}$ ($t\in[0,\pi]$).
2. Deducir de 1. el valor de
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

[006736]

Ejercicio 7763

Si γ es el arco de la curva $\gamma(t)=t+i(t^3-3t^2+4t-1)$ uniendo los puntos (1,1) y (2,3), encontrar el valor de
$$\int_\gamma (12z^2-4iz)\,dz.$$

[006737]

Ejercicio 7764

1. Calcular la integral $I=\displaystyle\int_\gamma \bar{z}\ dz$, donde γ es el camino uniendo el punto $(1,1)$ en el punto $(2,4)$ siguiendo la parábola $y=x^2$; luego el segmento que une estos puntos. ¿Qué se obtiene con $\displaystyle\int_\gamma z\ dz$?
2. Sea $\gamma=e^{2i\pi t}$, $t\in[0,1]$ y f continua en γ^* el círculo unitario en $\mathbb{C}$. Comparar $\displaystyle\int_\gamma \overline{f(z)}\ \frac{dz}{z^2}$ y $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ dz$.

[006738]

Ejercicio 7765

Sea f una función continua del cuarto de plano $\{x+iy;\ x,y\geqslant 0\}$ en $\mathbb{C}$ y C el cuarto de círculo parametrizado por $\{re^{it};\ 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\}$, con $r>0$. Se define $M(r)=\sup\limits_{z\in C}|f(z)|$. Demostrar que si $\lim\limits_{r\to\infty}M(r)=0$, entonces $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_C f(z)e^{iz}\ dz=0$.

[006739]

Ejercicio 7766

Sea $w=|w|e^{i\theta}$ un número complejo.

1. Demostrar que $\mathrm{e}^w - 1 = \int_{[0,w]} \mathrm{e}^z \, dz = \int_0^{|w|} \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{i\theta}} \mathrm{e}^{i\theta} \, dt$; demostrar la desigualdad $|\mathrm{e}^w - 1| \leqslant |w|\mathrm{e}^{|w|}$ (¿otra demostración ?).
2. Aplicación. Se considera K un compacto del plano incluido en $\mathbb{C}^*$ y la sucesión de funciones v_n definida en K por $v_n(z) = \dfrac{1}{z(1+\frac{1}{n})^z}$. Demostrar que $v_n(z)$ tiende a $\frac{1}{z}$ uniformemente en K.

[006740]

Ejercicio 7767

Sea φ una función continua en el borde orientado ∂K de un compacto K ; sea $\Omega = \mathbb{C} \backslash \partial K$: para $z \in \Omega$, se define

$$f(z) = \int_{\partial K} \frac{\varphi(u)}{u-z} du.$$

Vamos a establecer que f es holomorfa en Ω. Se fija $a \in \Omega$ y se escribe $r = d(a, \partial K) > 0$.

1. Sea $0 < \rho < r$ y $z \in \bar{B}(a, \rho)$. Demostrar, desarrollando $\frac{1}{u-z}$ en serie entera de $z-a$, que f es la suma de serie entera en un vecindario de a ; deducir que $f \in H(\Omega)$.
2. Demostrar que f es indefinidamente derivable en todo punto a de Ω y que
$$f^{(n)}(a) = n! \int_I \frac{\varphi(u)}{(u-a)^{n+1}} \, du.$$

[006741]

Ejercicio 7768

Demostrar que

$$\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-nz}}{n^2}\right),$$

define una función holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^z > 0\}$. [006761]

Ejercicio 7769

Se propone demostrar que para todo z de $\mathbb{C}$,

$$\prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}.$$

1. Se define
$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$
Demostrar que F es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Utilizando
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right)^2.$$
Demostrar que $F(z) - \dfrac{\pi}{\tan(\pi z)}$ es constante en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, luego calcular esta constante mediante un argumento de paridad. Deducir que
$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

2. Para $n \geqslant 1$, sea $f_n(z) = 1 - \dfrac{z^2}{n^2}$. Demostrar que $\prod_{n\geqslant 1} f_n(z)$ define una función entera f. Demostrar que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)},$$

con $g(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}$. Deducir el resultado deseado.

3. Deducir de la descomposición de $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}$ produce que :

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} z = \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right), \quad \cos z = \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

[006762]

Ejercicio 7770

Se establece $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx^2}\, dx$.

1. Demostrar que F es holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \mathrm{e}^z > 0\}$. Calcular $F'(z)$ en función de $F(z)$.
2. Deducir otra expresión de $F(z)$, para $z \in \Omega$ (se puede usar $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$). Concluir en fin que la función F se extiende a una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

[006763]

Ejercicio 7771 Función ζ de Riemann

Se introduce la función "Zeta" :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

I Producto de Euler Demostrar que ζ es holomorfa en el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Re} z > 1\}$. Sean $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n, \ldots$ la sucesión de números primos. Demostrar que en Ω, se tiene

$$\zeta(s) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

(producto de Euler).

II Relación de ζ, con la distribución de números primos

1. Demostrar que
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n\geqslant 1} \lambda(n) n^{-s}$$
donde $\lambda(n) = \ln p$ si n es una potencia de un número p primo y $\lambda(n) = 0$ si n tiene al menos dos divisores primos distintos.
2. Se tiene el siguiente teorema :
Teorema de los números primos (Hadamard-De la Vallée Poussin 1896) : Cuando x tiende a $+\infty$, la suma de los $\lambda(n)$, para $n \leqslant x$ es equivalente a x. Demostrar que esta afirmación es equivalente a decir que el número de números primos menores que x es equivalente a $x/\ln x$.

III Ecuación funcional de ζ, demostración por la fórmula de Poisson Sea

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t}$$

θ verifica la siguiente ecuación funcional :

$$\forall t > 0,\ \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t).$$

Se define

$$\psi(t) = \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t}.$$

Se tiene evidentemente $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$.

1. Sea s tal que $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t} t^{s-1}\, dt$ en función de n y $\Gamma(s)$. Deducir que

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^{s-1}\, dt = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s).$$

2. Demostrar que F definida por

$$F(z) = \int_1^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt$$

   es una función entera. Escribiendo

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt = \int_0^1 \psi(t) t^z\, dt + \int_1^{+\infty} \psi(t) t^z\, dt$$

   y efectuando en la primera parte de la suma el cambio de variable $u = 1/t$, entonces usando la ecuación funcional de θ, demostrar que la función L :

$$L(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

   se extiende a una función entera, invariante bajo la transformación s da $1-s$. Demostrar entonces que ζ se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, teniendo 1 solo por singularidad (polo simple). Demostrar en fin que $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$.

IV Ecuación funcional de ζ, demostración por el teorema de residuos

1. Sea s tal que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Por el mismo método que en III.1., demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt = \Gamma(s)\zeta(s).$$

2. Para todo s de $\mathbb{C}$, se define F_s sobre $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$:

$$F_s(z) = \frac{\exp[(s-1)\mathrm{Log}(-z)]}{\exp z - 1},$$

   donde Log es la determinación principal del logaritmo. Se define igualmente el contorno $A_{\varepsilon,\varphi}$:
   Calcular

$$\lim_{\varphi\to 0} \int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\, dz.$$

Demostrar que para $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{\varphi\to 0}\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\,dz\right) = 2i\,\mathrm{sen}\,(\pi z)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Demostrar que $\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\,dz$ en realidad, es independiente de $\varepsilon \in]0,1[$, ya que

$$s \mapsto \lim_{\varphi\to 0}\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\,dz$$

es una función entera. Deducir que $\mathrm{sen}\,(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$ se extiende a una función entera.

3. Sea $C_{n,\varepsilon,\varphi}$ el camino cerrado : aplicando la fórmula de los residuos a F_s sobre $C_{n,\varepsilon,\varphi}$, para $\mathrm{Re}\, s < 0$, demostrar que
$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\},\ \zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s).$$
4. Deducir de 3. que
$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,(\pi s)},$$
utilizando la ecuación funcional de **III**, demostrar entonces que
$$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

[006764]

Ejercicio 7772

Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$, real en el eje real, imaginario puro en el eje imaginario. Demostrar que f es impar.
[006765]

Ejercicio 7773

Demostrar que toda función f holomorfa en un abierto conexo Ω simétrico con respecto al eje real se escribe $f = f_1 + if_2$, donde f_1 y f_2 son holomorfas en Ω y reales en el eje real. [006766]

Ejercicio 7774

Sea f una función holomorfa en el disco unidad D, continua en $\overline{D}$, tal que $|f(z)| = 1$, si $|z| = 1$. Demostrar que f es racional. [006767]

Ejercicio 7775

Dar un biholomorfismo entre los abiertos

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| > 1,\ \mathrm{Im}mz > 0\}\ \text{ y }\ \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1,\ \mathrm{Im}mz > 0\}.$$

[006768]

Ejercicio 7776

Demostrar que la transformación
$$w=\left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2,$$
donde $m\in\mathbb{N}^*$, define una representación conforme de
$$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}|\ z=re^{i\theta},\ 0<r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{m}\right\},$$
sobre el semi-plano superior. [006769]

Ejercicio 7777

Sea Ω el semi-plano $\operatorname{Im} mz>0$ privado del disco cerrado de centro i y de radio 1. Encontrar la imagen de Ω por la transformación $w=\coth(\pi/z)$. [006770]

Ejercicio 7778

Sea C una corona circular excéntrica. Demostrar que existe una transformación homográfica aplicando C en una corona concéntrica. [006771]

Ejercicio 7779

Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función entera (es decir, holomorfa).

1. Sea α un real, $\alpha>0$. Se supone que para todo $z\in\mathbb{C}$ se tiene $|f(z)|\neq\alpha$. Demostrar que, o bien $\forall z\in\mathbb{C}:|f(z)|<\alpha$, o bien $\forall z\in\mathbb{C}:|f(z)|>\alpha$. Deducir que f es constante.
2. Se supone aquí que f no es constante.
   (a) Demostrar que $\inf_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|=0$ y $\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|=+\infty$.
   (b) Demostrar que $\{\ |f(z)|\ z\in\mathbb{C}\}$ es ya sea $]0,+\infty[$, o ya sea $[0,+\infty[$. Dar un ejemplo en cada uno de los dos casos.
3. Siempre se supone que f no es constante. Demostrar que $\{f(z)\ z\in\mathbb{C}\}$ es denso en todas partes en $\mathbb{C}$.

[006812]

Ejercicio 7780

1. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ converge.
2. Sea $f(z)=\dfrac{\log(z)}{(1+z^2)^2}$, con $\log(z)=\operatorname{Log}(-iz)+i\pi/2$ el logaritmo definido en $\mathbb{C}\setminus i]-\infty,0]$ y tal que $\log(1)=0$. Determinar los puntos singulares aislados de f y para cada punto singular aislado determinar su residuo.
3. Sea $D=\{z\in\mathbb{C}\mid\varepsilon<|z|<R\ \text{ y }\ \operatorname{Im}z>0\}$. Con ayuda de $\displaystyle\int_{\partial D}f(z)\,dz$, determinar el valor de $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. No olvidar justificar los pasajes al límite que se realizan.

[006825]

Ejercicio 7781

---

1. Enunciar el principio del máximo.
2. Sea $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ de puntos en el círculo unitario ($|a_j| = 1$). Demostrar que existe un punto z_o en el círculo unidad tal que el producto de las distancias de z_o a a_j ($j = 1,\dots,n$) es superior o igual a 1.

[006826]

Ejercicio 7782

Sea f una función holomorfa en $B_r(0) \subset \mathbb{C}$, para cierto radio $r > 1$. Demostrar las siguientes igualdades :

$$\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0)+f'(0)\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\operatorname{sen}^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0)-f'(0).$$

Indicación : estudiar las dos integrales $\displaystyle\int_{|z|=1}\Big(2\pm(z+\frac{1}{z})\Big)\frac{f(z)}{z}\,dz$. [006830]

Ejercicio 7783

Sea a un real, $0 < a < 2$.

1. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$ converge.
2. Sea $f(z) = \dfrac{e^{a\log(z)}}{z(1+z^2)}$, con $\log(z) = \operatorname{Log}(-iz)+i\pi/2$, es decir que log es el logaritmo definido en $\Omega = \mathbb{C}\setminus i]-\infty,0]$ y tal que $\log(1) = 0$. Determinar los puntos singulares aislados de f en Ω y para cada punto singular aislado determinar su residuo.
3. Sea $D = \{z\in\mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R \text{ y } \operatorname{Im} z > 0\}$. Con ayuda de $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$, determinar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$. Justificar los pasos al límite que se hacen.

[006831]

Ejercicio 7784

Sea P y Q dos polinomios con coeficientes complejos sin cero común y sea $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{C}$ los ceros de Q (lo que implica que el grado de Q es superior o igual a k). Se define la función $f : \mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_k\} \to \mathbb{C}$ por $f(z) = P(z)/Q(z)$.

1. Demostrar que existe una función continua $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_k\} : g(z) = f(z)$. ¿Cuál es el valor de g en un punto z_i ? ¿Cuál es el valor de g en ∞ ? (No olvidar demostrar que la función g que se define es continua.)
2. ¿El resultado es verdadero si P y Q tienen ceros comunes ? Si no, dar un contra ejemplo ; si sí, esbozar su razonamiento.

[006836]

Ejercicio 7785

1. ¿Cuándo se dice que una parte S de $\mathbb{R}^n$ es discreta ?
2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una parte discreta y cerrada. Demostrar que $K \cap S$ es finito.
3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula y sea $K \subset \Omega$ un compacto. Demostrar que f tiene un número finito de ceros en K.

Ejercicio 7786

Sea $f(z) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{2iz^2}}{z^3(1+z^4)}$, sea $0 < \varepsilon < 1 < R$ y sea $D = B_\varepsilon(0) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$.

1. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^3(1+x^4)}\,dx$ converge.
2. Dibujar D, determinar las singularidades de f, calcular el residuo en cada punto singular aislado y calcular $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$.
3. Deducir de 2. el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^3(1+x^4)}\,dx$. Justificar los pasajes al límite que se realizan.

[006842]

Ejercicio 7787

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa y sea a un real estrictamente positivo.

1. Demostrar que $\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ es conexo.
2. Demostrar que si para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $|f(z)| \neq a$, entonces se tiene ya sea $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| > a$, o bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < a$. Deducir que f es constante.
3. Usando el resultado de 2., demostrar que si f no es constante, entonces $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = 0$ y $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = +\infty$.

[006844]

Ejercicio 7788

Sea n, p dos enteros tales que $n \geqslant p+2 \geqslant 2$, sea $f(z) = \dfrac{z^p}{1+z^n}$, sea $R > 0$ y sea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi/n \;\; 0 < |z| < R\}$.

1. Demostrar que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^n}\,dx$ converge.
2. Dibujar D, determinar las singularidades aisladas de f, calcular el residuo en cada punto singular aislado y calcular $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz$.
3. Deducir de 2. el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^n}\,dx$. No olvidar justificar los pasajes al límite que se realizan.

[006847]

Ejercicio 7789

Sea $R > 1$ y γ_R el camino cerrado de clase C^1 : $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it}$. Se denotan respectivamente γ_R^+ y γ_R^- la restricción de γ_R a $[0,\pi]$ y a $[\pi, 2\pi]$. Se recuerda que $[a,b]$ designa el camino ζ de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ definido por $\zeta(t) = bt + (1-t)a$. Se define $C_R^+ = \gamma_R^+ + [-R, R]$ y $C_R^- = \gamma_R^- + [R, -R]$. Demostrar que $\operatorname{Ind}_{C_R^+}(i) + \operatorname{Ind}_{C_R^-}(i) = \operatorname{Ind}_{\gamma_R}(i)$ y deducir el valor de $\operatorname{Ind}_{C_R^+}(i)$. Calcular, para $u > 0$ y $R > 1$,

$$\int_{C_R^+} \frac{\mathrm{e}^{iuz}}{1+z^2}\,dz.$$

Deducir el valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iux}}{1+x^2} dx,$$

para $u > 0$, luego para todo u real. [006848]

Ejercicio 7790

Sea α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, z = r\mathrm{e}^{i\theta} \mid 0 < r, |\theta| < \alpha\}$. Se denota, para $\eta > 0$, $\Delta_\eta = \{z \in \mathbb{C}, z = r\mathrm{e}^{i\theta} \mid \eta < r, |\theta| < \alpha\}$. Dibujar Δ y Δ_η. En todo lo que sigue, f denota una función holomorfa en Δ, acotada y continua en $\overline{\Delta}$, la adherencia de Δ. Se denota $\partial\Delta$, la frontera de Δ. Se define $\tilde{M} = \sup\limits_{z \in \partial\Delta} |f(z)|$ y, para todo $r > 0$, $M_r = \sup\limits_{\substack{z \in \Delta \\ |z| = r}} |f(z)|$.

1. Se supone

   $(*)$
   $$\lim_{z \in \Delta, |z| \to \infty} |f(z)| = 0.$$

   Sea $R > 0$, demostrar que se tiene

   $$\sup_{z \in \overline{\Delta}, |z| \leqslant R} |f(z)| \leqslant \max(\tilde{M}, M_R)$$

   y entonces

   $$\sup_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in \partial\Delta} |f(z)|.$$

2. No se supone más (*). Se pone, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, y todo $z \neq 0$, $g_n(z) = \frac{f(z)^n}{z}$. Mayorando, como en la pregunta 1. $\sup\limits_{\substack{z \in \overline{\Delta_\eta} \\ |z| \leqslant R}} |g_n(z)|$, demostrar que, para todo $n > 0$, todo $\eta > 0$ y todo z de Δ_η,

   $$\left| \frac{f(z)^n}{z} \right| \leqslant \frac{1}{\eta} \max\left((\tilde{M})^n, (M_\eta)^n\right)$$

   y de la

   $$\sup_{z \in \overline{\Delta_\eta}} |f(z)| \leqslant \max\left(\tilde{M}, M_\eta\right).$$

   deducir que se tiene aún

   $$\sup_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in \partial\Delta} |f(z)|.$$

3. Ahora se supone que se tiene $\lim\limits_{r \to \infty} |f(r\mathrm{e}^{i\alpha})| = 0$ y $\lim\limits_{r \to \infty} |f(r\mathrm{e}^{-i\alpha})| = 0$. Se propone demostrar que entonces $\lim\limits_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \Delta}} |f(z)| = 0$. Mayorando la función $z \mapsto \left| \frac{z}{z+A} \right|$, $A > 0$, demostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que se tiene, para todo $A > 0$,

   $$\sup_{\substack{z \in \partial\Delta \\ |z| > R}} \left| \frac{z}{z+A} f(z) \right| \leqslant \varepsilon.$$

   Demostrar que entonces existe $A > 0$ tal que se tiene

   $$\sup_{z \in \partial\Delta} \left| \frac{z}{z+A} f(z) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Utilizando la pregunta 2., deducir que se tiene $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\Delta}} |f(z)| = 0$.

[006849]

Ejercicio 7791

Sea t un real, $|t| \leqslant \pi$.

1. Se considera la serie de funciones holomorfas
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{ikt}}{k^2 - z^2}.$$
Demostrar que su suma $S(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$.
2. Sea γ_n, $n \geqslant 0$, el camino recorrido en la dirección positiva cuya imagen γ_n^* en $\mathbb{C}$ es el cuadrado de los vértices $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-i)$.
   (a) Demostrar que, cualquiera que sea z verificando $z = \left(n+\frac{1}{2}\right) + iy$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant y \leqslant n+\frac{1}{2}$, se tiene
   $$\left|\frac{\mathrm{e}^{itz}}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \leqslant 2$$
   y que, cualquiera que sea z verificando $z = x + i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant x \leqslant n+\frac{1}{2}$, se tiene
   $$\left|\frac{\mathrm{e}^{itz}}{\operatorname{sen} \pi z}\right| \leqslant \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}.$$
   Inferir que $\left|\frac{\mathrm{e}^{itz}}{\operatorname{sen} \pi z}\right|$ es acotada en γ_n^*.
   (b) Sea a perteneciendo a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Se pone
   $$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{itz}}{(z^2-a^2)\operatorname{sen} \pi z}.$$
   Demostrar que se tiene
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz = 0.$$
3. Calcular el residuo de f en cada uno de sus polos. Deducir el valor de
$$S(a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{ikt}}{k^2 - a^2}.$$
4. Calcular igualmente
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{ikt}}{(k+a)^2}.$$

[006850]

Ejercicio 7792

Sea a un real, $a > 1$. Se considera la serie entera
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n^2}}.$$

1. Demostrar que su suma, denotada $f(z)$, es holomorfa en $\mathbb{C}$. Demostrar que existe $a_0 > 1$ tal que se tiene, para todo $a \geqslant a_0$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{k^2}} \leqslant \frac{1}{100}.$$
2. *En lo que sigue, se supone $a \geqslant a_0$.*
Sea p entero, $p \geqslant 1$. Demostrar que se tiene, para todo z verificando $|z| = a^{2p}$,
$$\frac{1}{a^{p^2}} \left| f(z) - \frac{z^p}{a^{p^2}} \right| \leqslant \frac{2}{100}.$$
Inferir que $f(z)$ a p ceros, $z_1, \ldots, z_p$ en el disco abierto $D(0, a^{2p})$. Demostrar que, cualquiera que sea $p \geqslant 1$, z_p tiene las siguientes propiedades :
(a) $a^{2(p-1)} < |z| < a^{2p}$,
(b) z_p es un cero simple,
(c) z_p es un real negativo.
Para establecer (c), se puede razonar por reducción al absurdo.

[006851]

Ejercicio 7793

Sea f una función holomorfa y acotada en el disco abierto $D(0,1)$, verificando $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Se define $M = \sup_{|z|<1} |f(z)|$.

1. Demostrar que los módulos de los coeficientes de la expansión de f en series enteras en un vecindario de 0 son mayorados por M.
2. Utilizar 1. para demostrar que, si se escribe $g(z) = f(z) - z$, se tiene
$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{(1-r)^2} - M, \text{ si } |z| \leqslant r < 1.$$
Deducir la existencia de un real ρ, $0 < \rho < 1$, *dependiendo solo de M*, tal que se tiene
$$|g'(z)| < 1, \text{ si } |z| < \rho.$$
3. Demostrar entonces que la restricción de f en el disco abierto $D(0, \rho)$ es inyectiva (se puede, para z_1 y z_2 perteneciendo al disco abierto $D(0, \rho)$, expresar $g(z_1) - g(z_2)$ en forma de integral).

[006852]

Ejercicio 7794 Pregunta del curso

Demostrar usando el lema de Schwarz que se enuncia cuidadosamente, que todo automorfismo del disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ es de la forma
$$f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$
donde $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Se admite que g_a definido por $g_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, para $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, es un automorfismo de D. [006853]

Ejercicio 7795

---

1. Demostrar que el producto infinito

$$P(z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\dfrac{z}{2n}}{1+\dfrac{z}{2n-1}}$$

converge normalmente en todo compacto de $U=\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{Re} ez>0\}$.

2. Se define $f(z)=zP(z)$. Calcular $f(1)$. Se recuerda la fórmula

$$\operatorname{sen}\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

3. Se define $g=f'/f$. Escribir g como una serie. Demostrar que $g(z)+g(z+1)=1/z$ (se trabaja en las sumas parciales). Deducir que se tiene $f(z)f(z+1)=\frac{2}{\pi}z$.

[006854]

Ejercicio 7796

Sea α un número real, $\alpha>0$.

I Para todo z en $\mathbb{C}$ y todo t en $\mathbb{R}$, se establece

$$f(z,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t-z}.$$

1. (a) Se denota $[1,+\infty[\ =\{x\in\mathbb{R}|\ x\geqslant 1\}$ y $\Omega=\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$. Sea K un compacto incluido en Ω. Demostrar brevemente que existe un real c, $c>0$, tal que se tiene $\inf\limits_{z\in K}\inf\limits_{x\in[1,+\infty[}|x-z|\geqslant c$.

   (b) Demostrar que la función F definida por

   $$F(z)=\int_0^{+\infty}f(z,t)\,dt$$

   es holomorfa en Ω.

2. (a) Determinar el radio de convergencia de la serie entera $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{z^k}{(k+1)^\alpha}$.

   (b) Demostrar que se tiene, para todo z, $|z|<1$,

   $$F(z)=F(0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{(k+1)^\alpha}.$$

   (c) ¿La función F admite una extensión holomorfa en un vecindario de 1 ?

II En toda esta parte, t pertenece a $\mathbb{C}$.

1. Sea a un real, $0<a<\pi$ y R un real, $R>0$. Se denota $Q(a,R)=\{t\in\mathbb{C}|\ 0<\mathrm{Re}\,t<R, |\mathrm{Im}\,mt|<a\}$ y $Q(a)=\{t\in\mathbb{C}|\ 0<\mathrm{Re}\,t, |\mathrm{Im}\,mt|<a\}$. Sea $\mathrm{Log}z$ la determinación del logaritmo de z holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0]$. Se tiene entonces $\mathrm{Log}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z$, con $-\pi<\mathrm{Arg}z<\pi$.

(a) Determinar $S(a,R) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Log} z \in Q(a,R)\}$ y $S(a) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Log} z \in Q(a)\}$. Hacer los dibujos. Se denota, para t en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, $t^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{(\alpha-1)\operatorname{Log} t}$. Determinar, para z en $S(a)$, el polo de la función

$$t \mapsto f(z,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - z}$$

ubicado en la banda $Q(a)$. ¿Cuál es el residuo de esta función en este polo?

(b) Para todo z en $S(a,R)$, calcular en función de z

$$\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t)\, dt$$

donde $\partial Q_\varepsilon(a,R)$ designa el camino recorrido en sentido positivo cuya imagen en $\mathbb{C}$ es la frontera del dominio $Q(a,R) \setminus \{t \in \mathbb{C} | \, |t| < \varepsilon\}$. ¿Cuál es el límite cuando ε tiende a 0 de $\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t)\, dt$?

2. Sea Γ_a el camino cuya imagen Γ_a^* y el sentido de la trayectoria se muestran a continuación. Se define

$$F_a(z) = \int_{\Gamma_a} f(z,t)\, dt.$$

(a) Retomando brevemente las ideas utilizadas en I.1., demostrar que F_a es holomorfa en $\mathbb{C}$ privado de un camino que se debe especificar y dibujar.

(b) Demostrar que, si z pertenece a $S(a)$ y $\operatorname{Im} mz < 0$, se tiene $F_a(z) = F(z)$ (se puede integrar $f(z,t)$ a lo largo de un contorno bien elegido).

(c) Sea Γ_a el camino cuya imagen Γ_{-a}^* y el sentido de la trayectoria se muestran a continuación. Se define

$$F_{-a}(z) = \int_{\Gamma_{-a}} f(z,t)\, dt.$$

Demostrar brevemente que, si z pertenece a $S(a)$ y $\operatorname{Im} mz > 0$, se tiene $F_{-a} = F(z)$.

(d) Demostrar, utilizando II.1.(b), que, para todo z en $S(a)$, se tiene

$$F_{-a}(z) - F_a(z) = 2i\pi \frac{(\operatorname{Log} z)^{\alpha-1}}{z}.$$

Inferir que $F(z)$ no tiene límite cuando z tiende a un punto en la semirrecta real $]1, +\infty[$.

[006855]

Ejercicio 7797 Pregunta del curso

Enunciando con precisión las diferentes formas del principio del máximo utilizadas, demostrar el lema de Schwarz. **Aplicación :** Sea F una función holomorfa en $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$, nula en el origen y verificando $\operatorname{Re} F(z) \leqslant 1$, para todo z en $D(0,1)$. Demostrar que la función

$$f = \frac{F}{2-F}$$

es acotada por 1 en $D(0,1)$. Deducir una mayoración de $|F(z)|$ en función de $|z|$. Determinar F suponiendo además que se tiene $F'(0) = 2$. [006856]

Ejercicio 7798

Calcular, usando el contorno (I) al lado, la integral

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^7} dx$$

y, usando el contorno (II) al lado, la integral

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} dx.$$

[006857]

Ejercicio 7799

Si ρ es un real estrictamente positivo, se denota D_ρ el disco abierto de centro 0 y de radio ρ y γ_ρ el camino $t \mapsto \rho \mathrm{e}^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Se considera una función f holomorfa en D_1, tal que se tiene $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Para todo $\rho \in]0,1[$, se establece $m(\rho) = \inf\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$.

1. Demostrar que existe un número real $r \in]0,1[$ tal que, para todo $\rho \in]0,r[$, se tiene

$$m(\rho) > 0.$$

   En lo que sigue, se supone que r y ρ son fijos y que verifican las conclusiones de 1.

2. Demostrar que, para todo número complejo w verificando $|w| < m(\rho)$, la función

$$z \mapsto f(z) - w$$

   tiene un solo cero, denotado $g(w)$, en D_ρ.

3. Demostrar que se tiene

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz = g(w).$$

4. Demostrar que, para todo w verificando $|w| < m(\rho)$, se tiene

$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$$

   y se expresan los coeficientes c_n por medio de integrales haciendo intervenir f y f'.

[006858]

Ejercicio 7800

Sea g una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Se supone que g no es igual a la función constante $g(z) = i$ y que g verifica la ecuación diferencial

$$g'(z) = g^2(z) = -1.$$

Se considera la función f definida por

$$f(z) = \frac{g(z)+i}{g(z)-i}.$$

Se denota P el conjunto de polos de f y $U = \mathbb{C} \setminus P$. ¿Qué ecuación diferencial verifica f?
Determinar $f(z)$ sobre U, luego en $\mathbb{C}$. Deducir que, si además se supone que g tiene un polo en 0, se tiene

$$g(z) = \operatorname{cotan} z.$$

Ejercicio 7801

Se propone calcular, con ayuda del teorema de residuos, el valor de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t^2\right) dt.$$

1. Sea $a \in \mathbb{R}^*$; integrando la función $g(z) = \exp\left(-\pi z^2\right)$ en el rectángulo de vértices $-R$, R, $R+ia$, $-R+ia$ ($R > 0$), demostrar que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi(t+ia)^2\right) dt.$$

Se establece : $f(z) = \exp\left(i\pi z^2\right)\tan\left(\pi z\right)$.

2. ¿Cuáles son los polos de f ? Especificar el orden.

Sea $R > 0$; se considera el paralelogramo Γ_R de vértices $A = R+1+iR$, $B = R+iR$, $C = -R-iR$ y $D = -R+1-iR$, orientado en el sentido directo.

3. Demostrar que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\mathrm{e}^{-i\pi/4}.$$

4. (a) Demostrar que

$$\forall t \in [0,1],\ \left|\tan\left(\pi(R+t+iR)\right)\right| \leqslant \coth\left(\pi R\right).$$

   (b) Deducir que la integral de f en el segmento orientado $[A,B]$ tiende a 0 cuando R tiende a $+\infty$.

   (c) Demostrar igualmente que la integral de f sobre $[C,D]$ tiende a 0 cuando R tiende a $+\infty$.

5. Se denota J y K las integrales de f en los segmentos orientados $[B,C]$ y $[D,A]$.

   (a) Demostrar que

$$J+K = (-1+i)\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-2\pi t^2}\left(\mathrm{e}^{-2\pi t+2i\pi t}-1\right) dt.$$

   (b) Deducir que, cuando R tiende a $+\infty$, $J+K$ tiende a

$$L = \mathrm{e}^{3i\pi/4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi(u^2+u\sqrt{2}-iu\sqrt{2})}\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi u^2}\, du\right).$$

   (c) Con ayuda de la pregunta 1. y de un cambio de variable, verificar que $L = 2I\mathrm{e}^{-i\pi/4}$.

Concluir. [006860]

Ejercicio 7802

Sea c un punto singular esencial de una función f holomorfa en un disco sin centro $U = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z-c| < \rho\}$. El propósito del ejercicio es demostrar que f no es inyectiva en todo vecindario sin centro de c.

1. Demostrar que para todo $\gamma \in \mathbb{C}$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $z' \in U$ y $\varepsilon' > 0$ tales que

$$\overline{D(f(z'),\varepsilon')} \subset f(U) \cap D(\gamma,\varepsilon),$$

donde $D(a,r)$ designa el disco abierto de centro a y de radio r. Se puede usar el teorema de Casorati-Weierstrass, luego observar que $f(U)$ es abierto (la función f es holomorfa por lo tanto abierta).

2. Para $n \geqslant 1$, sea U_n el disco sin centro $\{z \in \mathbb{C} | \ 0 < |z - c| < \rho/n\}$. Sean $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon_0 > 0$. Construir por inducción una sucesión estrictamente decreciente $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ números reales estrictamente positivos y una sucesión $(z_n)_{n \geqslant 1}$, $z_n \in U_{n-1}$, verificando

$$\overline{D(f(z_1), \varepsilon_1)} \subset f(U) \cap D(\gamma_0, \varepsilon_0),$$
$$\overline{D(f(z_{n+1}), \varepsilon_{n+1})} \subset f(U_{n+1}) \cap D(f(z_n), \varepsilon_n) \ \text{ para } n \geqslant 1.$$

Deducir que existe $a \in D(\gamma_0, \varepsilon_0)$ y una sucesión $(c_n)_{n \geqslant 0}$ puntos de U distintos de dos en dos tales que

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = c \ \text{ y } \ \forall n, \ \ f(c_n) = a.$$

Concluir.

[006861]

Ejercicio 7803

Las partes I y II son independientes. Las partes III y IV utilizan los resultados establecidos en II.

I

1. Determinar el conjunto de ceros de la función sen en $\mathbb{C}$. ¿Cuál es su orden de multiplicidad ?
2. Se denota, para todo $n \geqslant 0$, γ_n^* el borde del cuadrado en $\mathbb{C}$ de vértices $(n+\frac{1}{2})\pi(1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1-i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(1-i)$. Demostrar que, si $z \in \gamma_n^*$, se tiene $|\operatorname{sen} z|^2 \geqslant 1$.

II Sea f una función entera en $\mathbb{C}$. Se denota $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para todo z en $\mathbb{C}$.

1. Demostrar que, para todo $n \geqslant 1$ y todo $r > 0$, se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(re^{i\theta}\right) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta.$$

Recordar que $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$. Se denota, para $n \geqslant 1$, φ_n un real verificando $|a_n| = a_n e^{i\varphi_n}$. Deducir que se tiene, para todo $n \geqslant 1$,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(re^{i(\theta + \frac{1}{n}\varphi_n)}\right) r^{-n} \left(1 + e^{-in\theta}\right) d\theta.$$

2. Se supone $f(0) = 0$. Demostrar que se tiene, para todo $n \geqslant 1$ y todo $r > 0$,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(f(re^{i(\theta + \frac{1}{n}\varphi_n)})\right) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta$$

y entonces

$$|a_n| r^n \leqslant 2 \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

3. Se denota siempre f una función entera en $\mathbb{C}$. Se supone ahora que existe una sucesión $(r_j)_{j \geqslant 0}$ reales estrictamente positivos que tienden a $+\infty$, con j y que existen constantes $A > 0$ y $\beta > 0$ tal que se tiene, para todo $j \geqslant 0$ y todo θ real,

$$\operatorname{Re} f(r_j e^{i\theta}) \leqslant A r_j^{\beta}.$$

Inferir que f es un polinomio de grado a lo sumo β (se estudia primero el caso donde $f(0) = 0$).

III Sea g una función entera nula solo en los puntos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y tal que cada uno de estos ceros es simple. Se supone además que existe $C > 0$ tal que, para todo z en $\mathbb{C}$, se tiene $|g(z)| \leqslant \exp(C|z|)$.

1. Demostrar que $\frac{g}{\text{sen}}$ es una función entera que no se anula en $\mathbb{C}$. Deducir, enunciando con precisión el teorema del curso utilizado, que existe una función h entera tal que, para todo z en $\mathbb{C}$, se tiene
$$\frac{g(z)}{\operatorname{sen} z} = \exp h(z).$$
2. Se denota C_n el camino orientado positivamente y definido, para todo $t \in [0, 2\pi]$, por $C_n(t) = (n + \frac{1}{2})\pi e^{it}$ y C_n^* su imagen. Demostrar que
$$\sup_{z \in C_n^*} \left| \frac{g(z)}{\operatorname{sen} z} \right| \leqslant \sup_{z \in \gamma_n^*} \left| \frac{g(z)}{\operatorname{sen} z} \right|$$
(donde γ_n^* ha sido definido en I.2. Deducir que se tiene, para todo z de C_n^*,
$$\operatorname{Re} h(z) \leqslant C\sqrt{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$
y que existe de números complejos λ y μ tales que, para todo z en $\mathbb{C}$, se tiene
$$g(z) = \lambda \operatorname{sen} z \exp(\mu z).$$

IV Sea α un número complejo no nulo. Se propone demostrar que la ecuación
$$\alpha z - \exp z = 0$$
tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

1. Se razona por reducción al absurdo. Demostrar que entonces existe una función δ entera tal que se tiene, para todo z en $\mathbb{C}$,
$$\alpha z - \exp z = \exp \delta(z).$$
2. Establecer, para todo z en $\mathbb{C}$,
$$|\alpha z - \exp z| \leqslant (|\alpha| + 1) \exp |z|.$$
Deducir que existen números complejos ρ y σ tales que, para todo z en $\mathbb{C}$, se tiene
$$\alpha z - \exp z = \rho \exp(\sigma z).$$
Concluir.

[006862]

Ejercicio 7804 Serie de Laurent

Calcular la serie de Laurent de $1/(z^2 + z^3)$ en un vecindario del origen. [007576]

Ejercicio 7805 Preguntas del curso

1. Recordar la definición del radio de convergencia de la serie entera $\sum a_n z^n$.
2. Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum a_n z^n$. Demostrar que la serie $\sum a_n z^n$ diverge en $\mathbb{C} \setminus \Delta_R(0)$.

[007584]

Ejercicio 7806 Una ecuación

Resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación $z^6+2z^3-3=0$. [007585]

Ejercicio 7807 Aplicaciones holomorfas

Determinar todas las aplicaciones holomorfas en $\mathbb{C}$ cuya parte real es $u(x,y)=x^2-y^2+3x^2y-y^3$. [007586]

Ejercicio 7808 Biolomorfismos

Sea $\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}/\operatorname{Im}(z)>0\}$. Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de $SL(2,\mathbb{R})$ (i.e. con coeficientes reales y determinante 1.) Sea la aplicación lineal fraccionaria $f{:}z\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Demostrar que f_A se define en $\mathbb{H}$ y realiza un biholomorfismo de $\mathbb{H}$ en sí mismo. [007587]

Ejercicio 7809 Serie entera

1. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ una serie entera convergente (con un radio de convergencia estrictamente positivo). Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Sean dos series enteras centradas en 0 radio de convergencia $R>0$ y suma respectiva f y g. Se supone que para todo $x\in]-R,R[$, $f(x)=g(x)$. Demostrar que para todo $z\in\Delta_R(0)$, $f(z)=g(z)$.

[007588]

Ejercicio 7810 Preguntas del curso

1. Recordar la definición de la rama principal del logaritmo.
2. Recordar la definición de una primitiva de una función continua f sobre $\mathbb{C}$.
3. Dar si es posible el ejemplo de una función holomorfa en $\mathbb{C}$ que no admite una primitiva. Si no, aplicar un teorema para demostrar que toda función holomorfa en $\mathbb{C}$ admite una primitiva.

[007589]

Ejercicio 7811 Una ecuación

Se fija la rama principal del logaritmo. Resolver en $\mathbb{C}^-$, la ecuación $z^i=-1$. [007590]

Ejercicio 7812 Aplicaciones holomorfas

Desarrollar $z\mapsto \frac{z^2+z-1}{z+1}$ en elementos simples y calcular $\displaystyle\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2+z-1}{z+1}dz$. [007591]

Ejercicio 7813 Preguntas del curso

1. ¿La aplicación $\mathbb{C}\setminus\{3\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{z-3}$ admite una primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{3\}$? Justificar.
2. Dar un ejemplo de un abierto no estrellado de $\mathbb{C}$. Justificar que el ejemplo propuesto no es estrellado.

[007592]

Ejercicio 7814 Cálculo de integrales

Calcular
$$\int_{\partial\Delta_1} \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z+2)^2}\,dz, \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z+2)^2}\,dz \quad \text{y} \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z+1)^2(z+2)^2}\,dz.$$

[007593]

Ejercicio 7815 Singularidades

1. Sea $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Se supone que $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$. ¿Cuál es la naturaleza de la singularidad aislada 0 ? (Aparente, polar o esencial). Justificar.
2. Dar un ejemplo de una aplicación holomorfa con una singularidad esencial. Justificar.

[007594]

Ejercicio 7816 Aplicaciones holomorfas

1. Recordar la definición del índice $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ de un punto a de $\mathbb{C}$, con respecto a un camino cerrado compacto orientado Γ de $\mathbb{C}$.
2. Se supone que Γ está parametrizada en la forma $\gamma(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$, donde r y θ son dos funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ a trozos en $[0,1]$, r, con valores estrictamente positivos y $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1) \bmod 2\pi$ demostrar que
$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \theta'(t)dt$$
y por lo tanto, corresponde al número de vueltas, contado positivamente en la dirección de avance, que hace Γ alrededor de a.

[007595]

Ejercicio 7817 Preguntas del curso

1. Demostrar que la parte imaginaria de una función holomorfa es armónica.
2. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ no idénticamente nula. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que f no se anula en $\Delta_\varepsilon \setminus \{0\}$.
3. Sean Ω un abierto conexo y f una función holomorfa en Ω. ¿La integral de f a lo largo de todo camino cerrado contenido en Ω es nula ?

[007596]

Ejercicio 7818 Dos ecuaciones

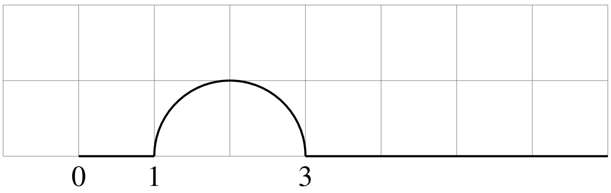
1. Encontrar todas las soluciones complejas de la ecuación $\cosh(z) = 4i$.
2. Encontrar todas las soluciones complejas de la ecuación $z^i = -1$.

Solución ▼ [007597]

Ejercicio 7819 Logaritmos

1. ¿Se puede definir una determinación de la función logaritmo en $\mathbb{C}\backslash\{\,x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 0\,\}$? En el caso afirmativo, dar una definición de esta determinación.
2. La misma pregunta en el plano complejo privado del conjunto

$$L = [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \,/\, \,|\, z-2 \,| = 1 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \,\} \cup [\,3,\infty\,[.$$



Solución ▼ [007598]

Ejercicio 7820 Integrales

---

1. Parametrar el círculo unitario recorrido en el sentido trigonométrico.
2. Calcular usando el parametraje anterior $\displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz$.
3. ¿La función $\frac{\cosh(z)}{z}$ admite una primitiva en $\mathbb{C}^{\times}$? Si es sí, explicitarla.
4. Retomar las preguntas precedentes con la función $\frac{\sinh(z)}{z}$.

Solución ▼ [007599]

Ejercicio 7821 Integrales

---

1. Enunciar la fórmula de Cauchy para discos, precisando las hipótesis.
2. Calcular $I_1 := \displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} dz$.
3. Calcular $I_2 := \displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz$.
4. Calcular $I_3 := \displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3} dz$.
5. Entre las aplicaciones $\operatorname{sen}(z)$, $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$, $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}$ y $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3}$ sobre $\mathbb{C}^{\times}$, ¿cuáles tienen una primitiva holomorfa en $\mathbb{C}^{\times}$?

Solución ▼ [007600]

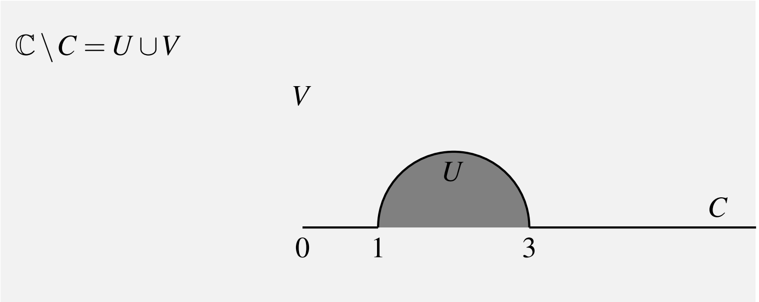
Ejercicio 7822 Logaritmos

---

1. Recordar la definición de la rama principal del logaritmo.
2. ¿Se puede definir un logaritmo en $\mathbb{C} \setminus C$ el plano complejo privado del conjunto

$$C := [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \,/\, \,|\, z-2 \,| = 1,\ \mathbb{H}oxet \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \,\} \cup [\,3,\infty\,[?$$

Se llama $U := \{z \in \mathbb{C}, \mid z-2 \mid < 1, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ la parte sombreada, y $V := \{z \in \mathbb{C}, z \notin C, z \notin U\}$ el resto de $\mathbb{C} \setminus C$.



Se especifica en U y en V el argumento elegido en la definición del logaritmo.

Solución ▼ [007601]

Ejercicio 7823 Aplicación entera en $\mathbb{H}$

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa no constante. Demostrar que la imagen del plano complejo por f interseca todos los discos abiertos no vacíos $\Delta_r(a)$ de $\mathbb{C}$.
2. Deducir que toda aplicación holomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$ es constante.
3. Se considera
$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} \setminus \{-i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}$$
Demostrar que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $1 - |h(z)|^2 = \dfrac{4\,\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}$.
4. Deducir que la imagen del semiplano de Poincaré $\mathbb{H}$ por h es una parte acotada de $\mathbb{C}$.
5. Deducir por una nueva prueba que toda aplicación holomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{H}$ es constante.

Solución ▼ [007602]

Ejercicio 7824 Primitiva y residuos

1. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$, c un punto de D y $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Recordar la definición del residuo de f en c.
2. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Se supone que f admite una primitiva en $D \setminus \{c\}$. ¿Qué se puede decir del residuo de f en c?
3. Sea c un punto de Δ y $f : \Delta \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa que admite un polo de orden 3 en c. ¿Bajo qué condición f admite una primitiva en $\Delta \setminus \{c\}$?

Solución ▼ [007603]

Ejercicio 7825 Residuos y representación

1. Enunciar el teorema del residuo.

2. Usando el teorema del residuo, encontrar la fórmula de representación de Cauchy para discos : Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Entonces, para todo disco $\Delta_r(a)$ cuya adherencia está incluida en D,
$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$
3. Demostrar de forma más general : Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Entonces, para todo disco $\Delta_r(a)$ cuya adherencia está incluida en D,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{(z-b)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}.$$

Solución ▼ [007604]

Ejercicio 7826 Raíz de polinomios

1. Enunciar el teorema de Rouché.
2. Demostrar que los ceros del polinomio $p(z) = z^4 - 7z - 1$ están todos incluidos en el disco $\Delta_2(0)$ centrado en el origen del radio 2. Todos los supuestos del teorema utilizado deben comprobarse cuidadosamente.

Solución ▼ [007605]

Ejercicio 7827 Preguntas del curso

1. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ infinitamente derivable en el sentido real, pero no holomorfa. Se justifican estas dos propiedades.
2. ¿La aplicación $\mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admite una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{3\}$? Justificar.
3. Dar un ejemplo de un abierto estrellado de $\mathbb{C}$. Se especifica el punto en relación al cual el abierto es estrellado.
4. Dar un ejemplo de un abierto no estrellado de $\mathbb{C}$. Se justifica que el ejemplo propuesto no es estrellado.

Solución ▼ [007606]

Ejercicio 7828 Cálculo de integrales

Se parametriza el círculo C_r privado del punto $-r$ de centro 0 y de radio $r > 0$ orientado en la dirección contraria a las manecillas del reloj del plano complejo definiendo para $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ como el punto de intersección de la recta de ecuación $y = t(x+r)$, con el círculo C_r diferente de $-r$.

1. Demostrar que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.
2. Verificar que ξ es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.
3. Deducir que
$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$
4. Deducir el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Solución ▼ [007607]

Ejercicio 7829 Biholomorfismo de $\mathbb{H}$

Se recuerda que para toda matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, se asocia la aplicación lineal fraccionaria

$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{C}\setminus\{-\tfrac{d}{c}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{\tfrac{a}{c}\} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

1. Demostrar que h_A envía $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$.
2. Demostrar que para todo elemento z de $\mathbb{H}$, existe $A\in SL(2,\mathbb{R})$ tal que $h_A(i)=z$.

Solución ▼ [007608]

Ejercicio 7830 Representación

1. Enunciar la fórmula de representación de Cauchy para discos.
2. Enunciar el teorema del residuo.
3. Usando la fórmula de representación de Cauchy, Demostrar que si una función holomorfa en Δ solo toma valores reales en el círculo $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$, entonces f toma un valor real en 0.
4. Usando el teorema de representación de Cauchy y sin el teorema de los ceros aislados, Demostrar que si una función holomorfa en Δ es constante en el círculo $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$, entonces f es constante en $\overline{\Delta_{\frac{1}{2}}}$.

Solución ▼ [007609]

Ejercicio 7831 Crecimiento al infinito

Se recuerda la fórmula de Gutzmer : sea f la suma de la serie entera $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de radio de convergencia R. Entonces, para todo $r<R$,

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

1. Demostrar usando la fórmula de Gutzmer que toda aplicación holomorfa $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ acotada es constante..
2. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ aplicación holomorfa. Se supone que
$$\forall r\in]0,+\infty[,\ \ M(r):=\sup_{|z|<r}|f(z)|\leqslant r.$$
Demostrar que f es una aplicación afín.

Solución ▼ [007610]

Ejercicio 7832 Serie entera

1. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ una serie entera convergente (con un radio de convergencia estrictamente positivo). Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Sean dos series enteras centradas en 0 radio de convergencia $R>0$ y suma respectiva f y g. Se supone que para todo $x\in]-R,R[, f(x)=g(x)$. Demostrar que para todo $z\in\Delta_r, f(z)=g(z)$.

3. Deducir que para todo $a \in \mathbb{R}$, y para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen}(a+z) = \operatorname{sen}(a)\cos(z) + \cos(a)\operatorname{sen}(z)$.

Solución ▼ [007611]

Ejercicio 7833 Ecuaciones

---

1. Sea $c \in \mathbb{C}$. Demostrar que si $z \in \mathbb{C}$, entonces $\operatorname{sen} z = c \iff (\mathrm{e}^{iz})^2 - 2ic\mathrm{e}^{iz} - 1 = 0$.
2. Sea $c \in [-1, 1]$. Demostrar que todas las soluciones de $\mathbb{C}$ de $\operatorname{sen} z = c$ son reales.
3. Sea a y b dos números complejos. Calcular $\mathrm{e}^{i(a+b)}$ y $\mathrm{e}^{-i(a+b)}$ en función de $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$, $\cos a$ y $\cos b$.
4. Sea a y b dos números complejos. Demostrar la fórmula para $\operatorname{sen}(a+b)$ en función de $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$, $\cos a$ y $\cos b$.
5. Resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación $\cos z + \operatorname{sen} z = 2$.

Solución ▼ [007612]

Ejercicio 7834 Biholomorfismo de $\mathbb{H}$

Se recuerda que para toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de* $SL(2,\mathbb{R})$, *se asocia la aplicación lineal fraccionaria*

$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\} \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

1. Demostrar que h_A envía $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$.
2. Demostrar que para todo elemento z de $\mathbb{H}$, existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tal que $h_A(i) = z$.

Solución ▼ [007613]

Ejercicio 7835 Logaritmos

---

1. Determinar y representar el conjunto $D := \{z \in \mathbb{C}, z^3 \in \mathbb{C}^-\}$.
2. Sea $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \log(z^3)$. ¿En qué puntos de $\mathbb{C} \setminus D$ se puede prolongar f por continuidad ?
3. Comparar las funciones f y $3\log$ en la intersección $D \cap \mathbb{C}^-$ de su dominio de definición.

Solución ▼ [007614]

Ejercicio 7836 A partir de las definiciones

---

1. Recordar la definición de la holomorfía de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en un punto a de $\mathbb{C}$.
2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Determinar si la aplicación $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ o no. Si es sí, determinar su $\mathbb{C}$-derivada en función de la de f.

[007615]

Ejercicio 7837 Serie entera

---

1. Recordar la definición del radio de convergencia de la serie entera $\sum a_n z^n$.
2. Sea R el radio de convergencia de la serie entera $\sum a_n z^n$. Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum(1 + \frac{1}{n+1})a_n z^n$.

[007616]

Ejercicio 7838 Aplicaciones holomorfas

Se recuerdan las ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares (r,θ), para una función $f=u+iv$ de un abierto D de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

1. La aplicación $u:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto \log_{\mathbb{R}}(x^2+y^2)$ ¿es armónica en su dominio de definición ?
2. Usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares, determinar si existe o no una función holomorfa f sobre $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ cuya parte real es u.

[007617]

Ejercicio 7839 Biolomorfismos

Sea a un número complejo de módulos estrictamente inferior a 1. Demostrar que la aplicación $f_a: z\longmapsto \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ realiza un biholomorfismo del disco Δ en sí mismo. [007618]

Ejercicio 7840 Serie entera

1. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ una serie entera convergente (con un radio de convergencia estrictamente positivo). Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n!}z^n$.
2. Sean dos series enteras centradas en 0 radio de convergencia $R>0$ y suma respectiva f y g. Se supone que para todo $x\in]-R,R[, f(x)=g(x)$. Demostrar que para todo $z\in\Delta_R(0), f(z)=g(z)$.

[007619]

Ejercicio 7841 Preguntas del curso

1. Recordar la definición de la rama principal del logaritmo.
2. Recordar la definición de una primitiva de una función continua f sobre $\mathbb{C}$.
3. Dar si es posible un ejemplo de una función holomorfa en $\mathbb{C}$ que no admite una primitiva. Si no, aplicar un teorema para demostrar que toda función holomorfa en $\mathbb{C}$ admite una primitiva.

[007620]

Ejercicio 7842 Una ecuación

Se fija la rama principal del logaritmo. Resolver en $\mathbb{C}^-$, la ecuación $z^i=-1$. [007621]

Ejercicio 7843 Aplicaciones holomorfas

Desarrollar $z\mapsto\frac{z^2+z-1}{z+1}$ en elementos simples y calcular $\int_{\partial\Delta_2(0)}\frac{z^2+z-1}{z+1}dz$. [007622]

Ejercicio 7844 Preguntas del curso

1. ¿La aplicación $\mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admite una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{3\}$? Justificar.
2. Dar un ejemplo de un abierto no estrellado de $\mathbb{C}$. Justificar que el ejemplo propuesto no es estrellado.

[007623]

Ejercicio 7845 Cálculo de integrales

Calcular

$$\int_{\partial\Delta_1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z+2)^2} dz, \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z+2)^2} dz \quad \text{y} \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z+1)^2(z+2)^2} dz.$$

[007624]

Ejercicio 7846 Singularidades

1. Sea $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Se supone que $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$. ¿Cuál es la naturaleza de la singularidad aislada 0 ? (Aparente, polar o esencial) Justificar.
2. Dar un ejemplo de una aplicación holomorfa con una singularidad esencial. Justificar.

[007625]

Ejercicio 7847 Aplicaciones holomorfas

1. Recordar la definición del índice $\operatorname{Ind}_\Gamma(a)$ de un punto a de $\mathbb{C}$, con respecto a un camino cerrado compacto orientado Γ de $\mathbb{C}$.
2. Se supone que Γ está parametrizada en la forma $\gamma(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$, donde r y θ son dos funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ a trozos en $[0,1]$, r, con valores estrictamente positivos y $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1) \bmod 2\pi$ demostrar que
$$\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \theta'(t) dt$$
y por lo tanto, corresponde al número de vueltas, contado positivamente en la dirección de avance, que hace Γ alrededor de a.

[007626]

Ejercicio 7848 Preguntas del curso

1. Recordar la definición de la rama principal del logaritmo.
2. Recordar la definición de una primitiva de una función continua f sobre $\mathbb{C}$.
3. Dar si es posible el ejemplo de una función continua no holomorfa f sobre $\mathbb{C}$ que admite una primitiva.
4. Dar si es posible el ejemplo de una función holomorfa no constante de Δ en $\mathbb{C}$. En caso contrario, demostrar la no-existencia.
5. Dar si es posible el ejemplo de una función holomorfa no constante de $\mathbb{C}$ en Δ. En caso contrario, demostrar la no-existencia.
6. Dar si es posible el ejemplo de una función holomorfa no constante de $\mathbb{H}$ en Δ. En caso contrario, demostrar la no-existencia.

Solución ▼ [007627]

Ejercicio 7849 Cálculo de integrales

Calcular

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}dz.$$

Solución ▼ [007628]

Ejercicio 7850 Aplicaciones enteras

Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una aplicación holomorfa no constante.

1. Demostrar que el punto 0 está en la adherencia de la imagen de f.
2. Determinar la adherencia de la imagen de f.

Solución ▼ [007629]

Ejercicio 7851 Singularidades

Sea $D=\mathbb{C}^\star$ y $f:D\to\mathbb{C}$ la aplicación definida por $f(z)=\exp(\frac{1}{z})-\frac{1}{z}$.

1. Determinar la naturaleza de la singularidad de f en 0 (aparente, polar o esencial).
2. ¿Admite la aplicación una primitiva en D?
3. Calcular $\displaystyle\int_{\partial\Delta}\exp(\frac{1}{z})dz$.

Solución ▼ [007630]

Ejercicio 7852 Aplicaciones en el disco

Sea f una función holomorfa en el disco unidad Δ. El objetivo del ejercicio es de demostrar que $|f(z)|$ no tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1.

1. Verificar el enunciado para la aplicación $\Delta\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\dfrac{1}{z^6-1}$.
2. Se supone primero que f no tiene cero en Δ. Sea r_n una sucesión de reales de $[0,1[$, tales que para todo entero natural no nulo n y todo z de Δ de módulo mayor que r_n, $f(z)$ es de módulo mayor que n. Demostrar entonces que para todo n, $|f(0)|\geqslant n$ y concluir.
3. En el caso general, se supone que $|f(z)|$ tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1. Demostrar que f se puede escribir como producto en Δ de un polinomio y de una aplicación holomorfa g que no tiene cero en Δ. Concluir.

Solución ▼ [007631]

Ejercicio 7853 Preguntas del curso

1. Calcular las integrales $\displaystyle\int_{\partial\Delta}\frac{dz}{z}$ y $\displaystyle\int_{\partial\Delta}\frac{dz}{z-2}$ usando parametrización y desarrollo en series enteras, sin usar teoremas generales.
2. Enunciar el lema de Goursat.
3. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f:D\to\mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Dar la definición de un logaritmo de f.

4. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa que admite un logaritmo g sobre D. Dar un ejemplo de otro logaritmo de f. Demostrar que f no tiene cero en D y calcular la derivada compleja de g.
5. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y a un punto de D. Sea $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Definir el residuo de f en a.
6. Definir el índice de un punto con respecto a un camino cerrado orientado en $\mathbb{C}$.

[007632]

Ejercicio 7854 Aplicaciones enteras

¿Existe una aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante y biperiódica de períodos 1 e i, es decir i.e.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z+1) = f(z+i) = f(z).$$

Si es sí, dar un ejemplo. Si no, demostrar la no-existencia de tal aplicación.

Solución ▼ [007633]

Ejercicio 7855 Aplicaciones proporcionales

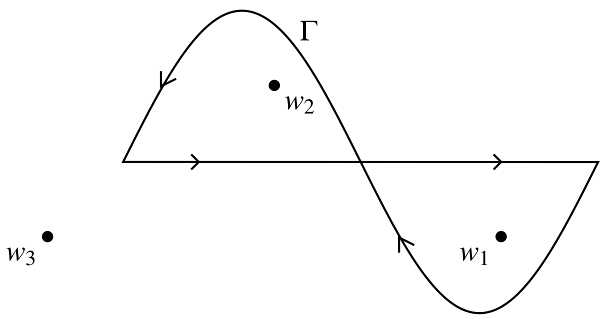
Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ conteniendo el disco unitario cerrado. Sean f y g dos aplicaciones holomorfas en D tales que para todo $z \in \partial\Delta$, $|f(z)| = |g(z)|$.

1. Se supone que f y g no tiene cero en D. Demostrar que existe un número complejo λ módulo 1 tal que $f = \lambda g$ sobre D.
2. ¿Sigue siendo cierta la conclusión si ya no suponemos que f y g no tiene cero en D?

Solución ▼ [007634]

Ejercicio 7856 Singularidades

Se considera el contorno Γ y los puntos w_1, w_2, w_3 como en la figura de abajo



Expresar el valor de las siguientes integrales usando los números complejos w_1, w_2, w_3 :

1. $A = \displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$. 2. $B = \displaystyle\int_\Gamma \operatorname{sen}(z)dz$. 3. $C = \displaystyle\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z-w_1)^2}dz$.

Solución ▼ [007635]

Ejercicio 7857 Localización de raíces

Se considera el polinomio $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

1. Demostrar que P tiene sus cuatro raíces en el disco Δ_2.
2. Demostrar que P solo admite una raíz en Δ.
3. Demostrar que P no permite una raíz en $\Delta_{\frac{1}{3}}$.
4. Sea a la raíz de P en el disco Δ. Demostrar que

$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z dz.$$

Solución ▼ [007636]

Ejercicio 7858 Preguntas del curso

1. ¿Una aplicación holomorfa en $\mathbb{C}$ de derivada en todas partes no nula es necesariamente inyectiva?
2. Recordar la definición de la rama (o determinación) principal del logaritmo.
3. Habiendo fijado la determinación principal $\mathbb{H}oxLogz$ del logaritmo, definir funciones de potencia $z \mapsto z^\alpha$, para todo número complejo α precisando su dominio de definición.
4. Demostrar usando un teorema del curso que una aplicación holomorfa en un abierto conexo D de $\mathbb{C}$, donde todos los valores son de módulo 1 es constante.
5. Definir una singularidad esencial para una aplicación holomorfa definida en un abierto de $\mathbb{C}$.
6. Dar un ejemplo de un automorfismo del semiplano de Poincaré que no sea una traslación.

[007637]

Ejercicio 7859 Logaritmo

Sea $\mathbb{H}oxLogz$ la determinación principal del logaritmo en $\mathbb{C}^-$.

1. Se considera $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; ¿los números complejos $\mathbb{H}oxLog(z^2)$ y $2\mathbb{H}oxLogz$ son iguales?
2. Se considera $z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$; ¿los números complejos z^{2i}, $(z^2)^i$ y $(z^i)^2$ son iguales?

[007638]

Ejercicio 7860 Laplaciano

Se recuerda que el laplaciano $\Delta\varphi$ de una función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ es la función en U dada por $\Delta\varphi(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)$.

1. Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Expresar $\Delta|f|^2$, con ayuda de f'.
2. Sea D un abierto conexo y $(f_i : D \to \mathbb{C})_{i=1}^N$ una familia finita de aplicaciones holomorfas. Se supone que

$$\forall z \in D, \ \sum_{i=1}^N |f_i(z)|^2 = 1.$$

Demostrar que todos los f_i son constantes en D.

Solución ▼ [007639]

Ejercicio 7861 Aplicación acotada

Demostrar que para todo número complejo z en el disco unidad Δ,

$$\left|\frac{4z+3}{4+3z}\right| \leqslant 1.$$

Solución ▼ [007640]

Ejercicio 7862 Singularidades

¿Cuánto vale, en función del número real $r > 0$, la integral

$$I_r := \int_{\Delta_r} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}?$$

Se especifica los valores de r excluidos.

Solución ▼ [007641]

324 450.00 Interpolación de polinomios

325 451.00 Curva de Bézier, spline

326 452.00 Integración numérica

327 453.00 Método de Newton

328 454.00 Resolución de ecuaciones diferenciales

329 455.00 Resolución de sistemas lineales : método directo

330 456.00 Resolución de sistemas lineales : método iterativo

331 457.00 Resolución de sistemas lineales : método de gradiente

332 458.00 Cálculo de valores propios y vectores propios

333 459.00 Otro

Ejercicio 7863 Matrices triangulares elementales

Sea $n \in \mathbb{N}$ y se define las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$:

— E_{ij} matriz con un 1 en la posición (i, j) y 0 las demás entradas ;
— $V_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i > j$;
— $L(l_i) = I + l_i e_i^T$, $l_i \in \mathbb{R}^n$ tal que sus primeras i componentes son nulas.

1. ¿Cuáles son los resultados de las siguientes operaciones en la matriz A :

$$B = V_{ij}(\lambda)A, \quad C = AV_{ij}(\lambda)?$$

2. ¿Cuál es la forma de la matriz
$$V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda'),\;\; k > i?$$
3. Representar $L(l_i)$ y demostrar que $L(l_i)^{-1} = L(-l_i)$.
4. Descomponer $L(l_i)$ como producto de matrices de la forma $V_{km}(\lambda)$.
5. Calcular $L = \prod_{i=1}^{n-1} L(l_i)$ y su inversa L^{-1}
6. Se suponen los l_i almacenados en una matriz bidimensional Z y $b \in \mathbb{R}^n$ almacenado en una matriz unidimensional B. Dar un algoritmo permitiendo calcular en B la solución de $Lx = b$:
   (a) utilizando la expresión de L^{-1} ;
   (b) resolviendo el sistema triangular.
   ¿Cuál es la conclusion ?

Solución ▼ [002210]

Ejercicio 7864 Algunas identidades para calcular inversas

Demostrar la identidad
$$(A+UBV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I+BVA^{-1}U)^{-1}BVA^{-1}$$
precisando :
— su dominio de validez ;
— los tipos de matrices A, U, B, V.

Algunos casos particulares :
1. Se supone $B = \beta$ escalar, $U = u \in \mathbb{R}^n$, $V = v^T \in \mathbb{R}^n$. Encontrar la fórmula de Shermann–Morrison que permite el cálculo de la inversa de una matriz que aparece como una perturbación de rango 1 de una matriz de la que conocemos la inversa.
2. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regular y $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que $1 + v^T A^{-1} u = 0$. Demostrar que
$$B = \begin{pmatrix} A+uv^T & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \text{ es regular.}$$
   Calcular B^{-1} observando que
$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T & 1 \end{bmatrix}$$
3. Sea
$$D = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \text{ matriz invertible con } P \in \mathbb{R}^{p\times p}, Q \in \mathbb{R}^{p\times q}, S \in \mathbb{R}^{q\times q}$$
   Calcular D^{-1} observando que
$$D = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q \\ S-I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$
4. *Cálculo recursivo de la inversa* : Se establece
$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{bmatrix} \text{ con } A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} u, v \in \mathbb{R}^{n-1}, s \in \mathbb{R}$$
   Utilizar la fórmula anterior para calcular A_n^{-1} en función de A_{n-1}^{-1}. Deducir un algoritmo recursivo para calcular la inversa de una matriz cuadrada de tamaño n.

Solución ▼ [002211]

Ejercicio 7865 Algunas propiedades de las normas matriciales

1. Sea A una matriz de orden (m,n). Demostrar las siguientes desigualdades para las normas p, $p = 1,2,\infty$ y la norma de Frobenius :
   (a) $\|A\|_2 \leqslant \|A|_F \leqslant \sqrt{n}\|A|_2$
   (b) $\max|a_{ij}| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{mn}\max|a_{ij}|$
   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{m}\|A\|_\infty$
   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|A\|_1$
2. Sea $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E = uv^T$. Demostrar que

$$\|E\|_F = \|E\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$$

$$\|E\|_\infty = \|u\|_\infty\|v\|_1$$

Solución ▼ [002212]

Ejercicio 7866

Demostrar que si $\rho(A) < 1$, entonces
— $I - A$ es regular;
— $(I-A)^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} C_k$, con $C_k = I + A + \cdots + A^k$.

Solución ▼ [002213]

Ejercicio 7867 Estimación del error en el cálculo de la inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n invertible y B una aproximación de A^{-1} Se define $X = I - AB$ y se supone que $\|X\| < 1$. Demostrar que

$$\|A^{-1} - B\| \leqslant \frac{\|BX\|}{1 - \|X\|}.$$

Solución ▼ [002214]

Ejercicio 7868 Proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Sean
— H =gen$\{v_1,\dots,v_r\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores $\{v_i\}$ supuestamente independientes;
— $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix}$ la matriz de tipo $n\times r$ cuyas columnas son los componentes de los v_i en la base canónica $\varepsilon = (e_1,\dots,e_n)$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se designa por y su proyección ortogonal sobre H y por X y Y las matrices columna de los componentes de x e y en la base ε. Se define

$$y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i.$$

1. Demostrar que la matriz $G = G(v_1,\dots,v_r) = V^TV$ es invertible.

2. Demostrar que los α_i verifican el sistema

$$G\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=V^TX$$

3. Deducir que $Y=VG^{-1}V^TX=PX$, con $P=VG^{-1}V^T$ (P es, por lo tanto la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre H
4. *Aplicación* : Se considera $n=3, v_1=e_1, v_2=e_1+e_2+e_3$. Determinar la proyección ortogonal sobre $H=\text{gen }\{v_1,v_2\}$ de $x=2e_1-e_2+e_3$.
5. ¿Cuál es la matriz de la proyección ortogonal sobre $H=\text{gen }\{v\}$?
6. Demostrar que, para $x\in\mathbb{R}^n$

$$d^2(x,H)=\frac{\det G(x,v_1,\dots,v_r)}{\det G(v_1,\dots,v_r)}$$

[002215]

Ejercicio 7869

Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $r\leqslant p=\min(m,n)$. Se considera la descomposición en valores singulares de A

$$U^TAV=\text{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$$

donde los σ_i son los valores singulares de A

1. Demostrar que $\text{Im}(A)=\text{gen}\{u^1,u^2,\dots,u^r\}$ y $\text{Ker}(A)=\text{gen}\{v^{r+1},\dots,v^n\}$.
2. Demostrar que $\text{Im}(^TA)=\text{gen}\{v^1,u^2,\dots,v^r\}$ y $\text{Ker}(A^T)=\text{gen}\{u^{r+1},\dots,u^m\}$.
3. Determinar las matrices de las proyecciones ortogonales en $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A^T)$, $\text{Ker}(A^T)$, con ayuda de U y V.
4. *Aplicación :* calcular la descomposición en valores singulares de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

y las matrices correspondientes a las proyecciones ortogonales del ejercicio anterior.

Solución ▼ [002216]

Ejercicio 7870 Pseudo-inversa de una matriz

Definición : Sea Σ una matriz diagonal de tipo $(m\times n)$:

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\mu_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\mu_r&&&\\&&&0&&\\&\mathbf{O}&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}.$$

Se llama seudo–inversa de Σ la matriz $\Sigma^\dagger$ de tipo $(n \times m)$ definida por

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \mathbf{O} \\ \mathbf{0} & & \mu_r^{-1} & \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz de tipo $(m \times n)$ cuya descomposición en valores singulares es $A = U\Sigma V^*$. Se llama *pseudo-inversa* de la matriz A la matriz $A^\dagger$ de tipo $(n \times m)$ definida por

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^*.$$

1. ¿Qué aplicación representa la restricción de $\Sigma^\dagger\Sigma$ en el subespacio $\operatorname{gen}\{e_1, \ldots, e_r\}$?
2. Demostrar que si A es cuadrada regular, entonces $A^\dagger = A^{-1}$.
3. Demostrar que
$$A^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} v_i u_i^*.$$
4. Demostrar que
— $AA^\dagger$ es la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(A)$;
— $A^\dagger A$ es la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(A^*)$
5. Demostrar que la restricción a $\operatorname{Im}(A^*) = \ker(A)^\perp$ de A^*A es una matriz invertible y
$$(A^*A)^{-1} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-2} v_i v_i^*.$$

Solución ▼ [002217]

Ejercicio 7871

Demostrar que, para $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$

1. $\|A\|_2 = \sigma_1$, el más grande valor singular de A
2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$, donde los σ_i son los valores singulares de A.
3. Los valores singulares no nulos de A son las raíces cuadradas de los valores propios no nulos de A^*A y AA^*.
4. Para $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i$.
5. Si $A = A^*$, entonces los valores singulares de A son los valores absolutos de los valores propios de A

Solución ▼ [002218]

Ejercicio 7872

Demostrar que

1. $\operatorname{cond}_2(A) = \mu_n(A)/\mu_1(A)$, con $\mu_n(A)$ y $\mu_1(A)$ respectivamente el mayor y el menor valor singular de A.
2. Si A es normal entonces
$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}.$$

3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal entonces

$$\operatorname{cond}_2(A) = \operatorname{cond}_2(AQ) = \operatorname{cond}_2(QA).$$

Solución ▼ [002219]

Ejercicio 7873

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$

1. Calcular $\operatorname{cond}_2(A)$, $\operatorname{cond}_1(A)$ y $\operatorname{cond}_\infty(A)$;
2. Resolver :
   — $Ax = b$, para $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
   — $Ay = b + \delta b$, para $\delta b = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Az = b + \Delta b$, para $\Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$
3. Para cada una de las tres normas consideradas, encontrar una mayoración teórica de

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \text{ y } \frac{\|z-x\|}{\|x\|}$$

   y comparar con los valores exactos. ¿Qué se concluye ?

[002220]

Ejercicio 7874 Condicionando el problema de inversión de una matriz

Sea A una matriz invertible dada.

1. Si $(A+\delta A)$ es una matriz invertible, demostrar

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

2. Demostrar que

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1+\mathscr{O}(\|A\|)).$$

Solución ▼ [002221]

Ejercicio 7875 Tamaño de elementos en la eliminación gaussiana

Denotemos $\tilde{A}_k$ la matriz cuadrada de orden $(n-k+1)$ formada por los elementos a^k_{ij}, $k \leqslant i, j \leqslant n$ de la matriz $A_k = (a^k_{ij})$ obtenida como resultado de la $(k-1)$–ésima etapa de eliminación de Gauss. Se supone $A = A_1$ simétrica definida positiva.

1. Denotando $(.,.)$ el producto escalar euclidiano y $v' \in \mathbb{R}^{n-k}$ el vector formado por las $(n-k)$ últimas componentes de un vector $v = (v_i)_{i=k}^n \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ cualquiera, establecer identidad

$$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a^k_{kk}} \left| a^k_{kk} v_k + \sum_{i=k+1}^{n} a^k_{ik} v_i \right|^2.$$

2. Demostrar que cada matriz $\tilde{A}_k$ es definida positiva simétrica.

3. Establecer las siguientes desigualdades :

$$0 < a_{ii}^{k+1} \leqslant a_{ii}^{k}, \quad k+1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\max_{k+1\leqslant i\leqslant n} a_{ii}^{k+1} = \max_{k+1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}^{k+1}\right| \leqslant \max_{k\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}^{k}\right| = \max_{k\leqslant i\leqslant n} a_{ii}^{k}.$$

Solución ▼ [002222]

Ejercicio 7876 Estrategia de pivote

---

1. Demostrar que para cualquier matriz $A = (a_{ij})$ de tipo (2×2) se tiene

$$\operatorname{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2}, \text{ con } \sigma = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} |a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}.$$

2. Calcular los condicionamientos $\operatorname{cond}_p(.)$, para $p = 1, 2, \infty$ de matrices exactas obtenidas en el primer paso del procedimiento de eliminación gaussiana para resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2, \end{cases}$$

según que se empieza, o no, intercambiando las dos ecuaciones. ¿Conclusión ?

[002223]

Ejercicio 7877 Factorización LU de una matriz banda

Demostrar que la factorización LU preserva la estructura de las matrices de banda en el siguiente sentido :

$$a_{ij} = 0, \text{ para } |i-j| \geqslant p \Rightarrow \begin{cases} l_{ij} = 0 & \text{para } i-j \geqslant p \\ u_{ij} = 0 & \text{para } j-i \geqslant p. \end{cases}$$

Solución ▼ [002224]

Ejercicio 7878 Factorización de una matriz simétrica

Sea A una matriz simétrica invertible que admite una factorización LU. Demostrar que A se escribe bajo la forma

$$A = B\tilde{B}^T, \text{ donde}$$

— B es una matriz triangular inferior ;
— $\tilde{B}$ es una matriz donde cada columna es igual a la columna correspondiente de B, o igual a la columna correspondiente de B cambiada de signo.

Aplicación numérica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución ▼ [002225]

Ejercicio 7879 Algunas factorizaciones LU

---

1. Sea $A = LU$ la descomposición LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $|l_{ij}| \leqslant 1$. Sean a_i^T y u_i^T las rectas i de A y U respectivamente. Demostrar que
$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$
y que
$$\|U\|_\infty \leqslant 2^{n-1} \|A\|_\infty$$
2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ o } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$
Demostrar que A tiene una descomposición LU con $|l_{ij}| \leqslant 1$ y $u_{nn} = 2^{n-1}$.

[002226]

Ejercicio 7880

Se supone $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible. Demostrar que si $PA\Pi = LU$ se obtiene por el método de Gauss con pivoteo total, entonces
$$\forall i, j = 1, \ldots, n, \quad |l_{ij}| \leqslant 1,$$
$$\forall i = 1, \ldots, n, \; \forall j = i, \ldots, n, \quad |u_{ij}| \leqslant |u_{ii}|.$$

[002227]

Ejercicio 7881

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que A^T sea a diagonal estrictamente dominante. Demostrar que A admite una descomposición LU con L^T, con diagonal estrictamente dominante.

Solución ▼ [002228]

Ejercicio 7882 Matrices de Householder

1. Sea v un vector real satisfaciendo $v^T v = 1$. Demostrar que la matriz de Householder
$$H(v) = I - 2vv^T$$
representa una simetría con respecto al subespacio vectorial formado por los vectores ortogonales a los vectores v. Deducir que $\det(H(v)) = -1$.
2. Demostrar que toda matriz ortogonal es producto de a lo sumo n matrices de Householder. Deducir una interpretación geométrica de las matrices ortogonales.

Solución ▼ [002229]

Ejercicio 7883 Algoritmo de Gram–Schmidt y Gram-Schmidt modificado

Dados n vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^m$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$, se quiere calcular una base ortonormal para $\text{gen}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Se define $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y se considera la factorización QR de A,
$$A = QR, \quad Q = [q_1, \ldots, q_n], \quad r_i^T, \; i = 1, \ldots, n, \text{ las rectas de } R.$$

1. Demostrar que
$$\operatorname{Im} A = \operatorname{gen}\{q_1, \dots, q_n\}.$$

2. Demostrar que
$$q_k = \frac{1}{r_{kk}}\left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i\right), \ \ k = 1, \dots, n.$$

3. Deducir un algoritmo para el cálculo recursivo de los q_i (algoritmo de Gram-Schmidt).

4. Algoritmo de Gram-Schmidt modificado

   El algoritmo anterior es numéricamente inestable debido a la pérdida de ortogonalidad en el cálculo de q_i. Se va a reformular el algoritmo para hacerlo estable. Para $k = 1, \dots, n-1$, se define $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-k+1)}$ de la manera siguiente :
$$[0, A^{(k)}] = A - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_i^T = \sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T$$
   y se describe la etapa k del algoritmo.

   (a) Demostrar que si se establece
$$A^{(k)} = [z, B], \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)},$$
   entonces
$$r_{kk} = \|z\|_2, \quad q_k = z/r_{kk}.$$

   (b) ¿Cómo podemos calcular la línea k de R a partir de $A^{(k)}$?

   (c) Calcular $A^{(k+1)}$.

   (d) A partir de las preguntas anteriores, describir el algoritmo que permite el cálculo de la factorización $A = Q_1 R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormal, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior (Gram–Schmidt modificado). El cálculo de Q_1 debe hacerse en el sitio.

   (e) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo anterior ?

Solución ▼ [002230]

Ejercicio 7884 Rotación de Givens

Sean $p, q : 1 \leqslant p < q \leqslant n$, $c, s \in \mathbb{R}$, $c^2 + s^2 = 1$; se consideran las matrices
$$G = G_{p,q}(c,s) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& c & \cdots & -s &&& \\ &&& \vdots & \ddots & \vdots &&& \\ &&& s & \cdots & c &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$
$g_{kk} = 1$, si $k \neq p, q$; $g_{kk} = c$, si $k = p, q$; $g_{qp} = -g_{pq} = -s$.

1. Escribir G como perturbado por I por matrices de rango 1.
2. Demostrar que G es invertible, calcular G^{-1}, demostrar que G es ortogonal.
3. ¿Cuál es la acción de G sobre $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $a_{pj} = \alpha, a_{qj} = \beta$. ¿Se puede encontrar G tal que $A' = GA$ verifica :

$$a'_{pj} = 0 = \alpha', \quad a'_{qj} = 0 = \beta'?$$

¿La solución es única ?

Solución ▼ [002231]

Ejercicio 7885

Sea $Z = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$, con $c^2 + s^2 = 1$. Se define ρ por

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c = 0, \\ \frac{1}{2}\text{sign}(c)s & \text{si} \quad |s| < |c|, \\ 2\text{sign}(s)/c & \text{si} \quad |c| \leqslant |s|. \end{cases}$$

1. ¿Cómo reconstruir $\pm Z$ a partir de ρ ?
2. Sea Q una matriz ortogonal producto de n rotaciones de Givens : $Q = J_1 \cdots J_n$. ¿Cómo se puede almacenar Q de la forma más económica en forma factorizada ?
3. Modificar el algoritmo de Givens para reducir A a la forma triangular superior ($QA = R$, Q matriz producto de rotaciones de Givens) almacenando en el lugar (entonces en A) toda la información necesaria para reconstruir Q.
4. Escribir el algoritmo que, a partir de los resultados del algoritmo anterior podemos reconstruir Q.

[002232]

Ejercicio 7886

Sean x e y dos vectores unitarios. Dar un algoritmo que use transformaciones de Givens para calcular una matriz Q tal que $Qx = y$. [002233]

Ejercicio 7887 Método de Givens rápido

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se quiere construir una matriz $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que
— $MA = S$ triangular superior ;
— $MM^T = D$ =diag$(d_1,\dots,d_m)$, $d_i > 0$,
y aplicar esta factorización de A en la resolución de sistemas en el sentido de mínimos cuadrados.

1. Dar la factorización QR de A en términos de M, D y S.
2. Se considera ahora $m = 2$. Sean $x = (x_1, x_2)^T$ y D =diag(d_1, d_2) ($d_i > 0$) dados.
   (a) Se define
   $$M_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$
   Se supone $x_2 \neq 0$. Calcular M_1x y $M_1DM_1^T$.
   ¿Cómo escoger α_1 y β_1 de manera que la segunda componente de M_1x sea nula y que $M_1DM_1^T$ sea diagonal ?
   Por las escogencias precedentes determinar γ_1 tal que
   $$M_1x = \begin{pmatrix} x_2(1+\gamma_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_1DM_1^T = \begin{pmatrix} d_2(1+\gamma_1) & 0 \\ 0 & d_1(1+\gamma_1) \end{pmatrix}.$$

(b) Se supone $x_1 \neq 0$. Se define
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Elegir α_2 y β_2 de manera que
$$M_2 x = \begin{pmatrix} x_1(1+\gamma_2) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } M_2 D M_2^T = \begin{pmatrix} d_1(1+\gamma_2) & 0 \\ 0 & d_2(1+\gamma_2) \end{pmatrix}$$
y determinar γ_2

(c) Demostrar que siempre se puede elegir M_i $(i = 1,2)$ de manera que el “factor de crecimiento” $(1+\gamma_i)$ sea menor que 2.

3. Sea ahora $m \in \mathbb{N}$ cualquiera. Definir las matrices $M_1(p,q)$ y $M_2(p,q)$ tales que
$$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ o } = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$
— $e_q^T M_i(p,q) x = 0$;
— $M_i D M_i^T$ matriz diagonal, con $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $d_i > 0$.
Estas matrices M_i son llamados *matriz de Givens rápida*.

4. Describir el algoritmo que usa transformaciones rápidas de Givens para reducir $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a la forma triangular superior (*método de Givens rapide*) :
$$MA = R, \quad MM^T = \text{diag}(d_1, \ldots, d_m).$$
Los cálculos deben hacerse in situ.
¿Cuál es el costo de este algoritmo ? Comparar con el costo del método Householder para reducir A a la forma triangular superior.

5. Aplicación a la resolución de un sistema lineal en el sentido de mínimos cuadrados.
(a) ¿Cómo aprovechar los resultados proporcionados por el algoritmo anterior para resolver
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2, \text{ con } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ (m > n),\ b \in \mathbb{R}^m?$$
(b) ¿Qué modificaciones introducir en el algoritmo del método rápido de Givens para que resuelva el problema de mínimos cuadrados de la pregunta anterior ?

6. *Aplicación numérica* : resolver en el sentido de mínimos cuadrados por el método rápido de Givens el sistema
$$Ax = b,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

7. Se considera ahora el problema de los mínimos cuadrados
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|D(Ax - b)\|_2 \tag{12}$$
con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $D = \text{diag}(d_i)$ $(d_i > 0)$. Esto corresponde a dar un peso diferente a cada ecuación del sistema. Sea M una matriz producto de matrices rápidas de Givens que satisface
$$\begin{cases} MA = R \text{ triangular superior,} \\ MD^{-2}M^T = \tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_i),\ \tilde{d}_i > 0. \end{cases}$$
¿Cómo puede resolverse el problema (12) ?
¿Qué adaptaciones hacer al algoritmo anterior ?

Solución ▼ [002234]

Ejercicio 7888

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1. ¿Para qué valores de a, A es definida positiva?
2. ¿Para qué valores de a es convergente el método de Gauss–Seidel?
3. Escribir la matriz J de la iteración de Jacobi.
4. ¿Para qué valores de a converge el método de Jacobi?
5. Escribir la matriz $\mathscr{L}_1$ de la iteración Gauss–Seidel. Calcular $\rho(\mathscr{L}_1)$.
6. ¿Para qué valores de a converge más rápido el método de Gauss-Seidel que el método de Jacobi?

[002235]

Ejercicio 7889

Sea A una matriz hermitiana invertible descompuesta en $A = M - N$, donde M es invertible. Sea $B = I - M^{-1}A$ la matriz de la iteración :

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

Se supone que $M + M^* - A$ sea definida positiva.

1. Sea x un vector cualquiera y se escribe $y = Bx$. Demostrar la identidad :
$$(x, Ax) - (y, Ay) = ((x-y), (M + M^* - A)(x-y)).$$
2. Se supone que A es definida positiva. Sea $x \neq 0$ un vector propio de B asociada al valor propio λ, $y = Bx = \lambda x$. Utilizar la identidad anterior para demostrar que $|\lambda| < 1$. ¿Qué se puede concluir acerca de la convergencia del método?
3. Se supone ahora que $\rho(B) < 1$. demostrar que A es definida positiva.
4. Se supone A se descompone por puntos o por bloques en la forma
$$A = D - E - F \text{ con } D \text{ definida positiva.}$$
Demostrar que el método de relajación por puntos o por bloques para $0 < w < 2$ converge si y solo si A es definida positiva.

Solución ▼ [002236]

Ejercicio 7890

Sea $A = I - E - E^*$ una matriz cuadrada de orden N, donde E es una matriz estrictamente triangular inferior ($e_{ij} = 0$, para $i \leqslant j$). Para resolver el sistema $Ax = b$, se propone el método iterativo definido por

$$\begin{cases} (I-E)x_{2k+1} = E^*x_{2k} + b \\ (I-E^*)x_{2k+2} = Ex_{2k+1} + b. \end{cases}$$

1. Determinar B y c, para que se tenga :
$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c.$$
Verificar que $B = M^{-1}N$ y $A = M - N$, con $M = (I-E)(I-E^*)$, $N = EE^*$.

2. Demostrar que $M^* + N$ es una matriz definida positiva. Deducir una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método.

Solución ▼ [002237]

Ejercicio 7891

Sean A y B dos matrices reales de orden N y a, b dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se consideran las dos iteraciones siguientes :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= By_k + a \\ y_{k+1} &= Ax_k + b, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases} \tag{13}$$

con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ dados.

1. Determinar una condición necesaria y suficiente para la convergencia de las dos sucesiones de vectores.
2. Sea $z_k = (x_k, y_k)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Demostrar que (13) puede ser escrito

$$z_{k+1} = Cz_k + c$$

   donde C es una matriz de orden $2n$. Explicitar C y c.
3. Demostrar que $\rho^2(C) = \rho(AB)$.
4. Se considera ahora las dos iteraciones siguientes :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= By_k + a \\ y_{k+1} &= Ax_{k+1} + b, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \tag{14}$$

   Dar una condición necesaria y suficiente para la convergencia. Demostrar que (14) es equivalente a

$$z_{k+1} = Dz_k + d$$

   donde D es una matriz de orden $2N$. Demostrar que $\rho(D) = \rho(AB)$.
5. **Tasa de convergencia**
   Se llama tasa de convergencia asintótica de la matriz iterativa M el número

$$R(M) = -\ln(\rho(M))).$$

   Se define $e^k = x^k - x^*$ el error del orden iterado k.

   (a) Demostrar que el número de iteraciones k, para reducir el error por un factor ε, i.e., $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leqslant \varepsilon$ verifica

$$k \geqslant \frac{-\ln \varepsilon}{R(M)}.$$

   (b) Comparar la tasa de convergencia de los algoritmos (13) y (14).

Solución ▼ [002238]

Ejercicio 7892

Se considera el sistema $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

1. Descomponer A bajo la forma LU y deducir que (15) admite una solución única x^*.
2. Escribir la iteración de Gauss–Seidel para este sistema, es decir el sistema lineal dando $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1})$ en función de $X_n = (x_n, y_n, z_n, t_n, u_n)$.
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se establece $e_n = X_n - x^*$. Demostrar que existe $a \in [0,1[$ tal que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|e_{n+1}\|_\infty \leqslant a\|e_n\|_\infty.$$
Deducir la convergencia de la sucesión.
4. Determinar la matriz de Gauss–Seidel $\mathscr{L}_1$ asociada a A. Calcular $\|\mathscr{L}_1\|_\infty$. Deducir la convergencia de (X_n) hacia x^*.
5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verificando la siguiente propiedad :
$$|a_{ij}| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \;\; i = 2, \ldots, n, \qquad\qquad |a_{11}| > \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|,$$
y en cada línea de A existe un término no nulo a_{ij}, para $i \geqslant 2$ y $j < i$. Demostrar que entonces el método de Gauss–Seidel converge.

Solución ▼ [002239]

334 470.00 Función convexa

Ejercicio 7893

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$.

1. Usando la concavidad del log, demostrar que $(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
2. Demostrar que $(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant \dfrac{1}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.
3. Deducir que $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$.

[001729]

Ejercicio 7894

Sea f una función C^2 sobre $\mathbb{R}$ convexa creciente y no constante. Demostrar que $\lim_{+\infty} f =$ tûûûûûût. [001730]

Ejercicio 7895

Sean p y $q \in]0, +\infty[$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Demostrar que $\forall x, y > 0,\; xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
2. Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$. Demostrar que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant 1$.
3. Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$. Demostrar la desigualdad de Hölder :
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

4. Sea $p > 1$. Escribiendo $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$, demostrar la desigualdad de Minkowski :
$$(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$
5. Sea (a_n) una sucesión estrictamente positiva, $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ y $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Demostrar que si (u_n) converge entonces (v_n) también.

[001731]

Ejercicio 7896

Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexo.

1. Demostrar que f' admite un límite en $\bar{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. Deducir que $\frac{f(x)}{x}$ admite un límite en $+\infty$ (se pueden usar los ε y una fórmula de Taylor de orden 1).

[001732]

Ejercicio 7897

$I \subset \mathbb{R}^{+*}$ un intervalo de $\mathbb{R}, J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$. Demostrar que J es un intervalo de $\mathbb{R}^{+*}$, luego que si $(x,y) \in I^2$, entonces :
$$\forall \lambda \in [0,1], \exists \mu \in [0,1], \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} = \mu\frac{1}{x} + (1-\mu)\frac{1}{y}.$$
Sea f continua en I, y g definida en J por $g(x) = f(\frac{1}{x}), h$ definida en I por $h(x) = xf(x)$. Demostrar que g es convexo $\Leftrightarrow$ h es convexo. [001733]

Ejercicio 7898

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa mayorada. ¿Qué se puede decir de f ? ¿Y si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$? [001734]

Ejercicio 7899

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Demostrar que si $(u_n)_n$ converge entonces $(v_n)_n$ también. [001735]

Ejercicio 7900

Demostrar que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n,\ 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(1 + \prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

[001736]

Ejercicio 7901

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Demostrar que f es convexa. [001737]

Ejercicio 7902

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ convexo o I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, derivable en $x_0 \in I$ y tal que $f'(x_0) = 0$. Demostrar que x_0 minimiza f sobre I. [001738]

Ejercicio 7903

Sea $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, demostrar que g es convexo si y solo si :

$$\forall h \in CM([0,1], \mathbb{R}), \quad g\left(\int_0^1 h\right) \leqslant \int_0^1 g(h).$$

[001739]

335 471.00 Multiplicadores de Lagrange

336 472.00 Algoritmo de Uzawa

337 473.00 Algoritmo simplex

338 474.00 Otro

339 480.00 Ley, independencia, ley condicional

Ejercicio 7904 Independencia

Sean X y Y de variables aleatorias reales independientes teniendo leyes continuas. Demostrar que $P(X = Y) = 0$.

Solución ▼ [006938]

Ejercicio 7905 Cálculo de ley

Sean X, Y dos variables aleatorias independientes con la misma ley exponencial $\mathscr{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Determinar la ley de $|X - Y|$. [006939]

Ejercicio 7906 Cálculo de la ley, función de distribución

1. Sea X una variable aleatoria de ley normal $\mathscr{N}(0,1)$ y $Z = X^2$. Calcular la función de distribución y la densidad de Z. *Observación : la ley de Z es llamada ley χ^2 a 1 grado de libertad.*
2. Sea Y una variable aleatoria de ley distribuida exponencial $\mathscr{E}(\lambda)$. Determinar la ley de Y^3.

Solución ▼ [006940]

Ejercicio 7907 Función de repartición

Sea X una variable aleatoria real positiva integrable. Demostrar que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\, dt$.

Solución ▼ [006941]

Ejercicio 7908 Independencia de eventos

Sean A y B dos eventos independientes. Demostrar que $A \perp B^c$. Deducir que $A^c \perp B$ y $A^c \perp B^c$.

Solución ▼ [006942]

Ejercicio 7909 La ley exponencial es sin memoria

1. Sea X una variable aleatoria de ley $\mathscr{E}(\lambda)$. Demostrar que $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$, para todo $s,t \geqslant 0$.
2. Sea X una variable aleatoria positiva con una densidad continua en $\mathbb{R}_+$. Si $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$, para todo $s,t \geqslant 0$, demostrar que X sigue una ley exponencial. *Este resultado demuestra*

   que la ley exponencial es una ley sin memoria, y que es la única bajo la hipótesis de 2. En hecho, esta hipótesis no es necesaria, pero el resultado es entonces más difícil de demostrar.

Solución ▼ [006943]

Ejercicio 7910 Ley de un tiempo de parada en el lanzamiento de cara o cruz

Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma ley de Bernoulli de parámetro p. Se define la variable aleatoria T_1, con valores en $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ por $T_1 = \inf\{k > 0 \mid X_k = 1\}$, con la convención $\inf(\varnothing) = +\infty$.
(Si se juega cruz $= 0$ o cara $= 1$, T_1 es el tiempo que se necesita para obtener cara la primera vez)

1. Demostrar que T_1 es finito casi seguramente.
2. Determinar la ley y la esperanza de T_1 *(esta ley se llama ley geométrica, $E(T_1)$ es el número medio de lanzamientos que se deben hacer para obtener cara por primera vez).*
3. Para todo $n \geqslant 2$, se define por recurrencia $T_n = \inf\{k > T_{n-1} \mid X_k = 1\}$.
   (Si se juega cara o cruz, T_n es el tiempo necesario para obtener exactamente n veces cara)
   Demostrar que las variables aleatorias $T_1,\ (T_2 - T_1), \dots,\ (T_n - T_{n-1}), \dots$ son independientes y de misma ley.
4. ¿Cuál es la ley de T_n ?

Definición general de un tiempo de espera : una variable aleatoria T, con valores en $\mathbb{N}$ es un tiempo de parada relativo a la sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\geqslant 1}$ si para todo n el evento $\{T \leqslant n\}$ pertenece a la tribu generada por las variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$ (dicho de otro modo, es suficiente conocer los valores de $X_1, \dots, X_n$, para saber si $T \leqslant n$).

Solución ▼ [006944]

Ejercicio 7911 Funciones generatrices

Sea X una variable aleatoria de ley binomial $\mathscr{B}(n,p)$.

1. Calcular la función generadora de X.
2. Sea Y una variable aleatoria de ley $\mathscr{B}(m,p)$, independiente de X. ¿Cuál es la función generatriz de $X+Y$? Deducir que $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p) = \mathscr{B}(n+m,p)$.

Esta es una de las formas de demostrar la estabilidad de las leyes binomiales por convolución. El método también funciona para distribuciones de Poisson.

Solución ▼ [006945]

Ejercicio 7912 Funciones generatrices

Sea N y $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aleatorias independientes integrables con valores en $\mathbb{N}$, los X_n teniendo todos, la misma ley y $P(N=0)=0$. Se define $Y(\omega)=\sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$. Expresar la función generadora de Y de acuerdo con las funciones generadoras de N y de X_1. Luego expresar la esperanza de Y en función de $E(N)$ y de $E(X_1)$.

Solución ▼ [006946]

Ejercicio 7913 Función generatriz

Sea X una variable aleatoria de ley de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

1. Calcular la función generadora de X.
2. Calcular $E(X)$ y $\operatorname{Var}(X)$.
3. Sea Y una variable aleatoria de ley de Poisson $\mathscr{P}(\lambda')$, independiente de X. ¿Cuál es la ley de $X+Y$? Deducir que $\mathscr{P}(\lambda)*\mathscr{P}(\lambda')=\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Solución ▼ [006947]

Ejercicio 7914 función característica

Sea X una variable aleatoria de ley distribuida exponencial $\mathscr{E}(\lambda)$. Calcular su función característica.

Solución ▼ [006948]

Ejercicio 7915 Funciones características

1. Sea X una variable aleatoria de ley de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Calcular su función característica.
2. Sea Y una variable aleatoria independiente de X tal que $P_Y=\mathscr{P}(\lambda')$. ¿Cuál es la función característica de $X+Y$? Deducir que $\mathscr{P}(\lambda)*\mathscr{P}(\lambda')=\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Solución ▼ [006949]

340 481.00 Varianza, covarianza, función generatriz

Ejercicio 7916 Cálculo de esperanza y de varianza

1. Sea X una variable aleatoria de ley distribuida exponencial $\mathscr{E}(\lambda)$, $\lambda>0$. Calcular la esperanza de X.
2. Sea X una variable aleatoria de ley de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda>0$. Calcular la varianza de X.

Solución ▼ [006952]

Ejercicio 7917 Varianza

Sea X una variable aleatoria real en L^2. Demostrar que $\operatorname{Var}(X)=\min_{t\in\mathbb{R}} E((X-t)^2)$.

Solución ▼ [006953]

341 482.00 Convergencia de variables aleatorias

Ejercicio 7918 Lema de Borel-Cantelli **

Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución exponencial $\mathscr{E}(1)$.

1. Utilizando el lema de Borel-Cantelli, demostrar que

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ para una infinidad de } n) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Deducir que $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\ln n} = 1$ casi seguramente.

Solución ▼ [006950]

Ejercicio 7919 Convergencia en probabilidad **

1. Demostrar que para todo $x > 0$,

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{1}{x}.$$

Indicación : se puede integrar por partes $t^{-1}t\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

2. Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes de misma ley $\mathscr{N}(0,1)$. Demostrar que $\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i}{\sqrt{2\ln n}}$ tiende a 1 en probabilidad.

Solución ▼ [006951]

342 483.00 Ley de los grandes números, teorema central del límite

343 484.00 Estimador

344 485.00 Tests sobre la media, test del chi^2

345 486.00 Cadenas de Markov

346 487.00 Otro

Indicación para el ejercicio 3 ▲

Cuidado : la negación de una desigualdad estricta es una desigualdad amplia (y recíprocamente).

Indicación para el ejercicio 6 ▲

Hacer un dibujo de F_1 y de F_2. Tratar de ver si la dificultad para realizar las afirmaciones vienen de ε "pequeño" (es decir cerca de 0) o de ε "grande" (cuando tiende a $+\infty$).

Indicación para el ejercicio 16 ▲

De hecho, se tiene siempre : $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$. Después determinar una condición sobre n, para que la desigualdad

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

sea verdadera.

Indicación para el ejercicio 23 ▲

Es más fácil razonar tomando un elemento $x \in E$. Por ejemplo, sea F, G subconjuntos de E. Demostrar que $F \subset G$ equivale a demostrar que para todo $x \in F$, entonces $x \in G$. Y demostrar $F = G$ es equivalente a $x \in F$ si y solo si $x \in G$, y que para todo x de E. Observación : para demostrar $F = G$ también se puede demostrar $F \subset G$, luego $G \subset F$. En fin, se recuerda que $x \in \complement F$ si y solo si $x \notin F$.

Indicación para el ejercicio 56 ▲

Por reducción al absurdo, suponer que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f = f_p$. Luego para tal p, evaluar f y f_p en un valor bien elegido.

Indicación para el ejercicio 57 ▲

Para la primera pregunta puedes razonar por contraposición o por reducción al absurdo.

Indicación para el ejercicio 61 ▲

1. Recurrencia : calcular $x_{n+1} - 3$.
2. Calcular $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Recurrencia.

Indicación para el ejercicio 63 ▲

Para ambas preguntas, trabajar por recurrencia.

Indicación para el ejercicio 89 ▲

Calcular los primeros términos de la sucesión.

Indicación para el ejercicio 90 ▲

Calcular los primeros términos de la sucesión.

Indicación para el ejercicio 91 ▲

Recurrencia doble.

Indicación para el ejercicio 99 ▲

Proceder por recurrencia fuerte.

Indicación para el ejercicio 100 ▲

Proceder por recurrencia fuerte.

Indicación para el ejercicio 102 ▲

Demostrar por inducción en m que para todo $N \geqslant 2$ y todo $m \in [\![2, N]\!]$,

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < m+1.$$

Indicación para el ejercicio 105 ▲

Se considera el subconjunto (sub-monoide) de $\mathbb{N}$ siguiente :

$$\{3k+4l \mid k, l \in \mathbb{N}\}.$$

Para el caso general, considerar el mcd de a y b.

Indicación para el ejercicio 108 ▲

Calcular los primeros términos de la sucesión.

Indicación para el ejercicio 112 ▲

Demostrar que para $n > 1$, el real u_n se escribe como el cociente de un entero impar por un entero par. Para n par, expresar u_{n+1} en función de u_n. Para n impar, usar el hecho de que

$$u_{n+1} := \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Indicación para el ejercicio 115 ▲

Un dibujo da una buena idea de lo que pasa...

Indicación para el ejercicio 116 ▲

Es necesario encontrar el error en este razonamiento, porque claramente si existen tres axiomas para la definición de una relación de equivalencia, ¡entonces dos no son suficientes !

Indicación para el ejercicio 118 ▲

1. Para la transitividad se puede calcular xye^z.
2. Sea la función $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, luego de un estudio de la función, calcular el número de posibles antecedentes.

Indicación para el ejercicio 148 ▲

Se observa por ejemplo la divisibilidad en $\mathbb{N}$.

Indicación para el ejercicio 149 ▲

Considerar una cierta relación de equivalencia en E y escribir que E es la unión disjunta de las clases de equivalencia.

Indicación para el ejercicio 171 ▲

Demostrar que la igualdad es falsa.

Indicación para el ejercicio 187 ▲

1. f es inyectiva pero no sobreyectiva.
2. g es biyectiva.
3. h también.
4. k es inyectiva pero no sobreyectiva.

Indicación para el ejercicio 188 ▲

1. f no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.
2. Para $y \in \mathbb{R}$, resolver la ecuación $f(x) = y$.
3. Se puede demostrar lo contrario.

Indicación para el ejercicio 190 ▲

Para la primera afirmación, el comienzo del razonamiento es : "se supone que $g \circ f$ es inyectiva, sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$",... que debe trabajar, esto se termina por "...por lo tanto $a = a'$, por lo tanto f es inyectiva."

Indicación para el ejercicio 198 ▲

Id es la aplicación identidad definida por $\mathrm{Id}(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$. Entonces $f \circ f = id$ significa $f \circ f(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$.

Indicación para el ejercicio 199 ▲

Demostrar que la restricción de f definida por : $[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ es una biyección. Aquí $\mathbb{U}$ es el círculo unitario de $\mathbb{C}$, es decir el conjunto de números complejos de módulo igual a 1.

Indicación para el ejercicio 201 ▲

Demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva.

Indicación para el ejercicio 211 ▲

Evaluar $(1+x)^n$ en $x=1$, por un lado, directamente y luego con la fórmula binomial de Newton. Para la segunda igualdad comenzar por derivar $x \mapsto (1+x)^n$.

Indicación para el ejercicio 213 ▲

Comenzar por $2^n = (3-1)^n$.

Indicación para el ejercicio 220 ▲

$1+i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{2i\pi}{4}}$

Indicación para el ejercicio 248 ▲

Primero hacer un dibujo (¡con papas !). Para A y B dos conjuntos finitos cualesquiera, comenzar por (re)demostrar la fórmula : $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.

Indicación para el ejercicio 249 ▲

¿Cuántas escogencias hay para el elemento de A ? ¿Cuántas escogencias hay para el subconjunto de $E \setminus A$?

Indicación para el ejercicio 251 ▲

Pequeños recordatorios : en un juego de 52 cartas hay 4 “figuras” (picas, corazones, diamantes, tréboles) y 13 “valores” ($1 =$ As, $2,3,\dots,10$, Jota, Dama, Rey). Una “mano” es solo elegir 5 cartas entre los 52, el orden de elección no importa.

Indicación para el ejercicio 261 ▲

Si $\{x_1,\dots,x_p\}$ es una parte con $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, considerar el conjunto $\{x_1-1,\dots,x_p-p\}$.

Indicación para el ejercicio 269 ▲

Codificar una ruta por una palabra : D por recta, H, para arriba.

Indicación para el ejercicio 294 ▲

Sobre todo, no intentar calcularlo $15! = 1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times 15$, pero utilizar el hecho que ya está “casi” factorizado.

Indicación para el ejercicio 295 ▲

Es necesario trabajar módulo 13, primero reducir 100 módulo 13. Se recuerda que si $a \equiv b \pmod{13}$, entonces $a^k \equiv b^k \pmod{13}$. Finalmente, calcular lo que esto da para los exponentes $k = 1, 2, 3, \ldots$ tratando de encontrar una regla general.

Indicación para el ejercicio 296 ▲

¡Cuidado, el resto de una división euclidiana es menor que el cociente!

Indicación para el ejercicio 299 ▲

Utilizar los módulos (aquí módulo 8), un entero es divisible por 8 si y solo si es equivalente a 0 módulo 8. Aquí se puede empezar por calcular $7^n \pmod{8}$.

Indicación para el ejercicio 330 ▲

1. Escribir $n = 2p + 1$.
2. Escribir $n = 2p$ y discutir según que p es par o impar.
3. Utilizar la primera pregunta.
4. Por reducción al absurdo se supone que se escribe como un cuadrado, por ejemplo $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$, luego discutir según que n es par o impar.

Indicación para el ejercicio 373 ▲

¡Comenzar por simplificar la ecuación! Luego encontrar una solución particular (x_0, y_0) usando el algoritmo de Euclides por ejemplo. Luego encontrar una expresión para una solución general.

Indicación para el ejercicio 424 ▲

Para 1. usar la igualdad

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1).$$

Para 2. razonar por contraposición y usar la pregunta 1. La pregunta 3. es difícil! Se supone $a \geqslant b$. Comenzar por demostrar que $\operatorname{mcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \operatorname{mcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1) = \operatorname{mcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. Esto permite comparar el algoritmo de Euclides para el cálculo de $\operatorname{mcd}(a, b)$, con el algoritmo de Euclides para el cálculo de $\operatorname{mcd}(2^a - 1, 2^b - 1)$.

Indicación para el ejercicio 425 ▲

Razonar por reducción al absurdo y usar el lema de Gauss.

Indicación para el ejercicio 427 ▲

1. Escribir
$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(i+1))}{i!}$$
y usar el lema de Gauss o el lema de Euclides.
2. Razonar con los módulos, es decir probar $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Indicación para el ejercicio 429 ▲

1. Es necesario ser muy cuidadoso : n se fija de una vez por todas, la recurrencia se hace en $k \geqslant 1$.
2. Utilizar la pregunta anterior con $m = n + k$.
3. Por reducción al absurdo, suponer que solo existen N números primos, considerar $N+1$ números de tipo F_i. Aplicar el "principio del cajón" : *si se tiene $N+1$ calcetines guardados en N cajones entonces existe (al menos) un cajón que contiene (más de) dos calcetines.*

Indicación para el ejercicio 437 ▲

Razonar por contraposición (o por reducción al absurdo) : suponer que n no es de la forma 2^k, entonces n admite un factor irreducible $p > 2$. Utilizar también $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{p-1})$, con x bien elegido.

Indicación para el ejercicio 458 ▲

Para "deshacerse" de un denominador, se escribe $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Indicación para el ejercicio 460 ▲

Es necesario conocer bien las fórmulas trigonométricas. En particular, si se conoce $\cos(2\theta)$ o $\operatorname{sen}(2\theta)$ se sabe calcular $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

Indicación para el ejercicio 468 ▲

Cambiar a la forma trigonométrica. Recordar las fórmulas de los productos de potencias :

$$\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)} \text{ y } \mathrm{e}^{ia}/\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a-b)}.$$

Indicación para el ejercicio 470 ▲

Para calcular una suma del tipo $\mathrm{e}^{iu} + \mathrm{e}^{iv}$ a menudo es útil factorizar por $\mathrm{e}^{i\frac{u+v}{2}}$.

Indicación para el ejercicio 477 ▲

Utilizar la fórmula de Euler para hacer aparecer los cosenos.

Indicación para el ejercicio 491 ▲

Se observa que la conjugación es involutiva. También se puede usar la forma algebraica.

Indicación para el ejercicio 492 ▲

Se observa que si $z \in \mathbb{C}$ es solución, entonces z^2 es forzosamente un número real.

Indicación para el ejercicio 497 ▲

Para $z = a + ib$ se busca $\omega = \alpha + i\beta$ tal que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$. Desarrollar y identificar. Utilizar también que $|\omega|^2 = |z|$.

Indicación para el ejercicio 499 ▲

Se trata de calcular las raíces cuadradas de $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ de dos maneras diferentes.

Indicación para el ejercicio 501 ▲

Para las ecuaciones del tipo $az^4 + bz^2 + c = 0$, escribir $Z = z^2$.

Indicación para el ejercicio 527 ▲

Calcular $(1 - z)S_n$.

Indicación para el ejercicio 552 ▲

El primer conjunto es una recta, el segundo es un círculo.

Indicación para el ejercicio 561 ▲

Para la interpretación geométrica se busca el paralelogramo.

Indicación para el ejercicio 597 ▲

Las dos similitudes se deducen una de la otra por una cierta reflexión.

Indicación para el ejercicio 607 ▲

Aplicar la fórmula de Moivre dos veces, notando $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Indicación para el ejercicio 689 ▲

Si $P = P'Q$, con $P \neq 0$, observar el grado de Q.

Indicación para el ejercicio 729 ▲

El cálculo del mcd se realiza mediante el algoritmo de Euclides, y el “ascenso” del algoritmo permite obtener U y V.

Indicación para el ejercicio 730 ▲

Calcular $\text{mcd}(P, P')$.

Indicación para el ejercicio 798 ▲

Si $X^p - a = PQ$, con $P, Q \in K[X]$ unitarios no constantes, factorizar P en $\mathbb{C}$ y considerar $P(0)$.

Indicación para el ejercicio 811 ▲

Demostrar que si P es un polinomio no constante que satisface la relación, entonces sus únicas raíces posibles son 0 y 1.

Indicación para el ejercicio 812 ▲

Para la existencia, probar por inducción sobre n. Para las raíces, demostrar que $P(x) = 2\cos(n \arccos(x/2))$.

Indicación para el ejercicio 817 ▲

Cuidado existe una parte entera, la fracción se escribe

$$\Phi = x + 1 + \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

Indicación para el ejercicio 818 ▲

Hay una parte entera que vale 2.

Indicación para el ejercicio 857 ▲

Escribir $F = \frac{P}{Q}$ en forma irreducible.

Indicación para el ejercicio 858 ▲

Escribir $G = \frac{A}{B}$ en forma irreducible (se puede elegir por ejemplo $n = \max(\deg A, \deg B)$).

Indicación para el ejercicio 859 ▲

Considerar P'/P y su derivada, y en fin P''/P.

Indicación para el ejercicio 860 ▲

Para G y H, comenzar haciendo una división euclidiana para encontrar la parte polinomial.

Indicación para el ejercicio 861 ▲

Las fracciones F, K tienen una parte polinomial, se escriben

$F = X^2 + X + 1 + \frac{X^2 + X + 1}{X^3 - X}$

$K = X + 1 + \frac{4X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2}$

Indicación para el ejercicio 862 ▲

Para F, empezar por escribir $F = \frac{a}{X} + F_1$, donde $F_1 = \frac{N}{(X^2+1)^3}$, luego dividir N por $X^2 + 1$. Para K, comenzar por conseguir $K = 1 + \frac{1}{X} + K_1$, luego hacer el cambio de indeterminada en K_1.

Indicación para el ejercicio 865 ▲

Para 1. expresar $\cos\big((n+2)\theta\big)$ y $\cos(n\theta)$ en función de $\cos\big((n+1)\theta\big)$. Para 3. encontrar las raíces de T_n : $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, para $k = 0, \ldots, n-1$.

Indicación para el ejercicio 950 ▲

1. E_1 es un subespacio vectorial.
2. E_2 no es un subespacio vectorial.
3. E_3 es un subespacio vectorial.
4. E_4 no es un subespacio vectorial.

Indicación para el ejercicio 952 ▲

1. E_1 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ si y solo si $a = 0$.
2. E_2 es un subespacio vectorial.
3. E_3 no es un espacio vectorial.
4. E_4 no es un espacio vectorial.

Indicación para el ejercicio 957 ▲

1. Por el sentido $\Rightarrow$: razonar por reducción al absurdo y tomar un vector de $F \setminus G$ y uno de $G \setminus F$. Se observa la suma de estos dos vectores.
2. Razonar por doble inclusión, volver a los vectores.

Indicación para el ejercicio 985 ▲

Se verifica en estos ejemplos la definición dada en clase.

Indicación para el ejercicio 986 ▲

1. Discutir según la dimensión de los subespacios.
2. Pensar en rectas vectoriales.

Indicación para el ejercicio 990 ▲

No se puede para el primero, pero se puede para el segundo.

Indicación para el ejercicio 991 ▲

E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Una base tiene tres vectores.

Indicación para el ejercicio 998 ▲

Demostrar la doble inclusión. Utilizar el hecho de que en general para $E = \mathrm{vect}(v_1, \dots, v_n)$, entonces :

$$E \subset F \iff \forall i = 1, \dots, n, \quad v_i \in F.$$

Indicación para el ejercicio 1006 ▲

Se supone que existen reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y de índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (todo esto en número finito !) tales que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Aquí el 0 es la función constante igual a 0. Evaluar esta expresión en dos valores bien elegidos.

Indicación para el ejercicio 1007 ▲

Se supone que existen reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y de índices $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$ (todo esto en número finito !) tales que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Aquí el 0 es la función constante igual a 0. Se observa qué término es dominante y factorizar.

Indicación para el ejercicio 1030 ▲

1. Se piensa en montar un sistema.
2. Encontrar un vector no nulo común a ambos planos.

Indicación para el ejercicio 1032 ▲

1. Cierto.
2. Cierto.
3. Falso.
4. Falso.
5. Cierto.

Indicación para el ejercicio 1033 ▲

1. No.
2. Sí.
3. No.
4. No.

Indicación para el ejercicio 1036 ▲

Sea

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Demostrar que G es un suplemento de F en E.

Indicación para el ejercicio 1039 ▲

Para una sucesión (u_n) que converge a ℓ observar la sucesión $(u_n - \ell)$.

Indicación para el ejercicio 1053 ▲

1. Nunca.
2. Nunca.
3. Considerar un vector director de la recta.

Indicación para el ejercicio 1057 ▲

Ser una base, es ser libre y generador. Cada una de estas condiciones se verifica mediante un sistema lineal.

Indicación para el ejercicio 1061 ▲

1. Falso.
2. Cierto.

Indicación para el ejercicio 1068 ▲

Es suficiente demostrar que la familia es libre (por qué ?). Tomar luego una combinación lineal cero y observar el término con el grado más alto.

Indicación para el ejercicio 1072 ▲

Es una base para $t \neq \pm 1$.

Indicación para el ejercicio 1082 ▲

No hay ninguna dificultad. Es como en $\mathbb{R}^3$ excepto que aquí los coeficientes son números complejos.

Indicación para el ejercicio 1099 ▲

Partir de una base $(e_1, \dots, e_k)$ de $F \cap G$ y completarla con vectores $(f_1, \dots, f_\ell)$ en una base de F. Partir de $(e_1, \dots, e_k)$, para completarla con vectores $(g_1, \dots, g_m)$ en una base de G.
Demostrar que $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m)$ es una base de $F + G$.

Indicación para el ejercicio 1100 ▲

Se pueden usar familias libres.

Indicación para el ejercicio 1103 ▲

Calcular primero las dimensiones de F y G. Para los de $F \cap G$ y $F + G$ usar la fórmula $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Indicación para el ejercicio 1136 ▲

Una sola aplicación no es lineal.

Indicación para el ejercicio 1137 ▲

Tomar una combinación lineal cero y evaluarla para ϕ^{n-1}.

Indicación para el ejercicio 1151 ▲

Hacer un dibujo de la imagen y el núcleo para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que el núcleo es isomorfo a $E_1 \cap E_2$.

Indicación para el ejercicio 1160 ▲

Para cada una de las implicaciones utilizar la fórmula de rango.

Indicación para el ejercicio 1164 ▲

Decir que un subespacio F es estable por g significa que $g(F) \subset F$.

Indicación para el ejercicio 1166 ▲

Demostrar la doble inclusión.

Indicación para el ejercicio 1171 ▲

$t = 0$ es un caso aparte.

Indicación para el ejercicio 1176 ▲

Resultados útiles de aritmética polinomial : la división euclidiana, el teorema de Bézout, lema de Gauss.

Indicación para el ejercicio 1180 ▲

Para una base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E considerar la familia $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$.

Indicación para el ejercicio 1230 ▲

Para una función f se puede escribir

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

El proyector sobre P de dirección I es la aplicación $\pi : E \longrightarrow E$ que verifica $\pi(f) \in P$, $\pi \circ \pi = \pi$ y $\ker \pi = I$.

Indicación para el ejercicio 1232 ▲

P' designa la derivada de P. Para encontrar el núcleo, resolver una ecuación diferencial. Para la imagen calcular los $f(X^k)$.

Indicación para el ejercicio 1291 ▲

Una vez que se ha calculado A^2 y A^3 se puede deducir A^{-1} sin cálculos.

Indicación para el ejercicio 1300 ▲

Es necesario conocer las fórmulas de $\cos(\theta+\theta')$ y $\operatorname{sen}(\theta+\theta')$.

Indicación para el ejercicio 1302 ▲

Probar con X la matriz elemental E_{ij} (ceros en todas partes excepto el coeficiente 1 en la i-ésima fila y la j-ésima columna).

Indicación para el ejercicio 1303 ▲

Aplicar la fórmula del producto para calcular los coeficientes diagonales de $A\,{}^tA$.

Indicación para el ejercicio 1308 ▲

Tomar un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tal que $AX = 0$, considerar el rango i_0 tal $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i = 1,\dots,n\right\}$.

Indicación para el ejercicio 1322 ▲

A es *idempotente* si $A^2 = A$.
A es *nilpotente* si existe un n tal que $A^n = (0)$ (la matriz nula).

Indicación para el ejercicio 1363 ▲

f es la aplicación que a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ asocia $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Indicación para el ejercicio 1397 ▲

M antisimétrico significa ${}^tM = -M$.

1. Si Y es un vector entonces ${}^tYY = \|Y\|^2$ es un real positivo o cero.
2. $I-M$ y $(I+M)^{-1}$ conmutan.

Indicación para el ejercicio 1429 ▲

Es necesario encontrar las propiedades de la aplicación lineal f asociada a cada una de estas matrices. Los resultados se expresan explicitando una (o muchas) matriz M' que es la matriz de f en una base bien elegida y luego demostrando que todas las demás matrices son de la forma $M = P^{-1}M'P$. Más en detalle para cada uno de los casos :

1. $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ y discutir según la dimensión del núcleo.
2. Utilizar el ejercicio 1369 : $\ker f \oplus \operatorname{Im} f$ y existe una base tal que $f(e_i) = 0$ o $f(e_i) = e_i$.
3. Expresar $N = \frac{I+M}{2}$ (y entonces $M = \cdots$) averiguar en qué condiciones $M^2 = I$.

Indicación para el ejercicio 1473 ▲

1. Razonar por reducción al absurdo.
2. Razonar por reducción al absurdo escribiendo $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p y q primos entre sí. Entonces varios métodos son posibles, por ejemplo, tratando de demostrar que p y q son los dos pares.
3. Considerar $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ (¡hacer un dibujo !) para dos racionales r, r'. Luego se usan las dos preguntas anteriores.

Indicación para el ejercicio 1479 ▲

1. Calcular $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ y usar el lema de Gauss.
2. Utilizar la primera pregunta con $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$.

Indicación para el ejercicio 1481 ▲

1. Mutiplicar N_n por una potencia de 10 suficientemente grande para obtener un entero.
2. Mutiplicar M por un potencia de 10 suficientemente grande (no tan grande) luego restar M, para obtener un entero.

Indicación para el ejercicio 1483 ▲

¡Razonar por reducción al absurdo !

Indicación para el ejercicio 1486 ▲

Escribir la definición de la convergencia de una sucesión (u_n), con los "ε". Como se tiene una proposición que es verdadera para todo $\varepsilon > 0$, es en particular cierto para $\varepsilon = 1$. Esto nos da un "N". A continuación, dividir la sucesión en dos : observar los $n < N$ (solo existe un número finito de términos) y los $n \geqslant N$ (para el cual se utiliza $\varepsilon = 1$).

Indicación para el ejercicio 1487 ▲

¡Se debe tener cuidado de no hablar del límite de una sucesión sin saber de antemano que converge !
Se puede usar el resultado del curso siguiente : Sea (u_n) una sucesión convergente al límite ℓ, entonces toda sub-sucesión (v_n) de (u_n) tiene por límite ℓ.

Indicación para el ejercicio 1504 ▲

Distinguir casos.

Indicación para el ejercicio 1505 ▲

$\inf A = 0$, A no tiene cota superior.

Indicación para el ejercicio 1516 ▲

Es necesario volver a la definición de la cota superior de un conjunto acotado : es el más pequeño de los mayorantes. En particular, la cota superior es un mayorante.

Indicación para el ejercicio 1517 ▲

Dos proposiciones son falsas...

Indicación para el ejercicio 1535 ▲

Elevar la desigualdad al cuadrado.

Indicación para el ejercicio 1541 ▲

1. $f(2) = f(1+1) = \cdots$, hacer una inducción.
2. $f((-n)+n) = \cdots$.
3. Si $q = \frac{a}{b}$, calcular $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$, con b términos en esta suma.
4. Utilizar la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: para $x \in \mathbb{R}$ fijo, tomar una sucesión de racionales que crece a x, y otra que decrece a x.

Indicación para el ejercicio 1566 ▲

1. Recordar que la parte entera de x es el entero más grande, inferior o igual a x. Pero es preferible aquí dar la definición de $E(x)$ diciendo que $E(x) \in \mathbb{Z}$ y que x verifica un cierto encuadramiento...
2. Encuadrar $E(kx)$, para $k = 1, \ldots, n$.
3. Recordar primero la fórmula $1+2+\cdots+n$, luego se usa el famoso teorema de los gendarmes.
4. ¿Los u_n no son racionales ?

Indicación para el ejercicio 1567 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1568 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1569 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1570 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1571 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1572 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1573 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1574 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1575 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1576 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1577 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1578 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1579 ▲

$2 = 1 + 1...$

Indicación para el ejercicio 1580 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1581 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1582 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica en grupos de términos.

Indicación para el ejercicio 1583 ▲

Utilizar la desigualdad aritmético-geométrica.

Indicación para el ejercicio 1585 ▲

En el orden es cierto, falso y verdadero. Cuando es falso buscar un contraejemplo, cuando es cierto hay que demostrarlo.

Indicación para el ejercicio 1593 ▲

Escribir la convergencia de la sucesión y fijar $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Una sucesión es *estacionaria* si, a partir de un cierto rango, es constante.

Indicación para el ejercicio 1594 ▲

1. Recordando que la integral calcula un área demostrar :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Para cada una de las mayoraciones, se trata de hacer la suma de la desigualdad anterior y de notar que por un lado se calcula H_n y por otro lado los términos se eliminan casi todos dos a dos.
3. El límite es $+\infty$.
4. Calcular $u_{n+1} - u_n$.
5. Es el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Indicación para el ejercicio 1598 ▲

Para la segunda pregunta, razonar por reducción al absurdo y encontrar dos sub-sucesiones con límites distintos.

Indicación para el ejercicio 1678 ▲

Para la primera pregunta : cuidado no se pide calcular α ! La existencia proviene del teorema de valores intermedios. La unicidad proviene del hecho de que la función es estrictamente creciente. Para la última pregunta : por un lado, es necesario demostrar que (x_n) converge y se denota ℓ su límite y por otro lado se tiene que demostrar que $\ell = \alpha$.

Indicación para el ejercicio 1707 ▲

1.
2. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Indicación para el ejercicio 1725 ▲

Se observa que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. Luego se simplifica la escritura de u_n.

Indicación para el ejercicio 1731 ▲

1. Es un cálculo de reducción al mismo denominador.
2. Para demostrar el decrecimiento, demostrar $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
3. Demostrar primero que la sucesión converge, demostrar luego que el límite es $\sqrt{a}$.
4. Pensar en escribir $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$.
5. Razonar por recurrencia.
6. Para $u_0 = 3$ se tiene $u_1 = 3,166\ldots$, por lo tanto $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_1$ y se puede tomar $k = 0.17$ por ejemplo y $n = 4$ suficiente para la precisión requerida.

Indicación para el ejercicio 1732 ▲

1. Demostrar que (u_n) es creciente y (v_n) decreciente.
2. Demostrar que (u_n) es mayorada y (v_n) minorada. Demostrar que estas sucesiones tienen el mismo límite.
3. Razonar por reducción al absurdo : si el límite $\ell = \frac{p}{q}$, entonces multiplicar la desigualdad $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$ por $q!$ y razonar con números enteros.

Indicación para el ejercicio 1733 ▲

Para la primera pregunta y la monotonía es necesario razonar por inducción. Para la tercera pregunta, observar que si f es decreciente entonces $f \circ f$ es creciente y aplicar la primera pregunta.

Indicación para el ejercicio 1734 ▲

1. Se observa lo que da la desigualdad al elevar al cuadrado cada lado.
2. Pequeñas manipulaciones de las desigualdades.
3. (a) Utilizar 1.
   (b) Utilizar 2.
   (c) Una sucesión creciente y acotada converge ; una sucesión decreciente y minorada también.

Indicación para el ejercicio 1736 ▲

Se denota $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.

1. Es un estudio de la función f_n.
2. Se sabe que $f_n(a_n) = 0$. Demostrar mediante un cálculo que $f_n(a_{n-1}) > 0$, deducir la disminución de (a_n). Calculando $f_n(\frac{1}{2})$ demostrar que la sucesión (a_n) es minorada por $\frac{1}{2}$.
3. Una vez establecida la convergencia de (a_n) a un límite ℓ, componer la desigualdad $\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n$ para f_n. Concluir.

Indicación para el ejercicio 1809 ▲

1. Calcular $(1-3^{-1}) \sum_{n \geqslant 0} (n+1)3^{-n}$.

Indicación para el ejercicio 1971 ▲

1. Se puede usar la variante de la desigualdad triangular $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$.
2. Utilizar la primera pregunta para demostrar que $|f-g|$ es continua.

Indicación para el ejercicio 1977 ▲

No es muy difícil, pero aún queda algo que demostrar : no es porque $f(x)$ vale $+1$ o -1 que la función es constante. Razonar por contradicción y usar el teorema de valores intermediarios.

Indicación para el ejercicio 1978 ▲

Es necesario pensar en dos tiempos : primero escribir la definición del límite en $+\infty$, fijando por ejemplo $\varepsilon = 1$, esto da un límite en $[A, +\infty]$. Luego se trabaja en $[0, A]$.

Indicación para el ejercicio 1985 ▲

Un *punto fijo* es un valor $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. Demostrar que $c = \sup E$ es un punto fijo. Para esto demostrar que $f(c) \leqslant c$, luego $f(c) \geqslant c$.

Indicación para el ejercicio 1994 ▲

No, encontrar un contraejemplo.

Indicación para el ejercicio 2001 ▲

1. Se puede demostrar que $\sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ es una cota superior de f sobre $]a, b[$.
2. En el caso $x_0 = a$, por ejemplo, se puede considerar la sucesión de números reales $a_n = a + 1/n$ y estudiar la sucesión $(f(a_n))$.

Indicación para el ejercicio 2045 ▲

El "ε" se da, no hay que tocarlo. Se debe encontrar el "δ".

Indicación para el ejercicio 2046 ▲

Distinguir tres intervalos para la fórmula definiendo f^{-1}.

Indicación para el ejercicio 2047 ▲

El único problema está en $x = 0$. Demostrar que la función es efectivamente continua en este punto.

Indicación para el ejercicio 2052 ▲

Si para los dos primeros poniendo $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, no para el tercero.

Indicación para el ejercicio 2055 ▲

Para x fijo, estudiar la sucesión $f(\frac{1}{2^n}x)$.

Indicación para el ejercicio 2065 ▲

Utilizar la expresión conjugada.

Indicación para el ejercicio 2068 ▲

1. Razonar por reducción al absurdo.
2. Demostrar que el límite es la cota superior del conjunto de valores alcanzados $f(\mathbb{R})$.

Indicación para el ejercicio 2072 ▲

Respuestas :

1. El límite a la derecha es $+2$, el límite a la izquierda -2 así no existe límite.
2. $-\infty$
3. 4
4. 2
5. $\frac{1}{2}$
6. 0
7. $\frac{1}{3}$ usando por ejemplo que $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$, para $a=\sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

Indicación para el ejercicio 2084 ▲

1. Calcular primero el límite de $f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$.
2. Utilizar $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ y hacer un cambio de variable $u=\cos x$.
3. Utilizar la expresión conjugada.
4. Dividir numerador y denominador por $\sqrt{x-\alpha}$, luego se usa la expresión conjugada.
5. Siempre se tiene $y-1 \leqslant E(y) \leqslant y$, escribir $y=1/x$.
6. Dividir numerador y denominador por $x-2$.
7. Para $\alpha \geqslant 4$ no existe límite, para $\alpha < 4$ el límite es $+\infty$.

Indicación para el ejercicio 2091 ▲

Respuestas : $0, \frac{1}{e}, e$.

1. Acotar $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.
2. Utilizar que $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, para una función determinada μ que verifica $\mu(t)\to 1$, cuando $t\to 0$.
3. Utilizar que $e^t-1=t\cdot\mu(t)$, para una función determinada μ que verifica $\mu(t)\to 1$, cuando $t\to 0$.

Indicación para el ejercicio 2093 ▲

Respuesta : $\max(a,b)$.

Indicación para el ejercicio 2094 ▲

Respuesta : $\sqrt{ab}$.

Indicación para el ejercicio 2175 ▲

Los problemas solo están en 0 o 1. f_1 es derivable en 0, pero no f_2. f_3 no es derivable ni en 0, ni en 1.

Indicación para el ejercicio 2176 ▲

Se tienen dos condiciones : es necesario que la función sea continua (porque se quiere que sea derivable por lo que debe ser continua) y luego la condición de derivabilidad propiamente dicha.

Indicación para el ejercicio 2177 ▲

f es continua en 0 ampliarla en $f(0) = 0$. f es entonces derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

Indicación para el ejercicio 2178 ▲

No se busca utilizar la fórmula de Leibniz si no linealizar las expresiones trigonométricas.

Indicación para el ejercicio 2201 ▲

El teorema de Rolle debe aplicarse una vez al polinomio $(1-t^2)^n$, luego dos veces a su primera derivada, luego tres veces a su segunda derivada,...

Indicación para el ejercicio 2203 ▲

Se puede aplicar el teorema de Rolle varias veces.

Indicación para el ejercicio 2204 ▲

Es aún Rolle numerosas veces

Indicación para el ejercicio 2210 ▲

1. Utilizar el teorema de incrementos finitos con la función $t \mapsto \ln t$
2. Demostrar primero que f'' es negativa. Usar el teorema de valores intermedios para f'.

Indicación para el ejercicio 2211 ▲

Una vez que se usa el teorema de incrementos finitos, se obtiene una suma telescópica.

Indicación para el ejercicio 2213 ▲

El teorema de incrementos finitos da un resultado cercano al deseado, módulo un factor. Para obtener la mayoración requerida, se puede usar el teorema de Rolle con una función bien elegida.

Indicación para el ejercicio 2259 ▲

Se distinguen los casos $\lambda \geqslant 0$ y $\lambda < 0$. Para el caso $\lambda < 0$ se consideran subcasos.

Indicación para el ejercicio 2263 ▲

1. Razonar por reducción al absurdo y aplicar el teorema de Rolle.
2. Calcular $h(a)$ y $h(b)$.
3. Aplicar la cuestión 2. en el intervalo $[x,b]$.
4. Calcular f' y g'.

Indicación para el ejercicio 2325 ▲

Calcular primero el dl y luego usar la fórmula de Taylor.

Indicación para el ejercicio 2326 ▲

1. La fórmula a aplicar es la de Taylor-Lagrange de orden 2.
2. Estudiar la función $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$ y encontrar $\inf_{h>0} \phi(h)$.
3. Es necesario elegir un $a > 0$ tal que $g(x)$ sea lo suficientemente pequeño en $]a,+\infty[$; luego aplicar las preguntas anteriores a g en este intervalo.

Indicación para el ejercicio 2354 ▲

Para la primera pregunta puede aplicar la fórmula de Taylor o escribir $h = x-1$ y considerar un dl en un vecindario de $h = 0$.

Indicación para el ejercicio 2355 ▲

En $x = 0$ es el cociente de dos dl. En $x = +\infty$, se establece $h = \frac{1}{x}$ y se calcula un dl en $h = 0$.

Indicación para el ejercicio 2358 ▲

Hacer un desarrollo que involucre los x y el $\ln x$. Encontrar $\ell = 1$.

Indicación para el ejercicio 2377 ▲

1. $\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
2. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$
3. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + o(x^6)$
4. $\exp\big(\operatorname{sen}(x)\big) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$
5. $\operatorname{sen}^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$
6. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
7. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$
8. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\right) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
10. $\arcsen\big(\ln(1+x^2)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$.

Indicación para el ejercicio 2378 ▲

Por supuesto, se trata de calcular primero el dl para obtener el límite. Se encuentra :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x} = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$.

Indicación para el ejercicio 2380 ▲

Hacer un dl en $x=0$ de orden 2 esto da $f(0)$, $f'(0)$ y la posición con respecto a la tangente por lo tanto, todo lo que necesita para responder a las preguntas. Lo mismo en $x=1$.

Indicación para el ejercicio 2396 ▲

Se trata de hacer un dl para encontrar el límite.

1. (a) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x = +\infty$

   (b) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x = -\frac{3}{2}$
2. $\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = -2$.

Indicación para el ejercicio 2416 ▲

Identificar los dl de $\cos x$ y $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en $x=0$.

Indicación para el ejercicio 2436 ▲

Hacer un dibujo. Calcular el ángulo de observación α en función de la distancia x y estudiar esta función. Para simplificar la expresión de α_0, calcular $\tan \alpha_0$ usando la fórmula dando $\tan(a-b)$.

Indicación para el ejercicio 2437 ▲

Se pueden estudiar las funciones definidas por la diferencia de los dos términos de cada desigualdad.

Indicación para el ejercicio 2438 ▲

Es necesario usar las identidades trigonométricas clásicas.

Indicación para el ejercicio 2440 ▲

Se componen las ecuaciones por la función correcta (en el dominio de definición adecuado), por ejemplo coseno para el primero. Por la última, comenzar por estudiar la función para demostrar que existe una solución única.

Indicación para el ejercicio 2443 ▲

Hacer un estudio de función. La función $\operatorname{sgn}(x)$ es la *función signo* : vale $+1$ si $x>0$, -1 si $x<0$ (y 0 si $x=0$).

Indicación para el ejercicio 2478 ▲

Deducir la diferencia de las dos expresiones.

Indicación para el ejercicio 2481 ▲

1. Se observa lo que sucede en dos valores opuestos x y $-x$.
2. Expresar $X = \mathrm{e}^x$.

Indicación para el ejercicio 2482 ▲

Respuestas :

1. $\frac{3}{4}$;
2. $\ln 2$.

Indicación para el ejercicio 2487 ▲

Para la primera pregunta se calcula $\frac{1}{\cos^2 t}$. Para la segunda pregunta, verificar que $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ está bien definida y calcular $\operatorname{sh} y$.

Indicación para el ejercicio 2499 ▲

Demostrar que la ecuación $x^y = y^x$ es equivalente a $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, luego estudiar la función $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Indicación para el ejercicio 2505 ▲

Se encuentra $-\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})}$.

Indicación para el ejercicio 2506 ▲

Comenzar por calcular $C_n + S_n$ y $C_n - S_n$ usando las funciones ch y sh.

Indicación para el ejercicio 2507 ▲

Expresar $X = \mathrm{e}^x$ y $Y = \mathrm{e}^y$ y se reduce a un sistema de ecuaciones del tipo suma-producto.

Indicación para el ejercicio 2509 ▲

Se encuentra $f(x) = |\ln x|$, para todo $x > 0$.

Indicación para el ejercicio 2510 ▲

Hacer la tabla de variaciones de $f : x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$.

Indicación para el ejercicio 2538 ▲

¿No serían integrables las funciones continuas ?

Es necesario recordar cuál es la suma de los n primeros enteros, la suma de los cuadrados de n primeros enteros y la suma de una sucesión geométrica. La fórmula general para las sumas de Riemann es que $\int_a^b f(x)dx$ es el límite (cuando $n \to +\infty$) de

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Indicación para el ejercicio 2539 ▲

1. Se puede pensar que el coseno y el seno son las partes real e imaginaria de la función $t \mapsto e^{it}$. Se busca así primero calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$.
2. Se escoge q tal que $q^n = \frac{b}{a}$.

Indicación para el ejercicio 2541 ▲

1. Regresar a la definición de continuidad en x_0 tomando $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ por ejemplo.
2. Sea f es siempre del mismo signo (y luego usar la primera pregunta), o este no es el caso (y luego usar un teorema clásico...).
3. Se observa que $\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 (f(x) - x)dx$.

Indicación para el ejercicio 2542 ▲

Intentar encuadrar $\int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n} dt$.

Indicación para el ejercicio 2543 ▲

Se trata de demostrar que el límite vale 0. Para un $\alpha > 0$ fijo se separa la integral en dos partes según que f es más pequeño o más grande que $1-\alpha$.

Indicación para el ejercicio 2545 ▲

Se lleva a una composición de funciones o volviendo a la definición de la derivada con la tasa de incremento.

Indicación para el ejercicio 2546 ▲

1. Ya sea se hace como el ejercicio 2545, ya sea separar la integral en dos, y por una hacer un cambio de variable $u = x^2$.
2. $H(x)$ se calcule explícitamente y demostrar que en hecho H es una función constante, entonces es necesario comparar $H(x)$ y $F(x)$.

Indicación para el ejercicio 2580 ▲

Se puede tratar de reconocer las sumas de Riemann, luego calcular integrales. Para el producto componer con la función ln, para convertir el producto en una suma.

Indicación para el ejercicio 2595 ▲

¡Un dibujo no hace daño ! Es necesario resolver la ecuación $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$, luego calcular dos integrales.

Indicación para el ejercicio 2600 ▲

Es necesario volver al cálculo de $\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$.

Indicación para el ejercicio 2613 ▲

1. $\int \cos^{1234} x \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{1235}\cos^{1235} x + c$ (cambio de variable $u = \cos x$)
2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| + c$ (cambio de variable $u = \ln x$)
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ (cambio de variable $u = \exp x$)
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ (cambio de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$).

Indicación para el ejercicio 2622 ▲

1. Para $\int x^2 \ln x \, dx$, escribir $v' = x^2$, $u = \ln x$.
2. Para $\int x \arctan x \, dx$, escribir $v' = x$ y $u = \arctan x$.
3. Para ambos es necesario hacer una integración por partes con $v' = 1$.
4. Para $\int \cos x \exp x \, dx$ es necesario hacer dos integraciones por partes.

Indicación para el ejercicio 2626 ▲

1. Hacer una integración por partes para expresar I_{n+2} en función de I_n. Para el cálculo explícito se distinguen el caso de n par e impar.
2. Recordar : $u_n \sim v_n$ es equivalente a $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. Utilizar el decrecimiento de I_n, para encuadrar $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

Indicación para el ejercicio 2633 ▲

1. Mayorar por x^n.

2.
3. Se puede calcular $(I_0+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-\cdots$

Indicación para el ejercicio 2637 ▲

Calcular la suma y diferencia de estas dos integrales.

Indicación para el ejercicio 2638 ▲

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx = 1$ (cambio de variables $t = \tan \frac{x}{2}$). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (utilizar el precedente).

Indicación para el ejercicio 2667 ▲

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$ (descomposición en elementos simples)
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c$
3. $\int \operatorname{sen}^8 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + c$
4. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ (cambio de variable $u = \cos x$ o $u = \tan \frac{x}{2}$)
5. $\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x + 3\tan x} dx = -\frac{1}{5}\ln|2-\operatorname{sen} x| + \frac{7}{5}\ln|1+2\operatorname{sen} x| + c$ (cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$)

Indicación para el ejercicio 2668 ▲

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x \, dx = 1$ (integración por partes $v' = \operatorname{sen} x$, $u = x$)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$ (usando el cambio de variable $u = e^x$)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (cambio de variable $x = \tan t$, $dx = (1+\tan^2 t)dt$ y $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$)
4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = 3\ln 2 - 1$ (descomposición en elementos simples de la forma $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2}$)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x \, dx = \frac{3\pi}{4}$ (cambio de variables $u = \frac{1}{x}$ y $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$)

Indicación para el ejercicio 2838 ▲

Desarrollar con respecto a la última columna.

Indicación para el ejercicio 2840 ▲

Desarrollar con respecto a la primera columna para obtener Δ_{n-1} y otro determinante fácilmente calculado desarrollando con respecto a su primera fila.

Indicación para el ejercicio 2848 ▲

Realizar las siguientes operaciones en las columnas $C_n \leftarrow C_n - t_n C_{n-1}$, luego $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - t_n C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - t_n C_1$. Desarrollar con respecto a una recta adecuada y reconocer que se obtiene el determinante deseado pero con rango $n-1$.

Indicación para el ejercicio 2898 ▲

1. Regla de Sarrus.
2. Desarrollar con respecto a la segunda fila.
3. Hacer aparecer los 0 en la primera columna.
4. Utilizar la linealidad en relación con cada fila y cada columna para simplificar los coeficientes.
5. Hacer aparecer los 0...
6. Hacer aparecer los 0...
7. Permutar filas y columnas para que aparezca una matriz triangular en bloques.

Indicación para el ejercicio 2962 ▲

Escribir los polinomios en la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular $\int_2^4 P(x)\,dx$ por un lado y $\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ por otra parte. La identificación conduce a un sistema lineal a cuatro ecuaciones, de incógnitas α, β, γ.

Indicación para el ejercicio 2995 ▲

Se lleva a sistemas lineales ya sea eliminando los cocientes, ya sea haciendo un cambio de variable.

Indicación para el ejercicio 2997 ▲

Pensar en $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$.

Indicación para el ejercicio 2999 ▲

Tomar el logaritmo de las ecuaciones.

Indicación para el ejercicio 3627 ▲

Utilizar la fórmula de Bézout.

Indicación para el ejercicio 3804 ▲

Demostrar que el conjunto de x tal que $x^2 \neq$ e es de cardinal par.

Indicación para el ejercicio 4215 ▲

1. 2. $\dot{6}^2 = -\dot{1}$.

Indicación para el ejercicio 4465 ▲

1. Razonar con ayuda de una función f de la variable x tal que $x+y=f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.
2. Encontrar dos curvas en
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z); 2x^3+yz^2=0\}$$
que tienden al origen tal que los límites, calculadas a lo largo de estas curvas, existen pero tienen valores distintos.
3. Usa el hecho de que el numerador y el denominador siempre son positivos y que el orden del denominador es estrictamente mayor que el del numerador.
4. Razonar con ayuda de una función h de la variable y tal que $x^2-y^2=h(y)$ y $\lim_{y\to 0} h(y)=0$.
5. Encontrar dos curvas en el dominio de definición que tienden al origen tal que los límites, calculadas a lo largo de estas curvas, existen pero tienen valores distintos.

Indicación para el ejercicio 4466 ▲

Dividir el numerador y el denominador por x^2 resp. y^2, para determinar $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ resp. $\lim_{x\to 0} f(x,y)$. Demostrar que, calculada a lo largo de otra curva adecuada, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe y no vale cero.

Indicación para el ejercicio 4468 ▲

1. Refutar la existencia del límite mediante el estudio de límites a lo largo de dos curvas adaptadas.
2. Usar coordenadas polares en el plano.
3. Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ existe y es no nulo entonces
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{h(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)}.$$
4. Encontrar dos curvas en el dominio de definición que tienden al origen tales que los límites, calculadas a lo largo de estas curvas, existen pero tienen valores distintos.

Indicación para el ejercicio 4469 ▲

1. Razonar con ayuda de una función h de variables x, y tal que $x+y+z=h(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)=0$.
2. Demostrar que, ya bajo la restricción suplementaria $z=0$, el límite no puede existir.

Indicación para el ejercicio 4474 ▲

Establecer o refutar la existencia de un límite particular en el plano y luego determinar un límite siempre que exista, usar el hecho de que para que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ existe en el plano $\mathbb{R}^2$ es necesario y suficiente que cada uno de los límites $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} y_n$ existe como un límite finito.

Indicación para el ejercicio 4489 ▲

Es obvio que, en todo punto (x, y) distinto del origen, la función f es continua y que las derivadas parciales y existen y son continuas. Basta con demostrar que f es continua en $(0, 0)$ y que las derivadas parciales existen y son continuas.

Indicación para el ejercicio 4490 ▲

Para calcular las derivadas parciales con respecto a una variable, interpretar otras variables como parámetros y usar reglas ordinarias de cálculo de derivadas.

Indicación para el ejercicio 4492 ▲

Distinguir inmediatamente, la parte trivial y la parte no trivial del ejercicio.

Indicación para el ejercicio 4512 ▲

El plano tangente a la superficie de ecuación $f(x, y, z) = 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es dada por la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{16}$$

En el caso (1.), los cálculos se simplifican con la ecuación

$$z^2 = 19 - x^2 - y^2.$$

Indicación para el ejercicio 4513 ▲

No confundir las variables para la ecuación de la superficie, las variables para la ecuación de la tangente en un punto, y las coordenadas del punto de contacto.

Indicación para el ejercicio 4514 ▲

El plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es dada por la ecuación

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{17}$$

Indicación para el ejercicio 4515 ▲

El vector normal de la superficie de ecuación $f(x, y, z) = 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es el vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right). \tag{18}$$

Utilizar la ecuación $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ del cono C.

Indicación para el ejercicio 4516 ▲

Utilizar la versión (17) de la ecuación de un plano tangente a una superficie en un punto.

Indicación para el ejercicio 4517 ▲

Por las mayoraciones, utilizar las coordenadas polares (r,φ) en el plano. Distinguir inmediatamente, las partes triviales de las partes no triviales del ejercicio.

Indicación para el ejercicio 4518 ▲

Tomar

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \exp[\operatorname{sen}(\pi+x)\cos y] = \exp[-\operatorname{sen} x \cos y], \\ h(x,y) &= \arctan[\sqrt{4+x} - 2\exp(y)]. \end{aligned}$$

Indicación para el ejercicio 4527 ▲

Para calcular las derivadas parciales con respecto a una variable, interpretar otras variables como parámetros y usar reglas ordinarias de cálculo de derivadas.

Indicación para el ejercicio 4528 ▲

Interpretar la derivada direccional usando la intersección de la gráfica de la función con un plano adecuado.

Indicación para el ejercicio 4529 ▲

1. Usar coordenadas polares (r,φ) en el plano y el hecho que $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} r\log r = 0$.

Indicación para el ejercicio 4530 ▲

1. Para refutar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$, es suficiente encontrar una derivada direccional que no sea una combinación lineal de las derivadas parciales (con respecto a las dos variables).
2. El plano tangente en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ del gráfico $z = f(x,y)$ de F es dado por la ecuación

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{19}$$

Indicación para el ejercicio 4531 ▲

Calcular nos lleva a la verdad.

Indicación para el ejercicio 4532 ▲

Escribir $f(x,y)=(\operatorname{sen}(xy), y\cos x, xy\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2))=(u,v,w)$.

Indicación para el ejercicio 4591 ▲

Utilizar las reglas

$$\begin{aligned} d(f+g) &= df+dg, \\ d(fg) &= fdg+gdf, \\ d(f\circ h) &= (f'\circ h)dh. \end{aligned}$$

Indicación para el ejercicio 4592 ▲

Sean h, u, v funciones de dos variables x e y. Recordar que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h &= \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}(u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Indicación para el ejercicio 4593 ▲

Se va a determinar una primitiva de una forma diferencial de grado 1 por un cambio de variables tal que, en las nuevas variables, la primitiva es casi obvia.

Indicación para el ejercicio 4594 ▲

Recordar que la matriz hessiana es la matriz formada por las segundas derivadas parciales.

Indicación para el ejercicio 4595 ▲

1. Demostrar que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}F.$$
2. Demostrar que
$$r\frac{\partial F}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$
3. Demostrar que
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}$$
4. Utilizar estos resultados, luego calcular un poco más para obtener el resultado deseado.

Indicación para el ejercicio 4596 ▲

1. Gracias al cambio de variables $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u,v) \longmapsto (x,y) = \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$, la función f se escribe $F(u,v) = f(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$. Demostrar solo para que f sea solución de (4) es necesario y suficiente que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0. \tag{20}$$
2. Demostrar que, si F satisface a (20), existen dos funciones $g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$$F(u,v) = g_1(u) + g_2(v).$$
3. Escribir la solución general de (4) y explicar la frase : "En una dimensión del espacio, toda solución de la ecuación de onda se escribe como la suma de una onda que se mueve hacia la derecha y otra que se mueve hacia la izquierda."

Indicación para el ejercicio 4600 ▲

Recordar : Para que un punto crítico no degenerado tenga un máximo relativo (resp. mínimo relativo) es necesario y suficiente que la forma hessiana en este punto sea negativa (resp. positiva) ; para que un punto crítico no degenerado presente un punto silla, es necesario y suficiente que la forma hessiana en este punto sea (no degenerada) indefinida.

Indicación para el ejercicio 4601 ▲

Ver el ejercicio anterior.

Indicación para el ejercicio 4602 ▲

Ver los ejercicios anteriores.

Indicación para el ejercicio 4603 ▲

El plano tangente a la superficie de ecuación $f(x,y,z) = 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es dada por la ecuación
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0. \tag{21}$$

Indicación para el ejercicio 4604 ▲

Recordatorio del teorema de la función implícita para una función f de clase C^1 de dos variables definidas en un plano abierto : *Sea (x_0, y_0) un punto tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. En un vecindario de x_0, existe una función h de clase C^1 de la variable x definida en un intervalo abierto apropiado tal que $h(x_0) = y_0$ y tal que, para que en un vecindario de (x_0, y_0) las coordenadas x e y del punto (x,y) satisfagan la ecuación $f(x,y) = 0$, es necesario y suficiente que $y = h(x)$ y, si es así,*
$$h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$
Desde que el intervalo de definición de la función h es fijo la función h es única.

Indicación para el ejercicio 4605 ▲

Ver el ejercicio anterior.

Indicación para el ejercicio 4773 ▲

Encontrar dos reales a,b tales que, si se establece $u = x + ay$ y $v = x + by$, entonces $\dot{u}(t) = Au(t)$ y $\dot{v}(t) = Bv(t)$, donde A,B son constantes.

Indicación para el ejercicio 4784 ▲

Tal función f es solución de una ecuación diferencial $y' + y = c$.

Indicación para el ejercicio 4785 ▲

1. x es solución particular
2. cos es solución particular

Indicación para el ejercicio 4786 ▲

Solución particular :

1. $-\frac{1}{2x}$
2. $\frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x)$
3. $\frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$

Indicación para el ejercicio 4787 ▲

1. Es una ecuación de variables separadas.

Indicación para el ejercicio 4788 ▲

1. una infinidad de soluciones
2. una solución

Indicación para el ejercicio 4789 ▲

1. (a) Se lleva a $\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$.

   (b) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ o $y = 0$.
2. (a) Reemplazar y por $u + y_0$.

   (b) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}$ o $y = \frac{1}{x}$.

Indicación para el ejercicio 4821 ▲

Para el final : principio de superposición.

Indicación para el ejercicio 4822 ▲

Utilizar el método de variación de constantes.

Indicación para el ejercicio 4967 ▲

Utilizar el lenguaje de la geometría elemental, incluyendo las nociones de superficie de revolución, de eje de revolución, de vértice de un paraboloide, de vértice de un cono, de concavidad hacia arriba o hacia abajo, de hélice, de espiral, etc.

Indicación para el ejercicio 4968 ▲

Explotar las propiedades geométricas de las partes del plano que definen A_1 y A_2. Por ejemplo, una curva que se define como la imagen inversa de un punto relativamente a una función continua es una parte cerrada del plano.

Indicación para el ejercicio 4969 ▲

Razonar a partir de la definición de un abierto en el plano.

Indicación para el ejercicio 4970 ▲

Explotar el hecho de que el complemento de un abierto es cerrado y que el complemento de un cerrado es abierto.

Indicación para el ejercicio 4971 ▲

Distinguir la parte trivial del ejercicio de la parte no trivial. En este ejercicio, el único punto difícil es para el parámetro t cerca de 0.

Indicación para el ejercicio 5099 ▲

Descomponer la fracción en elementos simples $\frac{1}{1-X^n}$.

Indicación para el ejercicio 5131 ▲

Se considera discos cerrados asociados a un recubrimiento «circular» del plano y evidenciar una sucesión de discos anidados cuyos radios tienden a cero.

Indicación para el ejercicio 5162 ▲

Las medianas son las rectas (AA'), (BB'), (CC').

Indicación para el ejercicio 5202 ▲

Utilizar por ejemplo los números complejos.

Indicación para el ejercicio 5364 ▲

El triángulo rectángulo ADA' está inscrito en un semicírculo.

Indicación para el ejercicio 5365 ▲

Determinar los ángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{ANB}$.

Indicación para el ejercicio 5366 ▲

Demostrar que $(AB) \perp (RC)$.

Indicación para el ejercicio 5367 ▲

1. Pensar en un trapecio.
2. Se puede obtener una recta como la altura de un triángulo ABC adecuado.

Indicación para el ejercicio 5368 ▲

1. Pensar en el triángulo del colegio.

Indicación para el ejercicio 5369 ▲

Para el área, considerar el área del complemento de $IJKL$ por ejemplo, o bien usar las diagonales de $ABCD$.

Indicación para el ejercicio 5370 ▲

Descomponer el área como la suma de las áreas de dos triángulos.

Indicación para el ejercicio 5371 ▲

Escribir cada una de las distancias usando áreas de triángulos.

Indicación para el ejercicio 5372 ▲

Utilizar los triángulos isósceles.

Indicación para el ejercicio 5373 ▲

¿Dónde está el punto M en el segmento $[AC]$?

Indicación para el ejercicio 5374 ▲

El segmento $[EC]$ es paralela a (AC), y su longitud es la mitad del perímetro de OAC.

Indicación para el ejercicio 5375 ▲

Pitágoras.

Indicación para el ejercicio 5376 ▲

Utilizar la caracterización de triángulos isósceles usando ángulos.

Indicación para el ejercicio 5377 ▲

Escribir las distancias a los vértices según los ángulos del triángulo.

Indicación para el ejercicio 5378 ▲

Descomponer las longitudes según los puntos de tangencia del círculo inscrito.

Indicación para el ejercicio 5379 ▲

Triángulos isósceles.

Indicación para el ejercicio 5380 ▲

Particionar el triángulo en múltiples triángulos para calcular el área.

Indicación para el ejercicio 5407 ▲

La distancia de un punto $M_0(x_0,y_0)$ a una recta D de ecuación $ax+by+c=0$ es dada por la fórmula $d(M_0,D)=\frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Indicación para el ejercicio 5416 ▲

Para la paralela, considerar dos puntos A y B en la recta y construir un paralelogramo $ABPQ$. Para la perpendicular, construir un papalote $APBQ$.

Indicación para el ejercicio 5417 ▲

Utilizar una o varias cuerdas.

Indicación para el ejercicio 5418 ▲

Traza el punto medio I de AB, luego proceder por análisis-síntesis.

Indicación para el ejercicio 5420 ▲

2. Pensar en la intersección de las medianas.

Indicación para el ejercicio 5421 ▲

El baricentro es asociativo. Entonces construir el punto medio de dos lados opuestos, luego el punto medio de estos puntos medios, ya que :

$$\frac{A+B+C+D}{4}=\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}}{2}.$$

Para las otras preguntas, utilizar igualmente la asociatividad.

Indicación para el ejercicio 5422 ▲

1. Utilizar los triángulos particulares.
2. Utilizar el teorema de Thales.

Indicación para el ejercicio 5423 ▲

1. ¿A qué distancia de O' se sitúa en este punto de intersección ?
2. Utilizar el círculo de centro O' y de radio $r'-r$, para una tangente « exterior » o bien $r'+r$, para una tangente « interior », y otro círculo.

Indicación para el ejercicio 5424 ▲

1. Comenzar por encontrar el punto en la recta que pertenece al círculo.

2. Idem.

Indicación para el ejercicio 5425 ▲

1. Prueba de metodología : ¿qué rectas se pueden trazar a partir de lo que se da ?
2. Construir la recta equidistante (a distancia r) de las dos paralelas, luego las dos rectas paralelas a la tercera y a distancia r.

Indicación para el ejercicio 5426 ▲

Sean O_1, O_2 y O_3 los centros de los tres círculos. Considerar el centro del círculo circunscrito a $O_1O_2O_3$.

Indicación para el ejercicio 5431 ▲

Se considera las simetrías centrales σ_i en los puntos P_i, luego la composición $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n$. Para la segunda parte, pensar en el teorema de Varignon.

Indicación para el ejercicio 5432 ▲

De la misma forma que suele ser útil completar un triángulo rectángulo en un rectángulo, a menudo es útil completar un trapezoide rectangular en un rectángulo.

Indicación para el ejercicio 5434 ▲

Si ϕ es una homotecia que envía $\mathscr{C}$ sobre $\mathscr{C}'$, entonces $O' = \phi(O)$. Es suficiente tener un segundo par $(M, \phi(M))$, para poder dibujar el centro de la homotecia ϕ.

Indicación para el ejercicio 5435 ▲

Si los círculos no se confunden, puede haber entre 0 y 4 tangentes. Hacer las figuras para todos los casos posibles. Después, determinar las homotecias (o las traslaciones) enviando un círculo sobre el otro y trazando su centro.

Indicación para el ejercicio 5436 ▲

Haciendo una figura con el cuadrado ya construido, entonces se ven dos segmentos paralelos, que invita a usar una homotecia.

Indicación para el ejercicio 5437 ▲

1. Considerar una homotecia de centro G.
2. Considerar una homotecia de centro H. Se recuerda que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Indicación para el ejercicio 5439 ▲

Considerar el cuadrilátero $ABB'A'$ y sus diagonales : se cruzan en la recta.

Indicación para el ejercicio 5441 ▲

Utilizar una homotecia y una simetría central.

Indicación para el ejercicio 5443 ▲

Utilizar las homotecias.

Indicación para el ejercicio 5444 ▲

Considerar la traslación de vectores $\overrightarrow{CB}$ y la imagen de I por esta traslación.

Indicación para el ejercicio 5445 ▲

Las homotecias con el mismo centro conmutan, así como traslaciones.

Indicación para el ejercicio 5446 ▲

Homotecias o traslaciones.

Indicación para el ejercicio 5447 ▲

¿Cuál es la parte lineal de $f \circ g^{-1}$?

Indicación para el ejercicio 5448 ▲

Considerar la traslación τ de distancia a siguiendo la dirección de la derecha.

Indicación para el ejercicio 5449 ▲

Comenzar por construir un círculo tangente a las dos rectas.

Indicación para el ejercicio 5450 ▲

Sin la condición de A, el ejercicio es fácil. Trazar todo círculo tangente a las rectas. Luego, aplicar la metodología clásica.

Indicación para el ejercicio 5451 ▲

Las imágenes de tres puntos no alineados determinan de forma única una transformación afín. Deducir una condición en el cuarto punto.

Indicación para el ejercicio 5452 ▲

Considerar I y J los círculos de MA y AM' así como una proyección afín. Tal proyección reduce las distancias.

Indicación para el ejercicio 5453 ▲

Rotar el cuadrado circunscrito con respecto al cuadrado inscrito.

Indicación para el ejercicio 5454 ▲

Proceder por análisis-síntesis y considerar las rotaciones.

Indicación para el ejercicio 5455 ▲

Es suficiente construir una de las rectas de apoyo del cuadrado. Por esto, es suficiente construir un segundo punto en esta recta.

Indicación para el ejercicio 5457 ▲

El área de la intersección es un cuarto del área del cuadrado $ABCD$.

Indicación para el ejercicio 5458 ▲

Considerar la rotación de centro O y de ángulo $\pi/2$.

Indicación para el ejercicio 5459 ▲

Considerar la rotación de centro O y de ángulo $\pi/2$.

Indicación para el ejercicio 5460 ▲

Considerar la rotación de centro O y de ángulo $\pi/3$.

Indicación para el ejercicio 5461 ▲

Considerar una rotación de centro A.

Indicación para el ejercicio 5462 ▲

Si ABC es un triángulo, considerar rotaciones de ángulo $\pm\pi/3$ y centradas en los vértices. Determinar las imágenes de los diferentes puntos y rectas por estas rotaciones.

Indicación para el ejercicio 5463 ▲

Similitud.

Indicación para el ejercicio 5464 ▲

Considerar los círculos de diámetro $[AB]$ y $[AC]$, el segundo punto de intersección, y una similitud de centro A.

Indicación para el ejercicio 5465 ▲

Utilizar una similitud.

Indicación para el ejercicio 5466 ▲

Considerar similitudes centradas en A, B y C así como sus composiciones. (O entonces, usar los números complejos.)

Indicación para el ejercicio 5467 ▲

Considerar la similitud de centro A, de ángulo $\pi/4$ y de cociente $\sqrt{2}$, y la de centro C, de ángulo $-\pi/4$, y de cociente $1/\sqrt{2}$. O entonces, usar los números complejos.

Indicación para el ejercicio 5469 ▲

Triángulos isósceles y rectángulos

Indicación para el ejercicio 5471 ▲

Hay dos de esos octágonos. Notando O el centro de tal octágono, se debe tener $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$.

Indicación para el ejercicio 5475 ▲

Escribiendo con ángulos rectos y no haciendo distinción entre bisectrices exteriores e interiores.

Indicación para el ejercicio 5476 ▲

Introducir la tangente común $\mathscr{T}$ a los dos círculos.

Indicación para el ejercicio 5477 ▲

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ los círculos circunscritos a ARQ y BPR. Se cortan en R y en un segundo punto T, o entonces son tangentes en R. Demostrar que T (o R en el segundo caso) está en el círculo circunscrito a CQP.

Indicación para el ejercicio 5478 ▲

Los puntos A y E son los extremos de un diámetro. Luego, descomponer en triángulos.

Indicación para el ejercicio 5482 ▲

Utilizar los ángulos rectos para demostrar que los puntos son cocíclicos, luego usar el teorema del ángulo inscrito.

Indicación para el ejercicio 5483 ▲

Para la conclusión, utilizar $AC = AK + KC$.

Indicación para el ejercicio 5485 ▲

Descomponer $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})$ en $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{MC})$.

Indicación para el ejercicio 5487 ▲

La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es 2π.

Indicación para el ejercicio 5490 ▲

Utilizar las diferentes caracterizaciones de los triángulos isósceles.

Indicación para el ejercicio 5491 ▲

¿Dónde está el centro del triángulo circunscrito de un triángulo rectángulo ?

Indicación para el ejercicio 5493 ▲

Considerar las potencias con respecto a los dos círculos.

Indicación para el ejercicio 5494 ▲

Utilizar los triángulos semejantes, o bien usar la potencia de un punto con respecto a un círculo.

Indicación para el ejercicio 5495 ▲

Utilizar el segundo punto de intersección de la recta con el círculo, si existe.

Indicación para el ejercicio 5497 ▲

Considerar la similitud directa que envía el par (B,D) en el par (C,E).

Indicación para el ejercicio 5499 ▲

Si no se utilizan números complejos, se puede considerar C' la mitad de $[AB]$, s_1 la similitud directa de centro A, de razón $\sqrt{2}$ y de ángulo $\pi/4$ y s_2 la similitud de centro B, de razón $1/\sqrt{2}$ y de ángulo $\pi/4$. En el contexto de este ejercicio, las similitudes directas se utilizarán como en el siguiente ejemplo : como AQC es rectángulo isósceles en Q, la similitud directa de centro A, de ángulo $\pi/4$ y de cociente $\sqrt{2}$ envía Q sobre C.

Indicación para el ejercicio 5500 ▲

Reformular una igualdad de productos en una igualdad de cocientes. Utilizar las similitudes de centro M.

Indicación para el ejercicio 5501 ▲

Para las traslaciones o simetrías deslizantes, comenzar mostrando que el vector debe ser horizontal.

Indicación para el ejercicio 5507 ▲

En la última pregunta, hacer aparecer el punto P en la condición de alineación usando la relación de Chasles, por ejemplo.

Indicación para el ejercicio 5747 ▲

Un punto $M(t)$ es singular si $x'(t) = 0$ y $y'(t) = 0$.

Indicación para el ejercicio 5769 ▲

Utilizar el sistema de referencia de Frénet $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$.

Indicación para el ejercicio 5881 ▲

Se recuerda la fórmula de Green-Riemann que permite vincular la integral doble y la integral curvilínea :
Teorema. Sea $\mathscr{D}$ un dominio de $\mathbb{R}^2$ limitado por una curva cerrada $\mathscr{C}$ que se supone cortada por toda paralela a los ejes en dos puntos como máximo. Se considera una forma diferencial $\omega = Pdx + Qdy$ definida en $\mathscr{D}$. Si las funciones P y Q son de clase C^1, se tiene :

$$\int_{\mathscr{C}^+} Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

donde denotamos $\mathscr{C}^+$ la curva $\mathscr{C}$ que se ha orientado en el sentido directo.

Indicación para el ejercicio 6023 ▲

Considerar el color de las cajas excluidas.

Indicación para el ejercicio 6024 ▲

Para la pregunta (II) (b) se considera la parte A_0 minimal asociada con φ y se demuestra que A_0 y $h(Y - g(A_0))$ forman una partición de X. La biyección es definida por g sobre A_0 y por h^{-1} sobre $h(Y - g(A_0))$.

Indicación para el ejercicio 6026 ▲

Ver en la palabra “hilera” solo una condición de alineación.

Indicación para el ejercicio 6027 ▲

Contar, en un conjunto E a n elementos, el número de partes a p elementos obtenidos reuniendo una parte X a k elementos a una parte a $p-k$ elementos del complemento de X en E, k recorriendo $\{0, \dots, p\}$.

Indicación para el ejercicio 6028 ▲

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ y $24 = 2^3 \cdot 3$.

Indicación para el ejercicio 6029 ▲

Las primeras preguntas no presentan dificultad. Por la última, el más difícil (y la más interesante) es adivinar la fórmula. Por esto, calcular la potencia n-ésima para $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$. (La fórmula se da en la página “Soluciones”).

Indicación para el ejercicio 6031 ▲

Se pueden demostrar los siguientes puntos :
(a) $x \star y = e \Rightarrow y \star x = e$
(b) El elemento neutro de la izquierda es único.
(c) El elemento neutro a la izquierda es también un elemento neutro a la derecha.
(d) Todo elemento es invertible.

Indicación para el ejercicio 6032 ▲

Sí.

Indicación para el ejercicio 6033 ▲

Sin dificultad.

Indicación para el ejercicio 6034 ▲

Para la existencia de una inversa para toda matriz $n \times n$, con determinante no nulo, notar que $\det(A) \neq 0$ implica que la matriz A es invertible (como matriz) y que la matriz A^{-1}, que es de determinante $1/\det(A) \neq 0$ es entonces el inverso de A, para el grupo en cuestión.

Indicación para el ejercicio 6035 ▲

Sin dificultad.

Indicación para el ejercicio 6037 ▲

Considerar la partición de G en subconjuntos del tipo $\{x, x^{-1}\}$.

Indicación para el ejercicio 6038 ▲

Se comienza mostrando que f es sobreyectiva, notando que si $|G| = 2m+1$, así que para todo $y \in G$ se tiene $y = (y^{m+1})^2$.

Indicación para el ejercicio 6039 ▲

$x^m = a \Leftrightarrow x = a^u$, donde $um + v|G| = 1$.

Indicación para el ejercicio 6041 ▲

Estándar.

Indicación para el ejercicio 6044 ▲

Para el (c), introducir el morfismo $\mathbb{Z} \to \langle x \rangle$ que se asocia nx a todo entero $n \in \mathbb{Z}$. Este morfismo es sobreyectivo y de núcleo $d\mathbb{Z}$, donde d es el orden de x.

Indicación para el ejercicio 6045 ▲

Sin dificultad.

Indicación para el ejercicio 6047 ▲

Consecuencia del ejercicio 6046.

Indicación para el ejercicio 6048 ▲

$\{1\}, \mu_2 \times \{1\}, \{1\} \times \mu_2, \{(1,1),(i,i)\}, \mu_2 \times \mu_2$.

Indicación para el ejercicio 6050 ▲

Estándar.

Indicación para el ejercicio 6051 ▲

Para la segunda pregunta, notar que si x es de orden 2 en G, entonces yxy^{-1}, lo es también, para todo $y \in G$.

Indicación para el ejercicio 6054 ▲

Comenzar por analizar el posible orden de los elementos de G.

Indicación para el ejercicio 6056 ▲

Encontrar el orden de 2 en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$.

Indicación para el ejercicio 6057 ▲

Encontrar el orden de 2 módulo $2^n - 1$.

Indicación para el ejercicio 6078 ▲

$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy = yx$.

Indicación para el ejercicio 6085 ▲

(a) Es estándar. Utilizando (a), se obtiene $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, que no es cíclico ya que todos los elementos son de orden 1, 2 o 4. El resto no es muy difícil.

Indicación para el ejercicio 6086 ▲

(a) Bézout. (b) ϕ es inyectiva y los conjuntos inicial y final tienen la misma cardinalidad.

Indicación para el ejercicio 6088 ▲

$e^{2ik\pi/d} = \left(e^{2ik\pi/n}\right)^{n/d}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Indicación para el ejercicio 6089 ▲

$f(G')$ es un subgrupo de H isomorfo a $G'/(\ker(f) \cap G')$.

Indicación para el ejercicio 6090 ▲

Resulta del ejercicio 6089.

Indicación para el ejercicio 6093 ▲

Los morfismos del grupo $(\mathbb{Q},+)$ en sí mismo son de la forma $x \to ax$, con $a \in \mathbb{Q}$. Los morfismos del grupo $(\mathbb{Q},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$ son, entre los anteriores, aquellos cuya imagen está en $\mathbb{Z}$; solo existe el morfismo nulo. Los morfismos del grupo $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ en $(\mathbb{Z},+)$ están determinados por el entero $f(1)$ que debe verificar $mf(1)=0$; solo existe el morfismo nulo, si $m \neq 0$.

Indicación para el ejercicio 6094 ▲

El conjunto $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de morfismos de grupo de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano para la suma natural de morfismos. Se denota δ el mcd de m y n y m' y n' enteros m/δ y n/δ. Si $p:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ denota la sobreyección canónica, la correspondencia asociando a todo $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ el elemento $f \circ p(1)$ induce un isomorfismo de grupo entre $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y el subgrupo $n'\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ del grupo aditivo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que es isomorfo a $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$. El conjunto $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de los automorfismos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo para la composición. La correspondencia anterior induce un isomorfismo entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ y el grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ invertibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicación para el ejercicio 6097 ▲

El morfismo “determinante” de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\times}$ es sobreyectiva y de núcleo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Indicación para el ejercicio 6100 ▲

Si ζ es un elemento de G cuya clase módulo H engendra G/H, entonces todo elemento de G puede ser escrito $h\zeta^m$, con $h \in H$ y $m \in \mathbb{Z}$.

Indicación para el ejercicio 6101 ▲

Aplicar el ejercicio 6100 con $H = Z(G)$.

Indicación para el ejercicio 6103 ▲

Ejercicio clásico de álgebra lineal : $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)) = \mathbb{F}_p^{\times} \cdot \mathrm{Id}_n$ (donde Id_n denota la matriz identidad de orden n).

Indicación para el ejercicio 6105 ▲

Las preguntas (a) y (b) no presentan ninguna dificultad.

Para la pregunta (c), notar que, para todo $x \in G$, se tiene $(\tau_x)^{|G|} = 1$, y que la restricción de τ_x a H pertenece a $\mathrm{Aut}(H) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (y usa el ejercicio 6102).

Indicación para el ejercicio 6106 ▲

Sin dificultad. Se observa que todo conjugado de un conmutador es un conmutador y que un cociente G/H es abeliano si y solo si para todo $u,v \in G$, se tiene $uvu^{-1}v^{-1} \in H$.

Indicación para el ejercicio 6137 ▲

Sin dificultad.

Indicación para el ejercicio 6139 ▲

(a) Es una simple verificación.

(b) Las tres permutaciones se escriben respectivamente $(1\,3\,7\,5)\,(2\,6\,4)$, $(1\,7)\,(2\,4\,3)$ y $(2\,3\,7\,6\,5\,4)$.

(c) Es una simple verificación.

(d) **Recordar :** De manera general, se dice que una permutación $\omega \in S_n$ es de tipo 1^{r_1}-2^{r_2}-$\cdots$-d^{r_d}, donde $d, r_1, \ldots, r_d$ son enteros $\geqslant 0$ tales que $r_1 + \cdots + r_d = n$, si en la descomposición de ω en ciclos con soporte disjuntos, figuran r_1 1-ciclos (o puntos fijos), r_2 2-ciclos,... y r_d d-ciclos. Utilizando la pregunta (c), no es difícil demostrar que dos permutaciones son conjugadas en S_n si y solo si son de mismo tipo. Las clases de conjugación de S_n corresponden por lo tanto exactamente a todos los tipos posibles.
Se obtiene así fácilmente las clases de conjugación de S_5. Sea ahora H un subgrupo normal no trivial de S_5. Desde que H contiene un elemento de S_5, contiene su clase de conjugación; H es, por lo tanto una unión de clases de conjugación. Considerando todas las clases posibles que puede contener H, se demuestra que $H = A_5$ o $H = S_5$. Por ejemplo, si H contiene la clase 1-2-2, entonces H contiene $(1\,2)\,(3\,4) \times (1\,3)\,(2\,5) = (1\,4\,3\,2\,5)$ y por lo tanto, la clase de los 5-ciclos. Según el ejercicio 6138, H, entonces contiene A_5. El grupo H es, por lo tanto A_5 o S_5. Los otros casos son semejantes.

Indicación para el ejercicio 6144 ▲

Una potencia impar de una permutación impar no puede ser igual a 1.

Indicación para el ejercicio 6148 ▲

(a) Sin dificultad.
(b) El número buscado es la órbita de H bajo la acción de G por conjugación en sus subgrupos y $\mathrm{Nor}_G(H)$ es el fijador de H, para esta acción.

Indicación para el ejercicio 6149 ▲

Estudiar la acción del grupo por traslación sobre el conjunto cociente de clases módulo el subgrupo.

Indicación para el ejercicio 6150 ▲

El único punto no inmediato es que H' es de índice finito en G. Para esto considerar el morfismo de G, con valores en el grupo de permutaciones de las clases a la izquierda de G módulo H, que a $g \in G$ asocia la permutación $aH \to gaH$ y demostrar que el núcleo de este morfismo es el grupo H'.

Indicación para el ejercicio 6155 ▲

Pregunta (d) : Si K el fijador de un elemento $x \in X$, entonces K es un subgrupo propio maximal de G y X es isomorfo a $G/\cdot K$ en tanto que G-conjunto. Deducir del hecho de que H no está contenido en K que $HK = G$ y que $H/\cdot H \cap K \simeq G/\cdot K$.

Indicación para el ejercicio 6156 ▲

Sea H tal subgrupo. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que H contiene la transposición (12). Se puede entonces proceder de la siguiente manera :
- demostrar que H es generado por el fijador H_1 de 1 y por (12).

- demostrar que la órbita de 2 bajo H es la unión de la órbita de 2 bajo H_1 y de 1.
- deducir que H_1 actúa transitivamente sobre el conjunto $\{2,\ldots,n\}$ y que H actúa 2-transitivamente sobre $\{1,\ldots,n\}$.
- deducir del punto precedente que H contiene todas las transposiciones.

Indicación para el ejercicio 6157 ▲

(a) Es trivial.

(b) Notar primero que la condición sobre el fijador de x es independiente de $x \in X$: de hecho, si g es un elemento de G enviando x en otro elemento $x' \in X$ (que existe por transitividad de G), entonces $G(x') = gG(x)g^{-1}$ y la correspondencia $h \to ghg^{-1}$ permite identificar las acciones de $G(x')$ sobre $X \setminus \{x'\}$ y la de $G(x)$ sobre $X \setminus \{x\}$. Se supone ahora verificada la condición del fijador de x. Si (x,y) y (x',y') son dos pares de elementos distintos de X, existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x) = x'$ (transitividad de G) y existe $\tau \in G$ tal que $\tau(x') = x'$ y $\tau(\sigma(y)) = y'$ (transitividad de $G(x')$ sobre $X \setminus \{x'\}$ (notar que $\sigma(y) \neq x'$, pues $\sigma(x) = x'$)). La permutación $\tau\sigma$ verifica $\tau\sigma(x) = x'$ y $\tau\sigma(y) = y'$. Esto demuestra que X es 2-transitivo. El recíproco es trivial.

(c) Si la acción de G sobre X es imprimitiva y $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ es una partición de x como en la definición, entonces no existe elemento $g \in G$ enviando un primer elemento $x_1 \in X_1$ en X_1 y un segundo elemento $x_1' \in X_1$ en X_2.

(d) La acción por traslación de un grupo cíclico C en sí mismo es transitiva, es primitiva si $|C|$ es primo (toda partición de C en subconjuntos de la misma cardinalidad es forzosamente trivial) pero no es 2-transitiva (el reparador de todo elemento es trivial, lo que contradice el (c) del ejercicio 6155).

(e) y (f) no presentan ninguna dificultad.

Indicación para el ejercicio 6158 ▲

Se vuelve a la situación en la que el polígono está inscrito en el plano complejo y tiene por vértices las raíces de la unidad $e^{2ik\pi/n}, k = 0,1,\ldots,n-1$. Una isometría dejando invariante el polígono fija necesariamente el origen. Es por lo tanto de la forma $z \to az$ o $z \to a\bar{z}$, con $|a| = 1$. Entonces se ve que a es necesariamente una raíz n-ésima de 1. Denotemos σ la isometría $z \to e^{2i\pi/n}z$ y τ la conjugación compleja. Se tiene $D_n = \{\sigma^k\tau^\varepsilon \mid k = 0,\ldots,n-1, \varepsilon = \pm 1\}$. Se verifica que σ y τ generan el grupo D_n y satisfacen las relaciones $\sigma^n = 1$, $\tau^2 = 1$ y $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Dicho de otro modo, D_n es isomorfo al grupo diédrico de orden $2n$. Si n es impar, su centro es trivial y si $n = 2m$ es par, su centro es $\{1, \sigma^m\}$. El grupo D_n se sumerge naturalmente en S_n ; como $|D_3| = |S_3| = 6$, esta incrustación es un isomorfismo para $n = 3$.

Indicación para el ejercicio 6188 ▲

$|G| = |G/H|\,|H|$.

Indicación para el ejercicio 6190 ▲

Para los tres enunciados (a), (b) y (c), razonar por recurrencia en r usando el hecho de que el centro de un p-grupo no es trivial.

Indicación para el ejercicio 6193 ▲

Se tiene

$$D_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mu_2 \times S_3$$

El primer isomorfismo es una aplicación estándar del lema chino. Para el segundo, notar que el primer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ está en el centro del grupo y por lo tanto, la acción sobre él por conjugación del segundo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es trivial. El isomorfismo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_3$ es clásico.

Indicación para el ejercicio 6195 ▲

Para todo $g \in G$, gSg^{-1} es un p-Sylow de $gHg^{-1} = H$ y entonces $gSg^{-1} = S$.

Indicación para el ejercicio 6199 ▲

Para el (c), para $H \neq \{1\}$ subgrupo normal de A_5, razonar sobre los elementos de orden 2, 3 y 5 contenidos en H.

Indicación para el ejercicio 6200 ▲

La identificación de cada uno de los p-Sylow no estable no de dificultad. Se observa entonces que los subgrupos de Sylow son dos a dos de intersección reducidos a $\{1\}$ y determinar su número contando los elementos de orden 2, 3 y 5.

Indicación para el ejercicio 6202 ▲

Los teoremas de Sylow muestran que existe solo una q-Sylow, necesariamente normal. La sucesión es estándar. Para el último punto, utilizar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ (ejercicio 6094) y así como $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ no puede actuar de manera no trivial sobre $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ que si p divide $q-1$.

Indicación para el ejercicio 6203 ▲

Según el ejercicio 6202, un grupo de orden 35 es isomorfo a $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, que es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ por el lema chino.

Indicación para el ejercicio 6205 ▲

Sea G un grupo de orden p^2q que se supone simple. Se distinguen dos casos : $p > q$ y $p < q$. En el primero, demostrar que G admite q p-Sylow de orden p^2 y que la acción por conjugación de G en los p-Sylow define un morfismo inyectivo $G \hookrightarrow S_q$ y se produce una contradicción. En el segundo, razonar sobre el número de q-Sylow para conducir a una contradicción (en particular se tiene que eliminar el caso $p = 2$ y $q = 3$).

Indicación para el ejercicio 6207 ▲

(a) Si K es un subgrupo de orden 20, K tiene un solo 5-Sylow L y entonces $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$, lo que significa que el orden de $\mathrm{Nor}_G(L)$ es 20 o 60. Pero entonces hay 1 o 3 5-Sylow en G. Por lo tanto 1 es imposible porque G es simple y 3 contradice las predicciones de teorema de Sylow.

(b) Si K tiene un único 3-Sylow L, $K \subset \mathrm{Nor}_G(L)$, y por lo tanto, el orden de $\mathrm{Nor}_G(L)$ es 12 o 60. Hay entonces 5 o 1 3-Sylow en G. Como antes, es imposible.

(c) Se supone que $H \cap K = \langle a \rangle$ sea de orden 2. El centralizador $\mathrm{Cen}_G(a)$ de a contiene H y K, por lo tanto $H \cup K$. Su orden es al menos 6 y es divisible por 4. Las únicas posibilidades son 12, 20, 60 :
- 60 es imposible, pues $\langle a \rangle$ es normal en G
- 20 es imposible, de acuerdo a la pregunta (a)
- 12 es imposible, pues $\mathrm{Cen}_G(a)$ tendría 4 3-Sylow según la pregunta (b). Solo hay lugar para un 2-Sylow lo que contradice $H \cup K \subset \mathrm{Cen}_G(a)$.

(d) Si $H = \mathrm{Nor}_G(H)$, hay 15 2-Sylow, y entonces 46 elementos de orden, una potencia de 2. Pero existen 6 5-Sylow de intersecciones dos a dos triviales, y entonces 24 elementos de orden 5. La desigualdad $46+24 > 60$ proporciona una contradicción.

(e) Si H es un 2-Sylow, el orden de $\mathrm{Nor}_G(H)$ es 12, 20 o 60. Pero 20 es excluido (pregunta (a)) del mismo modo 60 (G es simple). La única posibilidad es 12 ; hay por lo tanto, 5 2-Sylow.

(f) La acción de G por conjugación en los 5-Sylow proporciona un morfismo $c : G \to S_5$ que es inyectivo (pues G es simple). El grupo G es, por lo tanto isomorfo a su imagen $c(G)$ que es un subgrupo de orden 60, así de índice 2 en S_5. Es entonces A_5.

Indicación para el ejercicio 6417 ▲

Ver la solución del ejercicio 6409, segunda pregunta.

Indicación para el ejercicio 7012 ▲

Verificar que :

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
3. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;
4. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
5. $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$;

Indicación para el ejercicio 7013 ▲

Demostrar que J_x es un intervalo abierto ; que $J_x = J_y$ o $J_x \cap J_y = \varnothing$. Y pensar que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Indicación para el ejercicio 7014 ▲

Para encontrar m, ¿qué se debe tomar si solo se quiere $m \in \mathbb{R}$?

Indicación para el ejercicio 7015 ▲

Regresar a la definición de qué es un “conjunto cerrado” y qué es una “bola cerrada”.

Indicación para el ejercicio 7018 ▲

Una sucesión de l^∞ es denotada $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, para cada $p \geqslant 0$, x^p es en sí mismo una sucesión $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$.

Indicación para el ejercicio 7019 ▲

Demostrar

— $\|f\| \leqslant N(f)$;
— $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$;
— $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.

Indicación para el ejercicio 7021 ▲

— Demostrar $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
— Por un contraejemplo, demostrar que no existe constante $C > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$, para todo f.

Indicación para el ejercicio 7022 ▲

Las únicas relaciones son :

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

Indicación para el ejercicio 7098 ▲

1. Se observa si U_a es un vecindario de a, entonces $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$.
2. Razonar por reducción al absurdo y construir una sucesión (x_n) de la cual ningún elemento está en U y una sucesión (y_n) de K. Incluso, si se extrae una sub-sucesión, asegurarse de que converge al mismo límite.

Indicación para el ejercicio 7099 ▲

Utilizar que un conjunto K es compacto si y solo si de toda sucesión de elementos de K se puede extraer una sub-sucesión que converge hacia un elemento de K.

Indicación para el ejercicio 7100 ▲

Extraer las sub-sucesiones...

Indicación para el ejercicio 7104 ▲

Se puede utilizar la caracterización de la cerradura por sucesiones.

Indicación para el ejercicio 7105 ▲

1. Utilizar la caracterización de la cerradura por sucesiones.
2. Se observa que "$\|f(x)\| \to \infty$, cuando $\|x\| \to \infty$" es equivalente a

$$\text{“}\forall M > 0,\ \exists m > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).''$$

Indicación para el ejercicio 7108 ▲

1. ...
2. Utilizar el ejercicio 7101.
3. Demostrar $f(Y) \subset Y$, luego $Y \subset f(Y)$.
4. Diámetro cero implica un conjunto reducido a un punto aislado.

Indicación para el ejercicio 7158 ▲

1. Utilizar el hecho de que todo abierto de $\mathbb{R}$ es la unión numerable de intervalos abiertos.

2. Escribir un intervalo cerrado como una unión numerable de intervalos abiertos, luego usar el mismo comentario que arriba.

Indicación para el ejercicio 7159 ▲

1. ….
2. Para demostrar que c_0 es cerrado, escribirlo como la imagen inversa de algo.

Indicación para el ejercicio 7160 ▲

Demostrar que el complemento es abierto. Si se quiere, situarse en espacios métricos.

Indicación para el ejercicio 7161 ▲

1. Para un polinomio P, el límite de $P(x)$ vale $\pm\infty$ solo cuando x tiende a $\pm\infty$.

Indicación para el ejercicio 7162 ▲

1. Para el sentido directo se utiliza la caracterización de la adherencia por las sucesiones. Por el sentido recíproco, demostrar que la imagen inversa de un cerrado es un cerrado.

Indicación para el ejercicio 7165 ▲

1. Por reducción al absurdo, considerar $I(x) = \int_0^x f$. Encontrar una sucesión (p_n) tal que $(I(p_n))$ no es una sucesión de Cauchy.
2. Para demostrar que esta integral converge, usar el cambio de variable $u = t^2$, luego hacer una integración por partes.

Indicación para el ejercicio 7213 ▲

Si la relación se cumple, demostrar que B es continua en x calculando $B(x+y) - B(x)$. Si B es continua entonces en particular B es continua en $(0,0)$, fijar el ε de esta continuidad,...

Indicación para el ejercicio 7214 ▲

La continuidad de L sobre E equivalente a la continuidad en 0. Por reducción al absurdo suponer que L no es continua en 0 y construir una sucesión (x_n) que tiende a 0, pero con $(L(x_n))$ no acotado.

Indicación para el ejercicio 7215 ▲

Es necesario demostrar $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Hacerlo para $\lambda \in \mathbb{N}$, luego $\lambda \in \mathbb{Z}$, luego $\lambda \in \mathbb{Q}$ y finalmente $\lambda \in \mathbb{R}$.

Indicación para el ejercicio 7216 ▲

1. $\|S\| = 1$;

2. $\|T\| = \|g\|_\infty$;
3. $\|u\| = \int_0^1 |g|$, se distinguen los casos en que g permanece de signo constante y los casos en que g cambia de signo ;
4. $\|u\| = \|a_n\|_2$;
5. $\|u\| = \|a\|_\infty$;
6. $\|u\| = 1$.

Indicación para el ejercicio 7217 ▲

U es continua y $\|U\| = 1$, V no es continua.

Indicación para el ejercicio 7219 ▲

1. Demostrar primero que X se descompone en la forma $H + \mathbb{R} \cdot a$.
2. ...
3. No ! Determinar un contraejemplo en los ejercicios anteriores.

Indicación para el ejercicio 7221 ▲

Demostrar que $\|L\| = \pi$.

Indicación para el ejercicio 7268 ▲

1. Es una sucesión de Cauchy. Trate de reducir a una sucesión de Cauchy de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Considerar la sucesión definida por $u_n = -n$.
3. Como la primera pregunta.

Indicación para el ejercicio 7269 ▲

f es inyectiva solo para que d sea una distancia. Razonar por doble implicación. Utilizar la caracterización de un cerrado por las sucesiones.

Indicación para el ejercicio 7270 ▲

1. (X, d_ω) es completo. La prueba es casi la misma que demostrar que $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ es completo.
2. Tomar como ejemplo, la función f_n definida en $[0,1]$ por $f_n(t) = 1$, para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$, para $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ y $f(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.

Indicación para el ejercicio 7271 ▲

1. Integrar el ejemplo del ejercicio 7270.
2. Sí, este espacio es completo, ¡demostrarlo !

Indicación para el ejercicio 7272 ▲

1. Tomar la sucesión (x^p) definida por $x^p = (1,1,\ldots,1,1,0,0,0,\ldots)$. $((x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ es, por lo tanto una sucesión de sucesiones).
2. Tomar Y el espacio de todas las sucesiones.
3. Considerar $x^p = (1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{p},0,0,\ldots)$.

Indicación para el ejercicio 7273 ▲

1. Escribir lo que da la definición de "(x_n) es una sucesión de Cauchy" para $\varepsilon = 1$, luego $\varepsilon = \frac{1}{2}$,..., luego $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Hacer la suma. Se observa que si $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$, entonces $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$.
2. ...

Indicación para el ejercicio 7303 ▲

Esta es aproximadamente la misma prueba que para el teorema del punto fijo de una función contractante.

Indicación para el ejercicio 7304 ▲

Demostrar que el único punto fijo x de f^n, es un punto fijo de f. Para esto escribir la igualdad $f^n(x) = x$ y componer hábilmente esta igualdad. Para concluir utilizar la unicidad del punto fijo de f^n.

Indicación para el ejercicio 7305 ▲

Hacer los cálculos con cuidado : $(T \circ Tf)(x) = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. Se recuerda que X es completo y usa el ejercicio 7304.

Indicación para el ejercicio 7319 ▲

Razonar por reducción al absurdo y demostrar que ω_x es un abierto denso.

Indicación para el ejercicio 7320 ▲

1. Una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ es *semi-continua inferiormente* si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \text{ es un abierto.}$$
De manera equivalente f es *semi-continua inferiormente* si para todo $x \in X$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in X\ \ (d(x,y) < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon).$$
Cuidado no hay valor absoluto alrededor de $f(x) - f(y)$.
2. Para la primera pregunta se considera $O_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$ y usar el teorema de Baire.

3. Para la aplicación utilice, la primera pregunta con la función
$$\phi : B \to \mathbb{R}, \text{ definida por } \phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

Indicación para el ejercicio 7332 ▲

Utilizar la primera pregunta para las dos siguientes.

Indicación para el ejercicio 7334 ▲

Utilizar la partición $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$, donde $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ es la frontera de A.

Indicación para el ejercicio 7335 ▲

Hacer un dibujo de T. Para la última pregunta, razonar por contradicción. ¿Dónde se pueden enviar los puntos de la segunda pregunta ?

Indicación para el ejercicio 7336 ▲

1. Para la sobreyección, pensar en la exponencial o en senos y cosenos... Para la inyección, razonar por reducción al absurdo y usar la conexidad del círculo privado de un punto.
2. Razonar por reducción al absurdo y usar la conexidad de $\mathbb{R}^2$ privado de un punto.

Indicación para el ejercicio 7337 ▲

Definir $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $g(x)$ toma el valor que tiene f sobre B_x. Demostrar para cada punto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g es constante en un vecindario de este punto, luego hacer lo mismo para un punto de $\mathbb{Q}$. Concluir.

Indicación para el ejercicio 7338 ▲

1. ¡Hacer un dibujo !
2. Utilizar el teorema de incrementos finitos por un lado. La definición de la derivada por otro lado.
3. Utilizar el ejercicio 7332 o rehacer la demostración.

Indicación para el ejercicio 7340 ▲

1. Hacer un dibujo ! !
2. Ver el ejercicio 7332.
3. Razonar por reducción al absurdo. Tomar un camino que conecta el punto $(0,0)$ al punto $(\frac{1}{2\pi},0)$ (por ejemplo). Este camino se abandona en un momento t_0 el segmento $\{0\} \times [-1,1]$. Encontrar una contradicción en ese momento.

Indicación para el ejercicio 7369 ▲

Aproximar f por una sucesión de polinomios, y se recuerda que si la integral de una función positiva y continua es nula entonces...

Indicación para el ejercicio 7370 ▲

Razonar por reducción al absurdo.

Indicación para el ejercicio 7371 ▲

Considerar la aplicación $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ definida por $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$.

Indicación para el ejercicio 7372 ▲

Aplicar el teorema de Stone-Weierstrass.

Indicación para el ejercicio 7373 ▲

Para la segunda pregunta :

1. Demostrar que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua.
2. Demostrar que $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.
3. Aplicar el teorema de Ascoli al compacto $\bar{B}(0,R)$.
4. Utilizar el proceso diagonal de Cantor ($R = 1, 2, 3, \dots$).

Indicación para el ejercicio 7374 ▲

Empezar con la desigualdad : $|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|$.
Si (f_n) no es equicontinua el resultado puede ser falso. Tomar $f_n(x) = (1+x)^n$ y $x_n = \frac{1}{n}$.

Indicación para el ejercicio 7376 ▲

1. Para abierto y cerrado, escribir la equicontinuidad para $\varepsilon = 1$ en un punto x (a fijar).
2. Ascoli...

Indicación para el ejercicio 7377 ▲

1. Por la equicontinuidad use el teorema de incrementos finitos. Para la convergencia simple demostrar que para t fijado : $f_n(t) = \operatorname{sen}(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})$.
2. Demostrar que (f_n) no converge a la función nula para la norma $\|\cdot\|_\infty$ (es decir, hay convergencia simple pero no convergencia uniforme). ¿Es falso el teorema de Ascoli ?

Indicación para el ejercicio 7458 ▲

Sin la hipótesis de conexidad, el anillo ya no es íntegro.

Indicación para el ejercicio 7469 ▲

Para la última pregunta, se puede demostrar que $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ya que $u(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Indicación para el ejercicio 7587 ▲

Por reducción al absurdo, suponer que existe $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$ y estudiar la función $z \mapsto \dfrac{1}{f(z)-a}$.

Indicación para el ejercicio 7592 ▲

Utilizar el teorema de Morera y hacer una disyunción de casos según la posición del triángulo con respecto a L.

Solución del ejercicio 2 ▲000105

No hay que dejarse impresionar por el encanto de esta afirmación. En efecto, $A \Rightarrow B$ es una escritura para B o (no A) ; aquí A (la proposición $(1=2)$) es falso, por lo tanto (no A) es cierta y B o (no A), lo es igualmente. Por lo que la afirmación $A \Rightarrow B$ es cierta, cuando A es falso y cualquiera que sea la proposición B.

Solución del ejercicio 3 ▲000106

1. (a) es falso. Su negación es $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x+y \leqslant 0$ es cierta. Dado $x \in \mathbb{R}$ siempre existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x+y \leqslant 0$, por ejemplo se puede tomar $y = -(x+1)$ y entonces $x+y = x-x-1 = -1 \leqslant 0$.
2. (b) es cierta, para un x dado, se puede tomar (por ejemplo) $y = -x+1$ y entonces $x+y = 1 > 0$.
   La negación de (b) es $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x+y \leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$ es falso, por ejemplo $x=-1$, $y=0$.
   La negación es $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x+y \leqslant 0$.
4. (d) es cierta, se puede tomar $x=-1$. La negación es : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ y^2 \leqslant x$.

Solución del ejercicio 4 ▲000107

En esta solución, se da una justificación, que no se pide.

1. Esta afirmación se descompone de la siguiente manera : (Para todo $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leqslant 1)$. La negación de "(Para todo $x \in \mathbb{R}$)" es "Existe $x \in \mathbb{R}$" y la negación de "$(f(x) \leqslant 1)$" es $f(x) > 1$. Entonces la negación de la afirmación completa es : "Existe $x \in \mathbb{R},\ f(x) > 1$".
2. Recordar cómo se traduce la afirmación "La aplicación f es creciente" : "para todo par de reales (x_1,x_2), si $x_1 \leqslant x_2$, entonces $f(x_1) \leqslant f(x_2)$". Esto se descompone en : "(para todo par de reales x_1 y x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implica $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La negación de la primera parte es : "(existe un par de reales (x_1,x_2))" y la negación de la segunda parte es : "($x_1 \leqslant x_2$ y $f(x_1) > f(x_2)$)". Entonces la negación de la afirmación completa es : "Existe $x_1 \in \mathbb{R}$ y $x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 \leqslant x_2$ y $f(x_1) > f(x_2)$".
3. La negación es : "la aplicación f no es creciente o no es positiva". Se tiene ya traducido "la aplicación f no es creciente", traducir "la aplicación f no es positiva" : "existe $x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$". Entonces la negación de la afirmación completa es : " Existe $x_1 \in \mathbb{R}$ y $x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, o existe $x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$".
4. Esta afirmación se descompone de la siguiente manera : "(Existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leqslant 0)$". La negación de la primera parte es : "(para todo $x \in \mathbb{R}^+$)", y la del segundo es :"$(f(x) > 0)$". Entonces la negación de la afirmación completa es : "Para todo $x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) > 0$".
5. Esta afirmación se descompone de la siguiente manera : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La negación de la primera parte es "$(\forall x \in \mathbb{R})$", la de la segunda es "$(\exists y \in \mathbb{R})$", y la de la tercera

es “($x < y$ y $f(x) \leqslant f(y)$)”. Entonces la negación de la afirmación completa es : “$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$talesque$x < y$ y $f(x) \leqslant f(y)$”.

Solución del ejercicio 5 ▲000108

1. $\Leftarrow$
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Solución del ejercicio 6 ▲000109

1. Esta proposición es verdadera. De hecho, sea $\varepsilon > 0$, se definen $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ y $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, entonces $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Siendo esto cierto cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ la proposición queda así demostrada.
2. Sean dos puntos fijos M_1, M_2 verificando esta propuesta, la distancia $d = M_1M_2$ es tan pequeño como se quiera por lo que es nula, por lo tanto $M_1 = M_2$; pero los conjuntos F_1 y F_2 son disjuntos. Entonces la proposición es falsa. La negación de esta proposición es :
$$\forall M_1 \in F_1 \ \ \forall M_2 \in F_2 \ \ \exists \varepsilon \in]0, +\infty[\ \ M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$
y esto expresa el hecho que los conjuntos F_1 y F_2 son disjuntos.
3. Esto es igualmente falso, de hecho, supongamos que es verdadera, sea entonces ε correspondiente a esta proposición. Sea $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ y $M_2 = (1, 1)$, se tiene $M_1M_2 > \varepsilon + 1$, lo que es absurdo.
La negación es :
$$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[\ \ \exists M_1 \in F_1 \ \ \exists M_2 \in F_2 \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon.$$
Es decir, que podemos encontrar dos puntos también alejados uno del otro tanto como se quiera.
4. Esta proposición es verdadera, es suficiente elegir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. ¡Significa que la distancia entre dos puntos dados es un número finito !

Solución del ejercicio 7 ▲000110

“Hay un habitante de la rue du Havre que tiene los ojos azules, que no gana la lotería o que se retira después de los 50 años.”

Solución del ejercicio 8 ▲000111

1. P y no Q ;
2. “no P o Q” que es lo mismo que “$P \Rightarrow Q$” ;
3. (no P) o ((no Q) o (no R)) (se pueden quitar los paréntesis) ;
4. no P y (no Q o no R) (aquí los paréntesis son importantes) ;
5. P y Q y R y no S.

Solución del ejercicio 9 ▲000112

1. “Existe un triángulo rectángulo que no tiene ángulo recto.” ¡Es claro que la última frase es falsa !

2. "Existe un establo en el que hay (al menos) un caballo cuyo color no es negro."
3. Sabiendo que la proposición en lenguaje matemático se escribe

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Rightarrow z < x+1),$$

la negación es

$$\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ y } z \geqslant x+1).$$

4. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ y } |5x-7| \geqslant \varepsilon)$.

Solución del ejercicio 16 ▲000119

Se observa primero que para $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$, pues $2n+1 \leqslant 2(n+2)$. Dado $\varepsilon > 0$, se tiene así

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$$

Ahora nosotros buscar una condición sobre n, para que la desigualdad

$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

sea verdadera.

$$2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} \Leftrightarrow (2-\varepsilon)(n+2) < 2n+1 \Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2) \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$

Aquí ε es dado, se toma un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, así que para todo $n \geqslant N$ se tiene $n \geqslant N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ y por lo tanto, : $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$.

Conclusión : es dado $\varepsilon > 0$, se ha encontrado un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant N$ se tiene $2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ y $\frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon$.

De hecho se ha demostrado que la sucesión de término $(2n+1)/(n+2)$ tiende a 2, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 17 ▲000120

1. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant M$;
2. $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ m \leqslant f(x) \leqslant M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x+a) = f(x)$;
7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > g(x)$.

Solución del ejercicio 18 ▲005103

1. (a) $(f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M)$ y $(f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P} /\ f(M) \neq M)$.

(b) (f tiene al menos un punto fijo $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) = M$) y ($f$ no tiene puntos fijos $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

Denotemos que las oraciones $f(M) = M$ o $f(M) \neq M$ **no tiene sentido** si no van acompañadas de cuantificadores.

2. (a) $(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ y $(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0)$.

   (b) (La ecuación $f(x) = 0$ tiene (al menos) una solución si y solo si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) y (la ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución si y solo si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).

   (c) (La ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución si y solo si $\exists! x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) y (la ecuación $f(x) = 0$ no tiene exactamente una solución si y solo si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$ o $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \neq x'$ y $f(x) = f(x') = 0)$.

3. (a) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M)$ y $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no acotado $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M)$.

   (b) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ y $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no creciente $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n)$.

   (c) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ o $(\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leqslant u_n))$ y $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no monótona $\Leftrightarrow ((\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n)$ y $(\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n))$.

Solución del ejercicio 19 ▲005104

Lo contrario de $x \geqslant 3$ es $x < 3$. Lo contrario de $0 < x \leqslant 2$ es $((x \leqslant 0)$ o $x > 2)$.

Solución del ejercicio 20 ▲005105

1. Sí. En los dos casos, cada vez que se da una real x_0, $f(x_0)$ y $g(x_0)$ son ambos nulos.
2. No. La segunda declaración implica la primera, pero la primera no implica la segunda. La primera frase es la traducción con cuantificadores de la igualdad $fg = 0$. La segunda oración es la traslación con cuantificadores de $(f = 0$ o $g = 0)$. Aquí existe un ejemplo de funciones f y g ambas no nulas cuyo producto es cero.

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   Para cada valor de x, se tiene ya sea $f(x) = 0$ (cuando $x \leqslant 0$), sea $g(x) = 0$ (cuando $x \geqslant 0$). Se tiene entonces : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ o $g(x) = 0)$ o aún $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ o finalmente, $fg = 0$. Sin embargo, $f(1) = 1 \neq 0$ y entonces $f \neq 0$, y $g(-1) = -1 \neq 0$ y entonces $g \neq 0$. Así, no se tiene $(f = 0$ o $g = 0)$ o aún, no se tiene $((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ o $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0))$.

Solución del ejercicio 22 ▲000122

Demostrar la afirmación 1. de dos maneras diferentes.

1. En primer lugar, de forma “directa”. Se supone que A y B son tales que $A \cap B = A \cup B$. Se debe demostrar que $A = B$. Para esto dado $x \in A$ hay que demostrar que está también en B. Como $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$, por lo tanto $x \in A \cap B$ (pues $A \cup B = A \cap B$). Así $x \in B$. Ahora se toma $x \in B$ y el mismo razonamiento implica $x \in A$. Entonces todo elemento de A está en B y todo elemento de B está en A. Esto quiere decir $A = B$.

2. Luego, como se solicita, se demuestra por contraposición. Se supone que $A \neq B$ y no se tiene que demostrar que $A \cap B \neq A \cup B$.
   Si $A \neq B$ esto significa que existe un elemento $x \in A \setminus B$ o entonces un elemento $x \in B \setminus A$. Si se intercambian A y B, se supone que existe $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A \cup B$, pero $x \notin A \cap B$. Entonces $A \cap B \neq A \cup B$.

Solución del ejercicio 23 ▲000123

$$x \in \complement(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \qquad\qquad x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B \qquad\qquad \Leftrightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ y } x \in \complement B \qquad\qquad \Leftrightarrow x \in \complement A \text{ o } x \in \complement$$
$$\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \qquad\qquad \Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B.$$

Solución del ejercicio 24 ▲000124

Demostrar algunas afirmaciones. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$, o $x \in A$, por lo tanto $y = f(x) \in f(A)$ e igualmente $x \in B$, por lo tanto $y \in f(B)$. De donde $y \in f(A) \cap f(B)$. Todo elemento de $f(A \cap B)$ es un elemento de $f(A) \cap f(B)$, por lo tanto $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Observación : la inclusión recíproca es falsa. Ejercicio : encontrar un contraejemplo.
$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus A \Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ pues } f^{-1}(A) = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 36 ▲000136

$I_1 = 3$ y $I_2 = [-2, 5]$.

Solución del ejercicio 37 ▲000137

$I = [0, 2]$ y $J =]1, +\infty[$.

Solución del ejercicio 44 ▲000144

1. $B \setminus A \subset X \subset B$.
2. $B \subset X \subset B \cup \complement A$.

Solución del ejercicio 48 ▲005112

1. Si $A = B = \varnothing$, entonces $A \Delta B = \varnothing = A \cap B$. Si $A \Delta B = A \cap B$, se supone por ejemplo $A \neq \varnothing$. Sea $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B = A \Delta B$, lo que es absurdo y si $x \notin B$, $x \in A \Delta B = A \cap B$, lo que es absurdo. Entonces $A = B = \varnothing$. Finalmente, $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2. Por distributividad de $\cap$ sobre $\cup$,

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) &= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap B)\cup(B\cap C))\cap(C\cup A)\\ &= ((A\cap C)\cup B)\cap(C\cup A) \text{ (pues } B\cap B=B \text{ y } A\cap B\subset B \text{ y } B\cap C\subset B)\\ &= ((A\cap C)\cap C)\cup((A\cap C)\cap A)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap C)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(B\cap A)\\ &= (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\end{aligned}$$

3. $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=B\Delta A$.

4. $x\in(A\Delta B)\Delta C\Leftrightarrow x$ está en $A\Delta B$ o en C pero no en los dos
$\Leftrightarrow ((x\in A \text{ y } x\notin B \text{ y } x\notin C) \text{ o } (x\in B \text{ y } x\notin A \text{ y } x\notin C) \text{ o } (x\in C \text{ y } x\notin A\Delta B)$
$\Leftrightarrow x$ está en una y solo una de las tres partes o en las tres.
Por simetría de los roles de A, B y C, $A\Delta(B\Delta C)$ es igualmente el conjunto de elementos que están en una y solo una de las tres partes A, B o C o en los tres. Entonces $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$. Estos dos conjuntos pueden así denotarse de una vez por todas $A\Delta B\Delta C$.

5. $A=B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$ y $B\setminus A=\varnothing\Rightarrow A\Delta B=\varnothing$. $A\neq B\Rightarrow\exists x\in E/\ ((x\in A \text{ y } x\notin B) \text{ o } (x\notin A \text{ y } x\in B))\Rightarrow\exists x\in E/\ x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B\Rightarrow A\Delta B\neq\varnothing$.

6. $\Leftarrow$ Inmediato.
$\Rightarrow$ Sea x un elemento de A.
Si $x\notin C$, entonces $x\in A\Delta C=B\Delta C$ y entonces $x\in B$, pues $x\notin C$.
Si $x\in C$, entonces $x\notin A\Delta C=B\Delta C$. Después $x\notin B\Delta C$ y $x\in C$ y entonces $x\in B$. En todos los casos, x está en B. Todo elemento de A está en B y entonces $A\subset B$. Intercambiando los roles de A y B, se tiene también $B\subset A$ y finalmente $A=B$.

Solución del ejercicio 49 ▲005113

1. Sea $x\in E$. $x\inf\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow\exists y\in\bigcup_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow\exists i\in I,\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)$
$\Leftrightarrow\exists i\in I/\ x\in f(A_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f(A_i)$.

Entonces

$$\text{shadowbox } f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i).$$

2. Sea $x\in E$. $x\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\Leftrightarrow\exists y\in\bigcap_{i\in I}A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow\exists y\in E/\ \forall i\in I,\ y\in A_i \text{ y } x=f(y)$
$\Rightarrow\forall i\in I/\ \exists y\in A_i/\ x=f(y)\Leftrightarrow\forall i\in I/\ x\in f(A_i)$
$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f(A_i)$

Entonces $$\boxed{f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i).}$$

La inclusión contraria no siempre es cierta. Por ejemplo, para x real se escribe $f(x)=x^2$, luego $A=\{-1\}$ y $B=\{1\}$. $A\cap B=\varnothing$ y entonces $f(A\cap B)=\varnothing$, luego $f(A)=f(B)=\{1\}$ y entonces $f(A)\cap f(B)=\{1\}$.

3. No existe una verdadera inclusión entre $f(E\setminus A)$ y $F\setminus f(A)$. Por ejemplo, sea la función $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{array}$ y el conjunto $A=[-1,2]$. $f(A)=[0,4]$ y entonces $C_{\mathbb{R}}(f(A))=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$, pero $f(C_{\mathbb{R}}A)=f(]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[)=]1,+\infty[$ y ninguna inclusión entre las dos partes es verdadera.
4. Sea $x\in E$.

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcap_{i\in I}B_i\Leftrightarrow\forall i\in I,\ f(x)\in B_i\Leftrightarrow\forall i\in I,\ x\in f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

Así,
$$\boxed{f^{-1}(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i).}$$

5. Sea $x\in E$.

$$x\in f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcup_{i\in I}B_i\Leftrightarrow\exists i\in I,\ f(x)\in B_i\Leftrightarrow\exists i\in I,\ x\in f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

Así,
$$\boxed{f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i).}$$

6. Sea $x\in E$.

$$x\in f^{-1}(F\setminus B_i)\Leftrightarrow f(x)\in F\setminus B_i\Leftrightarrow f(x)\notin B_i\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in E\setminus f^{-1}(B_i).$$

Así,
$$\boxed{f^{-1}(F\setminus B_i)=E\setminus f^{-1}(B_i).}$$

Solución del ejercicio 50 ▲005117

1. Está la inyección trivial $f:\begin{array}{l}E\to\mathscr{P}(E)\\ x\mapsto\{x\}\end{array}$.
2. Sea f una aplicación cualquiera de E en $\mathscr{P}(E)$. Demostrar que f no puede ser sobreyectiva. Sea $A=\{x\in E/\ x\notin f(x)\}$. Demostrar que A no tiene antecedentes por f. Se supone por reducción al absurdo que A tiene un antecedente a. En este caso, ¿dónde está a?

$$a\in A\Rightarrow a\notin f(a)=A,$$

lo que es absurdo y

$$a\notin A\Rightarrow a\in f(a)=A,$$

lo que es absurdo. Finalmente, A no tiene antecedente y f no es sobreyectiva. Se ha demostrado el teorema de CANTOR : para todo conjunto E (vacío, finito o infinito), no existe biyección de E en $\mathscr{P}(E)$.

Solución del ejercicio 56 ▲000150

Por reducción al absurdo, se supone que existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $f=f_p$. Dos aplicaciones son iguales si y solo si toman los mismos valores :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ f(n)=f_p(n).$$

En particular para $n=p$, $f(p)=f_p(p)$. Por otra parte la definición de f da $f(p)=f_p(p)+1$. Se obtiene una contradicción porque $f(p)$ no pueden tomar dos valores distintos. En conclusión, cualquiera que sea $p\in\mathbb{N}$, $f\neq f_p$.

Solución del ejercicio 57 ▲000151

1. Demostrar de hecho la contrapositiva. Si existe i tal que p_i divide $N=p_1p_2\cdots p_r+1$ (i es fijo), entonces existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $N=kp_i$, por lo tanto
$$p_i(k-p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_r)=1$$
sea $p_iq=1$ (con $q=k-p_1p_2\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_r$ un número entero). Entonces $p_i\in\mathbb{Z}$ y $1/p_i=q\in\mathbb{Z}$, entonces p_i vale 1 o -1. Y por lo tanto p_i no es un número primo. Conclusión : por contraposición es cierto que N no es divisible por ninguno de los p_i
2. Se razona por reducción al absurdo : si solo existe un número finito r números primos $p_1,\dots,p_r$, entonces $N=p_1p_2\dots p_r+1$ es un número primo porque no es divisible por ningún otro número primo que él mismo.
Pero N es estrictamente superior a todos los p_i. Conclusión, hemos construido un número primo N diferente de los p_i, hay entonces al menos $r+1$ números primos, lo que es absurdo.

Solución del ejercicio 59 ▲000153

Escribiendo la segunda igualdad. Sea $\mathscr{A}_n$, $n\in\mathbb{N}^*$ la siguiente afirmación :
$$(\mathscr{A}_n)\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

— $\mathscr{A}_0$ es cierta $(1=1)$.
— Dado $n\in\mathbb{N}^*$ se supone que $\mathscr{A}_n$ sea cierta. Entonces
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\ +(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}\\ &=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$
Esto demuestra $\mathscr{A}_{n+1}$.
— Por el principio de inducción, se acaba de demostrar que $\mathscr{A}_n$ es cierta para todo $n\in\mathbb{N}^*$.

Solución del ejercicio 61 ▲000155

1. Demostrar por inducción $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n>3$. Sea la hipótesis de inducción :
$$(\mathscr{H}_n):\quad x_n>3.$$
   - La proposición $\mathscr{H}_0$ es cierta porque $x_0=4>3$.

- Sea $n \geqslant 0$, se supone $\mathscr{H}_n$ es verdadera y demostrar que $\mathscr{H}_{n+1}$ es entonces cierta.

$$x_{n+1}-3=\frac{2x_n{}^2-3}{x_n+2}-3=\frac{2x_n{}^2-3x_n-9}{x_n+2}.$$

Por hipótesis de recurrencia $x_n>3$, por lo tanto $x_n+2>0$ y $2x_n{}^2-3x_n-9>0$ (esto por estudio de la función $x\mapsto 2x^2-3x-9$, para $x>3$). Entonces $x_{n+1}-3$ y $\mathscr{H}_{n+1}$ es cierta.
- Se ha demostrado

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathscr{H}_n\Rightarrow\mathscr{H}_{n+1}$$

y como $\mathscr{H}_0$ es cierta entonces $\mathscr{H}_n$ es cierta cualquiera que sea n. Que termina la demostración.

2. Demostrar que $x_{n+1}-3-\frac{3}{2}(x_n-3)$ es positivo.

$$x_{n+1}-3-\frac{3}{2}(x_n-3)=\frac{2x_n{}^2-3}{x_n+2}-\frac{3}{2}(x_n-3)=\frac{1}{2}\frac{x_n{}^2-3x_n}{x_n+2}$$

Este último término es positivo, pues $x_n>3$.

3. Demostrar por inducción $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n+3$. Sea nuestra nueva hipótesis de inducción :

$$(\mathscr{H}_n)\quad x_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n+3.$$

- La proposición $\mathscr{H}_0$ es cierta.
- Sea $n\geqslant 0$, se supone que $\mathscr{H}_n$ es verdadera y demostrar que $\mathscr{H}_{n+1}$ es verificada. Según la pregunta anterior $x_{n+1}-3>\frac{3}{2}(x_n-3)$ y por hipótesis de inducción $x_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n+3$; uniendo estas dos desigualdades se tiene $x_{n+1}-3>\frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
- Se concluye resumiendo la situación :
$\mathscr{H}_0$ es cierta, y $\mathscr{H}_n\Rightarrow\mathscr{H}_{n+1}$ cualquiera que sea n. Entonces $\mathscr{H}_n$ es siempre cierto.

4. La sucesión (x_n) tiende a $+\infty$ y por lo tanto, no es convergente.

Solución del ejercicio 62 ▲000156

Demostrar por inducción sobre $n\geqslant 1$ la proposición siguiente :

$$\mathscr{H}_n:\quad n \text{ rectas en posición general cortan el plano en } R_n=\frac{n(n+1)}{2}+1 \text{ regiones.}$$

- para $n=1$, entonces una recta divide el plano en dos regiones. $\mathscr{H}_1$ es cierta.
- Sea $n\geqslant 2$ y se supone que $\mathscr{H}_{n-1}$ sea cierta, y demostrar $\mathscr{H}_n$. Sean $\Delta_1,\dots,\Delta_n$, n rectas en posición general, la recta Δ_n interseca las rectas $\Delta_1,\dots,\Delta_{n-1}$ en $n-1$ puntos, por lo tanto Δ_n cruza (y corta en dos) n regiones de recorte $\Delta_1,\dots,\Delta_{n-1}$. El corte por Δ_n da así la relación $R_n=R_{n-1}+n$. Pero por hipótesis de inducción $\mathscr{H}_{n-1}$: $R_{n-1}=\frac{(n-1)n}{2}+1$, por lo tanto

$$R_n=R_{n-1}+n=\frac{(n-1)n}{2}+1+n=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

Y $\mathscr{H}_n$ es cierta.
Así $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \mathscr{H}_{n-1}\Rightarrow\mathscr{H}_n$.
- Conclusión : por recurrencia se ha demostrado que $\mathscr{H}_n$ es cierta cualquiera que sea $n\geqslant 1$.

Solución del ejercicio 63 ▲000157

1. Demostrar la proposición solicitada por inducción : sea $\mathscr{A}_n$ la afirmación $f^{n+1} = f \circ f^n$. Esta afirmación es cierta para $n = 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ se supone $\mathscr{A}_n$ verdadera. Entonces

$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$

Se debe usar la definición de f^{n+2}, luego la proposición $\mathscr{A}_n$, luego la asociatividad de la composición, entonces la definición de f^{n+1}. Entonces $\mathscr{A}_{n+1}$ es cierta. Por el principio de recurrencia

$$\forall \in \mathbb{N} \;\; f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. Se procede de la misma manera por recurrencia : sea $\mathscr{A}_n$ la afirmación $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Esta afirmación es cierta para $n = 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ se supone $\mathscr{A}_n$ verdadera. Entonces

$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$

Entonces $\mathscr{A}_{n+1}$ es cierta. Por el principio de recurrencia

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$

Solución del ejercicio 115 ▲000209

1. Sean z, z', z'' complejos cualesquiera.
   - Reflexividad : $z\mathscr{R}z$, pues $|z| = |z|$.
   - Simetría : $z\mathscr{R}z' \Rightarrow z'\mathscr{R}z$, pues $|z| = |z'|$ y entonces $|z'| = |z|$.
   - Transitividad : $z\mathscr{R}z'$ y $z'\mathscr{R}z''$, entonces $|z| = |z'| = |z''|$, por lo tanto $z\mathscr{R}z''$.

   De hecho, se acaba de transcribir que la igualdad "=" es una relación de equivalencia.
2. La clase de equivalencia de un punto $z \in \mathbb{C}$ es el conjunto de complejos que están relacionados con z, *i.e.* el conjunto de complejos cuyo módulo es igual a $|z|$. Geométricamente, la clase de equivalencia de z es el círculo $\mathscr{C}$ de centro 0 y de radio $|z|$:

$$\mathscr{C} = \left\{ |z|e^{i\theta} \;/\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solución del ejercicio 116 ▲000210

El razonamiento es falso. El error se debe a la falta de cuantificación. En efecto, nada prueba que para todo x un tal y existe. Puede existir un elemento x que no está relacionado con nadie (ni siquiera consigo mismo).

Solución del ejercicio 118 ▲000212

1. — Reflexividad : Para todo $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$, por lo tanto $x\mathscr{R}x$.
   — Simetría : Para $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathscr{R}y$, entonces $xe^y = ye^x$, por lo tanto $ye^x = xe^y$, por lo tanto $y\mathscr{R}x$.

— Transitividad : Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x\mathscr{R}y$ y $y\mathscr{R}z$, entonces $xe^y = ye^x$ y $ye^z = ze^y$. Calcular xye^z :

$$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$

Entonces $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$, entonces dividiendo por y se acaba de demostrar que $xe^z = ze^x$, por lo tanto $x\mathscr{R}z$ y es finito. Para el caso $y = 0$, entonces $x = 0$ y $z = 0$, por lo tanto $x\mathscr{R}z$ igualmente.

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo. Se denota $\mathscr{C}(x)$ la clase de equivalencia de x módulo $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathscr{R}x\}.$$

Entonces

$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$

Entonces

$$\mathscr{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$

Dicho de otra manera $\mathscr{C}(x)$ es el conjunto de los $y \in \mathbb{R}$ que por f toma el mismo valor que $f(x)$; en resumen :

$$\mathscr{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$

Estudiar ahora la función f, para determinar el número de antecedentes : por un cálculo de f' se demuestra que f es estrictamente creciente en $]-\infty, 1]$, luego estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$. Además en $-\infty$ el límite de f es $-\infty$, $f(1) = \frac{1}{e}$, y el límite en $+\infty$ es 0. Es el momento de diseñar la gráfica de f ! !

Para $x > 0$, entonces $f(x) \in]0, \frac{1}{e}]$ y entonces $f(x)$ tiene dos antecedentes. Para $x \leqslant 0$, entonces $f(x) \in]-\infty, 0]$ y entonces $f(x)$ tiene un solo antecedente.

Resumen : si $x > 0$, entonces $\operatorname{Card}\mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 2$, si $x \leqslant 0$, entonces $\operatorname{Card}\mathscr{C}(x) = \operatorname{Card} f^{-1}(f(x)) = 1$.

Solución del ejercicio 123 ▲000217

— Reflexividad : para todo $X \in \mathscr{P}(E)$ se tiene $X \prec X$, pues $X = X$.

— Antisimetría : para $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tales que $X \prec Y$ y $Y \prec X$, entonces por definición de $\prec$ se tiene

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \text{ y } y \leqslant x.$$

como la relación $\leqslant$ es una relación de orden entonces $x \leqslant y$ y $y \leqslant x$ implica $x = y$. Entonces

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x = y,$$

lo que implica que $X = Y$ (en este caso en realidad X es vacío o un punto aislado).

— Transitividad : sean $X, Y, Z \in \mathscr{P}(E)$ tales que $X \prec Y$ y $Y \prec Z$. Si $X = Y$ o $Y = Z$, entonces es claro que $X \prec Z$. Se supone que $X \neq Y$ y $Y \neq Z$, entonces

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y \qquad \text{y} \qquad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad y \leqslant z.$$

Así se tiene

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant y \text{ y } y \leqslant z,$$

entonces por transitividad de la relación $\leqslant$ se obtiene :

$$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \quad x \leqslant z.$$

Así $X \prec Z$.

Solución del ejercicio 137 ▲003042

Sea A no vacío y minorado, y $B = \{\text{minorantes de } A\}$.
B no es vacío y es mayorado por A, por lo tanto $\beta = \sup(B)$ existe.
Sea $a \in A : \forall b \in B,\ b \leqslant a$, por lo tanto $\beta \leqslant a$.
En consecuencia, β minora A, por lo tanto $\beta = \max(B)$.

Solución del ejercicio 138 ▲003043

1.
2.
3.
4. Si (a,b) mayora A, entonces $(a,b) \gg (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, por lo tanto $(a,b) \gg (0,\sqrt{2})$.
   Recíproco : si $x^2+y^2 \leqslant 1$, entonces $(x+y)^2+(x-y)^2 \leqslant 2$, por lo tanto $y \pm x \leqslant \sqrt{2}$, y $(x,y) \ll (0,\sqrt{2})$.
   Finalmente, $\sup(A) = (0,\sqrt{2})$.

Solución del ejercicio 148 ▲007191

Lo contrario de $2|n$ no es que n divide estrictamente 2.

Solución del ejercicio 154 ▲007197

La aplicación f es constante sobre las clases de equivalencia de $\mathscr{R}$, así por definición, desciende al cociente en una aplicación $[f] : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$, que verifica $f = [f] \circ p$. Como f es sobreyectiva, $[f]$ también. Demostrar la inyectividad.
Sean α y β en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tales que $[f](\alpha) = [f](\beta)$. Si x e y son representantes de α y β, se tiene por lo tanto $f(x) = f(y)$, es decir $e^{ix} = e^{iy}$, por lo que, por el curso sobre la exponencial compleja, $x \equiv y \pmod{2\pi}$, de donde $[x] = [y]$, o aún $\alpha = \beta$.

Solución del ejercicio 171 ▲000185

Si $f \circ g = g \circ f$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Demostrar que es falso, mostrando un contraejemplo. Tomar $x = 0$. Entonces $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, y $g \circ f(0) = g(1) = 0$, por lo tanto $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Así $f \circ g \neq g \circ f$.

Solución del ejercicio 187 ▲000190

1. f no es sobreyectiva porque 0 no tiene antecedente : de hecho, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$ (si este n existe debe ser $n = -1$ que no es un elemento de $\mathbb{N}$). Sin embargo, f es inyectiva : sean $n, n' \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = f(n')$, entonces $n+1 = n'+1$, por lo tanto $n = n'$. Balance f es inyectiva, no sobreyectiva y por lo tanto, no biyectiva.

2. Para demostrar que g es biyectiva son posibles dos métodos. Primer método : demostrar que g es a la vez inyectiva y sobreyectiva. En efecto, sean $n,n' \in \mathbb{Z}$ tales que $g(n) = g(n')$, entonces $n+1 = n'+1$, por lo tanto $n = n'$, entonces g es inyectiva. Y g es sobreyectiva porque cada $m \in \mathbb{Z}$ admite un antecedente para g : poniendo $n = m-1 \in \mathbb{Z}$ se encuentra $g(n) = m$. Segundo método : explicitar directamente la biyección recíproca. Sea la función $g' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g'(m) = m-1$, entonces $g' \circ g(n) = n$ (para todo $n \in \mathbb{Z}$) y $g \circ g'(m) = m$ (para todo $m \in \mathbb{Z}$). Entonces g' es la biyección recíproca de g y entonces g es biyectiva.

3. Demostrar que h es inyectiva. Sean $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tales que $h(x,y) = h(x',y')$. Entonces $(x+y,x-y) = (x'+y',x'-y')$, por lo tanto

$$\begin{cases} x+y = x'+y' \\ x-y = x'-y' \end{cases}$$

sumando las filas de este sistema, encontramos $2x = 2x'$, por lo tanto $x = x'$ y con la diferencia se tiene $y = y'$. Entonces los pares (x,y) y (x',y') son iguales. Así, h es inyectiva.

Demostrar que h es sobreyectiva. Sea $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, encontrar un antecedente (x,y) por h. Un tal antecedente verifica $h(x,y) = (X,Y)$, por lo tanto $(x+y,x-y) = (X,Y)$ o aún :

$$\begin{cases} x+y = X \\ x-y = Y \end{cases}$$

una vez más, sumando las filas, se tiene $x = \frac{X+Y}{2}$ y con la diferencia $y = \frac{X-Y}{2}$, por lo tanto $(x,y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. La parte de “análisis” de nuestro razonamiento ha terminado, así que pasemos a la “síntesis” : es suficiente comprobar que la pareja (x,y) que se ha obtenido es efectivamente una solución (¡se ha hecho todo para esto !). Balance para (X,Y) dado, su antecedente por h existe y es $(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Entonces h es sobreyectiva. De hecho se puede demostrar directamente que h es biyectiva al exhibirse la biyección inversa $(X,Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Pero se puede ver que se trata de una diferencia de redacción, pero no realmente de un razonamiento diferente.

4. Demostrar primero que k es inyectiva : sean $x,x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tales que $k(x) = k(x')$, entonces $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$, por lo tanto $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$. Desarrollando se tiene $xx'+x'-x = xx'-x'+x$, sea $2x = 2x'$, por lo tanto $x = x'$. En el borrador intentemos demostrar que k es sobreyectiva : sea $y \in \mathbb{R}$ y buscamos $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tal que $f(x) = y$. Si tal x existe entonces verifica $\frac{x+1}{x-1} = y$, por lo tanto $x+1 = y(x-1)$, dicho de otro modo $x(y-1) = y+1$. Si se quiere expresar x en función de y esto se hace con la fórmula $x = \frac{y+1}{y-1}$. Pero cuidado, existe una trampa ! Para $y = 1$ no se puede encontrar un antecedente x (Esto equivale a dividir por 0 en la fracción anterior). Entonces k no es sobreyectiva porque $y = 1$ no tiene antecedente. Por otro lado, se acaba de demostrar que si se considera la restricción $k_| : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ que también se define por $k_|(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (solo el espacio de llegada cambia con respecto a k) entonces esta función $k_|$ es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto biyectiva (de hecho, la biyección inversa es ella misma).

Solución del ejercicio 188 ▲000191

---

1. f no es inyectiva porque $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f no es sobreyectiva porque $y = 2$ no tiene antecedente : de hecho, la ecuación $f(x) = 2$ se convierte en $2x = 2(1+x^2)$ sea $x^2 - x + 1 = 0$ que no tiene soluciones reales.

2. $f(x) = y$ es equivalente a la ecuación $yx^2 - 2x + y = 0$. Esta ecuación tiene soluciones x si y solo si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$, entonces hay soluciones si y solo si $y \in [-1,1]$. Se viene de demostrar que $f(\mathbb{R})$ es exactamente $[-1,1]$.

3. Sea $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$, entonces las soluciones x posibles de la ecuación $g(x) = y$ son $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ o $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La única solución $x \in [-1,1]$ es $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. En efecto, $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Para $y = 0$, la única solución de la ecuación $g(x) = 0$ es $x = 0$. Entonces, para $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ se ha encontrado una inversa $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ definido por $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ si $y \neq 0$ y $h(0) = 0$. Entonces g es una biyección.

4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, por lo tanto f' es estrictamente positiva en $]-1,1[$, por lo tanto f es estrictamente creciente en $[-1,1]$, con $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$. Entonces la restricción de f, llamada $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, es una biyección.

Solución del ejercicio 190 ▲000193

1. Se supone $g \circ f$ inyectiva, y demostrar que f es inyectiva : sean a, $a' \in A$, con $f(a) = f(a')$, por lo tanto $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ o $g \circ f$ es inyectiva entonces $a = a'$. Conclusión, se ha demostrado :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
es la definición de f inyectiva.

2. Se supone $g \circ f$ sobreyectiva, y demostrar que g es sobreyectiva : sea $c \in C$ como $g \circ f$ es sobreyectiva existe $a \in A$ tal que $g \circ f(a) = c$; se escribe $b = f(a)$, entonces $g(b) = c$, este el razonamiento es válido cualquiera que sea $c \in C$, por lo tanto g es sobreyectiva.

3. Un sentido es simple ($\Leftarrow$) si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$, lo es igualmente. Del mismo modo con $h \circ g$.
Para la implicación directa ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ es biyectiva entonces en particular es sobreyectiva y por lo tanto, según la pregunta 2. g es sobreyectiva. Si $h \circ g$ es biyectiva, es en particular inyectiva, por lo tanto g es inyectiva (es el 1.). En consecuencia g es a la vez inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto biyectiva. Para terminar $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ es biyectiva como composición de aplicaciones biyectivas, Lo mismo se aplica a h.

Solución del ejercicio 194 ▲000197

1. Para $z = x + iy$, el módulo de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ es e^x y su argumento es y.
2. Los resultados : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La función exp no es sobreyectiva porque $|e^z| = e^x > 0$ y entonces e^z nunca vale 0. La función exp tampoco es inyectiva porque para $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Solución del ejercicio 195 ▲005110

1. Sea $(x_1,x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (pues } g \text{ es una aplicación)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (pues } g\circ f \text{ es inyectiva).} \end{aligned}$$

Se ha demostrado que $\forall (x_1,x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, y entonces f es inyectiva.

2. Sea $y \in H$. Porque $g\circ f$ es sobreyectiva, existe un elemento x en E tal que $g(f(x)) = y$. Usando$z = f(x) \in G$, se ha encontrado z en G tal que $g(z) = y$. Se ha demostrado : $\forall y \in H,\ \exists z \in G/\ g(z) = y$, y entonces g es sobreyectiva.

Solución del ejercicio 196 ▲005114

1) $\Rightarrow$ **2)** Sea $X \in \mathscr{P}(E)$. Siempre se tiene $X \subset f^{-1}(f(X))$. (En efecto, para $x \in E$, $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$). Recíprocamente, sea $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X/\ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X/\ x = x' \text{ (ya que } f \text{ es inyectiva)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalmente, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ y entonces $f^{-1}(f(X)) = X$.
2) $\Rightarrow$ **1)** Sea $x \in X$. Por hipótesis, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, lo que significa que $f(x)$ tiene un solo antecedente a saber x. Así, todo elemento del conjunto de llegada tiene a lo sumo un antecedente por f y f es inyectiva.
1) $\Rightarrow$ **3)** Sea $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. Siempre se tiene $f(X\cap Y) \subset f(X)\cap f(Y)$ ($X\cap Y \subset X \Rightarrow f(X\cap Y) \subset f(X)$ e igualmente, $f(X\cap Y) \subset f(Y)$ y finalmente, $f(X\cap Y) \subset f(X)\cap f(Y)$). Recíprocamente, sea $y \in F$. $y \in f(X)\cap f(Y) \Rightarrow \exists (x,x') \in X\times Y/\ y = f(x) = f(x')$. Pero entonces, ya que f es inyectiva, $x = x' \in X\cap Y$, luego $y = f(x) \in f(X\cap Y)$. Finalmente, $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$.
3) $\Rightarrow$ **4)** Sea $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. $X\cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X)\cap f(Y) = f(X\cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing$.
4) $\Rightarrow$ **5)** Sea $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tal que $Y \subset X$. Porque $X\setminus Y \subset X$, se tiene $f(X\setminus Y) \subset f(X)$. Pero, ya que $Y\cap(X\setminus Y) = \varnothing$, por hipótesis $f(X\setminus Y)\cap f(Y) = \varnothing$. Finalmente,$f(X\setminus Y) \subset f(X)\setminus f(Y)$. Inversamente, si $f(X)\setminus f(Y) = \varnothing$, la inclusión contraria es inmediata y si $f(X)\setminus f(Y) \neq \varnothing$, un elemento de $f(X)\setminus f(Y)$ es la imagen de cierto elemento de X que no puede estar en Y y también es la imagen de un elemento de $X\setminus Y$, lo que demuestra que $f(X)\setminus f(Y) \subset f(X\setminus Y)$ y finalmente que $f(X)\setminus f(Y) = f(X\setminus Y)$.
5) $\Rightarrow$ **1)** Sea $(x_1,x_2) \in E^2$ tal que $x_1 \neq x_2$. Se define $X = \{x_1,x_2\}$ y $Y = \{x_2\}$. Se tiene entonces $Y \subset X$. Por hipótesis $f(X\setminus Y) = f(X)\setminus f(Y)$, lo que proporciona $f(\{x_1\}) = f(\{x_1,x_2\})\setminus f(\{x_2\})$ o aún, $\{f(x_1)\} = \{f(x_1),f(x_2)\}\setminus\{f(x_2)\}$. Ahora, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $\{f(x_1),f(x_2)\}\setminus\{f(x_2)\} = \varnothing$ (y no $\{f(x_1)\}$). Entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se ha demostrado que f es inyectiva.

Solución del ejercicio 197 ▲000198

El inverso de $f_{a,b}$ es $g_{a,b}$, con $g_{a,b}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Dicho de otra manera $f_{a,b}^{-1} = g_{a,b} = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$.

Solución del ejercicio 198 ▲000199

Sea $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, entonces $f(x) = x$, por lo tanto $f\circ f(x) = f(x) = x$. Sea $x \notin [0,1]\cap\mathbb{Q}$, entonces $f(x) = 1-x$, por lo tanto $f\circ f(x) = f(1-x)$, pero $1-x \notin [0,1]\cap\mathbb{Q}$ (verificarlo !) por lo tanto $f\circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Así para todo $x \in [0,1]$ se tiene $f\circ f(x) = x$. Y por lo tanto $f\circ f = \mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 199 ▲000200

Se considera la siguiente restricción de f : $f_| : [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$. Demostrar que esta nueva aplicación $f_|$ es biyectiva. Aquí $\mathbb{U}$ es el círculo unitario de $\mathbb{C}$ dada por la ecuación $(|z| = 1)$.

- $f_|$ es sobreyectiva porque todo número complejo de $\mathbb{U}$ se escribe en forma polar $e^{i\theta}$, y se puede elegir $\theta \in [0,2\pi[$.
- $f_|$ es inyectiva :

$$\begin{aligned} f_|(t) = f_|(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ pues } t,t' \in [0,2\pi[\text{ y entonces } k = 0. \end{aligned}$$

en conclusión $f_|$ es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto biyectiva.

Solución del ejercicio 201 ▲000202

- f es inyectiva : sean $x,y \in [1,+\infty[$ tales que $f(x) = f(y)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ por lo que } x,y \in [1,+\infty[\text{, por lo tanto } x,y \text{ son del mismo signo} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f es sobreyectiva : sea $y \in [0,+\infty[$. Se busca un elemento $x \in [1,+\infty[$ tal que $y = f(x) = x^2 - 1$. El real $x = \sqrt{y+1}$ sirve !

Solución del ejercicio 206 ▲005106

1. f es derivable en $I =]-\infty,2]$, y para $x \in]-\infty,2[$, $f'(x) = 2x - 4 < 0$. f es, por lo tanto continua y estrictamente decreciente en $]-\infty,2]$. Así, f realiza una biyección de $]-\infty,2]$ sobre $f(]-\infty,2]) = [f(2), \lim_{-\infty} f[= [-1,+\infty[= J$. Se denota g la aplicación de I en J quién, a x asociada $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$. g es biyectiva y por lo tanto, tiene una inversa. Determinar g^{-1}. Sea $y \in [-1,+\infty[$ y $x \in]-\infty,2]$.
$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$
Por tanto, $\Delta' = 4 - (3-y) = y + 1 \geqslant 0$. Entonces, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ o $x = 2 - \sqrt{y+1}$. En fin, $x \in]-\infty,2]$ y entonces, $x = 2 - \sqrt{y+1}$.
En resumen,
$$\forall x \in]-\infty,2],\ \forall y \in [-1,+\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$
Se viene de encontrar g^{-1} :
$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.}$$
2. Se verifica fácilmente que f realiza una biyección de $]-2,+\infty[$ sobre $]-\infty,2[$, denotada g. Sean entonces $x \in]-2,+\infty[$ y $y \in]-\infty,2[$.
$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

(SE ha así encontrado a lo sumo un valor para x a saber $x = \frac{2y+1}{-y+2}$, pero no es necesario verificar que esta expresión esté bien definida y sea parte de $]-2,+\infty[$ porque se sabe de antemano que y admite al menos un antecedente en $]-2,+\infty[$, y por lo tanto, es necesariamente el adecuado).
En resumen,

$$\forall x \in]-2,+\infty[,\ \forall y \in]-\infty,2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

Se acaba de encontrar g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,2[,\ g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}}.$$

3. f es continua y estrictamente creciente en $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$. f es, por lo tanto biyectiva de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ sobre $f\left(\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[\right) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \lim_{+\infty} f\right[= [-1,+\infty[$. Se denota de nuevo f la aplicación de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ en $[-1,+\infty[$ que a x asociada $\sqrt{2x+3}-1$. Sean entonces $x \in [-\frac{3}{2},+\infty[$ y $y \in [-1,+\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3+(y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1.$$

En resumen, $\forall x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$, $\forall y \in [-1,+\infty[$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1$. Se acaba de encontrar g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}+x-1.}$$

4. f se define en $\mathbb{R}$, impar. Para $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$. Entonces, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$. Por paridad, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$ e incluso $f(]-\infty,0[) \subset]-1,0[$ porque la imagen de f de un real estrictamente negativo es un real estrictamente negativo. Finalmente, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$. Verificar entonces que f realiza una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$. Sea $y \in [0,1[$ y $x \in \mathbb{R}$. La igualdad $f(x) = y$ impone a x de estar en $[0,+\infty[$. Pero entonces

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

El real x obtenido está bien definido, pues $y \neq 1$, y positivo, pues $y \in [0,1[$. Se ha demostrado que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R} / \ y = f(x) \text{ (a saber } x = \frac{y}{1-y}).$$

Sea $y \in]-1,0[$ y $x \in \mathbb{R}$. La igualdad $f(x) = y$ impone a x de estar en $]-\infty,0[$. Pero entonces

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

El real x obtenido está bien definido, pues $y \neq -1$, y estrictamente negativo, pues $y \in]-1,0[$. Se ha demostrado que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R} / \ y = f(x) \text{ (a saber } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalmente,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R} / \ y = f(x),$$

lo que demuestra que f realiza una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$. Además, para $y \in]-1,1[$ dado, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ si $y \geqslant 0$ y $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$. En todos los casos, se tiene $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$. Denotando todavía f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $]-1,1[$ que a x asociada $\frac{x}{1+|x|}$, se tiene por lo tanto

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

Solución del ejercicio 207 ▲005107

1. Demostrar que la restricción de f a D, denotada g, es de hecho una aplicación de D en P. Sea $z \in D$. Se tiene $|z| < 1$ y, en particular $z \neq i$. Entonces, $f(z)$ existe. Además,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\bar{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

   Entonces, $f(z)$ es elemento de P. g es, por lo tanto una aplicación de D en P.

2. Demostrar que g es inyectiva. Sea $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz'-iz = iz-iz' \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3. Demostrar que g es sobreyectiva. Sean $z \in D$ y $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (pues } Z \neq 1,$$

   (lo que demuestra que Z admite a lo sumo un antecedente en D, a saber $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$ (pero ya se sabe, porque g es inyectiva). Queda sin embargo, por verificar que $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ está efectivamente en D). Recíprocamente, ya que $\mathrm{Re}(Z) < 0$,

$$\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

   (Z está estrictamente más cerca de -1 que de 1) y $z \in D$. Finalmente, g es una biyección de D sobre P, y :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Solución del ejercicio 208 ▲005111

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f \circ g \circ h$ y $g \circ h \circ f$ son inyectivas y que $h \circ f \circ g$ es sobreyectiva. Según el ejercicio 195, ya que $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ es inyectiva, h es inyectiva y, ya que $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ es sobreyectiva, h es sobreyectiva. Ya h es biyectiva. Pero entonces, h^{-1} es sobreyectiva y por lo tanto, $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ es sobreyectiva como composición de sobreyectivas. Después h^{-1} es inyectiva y por lo tanto, $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ es inyectiva. $f \circ g$ es, por lo tanto biyectiva. $f \circ g$ es sobreyectiva entonces f es sobreyectiva. $g \circ h \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva. Entonces f es biyectiva. Finalmente, $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ es biyectiva como composición de biyecciones.

Solución del ejercicio 209 ▲005118

f es de hecho una aplicación de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ car, para todo par (x,y) de números naturales, uno de dos enteros $x+y$ o $x+y+1$ es par y, por lo tanto, $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ es de hecho un entero natural (también podemos ver que $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\cdots+(x+y)$ es entero para $x+y \geqslant 1$).

Observación. La numeración de $\mathbb{N}^2$ ha sido efectuada de la siguiente manera :

	0	1	2	3	...	x	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

En una recta paralela a la recta de ecuación $y=-x$, la suma $x+y$ es constante. Lo mismo ocurre con la expresión $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ y cuando se desciende de 1 en y, se avanza desde 1 en la numeración.

Lema. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists! p\in\mathbb{N}/\ \frac{p(p+1)}{2}\leqslant n<\frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Demostración. Para probar este lema, Es suficiente constatar que la sucesión de números triangulares $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)_{p\geqslant 0}$ es estrictamente creciente. Sin embargo, se proporciona explícitamente p en función de n.

Sean n y p dos enteros naturales.

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)}{2}\leqslant n<\frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2+p-2n\leqslant 0 \text{ y } p^2+3p+2-2n>0\\ &\Leftrightarrow p\leqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ y } p>\frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2}=-1+\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\\ &\Leftrightarrow p\leqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}<p+1\Leftrightarrow p=E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).\end{aligned}$$

El lema es demostrado.

Demostrar que f es sobreyectiva (y al pasaje, determinar el antecedente de un entero n dado). Sean n un entero natural y $p=E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p es un número natural).

Se define $\begin{cases}x+y=p\\ y=n-\frac{p(p+1)}{2}\end{cases}$ o aún $\begin{cases}y=n-\frac{p(p+1)}{2}\\ x=p-y=\frac{p(p+3)}{2}-n.\end{cases}$ En primer lugar, $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}=n-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2}=n$. Pero queda por verificar que x e y así definidos (que obviamente son enteros relativos) son de hecho números naturales. Porque $\frac{p(p+1)}{2}$ es un entero natural y que $n\geqslant\frac{p(p+1)}{2}$, y es de hecho un entero natural. Luego, $\frac{p(p+3)}{2}=\frac{p(p+1)}{2}+p$ es también un entero natural y, además,

$$\frac{p(p+3)}{2}-n\geqslant\frac{p(p+3)}{2}-\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right)=0,$$

y x es de hecho un entero natural. Así, para n natural dado, poniendo $p=E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$, luego $x=\frac{p(p+3)}{2}-n$ y $y=n-\frac{p(p+1)}{2}$, x e y son números naturales tales que $f((x,y))=n$. f es, por lo tanto sobreyectiva. Demostrar que f es inyectiva. Por esto, se demuestra que si x e y son enteros naturales que satisfacen $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}=n$, entonces necesariamente, $x+y=p$ (y $y=n-\frac{p(p+1)}{2}$). Sean así x e y dos enteros naturales. Se tiene :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\leqslant\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y=n<\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+(x+y+1)=\frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

y el lema demuestra que $x+y=p$. La unicidad del par (x,y) por lo tanto, se demuestra. f es una aplicación inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto, f es biyectiva.

Su recíproco es $\begin{aligned} f^{-1}:\mathbb{N} &\to \mathbb{N}^2 \\ n &\mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2}-n, n-\frac{p(p+1)}{2}\right), \end{aligned}$ donde $p=E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 211 ▲000220

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función $f(x)=(1+x)^n$. Por la fórmula binomial de Newton se sabe que

$$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

1. Calculando $f(1)$ se tiene $2^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.
2. Calculando $f(-1)$ se tiene $0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$.
3. Ahora se va a calcular $f'(x)=n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$. Evaluar $f'(1)=n2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.
4. Se trata aquí de calcular la primitiva F de f que corresponde a la suma : $F(x)=\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k x^{k+1}$. En $F(1)=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$.

Solución del ejercicio 213 ▲000222

El truco es escribir $2=3-1$ (!)

$$2^n=(3-1)^n=3\times p+(-1)^n$$

donde $3\times p$ ($p\in\mathbb{Z}$) representa los n primeros términos de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k(-1)^{n-k}$ y $(-1)^n$ es el último término. Así $2^n-(-1)^n=3p$. Si n es impar la igualdad se escribe $2^n+1=3p$ y entonces 2^n+1 es divisible por 3. Si n es par $2^n-1=3p$, por lo tanto $2^n+1=3p+2$ que no es divisible por 3. Para la otra afirmación observar $3=7-4$.

Solución del ejercicio 219 ▲000228

Se trata de comparar las dos escrituras de la función

$$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Para $x=1$ y $x=-1$ se obtiene respectivamente las afirmaciones (a) y (b). Derivando la función f y calculando $f'(1)$, se obtiene (b). Para (d) es necesario derivar una vez más.

Solución del ejercicio 220 ▲000229

$A=(1+i)^n$ tiene como módulo $2^{n/2}$ y por argumento $n\frac{\pi}{4}$ (y B es su conjugado). Se deduce gracias a la fórmula del binomio, y separando la parte real y parte imaginaria : $S_1=2^{n/2}\cos n\frac{\pi}{4}$ y $S_2=2^{n/2}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}$. Se tiene también $S_1=\frac{A+B}{2}$ y $S_2=\frac{B-A}{2}i$.

Solución del ejercicio 221 ▲000230

La aplicación Φ es una biyección : su inversa es Φ misma. Se supone que E sea un conjunto finito. La biyección Φ envía un conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ en un conjunto de misma cardinalidad. Escoger E un conjunto de n elementos, y sea $p \leqslant n$. Sea $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$:

$$\mathcal{Q} = \{F \subset E,\ \operatorname{card} F = p\}.$$

Se sabe que $\operatorname{card}\mathcal{Q} = C_n^p$ (esta es la definición de C_n^p). Además

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{Q}) &= \{\Phi(F),\ F \subset E,\ \operatorname{card} F = p\} \\ &= \left\{\complement F,\ F \subset E,\ \operatorname{card} F = p\right\} \\ &= \{G \subset E,\ \operatorname{card} G = n-p\}.\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{card}\Phi(\mathcal{Q}) = C_n^{n-p}$. Y como Φ es una biyección, $\operatorname{card}\Phi(\mathcal{Q}) = \operatorname{card}(\mathcal{Q})$, por lo tanto $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Solución del ejercicio 226 ▲002900

$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$, $\qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Solución del ejercicio 227 ▲002901

1.
2. 0 si $p < n$, $(-1)^n$ si $p = n$.
3.

Solución del ejercicio 228 ▲002902

$(-1)^p C_{n-1}^p$.

Solución del ejercicio 229 ▲002903

$n2^{n-1}$, $n4^{n-1}$, $3n4^{n-1}$.

Solución del ejercicio 230 ▲002904

$\frac{n(n^2-1)}{6}$, $\frac{n(n^2-1)(3n^2-12)}{360}$.

Solución del ejercicio 231 ▲002905

1. $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.
2.
3.

Solución del ejercicio 233 ▲002907

$p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Solución del ejercicio 238 ▲005137

1. De acuerdo con la fórmula del binomio de Newton,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.}$$

2. Sea n un entero natural no nulo. Se define $S_1 = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k}$ y $S_2 = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$. Entonces

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (pues } n \geqslant 1),$$

y por lo tanto, $S_1 = S_2$. Después $S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, y entonces $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}.}$$

3. Usando $j = e^{2i\pi/3}$, se tiene :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \text{ y } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

adicionando estas tres igualdades, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Ahora,
- si $k \in 3\mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k = 3p$ y $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$, pues $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N}+1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k = 3p+1$ y
$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0.$$
- si $k \in 3\mathbb{N}+2$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k = 3p+2$ y
$$1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0.$$

Finalmente, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2\mathrm{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3}(2^n + 2\mathrm{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

4. Para $1 \leqslant k \leqslant n$, se tiene

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k\binom{n-1}{k-1}.$$

5. $\binom{2n}{n}$ es el coeficiente de x^n en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$. Pero, por otra parte,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big).$$

En el desarrollo de esta última expresión, el coeficiente de x^n vale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ o aún $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Dos polinomios son iguales si y solo si tienen los mismos coeficientes y por lo tanto,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

6. **1a solución.** Para x real, se escribe $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. Para x real,

$$P(x) = (\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

en particular, para $x = 1$, se obtiene :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2a solución. De acuerdo a 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

1a solución. Para x real, se escribe $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. Se tiene

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

y por lo tanto, para x real,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\,dt = \int_0^1 (1+t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1} - 1).$$

en particular, para $x = 1$, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2a solución. De acuerdo a 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ y entonces

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

7. Para $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (lo que es aún cierto para $k = p$ considerando el hecho $\binom{p}{p+1} = 0$). Así,

$$\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} = 1 + \sum_{k=1}^{n-p} \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-p+1} \binom{p+k}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-p} \binom{p+k}{p+1}$$
$$= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 = \binom{n+1}{p+1}.$$

Interpretación en el triángulo de PASCAL. Cuando se desciende en el triángulo de PASCAL, a lo largo de la columna p, del coeficiente $\binom{p}{p}$ (línea p) al coeficiente $\binom{p}{n}$ (línea n), y que se suman estos coeficientes, se encuentra$\binom{n+1}{p+1}$ que se encuentra una fila más abajo y una columna más adelante.

8. (a) Para n natural dado, se escribe $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Una integración por partes proporciona :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 ((1-x^2)^n - (1-x^2)^{n+1}) \, dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n \, dx = \int_0^1 x.x(1-x^2)^{n+1} \, dx$$
$$= \left[-x \frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$$

y entonces $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ o aún :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$

Se tiene ya $I_0 = 1$. Después, para $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}.$$

(b) Para n natural no nulo dado :

$$1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \int_0^1 (1 - \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{2n}) \, dx$$
$$= \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}.$$

Solución del ejercicio 239 ▲005138

La fórmula binomial de NEWTON proporciona

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \cdots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \cdots + (2c)^9.$$

entonces,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \cdots + \binom{6}{4} a^4 b^2 - \cdots + b^6.$$

Así, el coeficiente buscado es

$$\binom{9}{6} \binom{6}{4} 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 2^3 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 10080.$$

Solución del ejercicio 240 ▲005139

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

y

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Solución del ejercicio 241 ▲005140

Sea n un entero natural no nulo. El término general del desarrollo de $(a+b)^n$ es $u_k = \binom{n}{k}a^kb^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Para $0 \leqslant k \leqslant n-1$, se tiene :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}}{\binom{n}{k}a^kb^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er caso. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (lo que equivale a $n < \frac{a}{b}$), entonces la sucesión $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ es estrictamente creciente y el término más grande es el último : a^n.

2do caso. Si $\frac{na-b}{a+b} \leqslant 0$ (lo que equivale a $n \leqslant \frac{b}{a}$), entonces la sucesión $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ es estrictamente decreciente y el término más grande es el primero : b^n.

3er caso. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leqslant n-1$. En este caso, la sucesión es estrictamente creciente, entonces eventualmente momentáneamente constante, dependiendo de que $\frac{na-b}{a+b}$ ya sea un entero o no, luego estrictamente decreciente (se dice que la sucesión u es unimodal). Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, se establece $k = E(\frac{na-b}{a+b})+1$, la sucesión u crece estrictamente hasta este rango y luego decrece estrictamente. El mayor de los términos es el de índice k, alcanza una y solo una vez. Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, el mayor de los términos se alcanza dos veces en el índice k y el índice $k+1$.

Solución del ejercicio 242 ▲005141

Para $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2} = 5n &\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n\\ &\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2-25 = 0\\ &\Leftrightarrow n = 5.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 243 ▲005147

$(1+a)^n = (1+a)\cdots(1+a) = 1+na+\cdots \geqslant 1+na.$

Solución del ejercicio 244 ▲005158

Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La fórmula binomial de NEWTON permite escribir

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3}\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}.
\end{aligned}
$$

Así, poniendo $a_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k}$ y $b_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}$, a_n y b_n son los **enteros** tales que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Reemplazando $\sqrt{3}$ por $-\sqrt{3}$, se tiene también $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Pero entonces,

$$a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = (4-3)^n = 1.$$

2. Se observa que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = (a_n + b_n\sqrt{3}) + (a_n - b_n\sqrt{3}) = 2a_n$. Pero,

$$0 < (2-\sqrt{3})^n < 1.$$

Por consiguiente,

$$(2+\sqrt{3})^n < (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2a_n < (2+\sqrt{3})^n + 1,$$

o aún

$$2a_n - 1 < (2+\sqrt{3})^n < 2a_n.$$

Se deduce que $E((2+\sqrt{3})^n) = 2a_n - 1$ y entonces que$E((2+\sqrt{3})^n)$ es un entero impar.

Solución del ejercicio 245 ▲005278

---

1. Sea E un conjunto de n elementos, $n \geqslant 1$, y $a \in E$ fijo. Sea $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$
$$A \mapsto \begin{cases} A\setminus\{a\} & \text{si } a \in A \\ A\cup\{a\} & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$
Demostrar que f es involutiva (y por lo tanto, biyectiva). Sea A un elemento de $\mathscr{P}(E)$. Si $a \notin A$, $f(A) = A\cup\{a\}$ y entonces, ya que $a \in A\cup\{a\}$, $f(f(A)) = (A\cup\{a\})\setminus\{a\} = A$. Si $a \in A$, $f(A) = A\setminus\{a\}$ y $f(f(A)) = (A\setminus\{a\})\cup\{a\} = A$. Así, $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f\circ f(A) = A$ o aún, $f\circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$. Ahora claramente, denotando $\mathscr{P}_p(E)$ (resp. $\mathscr{P}_i(E)$) el conjunto de partes de E de cardinal par (resp. impar), $f(\mathscr{P}_p(E)) \subset \mathscr{P}_i(E)$ y $f(\mathscr{P}_i(E)) \subset \mathscr{P}_p(E)$. Entonces, ya que f es biyectiva
$$\mathrm{card}(\mathscr{P}_p(E)) = \mathrm{card}(f(P_p(E)) \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{P}_i(E)$$
y de mismo $\mathrm{card}(\mathscr{P}_i(E)) \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{P}_p(E)$. Finalmente, $\mathrm{card}(\mathscr{P}_i(E)) = \mathrm{card}\,\mathscr{P}_p(E)$.
2. Sean $E = \{a_1,\dots,a_n\}$ un conjunto de n elementos y a un elemento fijo de E. Sea $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Hay C_{n-1}^{k-1} partes de k elementos que contienen a. Entonces, $nC_{n-1}^{k-1}(= C_{n-1}^{k-1} + \cdots + C_{n-1}^{k-1})$ es, por lo tanto la suma del número de partes de k elementos que contienen a_1 y del número de partes en k elementos que contienen a_2... Y del número de partes de k elementos que contienen a_n. En esta última suma, cada parte a k elementos de E ha sido contado varias veces y todas las partes a k elementos (en número igual a C_n^k) se contaron la misma cantidad de veces. ¿Cuántas veces se ha contado $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$? Esta parte se contó una vez como parte que contiene a_1, una vez como parte que contiene a_2... Y una vez como parte conteniendo a_k y así fue contado k vez. Conclusión : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

3. Sea $E = \{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}$ un conjunto de $2n$ elementos. Hay C_{2n}^n partes de n elementos de E. Tal parte tiene k elementos en $\{a_1,\dots,a_n\}$ y $n-k$ en $\{b_1,\dots,b_n\}$ para cierto k de $\{0,\dots,n\}$. Hay C_n^k escogencias posibles de k elementos en $\{a_1,\dots,a_n\}$ y C_n^{n-k} escogencias posibles de $n-k$ elementos en $\{b_1,\dots,b_n\}$, para k dada en $\{0,\dots,n\}$ y cuando k varía de 0 a n, se obtiene :

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

Solución del ejercicio 246 ▲005280

Claramente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,0} = 1$ (única solución : $0+0+\cdots+0 = 0$) y $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{1,k} = 1$ (única solución : $k = k$). Sean $n \geqslant 1$ y $k \geqslant 0$ fijos, $a_{n+1,k}$ es el número de soluciones enteras positivas x_i de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = k$. Hay $a_{n,k}$ soluciones tales que $x_{n+1} = 0$, luego $a_{n,k-1}$ soluciones tales que $x_{n+1} = 1$... luego $a_{n,0}$ soluciones tales que $x_{n+1} = k$.
Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + \cdots + a_{n,0}$ (y se recuerda $a_{n,0} = a_{1,k} = 1$).
Demostrar luego por recurrencia sobre n, entero natural no nulo, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.
Para $n = 1$, se tiene para todo natural k, $a_{1,k} = 1 = C_{1+k-1}^k$.
Sea $n \geqslant 1$, se supone que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$. Sea $k \geqslant 1$.

$$a_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^i = 1 + \sum_{i=1}^{k} (C_{n+i}^{i+1} - C_{n+i}^i) = 1 + C_{n+k}^{k+1} - 1 = C_{n+k}^{k+1},$$

lo que queda claro para $k = 0$.
Se ha demostrado por recurrencia que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.

Solución del ejercicio 248 ▲000236

Primero si dos conjuntos finitos A y B son disjuntos entonces $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
Si ahora A y B son dos conjuntos finitos cualesquiera : se descompone $A \cup B$ en tres conjuntos :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Estas tres conjuntos son disjuntos dos a dos por lo tanto :

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} B \setminus (A \cap B) + \operatorname{Card} A \cap B.$$

Pero para $R \subset S$ se tiene $\operatorname{Card} S \setminus R = \operatorname{Card} S - \operatorname{Card} R$. Así

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B + \operatorname{Card} A \cap B.$$

Entonces $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B$.
Aplicando $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$\operatorname{Card} A \Delta B = \operatorname{Card} A \cup B - \operatorname{Card} A \cap B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A \cap B.$$

Solución del ejercicio 249 ▲000237

Fijar un elemento de A ; en $E\setminus A$ (de cardinal $n-p$), se puede elegir C_{n-p}^{k} conjuntos a k elementos ($k=0,1,\dots,n$). El número de conjuntos en el complemento de A es, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^{k} = 2^{n-p}.$$

Para la elección de un elemento de A se tienen p escogencias, por lo que el número total de conjuntos que satisfacen la condición es :

$$p2^{n-p}.$$

Solución del ejercicio 251 ▲000239

1. Se trata pues de elegir 5 cartas entre 52 : hay por lo tanto, C_{52}^{5} manos diferentes. Esto puede ser calculado : $C_{52}^{5} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5!} = 2598960$.
2. Hay 4 escogencias para el as (el as de picas o el as de corazones o...), luego se deben elegir los 4 cartas restantes entre 48 tarjetas (no se puede volver a elegir un as). Balance $4\times C_{48}^{4}$ manos que contienen exactamente un as.
3. Es mucho más fácil contar primero las manos que no contienen jotas : es necesario elegir 5 cartas entre 48 (se excluyen las jotas) ; hay por lo tanto, C_{48}^{5} manos que no contienen jotas. Las otras manos son las manos que contienen al menos una jota : hay así $C_{52}^{5}-C_{48}^{5}$.
4. Primero contar el número de manos que no contienen un rey o una reina. El número de manos que no contienen un rey es C_{48}^{5} (como la pregunta 3.). El número de manos que no contienen reinas es también C_{48}^{5}. El número de manos que no tienen rey ni reina *no es* $C_{48}^{5}+C_{48}^{5}$, porque se ha contado dos veces las manos que no tenían rey, ni dama (hay C_{44}^{5} de tales manos). Por lo tanto, el número de manos que no contienen rey ni reina es : $2C_{48}^{5}-C_{44}^{5}$ (¡se retira una vez las manos contadas dos veces !). Lo que estamos buscando son todas las otras manos : aquellas que contienen al menos un rey y al menos una reina. Su número es, por lo tanto : $C_{52}^{5}-2C_{48}^{5}+C_{44}^{5}$.

Solución del ejercicio 255 ▲002912

1. $(6!)^2$
2. $4!\times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6\times 12^6$, $4^4\times 12^8$, $2^2\times 4^2\times 6^4\times 12^4$.

Solución del ejercicio 256 ▲002913

1. $(2n)!$.
2. $2(n!)^2$.
3. $2^{n+1}\times n!$.
4. $4\times n!$.

Solución del ejercicio 257 ▲002914

1. n^{n^2}.
2. $n^{n(n+1)/2}$.
3. $n \times n^{(n-1)^2}$.
4. $n \times n^{n(n-1)/2}$.

Solución del ejercicio 258 ▲002915

1.
2.
3. — $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^p$.
   — $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!}$.

Solución del ejercicio 259 ▲002916

1.
2. Recurrencia. igualdad para $n \leqslant 2$ o los A_i 3 a 3 disjuntos.

Solución del ejercicio 260 ▲002917

3^n.

Solución del ejercicio 261 ▲002918

1. Como $\{x_1 - 1, \ldots, x_p - p\}$ es una parte cualquiera de $\{0, \ldots, n-p\}$, se tiene $N = C_{n-p+1}^{p}$.
2. (a)
   (b) 32951280099.

Solución del ejercicio 262 ▲002919

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k R_k$, con $R_0 = 1$.
2. 1,1,2,5,15,52,203.

Solución del ejercicio 266 ▲002923

1. 1,2,5.
2. $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} t_k t_{n-k}$.

Solución del ejercicio 267 ▲005279

Hay C_{pq}^q escogencias posibles de una primera clase. Esta primera clase es elegida, hay $C_{pq-q}^q = C_{(p-1)q}^q$ escogencias posibles de la segunda clase... Y C_q^q posibles escogencias de p-ésima clase. En total, hay $C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q \cdots C_q^q$ escogencias posibles de una primera clase, luego de una segunda... luego de una p-ésima.

Ahora en el número $C_{pq}^{q}C_{(p-1)q}^{q}\cdots C_{q}^{q}$, se ha contado cada partición varias veces, cada uno de los cuales ha sido contado un número igual de veces.
Se ha contado cada partición tantas veces como las permutaciones de p clases, a saber $p!$. El número buscado es, por lo tanto :

$$\frac{1}{p!}C_{pq}^{q}C_{(p-1)q}^{q}\cdots C_{q}^{q}=\frac{1}{p!}\frac{(pq)!}{q!((p-1)q)!}\frac{((p-1)q)!}{q!((p-2)q)!}\cdots\frac{(2q)!}{q!q!}\frac{q!}{q!0!}=\frac{(pq)!}{p!(q!)^{p}}.$$

Solución del ejercicio 268 ▲005281

Se coloca el 0 ya sea en el dígito de las unidades, ya sea en el dígito de las decenas, ya sea en el dígito de las centenas, ya sea en los miles (pero no en el dígito de las decenas de millar) y una vez colocado el 0, ya no está permitido.
Respuesta : $4\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=4\cdot 9^{4}=4\cdot(80+1)^{2}=4\cdot 6561=26244$.

Solución del ejercicio 269 ▲005284

Se define H = "arriba" y D = "a la derecha". Un ejemplo de camino de $(0,0)$ a (p,q) es la palabra $DD...DHH...H$, donde D se escribe p veces y H se escribe q veces. El número de caminos buscado es claramente el número de anagramas de la palabra precedente. El número de opciones de la ubicación de la H es C_{p+q}^{q}. Una vez que las letras H se colocan no hay más opciones para las letras D. Por lo tanto hay C_{p+q}^{q} caminos posibles.
Observación : si primero se colocan las letras D, entonces se tiene C_{p+q}^{p} escogencias posibles. Pero se puede encontrar por supuesto el mismo número de caminos porque $C_{p+q}^{p}=C_{p+q}^{(p+q)-p}=C_{p+q}^{q}$.

Solución del ejercicio 270 ▲005285

Se denotan respectivamente x, y y z el número de piezas de 10, 20 y 50 centavos. Se trata de resolver en $\mathbb{N}^{3}$ la ecuación $10x+20y+50z=10000$ o aún $x+2y+5z=1000$. Sea $k\in\mathbb{N}$. $x+2y=k\Leftrightarrow x=k-2y$ y el número de soluciones de esta ecuación es :

$$\sum_{k=0}^{E(k/2)}1=E(\frac{k}{2})+1.$$

Para $0\leqslant z\leqslant 200$ dado, el número de soluciones de la ecuación $x+2y=1000-5z$ es $E(\frac{1000-5z}{2})+1$. El número de soluciones enteras de la ecuación $x+2y+5z=1000$ es

$$\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{1000-5z}{2})+1)=\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{-5z}{2})+501)=201.501+\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2})=100701+\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2}).$$

Ahora

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{200}E(\frac{-5z}{2})&=\sum_{k=1}^{100}(E(\frac{-5(2k-1)}{2})+E(\frac{-5(2k)}{2}))=\sum_{k=1}^{100}(E(-5k+\frac{5}{2})-5k)\\&=\sum_{k=1}^{100}(-10k+2)=200-10\frac{100\cdot 101}{2}.\end{aligned}$$

El número de soluciones buscadas es, por lo tanto $100701-50300=50401$. Hay 50401 formas de pago 100 euros con monedas de 10, 20 y 50 centavos.

Solución del ejercicio 271 ▲005286

1.

$$\chi_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = 1-\chi_{\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n}} = 1-\chi_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n}} = 1-\chi_{\overline{A_1}}\times\cdots\times\chi_{\overline{A_n}}$$
$$= 1-(1-\chi_{A_1})\cdots(1-\chi_{A_n}) = 1-(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\chi_{A_{i_1}}\cdots\chi_{A_{i_k}}))$$

y sumando sobre el conjunto de los x de E, se obtiene el resultado.

2. Para $1\leqslant k\leqslant n$, se escribe $A_k=\{\sigma\in S_n/\ \sigma(k)=k\}$. El conjunto de permutaciones que tienen al menos un punto fijo es $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. El conjunto de permutaciones sin puntos fijos es el complemento en S_n de $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. De acuerdo a 1), su número es, por lo tanto :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(S_n)-\mathrm{card}(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n) &= \mathrm{card}(S_n)-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{card}(A_i)+\sum_{i<j}\mathrm{card}(A_i\cap A_j)\\ &\quad -\cdots+(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\mathrm{card}(A_{i_1}\cap\cdots A_{i_k})+\cdots\\ &\quad +(-1)^n\mathrm{card}(A_1\cap\cdots\cap A_n).\end{aligned}$$

A_i es el conjunto de permutaciones que fijan i. Hay $(n-1)!$ (número de permutaciones de $\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}$). $A_i\cap A_j$ es el conjunto de permutaciones que fijan i y j. Hay $(n-2)!$. Más generalmente, $\mathrm{card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=(n-k)!$. Por otra parte, hay $n=C_n^1$ enteros i en $\{1,n\}$, luego C_n^2 parejas (i,j) tales que $i<j$ y más generalmente, hay C_n^k k-tuples $(i_1,\dots,i_k)$ tales que $i_1<i_2<\cdots<i_k$. El número de fallas es

$$n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Así el « problema de los sombreros » admite por respuesta

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Demostrar que esta sucesión tiende muy rápidamente a $\frac{1}{\mathrm{e}}=0,36...$, cuando n tiende a infinito. (Se adapta un cálculo ya realizado para el número e.)

Demostrar que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Para $n=0$, $(-1)^{n+1}\int_O^1\frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt=-\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\,dt=-1+\mathrm{e}^{-1}$ y entonces, se tiene $\mathrm{e}^{-1}=1-\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Sea $n\geqslant 0$. Se supone que $\mathrm{e}^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Una integración por partes proporciona

$$\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,dt=\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\,dt=\frac{1}{(n+1)!}-\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Pero entonces,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\,dt.$$

El resultado es demostrado por inducción. Se deduce que

$$|p_n - \frac{1}{e}| = \left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Esto demuestra que p_n tiende muy rápidamente a $\frac{1}{e}$.

Solución del ejercicio 272 ▲005287

Sea n un natural no nulo. Decir que f es una sobreyección de $\{1,\dots,n+1\}$ sobre $\{1,\dots,n\}$ equivale a decir que dos de los enteros de $\{1,\dots,n+1\}$ tienen la misma imagen k por f y que los otros tienen dos a dos imágenes separadas y distintas de k. Se escogen estos dos enteros : C_{n+1}^2 escogencias y su imagen común : n imágenes posibles lo que proporciona nC_{n+1}^2 escogencia de un par de $\{1,\dots,n+1\}$ y su imagen común. Luego existen $(n-1)!$ escogencias de las imágenes de los $n-1$ elementos restantes. En total, hay $n!\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1)!}{2}$ sobreyecciones de $\{1,\dots,n+1\}$ sobre $\{1,\dots,n\}$.

Solución del ejercicio 273 ▲005288

Sea $n \geqslant 5$. De cada vértice parten $n-1$ rectas (hacia los $n-1$ otros vértices) de los cuales 2 son lados y $n-3$ diagonales. Como cada diagonal pasa por 2 vértices, hay $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Estas diagonales se cortan en $C_{n(n-3)/2}^2$ puntos distintos o confundidos. En este recuento, cada vértice se contó tantas veces como se ha elegido un par de dos diagonales que pasan por este vértice, a saber C_{n-3}^2. Ahora, hay n vértices.
Respuesta :

$$\begin{aligned}C_{n(n-3)/2}^2 - nC_{n-3}^2 &= \frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}(\frac{n(n-3)}{2} - 1) - n\frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{8}(n(n-3) - 2 - 4(n-4)) \\ &= \frac{n(n-3)}{8}(n^2 - 7n + 14).\end{aligned}$$

Las diagonales se cortan en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ puntos distintos o confundidos y distintos de los vértices (o incluso en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ puntos como máximo).

Solución del ejercicio 274 ▲005289

1. Se tiene claramente $P(1) = 2$. Sea $n \geqslant 1$. Se trazan n rectas que satisfacen las condiciones del enunciado. Dividen el plano en $P(n)$ regiones. Se traza luego D_{n+1}, una $(n+1)$-ésima recta. Por hipótesis, corta cada una de las n primeras rectas en n puntos distintos dos a dos. Estos n puntos definen $(n+1)$ intervalos en la recta D_{n+1}. Cada uno de estos $(n+1)$ intervalos parte una de las $P(n)$ regiones ya existentes en dos regiones y, por lo tanto, agrega una nueva región. Así, $P(n+1) = P(n) + (n+1)$. Sea $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}P(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1) - P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2}\end{aligned}$$

2. Se tiene que $Q(1) = 2$. Sea $n \geqslant 1$. Se traza n planos verificando las condiciones del enunciado. Parten el espacio en $Q(n)$ regiones. Se traza luego P_{n+1}, un $(n+1)$-ésimo plano. Por hipótesis, se corta cada uno de los n primeros planos en n rectas que verifican las condiciones de 1). Estas n rectas delimitan $P(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ regiones sobre el plano P_{n+1}. Cada una de estas regiones parte una de las $Q(n)$ regiones ya existentes en dos regiones y, por lo tanto, agrega una nueva región. Así, $Q(n+1) = Q(n) + P(n) = Q(n) + \frac{n^2+n+2}{2}$.
Sea $n \geqslant 2$.

$$Q(n) = P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(Q(k+1) - Q(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+2}{2}) = 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k$$
$$= (n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^3+5n+6}{6}.$$

Solución del ejercicio 275 ▲005290

Sean n y k de enteros naturales tales que $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Sea E un conjunto de n elementos y a un elemento fijo de E. Hay P_n^k particiones de E en k clases. Entre estas particiones, están aquellos en los que a es en un punto aislado. Se identifican con las particiones en $k-1$ clases de $E \setminus \{a\}$ y son en número P_{n-1}^{k-1}. Están entonces las particiones en las que a es elemento de una parte de cardinal al menos 2. Tal partición se obtiene partiendo $E \setminus \{a\}$ en k clases y luego agregando a una de estas k clases opcionales el elemento a. Hay $kP_{n-1}k$ de tales particiones. En total, $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$.
Valores de P_n^k, para $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.

n / k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Expresar ahora en función de P_n^k, el número de sobreyecciones de un conjunto a n elementos en un conjunto de p elementos.
Si $p > n$, no existen sobreyecciones de E_n en E_p (donde E_n y E_p denotan los conjuntos de n y p elementos respectivamente).
De ahora en adelante se supone $p \leqslant n$. El dar una sobreyección f de E_n sobre E_p equivale a dar una partición del conjunto E_n en p clases (cada elemento de la misma clase tiene la misma imagen par f) luego de una biyección del conjunto de partes de la partición a E_p.
En total, hay por lo tanto, $p!P_n^k$ sobreyecciones de un conjunto a n elementos en un conjunto de p elementos, para $1 \leqslant p \leqslant n$.

Solución del ejercicio 288 ▲003057

1. $a = 33, b = -200$.
2.

Solución del ejercicio 291 ▲003060

1. Recurrencia en n.
2. Si $a > n$, entonces $a = b+1$, con $b \geqslant n$, por lo tanto $f(b) \geqslant n$, por lo tanto $f(f(b)) \geqslant f(a)$. Contradicción.
3.

Solución del ejercicio 292 ▲005282

Si $n \geqslant 366$, se tiene claramente $p_n = 1$ (Principio de los cajones : si 366 personas deben asociarse con 365 fechas de aniversario, entonces 2 personas al menos deben estar asociadas con la misma fecha de cumpleaños). Si $2 \leqslant n \leqslant 365$, se tiene $p_n = 1 - q_n$, donde q_n es la probabilidad de que las fechas de aniversario sean dos a dos distintas. Hay $(365)^n$ distribuciones posibles de fechas de aniversario (casos posibles) y entre estas reparticiones, hay $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)$ tal que las fechas de cumpleaños son dos a dos distintos. Finalmente,

$$p_n = 1 - \frac{1}{(365)^n} 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots (365-n+1) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}).$$

entonces,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{k}{365}) \leqslant \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{365}) \geqslant \ln 2.$$

Ahora, sea $x \in [0,1[$. Se tiene

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \geqslant \int_0^x \frac{1}{1-0} dt = x.$$

Para k elemento de $\{1,\ldots,n-1\} (\subset \{1,\ldots,364\})$, $\frac{k}{365}$ es un elemento real de $[0,1[$. Aplicando la desigualdad precedente, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{365}) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

Así,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{n(n-1)}{730} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 730 \ln 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 2920 \ln 2}}{2} = 22,99... \Leftrightarrow n \geqslant 23.$$

Finalmente, en un grupo de al menos 23 personas, hay más de un chance sobre dos que al menos dos personas cumplan años el mismo día.

Solución del ejercicio 293 ▲005283

1. Nuestro calendario es de periódico de 400 años (y casi $4 \cdot 7 = 28$ años periódico). En efecto,
   (a) la distribución de los años bisiestos es periódica de 400 años (1600 y 2000 son años bisiestos pero 1700, 1800 y 1900 no lo son (entre otras cosas para recuperar 3 días cada 400 años y apegarse lo más posible al ritmo del sol))
   (b) hay un número entero de semanas en un período de 400 año. En efecto, en 400 años, un cuarto de los años, o sea 100 años, menos 3 son años bisiestos y, por lo tanto, durante todo el período de 400 años hay 97 años bisiestos y 303 años no bisiestos.

Un año no bisiesto de 365 días está constituido de $52.7 + 1$ días o aún un número entero de semanas más un día y un año bisiesto es un entero de semanas más dos días.

Un periodo de 400 años se compone, por lo tanto, de un número entero de semanas más : $97.2 + 303.1 = 194 + 303 = 497 = 7.71$ días que nuevamente proporciona un número entero de semanas.

2. Dos periodos consecutivos de 28 años sin excepción (siglos no bisiestos) reproducen el mismo calendario. En efecto, los 7 los años bisiestos proporcionan un entero de semanas más que 2.7 días $= 2$ semanas y los 21 años no bisiestos proporcionan un entero de semanas más 21.1 días $= 3$ semanas.

3. De acuerdo con lo anterior, es suficiente contar los 1ero del año que caen en domingo o sábado durante un período de 400 años dados, por ejemplo de 1900 a 2299 (incluido).

   Se descompone este período como sigue :

1900,	$1901 \to 1928$,	$1929 \to 1956$,	$1957 \to 1984$,	$1985 \to 2012$,
$2013 \to 2040$,	$2041 \to 2068$,	$2069 \to 2096$,	$2097 \to 2100$,	$2101 \to 2128$,
$2129 \to 2156$,	$2157 \to 2184$,	$2185 \to 2200$,	$2201 \to 2228$	$2229 \to 2256$,
$2257 \to 2284$,	$2285 \to 2299$.			

4. Demostrar así que en todo período de 28 años sin un siglo bisiesto, el primero del año cae el mismo número de veces cada día de la semana (Lunes, martes,..). (El conocimiento de las congruencias módulo 4 y 7 son muy útil). Al pasar de un año no bisiesto al año siguiente, como un año tiene un entero de semanas más un día, el 1ero del año cae un día luego el año siguiente y dos días luego si el año es bisiesto. Por ejemplo, 1ero de enero 1998 : Jueves 1999 : Viernes 2000 : Sábado 2001 : Lunes 2002 : Martes 2003 :

   Miércoles 2004 : Jueves 2005 : Sábado...

   Denotemos A, B, C, D, E, F, G los días de la semana. En un período de 28 años sin un fin de siglo no bisiesto, por ejemplo, un año bisiesto, se encuentra la siguiente sucesión :

   ABCD FGAB DEFG BCDE GABC EFGA CDEF (luego se reinicia ABCD...)

   o sea 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, y 4G.

5. Queda por estudiar los períodos excepto (subrayados en 3)).

   Determinación del 1ero de enero 1900. El 1ero de enero 1998 fue un jueves. Es lo mismo así el 1ero de enero 1998-28 = 1970 y los primeros de enero 1942 y 1914 luego se remonta :

1914 Jueves	1913 Miércoles	1912 Lunes	1911 Domingo	1910 Sábado
1909 Viernes	1908 Miércoles	1907 Martes	1906 Lunes	1905 Domingo
1904 Viernes	1903 Jueves	1902 Miércoles	1901 Martes	1900 Lunes
				(1900 no es bisiesto)

   Los primeros del año 2000, 2028, 2056 y 2084 son sábados, 2088 un jueves, 2092 un martes, 2096 un domingo y así 2097 martes 2098 miércoles 2099 jueves 2100 viernes. 2101 es un sábado así que 2129, 2157, 2185 lo que da de 2185 a 2200 incluido la sucesión :

   S D L Ma J V S D Ma Mi J V D L Ma Mi

   2201 es un jueves, así como 2285 lo que da de 2285 a 2299 incluida la sucesión :

   J V S D Ma Mi J V D L Ma Mi V S D

El conteo regresivo de los lunes, martes... subrayado es : 6D 4L 6Ma 5Mi 5J 6V 4S. En todo periodo de 400 año, el 1ero del año cae 2 veces más el domingo que el sábado y por lo tanto, más a menudo el domingo que el sábado.

Solución del ejercicio 294 ▲000249

Escribir la descomposición de $15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 15$ en factores primos. $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Un divisor de $15!$ se escribe $d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta \cdot 11^\varepsilon \cdot 13^\eta$, con $0 \leqslant \alpha \leqslant 11$, $0 \leqslant \beta \leqslant 6$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 3$, $0 \leqslant \delta \leqslant 2$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Además, todo número d de esta forma es divisor de $15!$. El número de divisores es $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Solución del ejercicio 295 ▲000250

Se trata de calcular 100^{1000} módulo 13. Primero $100 \equiv 9 \pmod{13}$, por lo tanto $100^{1000} \equiv 9^{1000} \pmod{13}$. Por lo tanto $9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$, $9^3 \equiv 9^2 \cdot 9 \equiv 3 \cdot 9 \equiv 1 \pmod{13}$, Entonces $9^4 \equiv 9^3 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$, $9^5 \equiv 9^4 \cdot 9 \equiv 9 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{13}$. Así $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9^{3\cdot 333+1} \equiv (9^3)^{333} \cdot 9 \equiv 1^{333} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{13}$.

Solución del ejercicio 296 ▲000251

Lo único que hay que ver es que para una división euclídea, el resto debe ser menor que el cociente. Entonces las divisiones euclidianas se escriben : $96842 = 256 \times 378 + 74$ y $96842 = 258 \times 375 + 92$.

Solución del ejercicio 299 ▲000254

Se razona módulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod{8}.$$

Entonces

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{8}.$$

El resto de la división euclidiana de $7^n + 1$ por 8 es, por lo tanto $(-1)^n + 1$, entonces si n es impar, $7^n + 1$ es divisible por 8. Y si n es par $7^n + 1$ no es divisible por 8.

Solución del ejercicio 302 ▲000257

Es suficiente constatar que para 4 números consecutivos existe necesariamente : un múltiplo de 2, un múltiplo de 3, un múltiplo de 4 (distinto del múltiplo de 2). Entonces el producto de 4 números consecutivos es divisible por $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Solución del ejercicio 312 ▲000267

Escribir $n = p^2 + q^2$ y estudiar el resto de la división euclidiana de n por 4 distinguiendo los diferentes casos de paridad de p y q.

Solución del ejercicio 315 ▲000270

Para 2. Si p divide $b - a$, entonces p divide también $b^n - a^n$ según la fórmula $(*)$.
Para 3. Se utiliza el resultado de la pregunta anterior con $n = p - k - 1$, por escribir b^{p-k-1} en función de a^{p-k-1} módulo p en

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}.$$

Se puede entonces concluir.

Solución del ejercicio 330 ▲000285

---

1. Sea n un número impar, entonces se escribe $n=2p+1$, con $p\in\mathbb{N}$. Ahora $n^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=4p(p+1)+1$. Entonces $n^2\equiv 1 \pmod 8$.
2. Si n es par entonces existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $n=2p$. Y $n^2=4p^2$. Si p es par entonces p^2 es par y, por lo tanto $n^2=4p^2$ es divisible por 8, por lo tanto $n^2\equiv 0 \pmod 8$. Si p es impar entonces p^2 es impar y por lo tanto, $n^2=4p^2$ es divisible por 4, pero no por 8, por lo tanto $n^2\equiv 4 \pmod 8$.
3. Como a es impar entonces según la primera pregunta $a^2\equiv 1 \pmod 8$, e igualmente $c^2\equiv 1 \pmod 8$, $c^2\equiv 1 \pmod 8$. Entonces $a^2+b^2+c^2\equiv 1+1+1\equiv 3 \pmod 8$. Para el otro resto, escribiendo $a=2p+1$ y $b=2q+1$, $c=2r+1$, entonces $2ab=2(2p+1)(2q+1)=8pq+4(p+q)+2$. Así $2(ab+bc+ca)=8pq+8qr+8pr+8(p+q+r)+6$, por lo tanto $2(ab+bc+ca)\equiv 6 \pmod 8$.
4. Demostrar por reducción al absurdo que el número $a^2+b^2+c^2$ no es el cuadrado de un entero. Se supone que existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $a^2+b^2+c^2=n^2$. Se sabe que $a^2+b^2+c^2\equiv 3 \pmod 8$. Si n es impar entonces $n^2\equiv 1 \pmod 8$ y si n es par entonces $n^2\equiv 0 \pmod 8$ o $n^2\equiv 4 \pmod 8$. En todos los casos n^2 no es congruente con 3 módulo 8. Entonces existe una contradicción. La conclusión es que la hipótesis inicial es falsa, por lo que $a^2+b^2+c^2$ no es un cuadrado. El mismo tipo de razonamiento es válido para $2(ab+bc+ca)$.

   Para $ab+bc+ca$ el argumento es parecido : por un lado $2(ab+bc+ca)\equiv 6 \pmod 8$ y por otro lado si, por reducción al absurdo, se supone $ab+bc+ca=n^2$, entonces según la paridad de n se tiene $2(ab+bc+ca)\equiv 2n^2\equiv 2 \pmod 8$ o en $0 \pmod 8$. En ambos casos esto conduce a una contradicción. Se ha demostrado que $ab+bc+ca$ no es un cuadrado.

Solución del ejercicio 336 ▲003095

$7^4\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\,10)$, $7^2\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\,4)$ y $7^{7^{7^7}}$ es impar entonces $7^{7^{7^{7^7}}}\equiv 7\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\,4)$ y $7^{7^{7^{7^{7^7}}}}\equiv 7^3\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\,10)$.

Solución del ejercicio 337 ▲003096

1.
2. $x=1, y=1$ o $x=2, y=3$.

Solución del ejercicio 339 ▲003098

Resto $=2$.

Solución del ejercicio 343 ▲003102

$n^2+3n+5\equiv (n-59)^2-88 \,(\mathrm{mod}\,121)$. Si 121 divide n^2+3n+5, entonces $11 \mid n-59 \Rightarrow$ contradicción.

Solución del ejercicio 346 ▲003105

$x\equiv y \,(\mathrm{mod}\,4)$.

Solución del ejercicio 347 ▲003106

1.
2. Recurrencia : $a^{4\times 10^{k+1}}-1=(a^{4\times 10^k}-1)(a^{4\times 10^k\times 9}+\cdots+a^{4\times 10^k\times 0})$.

3. $x = 123456789^{800000001/3}$.

Solución del ejercicio 348 ▲003107

$56786730 = 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 31\times 61$. Para todos estos factores primos, se tiene $\varphi(p) \mid 60$.

Solución del ejercicio 349 ▲003108

El orden de $\dot{2}$ en $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divide p, por lo tanto es igual a p y este orden divide $\varphi(q) = q-1$.

Solución del ejercicio 352 ▲005116

Demostrar por inducción que, para $n \geqslant 2$, H_n se escribe en la forma $\frac{p_n}{q_n}$, donde q_n es un entero par y p_n es un entero impar (la fracción anterior no es necesariamente irreducible, pero ciertamente no es un número entero). Para $n=2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ y H_2 es del tipo anunciado. Sea $n \geqslant 2$. Se supone que para todo entero k tal que $2 \leqslant k \leqslant n$, se tiene $H_k = \frac{p_k}{q_k}$, donde p_k es un entero impar y q_k es un entero par y demostrar que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde p_{n+1} es un entero impar y q_{n+1} es un entero par. (Investigar. La idea $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$ solo funciona si $(n+1)p_n+q_n$ es impar lo que se asegura si $n+1$ es impar y por lo tanto, n par)

1er caso. Si n es par, se puede escribir $n=2k$, donde $k\in\mathbb{N}^*$. En este caso, $H_{n+1} = \frac{(2k+1)p_n+q_n}{(2k+1)q_n}$ y H_{n+1} es el cociente de un entero impar por un entero par.

2o caso. Si n es impar, se establece $n = 2k-1$, donde $k \geqslant 2$ (de manera que $2k-1 \geqslant 3$).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}$$

(separando las fracciones con denominadores pares de las fracciones con denominadores impares)

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}.$$

Ahora, reduciendo al mismo denominador y dado que un producto de números impares es impar, se ve que $\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2i+1}$ es del tipo $\frac{K}{2K'+1}$, donde K y K' son enteros. Luego, ya que $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 = n$, por hipótesis de recurrencia, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$, donde p_k es un entero impar y q_k un entero par. Después de la reducción al mismo denominador, se obtiene

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ es un entero par y $(2K'+1)p_k$ es un entero impar como el producto de dos números impares. Entonces el numerador es de hecho un entero impar y porque $2qk(2K'+1)$ es un entero par, H_{n+1} es de hecho en todos los casos de la forma deseada.

Se ha demostrado por inducción que para todo entero natural $n \geqslant 2$, H_n es el cociente de un entero impar por un entero par y por lo tanto, no es un entero.

Solución del ejercicio 353 ▲005157

Sea $n \in \mathbb{N}$. La división euclidiana de n por 25 proporciona un cociente entero q y un resto r elemento de $\{0,1,\ldots,24\}$ tales que $n = 25q + r$. Se tiene entonces

$$E(\frac{1}{3}(n+2-E(\frac{n}{25}))) = E(\frac{25q+r+2-q}{3}) = E(8q+\frac{r+2}{3}) = 8q+E(\frac{r+2}{3}),$$

y

$$E(\frac{8n+24}{25}) = E(\frac{8(25q+r)+24}{25}) = 8q+E(\frac{8r+24}{25}).$$

Para demostrar la igualdad del enunciado, por lo tanto, queda por comprobar las 25 igualdades $E(\frac{r+2}{3}) = E(\frac{8r+24}{25})$, $0 \leqslant r \leqslant 24$, $(*)$, que ya se puede verificar « a mano ».
Se puede reducir aún más el número de verificaciones La división euclidiana de r por 3 se escribe $r = 3k+l$, con $0 \leqslant l \leqslant 2$. Pero entonces,

$$E(\frac{r+2}{3}) = k+E(\frac{l+2}{3}) \text{ y } E(\frac{8r+24}{25}) = E(\frac{25k-k+8l+24}{25}) = k+E(\frac{-k+8l+24}{25}).$$

Si $l = 0$, k varía de 0 a 8 y en este caso, $0 \leqslant \frac{-k+24}{25} = \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{24}{25} < 1$. Así,

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 0 = E(\frac{2}{3}) = E(\frac{l+2}{3}).$$

Se ha así verificado $(*)$ cuando $r \in \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$. Si $l = 1$ o $l = 2$, $E(\frac{l+2}{3}) = 1$ y por otro lado, k varía de 0 a 7. En este caso,

$$1 = \frac{-7+8+24}{25} \leqslant \frac{-k+8l+24}{25} \leqslant \frac{16+24}{25} < 2$$

y entonces

$$E(\frac{-k+8l+24}{25}) = 1 = E(\frac{l+2}{3}).$$

Se ha así verificado $(*)$, para los otros valores de r. Finalmente, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(\tfrac{1}{3}(n+2-E(\tfrac{n}{25}))) = E(\tfrac{8n+24}{25}).}$$

Solución del ejercicio 358 ▲000290

Se trata de usar la descomposición de números en factores primos.

1. $126 = 2\cdot 3^2\cdot 7$ y $230 = 2\cdot 5\cdot 23$, entonces el mcd de 126 y 230 es 2.
2. $390 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13$, $720 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5$, $450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$ y entonces el mcd de estos tres números es $2\cdot 3\cdot 5 = 30$.
3. $\text{mcd}(180,606,750) = 6$.

Solución del ejercicio 360 ▲000292

Sean a,b dos enteros mcd 18 y de suma 360. Sea a',b' tal que $a = 18a'$ y $b = 18b'$. Entonces a' y b' son primos entre sí, y su suma es $360/18 = 20$. Se puede fácilmente enumerar todos los pares de números naturales (a',b') $(a' \leqslant b')$ que satisfacen esta condición, estos son los pares :

$$(1,19),(3,17),(7,13),(9,11).$$

Para obtener los pares (a,b) buscados ($a \leqslant b$), es suficiente multiplicar los pares anteriores por 18 :

$$(18,342),(54,306),(126,234),(162,198).$$

Solución del ejercicio 364 ▲000296

1. $\operatorname{mcd}(18480,9828)=84$;
2. $25\times 18480+(-47)\times 9828=84$.

Solución del ejercicio 366 ▲000298

Como el mcd de 955 y 183 es 1, entonces de acuerdo al teorema de Bézout esta ecuación tiene soluciones. Por ejemplo, una solución particular es $(m_0,n_0)=(-32,167)$. Las soluciones son exactamente los pares $(m,n)=(m_0-83k,n_0+37k)$, para $k\in\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 371 ▲000303

1. $a=9b+10$.
2. Calculemos el mcd por el algoritmo de Euclides. $a=9b+10$, $b=12345678\times 10+9$, $10=1\times 9+1$. Entonces el mcd vale 1 ;
3. Se retoman las ecuaciones anteriores partiendo del final : $1=10-9$, luego se reemplaza 9 gracias a la segunda ecuación del algoritmo de Euclides : $1=10-(b-12345678\times 10)=-b+1234679\times 10$. Ahora se reemplaza 10 gracias a la primera ecuación : $1=-b+12345679(a-9b)=12345679a-111111112b$.

Solución del ejercicio 373 ▲000305

Dividiendo por 45 (que es el mcd de $1665,1035,45$) se obtiene la ecuación equivalente :

$$37x+23y=1 \qquad (E)$$

Como el mcd de 37 y 23 es 1, entonces de acuerdo con el teorema de Bézout esta ecuación (E) tiene soluciones. El algoritmo de Euclides para el cálculo del mcd de 37 y 23 proporciona los coeficientes de Bézout : $37\times 5+23\times(-8)=1$.
Una solución particular de (E) es, por lo tanto $(x_0,y_0)=(5,-8)$.
Ahora se va a encontrar la expresión general para las soluciones de la ecuación (E). Sean (x,y) una solución de la ecuación $37x+23y=1$. Como (x_0,y_0) es también solución, se tiene $37x_0+23y_0=1$. Se toma la diferencia entre estas dos igualdades para obtener $37(x-x_0)+23(y-y_0)=0$. Es decir

$$37(x-x_0)=-23(y-y_0) \qquad (*)$$

Se deduce que $37|23(y-y_0)$, por lo que $\operatorname{mcd}(23,37)=1$, entonces por el lema de Gauss, $37|(y-y_0)$. (Aquí es donde es importante haber dividido por 45 desde el principio !) Esto permite escribir $y-y_0=37k$, para un $k\in\mathbb{Z}$. Repartiendo de la igualdad $(*)$: se obtiene $37(x-x_0)=-23\times 37\times k$, lo que da $x-x_0=-23k$. Entonces si (x,y) es solución de (E), es de la forma : $(x,y)=(x_0-23k,y_0+37k)$, con $k\in\mathbb{Z}$.
Recíprocamente, para cada $k\in\mathbb{Z}$, si (x,y) es de esta forma, entonces es una solución de (E) (verificarlo !).

Conclusión : las soluciones son

$$\{(5-23k,-8+37k) \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Solución del ejercicio 405 ▲003111

$(a+b)\wedge m = d.$

Solución del ejercicio 406 ▲003112

$= |a-b|(a\wedge b)^2$ o $3|a-b|(a\wedge b)^2$.

Solución del ejercicio 407 ▲003113

$$8(n^3+n) = (2n+1)(4n^2-2n+5)-5 \Rightarrow d = (2n+1)\wedge 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n\equiv 2 \pmod 5, & \text{d} = 5 \\ \text{si } n\not\equiv 2 \pmod 5, & \text{d} = 1. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 408 ▲003114

$(15n^2+8n+6)\wedge(30n^2+21n+13) = 1.$

Solución del ejercicio 409 ▲003115

$\{a,b\}\in\{\{50,600\},\{150,200\}\}.$

Solución del ejercicio 410 ▲003116

$\{a,b\}\in\{\{1,192\},\{3,32\},\{7,126\},\{14,63\}\}.$

Solución del ejercicio 411 ▲003117

$\{x,y\} = \{147,252\}.$

Solución del ejercicio 412 ▲003118

$x = 14k, \quad y = 15k.$

Solución del ejercicio 413 ▲003119

x impar, $y = 2-x$.

Solución del ejercicio 414 ▲003120

$x = 1$ o $y = 1$.

Solución del ejercicio 415 ▲003121

$(300,150)$, $(150,100)$, $(100,75)$, $(75,60)$, $(60,50)$.

Solución del ejercicio 416 ▲003122

1. $a^m - 1 \mid (a^{qm} - 1)a^r = a^n - a^r$.
2. $A \wedge (AQ + R) = A \wedge R$. Algoritmo de Euclides sobre los exponentes de a.
3. si y solo si $m \mid n$.

Solución del ejercicio 418 ▲003124

1.
2.
3. $x = 1 + 11k, \; y = -1 + 7k$.

Solución del ejercicio 419 ▲003125

1. $x = 67 - 71k, \quad y = -89 + 95k$.
2. $x = 24 + 53k, \quad y = 9 + 20k$.
3. $x = -49 + 20k - 5m, \quad y = 49 - 20k + 4m, \quad z = -7 + 3k$.

Solución del ejercicio 421 ▲003127

1. $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.
2. $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Solución del ejercicio 422 ▲003128

785.

Solución del ejercicio 424 ▲000336

1. Se sabe que
$$x^b - 1 = (x-1)(x^{b-1} + \cdots + x + 1),$$
para $x = 2^a$ se obtiene :
$$2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1\right).$$
Así $(2^a - 1)|(2^{ab} - 1)$.
2. Demostrar la contrapositiva. Se supone que p no es el primero. Entonces $p = ab$, con $1 < p, q < a$. Por la pregunta precedente $2^a - 1$ divide $2^p - 1$ (y $1 < 2^a - 1 < 2^p - 1$). Entonces $2^p - 1$ no es un número primo.
3. Se supone $a \geqslant b$. Demostrar que hacer el algoritmo de Euclides para el par $(2^a - 1, 2^b - 1)$ equivale a hacer el algoritmo de Euclides para (a, b). En primer lugar, recordar la fórmula que es en la base del algoritmo de Euclides : $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a-b,b)$. Aplicado a $2^a - 1$ y $2^b - 1$ esto da directamente $\mathrm{mcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{mcd}(2^a - 2^b, 2^b - 1)$. Pero $2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$, de donde $\mathrm{mcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = \mathrm{mcd}(2^b(2^{a-b} - 1), 2^b - 1) = \mathrm{mcd}(2^{a-b} - 1, 2^b - 1)$. La última igualdad proviene del hecho que 2^b y $2^b - 1$ son primos entre sí (dos enteros consecutivos son siempre coprimos).

Hay que demostrar que : $\text{mcd}(2^a-1,2^b-1)=\text{mcd}(2^{a-b}-1,2^b-1)$. Esta fórmula debe compararse con $\text{mcd}(a,b)=\text{mcd}(a-b,b)$. Iterando esta fórmula se obtiene que si $a=bq+r$, entonces : $\text{mcd}(2^a-1,2^b-1)=\text{mcd}(2^{a-bq}-1,2^b-1)=\text{mcd}(2^r-1,2^b-1)$ a comparar con $\text{mcd}(a,b)=\text{mcd}(a-bq,b)=\text{mcd}(r,b)$. Se tiene el primer paso del algoritmo de Euclides. Iterando el algoritmo de Euclides para (a,b), se para en el último resto no nulo : $\text{mcd}(a,b)=\text{mcd}(b,r)=\cdots=\text{mcd}(r_n,0)=r_n$. Esto da que $\text{mcd}(2^a-1,2^b-1)=\text{mcd}(2^b-1,2^r-1)=\cdots=\text{mcd}(2^{r_n}-1,2^0-1)=2^{r_n}-1$.

Resumen : $\text{mcd}(2^a-1,2^b-1)=2^{\text{mcd}(a,b)}-1$.

Solución del ejercicio 425 ▲000337

Sea a y b enteros primos entre ellos. Se razona por reducción al absurdo y se supone que ab y $a+b$ no son primos entre sí. Entonces existe p un número primo dividiendo ab y $a+b$. Por el lema de Euclides como $p|ab$, entonces $p|a$ o $p|b$. Se supone por ejemplo que $p|a$. Como $p|a+b$, entonces p divide también $(a+b)-a$, por lo tanto $p|b$. δ no divide b esto implica que δ y b son primos entre sí. De acuerdo al lema de Gauss, como δ divide ab y δ es primero con b, entonces δ divide a. Entonces p es un factor primo de a y de b, lo que es absurdo.

Solución del ejercicio 427 ▲000339

1. Dado $0<i<p$, se tiene

$$C_p^i=\frac{p!}{i!(p-i)!}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(i+1))}{i!}$$

   Como C_p^i es un entero entonces $i!$ divide $p(p-1)\cdots(p-(i+1))$. Pero $i!$ y p son primos entre sí (usando la hipótesis $0<i<p$). Entonces, según el teorema de Gauss : $i!$ divide $(p-1)\cdots(p-(i+1))$, dicho de otro modo existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $ki!=(p-1)\cdots(p-(i+1))$. Ahora se tiene $C_p^i=pk$, por lo tanto p divide C_p^i.

2. Se trata de demostrar el pequeño teorema de Fermat : para p primo y $a\in\mathbb{N}^*$, entonces $a^p\equiv a \pmod p$. Se fija p. Sea la afirmación

$$(\mathscr{H}_a)\quad a^p\equiv a \pmod p.$$

   Para $a=1$ ¡esta afirmación es cierta ! Dado $a\geqslant 1$ se supone que $\mathscr{H}_a$ sea cierta. Entonces

$$(a+1)^p=\sum_{i=0}^{p}C_p^i a^i.$$

   Pero según la pregunta anterior para $0<i<p$, p divide C_p^i. En términos de módulo se obtiene :

$$(a+1)^p\equiv C_p^0a^0+C_p^pa^p\equiv 1+a^p \pmod p.$$

   Por la hipótesis de inducción se sabe que $a^p\equiv a \pmod p$, por lo tanto

$$(a+1)^p\equiv a+1 \pmod p.$$

   Se ha demostrado que $\mathscr{H}_{a+1}$ es cierta. Por el principio de inducción, cualquiera que sea $a\in\mathbb{N}^*$ se tiene :

$$a^p\equiv a \pmod p.$$

Solución del ejercicio 429 ▲000341

1. Se fija n y demostrar la recurrencia en $k \geqslant 1$. La fórmula es cierta para $k = 1$. Se supone que la fórmula es verdadera en el rango k. Entonces

$$(2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k} (2^{2^{n+i}} + 1) = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1)$$
$$= (2^{2^{n+k}} - 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1.$$

Se ha utilizado la hipótesis de inducción en estas igualdades. Así se ha demostrado la fórmula del rango $k+1$. Y así por el principio de inducción es cierta.

2. Escribir $m = n+k$, entonces la igualdad anterior se convierte en :

$$F_m + 2 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

O aún :

$$F_n \times (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i \quad - \quad F_m = 2.$$

Si d es un divisor de F_n y F_m, entonces d divide a 2 (o entonces se puede usar el teorema de Bézout). En consecuencia $d = 1$ o $d = 2$. Pero F_n es impar entonces $d = 1$. Se ha demostrado que todos los divisores de F_n y F_m son 1, lo que significa que F_n y F_m son primos entre sí.

3. Se supone que existe un número finito de números primos. Se denotan entonces $\{p_1, \dots, p_N\}$. Tomemos entonces $N+1$ números de la familia F_i, por ejemplo $\{F_1, \dots, F_{N+1}\}$. Cada F_i, $i = 1, \dots, N+1$ es divisible por (al menos) un factor primo p_j, $j = 1, \dots, N$. Se tienen $N+1$ números F_i y solamente N factores primos p_j. Entonces por el principio de los cajones existen dos números distintos F_k y $F_{k'}$ (con $1 \leqslant k, k' \leqslant N+1$) que tienen un factor primo en común. En consecuencia F_k y $F_{k'}$ no son primos entre sí. Lo cual contradice la cuestión anterior. Así existe una infinidad de números primos.

Solución del ejercicio 436 ▲000348

1. X es no vacío porque, por ejemplo para $k = 2$, $4k+3 = 11$ es primo.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si se denota el entero $k' = 4k\ell + k + \ell$, entonces $(4k+1)(4\ell+1) = 4k' + 1$, que es de la forma deseada.
3. Se observa que 2 es el único número primo par, los otros son de la forma $4k+1$ o $4k+3$. Aquí a no es divisible por 2, se supone –por reducción al absurdo– que a no tiene divisor de la forma $4k+3$, entonces todos los divisores de a son de la forma $4k+1$. Es decir que a se escribe como producto de números de la forma $4k+1$, y por la pregunta anterior a puede ser escrito $a = 4k' + 1$. Entonces $a \equiv 1 \pmod 4$. Pero como $a = 4p_1 p_2 \cdots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Se obtiene una contradicción. Entonces a admite un divisor primo p de la forma $p = 4\ell + 3$.
4. En el conjunto $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ están todos los números primos de la forma $4k+3$. El número p es primo y se escribe $p = 4\ell + 3$, por lo tanto p es un elemento de X, entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p = p_i$. Razonando módulo $p = p_i$: $a \equiv 0 \pmod p$, pues p divide a a. Por otra parte $a = 4p_1 \cdots p_n - 1$, por lo tanto $a \equiv -1 \pmod p$, (pues p_i divide $p_1 \dots p_n$). Se obtiene una contradicción, por lo tanto X es infinito : existen infinitos números primos de la forma $4k+3$.

Nota pequeña, no todos los números de la forma $4k+3$ son números primos, por ejemplo para $k=3$, $4k+3=15$ no es primo.

Solución del ejercicio 437 ▲000349

1. Se supone que a^n+1 es primo. Demostrar la contrapositiva. Se supone que n no es de la forma 2^k, es decir que $n=p\times q$, con p un número primo >2 y $q\in\mathbb{N}$. Se utiliza la fórmula
$$x^p+1=(x+1)(1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{p-1})$$
con $x=a^q$:
$$a^n+1=a^{pq}+1=(a^q)^p+1=(a^q+1)(1-a^q+(a^q)^2+\cdots+(a^q)^{p-1}).$$
Entonces a^q+1 divide a^n+1 y como $1<a^q+1<a^n+1$, entonces a^n+1 no es primo. Por contraposición si a^n+1 es primero, entonces $n=2^k$.
2. Esta conjetura es falsa, ¡pero no es fácil de verificar sin una buena calculadora! De hecho para $n=5$ se obtiene :
$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417.$$

Solución del ejercicio 440 ▲003130

a,b,c 2 a 2 primos entre sí.

Solución del ejercicio 441 ▲003131

Descomponer en factores primos.

Solución del ejercicio 444 ▲003134

Recurrencia.

Solución del ejercicio 445 ▲003135

Se supone a,r números enteros mayores o iguales que 2. $a-1\mid a^r-1$, por lo tanto $a=2$. Si $r=pq$, entonces $2^p-1\mid 2^r-1$, por lo tanto r es primo. El recíproco es falso, $2^{11}-1=23\times 89$.

Solución del ejercicio 446 ▲003136

1.
2. $M_{11}=23\times 89$.
3.
4.

Solución del ejercicio 450 ▲003140

1. $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.
2.
3.
4.

Solución del ejercicio 452 ▲003142

498.

Solución del ejercicio 453 ▲003143

$H_n \Rightarrow H_{2n} \Rightarrow H_{2n+1}$.

Solución del ejercicio 458 ▲000001

Se observa primero que para $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ es un número real, de manera que al multiplicar el denominador por su conjugado se tiene un número real.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculemos

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

y

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i.$$

Entonces

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

Sea $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculemos $z+\bar{z}$, Se sabe que es un número real, más precisamente : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ y entonces $z+\bar{z} = -3$.

Solución del ejercicio 460 ▲000003

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$.
2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Nos queda por explicar cómo calcular $\cos\frac{\pi}{8}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$: se escribe $\theta = \frac{\pi}{8}$, entonces $2\theta = \frac{\pi}{4}$ y entonces $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}(2\theta)$. Pero $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Entonces $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Y entonces $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Como $0 \leqslant \theta = \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son números positivos. Entonces

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Solución del ejercicio 464 ▲000007

$9-7i$; $\quad -6i$; $\quad -0{,}3+1{,}1i$; $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Solución del ejercicio 465 ▲000008

$\rho=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $\theta=\frac{3\pi}{8}$; $\quad \rho=4$, $\theta=-\frac{\pi}{10}$; $\quad \rho=1$, $\theta=2\varphi+\pi$.

Solución del ejercicio 467 ▲000010

Se trata solo de aplicar la fórmula de De Moivre :

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta;$$

así como fórmulas en productos de potencia :

$$\mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i(a+b)} \text{ y } \mathrm{e}^{ia}/\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i(a-b)}.$$

Solución del ejercicio 468 ▲000011

Se tiene

$$u=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

luego

$$v=1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Solo queda calcular el cociente :

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Solución del ejercicio 470 ▲000013

De acuerdo con la fórmula de De Moivre para $\mathrm{e}^{i\alpha}$ se tiene :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\alpha}}=\mathrm{e}^{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}=\mathrm{e}^{\cos\alpha}\mathrm{e}^{i\operatorname{sen}\alpha}.$$

Por lo tanto $\mathrm{e}^{\cos\alpha}>0$, por lo tanto la escritura precedente es de la forma “módulo-argumento”.

De manera general para calcular una suma del tipo $\mathrm{e}^{iu}+\mathrm{e}^{iv}$ a menudo es útil factorizar por $\mathrm{e}^{i\frac{u+v}{2}}$. En efecto,

$$\mathrm{e}^{iu}+\mathrm{e}^{iv}=\mathrm{e}^{i\frac{u+v}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{u-v}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{u-v}{2}}\right)=\mathrm{e}^{i\frac{u+v}{2}}2\cos\frac{u-v}{2}=2\cos\frac{u-v}{2}\mathrm{e}^{i\frac{u+v}{2}},$$

que es próximo a escritura en coordenadas polares.
Para el caso que nos concierne :

$$z=\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{2i\theta}=\mathrm{e}^{\frac{3i\theta}{2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}\right]=2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Cuidado el módulo en una descomposición en forma polar debe ser positivo ! Si $\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$, entonces $2\cos\frac{\theta}{2}$ es el módulo de z y $3\theta/2$ es su argumento ; por otro lado si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ el módulo es $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ y el argumento $3\theta/2+\pi$ (el $+\pi$ compensa el cambio de signo porque $e^{i\pi} = -1$).

Solución del ejercicio 471 ▲000014

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2} = i.$$

Se denota $1 = i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = i^{32}$.

Solución del ejercicio 477 ▲000020

Se escribe $z = \rho e^{i\theta}$, entonces $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$ y

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k+\bar{z}^k\right) = \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k+(e^{-i\theta})^k\right) = \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}2\rho^k\cos k\theta = 2^n\cdot\rho\cdot\rho^2\cdots\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta = 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 478 ▲000021

Sea $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ y z el número complejo $z = e^{i\alpha}+e^{i\beta}$. Sea $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Entonces, $\alpha = u+v$ y $\beta = u-v$ y :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{iu+iv}+e^{iu-iv} = e^{iu}(e^{iv}+e^{-iv}) \\ &= 2\cos(v)e^{iu} = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Se deduce la forma trigonométrica de z :

$$|z| = 2|\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})| \quad \text{y, cuando } \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \neq 0 :$$

$$Arg(z) = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} > 0 \\ \pi+\frac{\alpha+\beta}{2}[2\pi] & \text{si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0. \end{cases}$$

(Cuidado, si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$, $z = 2\cos v e^{iu}$ no es la forma trigonométrica de z !).
Sea $n \in \mathbb{N}$. Calculemos z^n de dos maneras diferentes : por un lado

$$z^n = (e^{i\alpha}+e^{i\beta})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p e^{ip\alpha}e^{i(n-p)\beta},$$

y por otro lado, usando la fórmula obtenida arriba : $z^n = 2^n\cos^n v\, e^{inu}$. Comparando las partes reales de las expresiones obtenidas se tiene :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha+(n-p)\beta] = 2^n\cos^n\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(n\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

Solución del ejercicio 480 ▲000023

$$1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Como $\theta\in]-\pi,+\pi[$, entonces el módulo es $2\cos\frac{\theta}{2}\geqslant 0$ y el argumento es $\frac{\theta}{2}$. Geométricamente, se traza el círculo de centro 1 y de radio 1. El ángulo en 0 del triángulo $(0,1,1+e^{i\theta})$ es $\frac{\theta}{2}$ y así es el doble del ángulo en 0 del triángulo $(0,2,1+e^{i\theta})$ que vale θ. Esto es el resultado geométrico (teorema del ángulo central) que establece que para un círculo el ángulo central es el doble del ángulo inscrito.

Solución del ejercicio 484 ▲002924

1. $|u+v|+|u-v|\geqslant 2|u|$ y $|u+v|+|u-v|\geqslant 2|v|$. Hay igualdad si y solo si $u=\pm v$.
2. $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leqslant |z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$,
   $|z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leqslant |z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4|\leqslant |z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$.

Solución del ejercicio 485 ▲002927

$\overline{u}=-u$.

Solución del ejercicio 486 ▲005119

Primero se tiene $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Las raíces cuadradas de $1+i$ en $\mathbb{C}$ son, por lo tanto $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ y $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. Se tiene también, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=1\\x^2+y^2=\sqrt{2}\\xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\xy>0\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

las raíces cuadradas de $1+i$ son así también $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Porque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\frac{\pi}{8}>0$, se obtiene $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, o aún

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

y entonces, por identificación de partes reales e imaginarias,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \text{ y }\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Solución del ejercicio 487 ▲005127

Sean z un complejo no nulo, M el punto de afijo z y A el punto de afijo 1.

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow|z|=\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1,$$

y

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Así,

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ y } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ o } z = -j^2.$$

Solución del ejercicio 488 ▲005128

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Porque $1-ix \neq 0$, z está bien definida y $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|1+ix|} = 1$. En fin, $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$. Se ha demostrado que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Recíprocamente, sea $z \in U \setminus \{-1\}$. Existe un real $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tal que $z = e^{i\theta}$. Pero entonces,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1+i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1-i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}, \ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0, \ \text{pues } \ \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

y z es de la forma deseada con $x = \tan\frac{\theta}{2}$.

Solución del ejercicio 489 ▲005129

1. Sea $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ y } \text{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Entonces, $\frac{1+\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}$ existe para $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Para tal θ,

$$\frac{1+\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2} + 2i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} =$$

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\frac{\cos(\theta/2) - i\,\text{sen}(\theta/2)}{\text{sen}(\theta/2) + i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- 1er caso. $\text{cotan}\,\frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. En este caso, la forma trigonométrica de $\frac{1+\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta}$ es $\text{cotan}(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module$=\text{cotan}(\frac{\theta}{2})$ y argumento$= -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$).

$$\frac{1+\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} = \left[\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2do caso. $\text{cotan}\,\frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$. En este caso,

$$\frac{1+\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} = -\text{cotan}(\frac{\theta}{2}).e^{i\pi/2} = |\text{cotan}(\frac{\theta}{2})|e^{i\pi/2},$$

y por lo tanto,

$$\frac{1+\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \left[-\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right].$$

- 3er caso. $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. En este caso, se tiene $\frac{1+\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = 0$.

2. Para $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi+2k\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi+2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.

Si $\theta \in \pi+2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

Solución del ejercicio 490 ▲005130

$(1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512$.

> La forma algebraica de un complejo es particularmente adecuada para la suma.
> La forma trigonométrica de un complejo es particularmente adecuada para la multiplicación.

Solución del ejercicio 491 ▲007209

Sea $z \in \mathbb{C}$. Si $\bar{z} = 1 - z^2$, entonces al conjugar una segunda vez se tiene :

$$z = 1 - \bar{z}^2 = 1 - (1-z^2)^2 = 2z^2 - z^4.$$

Así z es una raíz del polinomio $X^4 - 2X^2 + X$. Este polinomio tiene dos raíces obvias : 0 y 1, y otras dos raíces $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Los dos últimos son los únicos que verifican la ecuación original.
Otro enfoque : se escribe la incógnita $z \in \mathbb{C}$ en forma cartesiana $z = a + ib$, con a y b reales. Se obtiene el sistema $\begin{cases} a^2 - b^2 + a = 1 \\ 2ab - b = 0. \end{cases}$
La segunda ecuación equivale a $b = 0$ o $a = \frac{1}{2}$. Si $b = 0$, la primera ecuación se convierte en $a^2 + a - 1 = 0$, cuyas soluciones (reales) son $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Si $a = \frac{1}{2}$, la primera ecuación se convierte en $b^2 = -\frac{1}{4}$, que no tiene soluciones reales.

Solución del ejercicio 492 ▲007210

Como z^2 debe ser real, se deduce que z es ya sea real, ya sea imaginario puro. En cada uno de estos dos casos, se obtiene una ecuación de incógnita real que involucra el valor absoluto. Separando según el signo de la incógnita, finalmente se obtienen cuatro casos que corresponden a cuatro trinomios reales.

Solución del ejercicio 497 ▲000027

Raíces cuadradas. Sea $z = a+ib$ un número complejo con $a,b \in \mathbb{R}$; se buscan complejos $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^2 = z$. Se escribe $\omega = \alpha + i\beta$ y se razona por equivalencia :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = a+ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a+ib. \end{aligned}$$

Ya sea identificando las partes reales entre ellas, así como las partes imaginarias :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sin cambiar la equivalencia añadimos la condición $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Por suma y diferencia de las dos primeras filas :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ es del mismo signo que } b \end{cases}$$

Esto da dos pares (α,β) de soluciones y por lo tanto, dos raíces cuadrado (opuestas) $\omega = \alpha + i\beta$ de z. En práctica se repite fácilmente este razonamiento, por ejemplo para $z = 8-6i$,

$$\omega^2 = z \Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = 8-6i \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = 8-6i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10 \text{ el módulo de } z \\ \alpha^2-\beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ y } \beta \text{ de signos opuestos} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \alpha = 3 \text{ y } \beta = -1 \\ \text{o} \\ \quad \alpha = -3 \text{ y } \beta = +1. \end{cases}$$

Las raíces de $z = 8-6i$ son, por lo tanto $\omega_1 = 3-i$ y $\omega_2 = -\omega_1 = -3+i$. Para las otras :

- Las raíces cuadradas de 1 son : $+1$ y -1.
- Las raíces cuadradas de i son : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Las raíces cuadradas de $3+4i$ son : $2+i$ y $-2-i$.
- Las raíces cuadradas de $7+24i$ son : $4+3i$ y $-4-3i$.

Solución del ejercicio 498 ▲000028

$2-i$ y $-2+i$; $\quad 5-i$ y $-5+i$.

Solución del ejercicio 499 ▲000029

Por el método usual calculamos las raíces cuadradas $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

que también se escribe :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Pero se observa que z se escribe igualmente como

$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

y $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$ verifica

$$\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{8}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Esto significa que $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$ es una raíz cuadrada de z, por lo tanto $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$ es igual a ω o $-\omega$. Como $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, entonces $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ y por lo tanto, por identificación de las partes real e imaginaria :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Solución del ejercicio 500 ▲000030

Sea $P(z) = az^2 + bz + c$, y $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geqslant 0$, entonces las raíces son reales, solo el caso en que $\Delta < 0$ interesa.
Primer método : es suficiente ver las dos soluciones y verificar que son conjugadas...
Segundo método : si z es una raíz de P *i.e.* $P(z) = 0$, entonces

$$P(\bar{z}) = a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Así $\bar{z}$ es también una raíz de P. Por lo tanto z no es un número real (pues $\Delta < 0$) y $\bar{z} \neq z$. Sabiendo que el polinomio P de grado 2 tiene exactamente 2 raíces, estas son z y $\bar{z}$ y son conjugadas.

Solución del ejercicio 501 ▲000031

Ecuaciones de segundo grado. El método general para resolver ecuaciones de segundo grado $az^2 + bz + c = 0$ (con $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$) es la siguiente : sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante complejo y δ una raíz cuadrada de Δ ($\delta^2 = \Delta$) entonces las soluciones son :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

En el caso donde los coeficientes sean reales, Se encuentra el conocido método. El único trabajo en el caso complejo es calcular una raíz δ de Δ. Ejemplo : para $z^2-\sqrt{3}z-i=0$, $\Delta=3+4i$, donde una raíz cuadrada es $\delta=2+i$, las soluciones son entonces :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{y} \quad z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Las soluciones de las otras ecuaciones son :

1. La ecuación $z^2+z+1=0$ tiene soluciones : $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.
2. La ecuación $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ tiene soluciones : $1+i$, i.
3. La ecuación $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ tiene soluciones : $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}-i)$
4. La ecuación $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$ tiene soluciones : $5-12i$, $-2i$.
5. La ecuación $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ tiene soluciones : $2+3i$, $1+i$.
6. La ecuación $4z^2-2z+1=0$ tiene soluciones : $\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})$.
7. La ecuación $z^4+10z^2+169=0$ tiene soluciones : $2+3i$, $-2-3i$, $2-3i$, $-2+3i$.
8. La ecuación $z^4+2z^2+4=0$ tiene soluciones : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

Solución del ejercicio 506 ▲000036

1. $\Delta=-2i$ cuyas raíces cuadradas son $1-i$ y $-1+i$, de donde las raíces $z_1=5-2i$ y $z_2=6-3i$.
2. Una raíz “obvia” $z_1=i$, por lo tanto, la resolución completa al dividir por $z-i$. Se encuentra $z_2=i$ y $z_3=-2i$.

Solución del ejercicio 509 ▲002945

Círculo circunscrito $\Rightarrow$ si y solo si $|z|=1$.

Solución del ejercicio 510 ▲002946

$z_1=-z_2=3-2i$, $z_3=-z_4=1-i$.

Solución del ejercicio 511 ▲002947

$z=1\pm 2i$, $z=-4\pm 2i$.

Solución del ejercicio 512 ▲002948

$m=2i$.

Solución del ejercicio 513 ▲002949

1.
2. $\alpha=0$ o $\beta=t\alpha^2$, $t\geqslant\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 514 ▲002950

1.
2. Elevar al cuadrado : $|\alpha|^2+|\beta|^2+2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2}=\underbrace{|m-\mu|^2+|m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2}+2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Solución del ejercicio 515 ▲005120

1. $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ o $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2$.
2. $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$. La ecuación por lo tanto tiene dos soluciones no reales y conjugadas, a saber $z_1=\frac{1}{2}(-1+i)$ y $z_2=\frac{1}{2}(-1-i)$.
3. Sea $\theta\in\mathbb{R}$. Para todo complejo z, se tiene
$$\begin{aligned} z^2-2z\cos\theta+1 &= (z-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta=(z-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta=(z-\cos\theta)^2-(i\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= (z-\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)(z-\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=(z-\mathrm{e}^{i\theta})(z-\mathrm{e}^{-i\theta}) \end{aligned}$$
La ecuación propuesta tiene por lo tanto dos soluciones (no necesariamente distintas) $z_1=\mathrm{e}^{i\theta}$ y $z_2=\mathrm{e}^{-i\theta}$. Además, $\Delta'=\cos^2\theta-1=-\operatorname{sen}^2\theta$ y estas soluciones son distintas si y solo si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.
4. Sea (E) la ecuación $z^2-(6+i)z+(11+3i)=0$. Su discriminante es $\Delta=(6+i)^2-4(11+13i)=-9-40i$. Como $40=2\times20=2\times(4\times5)$ y que $4^2-5^2=16-25=-9$, se puede adivinar que $\Delta=(4-5i)^2$. La ecuación (E) tiene dos soluciones distintas en $\mathbb{C}$ a saber $z_1=\frac{6+i+4-5i}{2}=5-2i$ y $z_2=\frac{6+i-4+5i}{2}=1+3i$.
5. Sea (E) la ecuación $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$. Su discriminante es $\Delta=(7+3i)^2-8(2+4i)=24+10i$. Como $10=2\times5=2\times(5\times1)$ y que $5^2-1^2=24$, se puede adivinar que $\Delta=(5+i)^2$. La ecuación propuesta tiene dos soluciones distintas en $\mathbb{C}$ a saber $z_1=\frac{7+3i+5+i}{4}=3+i$ y $z_2=\frac{7+3i-5-i}{4}=\frac{1}{2}(1+i)$.

Solución del ejercicio 516 ▲005125

El discriminante de la ecuación $Z^2-(5-14i)Z-2(5i+12)=0$ vale
$$\Delta=(5-14i)^2+8(5i+12)=-75-100i=25(-3-4i)=(5(1-2i))^2.$$
Esta ecuación admite por lo tanto las dos soluciones $Z_1=\frac{5-14i+5-10i}{2}=5-12i$ y $Z_2=\frac{5-14i-5+10i}{2}=-2i$. Luego,
$$\begin{aligned} z \text{ es solución de la ecuación propuesta} &\Leftrightarrow z^2=5-12i=(3-2i)^2 \text{ o } z^2=-2i=(1-i)^2 \\ &\Leftrightarrow z=3-2i \text{ o } z=-3+2i \text{ o } z=1-i \text{ o } z=-1+i. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 522 ▲000042

$\frac{1}{4}(-1+i)=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}=(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Las soluciones son los complejos $z_k=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{3}}$, para $0\leqslant k\leqslant2$. Y solo $z_0=\frac{1}{2}(1+i)$ tiene una cuarta potencia real.

Solución del ejercicio 523 ▲000043

1. Las tres raíces cúbicas tienen el mismo módulo $\sqrt{2}$, y sus argumentos son $-\pi/12$, $7\pi/12$ y $5\pi/4$. Los valores aproximados son $1{,}36603-0{,}36603i$, $-0{,}36603+1{,}36603i$ y $-1-i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ y $(-1-2i)j^2$, donde $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (raíz cúbica de 1).

Solución del ejercicio 524 ▲000044

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$. Las raíces de $z^{24}=1$ son dados por $z_k=\mathrm{e}^{2ki\pi/24}$, para $k=0,1,\ldots,23$. Así estas son 1, $\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$,... etc.

Solución del ejercicio 525 ▲000045

1. 3, $3i$, -3 y $-3i$.
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ y $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Solución del ejercicio 526 ▲000046

Para 2. Utilizar la fórmula de Euler para $\operatorname{sen}(x/2)$.
Para 3. Si $x\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

$$Z_n=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\exp\left(i\,(n-1)\,\frac{x}{2}\right),$$

y para $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $Z_n=n$. Se observa que $Z_n=X_n+iY_n$, para deducir que

$$X_n=\frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\quad\text{y}\quad Y_n=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Solución del ejercicio 527 ▲000047

$$S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n=\sum_{k=0}^{n}z^k.$$

Se debe encontrar el resultado de la suma $S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$de una sucesión geométrica en el caso en que $z\neq 1$ es un real. Sea ahora $z\neq 1$ un número complejo. Calculemos $S_n(1-z)$.

$$\begin{aligned}S_n(1-z)&=(1+z+z^2+\cdots+z^n)(1-z)\ \text{desarrollar}\\&=1+z+z^2+\cdots+z^n-z-z^2-\cdots-z^{n+1}\ \text{los términos intermedios se anulan entre sí}\\&=1-z^{n+1}.\end{aligned}$$

Entonces

$$S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},\ \text{para } z\neq 1.$$

Solución del ejercicio 528 ▲000048

Cálculo de la raíz n-ésima. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = 1$, $|z|^n = 1$ y entonces $|z| = 1$. Escribir $z = e^{i\theta}$. La ecuación se convierte

$$e^{en\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Las soluciones son, por lo tanto

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como el polinomio $z^n - 1$ es de grado n tiene como máximo n raíces. Se eligen por representantes :

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Además, si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, entonces $\mathscr{S} = \left\{ \varepsilon^k,\ k = 0, \dots, n-1 \right\}$. Las raíces son los vértices de un polígono regular en n lados inscritos en el círculo unitario.

Sea $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$, para $z \neq 1$. Así cualquiera que sea $z \in \mathscr{S} \setminus \{1\}$, $P(z) = 0$, así se han encontrado $n-1$ raíces para P de grado $n-1$, entonces el conjunto de raíces de P es exactamente $\mathscr{S} \setminus \{1\}$. Para concluir sea $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.

Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$, entonces $\varepsilon^{kp} = \varepsilon^{k\ell n} = (\varepsilon^n)^{k\ell} = 1^{k\ell} = 1$, entonces $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

Si no $Q_p(z)$ es la suma de una sucesión geométrica de razón ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Solución del ejercicio 536 ▲000056

Sean z_1, z_2, z_3 tres números complejos *distintos* estando en el mismo cubo.

1. $z_1 \neq 0$ porque si no se tiene $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Así $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Como los tres números $1, (\frac{z_2}{z_1})$ y $(\frac{z_3}{z_1})$ son distintos, se deduce que son las tres raíces cúbicas de 1. Estas raíces son $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ y $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Salvo una permutación de los índices 2 y 3 se tiene :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{y} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$
2. Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene las equivalencias siguientes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ es solución de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Estudiar la ecuación $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i = (9+i)^2$. Las soluciones son, por lo tanto -8 y $1+i$. Se puede retomar la sucesión de equivalencias :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{o} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ o } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$

El conjunto de soluciones es, por lo tanto :

$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Solución del ejercicio 540 ▲002939

1. $z = -i\cotan\frac{k\pi}{n}$.
2. $6 \mid n \Rightarrow z = j$ o j^2. Si no, no hay solución.
3. $z = \exp\frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0,1,3,4$.
4. $z = -1$ o $z = \exp\frac{2ik\pi}{n}$, $1 \leqslant k < n$.
5. $x = \tan\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)$.
6.
7. $z = \pm i,\ \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Solución del ejercicio 541 ▲002940

1. Desarrollar. $S = 2n$.
2. $\frac{1-(1+\omega)^n}{1-\omega-\omega^2} = \frac{1+(2\cos(\pi/n))^n}{1-\omega-\omega^2}$.

Solución del ejercicio 542 ▲002941

1. $\sum = n$ si $p \not\equiv 0 \pmod{n}$, 0 si no.
2. $a_k = \sum_{x\in\mathbb{U}_n} \frac{P(x)}{nx^k}$

Solución del ejercicio 543 ▲002942

n impar $\Rightarrow |Z|^2 = n$, n par $\Rightarrow |Z|^2 = n(1+(-1)^{n/2})$.

Solución del ejercicio 544 ▲002943

1. $u+v = -1$, $u^2 = u+2v = -2-u$.
2. $\Sigma = \mathrm{Im}(u) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solución del ejercicio 545 ▲002944

$x = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$.

Solución del ejercicio 546 ▲005122

Sea $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha} = e^{2i\alpha}$. Entonces,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z = \omega_k - 1.$$

Ahora, para $k \in \{-1,0,1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

que se excluye para $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}} \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{i(e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})})} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{2i\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}{i(2\cos(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}))} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \tan(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 547 ▲005126

Se pone, para n natural no nulo, $P = (X^2+1)^n - (X-1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}
P &= X^{2n} + (\text{términos de grado} \leqslant 2n-2) - X^{2n} + 2nX^{2n-1} + (\text{términos de grado } \leqslant 2n-2) \\
&= 2nX^{2n-1} + (\text{términos de grado} \leqslant 2n-2).
\end{aligned}$$

Entonces $\mathrm{gr}(P) = 2n-1$ y P admite en $\mathbb{C}$, $2n-1$ raíces, distintas o coincidentes.

$$\begin{aligned}
(z^2+1)^n = (z-1)^{2n} &\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\}/\ z^2+1 = \omega_k(z-1)^2 \text{ donde } \omega_k = e^{2ik\pi/n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\}/\ (1-\omega_k)z^2 + 2\omega_k z + (1-\omega_k) = 0.
\end{aligned}$$

Si $k=0$, la ecuación anterior se escribe $2z=0$ o aún $z=0$. Si k es elemento de $[\![1,n-1]\!]$, $\Delta'_k = \omega_k^2 - (1-\omega_k)^2 = 2\omega_k - 1 = 2e^{2ik\pi/n} - 1$. Sea d_k una raíz cuadrada en $\mathbb{C}$ de Δ'_k (difícil de explicitar parece). Se tiene $S = \{0\} \cup \left\{\frac{-e^{2ik\pi/n} \pm d_k}{1-e^{2ik\pi/n}}, k \in [\![1,n-1]\!]\right\}$.

Solución del ejercicio 548 ▲005131

$i = e^{i\pi/2}$ y las raíces cuartas de i son, por lo tanto los $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k \in \{0,1,2,3\}$. Luego, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2}{e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$. Las raíces sextas de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ son, por lo tanto los $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Solución del ejercicio 549 ▲005135

1. Sea $z \in \mathbb{C}$. Sean M, A y B los respectivos puntos de fijación z, 1 y -1.

$$z \text{ solución de } (E) \Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n$$
$$\Rightarrow |z-1| = |z+1| \Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$. $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n)$. Así,

$$z \text{ solución de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solución de } (E).$$

3. Sea $z \in \mathbb{C}$.

$$z \text{ solución de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1)$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{2i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}.$$

Solución del ejercicio 550 ▲005313

---

1. Sea $n \geqslant 2$. Se tiene

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i}(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}).$$

Ahora,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\cdots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2}(e^{i\pi/2})^{n-1} = i^{n-1},$$

y por lo tanto, $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Queda por calcular $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1a solución. Los $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, son las $n-1$ raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 y como $X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$, estos son entonces las $n-1$ raíces dos a dos distintas del polinomio $1 + X + \cdots + X^{n-1}$. Así, $1 + X + \cdots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{-2ik\pi/n})$, y, en particular $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.

2a solución. Para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, se escribe $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Los z_k son dos a dos distintas y raíces del polinomio $P = (1-X)^n - 1 = -X + \cdots + (-1)^n X^n = X(-n + X - \cdots + (-1)^n X^{n-1})$. Ahora, $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \leqslant k \in n\mathbb{Z}$ (que no es para $1 \leqslant k \leqslant n-1$).

Entonces, los z_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, son $n-1$ raíces dos a dos distintas del polinomio de grado $n-1 : -n + X - \cdots + (-1)^n X^{n-1}$.

Estas son, pues todas las raíces de este polinomio o aún

$$-n + X - \cdots + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k).$$

En particular, igualando los coeficientes constantes,

$$(-1)^n\cdot(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}z_k=-n,$$

y por lo tanto, todavía una vez $\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-e^{-2ik\pi/n})=n$.
Finalmente,

$$\forall n\geqslant 2,\ \prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

2. Sea n un entero natural no nulo.

$$b_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}+e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})})=\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}\prod_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}+1).$$

Luego,

$$\prod_{k=1}^{n}e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}=e^{-ina}e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+\cdots+n)}=e^{-ina}e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

Por otra parte, sea $P=\prod\limits_{k=1}^{n}(X+e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})})=\prod\limits_{k=1}^{n}(X-(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$.
Para todo k, se tiene $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}})^n=(-1)^ne^{2ina}$. Así, los n números dos a dos distintos $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n}}$, $1\leqslant k\leqslant n$ son raíces del polinomio $X^n-(-1)^ne^{2ina}$, de grado n.
Se deduce que, $P=X^n-(-1)^ne^{2ina}$.
Así, $\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}+1)=P(1)=1-(-1)^ne^{2ina}=1-e^{2ina+n\pi}$, luego

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{2^n}e^{-ina}e^{-i(n+1)\pi/2}(1-e^{2ina+n\pi})=\frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}-e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})})\\&=\frac{1}{2^n}(e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}+e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})})=\frac{\cos(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

3. c_n es definido $\Leftrightarrow\forall k\in\{1,\ldots,n\},\ a+\dfrac{k\pi}{n}\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\forall k\in\mathbb{N},\ a-\dfrac{k\pi}{n}+\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\notin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
Para los a tales que c_n es definido, se tiene $c_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{e^{2i(a+k\pi/n)}-1}{e^{2i(a+k\pi/n)}+1}$.
Para $1\leqslant k\leqslant n$, se escribe $\omega_k=e^{2i(a+k\pi/n)}$, luego $z_k=\dfrac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$. Se tiene entonces $c_n=\frac{1}{i^n}\prod\limits_{k=1}^{n}z_k$. Porque $z_k=\dfrac{\omega_k-1}{\omega_k+1}$, se tiene $\omega_k(1-z_k)=1+z_k$ y entonces, para $1\leqslant k\leqslant n$, $\omega_k^n(1-z_k)^n=(1+z_k)^n$ o aún, los z_k son raíces del polinomio $P=(1+X)^n-e^{2ina}(1-X)^n$.
Ahora, los $a+\frac{k\pi}{n}$ están en $[a,a+\pi[$ y por lo tanto, dos a dos distintos ya que la función tangente es inyectiva en todo intervalo de esta forma.

1er caso. Si $e^{2ina}\neq(-1)^n$, entonces P es de grado n y $P=(1-(-1)^ne^{2ina})\prod\limits_{k=1}^{n}(X-z_k)$. Evaluando en 0, se obtiene

$$(1-(-1)^ne^{2ina})\prod_{k=1}^{n}(-z_k)=1-e^{2ina}.$$

De donde,

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1-\mathrm{e}^{2ina}}{(-1)^n - \mathrm{e}^{2ina}} = \frac{1-\mathrm{e}^{2ina}}{\mathrm{e}^{en\pi} - \mathrm{e}^{2ina}} = \frac{\mathrm{e}^{ina}}{\mathrm{e}^{en\pi/2}\mathrm{e}^{ina}} \frac{-2i\operatorname{sen}(na)}{-2i\operatorname{sen} n(a-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n} \frac{\operatorname{sen}(na)}{\operatorname{sen} n(a-\frac{\pi}{2})}.$$

Finalmente, $c_n = (-1)^n \dfrac{\operatorname{sen}(na)}{\operatorname{sen}(n(a-\dfrac{\pi}{2}))}$.

Si n es par, se escribe $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. $c_n = c_{2p} = \dfrac{\operatorname{sen}(2pa)}{\operatorname{sen}(2pa - p\pi)} = (-1)^p$.

Si n es impar, se escribe $n = 2p+1$. $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p+1)a)$.

2o caso. Si $\mathrm{e}^{2ina} = (-1)^n$, entonces $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ o aún $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. En este caso, c_n no está definido.

Solución del ejercicio 552 ▲000060

Se identifica $\mathbb{C}$ en el plano afín y $z = x+iy$ a $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Se observa que para los dos conjuntos $z = 5$ no es solución, por lo tanto

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Lo que significa precisamente que los puntos de afijo z están situados a igual distancia de los puntos A,B de afijos respectivos $3 = (3,0)$ y $5 = (5,0)$. El conjunto solución es la bisectriz del segmento $[A,B]$. entonces

para

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 7 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}$$

El conjunto solución es, por lo tanto el círculo de centro, el punto de afijo $1 = (1,0)$ y de radio $2\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 557 ▲000065

Expresando que un número complejo de módulo 1 puede ser escrito $\mathrm{e}^{i\theta}$, se encuentra $z = \frac{a-b\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}$. Todavía se escribe $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, donde A y B son independientes de θ, lo que demuestra que el punto de afijo z recorre una recta. Geométricamente, esta recta es por supuesto la bisectriz perpendicular del segmento que une los puntos de afijos a y b.

Solución del ejercicio 558 ▲000066

Método similar al del ejercicio 557. Se encuentra $z = \frac{a-bk\mathrm{e}^{i\theta}}{1-k\mathrm{e}^{i\theta}}$. Se puede comprobar que el punto de afijo z recorre el círculo cuyo diámetro une los puntos correspondientes a $\theta = 0$ y a $\theta = \pi$ (verificar buscando el punto medio z_0 de este segmento y estudiando $|z-z_0|$).

Solución del ejercicio 559 ▲000067

1. Recíproco : $a + jb + j^2c = 0$ o $a + j^2b + jc = 0$ (esto depende de la orientación del triángulo).
2. $ADOE$ es un paralelogramo. Los tres triángulos OBC, DBA y EAC son directamente isométricos, que, por cierto, se verifica inmediatamente, con la ayuda de rotaciones.

Solución del ejercicio 561 ▲000069

$$|u+v|^2+|u-v|^2=(u+v)(\bar u+\bar v)+(u-v)(\bar u-\bar v)=2u\bar u+2v\bar v=2|u|^2+2|v|^2.$$

Geométricamente, se trata de la identidad del paralelogramo. Fijar puntos $0,u,v,u+v$ forman un paralelogramo. $|u|$ y $|v|$ son las longitudes de los lados, y $|u+v|,|u-v|$ son las longitudes de las diagonales. ¡No es fácil demostrar esto sin los números complejos !

Solución del ejercicio 569 ▲000077

1. Como $(A_0,\dots,A_4)$ es un pentágono regular, se tiene $OA_0=OA_1=OA_2=OA_3=OA_4=1$ y además $(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_1})=\frac{2\pi}{5}[2\pi],(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_2})=\frac{4\pi}{5}[2\pi],(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_3})=-\frac{4\pi}{5}[2\pi],(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OA_4})=-\frac{2\pi}{5}[2\pi]$.
   Se deduce que : $\omega_0=1,\omega_1=e^{\frac{2i\pi}{5}},\omega_2=e^{\frac{4i\pi}{5}},\omega_3=e^{-\frac{4i\pi}{5}}=e^{\frac{6i\pi}{5}},\omega_4=e^{-\frac{2i\pi}{5}}=e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
   Se tiene bien $\omega_i=\omega_1^i$. En fin, como $\omega_1\neq 0$, $1+\omega_1+\cdots+\omega_1^4=\frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1}=\frac{1-1}{1-\omega_1}=0$.
2. $\mathrm{Re}(1+\omega_1+\cdots+\omega_1^4)=1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Como $\cos(\frac{4\pi}{5})=2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$ se deduce que : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})-1=0$.
   $\cos(\frac{2\pi}{5})$ es, por lo tanto una solución de la ecuación $4z^2+2z-1=0$.
   Estudiar esta ecuación : $\Delta=20=2^2\cdot 5$. Las soluciones son, por lo tanto $\frac{-1-\sqrt5}{4}$ y $\frac{-1+\sqrt5}{4}$. Como $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$, se deduce que $\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt5-1}{4}$.
3. $BA_2^2=|\omega_2+1|^2=|\cos(\frac{4\pi}{5})+i\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{5})+1|^2=1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\mathrm{sen}^2(\frac{4\pi}{5})=4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$.
   Entonces $BA_2=\frac{\sqrt5-1}{2}$.
4. $BI=|i/2+1|=\frac{\sqrt5}{2}$. $BJ=BI-1/2=\frac{\sqrt5-1}{2}$.
5. Para trazar un pentágono regular, se comienza dibujando un círculo C_1 y dos diámetros ortogonales, que juegan el papel del círculo que pasa por los vértices y de los ejes de coordenadas.
   Se dibuja luego el punto medio de uno de los radios : se obtiene el punto I de la pregunta 4. Se traza el círculo de centro B pasando por el centro de C_1 : es el círculo $\mathscr{C}$. Se traza el segmento BI, para obtener su punto J de intersección con $\mathscr{C}$.
   Finalmente, se dibuja el círculo de centro B que pasa por J : interseca C_1 en A_2 y A_3, dos vértices del pentágono. Para obtener todos los vértices, basta con transferir la distancia A_2A_3 a C_1, una vez desde A_2, una vez desde A_3. (De hecho el círculo de centro B y que pasa por a través de J', el punto de $\mathscr{C}$ diametralmente opuesto a J, interseca a C_1 en A_1 y A_4, pero se ha justificado mediante el cálculo : ¡es un ejercicio !)

Solución del ejercicio 570 ▲002925

1.
2. si $|a|\neq|b|$: una solución única,
   si $|a|=|b|$: una recta o $\varnothing$.

Solución del ejercicio 571 ▲002926

1.

2. $\mathbb{U}\setminus\{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Solución del ejercicio 573 ▲002929

Las diagonales se bisecan, tienen la misma longitud, y son perpendiculares $\Rightarrow$ cuadrado.

Solución del ejercicio 574 ▲002930

1. $z\in\mathbb{R}$ o $z\in-\frac{1}{2}+i\mathbb{R}$.
2. $z\in-1+i\mathbb{R}$ o $z\in i\mathbb{R}$ o $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
3. $z\in i\mathbb{R}$ o $|z-i|=\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 575 ▲002931

$(0,a,a+b,a+b+c=1)$ forma un diamante por lo que uno de los números es 1 y los otros dos son opuestos $\Rightarrow\{a,b,c\}=\{1,i,-i\}$.

Solución del ejercicio 577 ▲002933

$z=x+iy\Rightarrow$ círculos $(\pm i,\sqrt{2})$ (laborioso).

Solución del ejercicio 578 ▲002934

Se puede expresar que (AB) es la mediatriz del segmento $[MM']$, pero se elige aquí usar el curso sobre similitudes. Se busca así escribir la reflexión del eje (AB) en coordenadas complejas.
Esta reflexión se escribe $z\mapsto\alpha\bar{z}+\beta$, con $|\alpha|=1$ y $arg(\alpha)=2arg(b-a)$.
Se obtiene por lo tanto $\alpha=\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$.
Para determinar β, se puede expresar el hecho de que a es fijo : $a=\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\bar{a}+\beta\Leftrightarrow\beta=\dfrac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$.
Finalmente, la reflexión se escribe : $z\mapsto\dfrac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\cdot z+\dfrac{a\bar{b}-b\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$.

Solución del ejercicio 579 ▲002935

$d=$ ortocentro de abc.

Solución del ejercicio 581 ▲002937

$$\omega=\frac{a(c\bar{c}-b\bar{b})+b(a\bar{a}-c\bar{c})+c(b\bar{b}-a\bar{a})}{a(\bar{c}-\bar{b})+b(\bar{a}-\bar{c})+c(\bar{b}-\bar{a})}.$$

Solución del ejercicio 582 ▲002938

1. $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\exists\ \alpha\in\mathbb{R}$ tal que $u=\alpha v$.
   $x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{|v|^2}\Leftrightarrow u=\frac{1}{\bar{v}}$.
2.
3. Solo faltan los dos polos.

Solución del ejercicio 583 ▲005121

1. Se tiene $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ y $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 y z^4 son las cinco raíces quintas de 1 en $\mathbb{C}$. Así, $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. Pero entonces $a+b = z+z^2+z^3+z^4 = -1$ y

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (pues } z^5 = 1).$$

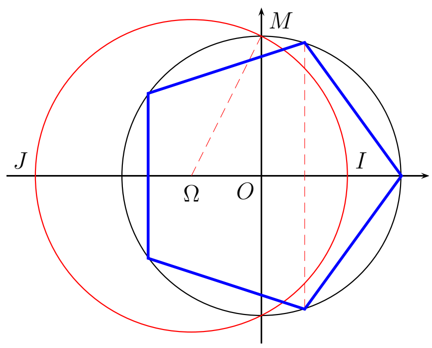
a y b son, por lo tanto las soluciones de la ecuación $X^2+X-1 = 0$ cuyas raíces son $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. En fin, ya que $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, se tiene $a > 0$. Así, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ y $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Por otra parte, $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ y entonces,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

Igualmente, reemplazando $\sqrt{5}$ por $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. En fin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

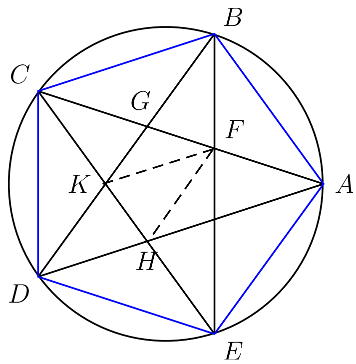
2. El radio del círculo máximo es, de acuerdo con teorema de PITÁGORAS :



$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Así, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ y $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Esto demuestra que las mediatrices de los segmentos $[O,I]$ y $[O,J]$ cortan el círculo de centro O y de radio 1 en cuatro de los cinco vértices del pentágono.

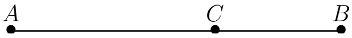
3. Se define $x = \frac{AF}{AC}$. Por el teorema de TALES (se deben verificar los paralelismos),



$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Entonces $x^2-3x+1 = 0$ y desde $x < 1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Luego $\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x}-2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}-2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}-2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Definición del *número áureo*.



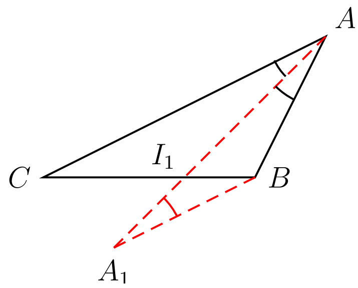
Se quiere que C divida el segmento $[A,B]$ de tal manera que $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{pequeño}}{\text{medio}}=\frac{\text{medio}}{\text{grande}}$ ») es decir, poniendo $a=AB$ y $x=AC$, $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$ o aún $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{x}{a}-1=0$ y entonces, ya que $\frac{x}{a}>0$, $\frac{x}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{La proporción áurea (o proporción dorada) es el número } \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}618...}$$

También se puede tomar como proporción áurea el cociente $\frac{a}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618...$

Solución del ejercicio 584 ▲005123

1. Se denota I_1 el punto de intersección de la bisectriz (Δ_1) de ángulo $\widehat{BAC}$ y de la recta (BC). La paralela a (AC) pasando por B corta Δ_1 (ya que (AC) no es paralela a (Δ_1)) en un punto A_1. Ángulos alternos internos $\widehat{CAA_1}$ y $\widehat{AA_1B}$, entonces son iguales. Ya que por otra parte, $\widehat{CAA_1}=\widehat{A_1AB}$, se deduce que $\widehat{AA_1B}=\widehat{A_1AB}$ y así que el triángulo (ABA_1) es isósceles en B. Por el teorema de TALES, se tiene entonces



$$\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{A_1B}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},$$

y por lo tanto, porque I_1 está entre B y C, $b\overrightarrow{I_1B}+c\overrightarrow{I_1C}=\overrightarrow{0}$, o finalmente $I_1=\text{bar}\{B(b),C(c)\}$. Por supuesto, también se tienen las otras dos igualdades $I_2=\text{bar}\{A(a),C(c)\}$ y $I_3=\text{bar}\{A(a),B(b)\}$, donde I_2 y I_3 son los puntos de intersección de las otras dos bisectrices con (AC) y (AB) respectivamente. Sea entonces $I'=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$. Por el teorema del baricentro parcial, se tiene

$$I'=\text{bar}\{A(a),I_1(b+c)\}=\text{bar}\{B(b),I_2(a+c)\}=\text{bar}\{C(c),I_3(a+b)\},$$

lo que demuestra que I' está sobre (AI_1), (BI_2) y (CI_3), es decir sobre las tres bisectrices. Así, $I'=I$.

2. Sea $z\in\mathbb{C}$.

$$z,\ z^2\ \text{ y }\ z^3 \text{ no son dos a dos distintos} \Leftrightarrow z^2=z \text{ o } z^3=z \text{ o } z^3=z^2 \Leftrightarrow z\in\{-1,0,1\}.$$

luego, para $z\notin\{-1,0,1\}$,

$$z,\ z^2\ \text{ y }\ z^3 \text{ están alineados} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ z^3-z=\lambda(z^2-z)\Leftrightarrow \frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z+1\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

Finalmente, (z,z^2,z^3) es un « verdadero » triángulo si y solo si z no es real. Sea entonces z un complejo no real.

$$\begin{aligned}
O \text{ centro del círculo inscrito en el triángulo } (PQR) &\Leftrightarrow O=\text{bar}\{P(QR),Q(PR),R(PQ)\}\\
&\Leftrightarrow z|z^2-z^3|+z^2|z-z^3|+z^3|z-z^2|=0\\
&\Leftrightarrow z\cdot|z|\cdot|1-z|(|z|+z|1+z|+z^2)=0\\
&\Leftrightarrow |z|+z|1+z|+z^2=0\ \ (E)\ (\text{ pues } z\notin\mathbb{R})
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}|z|+z|1+z|+z^2=0 &\Leftrightarrow (z+\frac{|z|}{z})+|1+z|=0 \Rightarrow z+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z+\frac{|z|}{z}=\bar{z}+\frac{|z|}{\bar{z}}\\ &\Leftrightarrow z-\bar{z}-|z|\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-\frac{1}{|z|})=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}=0 \text{ (pues } z\neq\bar{z})\\ &\Leftrightarrow |z|=1.\end{aligned}$$

Se define así $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, donde $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$. Reportando en (E), se obtiene

$$\begin{aligned}z \text{ solución de } (E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}+|1+\mathrm{e}^{i\theta}|=0 \Leftrightarrow 2\cos\theta+|\mathrm{e}^{i\theta/2}|\cdot|2\cos\frac{\theta}{2}|=0\\ &\Leftrightarrow \cos\theta+|\cos\frac{\theta}{2}|=0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2+|\cos\frac{\theta}{2}|-1=0\\ &\Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ es solución de la ecuación } 2X^2+X-1=0\\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta\in\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z\in\{j,j^2\}.\end{aligned}$$

Las soluciones complejas son, por lo tanto j y j^2.

Solución del ejercicio 585 ▲005124

$$\begin{aligned}(A,B,C) \text{ equilátero} &\Leftrightarrow C=r_{A,\pi/3}(B) \text{ o } C=r_{A,-\pi/3}(B) \Leftrightarrow c-a=(-j^2)(b-a) \text{ o } c-a=(-j)(b-a)\\ &\Leftrightarrow (-1-j^2)a+j^2b+c=0 \text{ o } (-1-j)a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ o } j^2a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow (j^2)^2a+j^2b+c=0 \text{ o } j^2a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow j \text{ o } j^2 \text{ son soluciones de la ecuación } az^2+bz+c=0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(A,B,C) \text{ equilátero} &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ o } j^2a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}(A,B,C) \text{ equilátero} &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\\ &\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0\\ &\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0\\ &\Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 586 ▲005133

A- Soluciones algebraicas.] Para $z \in \mathbb{C}$, se escribe $z = x + iy$, donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $|Z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$ y $(x,y) \neq (1,0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   El conjunto buscado es la recta (Oy).
2. $|Z| = 2 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 4((1-x)^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$ y $(x,y) \neq (1,0)$
   $$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \text{ y } (x,y) \neq (1,0)$$
   $$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9} \text{ y } (x,y) \neq (1,0)$$
   $$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}.$$
   El conjunto buscado es el círculo de centro $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ y de radio $\frac{4}{3}$.
3. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} = \dfrac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$
   $$\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \text{ y } z \neq 1 \Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \text{ y } z \neq 1$$
   $$\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ y } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ y } z \neq 1.$$
   El conjunto buscado es la recta (Ox) privado del punto $(1,0)$.
4. $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} = -\dfrac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z})$ y $z \neq 1$
   $$\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + \bar{z} \text{ y } z \neq 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ y } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ y } z \neq 1.$$
   El conjunto buscado es, por lo tanto el círculo de centro O y de radio 1 privado del punto $(1,0)$.

B- Soluciones geométricos. Sean A y B los respectivos puntos de fijación -1 y 1 y $\mathscr{E}$ el conjunto buscado. Sea M un punto del plano distinto de B de afijo z.

1. $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy)$.
2. Sea $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$. Se tiene $x_\Omega = \frac{-1}{5}(x_A - 4x_B) = \frac{5}{3}$ y $y_\Omega = \frac{-1}{5}(y_A - 4y_B) = 0$.
   $$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - 4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 - 4(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2 + 2(\overrightarrow{A\Omega} - 4\overrightarrow{B\Omega}) \cdot \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}^2 - 4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) \end{aligned}$$
   Por tanto, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3} + 1)^2 = \frac{64}{9}$ y $\Omega B^2 = (\frac{5}{3} - 1)^2 = \frac{4}{9}$. Así,
   $$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$
   Así,
   $$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$
   y se reencuentra el círculo de centro $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ y de radio $\frac{4}{3}$.

3. $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow z = -1$ o $\arg\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow M = A$ o $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi)$

   $\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}$,

   y se encuentra la recta (Ox) privada del punto $(1,0)$.

4. $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow z = -1$ o $\arg\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M = A$ o $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$

   $\Leftrightarrow M$ está en el círculo de diámetro $[AB]$ privado de B,

   y se encuentra el círculo de centro O y de radio 1 privado del punto $(1,0)$.

Solución del ejercicio 587 ▲005134

Sea f la transformación considerada.

1. f es la traslación de vector $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f es la homotecia de la razón 2 y de centro $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Como $i = e^{i\pi/2}$, f es la rotación del ángulo $\frac{\pi}{2}$ y de centro $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Como $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f es la similitud de centro $\Omega(1,-2)$, de cociente $\sqrt{2}$ y de ángulo $-\frac{\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 588 ▲007004

1. La igualdad $p = \frac{a-ib}{1-i}$ es equivalente a otras dos afirmaciones con un significado geométrico más claro. Por una parte :

$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow p = \frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$$

   (Cuidado, a y b son complejos : esta no es una forma algebraica.) Por otra parte,

$$p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow (1-i)p = a - ib.$$

   Esto proporciona dos formas de probar el resultado solicitado.

   (a) En el primer caso, se reconoce que $(a+b)/2$ es el afijo del medio M de A y B, que $(a-b)/2$ es el afijo del vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, y que $i(a-b)/2$ corresponde a la rotación de $\pi/2$ de este vector. Entonces se ve que el punto de afijo $\frac{a+b}{2} + i\frac{(a-b)}{2}$ es el punto obtenido al trasladar M del vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ (con la notación A' introducido anteriormente). Este punto es de hecho el medio P del cuadrado.

   (b) En el segundo caso, se reescribe la igualdad en la forma

$$a - p = i(b - p).$$

   Esto es verdadero, pues significa que A es la imagen de B por la rotación de centro P es de ángulo $\pi/2$, lo que es cierto en un cuadrado.

2. Se trata de demostrar que $\frac{s-q}{r-p} = i$. Se calcula así $\frac{s-q}{r-p}$ usando la pregunta anterior :

$$\frac{s-q}{r-p} = \frac{d - ia - (b - ic)}{(c - id) - (a - ib)} = \frac{d - b + i(c-a)}{c - a + i(b-d)}$$

   Ahí, se ve directamente que el numerador es igual a i veces el denominador y listo (se ve tanto más fácilmente si se sabe que es lo que se debe demostrar : si no, es necesario un paso adicional de simplificación).

3. Considerar por ejemplo las rotaciones de centros P, Q, R o S y de ángulo $\pi/2$.

Observación : existe una versión un poco más general del teorema para un cuadrilátero $ABCD$ cualquiera.

Solución del ejercicio 589 ▲007005

1. En cada cuadrado, los vértices se obtienen entre sí por rotaciones de $\pi/2$, con respecto a los centros. Se tiene entonces $a-p=i(b-p)$, $b-q=i(c-q)$ y $c-r=i(a-r)$. Desarrollando estas expresiones se tiene $p=\frac{a-ib}{1-i}$, $q=\frac{b-ic}{1-i}$ y $r=\frac{c-ia}{1-i}$.
2. El centro de gravedad de ABC es el isobaricentro, entonces su afijo es $\frac{1}{3}(a+b+c)$. El de PQR tiene un afijo $\frac{1}{3}(p+q+r)$. Por lo tanto, se trata simplemente de demostrar que $a+b+c=p+q+r$. Pero de acuerdo a la pregunta anterior, $p+q+r=\frac{a-ib+b-ic+c-ia}{1-i}=a+b+c$, lo que faltaba demostrar.
3. Se quiere demostrar que el argumento de $\frac{q-a}{r-p}$ es $\pm\pi/2$. Para esto, es suficiente calcular :
$$\frac{q-a}{r-p}=\frac{b-a+i(a-c)}{c-a+i(b-a)}=-i.$$
Se observa que no solamente los segmentos son perpendiculares, si no que son del mismo largo (lo que no se pide). La pregunta anterior muestra que la recta (AQ) es la altura de PQR saliendo de Q. El mismo razonamiento aplicado a los otros dos cuadrados muestra que (AQ), (BR) y (CP) son las alturas de PQR. Son, por lo tanto, concurrentes.

Solución del ejercicio 590 ▲007006

Por construcción, A es la imagen de B por la rotación de centro W y de ángulo $2\pi/3$. Usando $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, se tiene por lo tanto
$$a-w=j(b-w),$$
dicho de otro modo
$$w=\frac{a-jb}{1-j}.$$
Se obtiene igualmente $u=\frac{b-jc}{1-j}$ y $v=\frac{c-ja}{1-j}$.
Se deduce en primer lugar que
$$u+v+w=\frac{1}{1-j}(a-jb+b-jc+c-ja)=a+b+c.$$
Así, $\frac{1}{3}(u+v+w)=\frac{1}{3}(a+b+c)$, es decir que los triángulos ABC y UVW tienen el mismo centro de gravedad. Luego, por la caracterización de triángulos equiláteros, UVW es equilátero directo si y solo si $u+jv+j^2w=0$. Por tanto :
$$u+jv+j^2w=\frac{1}{1-j}\big(b-jc+j(c-ja)+j^2(c-ja)\big)=0.$$
Por lo tanto UVW es equilátero directo.

Solución del ejercicio 591 ▲007007

---

1. Desarrollar y luego refactorizar $y(z-x)+z(x-y)=x(z-y)$. Se deduce el resultado, por desigualdad triangular.
2. Si dos de los puntos son iguales, entonces el miembro derecho tiene un solo término y la desigualdad es una igualdad, y tres puntos no alineados son siempre cocíclicos.
3. Se tiene $(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)=ad-cd-ab+cb=(a-c)(d-b)$. Por la desigualdad triangular, se tiene por lo tanto $|(a-c)(d-b)| \leqslant |(b-a)(d-c)|+|(d-a)(c-b)|$, es decir $AC\cdot BD \leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$.
4. Recordar el caso de igualdad de la desigualdad triangular : si z y z' son complejos no nulos, entonces $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$, con igualdad si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, : z'=\lambda z$. Aquí, entonces se tiene igualdad si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $(b-a)(d-c)=\lambda(d-a)(c-b)$, en otras palabras si y solo si $[a,b,c,d] \in \mathbb{R}_+$, lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 594 ▲007010

Si $\theta \equiv 0[\pi]$, es la recta (AB). Si no, es un círculo del cual $[AB]$ es una cuerda, por el teorema del ángulo inscrito. Si $\theta \equiv \pi/2[\pi]$, es el círculo de diámetro $[AB]$. Si no, por el teorema del ángulo central, el centro de este círculo tiene el afijo $\frac{a+b}{2} \pm i\frac{b-a}{2\tan\theta}$, según si θ es agudo u obtuso.

Solución del ejercicio 595 ▲007145

1. Es una similitud directa de razón $|1+i|=\sqrt{2}$, de ángulo $-\pi/4$. Su centro Ω es su (único) punto fijo, su afijo ω verifica así $\omega=(1-i)\omega+i$, es decir $\omega=\frac{i}{i}=1$.
2. Es una similitud indirecta de razón $|i|=1$, por lo tanto un anti-desplazamiento. Así es una reflexión o una reflexión de deslizado. Busquemos posibles puntos fijos. Un punto $z=x+iy$ es fijo si y solo si $x+iy=i(x-iy)+1-i=y+1+i(x-1)$ en otras palabras si y solo si $x-y=1$. (Redacción alternativa de la búsqueda de puntos fijos, sin tomar la parte real e imaginaria : un punto de afijo z es fijo si y solo si :
$$\begin{aligned} z=i\bar{z}+1-i &\Leftrightarrow z-i\bar{z}-1+i=0 \\ &\Leftrightarrow \overline{(1-i)}z+(1-i)\bar{z}-2=0. \end{aligned}$$
Se reconoce la ecuación compleja de la misma recta.)
El anti-desplazamiento es, por lo tanto la reflexión de eje de ecuación $x-y-1=0$.
3. Es una similitud indirecta (se denota s) de cociente 2. Admite, pues un punto fijo de afijo ω verificando $\omega=2i\bar{\omega}+3$, que da luego del cálculo $\omega=-1-2i$.
Sea h la homotecia de centro Ω y de cociente 2. Entonces la similitud s se escribe $h\circ\sigma$, con σ una reflexión que se puede obtener como $h^{-1}\circ s$. En coordenadas complejas, h^{-1} se escribe $z\mapsto \frac{1}{2}(z+1+2i)-1-2i=\frac{1}{2}z-\frac{1+2i}{2}$. Componiendo, se encuentra que σ es representada por
$$z\mapsto \frac{1}{2}(2i\bar{z}+3)-\frac{1+2i}{2}=i\bar{z}+1-i.$$
Según la pregunta precedente, es la reflexión del eje $y=x-1$.
4. Es la reflexión deslizada compuesta por la traslación de afijo 1 y de la reflexión a lo largo del eje de abscisas.

Solución del ejercicio 596 ▲007146

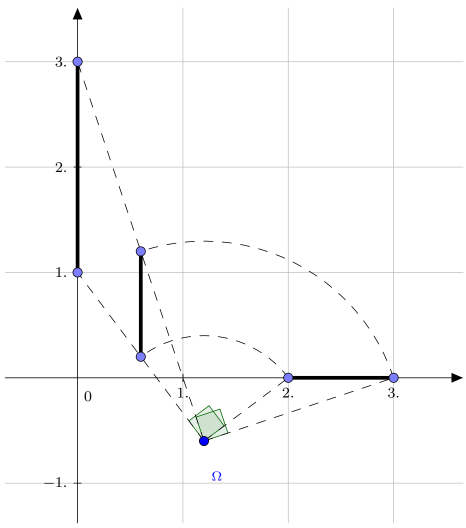
1. Por el curso, la rotación de ángulo θ y de centro de afijo ω es representada por la aplicación
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, : z \mapsto e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.$$
La rotación de ángulo $\pi/4$ y de centro de afijo $2+3i$ por lo tanto, está representado por la aplicación
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, : z \mapsto e^{i\pi/4}(z-(2+3i))+2+3i = e^{i\pi/4}z+\frac{4+\sqrt{2}+i(6-5\sqrt{2})}{2}.$$

2. La reflexión de eje de ecuación $y=2x+1$ es representada por una aplicación de la forma
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a\bar{z}+b,$$
donde $a \in \mathbb{C}^*$ y $b \in \mathbb{C}$ son parámetros a determinar. Se sabe que a es el número complejo de módulo uno cuyo argumento es el doble del ángulo entre el eje de abscisas y el eje de reflexión. Entonces en este caso, $a = e^{2i\arctan(2)}$. También podemos calcular la forma algebraica de a escribir $a = \frac{(1+2i)^2}{|(1+2i)^2|} = \frac{-3+4i}{5}$.
Calculemos b. Se puede, por ejemplo, inyectar un afijo particular z y su imagen z' en la ecuación $z' = \frac{-3+4i}{5}\bar{z}+b$ y obtener b. El más simple es tomar el afijo de un punto en el eje de la reflexión, que es, por lo tanto un punto fijo de la reflexión. Se toma por ejemplo $z=i=z'$. Se obtiene la igualdad $i = \frac{3-4i}{5}i+b$, de donde $b = i\left(1-\frac{3-4i}{5}\right) = i\frac{2+4i}{5} = \frac{-4+2i}{5}$. Finalmente, la reflexión de eje de ecuación $y=2x+1$ es representada por la aplicación :
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{(-3+4i)\bar{z}-4+2i}{5}.$$

Solución del ejercicio 597 ▲007147

Claramente el cociente es 2 porque el segmento dado se envía en un segmento el doble de largo.

1. Si la similitud es directa, su ángulo es $\pi/2$, entonces la similitud se escribe $z \mapsto 2iz+b$ en coordenadas complejas. Como $s(2)=i$, se deduce que $4i+b=i$, es decir $b=-3i$. El punto fijo entonces tiene el afijo $\frac{b}{1-2i} = \frac{-3i}{1-2i} = \frac{6-3i}{5}$.



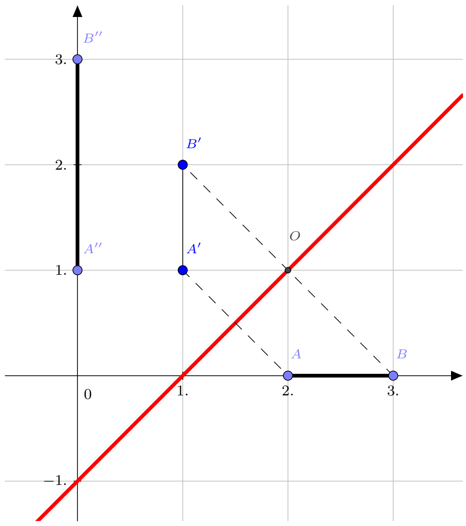
2. La similitud indirecta se obtiene al componer la similitud directa anterior por la simetría del eje que pasa por i y $3i$, es decir el eje de ordenadas. Esta simetría se escribe $z \mapsto -\bar{z}$. Se deduce que la similitud indirecta que envía los puntos de afijos 2 y 3 a los de afijos i y $3i$ se escribe

$$z \mapsto -\overline{(2iz-3i)} = 2i\bar{z} - 3i.$$

(Alternativamente, y sin usar la pregunta anterior, se sabe por el enunciado que la similitud indirecta debe escribirse $z \mapsto 2i\bar{z}+b$, y como $s(2)=i$, se deduce $i=4i+b$, de donde $b=-3i$.)

Esta similitud tiene un único punto fijo de afijo ω, solución de la ecuación $\omega = 2i\bar{\omega}-3i$.

Se observa que ω es, por lo tanto también el único punto fijo de $s \circ s$, que da la ecuación $\omega = 2i\overline{(2i\bar{\omega}-3i)}-3i = 4\omega - 6 - 3i$, de donde $\omega = 2+i$. Finalmente, como se sabe que el eje está dirigido por el vector afijo $1+i$ y que este eje pasa por el centro de similitud, este eje es la recta de ecuación $y = x-1$



Solución del ejercicio 598 ▲007148

La similitud es :

— una traslación si y solo si $a^2=1$, es decir si y solo si $a \in \{-1,1\}$.

— una homotecia de razón -4 si y solo si $a^2=-4$, es decir si y solo si $a \in \{2i,-2i\}$.

— una rotación de ángulo $\pi/2$ si y solo si $a^2 = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, es decir si y solo si $a \in \{\mathrm{e}^{i\pi/4}, \mathrm{e}^{-3i\pi/4}\}$.

Solución del ejercicio 599 ▲007149

1. Hay exactamente dos similitudes enviando el par (A,B) en el par (B,C) : una directa y otra indirecta, y una se deduce de la otra componiendo (a la izquierda) por la reflexión de eje (BC).
   Según el enunciado, el triángulo ABC es un rectángulo isósceles en A. Se tiene entonces $BC = \sqrt{2}AB$ y s es de razón $\sqrt{2}$. Además, una similitud preserva los ángulos no orientados, se tiene

$$(AB)\perp(AC) \Rightarrow (s(A)s(B))\perp(s(A)s(C)),$$

   es decir que $s(C)$ pertenece a la perpendicular a $(s(A)s(B)) = (BC)$ pasando por $s(A)=B$. Como, por otro lado, se sabe que $Cs(C) = \sqrt{2}BC$, esto da dos posibilidades, dependiendo de que la similitud es directa o indirecta.

2. Si la similitud es directa, su ángulo es $3\pi/4$ ya que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = 3\pi/4$.
   Se fija ahora un sistema de referencia ortonormado directo del plano cuyo el origen es A. Se denota a, b y c los afijos de los tres puntos y por lo tanto, se tiene $a = 0$ y $c = ib$ de acuerdo al enunciado.
   Sea $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tal que s se escribe $z \mapsto \alpha z+\beta$ en coordenadas complejas. Por lo anterior, se tiene $\alpha = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1+i$. Por otra parte, como A es enviado a B, se tiene $b = \beta$.
   La similitud se escribe así $z \mapsto (i-1)z+b$. Su único punto fijo Ω tiene un afijo
$$\omega = \frac{b}{1-(i-1)} = \frac{b}{2-i} = \frac{2b+ib}{5} = \frac{2b+c}{5}.$$
   Se puede reformular esto en la forma $\omega = \frac{2}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}c$, lo que demuestra que Ω es el baricentro de $(A,2/5)$, $(B,2/5)$ y $(C,1/5)$.
3. Se fija ahora un sistema de referencia ortonormada directa del plano cuyo origen es A, y tal que B está en el eje de abscisas (entonces su afijo es real). Sea $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tal que s se escribe $z \mapsto \alpha\bar{z}+\beta$ en coordenadas complejas. Se tiene $s(0) = b$, por lo tanto $\beta = b$, y $s(b) = c = ib$, por lo tanto $\alpha\bar{b}+b = ib$, lo que da $\alpha = i-1$. Por lo tanto, la transformación se escribe en este sistema de referencia
$$z \mapsto (i-1)\bar{z}+b,$$
   y c es enviado a $(i+2)b$.
   Encontrar un punto fijo ω, para s : si $s(\omega) = \omega$, entonces en particular $s(s(\omega)) = \omega$, que se escribe $(i-1)\overline{(i-1)\bar{z}+b}+b = \omega$, dicho de otro modo $2\omega+ib = \omega$ y finalmente $\omega = -ib$. Recíprocamente, se verifica que el punto de fijación $-ib$ es bien fijo bajo S. Como se puede escribir $\omega = -ib = -c = 2\cdot a-c$, se deduce que Ω es el baricentro de $(A,2)$ y $(C,-1)$.
   Encontrar ahora el eje de similitud indirecto. Es una recta que pasa por el centro de similitud y según la escritura de similitud, es dirigida por un vector de afijo $e^{3i\pi/8}$. Un parametraje en coordenada compleja de esta recta es, por lo tanto :
$$\Delta = \{-c+t\cdot e^{3i\pi/8} | t \in \mathbb{R}\}.$$

Solución del ejercicio 600 ▲007150

Sea $z \mapsto \alpha z+\beta$ la representación compleja de una similitud directa. En coordenadas cartesianas, se escribe $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\alpha) & -\mathrm{Im}(\alpha)\\ \mathrm{Im}(\alpha) & \mathrm{Re}(\alpha)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\beta)\\ \mathrm{Im}(\beta)\end{pmatrix}$. Se deduce que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}ax+cy+e\\ bx+dy+f\end{pmatrix}$ representa una similitud directa si y solo si :
$$c = -b \text{ y } a = d.$$
Recíprocamente, toda transformación $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}ax-by+e\\ bx+ay+f\end{pmatrix}$ puede ser escrita $z \mapsto (a+ib)z+e+if$ y corresponde por lo tanto a una similitud directa. Para las similitudes indirectas, se encuentra la condición
$$c = b \text{ y } a = -d.$$
La aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que representa ϕ es $z = x+iy \mapsto (-2x-y-1)+i(x-2y+1) = -2x-y+i(x-2y)-1+i = (-2+i)z-1+i$. Es una similitud directa de razón $\sqrt{5}$, de ángulo $arg(-2+i)$ y de centro de afijo $\frac{-1+i}{3-i}$.
La segunda es la composición de una reflexión a lo largo de una recta vectorial y de una homotecia de razón 2 y de centro O.

Solución del ejercicio 601 ▲007151

1. La aplicación s es una similitud directa, de razón $2/3$, de ángulo $arg(i) = \pi/2$, y de centro de afijo $\dfrac{\frac{1-5i}{3}}{1-\frac{2}{3i}} = \dfrac{13-13i}{13} = 1-i = z_A$.

2. (a) Se tiene $AB_{n+1} = s(A)s(B_n) = \frac{2}{3}AB_n$.

   (b) Según la pregunta anterior, la sucesión real AB_n es geométrica de razón $2/3$ y de término inicial AB, por lo tanto :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ AB_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB.$$
Sea ahora $n \in \mathbb{N}$. El punto B_n pertenece al disco central A y de radio 10^{-2} si y solo si $AB_n \leqslant 10^{-2}$. Por tanto, se tiene
$$\begin{aligned} AB_n \leqslant 10^{-2} &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n AB \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(AB) \leqslant -\ln(100) \\ &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -\ln(AB) - \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(AB)+\ln(100)}{\ln(3)-\ln(2)}. \end{aligned}$$
Se deduce que el entero más pequeño N tal que $\forall n \geqslant n, AB_n \leqslant 10^{-2}$ es $\left\lceil \frac{\ln(AB)+\ln(100)}{\ln(3)-\ln(2)} \right\rceil$ (parte entera superior del real). Como $AB = 15/2$, se puede calcular explícitamente n usando una calculadora y se encuentra $N = 17$, pero no se ha pedido.

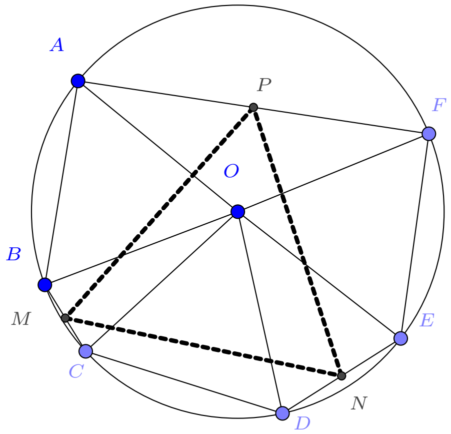
   (c) Para todo n, los puntos A, B y B_n son distintos. Están alineados si y solo si
$$2 \cdot arg\left(\frac{b_n - a}{b-a}\right) = 0 (\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$
Por lo tanto se tiene :
$$\begin{aligned} b_{n+1} - a &= s(b_n) - s(a) \\ &= \frac{2}{3}ib_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i - \left(\frac{2}{3}ia + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right) \\ &= \frac{2}{3}i(b_n - a). \end{aligned}$$
La sucesión compleja $(b_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ es, por lo tanto una sucesión geométrica de razón $\frac{2}{3}i$, y así para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$b_n - a = \left(\frac{2}{3}i\right)^n \cdot (b-a).$$
Se deduce que en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, se tiene :
$$2 \cdot arg\left[\frac{b_n - a}{b-a}\right] = 2 \cdot arg\left[\left(\frac{2}{3}i\right)^n\right] = 2n \cdot arg\left(\frac{2}{3}i\right) = 2n \cdot \frac{\pi}{2} = n\pi,$$
y así que A, B y B_n están alineados si y solo si $n\pi \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow n \equiv 0[2]$, en otras palabras si y solo si n es par.

Solución del **ejercicio 602** ▲007163

1. El triángulo ABC es equilátero directo si y solo si C es la imagen de B por la rotación de centro A y de ángulo $\pi/3$. Esto es equivalente a $c-a = e^{i\pi/3}(b-a) = -j^2(b-a)$. Por tanto, se tiene :

$$\begin{aligned} c-a = -j^2(b-a) &\Leftrightarrow c - a(1+j^2) + bj^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow aj + bj^2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0. \end{aligned}$$

2. Se fija un sistema de referencia ortonormado directo de centro O.



Según el enunciado, se tiene $b = -j^2 a$, $d = -j^2 c$ y $f = -j^2 e$. Se deduce :

$$\begin{aligned} m + jn + j^2 p &= \frac{b + c + j(d+e) + j^2(f+a)}{2} \\ &= \frac{-j^2 a + c + j(-j^2 c + e) + j^2(-j^2 e + a)}{2} \\ &= \frac{a(j^2 - j^2) + c(1-j^3) + e(j - j^4)}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo a la primera pregunta, MNP es equilátero directo.

Solución del **ejercicio 603** ▲007164

Sea O el centro de gravedad de ABC. Se escoge un sistema de referencia de centro O tal que el afijo a de A sea real. Se tiene entonces $b = ja$ y $c = j^2 a$.

1. Se tiene la igualdad de ángulos de rectas $(OA, BA) = -\pi/6$ (ángulo inscrito o cálculo en coordenadas). Se deduce que la reflexión de eje (AB) se escribe $z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$, con $\alpha = e^{-\pi/3} = -j$. Luego, la imagen del origen O por la reflexión σ_{AB} es el punto de afijo $-j^2 a$. Finalmente, frente al sistema de referencia elegido, la reflexión σ_{AB} es representada en coordenadas complejas por :

$$z \mapsto -j\bar{z} - j^2.$$

2. Se calcula de la misma manera las siguientes reflexiones (BC) y (CA) se escriben $z \mapsto -\bar{z}-1$ y $z \mapsto -j^2\bar{z}-j$. Sea m el afijo de M. De acuerdo con lo anterior, sus imágenes por las tres reflexiones son :
$$a' = -\bar{m}-1, \quad b' = -j^2\bar{m}-j, \quad c' = -j\bar{m}-j^2.$$
La relación $1+j+j^2=0$ da entonces $\frac{1}{3}(a'+b'+c')=0$, lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 604 ▲007166

1. El punto E es la imagen de A por la composición de las cuatro simetrías centrales de centro $M_1,\ldots,M_4$. Demostrar que esta composición es la identidad. Por el curso, la composición de estas cuatro rotaciones es una traslación. Entonces es suficiente probar un punto particular para verificar que es la identidad. Si $A = M_1$ por ejemplo, se ve que $A = E$ usando el teorema de Tales.
2. Se tiene $2z = (z+z')+(z-z')$, de donde por la desigualdad triangular $2|z| \leqslant |z+z'|+|z-z'|$.
3. Se tiene $a = m_1-m_2+t$, $b = m_1+m_2-t$, $c = -m_1+m_2+t$ y $d = -m_1-m_2-t$.
El perímetro de $ABCD$ es
$$\begin{aligned} p &= |b-a|+|c-b|+|d-c|+|a-d| \\ &= |2m_2-2t|+|-2m_1+2t|+|-2m_2-2t|+|2m_1+2t| \\ &= 2\left(|m_1+t|+|m_1-t|+|m_2+t|+|m_2-t|\right). \end{aligned}$$
4. El cuadrilátero AM_1OM_4 es un paralelogramo directo si y solo si $a = m_1-m_2$, es decir si y solo si $t=0$. Se trata de demostrar que el perímetro calculado arriba es mínimo cuando $t=0$. De acuerdo a la pregunta 3, se tiene
$$|m_1-t|+|m_1+t| \geqslant 2|m_1| \text{ y } |m_2-t|+|m_2+t| \geqslant 2|m_2|,$$
lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 607 ▲000080

Se tiene por la fórmula de Moivre
$$\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta = \mathrm{e}^{i5\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^5.$$
Se desarrolla este último producto, luego se identifican las partes reales y las partes imaginarias. Se obtiene :
$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta \\ \operatorname{sen} 5\theta &= 5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta. \end{aligned}$$
Observación : Gracias a la fórmula $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$, se puede continuar con los cálculos y expresar $\cos 5\theta$ en función de $\cos\theta$, y $\operatorname{sen} 5\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$.

Solución del ejercicio 616 ▲000089

1. $\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$ si y solo si $x = \pi/6+k\pi/2$ o $x = \pi/18+k\pi/3$, con $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ si y solo si $x = 5\pi/14+6k\pi/7$ o $x = \pi/2+6k\pi/5$, con $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\cos(3x) = \operatorname{sen}(x)$ si y solo si $x = \pi/8 + k\pi/2$ o $x = -\pi/4 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 617 ▲000090

La ecuación $\sqrt{3}\cos(x) - \operatorname{sen}(x) = m$ tiene solución si y solo si $m \in [-2,2]$ y para $m = \sqrt{2}$, las soluciones son $x = \pi/12 + 2k\pi$ o $x = -5\pi/12 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 618 ▲000091

$\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos x$ si y solo si $2\cos(4x)\cos(x) \leqslant \cos x$ y $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$ si y solo si $\cos x > 1/2$ si y solo si $x \in]-\pi/6 + 2k\pi, \pi/6 + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 619 ▲000092

1. $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \operatorname{sen}(3x)$ si y solo si $x = \pi/2 + 2k\pi$ o $x = -\pi/10 + 2k\pi/5$, con $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x) - \operatorname{sen}^4(x) = 1$ si y solo si $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 620 ▲002951

1. $\dfrac{2^n + 2\cos(n\pi/3)}{3}$.
2. $2^n\cos(n\pi/3)$.
3. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2}$.
4. $\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \operatorname{sen}\dfrac{(n+2)\theta}{2}$.
5. $\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 621 ▲002952

1. $\dfrac{n\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{n\theta}{2}}{2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}}$ si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.
2. $\dfrac{3\operatorname{sen}(n\theta/2)\operatorname{sen}\big((n+1)\theta/2\big)}{4\operatorname{sen}(\theta/2)} - \dfrac{\operatorname{sen}(3n\theta/2)\operatorname{sen}\big(3(n+1)\theta/2\big)}{4\operatorname{sen}(3\theta/2)}$.

Solución del ejercicio 622 ▲002953

$x \equiv -y \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Solución del ejercicio 623 ▲002954

1. $= 3/2$.
2. $32\cos^6(\theta) = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10 \Rightarrow \Sigma = \frac{15}{8}$.
3. $\Sigma_p = \dfrac{pC_{2p}^p}{2^{2p-1}}$.

Solución del ejercicio 624 ▲002955

$x \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{n}}$, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Solución del ejercicio 625 ▲002956

$\frac{1}{2}\left((x+\mathrm{e}^{i\alpha})^n + (x+\mathrm{e}^{-i\alpha})^n\right) = 0 \Leftrightarrow x = \operatorname{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$.

Solución del ejercicio 626 ▲002957

$$S = \frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}} + \frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}} + \cdots + \frac{u-u^{-1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}}.$$
$$\frac{u-u^{-1}}{u^2-u^{-2}} + \frac{u-u^{-1}}{u^4-u^{-4}} = \frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}}.$$
$$\frac{u^3-u^{-3}}{u^4-u^{-4}} + \frac{u-u^{-1}}{u^8-u^{-8}} = \frac{u^7-u^{-7}}{u^8-u^{-8}} = \cdots$$
$$\Rightarrow S = \frac{u^{2^n-1}-u^{-2^n+1}}{u^{2^n}-u^{-2^n}} = \frac{\operatorname{sen}\big((2^n-1)\theta\big)}{\operatorname{sen}(2^n\theta)}.$$

Solución del ejercicio 627 ▲002958

$\tan(nx) = \dfrac{C_n^1 \tan x - C_n^3 \tan^3 x + \cdots}{C_n^0 - C_n^2 \tan^2 x + \cdots}$.

Solución del ejercicio 628 ▲002959

$z = \mathrm{e}^{i\theta} \Rightarrow a = \tan\dfrac{\theta}{2}$, para $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Solución del ejercicio 629 ▲005063

1. $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
2. $\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
3. $\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
4. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
5. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
6. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
7. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
8. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Solución del ejercicio 630 ▲005064

1. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Solución del ejercicio 631 ▲005065

---

1. $\operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
2. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. Además, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ o $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\operatorname{sen}(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\operatorname{sen}(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
10. $\operatorname{sen} x = \tan x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ o $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
11. $\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} /\ 2x = x + \pi + 2k\pi)$ o $(\exists k \in \mathbb{Z} /\ 2x = -x + 2k\pi)$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} /\ x = \pi + 2k\pi) \text{ o } (\exists k \in \mathbb{Z} /\ x = \frac{2k\pi}{3}).$$
Además, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.
12. $12\cos^2 x - 8\operatorname{sen}^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $\cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Solución del ejercicio 632 ▲005066

---

1. Para $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

2. Para $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$.

3. Para $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos x > \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{x}{2}+1)(\cos\frac{x}{2}-1) > 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}+1 < 0 \text{ y } \cos\frac{x}{2} \neq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ y } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[\text{ y } x \notin 4\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3}+4k\pi, \frac{8\pi}{3}+4k\pi\right[\text{ y } x \notin 4\pi\, zz \Leftrightarrow x \in]\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$$

4. Para $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.

5. Para $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

6. Para $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos\frac{x}{3} \leqslant \operatorname{sen}\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leqslant \frac{x}{3}-\frac{\pi}{4} \leqslant \pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4}+6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4}+6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Solución del ejercicio 633 ▲005067

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, y desde $\cos\frac{\pi}{8} > 0$,

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}$$

Igualmente, ya que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} > 0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)}$ y

$$\boxed{\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Solución del ejercicio 634 ▲005068

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Igualmente,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ y } \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Solución del ejercicio 635 ▲005069

Para n natural no nulo, se establece $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)}$. • $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$ • Sea $n \geqslant 1$. Se supone que $S_n = 2^n \cos a_1 \cdots \cos a_n$, entonces

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)} \\ &= 2\cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \cdots \cos a_{n+1}. \end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = 2^n \cos a_1 \cdots \cos a_n$. Luego, para $n \geqslant 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n) = \mathrm{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \cdots \cos a_n$ (y también se obtiene $\sum \operatorname{sen}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n) = \mathrm{Im}(S_n) = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum \cos(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cdots \cos a_n.}$$

Solución del ejercicio 636 ▲005070

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Porque a está en $]0,\pi[$, entonces, para todo entero natural no nulo k, $\frac{a}{2^k}$ está en $]0,\pi[$ y entonces $\operatorname{sen}\frac{a}{2^k} \neq 0$. Además, ya que $\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, se tiene :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\operatorname{sen} a}{2^n \operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}.$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\operatorname{sen} a}{2^n \operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}.}$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) > 0$, pues $\frac{a}{2^k}$ está en $]0, \frac{\pi}{2}[$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} a}{2^n \operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Ahora, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln(\frac{\operatorname{sen} a}{a}) - \ln(\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right).$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right).}$$

Solución del ejercicio 637 ▲005071

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\operatorname{sen}^2 x-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{1-4\cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4\cos^2 x} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4\cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4\cos^2 x} + 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} = 2 \text{ o } 2^{4\cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \text{ o } 4\cos^2 x = 3 \\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ o } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ o } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ o } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio 638 ▲005072

1. En primer lugar, según la fórmula de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta) = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta),$$

y por identificación de las partes real e imaginaria,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \ \text{ y } \ \operatorname{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.}$$

entonces, $\tan(3\theta)$ y $\tan\theta$ existen $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ y $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Sea por lo tanto $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\operatorname{sen}(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta},$$

luego de dividir el numerador y el denominador por el real no nulo $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}.}$$

2. Sea $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1er método.** a es por supuesto raíz de la ecuación propuesta, lo que permite escribir :

$$
\begin{aligned}
\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \\
&\qquad \left(\text{pues } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ no son solución de la ecuación}\right) \\
&\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0.
\end{aligned}
$$

El discriminante reducido del trinomio $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$ vale :

$$\Delta' = 16a^2 - (3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 3a^4 + 6a^2 + 3 = (\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

La ecuación propuesta a así tres raíces reales :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{a, \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}, \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2o método. Existe un único real $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tal que $a=\tan\alpha$. Igualmente, si x es un real distinto de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, existe un único real $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$ tal que $x=\tan\theta$ (a saber $\alpha=\arctan a$ y $\theta=\arctan x$). Como $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ no son solución de la ecuación propuesta, se tiene :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2} \Leftrightarrow \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta)=\tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha+\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Esto proporciona las soluciones $x=\tan\alpha=a$, luego

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

y $x=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Solución del ejercicio 639 ▲005073

1. Para $x \notin \frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x)=\frac{\mathrm{Im}((e^{ix})^5)}{\mathrm{Re}((e^{ix})^5)}=\frac{5\cos^4 x\,\mathrm{sen}\,x-10\cos^2 x\,\mathrm{sen}^3 x+\mathrm{sen}^5 x}{\cos^5 x-10\cos^3 x\,\mathrm{sen}^2 x+5\cos x\,\mathrm{sen}^4 x}=\frac{5\tan x-10\tan^3 x+\tan^5 x}{1-10\tan^2 x+5\tan^4 x},$$

luego de dividir el numerador y el denominador por el real no nulo $\cos^5 x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x)=\frac{5\tan x-10\tan^3 x+\tan^5 x}{1-10\tan^2 x+5\tan^4 x}.}$$

2. $9°$, $-27°$, $-63°$ y $81°$ verifican $\tan(5\times 9°)=\tan(5\times(-27°))=\tan(5\times(-63°))=\tan(5\times 81°)=1$. Entonces se resuelve la ecuación :

$$\tan(5x)=1 \Leftrightarrow 5x \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Las soluciones, expresadas en grados y elementos de $]-90°,90°[$, son $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ y $81°$. Así, los cinco números $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ y $\tan(81°)$ son dos a dos distintas y soluciones de la ecuación $\frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4}=1$ que se escribe aún :

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=0.$$

El polinomio $X^5-5x^4-10X^3+10X^2+5X-1$ ya tiene $\tan(45°)=1$ por raíz y se tiene

$$X^5-5X^4-10X^3+10X^2+5X-1=(X-1)(X^4-4X^3-14X^2-4X+1).$$

Los cuatro números $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ y $\tan(81°)$ son pues las raíces del polinomio $X^4-4X^3-14X^2-4X+1$. Este último por lo tanto todavía se puede escribir $(X-\tan(9°))(X+\tan(27°))(X+\tan(63°))(X-\tan(81°))$. El opuesto del coeficiente de X^3 a saber 4 vales así igualmente $\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)$ y se ha demostrado que :

$$\boxed{\tan(9°)-\tan(27°)-\tan(63°)+\tan(81°)=4.}$$

Solución del ejercicio 640 ▲005074

Para $x \in [0,\pi]$, se escribe $f(x)=\tan x+\tan(2x)+\tan(3x)+\tan(4x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x)\ \text{ y }\ \tan(4x) \text{ existen}\\
&\Leftrightarrow (x\notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (2x\notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (3x\notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\ \text{ y }\ (4x\notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow (x\notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}),\ (x\notin \frac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}),\ (x\notin \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z})\ \text{ y }\ (x\notin \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow x\notin \left\{\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right\}.
\end{aligned}$$

f está definida y es continua en

$$\left[0,\frac{\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right].$$

En cada uno de los diez intervalos anteriores, f está definida, continua y estrictamente creciente en tanto que suma de funciones estrictamente crecientes. La restricción de f a cada uno de estos diez intervalos es biyectiva del intervalo considerado en el intervalo de la imagen, lo que ya demuestra que la ecuación propuesta, que se denota de ahora en adelante (E), tiene como máximo una solución por intervalo y, por lo tanto, como máximo diez soluciones en $[0,\pi]$. Sobre $I=\left[0,\frac{\pi}{8}\right[$ o $I=\left]\frac{7\pi}{8},\pi\right]$, ya que $f(0)=f(\pi)=0$, (E) tiene exactamente una solución en I. Luego, en la expresión de suma f, una y solo una de las cuatro funciones es un infinitamente grande en cada uno de los números considerados anteriormente, excepto $\frac{\pi}{2}$. En cada uno de estos números, f es un infinitamente grande. La imagen por f de cada uno de los seis intervalos abiertos que no tienen $\frac{\pi}{2}$ por cota es, por lo tanto $]-\infty,+\infty[$ y (E) tiene exactamente una solución en cada uno de estos intervalos por el teorema de valores intermedios. Esto lleva al total de $6+2=8$ soluciones. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ y $\tan(3x)$ tienden a $+\infty$ mientras que $\tan(2x)$ y $\tan(4x)$ tienden a 0. f por lo tanto tiende a $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, e igualmente f tiende a $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. La imagen por f de cada uno de los dos últimos intervalos es, por lo tanto, una vez más $]-\infty,+\infty[$. Finalmente,

$$\boxed{(E) \text{ tiene exactamente diez soluciones en } [0,\pi].}$$

Solución del ejercicio 641 ▲005075

1. Según las fórmulas de EULER,

$$z+z^4=e^{2i\pi/5}+e^{8i\pi/5}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos\frac{2\pi}{5}=a.$$

Igualmente,

$$z^2+z^3=e^{4i\pi/5}+e^{6i\pi/5}=e^{4i\pi/5}+e^{-4i\pi/5}=2\cos\frac{4\pi}{5}=b.$$

2. Porque $z\neq 1$ y $z^5=e^{2i\pi}=1$,

$$1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^5}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0.$$

3. $a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$ y $ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1$. Entonces,
$$a+b=-1 \text{ y } ab=-1.$$
Así, a y b son las soluciones de la ecuación $X^2+X-1=0$ a saber, los números $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Porque $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y $\frac{4\pi}{5}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, se tiene $a>0$ y $b>0$. Finalmente,
$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ y } \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$$

Solución del ejercicio 642 ▲005076

1. $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ y una primitiva de $x\mapsto\cos^2 x$ es $x\mapsto\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x))$.
2. Según las fórmulas de EULER,
$$\begin{aligned}\cos^4 x&=\left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$
Entonces, una primitiva de la función $x\mapsto\cos^4 x$ es $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)+2\operatorname{sen}(2x)+3x)$.
3. $\operatorname{sen}^4 x=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})$
$=\frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)$.
Entonces, una primitiva de la función $x\mapsto\operatorname{sen}^4 x$ es $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)-2\operatorname{sen}(2x)+3x)$.
4. $\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ y una primitiva de la función $x\mapsto\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x$ es $x\mapsto\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x))$.
5. $\operatorname{sen}^6 x=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6=-\frac{1}{64}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})$
$=-\frac{1}{64}(2\cos(6x)-12\cos(4x)+30\cos(2x)-20)$
$=\frac{1}{32}(-\cos(6x)+6\cos(4x)-15\cos(2x)+10)$.
Entonces, una primitiva de la función $x\mapsto\operatorname{sen}^6 x$ es $x\mapsto\frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x)+\frac{3}{2}\operatorname{sen}(4x)-\frac{15}{2}\operatorname{sen}(2x)+10x)$.
6. $\cos x\operatorname{sen}^6 x=\operatorname{sen}' x\operatorname{sen}^6 x$ y una primitiva de $x\mapsto\cos x\operatorname{sen}^6 x$ es $x\mapsto\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x$.
7. $\cos^5 x\operatorname{sen}^2 x=\cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)^2\operatorname{sen}^2 x=\operatorname{sen}' x\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}' x\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}' x\operatorname{sen}^6 x$ y una primitiva de $x\mapsto\cos^5 x\operatorname{sen}^2 x$ es $x\mapsto\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x$.
8. $\cos^3 x=\operatorname{sen}' x-\operatorname{sen}' x\operatorname{sen}^2 x$ y una primitiva de $x\mapsto\cos^3 x$ es $x\mapsto\operatorname{sen} x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x$.

Solución del ejercicio 643 ▲005077

1. Para x real, se tiene :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \operatorname{sen}^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6 \\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20 \\
&\qquad +15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix}) \\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix} \\
&\qquad -3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix}) \\
&= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6) \\
&= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)
\end{aligned}$$

(Observación. La función propuesta era par y, por lo tanto, la ausencia de seno era predecible. Esta observación también guió los cálculos intermedios : los coeficientes de e^{-2ix}, e^{-4ix},... son los mismos que los de e^{2ix}, e^{4ix},...) Así,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\operatorname{sen} 10x}{10}-\frac{\operatorname{sen} 8x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 6x}{2}+2\operatorname{sen} 4x+\operatorname{sen} 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}(0-0)+2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi\right) \\
&= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.
\end{aligned}$$

2. Para x real, se tiene

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \operatorname{sen}^7 x &= \cos^4 x \operatorname{sen}^6 x \operatorname{sen} x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3 \operatorname{sen} x \\
&= \cos^4 x \operatorname{sen} x - 3\cos^6 x \operatorname{sen} x + 3\cos^8 x \operatorname{sen} x - \cos^{10} x \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{3\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{3}+\frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{5}\times\frac{1-9\sqrt{3}}{32}+\frac{3}{7}\times\frac{1-27\sqrt{3}}{128}-\frac{1}{3}\times\frac{1-81\sqrt{3}}{512}+\frac{1}{11}\times\frac{1-243\sqrt{3}}{2048} \\
&= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3})+7920(1-27\sqrt{3})-1540(1-81\sqrt{3})+105(1-243\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2365440}(-8299+18441\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 644 ▲005078

1. $\tan\frac{x}{2}$ existe si y solo si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ y $\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ existe si y solo si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Para $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}.$$

2. **1a solución.** para todo real x,

$$\operatorname{sen}(x-\frac{2\pi}{3})+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0,$$

2a solución.

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+\frac{2\pi}{3})=\operatorname{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})}+e^{ix}+e^{i(x+\frac{2\pi}{3})})=\operatorname{Im}(e^{ix}(j^2+1+j))=0.$$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ y $\frac{2}{\cos(2x)}$ existen si y solo si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ y $2x$ no están en $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, lo que equivale a $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Entonces, para $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\ (\text{para } x \text{ verificando además } x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\cos x+\operatorname{sen}x}+\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{\cos x-\operatorname{sen}x}=\frac{(\cos x-\operatorname{sen}x)^2+(\cos x+\operatorname{sen}x)^2}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}\\&=\frac{2(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)}{\cos(2x)}=\frac{2}{\cos(2x)}\ (\text{lo que es aún cierto para } x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

4. Para $x\notin\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x}-\tan x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{2}{\tan(2x)}.$$

Solución del **ejercicio 645** ▲005079

1. • Para todo real x, $1-2k\cos x+k^2=(k-\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x\geqslant 0$. Además,

$$1-2k\cos x+k^2=0\Rightarrow k-\cos x=\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x\in\pi\mathbb{Z}\ \text{ y }\ k=\cos x\Rightarrow k\in\{-1,1\},$$

lo que es excluido. Entonces,

$$\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 1-2k\cos x+k^2>0.$$

•f_k por lo tanto, se define en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}$ en virtud de teoremas generales, impar y 2π-periódica. Se estudia ahora en $[0,\pi]$. Para $x\in[0,\pi]$, se tiene :

$$\begin{aligned}f_k'(x)&=\cos x(1-2k\cos x+k^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x(2k\operatorname{sen}x)(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(\cos x(1-2k\cos x+k^2)-k\operatorname{sen}^2 x)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x+(1+k^2)\cos x-k)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)(k-\cos x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_k'(x)=\frac{(k\cos x-1)(k-\cos x)}{(1-2k\cos x+k^2)^{3/2}}.}$$

1er caso : $|k| < 1$ y $k \neq 0$. (si $k = 0$, $f_k(x) = \operatorname{sen} x$), para todo real x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x - 1) < 0$ y $f_k'(x)$ es del signo de $\cos x - k$.

x	0		$\operatorname{Arccos} k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(pues $f_k(\arccos k) = \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2do caso : $k > 1$. Para todo real x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) > 0$ y $f_k'(x)$ es del signo de $k\cos x - 1$.

x	0		$\operatorname{Arccos} \frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(pues $f_k(\arccos \frac{1}{k}) = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = \frac{1}{k}$).

3er caso : $k < -1$. Para todo real x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x) < 0$ y $f_k'(x)$ es del signo de $1 - k\cos x$.

x	0		$\operatorname{Arccos} \frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\frac{1}{k}$	$\searrow$	0

(pues $f_k(\arccos \frac{1}{k}) = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = -\frac{1}{k}$).

2. Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, se escribe $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} f_k(x)\,dx$. Si $k = 0$, $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2$. Si no,

$$I_k = \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \frac{2k\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\,dx = \frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k}(|k+1| - |k-1|).$$

Más precisamente, si $k \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(1-k)) = 2$, lo que es aún cierto para $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k)-(k-1)) = \frac{2}{k}$, y enfin, si $k < -1$, $I_k = \frac{-2}{k}$.
En resumen,

$$\boxed{\text{Si } k \in]-1,1[,\ I_k = 2 \text{ y si } k \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ I_k = \frac{2}{|k|}.}$$

Solución del ejercicio 646 ▲005080

---

1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se define $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ y $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(kx)$.

1a solución.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k.$$

Ahora, $\mathrm{e}^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Entonces,

1er caso. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene inmediatamente, $S_n = n+1$ y $S'_n = 0$.

2o caso. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + iS'_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{ix/2}} \frac{\mathrm{e}^{-i(n+1)x/2} - \mathrm{e}^{i(n+1)x/2}}{\mathrm{e}^{-i(n+1)x/2} + \mathrm{e}^{i(n+1)x/2}} = \mathrm{e}^{inx/2} \frac{-2i \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$
$$= \mathrm{e}^{inx/2} \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

Por identificación de partes reales e imaginarias, se obtiene

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{nx}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{nx}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}}$$

2a solución.

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{sen}(k + \frac{1}{2})x - \operatorname{sen}(k - \frac{1}{2})x)$$
$$= \left(\operatorname{sen} \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{-x}{2} \right) + \left(\operatorname{sen} \frac{3x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) + \cdots + \left(\operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n-3)x}{2} \right)$$
$$+ \left(\operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2} - \operatorname{sen} \frac{(2n-1)x}{2} \right)$$
$$= \operatorname{sen} \frac{(2n+1)x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}$$

y por lo tanto, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se define $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ y $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}^2(kx)$. Se tiene :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(kx) + \operatorname{sen}^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

y

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos^2(kx) - \operatorname{sen}^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx).$$

De acuerdo a 1., si $x \in \pi\mathbb{Z}$, inmediatamente, se encuentra,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = n+1 \ \text{ y } \ \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}^2(kx) = 0,$$

y si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \ \text{ y } \ S_n - S'_n = \frac{\cos(nx) \operatorname{sen}(n+1)x}{\operatorname{sen} x},$$

de manera que

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\operatorname{sen}(n+1)x}{\operatorname{sen} x}\right) \text{ y } S'_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\operatorname{sen}(n+1)x}{\operatorname{sen} x}\right).$$

3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{sen}(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\mathrm{e}^{ix})^k 1^{n-k} = (1+\mathrm{e}^{ix})^n$$
$$= (\mathrm{e}^{ix/2}+\mathrm{e}^{-ix/2})^n \mathrm{e}^{inx/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\right).$$

Por identificación de partes reales e imaginarias, se obtiene entonces

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{nx}{2}\right) \text{ y } \sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{sen}(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{nx}{2}\right).}$$

Solución del ejercicio 647 ▲005081

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{ic} = 0$$
$$\Rightarrow |\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib}| = |-\mathrm{e}^{ic}| = 1 \Leftrightarrow |\mathrm{e}^{ia/2}\mathrm{e}^{ib/2}(\mathrm{e}^{i(a-b)/2} + \mathrm{e}^{-i(a-b)/2})| = 1$$
$$\Leftrightarrow \left|\cos\frac{a-b}{2}\right| = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \varepsilon \in \{-1,1\}/\ b = a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Así, necesariamente, $\mathrm{e}^{ib} = j\mathrm{e}^{ia}$ o $\mathrm{e}^{ib} = j^2\mathrm{e}^{ia}$. Recíprocamente, si $\mathrm{e}^{ib} = j\mathrm{e}^{ia}$ o aún $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{ic} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{ic} = -(\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib}) = -(1+j)\mathrm{e}^{ia} = j^2\mathrm{e}^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

y si $\mathrm{e}^{ib} = j^2\mathrm{e}^{ia}$ o aún $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{ic} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{ic} = -(\mathrm{e}^{ia} + \mathrm{e}^{ib}) = -(1+j^2)\mathrm{e}^{ia} = j\mathrm{e}^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(a, a+\varepsilon\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon\tfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi),\ a \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1,1\},\ (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}.}$$

Solución del ejercicio 648 ▲005082

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}) = 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}^4\frac{\pi}{8})$$
$$= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8})^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}.$$

Solución del ejercicio 649 ▲005083

1. $\cos(3x) = \text{sen}(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi)$ o $(\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi)$
$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})$ o $(\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x) = \text{Re}(e^{3ix}) = \text{Re}((\cos x + i \,\text{sen}\, x)^3) = \cos^3 x - 3\cos x \,\text{sen}^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

En consecuencia,

$$\cos(3x) = \text{sen}(2x) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\,\text{sen}\, x \cos x \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3 - 2\,\text{sen}\, x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(-4\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ o } (4\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x - 1 = 0).$$

De acuerdo a 1), la ecuación $4\,\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x - 1 = 0$ admite entre otras soluciones $\frac{\pi}{10}$ y $\frac{13\pi}{10}$ (pues, en cada uno de los dos casos, $\cos x \neq 0$), o aún, la ecuación $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admite como soluciones los dos números **distintos** $X_1 = \text{sen}\,\frac{\pi}{10}$ y $X_2 = \text{sen}\,\frac{13\pi}{10}$, que son las dos soluciones de esta ecuación. Porque $X_1 > 0$ y que $X_2 < 0$, se obtiene

$$X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ y } X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Entonces, (ya que $\text{sen}\,\frac{13\pi}{10} = -\text{sen}\,\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ y } \text{sen}\,\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

entonces, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$, y

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Luego

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

e igualmente

$$\boxed{\text{sen}\,\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Solución del ejercicio 650 ▲005162

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. porque, para todo entero k, $|\cos k| \in [0,1]$, se tiene entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \cos^2 k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(1+\cos(2k)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2ik}) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2i}\frac{1-\mathrm{e}^{2en}}{1-\mathrm{e}^{2i}})$$
$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i(n-1+2)}\frac{\operatorname{sen} n}{\operatorname{sen} 1}) = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)\operatorname{sen} n}{2\operatorname{sen} 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen} 1}.$$

Ahora, $\frac{1}{2\operatorname{sen} 1} = 0,594\ldots$. Así, para $n \geqslant 3$, $\frac{1}{2\operatorname{sen} 1} \leqslant 0,75 = \frac{3}{4} \leqslant \frac{n}{4}$, y entonces

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen} 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}.$$

Finalmente, si $n = 1$, $|\cos 1| = 0.5\ldots \geqslant 0.25 = \frac{1}{4}$ y si $n = 2$, $|\cos 1| + |\cos 2| = 0.9\ldots \geqslant 0.5 = \frac{1}{2}$. Finalmente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \frac{n}{4}.}$$

Solución del ejercicio 657 ▲000096

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. Denotemos $\alpha = a+ib$ y $\beta = c+id$, con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Entonces $\alpha+\beta = (a+c)+i(b+d)$ y $a+c \in \mathbb{Z}$, $b+d \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}[i]$. Igualmente, $\alpha\beta = (ac-bd)+i(ad+bc)$ y $ac-bd \in \mathbb{Z}$, $ad+bc \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Sea $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ invertible. Existe por lo tanto $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $\alpha\beta = 1$. Así, $\alpha \neq 0$ y $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Se observa que todo elemento no nulo de $\mathbb{Z}[i]$ es de módulo mayor o igual que 1 : en efecto, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant \sup(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|)$ y si $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \geqslant 1$. Si $|\alpha| \neq 1$, entonces $|\alpha| > 1$ y $|1/\alpha| < 1$. Se deduce $1/\alpha = 0$, lo que es imposible. Así $|\alpha| = 1$, lo que implica $\alpha \in \{1,-1,i,-i\}$. Recíprocamente, $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i \in \mathbb{Z}[i]$, $(-i)^{-1} = i \in \mathbb{Z}[i]$. Los elementos invertibles de $\mathbb{Z}[i]$ son, por lo tanto $1,-1,i$ y $-i$.
3. Sea $\omega \in \mathbb{C}$. Denotemos $\omega = x+iy$, con $x,y \in \mathbb{R}$. sea $E(x)$ la parte entera de x, i.e. el entero más grande inferior o igual a x : $E(x) \leqslant x < E(x)+1$. Si $x \leqslant E(x)+1/2$, se denota $n_x = E(x)$, y si $x > E(x)+1/2$, se denota $n_x = E(x)+1$. n_x es el, o uno de si hay dos, entero más cercano a x : $|x-n_x| \leqslant 1/2$. Denotemos n_y el entero asociado de la misma manera a y. Sea entonces $\alpha = n_x + i \cdot n_y$. $z \in \mathbb{Z}[i]$ y $|\omega-\alpha|^2 = (x-n_x)^2 + (y-n_y)^2 \leqslant 1/4+1/4 = 1/2$. Entonces $|\omega-\alpha| < 1$.
4. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, con $\beta \neq 0$. Sea entonces $q \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Sea $r = \alpha - \beta q$. Como $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ y $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. Además, $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$, por lo tanto $|r| < |\beta|$.

Solución del ejercicio 664 ▲000103

1. Módulo una permutación, $x = -2$, $y = -2j$ y $z = -2j^2$ (j denota la raíz cúbica de la unidad $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
2. Módulo una permutación, $x = 1$, $y = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ y $z = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Solución del ejercicio 665 ▲005132

Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|>1$.

$$|1+z+\cdots+z^{n-1}|\leqslant 1+|z|+|z|^2+\cdots+|z|^{n-1}<|z|^n+|z|^n+\cdots+|z|^n=n|z|^n=|nz^n|,$$

y en particular, $1+z+\cdots+z^{n-1}\neq nz^n$. Así, si $1+z+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0$, entonces $|z|\leqslant 1$.

Solución del ejercicio 666 ▲005136

1. Sea $z\in\mathbb{C}$. $\operatorname{sh} z$ y $\operatorname{ch} z$ están definidos y por lo tanto, $\operatorname{th} z$ existe si y solo si $\operatorname{ch} z\neq 0$. Por tanto,
$$\operatorname{ch} z=0\Leftrightarrow e^z+e^{-z}=0\Leftrightarrow e^{2z}=-1\Leftrightarrow e^{2z}=e^{i\pi}\Leftrightarrow 2z\in i\pi+2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right).$$
$\operatorname{th} z$ existe si y solo si $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.
2. Sea $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.
$$\operatorname{th} z=0\Leftrightarrow \operatorname{sh} z=0\Leftrightarrow e^z=e^{-z}\Leftrightarrow e^{2z}=1\Leftrightarrow 2z\in 2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\pi\mathbb{Z}.$$
Como $i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\cap i\pi\mathbb{Z}=\varnothing$, $\operatorname{th} z=0$ si y solo si $z\in i\pi\mathbb{Z}$.
3. Sea $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. Se define $z=x+iy$, donde $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}|\operatorname{th} z|<1&\Leftrightarrow |e^z-e^{-z}|^2<|e^z+e^{-z}|^2\Leftrightarrow (e^z-e^{-z})(e^{\bar z}-e^{-\bar z})<(e^z+e^{-z})(e^{\bar z}+e^{-\bar z})\\&\Leftrightarrow -e^{z-\bar z}-e^{-(z-\bar z)}<e^{z-\bar z}+e^{-(z-\bar z)}\Leftrightarrow 2(e^{2iy}+e^{-2iy})>0\\&\Leftrightarrow \cos(2y)>0.\end{aligned}$$
Así,
$$\begin{cases}|\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2}\\ |\operatorname{th} z|<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|y|<\frac{\pi}{2}\\ \cos(2y)>0\end{cases}\Leftrightarrow |y|<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow z\in\Delta.$$
4. Sea $z\in\Delta$. De acuerdo a 1), $\operatorname{th} z$ existe y según 3), $|\operatorname{th} z|<1$. Entonces $z\in\Delta\Rightarrow \operatorname{th} z\in U$. Así, th es una aplicación de Δ en U. Sea entonces $Z\in U$ y $z\in\Delta$.
$$\operatorname{th} z=Z\Leftrightarrow\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=Z\Leftrightarrow e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}.$$
porque $Z\neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z}\neq 0$ y se puede escribir $\frac{1+Z}{1-Z}=re^{i\theta}$, donde $r\in\mathbb{R}_+^*$ y $\theta\in]-\pi,\pi]$. Así,
$$\begin{aligned}e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}&\Leftrightarrow e^{2z}=re^{i\theta}\Leftrightarrow e^{2x}=r\ \text{ y }\ 2y\in\theta+2\pi\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln r\ \text{ y }\ y\in\frac{\theta}{2}+\pi\, zz\end{aligned}$$
Ahora, no se puede tener $\theta=\pi$. En caso contrario, se tiene $\frac{1+Z}{1-Z}=-r\in\mathbb{R}_-^*$, entonces $Z=\frac{r+1}{r-1}\in\mathbb{R}$. Así, ya que $|Z|<1$, se tiene $Z\in]-1,1[$ y entonces $\frac{1+Z}{1-Z}\in\mathbb{R}_+^*$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\theta\in]-\pi,\pi[$, luego $\frac{\theta}{2}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Pero entonces,
$$\begin{cases}\operatorname{th} z=Z\\ z\in\Delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ln r\\ y=\frac{\theta}{2}.\end{cases}$$

Así, todo elemento Z de U tiene un solo antecedente z en Δ (a saber $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + \frac{i}{2}\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$, donde $\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ denota el argumento de $\frac{1+Z}{1-Z}$ que está en $]-\pi,\pi[$). Finalmente, th realiza así una biyección de Δ sobre U.

Solución del ejercicio 675 ▲000364

1. $A = 3X^5+4X^2+1$, $B = X^2+2X+3$, el cociente de A por B es $3X^3-6X^2+3X+16$ y el resto $-47-41X$.
2. $A = 3X^5+2X^4-X^2+1$, $B = X^3+X+2$ el cociente de A por B es $3X^2+2X-3$ y el resto es $7-9X^2-X$.
3. $A = X^4-X^3-X-2$, $B = X^2-2X+4$, el cociente de A por B es X^2+X-2 y el resto $6-9X$.

Solución del ejercicio 677 ▲000366

$x^4+X^3-2X+1 = (X^2+X+1)(2X^2-3X+1)+X^3(2-X)$.

Solución del ejercicio 681 ▲000370

1. Se observa que si P es solución, entonces $P+1 = (X-1)^4A$ y por otra parte $P-1 = (X+1)^4B$, que da $1 = \frac{A}{2}(X-1)^4 + \frac{-B}{2}(X+1)^4$. Busquemos polinomios A y B que sirven : para esto, se escribe la relación de Bézout entre $(X-1)^4$ y $(X+1)^4$ que son primos entre sí, y se obtiene
$$\frac{A}{2} = \frac{5}{32}X^3+\frac{5}{8}X^2+\frac{29}{32}X+\frac{1}{2}$$
$$\frac{-B}{2} = -\frac{5}{32}X^3+\frac{5}{8}X^2-\frac{29}{32}X+\frac{1}{2}$$
Se tiene entonces por construcción
$$(X-1)^4A-1 = 2\left(1+(X+1)^4\frac{-B}{2}\right) = 1+(X+1)^4B$$
y $P_0 = (X-1)^4A-1$ sirve. Reemplazando, se obtiene luego de los cálculos :
$$P_0 = \frac{5}{16}X^7-\frac{21}{16}X^5+\frac{35}{16}X^3-\frac{35}{16}X.$$
2. Si $(X-1)^4$ divide $P+1$, entonces 1 es raíz de multiplicidad al menos 4 de $P+1$, y por lo tanto, raíz de multiplicidad al menos 3 de P' : entonces $(X-1)^3$ divide P'. Igualmente $(X+1)^3$ divide P'. Como $(X-1)^3$ y $(X+1)^3$ son primos entre sí, necesariamente $(X-1)^3(X+1)^3$ divide P'. Se debe buscar un polinomio de grado minimal : se observa que las primitivas de
$$\lambda(X-1)^3(X+1)^3 = \lambda(X^2-1)^3 = \lambda(X^6-3X^4+3X^2-1)$$
son de la forma $P(X) = \lambda(\frac{1}{7}X^7-\frac{3}{5}X^5+X^3-X+a)$. Si P sirve, necesariamente 1 es raíz de $P+1$ y -1 es raíz de $P-1$, lo que da $\lambda(\frac{-16}{35}+a) = -1$ y $\lambda(\frac{16}{35}+a) = 1$. De donde $\lambda a = 0$ y como se busca P no nulo, es necesario que $a = 0$ y $\lambda = \frac{35}{16}$. Se verifica que :
$$P_0(X) = \frac{35}{16}(\frac{1}{7}X^7-\frac{3}{5}X^5+X^3-X) = \frac{5}{16}X^7-\frac{21}{16}X^5+\frac{35}{16}X^3-\frac{35}{16}X$$

es una buena solución al problema : el polinomio $A = P_0 + 1$ admite 1 como raíz, i.e. $A(1) = 0$, y su derivada admite 1 como raíz triple, $A'(1) = A''(1) = A'''(1) = 0$, así 1 es raíz de multiplicidad al menos 4 de A y entonces $(X-1)^4$ divide $A = P+1$. Igualmente, $(X+1)^4$ divide $P-1$.

Se supone que P sea una solución del problema. Se denota siempre P_0 la solución particular obtenida arriba. Entonces $P+1$ y P_0+1 son divisibles por $(X-1)^4$, y $P-1$ y P_0-1 son divisibles por $(X+1)^4$. Así $P-P_0 = (P+1)-(P_0+1) = (P-1)-(P_0-1)$ es divisible por $(X-1)^4$ y por $(X+1)^4$. Como $(X-1)^4$ y $(X+1)^4$ son primos entre sí, necesariamente $P-P_0$ es divisible por $(X-1)^4(X+1)^4$. Recíprocamente, si $P = P_0 + (X-1)^4(X+1)^4A$, entonces $P+1$ es de hecho divisible por $(X-1)^4$ y $P-1$ es divisible por $(X+1)^4$. Así, las soluciones son exactamente los polinomios de la forma

$$P_0(X) + (X-1)^4(X+1)^4A(X)$$

donde P_0 es la solución particular encontrada anteriormente, y A un polinomio arbitrario.

Solución del ejercicio 682 ▲000371

1. Cociente $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, resto $R = X$.
2. Cociente $Q = 1 - X^2 - X^4$, resto $R = X^5(1+2X+X^2)$.

Solución del ejercicio 686 ▲000375

Sean $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, el cociente de A por B es $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, el resto es $261 - 268X$.

Solución del ejercicio 689 ▲000378

El polinomio cero es adecuado. En lo que sigue se supone que P no es el polinomio nulo. Denotemos $n = \operatorname{grad} P$ su grado. Como P' divide P, entonces P es no constante, por lo tanto $n \geqslant 1$. Sea $Q \in \mathbb{C}[X]$ tal que $P = P'Q$. Porque $\operatorname{grad}(P') = \operatorname{grad}(P) - 1 \geqslant 0$, entonces Q es de grado 1. Así $Q(X) = aX + b$, con $a \neq 0$, y entonces

$$P(X) = P'(X)(aX+b) = aP'(X)(X + \frac{b}{a}).$$

Entonces si $z \neq -\frac{b}{a}$ y si z es raíz de P de multiplicidad $k \geqslant 1$, entonces z es también raíz de P', con la misma multiplicidad, lo que es imposible. Así la sola raíz posible de P es $-\frac{b}{a}$. Recíprocamente, sea P un polinomio con una sola raíz $z_0 \in \mathbb{C}$: existe $\lambda \neq 0$, $n \geqslant 1$ tales que $P = \lambda(X - z_0)^n$, que de hecho es divisible por su polinomio derivado.

Solución del ejercicio 692 ▲003198

$\operatorname{Im} \varphi = \{P \in E \text{ tal que } X-1 \mid P\}$ (Bézout generalizado).
$\ker \varphi = \operatorname{vect}(X^3 + X^2 + X)$.

Solución del ejercicio 693 ▲003199

1. $\dfrac{\alpha(b-X)+\beta(X-a)}{b-a}$.
2. $\cos n\theta + X \operatorname{sen} n\theta$.

Solución del ejercicio 694 ▲003200

$P = \lambda((X+2)(X+3)(X+4)-6)$.

Solución del ejercicio 695 ▲003201

1. $X+1$
2. 1
3. $X^2 - iX + 1$

Solución del ejercicio 696 ▲003202

1. $7U = X+3, 7V = -X^3 - 3X^2 + X + 4$
2. $3U = 2X^2 - X + 1, 3V = -2X^2 - X + 2$.

Solución del ejercicio 697 ▲003203

Sustituir j a $X \Rightarrow R = \begin{cases} (-1)^n - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \\ ((-1)^{n+1} - 1)(X+1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ ((-1)^n + 1)X & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$

Solución del ejercicio 698 ▲003204

$n \equiv 0 \pmod 6$.

Solución del ejercicio 699 ▲003205

1.
2.
3. Hacer el producto.

Solución del ejercicio 700 ▲003206

1. $(2^{50} - 1)X + 2 - 2^{50}$.
2. $2^{16}\left(X - \sqrt{3}\right)$.
3. $192\left(X - \sqrt{2}\right)^2$.
4.

Solución del ejercicio 701 ▲003207

$\lambda = \mu = -1$.

Solución del ejercicio 702 ▲003208

$-3X^3+X^2-X-1$.

Solución del ejercicio 703 ▲003209

$n=qm+r \Rightarrow X^n-1 \equiv X^r-1 \pmod{X^m-1}$. Se aplica el método de las divisiones euclidianas entre n y m $\Rightarrow \mathrm{mcd}=X^{n\wedge m}-1$.

Solución del ejercicio 704 ▲003210

1.

2. Recurrencia.

Solución del ejercicio 708 ▲005323

Se toma $n \geqslant 2$ (si no todo está claro). $Q=(X-\mathrm{e}^{ia})(X-\mathrm{e}^{-ia})$ tiene raíces simples si y solo si $\mathrm{e}^{ia}\neq \mathrm{e}^{-ia}$ o aún $\mathrm{e}^{2ia}\neq 1$ o finalmente, $a\notin \pi\mathbb{Z}$.

1er caso. Si $a\in\pi\mathbb{Z}$, entonces, $P=0=0.Q$.

2o caso. Si $a\notin\pi\mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned}P(\mathrm{e}^{ia})&=\operatorname{sen}a(\cos(na)+i\operatorname{sen}(na))-\operatorname{sen}(na)(\cos a+i\operatorname{sen}a)+\operatorname{sen}((n-1)a)\\&=\operatorname{sen}((n-1)a)-(\operatorname{sen}(na)\cos a-\cos(na)\operatorname{sen}a)=0.\end{aligned}$$

Entonces, e^{ia} es raíz de P e igualmente, ya que P está en $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} es raíz de P. P es, por lo tanto divisible por Q.

$$\begin{aligned}P&=P-P(\mathrm{e}^{ia})=\operatorname{sen}a(X^n-\mathrm{e}^{ina})-\operatorname{sen}(na)(X-\mathrm{e}^{ia})=(X-\mathrm{e}^{ia})(\operatorname{sen}a\sum_{k=0}^{n-1}X^{n-1-k}\mathrm{e}^{ika}-\operatorname{sen}(na))\\&=(X-\mathrm{e}^{ia})S.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}S&=S-S(\mathrm{e}^{-ia})=\operatorname{sen}a\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{ika}(X^{n-1-k}-\mathrm{e}^{-i(n-1-k)a})=\operatorname{sen}a(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{e}^{ika}(\sum_{j=0}^{n-2-k}X^{n-2-k-j}\mathrm{e}^{-ija})\\&=\operatorname{sen}a(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{k=0}^{n-2}(\sum_{j=0}^{n-2-k}X^{n-2-k-j}\mathrm{e}^{i(k-j)a})=\operatorname{sen}a(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k+j=l}\mathrm{e}^{i(k-j)a})X^{n-2-l}\\&=\operatorname{sen}a(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}(\sum_{k=0}^{l}\mathrm{e}^{i(2k-l)a})X^{n-2-l}.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\sum_{k=0}^{l}\mathrm{e}^{i(2k-l)}a=\mathrm{e}^{-ila}\frac{1-\mathrm{e}^{2i(l+1)a}}{1-\mathrm{e}^{2ia}}=\frac{\operatorname{sen}((l+1)a)}{\operatorname{sen}a}.$$

Entonces

$$S=\operatorname{sen}a(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\frac{\operatorname{sen}((l+1)a)}{\operatorname{sen}a}X^{n-2-l}=(X-\mathrm{e}^{-ia})\sum_{l=0}^{n-2}\operatorname{sen}((l+1)a)X^{n-2-l},$$

y finalmente

$$P = (X - \mathrm{e}^{ia})(X - \mathrm{e}^{-ia}) \sum_{k=0}^{n-2} \operatorname{sen}((k+1)a) X^{n-2-k} = (X^2 - 2X\cos a + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \operatorname{sen}((k+1)a).$$

Solución del ejercicio 709 ▲006955

1. (a) $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$
   (b) $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$
   (c) $X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + X - 2) - 7X + 6$
   (d) $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$
   $= (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 268X + 261$
2. (a) $1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + 2X + X^2)(1 - 4X + 7X^2) + X^3(-9 - 6X)$
   (b) $1 + X^3 - 2X^4 + X^6 = (1 + X^2 + X^3)(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$

Solución del ejercicio 710 ▲006956

La división euclidiana de $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ por $B = X^2 + X + 1$ da

$$X^4 + aX^2 + bX + c = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + a) + (b - a + 1)X + c - a$$

Por lo tanto A es divisible por B si y solo si el resto $R = (b - a + 1)X + c - a$ es el polinomio nulo, es decir si y solo si $b - a + 1 = 0$ y $c - a = 0$.

Solución del ejercicio 711 ▲000379

1. $\operatorname{mcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2.$
2. $\operatorname{mcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1.$

Solución del ejercicio 712 ▲000380

1. $\operatorname{mcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1.$
2. $\operatorname{mcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$
3. $\operatorname{mcd}(X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 1, X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1) = 1.$

Solución del ejercicio 719 ▲000387

1. $D = X^2 + 3X + 2 = A(\frac{1}{18}X - \frac{1}{6}) + B(-\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18}).$
2. $D = 1 = A(-X^3) + B(X^5 + X^3 + X + 1).$

Solución del ejercicio 728 ▲005317

$x^6-7X^4+8X^3-7X+7=(X^6+8X^3+7)-(7X^4+7X)=(X^3+1)(X^3+7)-7X(X^3+1)=(X^3+1)(X^3-7X+7)$ y $3X^5-7X^3+3X^2-7=3X^2(X^3+1)-7(X^3+1)=(X^3+1)(3X^2-7)$. Entonces,

$$(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7)=(X^3+1)((X^3-7X+7)\wedge(3X^2-7)).$$

Ahora, para $\varepsilon\in\{-1,1\}$, $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3-7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})+7=-(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+7\neq 0$.
Los polinomios (X^3-7X+7) y $(3X^2-7)$ no tiene raíces comunes en $\mathbb{C}$ y por lo tanto, son primos entre sí. Entonces, $(X^6-7X^4+8X^3-7X+7)\wedge(3X^5-7X^3+3X^2-7)=X^3+1$.

Solución del ejercicio 729 ▲006957

---

1. El algoritmo de Euclides calcula el mcd mediante una sucesión de divisiones euclidianas.
   (a) $X^5-2X^4+X^2-X-2=(X^3-X^2-X-2)(X^2-X)+2X^2-3X-2$, luego $X^3-X^2-X-2=(2X^2-3X-2)(\frac{1}{2}X+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}X-\frac{3}{2}$, luego $2X^2-3X-2=(\frac{3}{4}X-\frac{3}{2})(\frac{8}{3}X+\frac{4}{3})$
   El mcd es el último resto no nulo, dividido por su coeficiente dominante :
   $$\mathrm{mcd}(X^3-X^2-X-2,X^5-2X^4+X^2-X-2)=X-2$$
   (b) $X^4+X^3-2X+1=(X^3+X+1)(X+1)-X^2-4X$, luego $X^3+X+1=(-X^2-4X)(-X+4)+17X+1$
   $$\text{por lo tanto}\ \ \mathrm{mcd}(X^4+X^3-2X+1,X^3+X+1)=\mathrm{mcd}(-X^2-4X,17X+1)=1$$
   pues $-X^2-4X$ y $17X+1$ no tiene raíz (mismo compleja) común.
   (c) $X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1=(X^4+2X^3+X+2)(X+1)-X^3-1$, luego $X^4+2X^3+X+2=(-X^3-1)(-X-2)+2X^3+2$
   $$\mathrm{mcd}(X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1,X^4+2X^3+X+2)=X^3+1.$$
   (d) $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1=(X^n-nX+n-1)(nX-(n+1))+n^2(X-1)^2$. Si $n=1$, entonces $X^n-nX+n-1=0$ y el mcd vale $(X-1)^2$. Se constata que 1 es raíz de $X^n-nX+n-1$, y se encuentra $X^n-nX+n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1))$. Si $n\geqslant 2$: 1 es raíz de $X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)$ y se encuentra
   $$X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X^2+X-(n-1)=(X-1)(X^{n-2}+2X^{n-3}+\cdots+(n-1)X^2+nX+(n+1)),$$
   así finalmente $(X-1)^2$ divide $X^n-nX+n-1$ (también se puede notar que 1 es raíz de multiplicidad al menos dos de $X^n-nX+n-1$, porque es raíz de este polinomio y su derivada). Así
   $$\text{si } n\geqslant 2,\ \mathrm{mcd}(nX^{n+1}-(n+1)X^n+1,X^n-nX+n-1)=(X-1)^2.$$
2. (a) $A=X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2$ y $B=X^4+2X^3+2X^2+7X+6$, por lo tanto $A=BQ_1+R_1$, con $Q_1=X+1$, $R_1=-2X^3-10X^2-16X-8$, luego $B=R_1Q_2+R_2$, con $Q_2=-\frac{1}{2}X+\frac{3}{2}$ y $R_2=9X^2+27X+18$ y en fin $R_1=R_2Q_3$, con $Q_3=-\frac{2}{9}X-\frac{4}{9}$.
   Entonces $D=X^2+3X+2$, y se obtiene
   $$9D=B-R_1Q_2=B-(A-BQ_1)Q_2=-AQ_2+B(1+Q_1Q_2)$$
   o sea
   $$\begin{cases} U=\frac{1}{9}(-Q_2)=\frac{1}{18}X-\frac{1}{6} \\ V=\frac{1}{9}(1+Q_1Q2)=-\frac{1}{18}X^2+\frac{1}{9}X+\frac{5}{18}. \end{cases}$$

(b) Se tiene $A = BQ_1 + R_1$, con $Q_1 = X^2 + 1$, $R_1 = X^2 - X - 1$, luego $B = R_1 Q_2 + R_2$, con $Q_2 = X^2 - X + 1$ y $R_2 = -X + 2$ y en fin $R_1 = R_2 Q_3 + R_3$, con $Q_3 = -X - 1$ y $R_3 = 1$
Entonces $D = 1$, y se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= R_1 - R_2 Q_3 = R_1 - (B - R_1 Q_2) Q_3 = R_1(1 + Q_2 Q_3) - BQ_3 \\ &= (A - BQ_1)(1 + Q_2 Q_3) - BQ_3 \\ &= A(1 + Q_2 Q_3) - B(Q_1(1 + Q_2 Q_3) + Q_3) \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{cases} U = 1 + Q_2 Q_3 = -X^3 \\ V = -Q_1(1 + Q_2 Q_3) - Q_3 = 1 + X + X^3 + X^5. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 730 ▲006958

1. Cuando se realiza la división euclidiana $A = BQ + R$, los coeficientes de Q se obtienen por operaciones elementales (multiplicación, división, adición) a partir de los coeficientes de A y B : por lo que se quedan en $\mathbb{Q}$. Además, $R = A - BQ$ es entonces todavía a coeficientes racionales. Entonces $\mathrm{mcd}(A, B) = \mathrm{mcd}(B, R)$ y para conseguirlo, se hace la división euclidiana de B por R (cuyo cociente y resto siguen siendo con coeficientes en $\mathbb{Q}$), luego se empieza de nuevo... El mcd es el último resto no nulo, por lo tanto, es aún un polinomio con coeficientes racionales.
2. Denotemos $P_1 = \mathrm{mcd}(P, P')$: como P es con coeficientes racionales, P' también y por lo tanto, P_1 también. Por lo tanto $P_1(X) = (X-a)^{p-1}(X-b)^{q-1}(X-c)^{r-1}$. Iterando el proceso, se obtiene que $P_{r-1}(X) = (X - c)$ es con coeficientes racionales, por lo tanto $c \in \mathbb{Q}$. Se vuelve entonces a las etapas : $P_{q-1}(X) = (X-b)(X-c)^{r-q+1}$ es con coeficientes racionales, y $X - b$ también en tanto que cociente de P_{q-1} por el polinomio con coeficientes racionales $(X-c)^{r-q+1}$, por lo tanto $b \in \mathbb{Q}$. Igualmente, considerando P_{p-1}, se obtiene $a \in \mathbb{Q}$.

Solución del ejercicio 736 ▲000401

$$\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$$

Solución del ejercicio 744 ▲000409

El orden de multiplicidad es 2.

Solución del ejercicio 745 ▲000410

Sea $x \in \mathbb{R}$; x es una raíz múltiple de P si y solo si $P(x) = 0$ y $P'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} P(x) = P'(x) = 0 &\iff \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 \\ (x+1)^6 = x^6 \end{cases} && \text{utilizando la segunda ecuación} \\ &\iff \begin{cases} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 \end{cases} && \text{tomando la raíz cuadrada} \\ &\iff \begin{cases} x^6 = a \\ x + 1 = \pm x \end{cases} && \text{tomando la raíz cúbica.} \end{aligned}$$

que admite una solución ($x = -\frac{1}{2}$) si y solo si $a = \frac{1}{64}$.

Solución del ejercicio 747 ▲000412

---

1. $\begin{cases} X^3 - 3 = (X - \sqrt[3]{3})(X^2 + \sqrt[3]{3}X + \sqrt[3]{9}) \\ \qquad\quad = (X - \sqrt[3]{3})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{cases}$

2. $\begin{cases} X^{12} - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1) \times \\ \qquad\qquad (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \\ \qquad\quad = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \times \\ \qquad\qquad \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \times \\ \qquad\qquad \left(X - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right). \end{cases}$

Solución del ejercicio 758 ▲000423

---

1. $X^6 + 1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Solución del ejercicio 759 ▲003214

---

1. $\frac{n}{2^{n-1}}$.
2. $\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. $-(-n)^n$.

Solución del ejercicio 760 ▲003215

$\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1 = (\omega^k - \mathrm{e}^{i\theta})(\omega^k - \mathrm{e}^{-i\theta})$ y $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k - x) = (-1)^n(x^n - 1)$.

Solución del ejercicio 762 ▲003217

$x^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1 = (X^n - \mathrm{e}^{en\theta})(X^n - \mathrm{e}^{-in\theta})$.

$$Q = \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k \mathrm{e}^{i(n-1-k)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} X^l \mathrm{e}^{-i(n-1-\ell)\theta}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \left(\sum_{p=0}^{k} \mathrm{e}^{i(k-2p)\theta}\right) + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \left(\sum_{p=k-n+1}^{n-1} \mathrm{e}^{i(k-2p)\theta}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X^k \frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \sum_{k=n}^{2n-2} X^k \frac{\operatorname{sen}(2n-k-1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Solución del ejercicio 763 ▲003218

División paso a paso : $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \cos k\theta$.

Solución del ejercicio 764 ▲003219

$\iff X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + pX^n + q \iff j^{2n} + pj^n + q = 0.$

Solución del ejercicio 765 ▲003220

$(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Solución del ejercicio 766 ▲003221

Se calcula el mcd$(P(X),Q(X)) = X^2+5$. $\Rightarrow x_1 = i\sqrt{5}$ y $x_2 = -i\sqrt{5}$. Se obtiene entonces : $P(X) = (X^2+5)(X^2-3X+1)$. Las dos últimas raíces son $x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $x_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Solución del ejercicio 767 ▲003222

$P = (X-2)^2(X-3)^3$.

Solución del ejercicio 768 ▲003223

$a = 10i$. Raíces : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Solución del ejercicio 769 ▲003224

$\lambda = 0$, $x = 1$.

Solución del ejercicio 770 ▲003225

P debe ser divisible por $X^2 - X + r \Rightarrow r^2 - 3r + p + 1 = 2r^2 - r + q = 0$.
Se calcula el mcd de estas expresiones $\Rightarrow$ CNS : $4p^2 - 4pq + q^2 + 3p + 11q - 1 = 0$.

Solución del ejercicio 771 ▲003226

$= (-1)^{n+1}\frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}$.

Solución del ejercicio 773 ▲003228

Para $x \in \mathbb{R}$, se tiene $P(x) = \mathrm{Im}\big((1+xe^{i\theta})^n\big)$.
Entonces $P(x) = 0 \iff \exists\ k \in \{0,\dots,n-1\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que : $1 + xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$.
Se obtiene $x_k = \frac{\mathrm{sen}(k\pi/n)}{\mathrm{sen}(\theta - k\pi/n)}$, $\quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Solución del ejercicio 775 ▲003230

$P = a(X-b)^\alpha$.

Solución del ejercicio 776 ▲003231

1. si $P(x) = 0$, entonces $P\big((x-1)^2\big) = P\big((x+1)^2\big) = 0$.
   Siempre se tiene $|x| < \max\{|x-1|, |x+1|\}$, por lo tanto, si existe una raíz de módulo > 1, no existe raíz de módulo maximal $\Rightarrow P = 0$.
   Por lo tanto $\max\{|x-1|, |x+1|\} \geqslant 1$, con igualdad si y solo si $x = 0$. Entonces $P = 0$ o $P = 1$.

2. Si x es raíz, entonces x^2 y $(x+1)^2$, lo son también.
   $\Rightarrow |x| = 0$ o $1 \Rightarrow |x+1| = 0$ o $1 \Rightarrow x \in \{0, -1, j, j^2\}$.
   $x = 0$ o $x = -1 \Rightarrow P(1) = 0$: excluidos.
   Así $P = a(X-j)^\alpha (X-j^2)^\beta$. Se reemplaza $\Rightarrow P = (X^2+X+1)^\alpha$.
3. Única raíz posible : $1 \Rightarrow P = -(X-1)^k$.

Solución del ejercicio 778 ▲003233

Las mismas raíces con las mismas multiplicidades.

Solución del ejercicio 779 ▲003234

1. $P = \frac{\Phi}{X - z_k} \Rightarrow \frac{\Phi(z_0)}{z_0 - z_k} = \frac{\Phi'(z_k)}{n}$.
2. Ambos miembros son iguales en $z_0, \dots, z_n$.
3. Descomponer Φ en la base $\big((X-z_0)^k\big)$.
4. $\sum_k e^{2ikp/n} = 0$, para $p < n \Rightarrow$ OK.

Solución del ejercicio 783 ▲003238

$x = z + \frac{1}{z}$, con $z^6 + z^5 + \dots + 1 = 0$.
Otras raíces : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ y $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Solución del ejercicio 784 ▲003239

1. Sea $P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$. Se a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P'}{P}\right)(x) = \frac{P'^2 - PP''}{P^2}(x)$.
2. Para $k = 1, x = 0$, se tiene : $a_0 a_2 \leqslant \frac{1}{2} a_1^2$.
   Para k cualquier : se aplica el caso anterior a $P^{(k-1)}$ cuyo las raíces siguen siendo reales simples : $(k-1)! a_{k-1} \times \frac{(k+1)!}{2} a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(k! a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1} a_k^2$.

Solución del ejercicio 785 ▲003240

$Q = X^2 - 3X + 1$, $P = \left(X - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(X - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)(X^2 - X + 4)$.

Solución del ejercicio 787 ▲003242

1. p es primo porque K es íntegro. Se tiene $1^p = 1$, $(xy)^p = x^p y^p$ (un cuerpo es conmutativo) y $(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k x^k y^{p-k} = x^p + y^p$, pues p divide C_p^k si $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
2. Se observa que $P' = 0 \Leftrightarrow P \in K[X^p]$. Se supone σ sobreyectiva. Sea $P(X) = Q(X^p) = a_0 + \dots + a_k X^{kp}$ un polinomio no constante con derivada nula. Existe $b_0, \dots, b_k$ tales que $b_i^p = a_i$. Entonces $P(X) = Q(X)^p$ es reducible. Se supone que todo polinomio irreducible tiene una derivada no nula. Sea $a \in K$

y $P(X) = X^p - a$. $P' = 0$, por lo tanto P es reducible. Sea Q un factor unitario irreducible de $X^p - a$. Entonces Q^p y $X^p - a$ tienen Q en factor común por lo tanto su mcd, D, es no constante. Pero Q^p y $X^p - a$ pertenecen a $K[X^p]$, por lo tanto D, obtenido por el algoritmo de Euclides también, de donde $D = X^p - a$ y $X^p - a$ divide Q^p. Por unicidad de la descomposición de Q^p en factores irreducibles, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $X^p - a = Q^r$. Por examen del grado, se tiene $r = p$, por lo tanto $\operatorname{grad} Q = 1$, $Q = X - b$ y finalmente $b^p = a$.

Solución del ejercicio 788 ▲003243

$V(\alpha)$ es par si y solo si $P(\alpha)$ y $P^{(n)}(\alpha)$ tienen mismo signo, Lo mismo se aplica a $V(\beta)$. Como $P^{(n)}(\alpha) = P^{(n)}(\beta)$ se deduce que $V(\alpha) - V(\beta)$ es par si y solo si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ tienen el mismo signo, entonces si y solo si P tiene un número par de raíces en $[\alpha, \beta]$.
Decrecimiento de V : V es constante en todo intervalo que no contenga una raíz de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$. Se considera $x_0 \in [\alpha, \beta[$ tal que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ y $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Entonces, para x cerca de x_0, con $x > x_0$, $P^{(k)}(x)$ tiene el mismo signo que $P^{(k)}(x_0)$ y $P^{(k+1)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x)$ tienen el mismo signo que $P^{(\ell)}(x_0)$, entonces el número de cambios de signo en las sub-sucesiones $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ y $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ son iguales. Del mismo modo si $P(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ y $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Esto prueba que $V(x_0^+) = V(x_0)$, para todo $x_0 \in [\alpha, \beta[$.
Se considera ahora $x_0 \in]\alpha, \beta]$ tal que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ y $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Entonces, para x cerca de x_0, con $x < x_0$ la sub-sucesión $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ tiene $\ell - k - 1$ cambios de signo si $P^{(k)}(x_0)$ y $P^{(\ell)}(x_0)$ tienen el mismo signo, $\ell - k$ cambios de signo en caso contrario, mientras que la sub-sucesión $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ tiene uno o cero. Igualmente, si $P(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ y $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ se encuentran ℓ cambios de signo para $(P(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ y cero para $(P(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ así en todos los casos $V(x_0^-) \geqslant V(x_0)$. Esto completa la demostración.

Solución del ejercicio 789 ▲003244

Para $z \in \mathbb{U}$, se tiene $Q(z) = 0 \Leftrightarrow P(z)/z^d \overline{P}(\overline{z}) = -\omega$. Como $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, los dos miembros tienen mismo módulo para todo $z \in \mathbb{U}$, por lo tanto es necesario y suficiente que los argumentos sean iguales módulo 2π. Para $a \in \mathbb{C}$, con $|a| < 1$, una determinación continua de $\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^{i\theta} - a)$ aumenta en 2π, cuando θ varía de 0 à 2π, por lo tanto, dada la hipótesis sobre las raíces de P, una determinación continua de $\operatorname{Arg}(P(z)/z^d \overline{P(z)})$ aumenta en $2\pi d$, cuando θ varía de 0 à 2π. Por lo tanto, tal determinación requiere al menos d veces un valor congruente a $\operatorname{Arg}(-\omega)$ módulo 2π, lo que prueba que Q admitir al menos d raíces distintas en $\mathbb{U}$.

Solución del ejercicio 790 ▲003245

$f(2k\pi/n) > 0 > f((2k+1)\pi/n)$, para $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto f admite $2n$ raíces en $[0, 2\pi[$. Usando $z = \mathrm{e}^{ix}$, $z^n f(x)$ es un polinomio en z de grado $2n$ teniendo $2n$ raíces en el círculo unidad ; no existe ninguna raíz en otro lugar.

Solución del ejercicio 791 ▲003246

$(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)$.

Solución del ejercicio 792 ▲003247

Raíces : $\alpha = 2 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\alpha}$, $\beta = 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\beta}$.

Factorización de P sobre $\mathbb{R}$: $P=(X^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha)X+|\alpha|^2)(X^2-2\,\mathrm{Re}(\beta)X+|\beta|^2)$ y los factores son irracionales.

Solución del **ejercicio 793** ▲003248

1. $P=|Q+iR|^2$.
2. Factorizar P.
3. Con Maple : $P=\frac{1}{65}Q\overline{Q}$, con $Q=65X^2+(49i-67)X+(42+11i)$ y Q es irreducible en $Q[i]$.
   $A+iB=\lambda Q$ y $A-iB=\overline{\lambda}\overline{Q}$, de donde :
   $$\begin{aligned}2A&=65(\lambda+\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda-(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda+(42-11i)\overline{\lambda})\\2iB&=65(\lambda-\overline{\lambda})X^2+((49i-67)\lambda+(49i+67)\overline{\lambda})X+((42+11i)\lambda-(42-11i)\overline{\lambda})\\\lambda\overline{\lambda}&=65.\end{aligned}$$
   En particular $65\lambda\in\mathbb{Z}[i]$, si se escribe $\lambda=\frac{u+iv}{65}$, con $u,v\in\mathbb{Z}$:
   $$\begin{aligned}A&=uX^2-\frac{67u+49v}{65}X+\frac{42u-11v}{65}\\B&=vX^2+\frac{49u-67v}{65}X+\frac{11u+42v}{65}\\u^2+v^2&=65.\end{aligned}$$
   $67u+49v$ es divisible por 65 si y solo si $u\equiv 8v \pmod{65}$ y en este caso los demás numeradores también son múltiplos de 65. La condición $u^2+v^2=65$ da entonces $v=\pm1, u=\pm8$, de donde :
   $$A=\pm(8X^2-9X+5),\qquad B=\pm(X^2+5X+2).$$

Solución del **ejercicio 796** ▲003251

1. Si $P=QR$, entonces $Q(a_i)R(a_i)=-1\Rightarrow Q(a_i)=-R(a_i)=\pm1$, por lo tanto $Q+R$ tiene n raíces, por lo que es nulo, y $P=-Q^2$: contradicción para $x\to\infty$.
2. El mismo razonamiento : $P=Q^2$, por lo tanto $Q^2-1=(Q-1)(Q+1)=(X-a_1)\cdots(X-a_n)$. Se reparten los factores entre $Q-1$ y $Q+1$: $n=2p$, contradicción.

Solución del **ejercicio 797** ▲003252

Sea $P=QR$, con $Q=X^{n_1}+b_{n_1-1}X^{n_1-1}+\cdots+b_0X^0$ y $R=X^{n_2}+c_{n_2-1}X^{n_2-1}+\cdots+c_0X^0$.
Por hipótesis sobre $a_0=b_0c_0$, p divide uno y solo uno de los enteros b_0, c_0. Supongamos que p divide $b_0,b_1,\dots,b_{k-1}$: entonces $a_k\equiv b_kc_0 \pmod p$, por lo tanto p divide b_k. Se llega a que « p divide el coeficiente dominante de Q », lo que es absurdo.

Solución del **ejercicio 798** ▲003253

Se supone $a\neq0$ y $X^p-a=PQ$, con $P,Q\in K[X]$ unitarios no constantes. Sea $n=\mathrm{grad}(P)\in[\![1,p-1]\!]$ y $b=(-1)^nP(0)\in K$. b es el producto de ciertos p de a, por lo tanto $b^p=a^n$. Además, $n\wedge p=1$; sea

$nu+pv=1$ una relación de Bézout. Se tiene entonces $b^{pu}=a^{nu}=a^{1-pv}$, de donde $a=(b^u/a^v)^p$, por lo tanto $b^u/a^v \in K$ es raíz de X^p-a.

Solución del ejercicio 799 ▲005318

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n-X^n-1 \text{ es divisible por } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ y } j^2 \text{ son raíces de } (X+1)^n-X^n-1\\ &\Leftrightarrow j \text{ es raíz de } (X+1)^n-X^n-1\\ &(\text{pues } (X+1)^n-X^{n-1} \text{ está en } \mathbb{R}[X])\\ &\Leftrightarrow (j+1)^n-j^n-1=0 \Leftrightarrow (-j^2)^n-j^n-1=0.\end{aligned}$$

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=-3\neq 0$.
Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=-j^2-j-1=0$.
Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=j-j^2-1=2j\neq 0$.
Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=-3\neq 0$.
Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=j^2-j-1=2j^2\neq 0$.
Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n-j^n-1=-j-j^2-1=0$.
En resumen, $(X+1)^n-X^n-1$ es divisible por X^2+X+1 si y solo si n está en $(1+6\mathbb{Z})\cup(5+6\mathbb{Z})$.

Solución del ejercicio 800 ▲005319

Sea P un polinomio no nulo con coeficientes reales. Para todo real x, se puede escribir

$$P(x)=\lambda\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

donde λ es un real no nulo, k y l son números naturales, los a_i son números reales distintos dos a dos, los α_i y los β_i de enteros naturales y los $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ de polinomios dos a dos primos entre sí con raíces no reales. En primer lugar, para todo real x, $\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j}>0$ (todos los trinomios de segundo grado considerados unitarios sin raíces reales.)
Entonces, $(\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0)\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i}\geqslant 0)$. Luego, si $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geqslant 0$, entonces $\lim_{x\to+\infty}P(x)\geqslant 0$ que impone $\lambda>0$. Después, si un exponente α_i es impar, P cambia de signo en a_i, lo que contradice la hipótesis hecha en P. Entonces, $\lambda>0$ y todos los α_i son pares.
Recíprocamente, si $\lambda>0$ y si todos los α_i son pares, entonces por supuesto, $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)\geqslant 0$.
Se define $A=\sqrt{\lambda}\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A es un elemento de $\mathbb{R}[X]$, pues $\lambda>0$ y porque los α_i son enteros pares.
Se define así $Q_1=\prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ y $Q_2=\prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admite luego del desarrollo una escritura de la forma $Q_1=B+iC$, donde B y C son polinomios con coeficientes reales. Pero entonces, $Q_2=B-iC$. Así,

$$P=A^2Q_1Q_2=A^2(B+iC)(B-iC)=A^2(B^2+C^2)=(AB)^2+(AC)^2=R^2+S^2,$$

donde R y S son polinomios con coeficientes reales.

Solución del ejercicio 801 ▲005324

Sea P un polinomio de grado n superior o igual a 2. Se define $P=\lambda(X-z_1)(X-z_2)\cdots(X-z_n)$, donde λ es un complejo no nulo y los z_k complejos no necesariamente dos a dos distintos.

$$P'=\lambda\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i}(X-z_j))=\sum_{i=1}^{n}\frac{P}{X-z_i},$$

y entonces

$$\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-z_i}.$$

Sea entonces z una raíz de P' en $\mathbb{C}$. Si z es raíz de P (y por lo tanto, raíz de P de orden al menos 2) el resultado es claro. Si no,

$$0=\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{z-z_i}}{|z-z_i|^2}.$$

poniendo $\lambda_i=\frac{1}{|z-z_i|^2}$, ($\lambda_i$ es un real estrictamente positivo) y conjugando, se obtiene $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z-z_i)=0$ y entonces

$$z=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\operatorname{bar}(z_1(\lambda_1),\ldots,z_n(\lambda_n)).$$

Solución del ejercicio 802 ▲005325

Se supone que $n=\operatorname{gr}P\geqslant 1$. Se define $P=\lambda(X-z_1)(X-z_2)\cdots(X-z_n)$, donde λ es un complejo no nulo y los z_k son complejos no necesariamente distintos dos a dos.

Basado en el ejercicio anterior, $\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-z_k}$.

Si P es divisible por P', $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}/\ P=(aX+b)P'$ y entonces $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}/\ \frac{P'}{P}=\frac{1}{aX+b}$, lo que demuestra que la fracción racional $\frac{P'}{P}$ tiene exactamente un solo polo complejo y por lo tanto, los z_k son coincidentes.

En resumen, si P' divide P, $\exists(a,\lambda)\in\mathbb{C}^2/\ P=\lambda(X-a)^n$ y $\lambda\neq 0$. Recíprocamente, si $P=\lambda(X-a)^n$, con $\lambda\neq 0$, entonces $P'=n\lambda(X-a)^{n-1}$ divide P. Los polinomios divisibles por su derivada son los polinomios de la forma $\lambda(X-a)^n$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 803 ▲005328

a es la solución del problema si y solo si $X^5-209X+a$ es divisible por un polinomio de la forma $X^2+\alpha X+1$. Pero

$$X^5-209X+a=(X^2+\alpha X+1)(X^3-\alpha X^2+(\alpha^2-1)X-(\alpha^3-2\alpha))+(\alpha^4-3\alpha^2-208)X+a+(\alpha^3-2\alpha).$$

Entonces a es solución $\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{C}/\ \begin{cases}\alpha^4-3\alpha^2-208=0\\ a=-\alpha^3+2\alpha.\end{cases}$

Pero, $\alpha^4-3\alpha^2-208=0\Leftrightarrow\alpha^2\in\{-13,16\}\Leftrightarrow\alpha\in\{-4,4,i\sqrt{13},-i\sqrt{13}\}$ y la segunda ecuación proporciona $a\in\{56,-56,15i\sqrt{13},-15i\sqrt{13}\}$.

Solución del ejercicio 804 ▲005329

Se observa que $P(1) = 1 \neq 0$ y por lo tanto, que la expresión propuesta tiene un sentido.

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1} = \sum_{k=1}^{5}(1+\frac{3}{a_k-1}) = 5-3\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{1-a_k} = 5-3\frac{P'(1)}{P(1)} = 5-3\frac{12}{1} = -31.$$

Solución del ejercicio 805 ▲005342

$$\begin{aligned}P &= X^6 - 2X^3\cos a + 1 = (X^3 - e^{ia})(X^3 - e^{-ia})\\ &= (X - e^{ia/3})(X - je^{ia/3})(X - j^2e^{ia/3})(X - e^{-ia/3})(X - je^{-ia/3})(X - j^2e^{-ia/3})\\ &= (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3}+1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3})+1)(X^2 - 2X\cos(\frac{a}{3}-\frac{2\pi}{3})+1).\end{aligned}$$

Queda por preguntarse 1) si los factores anteriores son irreducibles en $\mathbb{R}$ y 2) si estos factores son dos a dos distintos.
Los tres factores de grado 2 tienen un discriminante reducido del tipo $\Delta' = \cos^2\alpha - 1 = -\operatorname{sen}^2\alpha$ y Δ' es nulo si y solo si α está en $\pi\mathbb{Z}$. Los casos especiales son, por lo tanto ($\frac{a}{3}$ está en $\pi\mathbb{Z}$ y entonces $a = 0$) y ($\frac{a+2\pi}{3}$ está en $\pi\mathbb{Z}$ y entonces $a = \pi$) y ($\frac{a-2\pi}{3}$ está en $\pi\mathbb{Z}$ que no tiene solución en $[0,\pi]$).

1er caso. Si $a = 0$.

$$P = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 + X + 1) = (X-1)^2(X^2+X+1)^2.$$

2o caso. Si $a = \pi$, reemplazando X por $-X$ se obtiene :

$$P = (X+1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$

3o caso. Si a está en $]0,\pi[$, los tres factores de grado 2 son irreducibles en $\mathbb{R}$ y claramente dos a dos distintos. Entonces

$$P = (X^2 - 2X\cos\frac{a}{3}+1)(X^2 - 2X\cos\frac{a+2\pi}{3}+1)(X^2 - 2X\cos\frac{a-2\pi}{3}+1).$$

Solución del ejercicio 806 ▲005345

Para k elemento de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, se escribe $x_k = \operatorname{sen}\frac{k\pi}{7}$ (los x_k son dos a dos opuestos). Es necesario calcular los coeficientes del polinomio

$$\begin{aligned}P &= (X - \operatorname{sen}\frac{\pi}{7})(X - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7})(X - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7})(X + \operatorname{sen}\frac{\pi}{7})(X + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{7})(X + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2 - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{7})(X^2 - \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{7})(X^2 - \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{7})\\ &= (X^2 - \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{7}))(X^2 - \frac{1}{2}(1-\cos\frac{4\pi}{7}))(X^2 - \frac{1}{2}(1-\cos\frac{6\pi}{7}))\\ &= \frac{1}{8}Q(-2X^2+1)\end{aligned}$$

donde $Q(Y) = (\cos\frac{2\pi}{7} - Y)(\cos\frac{4\pi}{7} - Y)(\cos\frac{8\pi}{7} - Y)$. Se define $\omega = e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4) = \frac{1}{8}(6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{15})\\ &= \frac{1}{8}(\omega^6+\omega^7+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)+(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)\\ &\quad +(\omega^3+\omega^4)(\omega^2+\omega^5))\\ &= \frac{1}{4}(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En fin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6)=-\frac{1}{2}.$$

Entonces, $Q=\frac{1}{8}-(-\frac{1}{2})Y+(-\frac{1}{2})Y^2-Y^3=\frac{1}{8}(-8Y^3-4Y^2+4Y+1)$, luego

$$P=\frac{1}{64}(-8(-2X^2+1)^3-4(-2X^2+1)^2+4(-2X^2+1)+1)=\frac{1}{64}(64X^6-112X^4+54X^2-7).$$

Una ecuación de 6^o grado cuyas soluciones son los senos es $64x^6-112x^4+54x^2-7=0$. Ahora, si $r=(p$ entero relativo no nulo, q entero natural no nulo, p y q primos entre sí) es una raíz racional de esta ecuación, entonces, de acuerdo al ejercicio 944, p divide -7 y q divide 64 y entonces p es elemento de $\{1,-1,7,-7\}$ y q es elemento de $\{1,2,4,8,16,32,64\}$. Es fácil comprobar que ninguno de los racionales r obtenidos es raíz de P y por lo tanto, las raíces de P son irracionales.

Solución del ejercicio 807 ▲005349

Se escribe $P=X^4-4X^3-36X^2+\lambda X+\mu$.

$$\begin{aligned}(\lambda,\mu)\text{ solución} &\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\text{ las raíces de }P\text{ sean }z,z+r,z+2r,z+3r\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\begin{cases}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\begin{cases}4z+6r=4\\ z(3z+6r)+(z+r)(2z+5r)+(z+2r)(z+3r)=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\begin{cases}2z+3r=2\\ 6z^2+18rz+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\begin{cases}z=1-\frac{3}{2}r\\ 6(1-\frac{3}{2}r)^2+18(1-\frac{3}{2}r)r+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists(z,r)\in\mathbb{C}^2/\begin{cases}-\frac{5}{2}r^2+42=0\\ z=1-\frac{3}{2}r\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu.\end{cases}\end{aligned}$$

De ahí la solución (los dos valores opuestos de r proporcionan obviamente la misma progresión aritmética) $r = 2\sqrt{\frac{21}{5}}$, luego $z = 1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, luego las raíces $z_1 = 1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2 = 1-\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3 = 1+\sqrt{\frac{21}{5}}$ y $z_4 = 1+3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenidos para

$$\lambda = z_1z_2z_3z_4 = (1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}}) = (1-9\frac{21}{5})(1-\frac{21}{5}) = \frac{2994}{25},$$

y

$$\begin{aligned}\mu &= (1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\frac{21}{5})+(1-9\frac{21}{5})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-9\frac{21}{5})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})+(1-\frac{21}{5})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})\\ &= 2(1-\frac{21}{5})+2(1-9\frac{21}{5}) = 2(2-10\frac{21}{5}) = -80.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 808 ▲005350

Para $i \in \{1,2,3\}$, se tiene $x_i^3+2x_i-1=0$ y entonces $x_i^4+2x_i^2-x_i=0$. Añadiendo estas tres igualdades, se obtiene $S_4+2S_2-S_1=0$ y entonces

$$S_4 = -2((\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_1 = (-2)(-2\cdot 2) = 8.$$

Solución del ejercicio 809 ▲005351

Para cada uno de 8 numeradores posibles, hay $C_7^2 = 21$ denominadores y por lo tanto, en total, $8\times 21 = 168$ términos.

$$\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = \sum \frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\cdots x_8} = \frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

luego,

$$\sigma_1\sigma_6 = (\sum x_1)(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = \sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

y por lo tanto,

$$\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \sigma_1\sigma_6-\sigma_7 = (-1)(0)-1 = -1.$$

Así, $\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 810 ▲006959

1. (a) $X^3-3 = (X-3^{1/3})(X^2+3^{1/3}X+3^{2/3})$, donde $X^2+3^{1/3}X+3^{2/3}$ es irreducible en $\mathbb{R}$. Se buscan las raíces complejas para obtener la factorización en $\mathbb{C}$:

$$X^3-3 = (X-3^{1/3})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}-\frac{i}{2}3^{5/6})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}+\frac{i}{2}3^{5/6}).$$

(b) Se pasa a $X^{12}-1$. $z=re^{i\theta}$ verifica $z^{12}=1$ si y solo si $r=1$ y $12\theta\equiv 0[2\pi]$, se obtiene así que las raíces complejas $e^{ik\pi/6}$ ($k=0,\dots,11$), entre los cuales existen dos reales (-1 y 1) y cinco pares de raíces complejas conjugadas ($e^{i\pi/6}$ y $e^{11i\pi/6}$, $e^{2i\pi/6}$ y $e^{10i\pi/6}$, $e^{3i\pi/6}$ y $e^{9i\pi/6}$, $e^{4i\pi/6}$ y $e^{8i\pi/6}$, $e^{5i\pi/6}$ y $e^{7i\pi/6}$), de donde la factorización en $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1=&(X-1)(X+1)(X-e^{i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})(X-e^{2i\pi/6})\\&(X-e^{10i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{4i\pi/6})\\&(X-e^{8i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6}).\end{aligned}$$

Como $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=(X^2-2\cos(\theta)X+1)$, se deduce la factorización en $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1&=(X-1)(X+1)(X^2-2\cos(\pi/6)X+1)\\&\quad(X^2-2\cos(2\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(3\pi/6)X+1)\\&\quad(X^2-2\cos(4\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(5\pi/6)X+1)\\&=(X-1)(X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\\&\quad(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).\end{aligned}$$

(c) Para X^6+1, $z=re^{i\theta}$ verifica $z^6=-1$ si y solo si $r=1$ y $6\theta\equiv\pi[2\pi]$, se obtienen así las raíces complejas $e^{i(\pi+2k\pi)/6}$ ($k=0,\dots,5$). De ahí la factorización en $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^6+1=&(X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})\\&(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6}).\end{aligned}$$

Para obtener la factorización en $\mathbb{R}[X]$, se agrupan los pares de raíces complejas conjugadas :

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

(d) $X^9+X^6+X^3+1=P(X^3)$, donde $P(X)=X^3+X^2+X+1=\frac{X^4-1}{X-1}$: las raíces de P son, por lo tanto las tres raíces cuartas de la unidad diferentes de 1 (i, $-i$, -1) y

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1&=P(X^3)\\&=(X^3+1)(X^3-i)(X^3+i)\\&=(X^3+1)(X^6+1).\end{aligned}$$

Ya se sabe cómo factorizar X^6+1, queda por lo tanto factorizar el polinomio $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$, donde X^2-X+1 no tiene raíz real. Entonces

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1=&(X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)\\&(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)\end{aligned}$$

Para la factorización en $\mathbb{C}$: las raíces de X^2-X+1 son $e^{i\pi/3}$ y $e^{5i\pi/3}$, lo que da

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1=&(X+1)(X-e^{i\pi/3})(X-e^{5i\pi/3})\\&(X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})\\&(X-e^{7i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6}).\end{aligned}$$

2. (a) Para $X^2+(3i-1)X-2-i$, se calcula el discriminante

$$\Delta=(3i-1)^2-4(-2-i)=-2i$$

y se buscan las raíces cuadradas (¡complejas !) de Δ : $w=a+ib$ verifica $w^2=\Delta$ si y solo si $w=1-i$ o $w=-1+i$. Las raíces del polinomio son, por lo tanto $\frac{1}{2}(-(3i-1)\pm(1-i))$ y $P(X)=(X+i)(X-1+2i)$.

(b) Para $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$: -1 es una raíz evidente, y $P(X)=(X+1)(X^2+(3+i)X+2-3i)$. El discriminante del polinomio $X^2+(3+i)X+2-3i$ vale $\Delta=18i$, sus dos raíces cuadradas complejas son $\pm(3+3i)$ y finalmente se obtiene $P(X)=(X+1)(X-i)(X+3+2i)$.

Solución del ejercicio 811 ▲006960

Si P es constante igual a c, es adecuado si y solo si $c=c^2$, y entonces $c\in\{0;1\}$.
En lo sucesivo se supone P no constante. Denotemos Z el conjunto de las raíces de P. Se sabe que Z es un conjunto no vacío, finito.
Análisis
Si $z\in Z$, entonces $P(z)=0$ y la relación $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ implica $P(z^2)=0$, por lo tanto $z^2\in Z$. Iterando, se obtiene $z^{2k}\in Z$ (para todo $k\in\mathbb{N}^*$). Si $|z|>1$, la sucesión $(|z^{2k}|)_k$ es estrictamente creciente por lo que Z contiene una infinidad de elementos, lo que es imposible. Del mismo modo si $0<|z|<1$, la sucesión $(|z^{2k}|)_k$ es estrictamente decreciente, que es imposible por la misma razón. Entonces los elementos de Z son ya sea 0, ya sea los números complejos de módulo 1.
Además, si $P(z)=0$, entonces siempre por la relación $P(X^2)=P(X)P(X+1)$, se tiene que $P((z-1)^2)=0$, por lo tanto $(z-1)^2\in Z$. Por el mismo razonamiento que antes, entonces o bien $z-1=0$ o bien $|z-1|=1$. Escribiendo $z=a+ib$, se verifica que $|z|=|z-1|=1$ equivale a $z=\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$. Finalmente, $Z\subset\left\{0,1,\mathrm{e}^{i\pi/3},\mathrm{e}^{-i\pi/3}\right\}$. Pero si $\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$ es raíz de P, entonces $(\mathrm{e}^{\pm i\pi/3})^2$ también debería estar en Z, pero no es ninguno de los cuatro números complejos enumerados anteriormente. Entonces ni $\mathrm{e}^{i\pi/3}$, ni $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ están en Z. Las dos únicas raíces (complejos) posibles son, por lo tanto 0 y 1.
Conclusión : el polinomio P es necesariamente de la forma $\lambda X^k(X-1)^\ell$.

Síntesis
La condición $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ se convierte en

$$\lambda X^{2k}(X^2-1)^\ell=\lambda^2X^k(X-1)^\ell(X+1)^kX^\ell$$

que equivale a $\begin{cases}\lambda^2=\lambda\\2k=k+\ell\\k=\ell.\end{cases}$ Dicho de otra manera $k=\ell$ y $\lambda=1$ (porque se supone P no constante). *Conclusión* Finalmente, las soluciones son el polinomio nulo y los polinomios $(X^2-X)^k$, $k\in\mathbb{N}$ ($k=0$ da el polinomio 1).

Solución del ejercicio 812 ▲006961

1. Comenzar señalando que si P y Q son dos polinomios que sirven, así que para todo $z\in\mathbb{C}^*$, $P\left(z+\frac{1}{z}\right)-Q\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$. Aplicando esta igualdad a $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, se obtiene $(P-Q)(2\cos\theta)=0$.
   El polinomio $P-Q$ tiene infinidad de raíces, por lo que es nulo, lo que demuestra $P=Q$.
2. Demostrar la existencia de P por recurrencia fuerte en n :

— Para $n=0$, $P=2$ sirve y para $n=1$, $P=X$ sirve.

— Pasando de los rangos $k\leqslant n$ al rango $n+1$. Si se denota P_k el polinomio construido para $k\leqslant n$, se tiene

$$z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=(z+\frac{1}{z})(z^n+\frac{1}{z^n})-(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}})=(z+\frac{1}{z})P_n(z+\frac{1}{z})-P_{n-1}(z+\frac{1}{z})$$

por lo tanto $P_{n+1}(X)=XP_n(X)-P_{n-1}(X)$ sirve.

— Sea ha construido así P_n, para todo n (con $\operatorname{grad}P_n=n$).

3. Se fija n y se denota P el polinomio obtenido. Para todo $\theta\in\mathbb{R}$, $P(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})=\mathrm{e}^{en\theta}+\mathrm{e}^{-in\theta}$, por lo tanto $P(2\cos(\theta))=2\cos(n\theta)$. Usando $x=2\cos(\theta)$ y entonces $\theta=\arccos(\frac{x}{2})$ se obtiene la relación. Así,
$$P(x)=2\cos(n\arccos(\frac{x}{2}))\qquad\forall x\in[-2,2]$$
El polinomio derivada es $P'(x)=\frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\operatorname{sen}(n\arccos(\frac{x}{2}))$, se anula cambiando de signo en cada $\alpha_k=2\cos(\frac{k\pi}{n})$, así $P'(\alpha_k)=0$, para $k=0,\dots,n$.
Se calcula también que $P(\alpha_k)=\pm2$. La tabla de signos demuestra que P es alternativamente creciente (de -2 a $+2$), luego decreciente (de $+2$ a -2) en cada intervalo $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$, que forman una partición de $[-2,2]$. Por el teorema de valores intermediarios, P tiene n raíces simples (una en cada intervalo $[\alpha_{k+1},\alpha_k]$) en $[-2,2]$. Porque P es de grado n, se han obtenido así todas sus raíces.

Solución del ejercicio 813 ▲006962

1. Si $k\in\mathbb{Z}$ es raíz de P, entonces $k^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k=-a_0$, lo que da $k(k^{n-1}+\cdots+a_1)=-a_0$, por lo tanto k divide a_0.
2. Si $X^3-X^2-109X-11$ tiene una raíz $k\in\mathbb{Z}$, necesariamente k divide 11, por lo tanto k vale -1, 1, -11 o 11. Al probar estos cuatro valores, se encuentra que solo 11 es raíz. Igualmente, si $X^{10}+X^5+1$ admite una raíz entera k, que divide 1 por lo tanto vale $k=\pm1$, pero se comprueba que tampoco $+1$, ni -1 son raíces. Así $X^{10}+X^5+1$ no tiene una raíz entera.

Solución del ejercicio 814 ▲006963

Se tiene
$$L_i(a_i)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\frac{a_i-a_j}{a_i-a_j}=1\qquad\text{y}\qquad L_i(a_j)=0\text{ si }j\neq i,$$
porque el producto contiene un factor que es nulo : (a_j-a_j). Porque los L_i todos son de grado n, el polinomio P es de grado menor o igual que n, y $P(a_j)=\sum_{i=0}^{n}b_iL_i(a_j)=b_i$. Queda por demostrar que tal polinomio es único. Se supone que Q sirve también, entonces $P-Q$ es de grado menor o igual que n y se anula en $n+1$ puntos (los a_i), por lo que es idénticamente nulo, i.e. $P=Q$.
Para la aplicación se utilizan los polinomios de interpolación de Lagrange con $a_0=0$, $b_0=1$; $a_1=1$, $b_1=0$; $a_2=-1$, $b_2=-2$; $a_3=2$, $b_3=4$. Se sabe que tal polinomio $P(X)$ es único y se escribe
$$P(X)=1\cdot L_0(X)+0\cdot L_1(X)-2\cdot L_2(X)+4L_3(X),$$

donde

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \tfrac{1}{2}(X^3-2X^2-X+2)$$
$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = -\tfrac{1}{2}(X^3-X^2-2X)$$
$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\tfrac{1}{6}(X^3-3X^2+2X)$$
$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \tfrac{1}{6}(X^3-X).$$

Así :

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

Solución del ejercicio 816 ▲000444

1. $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\dfrac{5}{X-1}.$
2. $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X+7-\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{19}{X-2}.$
3. $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\dfrac{3}{(X-1)^2}+\dfrac{7}{X-1}.$
4. $\dfrac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2+3+\dfrac{2}{X-1}-\dfrac{2}{X+1}.$
5. $\dfrac{X}{X^2-4} = \dfrac{1/2}{X+2}+\dfrac{1/2}{X-2}.$
6. $\dfrac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1/2}{X+1}+\dfrac{3/2}{X-1}.$
7. $\dfrac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1+\dfrac{1}{X}+\dfrac{3}{(X-1)^4}+\dfrac{6}{(X-1)^3}+\dfrac{10}{(X-1)^2}+\dfrac{4}{X-1}.$
8. $\dfrac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1+\dfrac{3/4}{(X-1)^3}+\dfrac{3/2}{(X-1)^2}+\dfrac{37/16}{X-1}-\dfrac{1/8}{(X+1)^2}-\dfrac{5/16}{X+1}.$
9. $\dfrac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X-3+\dfrac{7X+13}{(X^2+X+2)^3}-\dfrac{7X+21}{(X^2+X+2)^2}+\dfrac{14}{X^2+X+2}.$
10. $\dfrac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \dfrac{2+i}{X-i}+\dfrac{1-3i}{X+2i}.$
11. $\dfrac{X+i}{X^2+i} = \dfrac{\frac{-\sqrt{2}+2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}.$
12. $\dfrac{X}{(X+i)^2} = \dfrac{1}{X+i}-\dfrac{i}{(X+i)^2}.$
13. $\dfrac{X^2+1}{X^4+1} = \dfrac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1}$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

14. $\dfrac{X}{X^4+1}=-\dfrac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\dfrac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+$
$\dfrac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}.$

15. $\dfrac{X^2+X+1}{X^4+1}=\dfrac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\dfrac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\dfrac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\dfrac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+$
$\dfrac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}.$

16. $\dfrac{X^5+X+1}{X^4-1}=X+\dfrac{3/4}{X-1}+\dfrac{1/4}{X+1}-\dfrac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1}=X+\dfrac{3/4}{X-1}+\dfrac{1/4}{X+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}.$

17. $\dfrac{X^5+X+1}{X^6-1}=\dfrac{1/2}{X-1}+\dfrac{1/6}{X+1}+\dfrac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1}=\dfrac{1/2}{X-1}+\dfrac{1/6}{X+1}-\dfrac{\frac{1}{3}j}{X+j}-\dfrac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, donde se ha puesto de manera estándar $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

18. $\dfrac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}=-\dfrac{2}{X^4}+\dfrac{4}{X^3}-\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{3}{X}+\dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2}+\dfrac{3X+5}{X^2+X+1}=$
$-\dfrac{2}{X^4}+\dfrac{4}{X^3}-\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{3}{X}+\dfrac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2}+\dfrac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2}+\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j}+\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, donde se ha puesto de manera estándar $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

19. $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}=\dfrac{\frac{1}{3}X}{X^2+1}-\dfrac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}=\dfrac{1/6}{X-i}+\dfrac{1/6}{X+i}-\dfrac{1/6}{X-2i}-\dfrac{1/6}{X+2i}.$

20. $\dfrac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}=-\dfrac{4/3}{X^2+1}+\dfrac{7/3}{X^2+4}=\dfrac{\frac{2}{3}i}{X-i}+\dfrac{-\frac{2}{3}i}{X+i}+\dfrac{-\frac{7}{12}i}{X-2i}+\dfrac{\frac{7}{12}i}{X+2i}.$

Solución del ejercicio 817 ▲000445

Comenzar por supuesto con la división según potencias decrecientes (que lo hagan los estudiantes) : $\Phi=x+1+\Phi_1$, con $\Phi_1=\frac{4x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$.
Después factorizar el denominador y dar el tipo de descomposición de Φ_1 :

$$\Phi_1=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Explicitar que se obtiene entonces A multiplicando los dos miembros de (22) por x^2 y pasando al límite, cuando x tiende a 0 ($A=-1$). Se obtiene el mismo C multiplicando por $x-\frac{1}{2}$ y calculando del límite cuando x tiende a $\frac{1}{2}$ ($C=-2$).
Finalmente, encontramos B identificando un valor concreto que aún no se haya utilizado, por ejemplo $x=1$, o mejor multiplicando los dos miembros de (22) por x y pasando al límite de $x\to\infty$ ($B=4$). Señalar que para un caso tan simple, se pueden hacer cálculos *mentales* simplemente escribiendo los coeficientes A, B, C a medida que se van obteniendo.

$$\frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}=x+1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

Solución del ejercicio 818 ▲000446

La división según las potencias decrecientes da : $\Phi = 2+\Phi_1$, con

$$\Phi_1 = \frac{4x^4-10x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}.$$

Señalar que el método del ejercicio anterior facilita la obtención A y D multiplicando por x^3 y por $(x-1)^2$, pero aún quedan 3 coeficientes a determinar.
Hay aquí un método más eficiente : efectuar la división según las potencias crecientes, de orden 3 (que es el exponente del factor x) del numerador $1-4x+8x^2-10x^3+4x^4$ por $(x-1)^2$, o más bien por $1-2x+x^2$:

$$1-4x+8x^2-10x^3+4x^4 = (1-2x+x^2)\times(1-2x+3x^2)+(-2x^3+x^4). \tag{23}$$

dividiendo los dos miembros de (23) por $x^3(x-1)^2$, se obtiene A, B y C de una sola vez :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

El cálculo de D y E es entonces inmediato por descomposición de $\frac{x-2}{(x-1)^2}$: método del ejercicio anterior, o división según las potencias decrecientes de $x-2$ por $x-1$: $x-2=(x-1)-1$.

$$\frac{2x^5-8x^3+8x^2-4x+1}{x^3(x-1)^2} = 2+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}.$$

Observación : este método es eficiente para un exponente suficientemente grande (a partir de 3). Se puede utilizar para una fracción del tipo $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, pero hay que empezar con el cambio de variable $u=x-a$ antes de hacer la división, entonces, por supuesto, luego volver a la variable x.

Solución del ejercicio 819 ▲000447

Sin división preliminar en este caso... Forma de la descomposición :

$$\Phi = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{24}$$

El método del primer ejercicio permite obtener A, luego B y C (por estos últimos : multiplicación de los dos miembros de (24) por x^2+1, luego el límite cuando x tiende a i o hacia $-i$, con separación de partes reales e imaginarias), pero esto no es suficiente para concluir : es necesario aún restar $\frac{Bx+C}{(x^2+1)^3}$, simplificar por x^2+1, calcular D y E... (hacerlo de todos modos como una práctica).
Se va a tratar de encontrar A ($A=3$), entonces hacer la resta $\Phi_1 = \Phi-\frac{A}{x}$. Se deben hacer los cálculos ; hacer señalar que, excepto error de cálculo, la fracción Φ_1 *debe* simplificarse por x. Se encuentra :

$$\Phi = \frac{3}{x}+\frac{x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x+2}{(x^2+1)^3}.$$

El final de la descomposición se hace por divisiones sucesivas siguiendo las potencias decrecientes : división del numerador $x^5-2x^4+2x^3-x^2+2x+2$ por x^2+1, luego del cociente obtenido por x^2+1.

$$\frac{4x^6-2x^5+11x^4-x^3+11x^2+2x+3}{x(x^2+1)^3} = \frac{3}{x}+\frac{x+1}{(x^2+1)^3}+\frac{3}{(x^2+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+1}.$$

Observación : este método de divisiones sucesivas es muy práctico cuando la fracción a descomponer tiene denominador *simple*, es decir que tiene un denominador del tipo Q^n, donde Q es de primer grado, o de segundo grado sin raíz real. Se observa también cómo se puede simplificar poco a poco eliminando un denominador del denominador *simple* (método utilizado en el ejercicio 3 por el cálculo de $\Phi - \frac{A}{x}$).

Solución del ejercicio 823 ▲003270

1.
2.
3. si y solo si $\exists\ G \in K(X)$ tal que $G \circ F = X \Rightarrow P \circ F = XQ \circ F$.

   $F = \frac{A}{B},\ A \wedge B = 1 \Rightarrow \begin{cases} A \mid (p_0 - Xq_0) \\ B \mid (p_n - Xq_n) \end{cases} \Rightarrow F$ es homográfica.
4. $F = \phi(X)$.

Solución del ejercicio 825 ▲003272

$F = \frac{P}{Q}$. Si $P = \lambda Q : \operatorname{Im} F = \{\lambda\}$.
Si $P = \lambda Q + \mu : \operatorname{Im} F = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$.
Si no, $\operatorname{Im} F = \mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 826 ▲003273

1) $G =$cte.
2) F tiene un solo polo $a \Rightarrow F = \dfrac{P}{(X-a)^k}$ y $G = a + \frac{1}{Q}$, con $\operatorname{grad} P \leqslant k$.
3) $F \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow G \in \mathbb{C}[X]$.

Solución del ejercicio 827 ▲003274

1.
2. $n\dfrac{X^n+1}{X^n-1}$.

Solución del ejercicio 828 ▲003275

1. $\Rightarrow \dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})} = \dfrac{P(X)+P(\frac{1}{X})}{Q(X)+Q(\frac{1}{X})}$.
2.
3.

Solución del ejercicio 831 ▲003278

$I_k = \{F$ tales que $\operatorname{grad} F \leqslant -k\}$.

Solución del ejercicio 833 ▲003280

$$\frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)} = \frac{-1/2}{(X+1)^2}+\frac{-3/4}{X+1}+\frac{1/12}{X-1}+\frac{1/3}{X-j}+\frac{1/3}{X-j^2}$$
$$= \frac{-1/2}{(X+1)^2}+\frac{-3/4}{X+1}+\frac{1/12}{X-1}+\frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.$$

Solución del ejercicio 834 ▲003281

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+p}p!}{k!\,(n-k)!\,(X+k)^{p+1}}$.
2. $\displaystyle\frac{(-1)^p p!}{2i\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{1}{(X-e^{i\alpha})^{p+1}}-\frac{1}{(X-e^{-i\alpha})^{p+1}}\right)=\frac{\sum_{k=0}^{p}C_{p+1}^{k}p!\,(-1)^k\frac{\operatorname{sen}(p+1-k)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}X^k}{(X^2-2X\cos\alpha+1)^{p+1}}$.
3. $\displaystyle\frac{\sum_{k\text{ par}}C_{p+1}^{k}p!\,(-1)^{p+1}\frac{\operatorname{sh}k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k}+\sum_{k\text{ impar}}C_{p+1}^{k}p!\,(-1)^{p}\frac{\operatorname{ch}k\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}X^{p+1-k}}{(X^2-2X\operatorname{sh}\alpha-1)^{p+1}}$.

Solución del ejercicio 835 ▲003282

1. 1.
2. $1/4$.
3. $1/2$.

Solución del ejercicio 836 ▲003283

$$\frac{1}{Q(a)(X-a)^2}-\frac{Q'(a)}{Q^2(a)(X-a)}=\frac{2}{R''(a)(X-a)^2}-\frac{2R'''(a)}{3R''^2(a)(X-a)}.$$

Solución del ejercicio 837 ▲003284

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1+a_i^2)^n}{P'^2(a_i)(X-a_i)^2}+\frac{2na_i-P''(a_i)(1+a_i^2)/P'(a_i)}{P'^2(a_i)(X-a_i)}\right)$.
2.

Solución del ejercicio 838 ▲003285

1. Descomponer $1/P$ en elementos simples, y tomar $x\to\infty$.
2. Lo mismo con $X^k/P \Rightarrow \Sigma = \begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant k<n-1\\ 1 & \text{si } k=n-1.\end{cases}$

Solución del ejercicio 839 ▲003286

1. $\displaystyle P'=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iP}{X-x_i}\Rightarrow\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{X-x_i}$.

2. $P'(z)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\overline{z-x_i}}{|z-x_i|^2}=0 \Leftrightarrow z=\text{Bar}\left(x_i, \frac{m_i}{|z-x_i|^2}\right)$.

3.

4.

Solución del ejercicio 841 ▲003288

$F(X+1)-F(X)=\frac{2}{X-1}-\frac{3}{X}+\frac{1}{X+1} \Rightarrow F(X)=\frac{1}{X}-\frac{2}{X-1}+\text{cte}.$

Solución del ejercicio 842 ▲003289

$F=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{X-b_j}-\frac{1}{X-c}=\lambda\frac{\prod(X-a_i)}{(X-c)\prod(X-bj)}$, donde $\lambda=-\prod\frac{c-b_i}{c-a_i}$.

Solución del ejercicio 843 ▲003290

$Q=(XP+P')(XP'+P)=XP^2\left(X+\frac{P'}{P}\right)\left(\frac{1}{X}+\frac{P'}{P}\right)$. $\frac{P'}{P}=\sum\frac{1}{X-a_i}$, entonces las expresiones : $x+\frac{P'(x)}{P(x)}$ y $\frac{1}{x}+\frac{P'(x)}{P(x)}$ cambio de signo entre a_i y a_{i+1}. Esto hace al menos $2n-3$ raíces distintas ($2n-2$ si 1 no es raíz), aún más una raíz para $\frac{1}{x}+\frac{P'(x)}{P(x)}$ entre 0 y a_1.

Solución del ejercicio 844 ▲003291

$\frac{P}{Q}=\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{(X-k)\prod_{i\neq k}(k-i)}$, por lo tanto $\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}=\lim_{x\to\infty}\frac{xP(x)}{Q(x)}=1$. Si se supone $|P(k)|<\frac{n!}{2^n}$, para todo $k\in[\![0,n]\!]$, entonces $\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{P(k)}{\prod_{i\neq k}(k-i)}\right|<\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)}=1$, contradicción.

Solución del ejercicio 845 ▲003292

1. Se supone $P\neq 0$. Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ las raíces de P de multiplicidades $m_1,\dots,m_p$ y $n=m_1+\dots+m_p=\text{grad}(P)$. Se tiene $\frac{P'}{P}=\sum_i\frac{m_i}{X-\alpha_i}$ y $\sum_i\frac{-m_i}{(X-\alpha_i)^2}=\left(\frac{P'}{P}\right)'=\frac{P''}{P}-\left(\frac{P'}{P}\right)^2=\frac{n(n-1)}{(X-\alpha)(X-\beta)}-\left(\sum_i\frac{m_i}{X-\alpha_i}\right)^2$, donde α,β son las dos raíces de P faltando en P''. Si $\alpha_i\notin\{\alpha,\beta\}$, entonces comparando los términos en $1/(X-\alpha_i)^2$ de los miembros extremos se encuentra $m_i=1$. Del mismo modo si $\alpha_i=\alpha\neq\beta$ o la inversa. Queda aún el caso $\alpha_i=\alpha=\beta$ que da $-m_i=n(n-1)-m_i^2$, por lo tanto $m_i=n$, lo que contradice la hipótesis "P tiene dos raíces distintas".
2. Sean $\alpha_i<\alpha_j$ las dos raíces reales más pequeñas de P. Si α_i es también raíz de P'', entonces P y P'' cambio de signo en α_i y, reemplazando según sea necesario P por $-P$, P es convexo positivo en $]-\infty,\alpha_i[$ y cóncavo negativo en $]\alpha_i,\alpha_j[$, lo que es absurdo. Entonces $\alpha_i\in\{\alpha,\beta\}$. Igualmente para la más grande raíz real de P, lo que prueba que α y β son reales. Identificando los elementos de

primera especie en las dos descomposiciones de P'/P se obtiene :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j\neq i} \frac{2}{\alpha_i-\alpha_j} = \begin{cases} n(n-1)/(\alpha-\beta) & \text{si } \alpha_i=\alpha,\\ n(n-1)/(\beta-\alpha) & \text{si } \alpha_i=\beta,\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

En particular para $\alpha_i \notin \{\alpha,\beta\}$ se tiene : $\sum_{j\neq i} \frac{\overline{\alpha_i}-\overline{\alpha_j}}{|\alpha_i-\alpha_j|^2} = 0$, lo que significa que $\overline{\alpha_i}$ es el baricentro de $\overline{\alpha_j}$, con coeficientes positivos, así pertenece a la envolvente convexa de los $\overline{\alpha_j}$, $j \neq i$. Lo mismo sucede sin las barras, y por lo tanto, el conjunto de raíces de P no tiene más puntos extremos que α y β ; está incluido en $[\alpha,\beta]$ así en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 846 ▲003293

1. $X^3-1=(X^2+1)(X^3+X^2-1)-X^4(X+1)$.
2. $F(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\arctan x+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$.

Solución del ejercicio 847 ▲003294

1. $1=(1-X)^2(1+2X+3X^2+\cdots+nX^{n-1})+(n+1)X^n-nX^{n+1}$.
2. $=\frac{-n\cos n\theta+(n+1)\cos(n-1)\theta-\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$.

Solución del ejercicio 848 ▲003295

1. $1-X^2=(1-2X\cos\theta+X^2)(1+2X\cos\theta+\cdots+2X^n\cos n\theta)+2X^{n+1}\cos(n+1)\theta-2X^{n+2}\cos n\theta$.
2. $=\frac{\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Solución del ejercicio 849 ▲003296

1.
2. División de 1 por $P \Rightarrow U=1-2X+X^2+X^3-X^4$, $V=-1+X^2+X^3+X^4$.

Solución del ejercicio 850 ▲005335

1. Sea $F=\frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}=\frac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.
   1 y 2 no son raíces del polinomio X^2+3X+5 y entonces, F es de hecho en forma irreducible. La parte entera de F es claramente 1, F se escribe en forma :
   $$F=1+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2},$$
   donde a y b son dos reales.

$a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+3+5}{1-2} = -9$ y $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+6+5}{2-1} = 15$. Entonces,

$$F = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2. Sea $F = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La descomposición en elementos simples de F se escribe en forma :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

donde a, b y c son tres reales. $a = \lim_{x\to 1}(x-1)F(x) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$, luego $b = \lim_{x\to 2}(x-2)F(x) = \frac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$ y $c = \lim_{x\to 3}(x-3)F(x) = \frac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Entonces,

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3. Sea $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

con $a = \lim_{x\to 0} xF(x) = 1$ y $c = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = 1$. En fin, $x = -1$ proporciona $-1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ y entonces $b = -1$. Para encontrar b, también podemos escribir (el mejor) $0 = \lim_{x\to+\infty} xF(x) = a+b$ y así como $b = -a = -1$. Se puede todavía escribir (peor aquí)

$$\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1-(X-1)^2-X}{X(X-1)^2} = \frac{-X^2+X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X-1}.$$

Así,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Otro enfoque.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2}\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.\end{aligned}$$

4. Sea $F = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Porque F es par, la descomposición en elementos simples de F es de la forma :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{2}$ después, $x = 0$ proporciona $-2a+2b = 1$ y entonces $a = 0$.

$$F = \frac{1}{2}(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}).$$

5. Sea $F = \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Porque F es par, la descomposición en elementos simples de F es de la forma :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

$c = \lim_{x\to 2}(x-2)^3F(x) = \frac{1}{64}$, luego

$$F - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3}\right) = \frac{64-(X+2)^3+(X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3}$$
$$= -\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}$$

Entonces, $b = \lim_{x\to 2}(x-2)^2(F(x) - \frac{1}{64}(\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3}) = -\frac{3}{16}\frac{1}{(2+2)^2} = -\frac{3}{256}$. En fin, $x=0$ proporciona $-\frac{1}{64} = -a - \frac{3}{512} - \frac{1}{256}$ y $a = \frac{1}{64} - \frac{5}{512} = \frac{3}{512}$. Así,

$$F = \frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3}\right).$$

6. Sea $F = \frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. Se tiene ya $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Porque F es real, la descomposición en elementos simples de F se escribe

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$b = \lim_{z\to 1}(z-1)^2F(z) = \frac{1}{9}$ y

$$d = \lim_{z\to j}(z-j)^2F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2}$$
$$= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9}$$

Luego,

$$\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)}$$
$$= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)}$$
$$= \frac{(X^2+X+1)^2 + (X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2} = \frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}.$$

Por consiguiente,

$$F - 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) = \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2}$$
$$= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2}$$
$$= \frac{4}{3}\frac{1}{X^3-1}.$$

Pero entonces, $a = \lim_{z\to 1}(z-1)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{1+1+1} = \frac{4}{9}$. Igualmente,

$$c = \lim_{z\to j}(z-j)(F(z)-1-\frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{j^2}{(z-j)^2}+\frac{j}{(z-j^2)^2}) = \frac{4}{3}\frac{1}{(j-1)(j-j^2)} = \frac{4j^2}{9}.$$

Así,

$$F = 1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2}{X-j}+\frac{j^2}{(X-j)^2}+\frac{4j}{X-j^2}+\frac{j}{(X-j^2)^2}).$$

Si se quiere la descomposición en $\mathbb{R}$, se pueden agrupar los conjugados :

$$\begin{aligned}
F &= 1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j^2(X-j^2)+4j(X-j)}{X^2+X+1}+\frac{j^2(X-j^2)^2+j(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}) \\
&= 1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2}) \\
&= 1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+4}{X^2+X+1}+\frac{-X^2-X-1+3X+3}{(X^2+X+1)^2}) \\
&= 1+\frac{1}{9}(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X+3}{X^2+X+1}+\frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}).
\end{aligned}$$

7. Sea $F = \frac{1}{X^6+1} = \sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$, donde $\omega_k = \mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})}$. Pero,

$$\lambda_k = \frac{1}{6\omega_k^5} = \frac{\omega_k}{6\omega_k^6} = -\frac{\omega_k}{6}.$$

Así,

$$\frac{1}{X^6+1} = \frac{1}{6}(-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}-\frac{\mathrm{e}^{i\pi/6}}{X-\mathrm{e}^{i\pi/6}}-\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/6}}{X-\mathrm{e}^{-i\pi/6}}+\frac{\mathrm{e}^{i\pi/6}}{X+\mathrm{e}^{i\pi/6}}+\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/6}}{X+\mathrm{e}^{-i\pi/6}}).$$

8. Sea $F = \frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}
X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2 &= (X-1)(X^4-2X^3+3X^2-4X+2) = (X-1)^2(X^3-X^2+2X-2) \\
&= (X-1)^2(X^2(X-1)+2(X-1)) = (X-1)^3(X^2+2).
\end{aligned}$$

La descomposición en elementos simples de F es, por lo tanto de la forma

$$F = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Después,

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{z\to i\sqrt{2}}(z-i\sqrt{2})F(z) = \frac{(i\sqrt{2})^2+3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = \frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{-4+10i\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2})+(2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4X-20}{X^2+2}=\frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}&=\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27(X^2+2)}\\&=\frac{27(X^2+3)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\&=\frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\&=\frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}\\&=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$F=\frac{1}{27}(\frac{1}{X-1}-6\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3})-\frac{1}{108}(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}).$$

9. Sea $F=\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Porque F es real e impar, la descomposición en elementos simples de F es de la forma

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{d}{(X-i)^3}+\frac{\overline{b}}{X+i}+\frac{\overline{c}}{(X+i)^2}+\frac{\overline{d}}{(X+i)^3}.$$

$a=\lim_{x\to 1}(x-1)F(x)=\frac{1}{(1+1)^3(1+1)}=\frac{1}{16}$. Luego,

$$\begin{aligned}F-\frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1})&=\frac{8X-X(X^2+1)^3}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=\frac{-X^7-3X^5-3X^3+7X}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}\\&=\frac{X(X^2-1)(-X^4-4X^2-7)}{8(X^2+1)^3(X^2-1)}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}.\end{aligned}$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned}d&=\lim_{x\to i}(x-i)^3F(x)=\lim_{x\to i}(x-i)^3(F(x)-\frac{1}{16}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}))\\&=-\frac{1}{8}\frac{i^4+4i^2+7}{(i+i)^3}=-\frac{i}{16}.\end{aligned}$$

Así,

$$-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{i}{16}\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{i}{16}\frac{1}{(X+i)^3}=-\frac{1}{8}\frac{X^4+4X^2+7}{(X^2+1)^3}+\frac{1}{8}\frac{3X^2-1}{(X^2+1)^3}=\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}.$$

luego, $c=\frac{i^2+6}{8(i+i)^2}=-\frac{5}{32}$. Después,

$$\frac{X^2+6}{8(X^2+1)^2}+\frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2})=\frac{2(X^2+6)+5(X^2-1)}{16(X^2+1)^2}=\frac{7}{16(X^2+1)}.$$

En fin, $b = \frac{7}{16(i+i)} = -\frac{7i}{32}$. Finalmente,

$$F = \frac{1}{16}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}) - \frac{7i}{32}(\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i}) - \frac{5}{32}(\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{1}{(X+i)^2}) - \frac{i}{16}(\frac{1}{(X-i)^3}-\frac{1}{(X+i)^3}).$$

10. Sea $F = \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned} X^5-X^4+X^3-X^2+X-1 &= X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1) = (X-1)((X^4+2X^2+1)-X^2) \\ &= (X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \\ &= (X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2). \end{aligned}$$

Porque F es real, la descomposición en elementos simples de F es de la forma

$$F = aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\overline{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\overline{e}}{X-j^2}.$$

$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} = 1$, luego $b = \lim_{x\to+\infty}(F(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\cdots}{x^5\cdots} = 1$. Después, $c = \frac{1^6+1}{5-4+3-2+1} = \frac{2}{3}$, $d = \frac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1} = \frac{2}{3j^2+3j-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$ y $e = \frac{(-j)^6+1}{5j^4+4j^3+3j^2+2j+1} = \frac{2}{3j^2+7j+5} = \frac{1}{2j+1}$. Entonces,

$$F = X+1+\frac{2}{3}\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j}-\frac{1}{3}\frac{1}{X-j^2}+\frac{1}{2j+1}\frac{1}{X+j}+\frac{1}{2j^2+1}\frac{1}{X-j^2}.$$

11. Sea $F = \frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$. La descomposición en $\mathbb{R}$ (fuera de programa) se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X^7+1 &= (X^2+X+1)(X^5-X^4+X^2-X)+X+1 \\ &= (X^2+X+1)[(X^2+X+1)(X^3-2X^2+X+2)-4X-2]+X+1 \\ &= (X^2+X+1)^2(X^3-2X^2+X+2)-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1 \\ &= (X^2+X+1)^2[(X^2+X+1)(X-3)+3X+5]-(4X+2)(X^2+X+1)+X+1 \\ &= X+1-(4X+2)(X^2+X+1)+(3X+5)(X^2+X+1)^2+(X-3)(X^2+X+1)^3. \end{aligned}$$

Así,

$$F = X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.$$

12. Sea $F = \frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La descomposición de F en elementos simples es de la forma

$$F = \frac{a}{X}+\frac{b_1}{X-1}+\frac{b_2}{(X-1)^2}+\frac{b_3}{(X-1)^3}+\frac{b_4}{(X-1)^4}+\frac{c_1}{X-\sqrt{2}}+\frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{d_1}{X+\sqrt{2}}+\frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$a = \lim_{x\to 0} xF(x) = \frac{1}{4}$. Después,

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{x\to\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})^2F(x) = \frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} = \frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})} = \frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})} = \frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Un cálculo conjugado proporciona $d_2 = \frac{3}{16}(24-17\sqrt{2})$. Se tiene así

$$\frac{3}{16}\left(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2}+\frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2}\right)=\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1)-3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2}\\ &= \frac{-18X^7+21X^6+60X^5-90X^4-30X^3+95X^2-36X+2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2}\\ &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)}\end{aligned}$$

Pero entonces,

$$c_1 = \frac{-18.4\sqrt{2}+21.4+24.2\sqrt{2}-48.2+18\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{-13-6\sqrt{2}}{8(17-12\sqrt{2})}=-\frac{1}{8}(365+258\sqrt{2}),$$

y por un cálculo conjugado, $d_1 = -\frac{1}{8}(365-258\sqrt{2})$. Luego,

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{365+258\sqrt{2}}{X-\sqrt{2}}+\frac{365-258\sqrt{2}}{X+\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}+\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2} &= \frac{-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1}{2X(X-1)^4(X^2-2)}+\frac{365X+516}{4(X^2-2)}\\ &= \frac{2(-18X^5+21X^4+24X^3-48X^2+18X-1)+(365X+516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)}\\ &= \frac{365X^6-980X^5+168X^4+1684X^3-1795X^2+552X-2}{4X(X-1)^4(X^2-2)}\\ &= \frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4}\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}&F-\frac{3}{2}\frac{6X^2+17X+12}{(X^2-2)^2}+\frac{1}{4}\frac{365X+516}{X^2-2}-\frac{1}{4X}=\frac{365X^4-980X^3+898X^2-276X+1}{4X(X-1)^4}-\frac{1}{4X}\\ &=\frac{(365X^4-980X^3+898X^2-276X+1)-(X-1)^4}{4X(X-1)^4}=\frac{364X^4-976X^3+892X^2-272X}{4X(X-1)^4}\\ &=\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}.\end{aligned}$$

En fin, $b_4 = \lim_{x\to 1}(x-1)^4\frac{182x^3-488x^2+446x-136}{2(x-1)^4}=2$, luego

$$\frac{182X^3-488X^2+446X-136}{2(X-1)^4}-\frac{2}{(X-1)^4}=\frac{91X^3-244X^2+223X-70}{(X-1)^4}=\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3}.$$

Después, $b_3 = \lim_{x\to 1}(x-1)^3 \frac{91x^2-153x+70}{(x-1)^3} = 8$, luego

$$\frac{91X^2-153X+70}{(X-1)^3} - \frac{8}{(X-1)^3} = \frac{91X^2-153X+62}{(X-1)^3} = \frac{91X-62}{(X-1)^2}$$
$$= \frac{91X-91+29}{(X-1)^2} = \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2}$$

lo que proporciona $b_2 = 29$ y $b_1 = 91$.

$$F = \frac{1}{4X} + \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} + \frac{8}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4} - \frac{365+258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X-\sqrt{2}}$$
$$+ \frac{3(24+17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X-\sqrt{2})^2} - \frac{365-258\sqrt{2}}{8}\frac{1}{X+\sqrt{2}} + \frac{3(24-17\sqrt{2})}{16}\frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13. Sea $F = \frac{1}{(X+1)^7 - X^7 - 1}$.

$$(X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X = 7X(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1)$$
$$= 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Si no se ha visto que $X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = (X^2+X+1)^2$ (por ejemplo, señalando que j es raíz o aún manipulando la identidad $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$), se puede practicar como sigue

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = X^2(X^2+\frac{1}{X^2}+2(X+\frac{1}{X})+3) = X^2((X+\frac{1}{X})^2+2(X+\frac{1}{X})+1)$$
$$= X^2(X+\frac{1}{X}+1)^2 = (X^2+X+1)^2.$$

La descomposición en elementos simples de $7F$ es, por lo tanto de la forma

$$7F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$a = \frac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2} = 1$ y $b = \frac{1}{(-1)(1-1+1)^2} = -1$. Después,

$$d = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = \frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{-j^2(-3j)} = \frac{1}{3}.$$

Luego,
$$\frac{1}{3}(\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2}) = \frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Después,

$$7F - \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}$$
$$= \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Pero entonces,
$$c = \frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)} = \frac{5}{-3(j-j^2)} = \frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$
Finalmente,
$$F = \frac{1}{7}(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)} + \frac{3}{3(X-j)^2} - \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)} + \frac{1}{3(X-j^2)^2}).$$

Solución del ejercicio 851 ▲005336

1. Sea $P = X^n - 1$ y $F = \frac{1}{P}$. La parte entera de F es nula y los polos de F son simples (pues $P = X^n - 1$ y $P' = nX^{n-1}$ no tiene raíces comunes en $\mathbb{C}$). Además, $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$, donde $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$. Entonces, $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$, donde
$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$
Así,
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}{X-\mathrm{e}^{2ik\pi/n}}.$$

2. Sea $P = (X-1)(X^n-1) = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$, donde $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$. Sea $F = \frac{1}{P}$. La parte entera de F es nula. Por otra parte, F admite un polo doble, a saber 1 y $n-1$ polos simples a saber, los $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, $\leqslant k \leqslant n-1$. Entonces,
$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}.$$
$\lambda_k = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$. Luego,
$$b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 F(x) = \frac{1}{1^{n-1}+\cdots+1^1+1} = \frac{1}{n}.$$
Queda por calcular a.
$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n-(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+\cdots+X+1)} = \frac{-X^{n-2}-2X^{n-3}-\cdots-(n-2)X-(n-1))}{n(X-1)(X^{n-1}+\cdots+X+1)}.$$
Así, $a = \lim_{x\to 1}(x-1)(F(x) - \frac{1}{n(x-1)^2}) = \frac{-[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]}{n(1+1\cdots+1)} = -\frac{n-1}{2n}$. Finalmente,
$$F = \frac{1}{n}(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k-1}\frac{1}{X-\omega_k}).$$

3. $\frac{n!}{(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-k}$, con
$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}C_{n-1}^{k-1}.$$

Así,

$$\frac{n!}{(X-1)\cdots(X-n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}nC_{n-1}^{k-1}}{X-k}.$$

4. Se define $P=X^4-2X^2\cos(2a)+1$.

$$X^4-2X^2\cos(2a)+1=(X^2-\mathrm{e}^{2ia})(X^2-\mathrm{e}^{-2ia})=(X-\mathrm{e}^{ia})(X-\mathrm{e}^{-ia})(X+\mathrm{e}^{ia})(X+\mathrm{e}^{-ia})$$
$$(=(X^2-2X\cos a+1)(X^2+2X\cos a+1)).$$

P tiene raíces simples si y solo si $\mathrm{e}^{ia}\neq\pm\mathrm{e}^{-ia}$, lo que equivale a $a\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
1er caso. Si $a\in\pi\mathbb{Z}$,

$$F=\frac{X^2}{(X^2-1)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}-\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}.$$

$b=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2F(x)=\frac{1}{4}$, luego $x=0$ proporciona $0=-2a+2b$ y entonces $a=b=\frac{1}{4}$.

$$F=\frac{X^2}{(X^2-1)^2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}).$$

2do caso. Si $a\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$,

$$F=\frac{X^2}{(X^2+1)^2}=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{(X-i)^2}-\frac{a}{X+i}+\frac{b}{(X+i)^2}.$$

$b=\lim\limits_{x\to i}(x-i)^2F(x)=\frac{i^2}{(i+i)^2}=\frac{1}{4}$, luego $x=0$ proporciona $0=2ia-2b$ y entonces $a=-ib=-\frac{i}{4}$.

$$F=\frac{X^2}{(X^2+1)^2}=\frac{1}{4}(-\frac{i}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}+\frac{i}{X+i}+\frac{1}{(X+i)^2}).$$

3er caso. Si $a\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, ya que F es real y par,

$$F=\frac{A}{X-\mathrm{e}^{ia}}+\frac{\overline{A}}{X-\mathrm{e}^{-ia}}-\frac{A}{X+\mathrm{e}^{ia}}-\frac{\overline{A}}{X+\mathrm{e}^{-ia}},$$

con

$$A=\frac{\mathrm{e}^{2ia}}{(\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{-ia})(\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ia})(\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia})}=\frac{\mathrm{e}^{2ia}}{8i\operatorname{sen}a\cos a\mathrm{e}^{ia}}=\frac{-i\mathrm{e}^{ia}}{4\operatorname{sen}(2a)}.$$

Entonces,

$$F=\frac{1}{4\operatorname{sen}(2a)}(-\frac{i\mathrm{e}^{ia}}{X-\mathrm{e}^{ia}}+\frac{i\mathrm{e}^{-ia}}{X-\mathrm{e}^{-ia}}+\frac{i\mathrm{e}^{ia}}{X+\mathrm{e}^{ia}}+\frac{i\mathrm{e}^{-ia}}{X+\mathrm{e}^{-ia}}).$$

5. El polinomio $X^{2n}+1=\prod\limits_{k=0}^{2n-1}(X-\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})})$ tiene raíces simples porque no tiene raíz común con su derivada. Usando $\omega_k=\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n})}$, se tiene

$$\frac{1}{X^{2n}+1}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k},$$

donde

$$\lambda_k=\frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}}=\frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}}=-\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{X^{2n}+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\omega_k}{X-\omega_k}.$$

Solución del ejercicio 852 ▲005337

Para k elemento de $\{0,\dots,n-1\}$, se escribe $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Descomponer F en elementos simples (sobre $\mathbb{C}$).

$$\frac{\omega X+1}{\omega^2 X+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X)^2+\omega X+1} = \frac{\omega X+1}{(\omega X-j)(\omega X-j^2)} = \frac{a}{\omega X-j}+\frac{b}{\omega X-j^2},$$

con $a = \dfrac{\omega\frac{j}{\omega}}{\omega\frac{j}{\omega}-j^2} = \dfrac{j+1}{j-j^2} = -\dfrac{-j^2}{j-j^2} = \dfrac{j}{j-1}$ e igualmente $b = \dfrac{j^2+1}{j^2-j} = -\dfrac{1}{j-1}$. Entonces,

$$F = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j}{\omega_k X-j}-\frac{1}{\omega_k X-j^2}\right) = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_{-k}}{X-j\omega_{-k}}-\frac{\omega_{-k}}{X-j^2\omega_{-k}}\right) = \frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}-\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}\right)$$

Ahora los n números $j\omega_k$ son dos a dos distintos y verifican $(j\omega_k)^n = j^n$, entonces

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-j\omega_k) = X^n-j^n.$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}$ es, por lo tanto la descomposición en elementos simples de una fracción del tipo $\frac{P}{X^n-j^n}$, con $\mathrm{gr}P \leqslant n-1$. Además, se sabe que $j\omega_k = \dfrac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ y entonces, $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$, $P(j\omega_k) = nj^n$. El polinomio $P-nj^n$ es de grado menor o igual que $n-1$, admite las n raíces dos a dos distintas $j\omega_k$ y es, por lo tanto el polinomio nulo. Así

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k} = \frac{nj^n}{X^n-j^n}.$$

Igualmente, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k} = \frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$, luego

$$F = \frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n-j^n}-\frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}\right).$$

Si $n\in 3\mathbb{Z}$, se escribe $n=3p$, $p\in\mathbb{Z}$. En este caso,

$$F = \frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1}-\frac{j}{X^{3p}-1}\right) = \frac{3p}{1-X^{3p}}.$$

Si $n\in 3\mathbb{Z}+1$, se escribe $n=3p+1$, $p\in\mathbb{Z}$. En este caso,

$$F = \frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j}-\frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right) = \frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}.$$

Si $n\in 3\mathbb{Z}+2$, se escribe $n=3p+2$, $p\in\mathbb{Z}$. En este caso,

$$F = \frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2}-\frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right) = \frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}.$$

Solución del ejercicio 853 ▲005338

Sean P y Q dos polinomios no nulos y primos entre sí, luego sea $F = \frac{P}{Q}$. Si F es par, entonces $\frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$, o aún $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ $(*)$.
Así, $P(X)$ divide $P(X)Q(-X) = Q(X)P(-X)$ y $P(X)$ es primo a $Q(X)$. Por el teorema de GAUSS, $P(X)$ divide $P(-X)$. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $P(-X) = \lambda P(X)$ (pues $\mathrm{gr}(P(-X)) = \mathrm{gr}(P)$). El análisis de los coeficientes dominantes de los dos miembros proporciona $\lambda = (-1)^n$, donde $n = \mathrm{gr}P$. Esto se escribe $P(-X) = (-1)^n P(X)$. Reportando en $(*)$, se obtiene todavía $Q(-X) = (-1)^n = Q(X)$. Así, si F es par, entonces P y Q son los dos pares o los dos impares. Este último caso queda excluido, porque entonces P y Q admiten 0 como raíz, contradiciendo el hecho de que son primos entre sí. Finalmente, si F es par, entonces P y Q son pares. El recíproco es claro.

$$F \text{ par} \Leftrightarrow (P \text{ y } Q \text{ son pares.})$$

Se debe establecer que

$$F \text{ impar} \Leftrightarrow (P \text{ es impar y } Q \text{ es par}) \text{ o } (P \text{ es par y } Q \text{ es impar.})$$

Solución del ejercicio 854 ▲005339

Es del curso (unicidad de la descomposición en elementos simples).

Solución del ejercicio 855 ▲005340

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i})$. Entonces,

$$\left(\frac{1}{X^2+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2i}(\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}) = \frac{1}{2i}(\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{(X+i)^{n+1}})$$

$$= (-1)^n n!\,\mathrm{Im}(\frac{1}{(X-i)^{n+1}}) = (-1)^n n!\,\mathrm{Im}(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}}) = \frac{(-1)^n n! \sum C_{n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{2n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}.$$

Solución del ejercicio 856 ▲005341

$P' = a\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(X-x_j) = \sum_{k=1}^{n}\frac{P}{X-x_k}$, y entonces

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}.$$

Se reagrupan ahora los polos idénticos, o aún pongamos $P = a(X-z_1)^{\alpha_1}\cdots(X-z_k)^{\alpha_k}$, donde esta vez z_j son dos a dos distintos. La fórmula anterior se escribe entonces

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j}{X-z_j}. \qquad (*)$$

Determinar los polinomios divisibles por su derivada. Sea P tal polinomio. Necesariamente gr$P \geqslant 1$ después, existen dos complejos a y b, $a \neq 0$ tal que $P = (aX+b)P'$ o aún $\frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$. $(*)$ demuestra que P tiene una y solo una raíz. Así, P es de la forma $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \neq 0$, $n \geqslant 1$ y a cualquiera. Recíprocamente, se tiene en este caso $P = \frac{1}{n}(X-a)n(X-a)^{n-1} = (\frac{1}{n}X - \frac{a}{n})P'$ y P' divide efectivamente P. Los polinomios divisibles por su derivada son los polinomios de la forma $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ y $a \in \mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 857 ▲006964

Escribir $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$, con P y Q dos polinomios primos entre sí, con Q unitario. La condición $\big(F(X)\big)^2 = (X^2+1)^3$ se convierte en $P^2 = (X^2+1)^3Q^2$. Así Q^2 divide P^2. De donde $Q^2 = 1$, ya que P^2 y Q^2 son primos entre sí. Entonces $Q = 1$ (o -1). Así $F = P$ es un polinomio y $P^2 = (X^2+1)^3$. En particular P^2 es de grado 6, por lo tanto P debe ser de grado 3. Escribir $P = aX^3+bX^2+cX+d$, se desarrolla la identidad $P^2 = (X^2+1)^3$:

$$X^6+3X^4+3X^2+1 = a^2X^6+2abX^5+(2ac+b^2)X^4+(2ad+2bc)X^3+(2bd+c^2)X^2+2cdX+d^2.$$

Se identifican los coeficientes : para el coeficiente de X^6, se tiene $a = \pm 1$, luego para el coeficiente de X^5, se tiene $b = 0$; para el coeficiente de 1, se tiene $d = \pm 1$, luego para el coeficiente de X, se tiene $c = 0$. Pero entonces el coeficiente de X^3 debe verificar $2ad+2bc = 0$, lo que es falso. Así ningún polinomio verifica la ecuación $P^2 = (X^2+1)^3$, y por el razonamiento al principio, ninguna fracción tampoco.

Solución del ejercicio 858 ▲006965

1. Se define $G = \frac{A}{B}$ y $F = \frac{P}{Q}$ (con A,B,P,Q de polinomios). Se reescribe la identidad $G(F(X)) = X$ bajo la forma $A(F(X)) = XB(F(X))$. Sea $n = \max(\deg A, \deg B)$. Entonces $n \geqslant 1$ porque si no, A y B son constantes y $G(\frac{P}{Q}) = X$ también. Se tiene entonces $A = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ y $B = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, donde $(a_n,b_n) \neq (0,0)$, y la identidad se convierte
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{P}{Q}\right)^k = X\sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{P}{Q}\right)^k.$$
Multiplicando por Q^n, da
$$\sum_{k=0}^{n} a_kP^kQ^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_kXP^kQ^{n-k}.$$
Entonces
$$(a_0-b_0X)Q^n \quad + \quad (\cdots+(a_k-b_kX)P^kQ^{n-k}+\cdots) \quad + \quad (a_n-b_nX)P^n = 0,$$
donde los términos en el paréntesis central son todos divisibles por P y por Q. Como Q divide también el primer término, entonces Q divide $(a_n-b_nX)P^n$. Según el lema de Gauss, ya que P y Q son primos entre sí, entonces Q divide (a_n-b_nX). Igualmente, P divide todos los términos del paréntesis central y el último, por lo tanto P divide también $(a_0-b_0X)Q^n$, así P divide (a_0-b_0X).
2. Se supone además que se ha escrito $G = \frac{A}{B}$ en forma irreducible, es decir con $\mathrm{mcd}(A,B) = 1$. Visto que a_n y b_n no son ambos nulos, entonces $a_n - b_nX$ no es el polinomio nulo. Como Q divide $a_n - b_nX$, entonces necesariamente Q es de grado a lo sumo 1; se escribe $Q(X) = cX+d$. Por otro lado, $a_0 - b_0X$ tampoco es el polinomio nulo, porque si no se tiene $a_0 = b_0 = 0$ y entonces A y B ambos son sin término constante, por lo tanto divisible por X (lo cual es imposible ya que son primos

entre sí). Entonces P es también de grado a lo sumo 1 y se escribe $P(X) = aX + b$. Conclusión : $F(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. Notar que a y b no son a la vez ambos nulos al mismo tiempo (Lo mismo se aplica a b y d).

3. Si $Y = \frac{aX+b}{cX+d}$, con $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $X = -\frac{dY-b}{cY-a}$. En otras palabras, si denotamos $\phi(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$, entonces su biyección inversa es $\phi^{-1}(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.
Se ha probado que $G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) = X$. Esta identidad se escribe $G\big(\phi(X)\big) = X$. Aplicada a $X = \phi^{-1}(Y)$ se convierte en $G\big(\phi(\phi^{-1}(Y))\big) = \phi^{-1}(Y)$, es decir $G(Y) = \phi^{-1}(Y)$. Así $G(Y) = -\frac{dY-b}{cY-a}$.

Solución del ejercicio 859 ▲006966

---

1. (a) Porque $P(X) = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$:

$$\begin{aligned} P'(X) = &\, c(X-a_2)\cdots(X-a_n) + c(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ &+ \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ &+ \cdots + c(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

La derivada es, por lo tanto la suma de los términos de la forma : $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P(X)}{X-a_k}$. Así

$$P'(X) = \frac{P(X)}{X-a_1} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_k} + \cdots + \frac{P(X)}{X-a_n}.$$

Por lo tanto :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$$

(b) Porque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}$ es la derivada de $-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$, se obtiene por derivación de $-\frac{P'}{P}$:

$$\frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2}.$$

(c) Se ha notado que la derivada de P' es la suma de factores $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$, con uno de los factor faltante, por lo tanto de la que forma $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{X-a_k} = \frac{P}{X-a_k}$. Igualmente P'' es la suma de factores $c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$, con dos factores menos, es decir de la forma $\frac{c(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(X-a_k)(X-a_\ell)} = \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$:

$$P'' = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq\ell}} \frac{P}{(X-a_k)(X-a_\ell)}, \text{ por lo tanto } \frac{P''}{P} = \sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant n \\ k\neq\ell}} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_\ell)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k\neq l} \frac{1}{(X-a_k)(X-a_l)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}\left(\sum_{l\neq k} \frac{1}{X-a_l}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{X-a_l} - \frac{1}{X-a_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}\frac{P'}{P} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-a_k)^2} = \frac{P'^2}{P^2} - \frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \frac{P''}{P}. \end{aligned}$$

2. Se aplica la identidad $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-a_k}$ en z, con las hipótesis $P(z) \neq 0$ y $P'(z) = 0$. Se deduce que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = 0$. La expresión conjugada es también nula :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{z-a_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{|z-a_k|^2} = 0.$$

Sea $\mu_k = \frac{1}{|z-a_k|^2}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(z-a_k) = 0, \text{ por lo tanto } \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right) z = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k.$$

Sea $\lambda_k = \mu_k / \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right)$, entonces :
— Los λ_k son reales positivos.
— $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$
— Y $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.
En particular, si los a_k son todos números reales, entonces z es también un número real. Se acaba de demostrar que si un polinomio P tiene todas sus raíces reales, entonces P' también tiene todas sus raíces reales.
Incluso se tiene : si se ordenan las raíces reales de P en $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, entonces una raíz z de P' es real y verifica $a_1 \leqslant z \leqslant a_n$.
Más generalmente, la interpretación geométrica de lo que acabamos de probar se llama teorema de Gauss-Lucas : «Les raíces de P' están en la envolvente convexa de las raíces (reales o complejas) de P.»

Solución del ejercicio 860 ▲006967

---

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$. Comenzar por factorizar el denominador : $X^2-4 = (X-2)(X+2)$, de donde una descomposición en elementos simples del tipo $F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2}$. Reduciendo al mismo denominador, se tiene $\frac{X}{X^2-4} = \frac{(a+b)X+2(a-b)}{X^2-4}$ e identificando los coeficientes, se obtiene el sistema $\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=0. \end{cases}$ Así $a=b=\frac{1}{2}$ y

$$\frac{X}{X^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{X-2} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}$$

2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$. Cuando el grado del numerador (aquí 3) es superior o igual al grado del denominador (aquí 1), el realizar la división euclidiana del numerador por el denominador para hacer aparecer la parte del polinomio (o parte entera). Aquí la división euclidiana se escribe $X^3 - 3X^2+X-4 = (X-1)(X^2-2X-1)-5$. Así, dividiendo los dos miembros por $X-1$ se obtiene

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}.$$

La fracción se ha descompuesto en elementos simples.

3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$. Comenzar haciendo la división euclidiana del numerador por el denominador : $2X^3+X^2-X+1 = (X^2-2X+1)(2X+5)+7X-4$, lo que da $H = 2X+5+\frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Queda por descomponer en elementos simples la fracción racional $H_1 = \frac{7X-4}{X^2-2X+1}$. Porque el denominador se factoriza en $(X-1)^2$, es de la forma $H_1 = \frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}$. Reduciendo al mismo denominador, se tiene $\frac{7X-4}{X^2-2X+1} = \frac{bX+a-b}{X^2-2X+1}$ e identificando los coeficientes, tenemos $b=7$ y $a=3$. Finalmente,

$$\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X+5+\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{7}{X-1}.$$

4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$. Aquí, no existe parte polinomial ya que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador. El denominador admite cuatro raíces complejas $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ y $e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Reagrupando las raíces complejas conjugadas, se obtiene su factorización en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= \left((X-e^{\frac{i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{i\pi}{4}})\right)\left((X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-e^{-\frac{3i\pi}{4}})\right)\\
&= \left(X^2-2\cos\tfrac{\pi}{4}+1\right)\left(X^2-2\cos\tfrac{3\pi}{4}+1\right)\\
&= (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)
\end{aligned}$$

Dado que los dos factores $(X^2-\sqrt{2}X+1)$ y $(X^2+\sqrt{2}X+1)$ son irreducibles en $\mathbb{R}$, la descomposición en elementos simples de K es de la forma $K = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$. Reduciendo al mismo denominador e identificando los coeficientes con aquellos de $K = \frac{X+1}{X^4+1}$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases}
a+c=0\\
\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d=0\\
a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d=1\\
b+d=1.
\end{cases}$$

Sistema que se resuelve en $a = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ y $d = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Así

$$\frac{X+1}{X^4+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}X+\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$

Solución del ejercicio 861 ▲006968

---

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$. Para obtener la parte del polinomio, se hace una división euclidiana : $X^5+X^4+1 = (X^3-X)(X^2+X+1)+X^2+X+1$. Lo que da $F = X^2+X+1+F_1$, donde $F_1 = \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$. Porque $X^3-X = X(X-1)(X+1)$, la descomposición en elementos simples es de la forma

$$F_1 = \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$$

Para obtener a :

— se multiplica la igualdad por X : $\frac{X(X^2+X+1)}{X(X-1)(X+1)} = X\left(\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}\right)$,

— se simplifica $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+1)} = a+\frac{bX}{X-1}+\frac{cX}{X+1}$,

— se reemplaza X por 0 y se obtiene $-1 = a+0+0$, por lo tanto $a=-1$.

Igualmente, multiplicando por $X-1$ y reemplazando X por 1, se tiene $b=\frac{3}{2}$. Después multiplicando por $X+1$ y reemplazando X por -1, se encuentra $c=\frac{1}{2}$. De donde

$$\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2+X+1-\frac{1}{X}+\frac{\frac{1}{2}}{X+1}+\frac{\frac{3}{2}}{X-1}.$$

2. $G=\frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$. La parte polinomial es nula. La descomposición en elementos simples es de la forma $G=\frac{a}{(X-1)^3}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X+1}$.
   - Multiplicando los dos lados de la igualdad por $(X-1)^3$, simplificando y luego reemplazando X por 1, se obtiene $a=\frac{3}{2}$.
   - Igualmente, multiplicando por $X+1$, simplificando y luego reemplazando X por -1, se obtiene $d=\frac{1}{8}$.
   - Multiplicando por X y observando el límite cuando $X\to+\infty$, se obtiene $1=c+d$. Entonces $c=\frac{7}{8}$.
   - Reemplazando X por 0, se tiene $-1=-a+b-c+d$. Así $b=\frac{5}{4}$.

   Así :
   $$G=\frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{(X-1)^3}+\frac{\frac{5}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{7}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}.$$

3. $H=\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$. Porque X^2+1 y X^2+4 son irreducibles en $\mathbb{R}$, la descomposición en elementos simples es de la forma
   $$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX+b}{X^2+1}+\frac{cX+d}{X^2+4}.$$
   - Reemplazando X por 0, se obtiene $0=b+\frac{1}{4}d$.
   - Multiplicando los dos miembros por X, se obtiene $\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{aX^2+bX}{X^2+1}+\frac{cX^2+dX}{X^2+4}$. Calculando el límite cuando $X\to+\infty$, se tiene $0=a+c$.
   - En fin, evaluando las fracciones en $X=1$ y $X=-1$, se obtiene $\frac{1}{10}=\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{5}$ y $\frac{-1}{10}=\frac{-a+b}{2}+\frac{-c+d}{5}$.

   La resolución del sistema da $b=d=0$, $a=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$ y entonces
   $$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1}-\frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4}.$$

4. $K=\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$. Para la parte del polinomio, se hace la división euclidiana :
   $$2X^4+X^3+3X^2-6X+1 = (2X^3-X^2)(X+1)+(4X^2-6X+1)$$
   lo que da $K=X+1+K_1$, donde $K_1=\frac{4X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$. Para encontrar la descomposición en elementos simples de K_1, se factoriza su numerador : $2X^3-X^2=2X^2(X-\frac{1}{2})$, lo que da una descomposición

de la forma $K_1 = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X - \frac{1}{2}}$. Se obtiene entonces a multiplicando los dos miembros de la igualdad por x^2, luego reemplazando X por 0 : $a = -1$. Se obtiene el mismo c multiplicando por $X - \frac{1}{2}$ y reemplazando X por $\frac{1}{2}$: $c = -2$. Finalmente, encontramos b identificando un valor concreto que aún no se haya utilizado, por ejemplo $X = 1$, o mejor en multiplicando ambos lados por X y pasando al límite de $x \to +\infty$: $b = 4$. Finalmente :

$$\frac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2} = X + 1 - \frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} - \frac{2}{X - \frac{1}{2}}.$$

Solución del ejercicio 862 ▲006969

1. $F = \frac{4X^6 - 2X^5 + 11X^4 - X^3 + 11X^2 + 2X + 3}{X(X^2+1)^3}$.
   (a) La descomposición en elementos simples de F es de la forma $F = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{(X^2+1)^3} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \frac{fX+g}{X^2+1}$. Es difícil obtener los coeficientes por sustitución.
   (b) Se va a tratar de encontrar a : se multiplica F por X, luego se reemplaza X por 0, se obtiene $a = 3$.
   (c) Se hace la resta $F_1 = F - \frac{a}{X}$. Se sabe que la fracción F_1 *debe* se simplifica por X. Se encuentra $F_1 = \frac{X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2}{(X^2+1)^3}$.
   (d) El fin de la descomposición se realiza mediante sucesivas divisiones euclidianas. En primer lugar, la división del numerador $X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2$ por $X^2 + 1$:

   $$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2 = (X^2+1)(X^3 - 2X^2 + X + 1) + X + 1$$

   luego se empieza de nuevo dividiendo el cociente obtenido por $X^2 + 1$, para obtener

   $$X^5 - 2X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 2 = (X^2+1)\big((X^2+1)(X-2) + 3\big) + X + 1.$$

   Se divide esta identidad por $(X^2+1)^3$:
   $F_1 = \frac{(X^2+1)\big((X^2+1)(X-2)+3\big) + X + 1}{(X^2+1)^3} = \frac{X+1}{(X^2+1)^3} + \frac{3}{(X^2+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+1}$
   Así

   $$F = \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+1)^3} + \frac{3}{(X^2+1)^2} + \frac{X-2}{X^2+1}$$

   Observación : este método de divisiones sucesivas es muy práctico cuando la fracción a descomponer tiene denominador *simple*, es decir que tiene un denominador del tipo Q^n, donde Q es de primer grado, o de segundo grado sin raíz real.
2. $G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2}$. La descomposición en elementos simples de G es de la forma $\frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{X-1}$. El método más eficaz para determinar los coeficientes es efectuar una división según potencias crecientes, aquí de orden 2 (de manera que el resto es divisible por X^3 como el denominador). Se calcula la división según potencias crecientes, de orden 2 del numerador $1 - 4X + 8X^2 - 10X^3 + 4X^4$ por $(X-1)^2$, o más bien por $1 - 2X + X^2$:

   $$1 - 4X + 8X^2 - 10X^3 + 4X^4 = (1 - 2X + X^2)(1 - 2X + 3X^2) + (-2X^3 + X^4)$$

Se observa que el resto $-2X^3+X^4$ es divisible por X^3. Dividiendo los dos miembros de esta identidad por $X^3(X-1)^2$, se obtiene a, b y c de una sola vez :

$$\begin{aligned} G &= \frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{(X-1)^2(1-2X+3X^2)+(-2X^3+X^4)}{X^3(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}+\frac{X-2}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

Queda por encontrar d y e : por ejemplo, haciendo la división euclidiana de $X-2$ por $X-1$: $X-2=(X-1)-1$.

$$G=\frac{1}{X^3}-\frac{2}{X^2}+\frac{3}{X}-\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{X-1}$$

3. $H=\frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}=\frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)}$. La descomposición es de la forma $H=\frac{a}{X^3}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X}+\frac{d}{X-1}+\frac{e}{X+1}$. Para obtener a,b,c, se hace la división del numerador por $(X-1)(X+1)=X^2-1$ según las potencias crecientes, de orden 2 (de manera que el resto es divisible por X^3 que es la potencia de X en el denominador de H, de hecho se obtiene de orden 3) :

$$1+2X^2+X^4=(-1+X^2)(-1-3X^2)+4X^4$$

que da directamente

$$H=\frac{X^4+2X^2+1}{X^3(X-1)(X+1)}=\frac{(X^2-1)(-1-3X^2)+4X^4}{X^3(X^2-1)}=-\frac{1}{X^3}-\frac{3}{X}+\frac{4X}{X^2-1}$$

Queda por descomponer $\frac{4X}{X^2-1}=\frac{d}{X-1}+\frac{e}{X+1}$. Se encuentra $d=e=2$, de donde

$$H=\frac{X^4+2X^2+1}{X^5-X^3}=-\frac{1}{X^3}-\frac{3}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{2}{X+1}$$

Observación : el método de división según potencias crecientes es eficiente para un exponente lo suficientemente grande (a partir de 3) en una fracción del tipo $\frac{P(X)}{X^nQ(X)}$. Se puede utilizar para una fracción del tipo $\frac{P(X)}{(X-a)^nQ(X)}$, pero hay que empezar con el cambio de variable $Y=X-a$ antes de hacer la división, luego por supuesto, volver a la variable X.

4. $K=\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$. Dado que el grado del numerador N es superior o igual que el del denominador D, hay una parte polinomial. N y D son del mismo grado, con el mismo coeficiente principal, la parte polinomial vale 1 y K se descompone en la forma $K=1+\frac{a}{X}+\frac{b}{(X-1)^4}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X-1}$. El coeficiente a se obtiene fácilmente multiplicando K por X, luego reemplazando X por 0 : $a=1$.
Sea $K_1=K-1-\frac{1}{X}=\frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4}$. El cambio de indeterminada $X=Y+1$ da entonces $K_1=\frac{4(Y+1)^3-2(Y+1)^2-2(Y+1)+3}{Y^4}$. Desarrollando, se obtiene directamente

$$K_1=\frac{4Y^3+10Y^2+6Y+3}{Y^4}=\frac{3}{Y^4}+\frac{6}{Y^3}+\frac{10}{Y^2}+\frac{4}{Y}$$

y entonces (con $Y = X-1$) : $K_1 = \frac{4X^3-2X^2-2X+3}{(X-1)^4} = \frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$.
Finalmente,

$$K = \frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1+\frac{1}{X}+\frac{3}{(X-1)^4}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{10}{(X-1)^2}+\frac{4}{X-1}$$

Solución del ejercicio 863 ▲006970

1. $$\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i}$$
$$\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}+\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}}$$
$$\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i}+\frac{-i}{(X+i)^2}$$
2. $$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1}$$
$$= X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}+\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i}+\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$$
$$\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{\frac{4}{3}}{X^2+1}+\frac{\frac{7}{3}}{X^2+4}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}i}{X-i}+\frac{-\frac{2}{3}i}{X+i}+\frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i}+\frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$$
$$\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{\frac{1}{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{\frac{1}{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1}$$
$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Solución del ejercicio 864 ▲006971

La descomposición en elementos simples se escribe :

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{X}+\frac{1}{X-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(X-2)^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{X-2}.$$

multiplicando esta identidad por el denominador $X(X-1)(X-2)^2$, se tiene :

$$1 = -\tfrac{1}{4}Q_0+Q_1+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}(X-2)\right)Q_2.$$

Así $A_0 = -\frac{1}{4}$, $A_1 = 1$ y $A_1 = (2-\frac{3}{4}X)$ sirven. Se obtiene una relación de Bézout entre Q_1, Q_2 y Q_3 que prueba que estos tres polinomios son primos en su conjunto : $\operatorname{mcd}(Q_1,Q_2,Q_3) = 1$.

Solución del ejercicio 865 ▲006972

---

1. (a) Si se escribe $x=\cos\theta$, entonces la igualdad $T_n(x)=\cos\big(n\arccos(x)\big)$ se convierte en $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$, pues $\arccos(\cos\theta)=\theta$, para $\theta\in[0,\pi]$.

   (b) $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$.

   (c) Escribiendo $(n+2)\theta=(n+1)\theta+\theta$ y $n\theta=(n+1)\theta-\theta$ se obtiene :

$$\begin{aligned}\cos\big((n+2)\theta\big)&=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta-\operatorname{sen}\big((n+1)\theta\big)\operatorname{sen}\theta\\ \cos\big(n\theta\big)&=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta+\operatorname{sen}\big((n+1)\theta\big)\operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

   Cuando se hace la suma de estas dos igualdades se obtiene :

$$\cos\big((n+2)\theta\big)+\cos\big(n\theta\big)=\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta$$

   Con $x=\cos\theta$ esto da :

$$T_{n+2}(x)+T_n(x)=2xT_{n+1}(x)$$

   (d) T_0 y T_1 son polinomios entonces, por recurrencia, $T_n(x)$ es un polinomio. Además, siempre por la fórmula de recurrencia, es fácil ver que el grado de T_n es n.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)&=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{en\theta})=\mathrm{Re}((\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^n)\\ &=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k i^k(\operatorname{sen}\theta)^k(\cos\theta)^{n-k}\right)\end{aligned}$$

   Por lo tanto i^k es real si y solo si k es par (y en este caso, $i^k=(-1)^{k/2}$), así que haciendo el cambio de índice $k=2p$:

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)&=\sum_{k\ par,\ 1\leqslant k\leqslant n}C_n^k i^k(\operatorname{sen}\theta)^k(\cos\theta)^{n-k}\\ &=\sum_{p=0}^{E(n/2)}C_n^{2p}(-1)^p(\operatorname{sen}\theta)^{2p}(\cos\theta)^{n-2p}\\ &=\sum_{p=0}^{E(n/2)}C_n^{2p}(-1)^p(1-(\cos\theta)^2)^p(\cos\theta)^{n-2p}\end{aligned}$$

   que es polinomial en $\cos\theta$. Como todo $x\in[-1;1]$ se puede escribir en la forma $x=\cos\theta$, se tiene

$$T_n(x)=\sum_{p=0}^{E(n/2)}C_n^{2p}(-1)^p(1-x^2)^p x^{n-2p}.$$

   Esta función polinomial (sobre $[-1;1]$) es de grado a lo sumo n, y el coeficiente del término de grado n vale $a_n=\sum\limits_{p=0}^{E(n/2)}C_n^{2p}$ que es no nulo (suma de términos estrictamente positivos).

2. Porque las raíces de $P=\lambda(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ son dos a dos distintas, la descomposición en elementos simples de $\frac{1}{P}$ es de la forma $\frac{c_1}{X-a_1}+\cdots+\frac{c_n}{X-a_n}$.

   Expliquemos cómo calcular el coeficiente c_1. Se multiplica la fracción $\frac{1}{P}$ por $(X-a_1)$, lo que da

$$\frac{X-a_1}{P}=c_1+c_2\frac{X-a_1}{X-a_2}+\cdots+c_n\frac{X-a_1}{X-a_n}\text{ y }\frac{X-a_1}{P}=\frac{1}{\lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n)}$$

Se evalúan estas igualdades en $X = a_1$, lo que da

$$c_1 = \frac{1}{\lambda(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)} = \frac{1}{\lambda \prod\limits_{j\neq 1}(a_1-a_j)}.$$

Se obtiene el mismo coeficiente c_k multiplicando $\frac{1}{P}$ por $(X-a_k)$, luego reemplazando X por a_k, dando : $c_k = \dfrac{1}{\lambda \prod\limits_{j\neq k}(a_k-a_j)}$. Por lo tanto la derivada de P es

$$\begin{aligned} P'(X) = \lambda(X-a_2)\cdots(X-a_n) + \lambda(X-a_1)(X-a_3)\cdots(X-a_n) \\ + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{k-1})(X-a_{k+1})\cdots(X-a_n) \\ + \cdots + \lambda(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1}) \end{aligned}$$

y entonces $P'(a_1) = \lambda \prod\limits_{j\neq 1}(a_1-a_j)$ y más generalmente $P'(a_k) = \lambda \prod\limits_{j\neq k}(a_k-a_j)$. Se ha probado $c_k = \frac{1}{P'(a_k)}$ y así la descomposición en elementos simples de $1/P$ es :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$$

3. (a) Busquemos primero las raíces de $T_n(x)$. Sea $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff \cos\big(n\arccos(x)\big) = 0 \\ &\iff n\arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z} \;\; \arccos(x) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Como, por definición $\arccos(x) \in [0,\pi]$, enteros k posibles son $k = 0,\dots,n-1$. Así

$$\arccos x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad\iff\quad x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Pongamos, por lo tanto $\omega_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, para $k = 0,\dots,n-1$. Los ω_k son las raíces de T_n. Finalmente, $T_n(x) = \lambda \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)$.

(b) Así $T_n(x) = \lambda \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\omega_k)$ y los ω_k son dos a dos distintos. Se sabe por la pregunta precedente que la descomposición en elementos simple de $1/T_n$ se escribe

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/T_n'(\omega_k)}{X-\omega_k}$$

Volviendo a partir de $T_n(x) = \cos\big(n\arccos(x)\big)$, se calcula $T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{sen}\big(n\arccos(x)\big)$. Utilizando que

$$\operatorname{sen}\big(n\arccos(\omega_k)\big) = \operatorname{sen}\left(n\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

y

$$\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta, \quad \text{para } \theta \in [0,\pi],$$

se encuentra que $T_n'(\omega_k) = \dfrac{n(-1)^k}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$. Así

$$\frac{1}{T_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{(-1)^k}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{X-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

Solución del ejercicio 868 ▲000426

Utilizar la fórmula de interpolación de Lagrange $P = \frac{1}{3}(X^2-4X-3)$.

Solución del ejercicio 869 ▲000427

Se busca P bajo la forma $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$, lo que da el siguiente sistema lineal para resolver :

$$\begin{cases} d = 1 \\ a+b+c+d = 0 \\ -a+b-c+d = -2 \\ 8a+4b+2c+d = 4 \end{cases}$$

Después de los cálculos, se encuentra una solución única : $a = \frac{3}{2}$, $b=-2$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=1$, es decir

$$P(X) = \tfrac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \tfrac{1}{2}X + 1.$$

Solución del ejercicio 888 ▲003167

$P(X) = -1+Q(X)\times(X-1)^n \Leftrightarrow (X+1)^n \mid Q(X)(X-1)^n - 2 \Leftrightarrow X^n \mid Q(X-1)(X-2)^n - 2$.
Sea $2 = A(X)(X-2)^n + X^nB(X)$ la división según las potencias crecientes de 2 por $(X-2)^n$ de orden n.
Se obtiene $X^n \mid Q(X-1)-A(X)$ sea $Q(X) = A(X+1)+X^nR(X)$ y $\operatorname{grad}(P) < 2n \Leftrightarrow R = 0$. Cálculo de $A(X)$ por desarrollo limitado : $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{-n}{k}x^k + O(x^n)$, por lo tanto :

$$A(X) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{-n}{k}\frac{(-1)^kX^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k(-1)^n\frac{X^k}{2^{n+k-1}}.$$

Solución del ejercicio 890 ▲003169

$\operatorname{vect}(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ contiene $P, \Delta P, \Delta^2 P, \dots, \Delta^n P$, por lo tanto $K_n[X]$ de acuerdo con teorema de grados escalonados.

Solución del ejercicio 891 ▲003170

Es necesario que $k=n$. Suponiendo esto realizado, la matriz de $(P_0,\dots,P_k)$ en la base canónica de $\mathbb{C}_n[X]$ es equivalente a la matriz de Vandermonde de $z_0,\dots,z_k$. Entonces una CNS es : $k=n$ y $z_0,\dots,z_k$ son distintos.

Solución del ejercicio 892 ▲003171

1. $P\circ P-X=(P\circ P-P)+(P-X)$.
2. $P(z)=z^2+3z+1\Rightarrow z=-1,-1,-2\pm i$.

Solución del ejercicio 894 ▲003173

$\ker\Phi=K_0[X]$, $\operatorname{Im}\Phi=(X-a)K_{n-1}[X]$.

Solución del ejercicio 896 ▲003175

Fórmula de Taylor : $\frac{P^{(k)}}{k!}\in\mathbb{Z}[X]$.

Solución del ejercicio 897 ▲003176

1.
2. Aplicar el 1) a $P(X+k)$.

Solución del ejercicio 900 ▲003179

$$\begin{cases} P=a(X^2+1)+bX+c \\ Q=a'(X^2+1)+b'X+c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P=\cos\theta(X^2-1)+2X\operatorname{sen}\theta \\ Q=\operatorname{sen}\theta(X^2-1)-2X\cos\theta. \end{cases}$$

$P\wedge Q=1$, pues $\pm i$ no son raíces de P y Q.

Solución del ejercicio 901 ▲003180

$\operatorname{grad}P<2\Rightarrow P\in\{1,X,X+1\}$.

Solución del ejercicio 902 ▲003181

1. Isomorfismo $P\longmapsto P(X)+P(X+1)$.
2. $P_n'=nP_{n-1}$.
3. $P_n(X+1)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kP_k$ (Taylor).
4. $Q_n(X)=P_n(1-X)\Rightarrow Q_n(X)+Q_n(X+1)=2(-1)^nX^n$.

Solución del ejercicio 903 ▲003182

1. Bézout generalizado.
2. $\big((1-X)P'-nP\big)(1-X)^{n-1}+\big(nQ+XQ'\big)X^{n-1}=0$.

3. $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{k} X^k$.
4.

Solución del ejercicio 905 ▲003184

$Q = P + P' + P'' + \cdots : Q(x) \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Q(\alpha)$ sea minimal. Entonces $0 = Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) \Rightarrow \min Q \geqslant 0$.

Solución del ejercicio 906 ▲003185

Sí, si y solo si P es par.

Solución del ejercicio 907 ▲003186

1. $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.
2. $u_k = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$.
3.

Solución del ejercicio 908 ▲003187

1.
2. Trivialmente verdadero o trivialmente falso según la escogencia que se ha hecho en **1**.
3.
4. Sea $Q \in \mathbb{C}[X]$ y $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}_n[X]\}$. Se tiene $F_Q = \{\overline{RQ},\ R \in \mathbb{C}[X]\}$ de manera evidente, por lo tanto F_Q es estable por la multiplicación modular por X.
   Sea recíprocamente F un sev de $\mathbb{C}_n[X]$ estable por la multiplicación modular por X. Si $(P_1, \ldots, P_k)$ es una familia generatriz de F, entonces $Q = \mathrm{mcd}(P_1, \ldots, P_k) \in F$ de acuerdo a la relación de Bézout y la estabilidad de F, por lo tanto $F_Q \subset F$ y $P_i \in F_Q$ ya que Q divide P_i, de donde $F \subset F_Q$ y $F = F_Q$.

Solución del ejercicio 909 ▲003188

Todo polinomio con coeficientes complejos no constante es sobreyectivo sobre $\mathbb{C}$, por lo tanto $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow P = a$ (constante real).
Se tiene por interpolación de Lagrange : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Leftrightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.
Demostrar que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Leftrightarrow P = aX + b$, con $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$: la condición es claramente suficiente. Para demostrar que es necesario, se considera un polinomio eventual P de grado $n \geqslant 2$ tal que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Se sabe que P tiene coeficientes racionales, entonces se puede escribir bajo la forma : $P = \frac{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n}{d}$, con $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ y $d \in \mathbb{N}^*$. Sea π un número primo no dividiendo ni a_n ni d, y $x = p/q$ (forma irreducible) un racional tal que $P(x) = 1/\pi$. Se tiene entonces : $\pi(a_0q^n + \cdots + a_np^n) = dq^n$, lo que implica π divide q. Se tiene entonces : $a_np^n = dq^n/\pi - a_0q^n - \cdots - a_{n-1}qp^{n-1}$, lo que es imposible ya que π es factor del segundo miembro ($n \geqslant 2$) pero no del primero ($p \wedge q = 1$).

Solución del ejercicio 910 ▲003189

Claramente $E = \varnothing$ si los y_i no son distintos. Si $y_1, \dots, y_n$ son distintos, sea $P \in E$, $n = \operatorname{grad}(P)$ y λ el coeficiente dominante de P ($P \neq 0$ porque los y_i no son todos nulos). Entonces $P(X) - y_i$ tiene para única raíz x_i, por lo tanto $P(X) - y_i = \lambda(X - x_i)^n$. Para $n = 1$ se obtiene $P(X) = y_1 + \lambda(X - x_1)$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Para $n \geqslant 2$ se obtiene $y_2 - y_1 = \lambda(X - x_1)^n - \lambda(X - x_2)^n = n\lambda X^{n-1}(x_2 - x_1) + \cdots$, lo que es imposible por lo tanto $E = \varnothing$.

Solución del ejercicio 911 ▲003190

1. Recurrencia en $\operatorname{card}(S)$ factorizando el término además bajo grado y derivando el cociente.
2. Aplicar la cuestión precedente a las sucesiones $(\operatorname{Re}(a_s))$ y $(\operatorname{Im}(a_s))$.

Solución del ejercicio 912 ▲003191

Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k}$. f es estrictamente decreciente de 0 à $-\infty$ sobre $]-\infty, 0[$, de $+\infty$ a $-\infty$ en cada intervalo $]k, k+1[$, $1 \leqslant k \leqslant 100$ y de $+\infty$ à 0 sobre $]100, +\infty[$. Entonces existe $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{99} < 100 < \alpha_{100}$ tales que $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) \geqslant 1\} = \bigcup_{k=1}^{100}]k, \alpha_k]$.

La suma de los largos es $L = \sum_{k=1}^{100} \alpha_k - \sum_{k=1}^{100} k$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_{100}$ son las raíces del polinomio :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{100}(X-k) - \sum_{k=1}^{100} k \prod_{i \neq k}(X-i) = X^{100} - 2X^{99} \sum_{k=1}^{100} k + \cdots$$

De donde $\sum_{k=1}^{100} \alpha_k = 2 \sum_{k=1}^{100} k$ y $L = \sum_{k=1}^{100} k = 5050$.

Solución del ejercicio 913 ▲003192

El sentido $\Leftarrow$ es trivial. Por el sentido $\Rightarrow$, es suficiente verificar la propiedad cuando P es irreducible, estrictamente positivo sobre $\mathbb{R}^+$, y el único caso no trivial es cuando P es de la forma : $P = (X-a)^2 + b^2$, con $a > 0$, $b > 0$. En este caso, el coeficiente de X^k en $(X+1)^\ell P(X)$ es : $C_\ell^k(a^2+b^2) - 2aC_\ell^{k-1} + C_\ell^{k-2}$, acordando que C_x^y vale 0 si no se tiene $0 \leqslant y \leqslant x$. Colocando lo que se puede factorizar y ordenando el resto según las potencias de k, se es llevado a demostrar que la cantidad :

$$k^2(a^2+b^2+2a+1) - k((a^2+b^2)(2\ell+3) + 2a(\ell+2) + 1) + \ell^2(a^2+b^2)$$

es estrictamente positiva para todo $k \in [\![0, \ell+2]\!]$ si ℓ se elige adecuadamente. Por lo tanto el discriminante con respecto a k es equivalente a $-4\ell^2(2a+1)$, cuando ℓ tiende a $+\infty$ así una elección tal de ℓ es posible.

Solución del ejercicio 914 ▲003193

Se supone E finito y se demuestra que P es constante : existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $P(a) \neq 0$. Sea $N = \prod_{p \in E} p^{1+v_p(P(a))}$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $P(a+kN) \equiv P(a) \pmod{N}$ (fórmula de Taylor), por lo tanto $v_p(P(a+kN)) = v_p(P(a))$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $p \in E$. Como $P(a+kN)$ se produce a partir de elementos de E, se deduce que $P(a+kN) = \pm P(a)$, para todo k, por lo tanto P toma una infinidad de veces el mismo valor.

Solución del ejercicio 915 ▲003194

Tomar por P_n la parte regular del desarrollo limitado de orden n de $\sqrt{1+x}$.

Solución del ejercicio 916 ▲003195

Analizar : se establece $P_j = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ y se considera la fracción racional

$$F(X) = \frac{a_0}{X} + \frac{a_1}{X+1} + \cdots + \frac{a_n}{X+n} = \frac{P(X)}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$

Entonces $\int_0^1 t^i P_j(t)\,dt = F(i+1) = \frac{i!\,P(i+1)}{(i+n+1)!}$, por lo tanto $P(j+1) = \frac{(j+n+1)!}{j!}$ y $P(k) = 0$, para $k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{j+1\}$, sea

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(j+n+1)!}{j!} \prod_{k \neq j+1} \frac{X-k}{j+1-k} \\ &= (-1)^{n-j} \frac{(j+n+1)!}{(j!)^2(n-j)!} \prod_{k \neq j+1} (X-k) = Q_j(X). \end{aligned}$$

Síntesis : sea Q_j el polinomio arriba y $a_0, \ldots, a_n$ los coeficientes de la descomposición en elementos simples de $\frac{Q_j(X)}{X(X+1)\ldots(X+n)}$. Se debe justo verificar que los a_i son enteros. Cálculo :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{Q_j(-i)}{(-1)^i i!\,(n-i)!} = (-1)^{i+j} \frac{(i+j)!\,(i+n+1)!\,(j+n+1)!}{(i+j+1)!\,(i!)^2\,(j!)^2\,(n-i)!\,(n-j)!} \\ &= (-1)^{i+j} C_{i+j}^{i} C_{i+n+1}^{i+j+1} C_{j+n+1}^{j} C_n^i (n+1) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 917 ▲003254

$3\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) = -9.$

Solución del ejercicio 918 ▲003255

$-\frac{5}{3}$.

Solución del ejercicio 919 ▲003256

$\frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 920 ▲003257

$x^7 = -2x^2 + 2x - 1 \Rightarrow a^7 + b^7 + c^7 = -7.$

Solución del ejercicio 921 ▲003258

$\{a,b,c\} = \left\{1, -\frac{1+i}{2}, -\frac{1-i}{2}\right\}.$

Solución del ejercicio 922 ▲003259

$\{x,y,z\} = \{-1,1,2\}$.

Solución del ejercicio 923 ▲003260

$d = \frac{2}{3}$, $\{a,b,c\} = \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Solución del ejercicio 925 ▲003262

1. $50p^3 = 27q^2$.
2. $a^2+b^2+c^2 = 2c^2+1 = -2p \Rightarrow$ una de raíces de la ecuación en el cuadrado $(-Y^3-2pY^2-p^2Y+q^2)$ debe ser $-p-\frac{1}{2}$. CNS $\Leftrightarrow 2p+1+8q^2 = 0$.

Solución del ejercicio 926 ▲003263

$20p^3+27q^2 = 0$.

Solución del ejercicio 927 ▲003264

$b = 0,\ c = \frac{9}{100}a^2 \Rightarrow$ raíces : $-3x, -x, x, 3x$, con $x = \sqrt{\frac{-a}{10}}$.

Solución del ejercicio 928 ▲003265

$-P(-2-X) = X^3+4X^2+7X+2$.

Solución del ejercicio 929 ▲003266

$x^3+(2b-a^2)X^2+(b^2-2ac)X-c^2$.

Solución del ejercicio 930 ▲003267

raíz $1 : \lambda = -6$.
raíz $-1 : \lambda = -4$.
raíz $\alpha \in \mathbb{U}\setminus\{\pm 1\}$: los otros son $\frac{1}{\alpha}$ y $-\lambda \Rightarrow \lambda = 6$, $\alpha = \frac{1+i\sqrt{15}}{4}$.

Solución del ejercicio 931 ▲003268

1. Los coeficientes de P están acotados.
2. $\widetilde{P}(X^2) = (-1)^n P(X)P(-X) \Rightarrow \widetilde{P} \in \mathbb{Z}[X]$.
3. La sucesión $(\widetilde{\widetilde{P}}^{\vdots})$ toma un número finito de valores.

Solución del ejercicio 932 ▲003269

Sea $y = \gamma x+\delta$ la ecuación de la recta en pregunta. Se quiere que la ecuación $x^4+ax^3+bx^2+(c-\gamma)x+(d-\delta) = 0$ tenga cuatro raíces distintas en progresión aritmética. Si r es la razón de esta progresión entonces las raíces son $-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r$, $-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r$, $-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r$ y $-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r$. Se debe por lo tanto averiguar en qué condiciones sobre a,b,c,d existen γ,δ,r reales tales que :

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)+\cdots+\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=-b\\
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)+\cdots+\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=c-\gamma\\
&\left(-\frac{a}{4}-\frac{3}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}r\right)\left(-\frac{a}{4}+\frac{3}{2}r\right)=\delta-d.
\end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones se satisfacen en r dado eligiendo adecuadamente γ y δ. El primero se escribe luego de simplificaciones : $\frac{5}{2}r^2=\frac{3}{8}a^2+b$ y la condición requerida es $3a^2+8b>0$.

Solución del ejercicio 933 ▲005314

En primer lugar,

$$Q=(1+X+\cdots+X^n)'=\left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right)'=\frac{(n+1)X^n(X-1)-X^{n+1}}{(X-1)^2}=\frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Luego, $\omega_0=1$ y entonces, $Q(\omega_0)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Después, para $1\leqslant k\leqslant n-1$, $\omega_k\neq 1$ y entonces, ya que $\omega_k^n=1$,

$$Q(\omega_k)=\frac{n\omega_k^{n+1}-(n+1)\omega_k^n+1}{(\omega_k-1)^2}=\frac{n\omega_k-(n+1)+1}{(\omega_k-1)^2}=\frac{n}{\omega_k-1}.$$

Como resultado,

$$\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega_k)=\frac{n(n+1)}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n}{\omega_k-1}=\frac{n^n(n+1)}{2\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1)}.$$

Pero, $X^n-1=(X-1)(1+X+\cdots+X^{n-1})$ y por otro lado $X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n})=(X-1)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega_k)$.
Por integridad de $\mathbb{R}[X]$, $\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{2ik\pi/n})=1+X+\cdots+X^{n-1}$.
(Otra posible redacción es : $\forall z\in\mathbb{C}$, $(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=(z-1)(1+z+\cdots+z^{n-1})$ y entonces $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=1+z+\cdots+z^{n-1}$ y finalmente $\forall z\in\mathbb{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)=1+z+\cdots+z^{n-1}$ porque los dos polinomios coinciden en una infinidad de valores de z).
En particular, $\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega_k)=1+1^2+\cdots+1^{n-1}=n$ o aún $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1)=(-1)^{n-1}n$. Así,

$$\prod_{k=0}^{n-1}Q(\omega_k)=\frac{n^n(n+1)}{2}\frac{1}{(-1)^{n-1}n}=\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Solución del ejercicio 934 ▲005320

Si P es de grado menor o igual que 0, es claro. Si no, se escribe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X).$$

Pero, para $1 \leqslant k \leqslant n$, $(P(X))^k - X^k) = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \cdots + X^{k-1})$ es divisible por $P(X) - X$ y lo mismo ocurre con $P(P(X)) - X$.

Solución del ejercicio 935 ▲005321

---

1. Se define $P = \sum_{i=0}^{l} a_i X_i$, donde $l \geqslant 1$ y donde los a_i son enteros relativos con $a_l \neq 0$.

$$P(n+km) = \sum_{i=0}^{l} a_i(n+km)^i = \sum_{i=0}^{l} a_i(n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^{l} a_i n^i + Km = m + Km = m(K+1),$$

   donde K es un entero relativo. $P(n+km)$ es, por lo tanto un entero relativo múltiplo de $m = P(n)$.
2. Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es primo. Sea n un entero natural dado y $m = P(n)$ (por lo tanto, $m \geqslant 2$ y, en particular $m \neq 0$). Para todo entero relativo k, $P(n+km)$ es divisible por m, pero $P(n+km)$ es un número primo que impone $P(n+km) = m$. Así, el polinomio $Q = P - m$ admite una infinidad de raíces distintas dos a dos (ya que $m \neq 0$) y es, por lo tanto el polinomio nulo o aún P es constante.

Solución del ejercicio 936 ▲005322

---

1. Ya, P_0 está en E. Sea n un natural no nulo. $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)\cdots(X+n)$ y entonces, si k es elemento de $\{-1, \dots, -n\}$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si k es un entero positivo, $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\cdots(k+n) = C_{n+k}^{n} \in \mathbb{Z}$. En fin, si k es un entero estrictamente menor que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\cdots(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)\cdots(-k-n) = (-1)^n C_{-k-1}^{n} \in \mathbb{Z}.$$

   Así, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_(k) \in \mathbb{Z}$, o aún $P_(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Evidente
3. Sea $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tal que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P es nulo, P es una combinación lineal con coeficientes enteros de las P_k). Porque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{gr}(P_k) = k$, se sabe que para todos los números naturales n, $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ es una base de $\mathbb{C}_n[X]$ y entonces, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de $\mathbb{C}[X]$ (todo polinomio no nulo teniendo un grado n, se escribe así de manera única como una combinación lineal de los P_k). Sea $n = \mathrm{gr}P$. Existe $n+1$ números complejos $a_0, \dots, a_n$ tales que $P = a_0 P_0 + \cdots + a_n P_n$. Queda por demostrar que la a_i son enteros relativos.
   La igualdad $P(-1)$ está en $\mathbb{Z}$, proporciona : a_0 está en $\mathbb{Z}$.
   La igualdad $P(-2)$ está en $\mathbb{Z}$, proporciona : $a_0 - a_1$ está en $\mathbb{Z}$ y entonces a_1 está en $\mathbb{Z}$.
   La igualdad $P(-3)$ está en $\mathbb{Z}$, proporciona : $a_0 - 2a_1 + a_2$ está en $\mathbb{Z}$ y entonces a_2 está en $\mathbb{Z}$...

La igualdad $P(-(k+1))$ está en $\mathbb{Z}$, proporciona : $a_0-a_1+\cdots+(-1)^k a_k$ está en $\mathbb{Z}$ y si por hipótesis de inducción, $a_0,\ldots,a_{k-1}$ son enteros relativos, entonces a_k también lo es.

Todos los coeficientes a_k son enteros relativos y E, por lo tanto, está formado por combinaciones lineales con coeficientes enteros relativos de los P_k.

Solución del ejercicio 937 ▲005326

Sea P tal polinomio. -2 es raíz de $P+10$ de orden al menos tres y por lo tanto, raíz de $(P+10)'=P'$ de orden al menos dos.
Igualmente, 2 es raíz de P' de orden al menos dos y porque P' es de grado 4, existe un complejo λ tal que $P'=\lambda(X-2)^2(X+2)^2=\lambda(X^2-4)^2=\lambda(X^4-8X^2+16)$ y enfin, necesariamente,

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2/\ P=\lambda(\tfrac{1}{5}X^5-\tfrac{8}{3}X^3+16X)+\mu \text{ con } \lambda\neq 0.$$

Recíprocamente, sea $P=\lambda(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)+\mu$, con $\lambda\neq 0$.

$$\begin{aligned}
P \text{ solución} &\Leftrightarrow P+10 \text{ Divisible por } (X+2)^3 \text{ y } P-10 \text{ es divisible por } (X-2)^3\\
&\Leftrightarrow P(-2)+10=0=P'(-2)=P''(-2) \text{ y } P(2)+10=0=P'(2)=P''(2)\\
&\Leftrightarrow P(-2)=-10 \text{ y } P(2)=10\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32)+\mu=-10\\ \lambda(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+\mu=10\end{cases} \Leftrightarrow \mu=0 \text{ y } \lambda(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32)+\mu=10\\
&\Leftrightarrow \mu=0 \text{ y } \lambda=\frac{75}{128}
\end{aligned}$$

Se encuentra uno y solo un polinomio solución, a saber $P=\frac{75}{128}(\frac{1}{5}X^5-\frac{8}{3}X^3+16X)=\frac{15}{128}X^5-\frac{25}{16}X^3+\frac{75}{8}X$.

Solución del ejercicio 938 ▲005327

Polinomios de grado menor o igual que 0 soluciones son claramente 0 y 1. Sea P un polinomio de grado mayor o igual que 1 tal que $P(X^2)=P(X)P(X+1)$. Sea a una raíz de P en $\mathbb{C}$. Entonces, a^2, a^4, a^8..., son aún raíces de P. Pero, P es no nulo, P solo debe admitir un número finito de raíces. La sucesión $(a^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ por lo tanto, solo debe tomar un número finito de valores, lo que impone $a=0$ o $|a|=1$ porque si $|a|\in$ $]0,1[\cap]1,+\infty[$, la sucesión $(|a^{2^n}|)$ es estrictamente monótona y en particular las a^{2^n} son dos a dos distintos.
Igualmente, si a es raíz de P, entonces $(a-1)^2$, lo es todavía pero también $(a-1)^4$, $(a-1)^8$..., que impone $a=1$ o $|a-1|=1$.
En resumen,

$$(a \text{ raíz de } P \text{ en } \mathbb{C})\Rightarrow((a=0 \text{ o } |a|=1) \text{ y } (a=1 \text{ o } |a-1|=1))\Rightarrow(a=0 \text{ o } a=1 \text{ o } |a|=|a-1|=1).$$

Ahora, $|a|=|a-1|=1\Leftrightarrow|a|=1$ y $|a|=|a-1|\Leftrightarrow a\in\mathscr{C}((0,0),1)\cap\text{med}[(0,0),(1,0)]=\{-j,-j^2\}$.
Entonces, si $P\in\mathbb{R}[X]$ es solución, existe K, α, β, γ, K complejo no nulo y α, β y γ enteros naturales tales que $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma$ ($-j$ y $-j^2$ deben tener el mismo orden de multiplicidad).
Recíprocamente, si $P=KX^\alpha(X-1)^\beta(X+j)^\gamma(X+j^2)^\gamma=KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma$.

$$P(X^2)=KX^{2\alpha}(X^2-1)^\beta(X4-X^2+1)^\gamma=KX^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta(X^2-\sqrt{3}X+1)^\gamma(X^2+\sqrt{3}X+1)^\gamma,$$

y

$$\begin{aligned} P(X)P(X+1) &= KX^{\alpha}(X-1)^{\beta}(X^2-X+1)\gamma K(X+1)^{\alpha}X^{\beta}(X^2+X+1)^{\gamma} \\ &= K^2X^{\alpha+\beta}(X-1)^{\beta}(X+1)^{\alpha}(X^2-X+1)^{\gamma}(X^2+X+1)^{\gamma}. \end{aligned}$$

Por unicidad de la descomposición en producto de factores irreducibles de un polinomio no nulo, P es solución si y solo si $P=0$ o $K=1$ y $\alpha=\beta$ y $\gamma=0$. Los polinomios solución son 0 y los $(X^2-X)^{\alpha}$, donde α es un entero natural cualquiera.

Solución del ejercicio 939 ▲005330

---

1. $S \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{xy+xz+yz}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma_1=1,\ \sigma_2=\sigma_3=-4$
   $\Leftrightarrow x,\ y$ y z son las tres soluciones de la ecuación $X^3-X^2-4X+4=0$
   $\Leftrightarrow x,\ y$ y z son las tres soluciones de la ecuación $(X-1)(X-2)(X+2)=0$
   $\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)\}$
2. Para $1\leqslant k\leqslant 4$, se escribe $S_k=x^k+y^k+z^k+t^k$. Se tiene $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$. Calculemos S_3 en función de los σ_k. Se tiene $\sigma_1^3=S_3+3\sum x^2y+6\sum xyz=S_3+3\sum x^2y+6\sigma_3$ $(*)$. Pero se tiene también $S_1S_2=S_3+\sum x^2y$. Entonces, $\sum x^2y=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-S_3$. Reportando en $(*)$, se obtiene $\sigma_1^3=S_3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3$ y entonces,
   $$S_3=\tfrac{1}{2}(-\sigma_1^3+3(\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2-S_3)+6\sigma_3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$
   Calculemos S_3 en función de los σ_k. Sea $P=(X-x)(X-y)(X-z)(X-t)=X^4-\sigma_1X^3+\sigma_2X^2-\sigma_3X+\sigma_4$.
   $$\begin{aligned} P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=0 &\Leftrightarrow S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2-\sigma_3S_1+4\sigma_4=0 \\ &\Leftrightarrow S_4=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1-4\sigma_4 \\ &\Leftrightarrow S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4. \end{aligned}$$
   Por consiguiente, $S \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1=0 \\ -2\sigma_2=10 \\ 3\sigma_3=0 \\ 2\sigma_2^2-4\sigma_4=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1=0 \\ \sigma_2=-5 \\ \sigma_3=0 \\ \sigma_4=6 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow x,\ y,\ z,$ y t son los 4 soluciones de la ecuación $X^4-5X^2+6=0$
   $\Leftrightarrow (x,y,z,t)$ es una de las 24 permutaciones del cuádruple $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3})$

Solución del ejercicio 940 ▲005331

El polinomio cero es una solución. Sea P un polinomio no nulo de grado n solución, entonces $n=n-1+n-2$ y así $n=3$. Se define así $P=aX^3+bX^2+cX+d$, con $a\neq 0$.

$$\begin{aligned} P(2X)=P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3+4bX^2+2cX+d=(3aX^2+2bX+c)(6aX+2b) \\ &\Leftrightarrow (18a^2-8a)X^3+(18ab-4b)X^2+(4b^2+6ac-2c)X+2bc-d=0 \\ &\Leftrightarrow 18a^2-8a=18ab-4b=4b^2+6ac-2c=2bc-d=0 \\ &\Leftrightarrow a=\frac{4}{9} \text{ y } b=c=d=0. \end{aligned}$$

Los polinomios solución son 0 y $\frac{4}{9}X^3$.

Solución del ejercicio 941 ▲005332

0 no es raíz de P.
Se recuerda que si $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$) es raíz de P, entonces p divide el coeficiente constante de P y q divide su coeficiente dominante. Aquí, p divide 4 y q divide 12 y entonces, p es elemento de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ y q es elemento de $\{1,2,3,4,6,12\}$ o aún r es elemento de :

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}\}.$$

Recíprocamente, se encuentra $P(\frac{2}{3}) = P(\frac{1}{4}) = 0$. P es, por lo tanto divisible por

$$12(X-\frac{2}{3})(X-\frac{1}{4}) = (3X-2)(4X-1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Más precisamente, $P = (12X^2 - 11X + 2)(X^2 + X + 2) = (3X-2)(4X-1)(X - \frac{-1+i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$.

Solución del ejercicio 942 ▲005333

Para $n \geqslant 0$, se escribe $P_n = (X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n(\frac{1}{2}) = 0$. P_n admite 0, 1 y $\frac{1}{2}$ por raíces y por lo tanto, es divisible por $X(X-1)(2X-1) = 2X^3 - 3X^2 + X$.
Si $n = 0$ o $n = 1$, el cociente es nulo. Si $n = 2$, el cociente es -2.
Sea $n \geqslant 3$. Se define sucesivamente $2X-1$, luego $X-1$, luego X en factor :

$$\begin{aligned}
P_n &= ((X-1)^2)^n - (X^2)^n + (2X-1) = ((X-1)2 - X2)\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + (2X-1)\\
&= (2X-1)(-\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1) = (2X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k}X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2})\\
&= (2X-1)(-(X-1)\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - (X-1)\sum_{k=0}^{2n-1}X^k)\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-1}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1}X^k)\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-1}X^k - 1 - (X-1)^{2n-3})\\
&= (2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^k - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^k)\\
&= X(2X-1)(X-1)(-\sum_{k=1}^{n-2}(X-1)^{2k-1}X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3}X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3}(-1)^{2n-3-k}C_{2n-3}^k X^{k-1}).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 943 ▲005334

$$\begin{aligned}1 = (X+(1-X))^{n+m-1} &= \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n+m-1-k}\\
&= (1-X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}.\end{aligned}$$

Sean $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}$ y $V = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k(1-X)^{n-1-k}$. U y V son polinomios tales que $UX^n + V(1-X)^m = 1$. Además, para $n \leqslant k \leqslant n+m-1$, $\mathrm{gr}(X^{k-n}(1-X)^{n+m-1-k}) = k-n+n+m-1-k = m-1 < m$ y entonces $\mathrm{gr}(U) < m$ e igualmente para $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\mathrm{gr}(X^k(1-X)^{n-1-k}) = k+n-1-k = n-1 < n$ y $\mathrm{gr}(V) < n$.

Solución del ejercicio 944 ▲005343

Se supone $a_0 \neq 0$ de manera que 0 no es raíz de P. Sean p un entero relativo no nulo y q un entero natural no nulo tal que p y q sean primos entre ellos. Si $r = \frac{p}{q}$ es raíz de P, entonces $a_n(\frac{p}{q})^n + \cdots + a_0 = 0$ y entonces

$$a_n p^n = -q(a_0 q^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}) \text{ y } a_0 q^n = -p(a^n p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}).$$

Entonces p divide $a_0 q^n$, pero p es primo a q^n y de acuerdo con el teorema de Gauss, p divide a_0. Igualmente q divide a_n.
Aplicación. Sea $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4$ y sea p un entero relativo no nulo y q un entero natural no nulo tal que $p \wedge q = 1$. Si $\frac{p}{q}$ es raíz de P, p divide -4 y q divide 9 de manera que p es elemento de $\{1,-1,2,-2,4,-4\}$ y q es elemento de $\{1,3,9\}$, luego $\frac{p}{q}$ es elemento de

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{9}, \pm\frac{4}{9}\}.$$

Se encuentra $P(\frac{2}{3}) = P(-\frac{1}{3}) = 0$ y P es divisible por $(3X-2)(3X+1) = 9X^2 - 3X - 2$. Más precisamente $P = 9X^4 - 3X^3 + 16X^2 - 6X - 4 = (9X^2 - 3X - 2)(X^2 + 2)$ y las raíces de P en $\mathbb{C}$ son $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $i\sqrt{2}$ y $-i\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 945 ▲005344

1. $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 + 2(X + \frac{1}{X}) + 1)$
   $= X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2(X - j^2)^2$.
2. 1 y -1 son raíces de P. Por lo tanto, se escribe $P = (X^2 - 1)(X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1)$, luego

$$\begin{aligned}X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1 &= X^2((X^2 + \frac{1}{X^2}) - 5(X + \frac{1}{X}) + 6) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 - 5(X + \frac{1}{X}) + 4)\\
&= X^2(X + \frac{1}{X} - 1)(X + \frac{1}{X} - 4) = (X^2 - X + 1)(X^2 - 4X + 1)\end{aligned}$$

   y por lo tanto, $P = (X-1)(X+1)(X+j)(X+j^2)(X-2+\sqrt{3})(X-2-\sqrt{3})$.

3. $P = X^7 - X^6 - 7X^5 + 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 - X + 1 = (X^2-1)(X^5 - X^4 - 6X^3 + 6X^2 + X - 1)$
$= (X-1)^2(X+1)(X^4 - 6X^2 + 1)$
$= (X-1)^2(X+1)(X^2(3+2\sqrt{2}))(X^2 - (3-2\sqrt{2}))$,
las raíces de P en $\mathbb{C}$ son 1, -1, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}, -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ y $-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Solución del ejercicio 946 ▲005346

Sea P un polinomio con coeficientes complejos de grado 4. Se supone P unitario sin pérdida de generalidad. Se denota z_1, z_2, z_3 y z_4 las raíces de P en $\mathbb{C}$. Si z_1, z_2, z_3 y z_4 forman un paralelogramo, se denota a el centro de este paralelogramo. Las raíces de P se escriben entonces $z_1, z_2, 2a - z_1, 2a - z_2$ y si $Q = P(X+a)$, entonces $Q(-a+z_1) = Q(a-z_1) = Q(-a+z_2) = Q(a-z_2) = 0$. Las raíces del polinomio Q son dos a dos opuestas, lo que equivale a decir que el polinomio Q es bicuadrado o de la forma $X^4 + \alpha X^2 + \beta$ o finalmente que

$$P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta.$$

Pero entonces a es raíz de $P' = 4(X-a)^3 + 2\alpha(X-a)$ y de $P^{(3)} = 24(X-a)$. Recíprocamente, si P' y $P^{(3)}$ tienen una raíz común a. $P^{(3)}$ es de grado 1 y con coeficiente principal 24 y entonces $P^{(3)} = 24(X-a)$, luego integrando $P'' = 12(X-a)^2 + \lambda$, luego $P' = 4(X-a)^3 + \lambda(X-a) + \mu$. La condición a es raíz de P' proporciona $\mu = 0$ y entonces $P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta$. Entonces, el polinomio $Q = P(X+a)$ es bicuadrada y sus raíces son opuestas dos a dos y por lo tanto, de la forma $Z_1 = a - z_1$, $Z_2 = z1 - a$, $Z_3 = a - z_2$, $Z_4 = z_2 - a$ y se tiene $Z_1 - Z_3 = Z_4 - Z_2$.

Solución del ejercicio 947 ▲005347

Si (x,y,z) es la solución del sistema propuesto denotado (S), entonces x, y y z son dos a dos distintos. En efecto, si por ejemplo $x = y$, entonces $7 = y^2 + yz + z^2 = x^2 + xz + z^2 = 13$, lo que es imposible. Entonces,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - z^3 = 7(y-z) \\ z^3 - x^3 = 13(z-x) \\ x^3 - y^3 = 3(x-y). \end{cases}$$

Agregando las tres ecuaciones, se obtiene $-10x + 4y + 6z = 0$ o aún $-5x + 2y + 3z = 0$. Entonces,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)z + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + \frac{1}{2}(5x-3z)x + (\frac{1}{2}(5x-3z))^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ 25x^2 - 20xz + 7z^2 = 28 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ 39x^2 - 36xz + 9z^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 25x^2 - 20(13 - x^2 - z^2) + 7z^2 = 28 \\ 39x^2 - 36(13 - x^2 - z^2) + 9z^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x-3z) \\ xz = 13 - x^2 - z^2 \\ 5x^2 + 3z^2 = 32. \end{cases}$$

Sea (S') el sistema formado por las dos últimas ecuaciones. Se observa que $x = 0$ no proporciona una solución y por lo tanto,

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \\ xz = 13 - x^2 - \frac{1}{3}(32 - 5x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2x^2+7}{3x} \\ \dfrac{(2x^2+7)^2}{9x^2} = \frac{1}{3}(32 - 5x^2). \end{cases}$$

La segunda ecuación se escribe $(2x^2+7)^2 = 3x^2(32-5x^2)$, luego $19x^4-68x^2+49=0$, así $x^2 = \frac{34\pm 15}{19}$. De ahí las soluciones $x=1$ o $x=-1$ o $x=\sqrt{\frac{49}{19}}$ o $x=-\sqrt{\frac{49}{19}}$. Después, los cuatro triples solución del sistema : $(1,-2,3)$, $(-1,2,-3)$, $(\frac{7}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{11}{\sqrt{19}})$ y $(-\frac{7}{\sqrt{19}}, -\frac{1}{\sqrt{19}}, -\frac{11}{\sqrt{19}})$.

Solución del ejercicio 948 ▲005348

Sea $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k) = X^n - 1$ (donde $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$)

1. $$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{2-\omega_k}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4-\omega_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2-\omega_k)} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n+1.$$
2. $$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2 - 2\omega_k\cos a + 1) &= \prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{ia}-\omega_k)(\mathrm{e}^{-ia}-\omega_k) = P(\mathrm{e}^{ia})P(\mathrm{e}^{-ia}) = (\mathrm{e}^{ina}-1)(\mathrm{e}^{-ina}-1)\\ &= 2-\mathrm{e}^{ina}-\mathrm{e}^{-ina} = 2(1-\cos na).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 949 ▲005352

La ecuación propuesta admite dos soluciones inversas entre sí si y solo si existen dos complejos a y b tales que

$$X^4-21X+8 = (X^2+aX+1)(X^2+bX+8) = X^4+(a+b)X^3+(9+ab)X^2+(8a+b)X+8 \qquad (*)$$

$(*) \Leftrightarrow b=-a$ y $ab=-9$ y $8a+b=-21 \Leftrightarrow a=3$ y $b=-3$. Así,

$$X^4-21X+8 = (X^2+3X+1)(X^2-3X+8) = \left(X-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(X-\frac{3-i\sqrt{15}}{2}\right).$$

Solución del ejercicio 950 ▲000886

1. (a) $(0,0,0)\in E_1$.
   (b) Sean (x,y,z) y (x',y',z') dos elementos de E_1. Se tiene entonces $3x-7y=z$ y $3x'-7y'=z'$. Entonces $3(x+x')-7(y+y')=(z+z')$, de donde $(x+x',y+y',z+z')$ pertenece a E_1.
   (c) Sea $\lambda\in\mathbb{R}$ y $(x,y,z)\in E_1$. Entonces la relación $3x-7y=z$ implica que $3(\lambda x)-7(\lambda y)=\lambda z$ de modo que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ pertenece a E_1.
2. $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$, es decir $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z \text{ o } x=-z\}$. Entonces $(1,0,-1)$ y $(1,0,1)$ pertenecen a E_2, pero $(1,0,-1)+(1,0,1)=(2,0,0)$ no pertenece a E_2 que por lo tanto no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
3. E_3 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. En efecto :
   (a) $(0,0,0)\in E_3$.
   (b) Sean (x,y,z) y (x',y',z') dos elementos de E_3. Se tiene entonces $x+y-z=x+y+z=0$ y $x'+y'-z'=x'+y'+z'=0$. Entonces $(x+x')+(y+y')-(z+z')=(x+x')+(y+y')+(z+z')=0$ y $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ pertenece a E_3.

(c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in E_3$. Entonces la relación $x+y-z = x+y+z = 0$ implica que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ de modo que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ pertenece a E_3.

4. Los vectores $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ pertenecen a E_4, pero su suma $(1,0,0)+(0,0,1) = (1,0,1)$ por lo tanto no le pertenece E_4 no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 952 ▲000888

1. E_1 : no si $a \neq 0$ porque entonces $0 \notin E_1$; sí, si $a = 0$ porque entonces E_1 es la intersección de los subespacios vectoriales $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0\}$.
2. E_2 es un subespacio vectorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : no, porque la función nula no pertenece a E_3.
4. E_4 : no, de hecho E_4 ni siquiera es un subgrupo de $(\mathbb{R}^2,+)$, pues $(2,0) \in E_4$, pero $-(2,0) = (-2,0) \notin E_4$.

Solución del ejercicio 957 ▲000893

1. Sentido $\Leftarrow$. Si $F \subset G$, entonces $F \cup G = G$, por lo tanto $F \cup G$ es un subespacio vectorial. Del mismo modo si $G \subset F$.

   Sentido $\Rightarrow$. Se supone que $F \cup G$ es un subespacio vectorial. Por reducción al absurdo supongamos que F no está incluido en G y que G no está incluido en F. Entonces existe $x \in F \setminus G$ y $y \in G \setminus F$. Pero entonces $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$, por lo tanto $x+y \in F \cup G$ (pues $F \cup G$ es un subespacio vectorial). Como $x+y \in F \cup G$, entonces $x+y \in F$ o $x+y \in G$.
   — Si $x+y \in F$, entonces, como $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$, por lo tanto $y \in F$, lo que es absurdo.
   — Si $x+y \in G$, entonces, como $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$, por lo tanto $x \in G$, lo que es absurdo.
   En los dos casos se obtiene una contradicción. Entonces F está incluido en G o G está incluido en F.
2. Se supone $G \subset F$.
   — Inclusión $\supset$. Sea $x \in G+(F \cap H)$. Entonces existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tales que $x = a+b$. Como $G \subset F$, entonces $a \in F$, además $b \in F$, por lo tanto $x = a+b \in F$. Por otra parte $a \in G$, $b \in H$, por lo tanto $x = a+b \in G+H$. Entonces $x \in F \cap (G+H)$.
   — Inclusión $\subset$. Sea $x \in F \cap (G+H)$. $x \in G+H$, entonces existe $a \in G$, $b \in H$ tal que $x = a+b$. Ahora $b = x-a$, con $x \in F$ y $a \in G \subset F$, por lo tanto $b \in F$, por lo tanto $b \in F \cap H$. Entonces $x = a+b \in G+(F \cap H)$.

Solución del ejercicio 968 ▲003298

Existe igualdad.

Solución del ejercicio 969 ▲003299

La intersección contiene F. Sea $\overrightarrow{u} \in \big(F+(G \cap F')\big) \cap \big(F+(G \cap G')\big)$: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{b}'$, con $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}' \in F$, $\overrightarrow{b} \in G \cap F'$ y $\overrightarrow{b}' \in G \cap G'$. Entonces $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}' = \overrightarrow{a}' - \overrightarrow{a} \in F \cap G = F' \cap G'$, por lo tanto $\overrightarrow{b} \in G'$, y $\overrightarrow{b} \in F' \cap G' \subset F$.

Solución del ejercicio 972 ▲005164

1. La función nula está en F y, en particular, $F \neq \varnothing$. Sean entonces $(f,g) \in F^2$ y $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda f+\mu g)(0)+(\lambda f+\mu g)(1)=\lambda(f(0)+f(1))+\mu(g(0)+g(1))=0.$$

   Así, $\lambda f+\mu g$ está en F. Se ha demostrado que :

$$F \neq \varnothing \text{ y } \forall (f,g) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f+\mu g \in F.$$

   F es, por lo tanto un subespacio vectorial de E.
2. Mismo enfoque y misma conclusión.
3. F no contiene la función nula y por lo tanto, no es un subespacio vectorial de E.
4. La función nula está en F y, en particular, $F \neq \varnothing$. Sean entonces $(f,g) \in F^2$ y $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Para x elemento de $[0,1]$,

$$(\lambda f+\mu g)(x)+(\lambda f+\mu g)(1-x)=\lambda(f(x)+f(1-x))+\mu(g(x)+g(1-x))=0$$

   y $\lambda f+\mu g$ está en F. F es un subespacio vectorial de E.
   Observación. Las gráficas de las funciones consideradas son simétricas con respecto al punto $(\frac{1}{2},0)$.
5. F contiene la función constante 1, pero no su opuesto la función constante -1 y por lo tanto, no es un subespacio vectorial de E.
6. F no contiene la función nula y por lo tanto, no es un subespacio vectorial de E.

Solución del ejercicio 973 ▲005165

En los casos donde F es un subespacio, se tienen tres enfoques posibles para verificarlo :
- Utilizar la caracterización de un subespacio vectorial.
- Obtener F como núcleo de una forma lineal o más generalmente, como núcleo de una aplicación lineal.
- Obtener F como un subespacio generado por una familia de vectores.

Se detallan los tres enfoques.

1. **1a etapa.** F contiene el vector nulo $(0,\dots,0)$ y entonces $F \neq \varnothing$.
   Sean entonces $((x_1,\dots,x_n),(x'_1,\dots,x'_n)) \in F^2$ y $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene

$$\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x'_1,\dots,x'_n)=(\lambda x_1+\mu x'_1,\dots,\lambda x_n+\mu x'_n)$$

   con $\lambda x_1+\mu x'_1=0$. Entonces, $\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x'_1,\dots,x'_n) \in F$. F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
   2o enfoque. La aplicación $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1$ es una forma lineal en $\mathbb{R}^n$ y F es el núcleo. F es, por lo tanto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
   3o enfoque. $F=\{(0,x_2,\dots,x_n),\ (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$
   $=\{x_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n(0,\dots,0,1),\ (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$
   $=\text{vect}((0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$.
   F es, por lo tanto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
2. F no contiene el vector nulo y por lo tanto, no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
3. (Aquí, $n \geqslant 2$). La aplicación $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1-x_2$ es una forma lineal en $\mathbb{R}^n$ y F es el núcleo. F es, por lo tanto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

4. La aplicación $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1+\cdots+x_n$ es una forma lineal en $\mathbb{R}^n$ y F es el núcleo. F es, por lo tanto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
5. (Aquí, $n\geqslant 2$). Los vectores $e_1=(1,0,\dots,0)$ y $e_2=(0,1,0...,0)$ están en F, pero $e_1+e_2=(1,1,0\cdots 0)$ no lo está. F por lo tanto no es un subespacio vectorial de E.

   Observación. F es unión de los subespacios $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ y $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_2=0\}$.

Solución del ejercicio 974 ▲005166

Basta con demostrar que $C\subset B$. Sea x un elemento de C. Entonces $x\in A+C=A+B$ y existe $(y,z)\in A\times B$ tal que $x=y+z$. Pero $z\in B\subset C$ y entonces, ya que C es un subespacio vectorial de E, $y=x-z$ está en C. Entonces, $y\in A\cap C=A\cap B$ y, en particular y está en B. Finalmente, $x=y+z$ está en B. Se ha demostrado que todo elemento de C está en B y así como, $C\subset B$. Ya que por otra parte $B\subset C$, se tiene $B=C$.

Solución del ejercicio 975 ▲005168

Sea $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$(\lambda,\mu,-37,-3)\in F\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ (\lambda,\mu,-37,-3)=au+bv\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}a+2b=\lambda\\ 2a-b=\mu\\ -5a+4b=-37\\ 3a+7b=-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}a+2b=\lambda\\ 2a-b=\mu\\ a=\frac{247}{47}\\ b=-\frac{126}{47}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{247}{47}+2(-\frac{126}{47})\\ \mu=2\frac{247}{47}+\frac{126}{47}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{5}{47}\\ \mu=\frac{620}{47}.\end{cases}$$

Solución del ejercicio 976 ▲005169

Pongamos $F=\mathrm{vect}(a,b)$ y $G=\mathrm{vect}(c,d)$. Demostrar que c y d están en F.

$$c\in F\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ c=\lambda a+\mu b\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}\lambda+2\mu=1\\ 2\lambda-\mu=0\\ 3\lambda+\mu=1\end{cases}\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}\lambda=\frac{1}{5}\\ \mu=\frac{2}{5}\\ 3\lambda+\mu=1.\end{cases}$$

porque $3\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=1$, el sistema anterior admite un par (λ,μ) solución y c está en F. Más precisamente, $c=\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b$.

$$d\in F\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ d=\lambda a+\mu b\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}\lambda+2\mu=0\\ 2\lambda-\mu=1\\ 3\lambda+\mu=1\end{cases}\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \begin{cases}\lambda=\frac{2}{5}\\ \mu=-\frac{1}{5}\\ 3\lambda+\mu=1,\end{cases}$$

porque $3\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=1$, el sistema anterior admite un par (λ,μ) solución y d está en F. Más precisamente, $d=\frac{2}{5}a-\frac{1}{5}b$.

En resumen, $\{c,d\}\subset F$ y entonces $G=\mathrm{vect}(c,d)\subset F$. Demostrar que a y b están en G, pero las igualdades $c=\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b$ y $d=\frac{2}{5}a-\frac{1}{5}b$ proporcionan $a=c+2d$ y $b=2c-d$. Así, $\{a,b\}\subset G$ y entonces $F=\mathrm{vect}(a,b)\subset G$. Finalmente, $F=G$.

Solución del ejercicio 977 ▲005172

1. Sea $x \in E$. $x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow \exists y \in A \cap B,\ \exists z \in A \cap C/\ x = y + z$. y y z están en A y entonces $x = y + z$ está en A, pues A es un subespacio vectorial de E. Después y está en B y z está en C y entonces $x = y + z$ está en $B + C$. Finalmente,
$$\forall x \in E,\ [x \in (A \cap B) + (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B + C)].$$
Otro enfoque. $(A \cap B \subset B$ y $A \cap C \subset C) \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + C$, luego $(A \cap B \subset A$ y $A \cap C \subset A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A$, y finalmente $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$.
2. Si se trata de probar la inclusión contraria, el razonamiento se atasca porque la suma $y + z$ puede estar en A sin que ni y, ni z están en A.
Contra-ejemplo. En $\mathbb{R}^2$, se considera $A = \mathbb{R}.(1,0) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R}.(0,1)$ y $C = \mathbb{R}.(1,1)$. $B + C = \mathbb{R}^2$ y $A \cap (B + C) = A$, pero $A \cap B = \{0\}$ y $A \cap C = \{0\}$ y entonces $(A \cap B) + (A \cap C) = \{0\} \neq A \cap (B + C)$.
3. $A \cap B \subset B \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) \subset B + (A \cap C)$, pero también $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A + A = A$. Entonces, $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + (A \cap C))$. Inversamente, sea $x \in A \cap (B + (A \cap C))$, entonces $x = y + z$, donde y está en B y z está en $A \cap C$. Pero entonces, x y z están en A y entonces $y = x - z$ está en A y más precisamente en $A \cap B$. Entonces, $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. Entonces, $A \cap (B + (A \cap C)) \subset (A \cap B) + (A \cap C)$ y finalmente, $A \cap (B + (A \cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

Solución del ejercicio 978 ▲005173

1. Para $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, se establece $f((x,y,z,t)) = x - 2y$, $g((x,y,z,t)) = y - 2z$ y $h((x,y,z,t)) = x - y + z - t$. f, g y h son formas lineales en $\mathbb{R}^4$. Entonces, $V = \ker f \cap \ker g$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ como una intersección de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y $W = \ker h$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
2. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
$$(x,y,z,t) \in V \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z. \end{cases}$$
Entonces, $V = \{(4z, 2z, z, t),\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(e_1, e_2)$, donde $e_1 = (4,2,1,0)$ y $e_2 = (0,0,0,1)$. Demostrar entonces que (e_1, e_2) es libre. Sea $(z,t) \in \mathbb{R}^2$.
$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z, 2z, z, t) = (0,0,0,0) \Rightarrow z = t = 0.$$
Entonces, (e_1, e_2) es una base de V. Para $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow t = x - y + z$. Entonces, $W = \{(x,y,z,x-y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}(e'_1, e'_2, e'_3)$, donde $e'_1 = (1,0,0,1)$, $e'_2 = (0,1,0,-1)$ y $e'_3 = (0,0,1,1)$. Demostrar entonces que (e'_1, e'_2, e'_3) es libre. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x,y,z,x-y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$
Entonces, (e'_1, e'_2, e'_3) es una base de W. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
$$(x,y,z,t) \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 2z \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{cases}.$$
Entonces, $V \cap W = \{(4z, 2z, z, 3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(e)$, donde $e = (4,2,1,3)$. Además, e es no nulo, la familia (e) es libre y por lo tanto, es una base de $V \cap W$.

3. Sea $u = (x,y,z,t)$ un vector de $\mathbb{R}^4$. Se busca $v = (4\alpha, 2\alpha, \alpha, \beta) \in V$ y $w = (a,b,c,a-b+c) \in W$ tales que $u = v+w$.

$$u = v+w \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x - 4\alpha \\ b = y - 2\alpha \\ c = z - \alpha \\ \beta = -x + y - z + t - 3\alpha, \end{cases}$$

y $\alpha = 0$, $\beta = -x+y-z+t$, $a = x$, $b = y$ y $c = z$ sirven. Entonces, $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $\exists (v,w) \in V \times W / \ u = v+w$. Se ha demostrado que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Solución del ejercicio 979 ▲005174

1. Para todo (y,y') elemento de $[0,2\pi[^2$, $f((0,y)) = f((0,y'))$ y f no es inyectiva. Demostrar que f es sobreyectiva. Sea $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si $X = Y = 0$, $f((0,0)) = (0,0)$.
   - Si $X = 0$ y $Y > 0$, $f((Y, \frac{\pi}{2})) = (0,Y)$, con $(Y, \frac{\pi}{2})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X = 0$ y $Y < 0$, $f((-Y, \frac{3\pi}{2})) = (0,Y)$, con $(-Y, \frac{3\pi}{2})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ y $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$, con $(\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\frac{Y}{X})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ y $Y \geqslant 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$, con $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\arctan\frac{Y}{X})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ y $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$, con $(\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi+\arctan\frac{Y}{X})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ y $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \arctan\frac{Y}{X})) = (X,Y)$, con $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi+\arctan\frac{Y}{X})$ elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
2. Para todo real x, se tiene $a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos x + (a\operatorname{sen}\alpha + b\operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen} x$. De acuerdo a 1), f es sobreyectiva y existe (c,γ) elemento de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ tal que $a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma$ y $a\operatorname{sen}\alpha + b\operatorname{sen}\beta = c\operatorname{sen}\gamma$. Entonces,

   $$\exists(c,\gamma) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[/\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(x-\beta) = c(\cos x\cos\gamma + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\gamma) = c\cos(x-\gamma).$$

3. F es no vacío porque contiene la aplicación nula y está contenido en E. Además, para x real,

   $$\begin{aligned} &a\cos(x-\alpha) + b\cos(2x-\beta) + a'\cos(x-\alpha') + b'\cos(2x-\beta') \\ &\qquad = a\cos(x-\alpha) + a'\cos(x-\alpha') + b\cos(2x-\beta) + b'\cos(2x-\beta') \\ &\qquad = a''\cos(x-\alpha'') + b''\cos(2x-\beta''), \end{aligned}$$

   para un cierto $(a',b'',\alpha'',\beta'')$ (de acuerdo a 2)). F es un subespacio vectorial de E.
4. Para todo real x, $\cos x = 1\cdot\cos(x-0) + 0\cdot\cos(2x-0)$ y $x \mapsto \cos x$ es elemento de F. Para todo real x, $\operatorname{sen} x = 1\cdot\cos(x-\frac{\pi}{2}) + 0\cdot\cos(2x-0)$ y $x \mapsto \operatorname{sen} x$ es elemento de F. Para todo real x, $\cos(2x) = 0\cdot\cos(x-0) + 1\cdot\cos(2x-0)$ y $x \mapsto \cos(2x)$ es elemento de F. Para todo real x, $\operatorname{sen}(2x) = 0\cdot\cos(x-0) + 1\cdot\cos(2x-\frac{\pi}{2})$ y $x \mapsto \operatorname{sen}(2x)$ es elemento de F. Por otra parte, para todo real x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ y entonces,

   $$x \mapsto 1 \in F \Leftrightarrow x \mapsto \cos^2 x \in F \Leftrightarrow x \mapsto \operatorname{sen}^2 x \in F.$$

Demostremos entonces que $1 \notin F$. Se supone que existe $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)=1.$$

derivando dos veces, se obtiene :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos(x-\alpha)-4b\cos(2x-\beta)=0,$$

y así agregando

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -3b\cos(2x-\beta)=1,$$

lo que es imposible (para $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$, se encuentra 0). Entonces, ninguna de las últimas tres funciones está en F.

5. Sea ha visto que $(x\mapsto \cos x,\ x\mapsto \operatorname{sen} x,\ x\mapsto \cos(2x),\ x\mapsto \operatorname{sen}(2x))$ es una familia de elementos de F. Demostrar que esta familia es libre. Sea $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Se supone que $\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos x+b\operatorname{sen} x+c\cos(2x)+d\operatorname{sen}(2x)=0$. Derivando dos veces, se obtiene $\forall x\in\mathbb{R},\ -a\cos x-b\operatorname{sen} x-4c\cos(2x)-4d\operatorname{sen}(2x)=0$ y agregando : $\forall x\in\mathbb{R},\ -3c\cos(2x)-3d\operatorname{sen}(2x)=0$. Entonces,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \begin{cases} a\cos x+b\operatorname{sen} x=0\\ c\cos(2x)+d\operatorname{sen}(2x)=0.\end{cases}$$

$x=0$ proporciona $a=c=0$, luego $x=\frac{\pi}{4}$ proporciona $b=d=0$. Entonces, $(x\mapsto\cos x,\ x\mapsto\operatorname{sen} x,\ x\mapsto\cos(2x),\ x\mapsto\operatorname{sen}(2x))$ es una familia libre de elementos de F.

Solución del ejercicio 980 ▲005175

1. C contiene la identidad de $\mathbb{R}$, pero no contiene su opuesto. Entonces, C no es un espacio vectorial.
2. Demostrar que V es un subespacio vectorial del espacio vectorial de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. V es ya no vacío porque contiene la función nula $(0=0-0)$.

   Sea $(f_1,f_2)\in V^2$. Existe $(g_1,g_2,h_1,h_2)\in C^4$ tal que $f_1=g_1-h_1$ y $f_2=g_2-h_2$. Pero entonces, $f_1+f_2=(g_1+g_2)-(h_1+h_2)$. Por tanto, una suma de funciones crecientes en $\mathbb{R}$ es creciente en $\mathbb{R}$, y entonces, g_1+g_2 y h_1+h_2 son los elementos de C o aún f_1+f_2 está en V. Sea $f\in V$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. Existe $(g,h)\in V^2$ tal que $f=g-h$ y entonces $\lambda f=\lambda g-\lambda h$.

   Si $\lambda\geqslant 0$, λg y λh son crecientes en $\mathbb{R}$ y λf está en V.

   Si $\lambda<0$, se escribe $\lambda f=(-\lambda h)-(-\lambda g)$, y desde $-\lambda g$ y $-\lambda h$ son crecientes en $\mathbb{R}$, λf está aún en V. V es, por lo tanto un subespacio vectorial del espacio vectorial de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 981 ▲005176

Sea $(x,y)\in E^2$, $(1+1)\cdot(x+y)=1\cdot(x+y)+1\cdot(x+y)=(x+y)+(x+y)=x+y+x+y$, pero también $(1+1)\cdot(x+y)=(1+1)\cdot x+(1+1)\cdot y=x+x+y+y$.
En fin, $(E,+)$ es un grupo, cada elemento es regular y en particular x es regular por la izquierda y y es regular a la derecha. Se ha demostrado que para todo par (x,y) elemento de E^2, $x+y=y+x$.

Solución del ejercicio 982 ▲005177

Sea $F=(A\cap B)+(A\cap C)+(B\cap C)$. $F\subset A+A+B=A+B$, luego $F\subset A+C+C=A+C$, os sea $F\subset B+C+C=B+C$ y finalmente $F\subset(A+B)\cap(A+C)\cap(B+C)$.

Solución del ejercicio 983 ▲005563

$\Leftarrow$) Si $F \subset G$ o $G \subset F$, entonces $F \cup G = G$ o $F \cup G = F$. En todos los casos, $F \cup G$ es un subespacio vectorial. $\Rightarrow$) Se supone que $F \not\subset G$ y que $F \cup G$ es un subespacio vectorial de E y demostrar que $G \subset F$. F no está incluido en G y por lo tanto, existe x elemento de E que está en F y no en G. Sea y un elemento de G. $x+y$ está en $F \cup G$, pues x e y están ahí y porque $F \cup G$ es un subespacio vectorial de E. Si $x+y$ es un elemento de G, entonces también lo es $x = (x+y)-y$ que se excluye. Entonces $x+y$ es elemento de F y consecuentemente $y = (x+y)-x$ está en F. Así, todo elemento de G está en F y entonces $G \subset F$.

Solución del ejercicio 984 ▲005564

$\Leftarrow$) Inmediato.

$\Rightarrow$) Se razona por inducción sobre n. Para $n=2$, es el ejercicio 983. Sea $n \geqslant 2$. Se supone que toda unión de n subespacios de E es un subespacio de E si y solo si uno de estos subespacios contiene todos los demás. Sean $F_1, \dots, F_n, F_{n+1}$ $n+1$ subespacios vectoriales de E tales que $F_1 \cup \dots \cup F_{n+1}$ sea un subespacio vectorial de E. Se define $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$.

• Si F_{n+1} contiene F, es finito.

• Si $F_{n+1} \subset F$, entonces $F = F_1 \cup \dots \cup F_n = F_1 \cup \dots \cup F_n \cup F_{n+1}$ es un subespacio vectorial de E. Por hipótesis de recurrencia, F es uno de los F_i para cierto i elemento de $[\![1,n]\!]$. $F_i = F$ contiene igualmente F_{n+1} y contiene, por lo tanto todos los F_j, para j elemento de $[\![1,n+1]\!]$.

• Se supone en adelante que $F \not\subset F_{n+1}$ y que $F_{n+1} \not\subset F$ y demostremos que esta situación es imposible.

Existe un vector x que está en F_{n+1} y no en F y un vector y que está en F y no en F_{n+1}. Sea λ un elemento de $\mathbb{K}$. $y - \lambda x$ es un elemento de $F \cup F_{n+1}$ (ya que $F \cup F_{n+1}$ es un subespacio) pero $y - \lambda x$ no está en F_{n+1} porque entonces $y = (y-\lambda x) + \lambda x$ no está.

Entonces $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $y - \lambda x \in F$. Se deduce que para todo escalar λ, existe un índice $i(\lambda)$ elemento de $[\![1,n]\!]$ tal que $y - \lambda x \in F_{i(\lambda)}$. Por último, notar que si $\lambda \neq \mu$, entonces $i(\lambda) \neq i(\mu)$. En efecto, si para λ y μ dos escalares distintos dados, existe un índice i elemento de $[\![1,n]\!]$ tal que $y - \lambda x$ y $y - \mu x$ están en F_i, entonces $x = \dfrac{(y-\mu x)-(y-\lambda x)}{\mu - \lambda}$ está aún en F_i y por lo tanto, en F, lo que no es. Como el conjunto de escalares es infinito y el conjunto de índices no lo es, se acaba de demostrar que esta última situación no es posible, lo que completa la prueba.

Solución del ejercicio 985 ▲006868

Para que un conjunto E, dotado de una adición $x+y \in E$ (para todo $x,y \in E$) y de una multiplicación por un escalar $\lambda \cdot x \in E$ (para todo $\lambda \in K$, $x \in E$), sea un K-espacio vectorial debe verificar los siguientes ocho puntos.

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (para todo $x,y,z \in E$)
2. existe un vector nulo $0 \in E$ tal que $x+0 = x$ (para todo $x \in E$)
3. existe un opuesto $-x$ tal que $x+(-x) = 0$ (para todo $x \in E$)
4. $x+y = y+x$ (para todo $x,y \in E$)
   Estas primeras cuatro propiedades hacen $(E,+)$ un grupo abeliano.
5. $1 \cdot x = x$ (para todo $x \in E$)
6. $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (para todo $\lambda \in K =$, para todo $x,y \in E$)
7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (para todo $\lambda, \mu \in K$, para todo $x \in E$)
8. $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (para todo $\lambda, \mu \in K$, para todo $x \in E$)

Hay que por lo tanto verificar estas ocho puntos para cada uno de los conjuntos (aquí $K = \mathbb{R}$). Comencemos por E_1.

1. $f + (g+h) = (f+g)+h$; de hecho, para todo $t \in [0,1]$: $f(t) + \big(g(t)+h(t)\big) = \big(f(t)+g(t)\big)+h(t)$ por lo tanto, la igualdad de las funciones $f+(g+h)$ y $(f+g)+h$. Esto es cierto para todo $f,g,h \in E_1$.
2. El vector cero es aquí la función constante igual a 0, que se denota aún 0, se tiene $f+0 = f$ (es decir para todo $x \in [0,1]$, $(f+0)(t) = f(t)$, para toda función f).
3. Existe un opuesto $-f$ definido por $-f(t) = -\big(f(t)\big)$ tal que $f+(-f) = 0$
4. $f+g = g+f$ (pues $f(t)+g(t) = g(t)+f(t)$, para todo $t \in [0,1]$).
5. $1 \cdot f = f$; de hecho, para todo $t \in [0,1]$, $(1 \cdot f)(t) = 1 \times f(t) = f(t)$. Y una vez que se comprende que $\lambda \cdot f$ verifica por definición $(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \times f(t)$ los demás puntos se verifican sin dificultad.
6. $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$
7. $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$; de hecho, para todo $t \in [0,1]$, $(\lambda \times \mu) f(t) = \lambda(\mu f(t))$

Veamos los ocho puntos a verificar para E_2 denotando u la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $u + (v+w) = (u+v)+w$
2. El vector nulo es la sucesión cuyos términos son todos nulos.
3. La sucesión $-u$ es definida por $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $u+v = v+u$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$: demostrar esto en detalle por definición $u+v$ es la sucesión $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por definición de multiplicación por un escalar $\lambda \cdot (u+v)$ es la sucesión $\big(\lambda \times (u_n+v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ que es la sucesión $\big(\lambda u_n + \lambda v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ que es exactamente la sucesión $\lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
7. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Esto es lo que debe verificar para E_3, luego de notar que la suma de dos polinomios de grado $\leqslant n$ es aún un polinomio de grado $\leqslant n$ (lo mismo para $\lambda \cdot P$), se verifica :

1. $P + (Q+R) = (P+Q)+R$
2. existe un vector nulo $0 \in E_3$: es el polinomio nulo
3. existe un opuesto $-P$ tal que $P+(-P) = 0$
4. $P+Q = Q+P$
5. $1 \cdot P = P$
6. $\lambda \cdot (P+Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$
7. $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$
8. $(\lambda \times \mu) \cdot P = \lambda \cdot (\mu \cdot P)$.

Solución del ejercicio 986 ▲006869

---

1. El espacio vectorial $\mathbb{R}$ tiene dos subespacios : el formado por el vector nulo $\{0\}$ y $\mathbb{R}$ él mismo.
   El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tiene tres tipos de subespacios : $\{0\}$, una infinidad de subespacios de dimensión 1 (estas son las rectas vectoriales) y $\mathbb{R}^2$ mismo.
   enfin, el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene cuatro tipos de subespacios : el vector nulo, rectas vectoriales, planos vectoriales y sí mismo.
2. Se consideran dos rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$ incluyendo vectores directores u y v no colineales, entonces el vector $u+v$ no pertenece a ninguna de estas dos rectas, la unión de estas no es un espacio vectorial.

Solución del ejercicio 990 ▲000900

1. $$\begin{aligned} & (x,1,y,1) \in \operatorname{vect}\{v_1,v_2\} \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4)+\mu(1,-2,3,-4) \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda)+(\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\ \implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad 1=2(\lambda-\mu) \text{ y } 1=4(\lambda-\mu) \\ \implies & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \lambda-\mu=\tfrac{1}{2} \text{ y } \lambda-\mu=\tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$
   lo que es imposible (cualquiera que sean x,y) y no podemos encontrar tales x,y.
2. Se hace el mismo razonamiento :
   $$\begin{aligned} & (x,1,1,y) \in \operatorname{vect}\{v_1,v_2\} \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \ (x,1,1,y) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ 1=2\lambda-2\mu \\ 1=3\lambda+3\mu \\ y=4\lambda-4\mu \end{cases} \\ \iff & \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda=\frac{5}{12} \\ \mu=-\frac{1}{12} \\ x=\frac{1}{3} \\ y=2. \end{cases} \end{aligned}$$
   Así el único vector $(x,1,1,y)$ adecuado es $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

Solución del ejercicio 991 ▲000901

1. Se verifican las propiedades que hacen de E un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:
   (a) El origen $(0,0,0,0)$ está en E,
   (b) si $v=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in E$ y $v'=(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) \in E$, entonces $v+v'=(x_1+x'_1,x_2+x'_2,x_3+x'_3,x_4+x'_4)$ tiene coordenadas que satisfacen la ecuación y por lo tanto, $v+v' \in E$.
   (c) si $v=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las coordenadas de $\lambda \cdot v=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\lambda x_4)$ verifican la ecuación y por lo tanto, $\lambda \cdot v \in E$.
2. Es necesario encontrar una familia libre de vectores que generen E. Como E está en $\mathbb{R}^4$, hay menos de 4 vectores en esta familia. Tomamos un vector de E (al azar), por ejemplo $v_1=(1,-1,0,0)$. Es bastante claro que v_1 no genera todo E, se busca así un vector v_2 linealmente independiente de v_1, tomemos$v_2=(1,0,-1,0)$. Entonces $\{v_1,v_2\}$ no generando todo E; por ejemplo $v_3=(1,0,0,-1)$ está en E, pero no es generado por v_1 y v_2. Demostrar que (v_1,v_2,v_3) es una base de E.

(a) (v_1, v_2, v_3) es una familia libre. En efecto, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Se obtiene entonces :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

Entonces la familia es libre.

(b) Demostrar que la familia es generatriz : sea $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Es necesario escribir v como combinación lineal de v_1, v_2, v_3. Se puede resolver un sistema como el anterior (pero con segundo miembro) buscando α, β, γ tales que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v$. Se obtiene que $v = -x_2 v_1 - x_3 v_2 - x_4 v_4$ (se utiliza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Por supuesto se pueden elegir otros vectores base (lo único que permanece independiente de las elecciones es el número de vectores en una base : aquí 3).

Solución del ejercicio 998 ▲000908

Demostrar primero que $E \subset F$. Primero se demuestra que $v_1 \in F$ y $v_2 \in F$. En primer lugar, $v_1 \in F \iff v_1 \in \text{vect}\{w_1, w_2\} \iff \exists \lambda, \mu \quad v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2$. Se trata de por lo tanto, de encontrar estos λ, μ. Esto se hace resolviendo un sistema (aquí incluso se puede mentalmente) se encuentra la relación $7(2,3,-1) = 3(3,7,0) - (5,0,-7)$ que da la relación $v_1 = \frac{3}{7} w_1 - \frac{1}{7} w_2$ y entonces $v_1 \in F$. Igualmente $7v_2 = -w_1 + 2w_2$, por lo tanto $v_2 \in F$. Ahora v_1 y v_2 están en el espacio vectorial F, por lo que toda combinación lineal de v_1 y v_2 también, es decir : para todo λ, μ, se tiene $\lambda v_1 + \mu v_2 \in F$. Lo que implica $E \subset F$.
Queda por demostrar $F \subset E$. Se trata pues de escribir w_1 (luego w_2) en función de v_1 y v_2. Se encuentra $w_1 = 2v_1 - v_2$ y $w_2 = v_1 + 3v_2$. De nuevo, esto nos lleva a $w_1 \in E$ y $w_2 \in E$, por lo tanto $\text{vect}\{w_1, w_2\} \subset E$, de donde $F \subset E$. Por doble inclusión se tiene $E = F$.

Solución del ejercicio 1004 ▲000914

$v \in \text{vect}(e_1, e_2)$ es equivalente a la existencia de dos reales λ, μ tales que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$. Entonces $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ es equivalente a

$$\begin{cases} -2 = \lambda - \mu \\ x = -\lambda + 2\mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ 3 = 2\lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/3 \\ \mu = 7/3 \\ x = 13/3 \\ y = 22/3. \end{cases}$$

El par que sirve es, por lo tanto $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Solución del ejercicio 1006 ▲000916

A partir de la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ se considera una combinación lineal (que solo corresponde a un número *finito* de términos).

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de reales distintos, consideremos la familia (finita) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Se supone que existen reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Esto significa que, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particular para $x = \alpha_j$ la igualdad se convierte $\lambda_j = 0$, pues $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vale 0 si $i \neq j$ y 1 si $i = j$. Aplicando el razonamiento anterior a $j = 1$ hasta $j = n$ se obtiene : $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Entonces la familia $(f_\alpha)_\alpha$ es una familia libre.

Solución del ejercicio 1007 ▲000917

A partir de la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ se considera una combinación lineal (que solo corresponde a un número *finito* de términos). Sean $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$ de reales distintos que hemos ordenado, consideremos la familia (finita) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Se supone que existen reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Esto significa que, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$, en otras palabras para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

El término dominante es $e^{\alpha_1 x}$ (pues $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$). Factorizando por $e^{\alpha_1 x}$:

$$e^{\alpha_1 x}\left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n - \alpha_1)x}\right) = 0.$$

Pero $e^{\alpha_1 x} \neq 0$, por lo tanto :

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \cdots + \lambda_n e^{(\alpha_n - \alpha_1)x} = 0.$$

Cuando $x \to +\infty$, entonces $e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} \to 0$ (para todo $i \geqslant 2$, pues $\alpha_i - \alpha_1 < 0$). Entonces, para $i \geqslant 2$, $\lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} \to 0$ y pasando al límite en la igualdad anterior encontramos :

$$\lambda_1 = 0.$$

El primer coeficiente es, por lo tanto cero. Se parte de nuevo de la combinación lineal que ahora es $\lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ y aplicando el razonamiento anterior Se prueba por inducción $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Entonces la familia $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es una familia libre.

Solución del ejercicio 1016 ▲003297

$F = G$.

Solución del ejercicio 1019 ▲003303

CNS $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$.

Solución del ejercicio 1021 ▲005167

Sea $u' = (\operatorname{sen}(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$. Se tiene : $u = 1 \cdot u + 0 \cdot u'$, luego $v = \cos a \cdot u - \operatorname{sen} a \cdot u'$, luego $w = \cos b \cdot u - \operatorname{sen} b \cdot u'$. Los tres vectores u, v y w son, por lo tanto combinaciones lineales de los dos vectores u y u' y por lo tanto, constituyen una familia ld ($p+1$ combinaciones lineales de p vectores constituyen una familia ld).

Solución del ejercicio 1022 ▲005180

1. Denotemos respectivamente g y h, las funciones seno y coseno. $f_a = \cos a \cdot g + \operatorname{sen} a \cdot h$, $f_b = \cos b \cdot g + \operatorname{sen} b \cdot h$ y $f_c = \cos c \cdot g + \operatorname{sen} c \cdot h$. Entonces, f_a, f_b y f_c son tres combinaciones lineales de las dos funciones g y h y por lo tanto, constituyen una familia ld ($p+1$ combinaciones lineales de p vectores dados constituyen una familia ld).
2. f_0, f_1 y f_2 son tres combinaciones lineales de las dos funciones $x \mapsto 1$ y $x \mapsto x$. Entonces, la familia (f_0, f_1, f_2) es una familia ld, o sea la familia $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es ld como sub-familia de una familia ld.
3. Para α real dado y $x > 0$, se escribe $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Sean n un entero natural superior o igual a 2, luego $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Sea aún $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_n} = 0,$$
(dividiendo los dos miembros por x^{α_n}). En esta última igualdad, se hace tender x hacia $+\infty$ y se obtiene $\lambda_n = 0$. Después, por recurrencia descendente, $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_1 = 0$. Se ha demostrado que toda subfamilia finita de la familia $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ es libre y por lo tanto, la familia $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ es libre.
4. Para a real dado y x real, se escribe $f_a(x) = |x-a|$. Sean n un entero natural superior o igual a 2, luego $a_1, \dots, a_n$, n reales dos a dos distintos. Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0$. Si existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i \neq 0$, entonces,
$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$
Pero esta última igualdad es imposible porque f_{a_i} no es derivable en a_i, entonces que $-\frac{1}{\lambda_i} \sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}$, lo es. Así, todos los λ_i son nulos.

Solución del ejercicio 1023 ▲005566

1. La matriz de la familia (e_1, e_2, e_3) en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Las últimas tres ecuaciones del sistema $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$ de incógnitas λ, μ y ν forman un subsistema matricial $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ desarrollando el determinante de esta matriz a lo largo de su primera columna, se obtiene $\det(A) = -10 - 2 \times 10 = -30 \neq 0$. Este subsistema es de CRAMER y por lo tanto, admite única la solución $(\lambda, \mu, \nu) = (0,0,0)$. Así, la familia (e_1, e_2, e_3) es libre.
2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ (para } 2 \leqslant i \leqslant 4,\ L_i \leftarrow L_i - L_1)$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$
Entonces la familia (e_1, e_2, e_3, e_4) es una familia libre (y por lo tanto, una base de E).

3. Denotemos (u_1,u_2,u_3,u_4) la base canónica de $\mathbb{R}^4$. La familia $(e_1,e_2,e_3,e_4)=(u_3,u_4,u_1,u_2)$ tiene el mismo rango que la familia (u_1,u_2,u_3,u_4), es decir 4. La familia (e_1,e_2,e_3,e_4) es, por lo tanto una base de $\mathbb{R}^4$.

4. La matriz de la familia (e_2,e_1,e_3,e_4) en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene el mismo rango que las siguientes matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; (e_5=e_1-2e_2,\ e_6=e_3-4e_2 \text{ y } e_7=e_4-e_2)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; (e_8=e_6-e_5 \text{ y } e_9=e_7-e_5).$$

La matriz anterior es de rango 2. Lo mismo ocurre con la familia (e_1,e_2,e_3,e_4) que es en particular ld. La nulidad de la tercera columna proporciona $0=e_8=e_6-e_5=(e_3-4e_2)-(e_1-2e_2)=-e_1-2e_2+e_3$ y entonces $e_3=e_1+2e_2$. La nulidad de la cuarta columna proporciona $0=e_9=e_7-e_5=(e_4-e_2)-(e_1-2e_2)=e_4+e_2-e_1$ y entonces $e_4=e_1-e_2$.

Solución del ejercicio 1024 ▲005567

Sea $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$. $a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}=0\Rightarrow(a+b\sqrt{2})^2=(-c\sqrt{3})^2\Rightarrow a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}=3c^2\Rightarrow 2ab\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Pero $\sqrt{2}$ es irracional por lo tanto $ab=0$.
Si $b=0$, ya que $a+c=0$ y que $\sqrt{3}$ es irracional, se deduce que $c=0$ (si no $\sqrt{3}$ es racional) luego $a=0$ y finalmente $a=b=c=0$.
Si $a=0$, queda $2b^2=3c^2$. Pero $\sqrt{\frac{3}{2}}$ es irracional (en el caso contrario, existen dos enteros p y q no nulos tal que $3q^2=2p^2$ y por ejemplo el exponente del número primo 2 no tiene la misma paridad en los dos miembros de la igualdad, lo cual es imposible) y entonces $b=c=0$, luego aún otra vez $a=b=c=0$. Se ha demostrado que $\forall(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$, $(a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}=0\Rightarrow a=b=c=0)$. Entonces la familia $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ es una familia de reales $\mathbb{Q}$-libre.

Solución del ejercicio 1025 ▲005568

Las funciones f_1, f_2 y f_3 están bien definidos en $\mathbb{R}^+$.
Sean a, b y c tres números reales tales que $af_1+bf_2+cf_3=0$.

Primera solución. Si a es no nulo, la función $af_1+bf_2+cf_3$ es equivalente en el vecindario de $+\infty$ a $a\ln x$ y por lo tanto, no puede ser igual a la función nula. Entonces $a=0$. Luego si b es no nulo, la función $af_1+bf_2+cf_3=bf_2+cf_3$ es equivalente a $b\ln(\ln x)$ y no puede ser igual a la función nula. Entonces $b=0$. Después $c=0$.

Segunda solución. Se efectúa un desarrollo limitado a un orden suficiente de la función $af_1+bf_2+cf_3$, cuando x tiende a 0 :

$f_1(x) = \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, luego

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \ln(1+f_1(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \\ f_3(x) &= \ln(1+f_2(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x-x^2+\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\right) = \left(x-x^2+\frac{7}{6}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(x-x^2\right)^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Así, $af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x) \underset{x\to 0}{=} (a+b+c)x + \left(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}\right)x^3 + o(x^3)$. La igualdad $af_1+bf_2+cf_3 = 0$ proporciona, por identificación de las partes regulares de los desarrollos limitados de orden tres en cero :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2}=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{7b}{6}+\frac{5c}{2}=0 \end{cases} \quad \text{o aún} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 2a+7b+15c=0. \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, se tiene $a=b=c=0$.

Solución del ejercicio 1026 ▲005569

Sean n un entero natural no nulo entonces $a_1,\dots,a_n$, n reales dos a dos distintos y $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, n reales. Se supone $\lambda_1 f_{a_1}+\cdots+\lambda_n f_{a_n}=0$. Sea i un elemento de $[\![1,n]\!]$. Se tiene $\lambda_i f_{a_i} = -\sum_{j\neq i}\lambda_j f_{a_j}$ y no se puede tener $\lambda_i \neq 0$ porque entonces el lado izquierdo es una función no derivable en a_i mientras que el miembro de la derecha lo es. Así, todos los λ_i son nulos y por lo tanto, la familia $(f_{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ es libre. Se ha demostrado que toda sub-familia finita de la familia $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ es libre y por lo tanto, la familia $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ es libre.

Solución del ejercicio 1027 ▲005570

Sean $a_1<\cdots<a_n$, n reales dos a dos distintos y $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ n reales tales que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_{a_i}=0$ $(*)$.

Primera solución. Al multiplicar los dos miembros de $(*)$ por $e^{-a_n x}$ y luego pasando al límite cuando x tiende a $+\infty$, se obtiene $\lambda_n=0$. Reiterando, se obtiene por lo tanto $\lambda_n=\lambda_{n-1}=\cdots=\lambda_1=0$.

Segunda solución. Se denota f la función que aparece en el primer miembro de $(*)$.

$$\begin{aligned} f=0 &\Rightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ f^{(k)}(0)=0 \\ &\Rightarrow \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \lambda_1 a_1^k+\cdots+\lambda_n a_n^k=0. \end{aligned}$$

El anterior sistema de incógnitas λ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, es un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas. Su determinante es el determinante de Vandermonde de los a_i y es no nulo ya que los a_i son dos a dos distintos. El sistema es, por lo tanto de CRAMER y admite la única solución $(0,\dots,0)$.

Tercera solución. (En el caso donde se restringe a demostrar la libertad de la familia $(x\mapsto e^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$).

Sean $n_1 < \cdots < n_p$, p enteros naturales dos a dos distintos. Se supone que para todo real x se tiene $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{n_i x} = 0$. Se deduce que para todo real estrictamente positivo t, se tiene $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{n_i} = 0$ y por lo tanto, el polinomio $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ es nulo (porque tiene infinidad de raíces) o aún los coeficientes del polinomio $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{n_i}$ a saber, los λ_i son todos nulos.

Cuarta solución. (para repetidores) La aplicación φ que a f de clase C^∞ hace corresponder su derivada, es un endomorfismo del espacio de funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Para a real dado, $\varphi(f_a) = af_a$ y la familia $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ consta de vectores propios de φ (los f_a son no nulas) asociados a los valores propios dos a dos distintos. Se sabe que una familia es libre.

Solución del ejercicio 1028 ▲005571

Sean n un entero natural no nulo entonces $P_1,\ldots,P_n$, n polinomios no nulos de grados respectivos $d_1 < \cdots < d_n$. Sea $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Se supone por reducción al absurdo que los λ_i no sean todos cero y escribir $k = \max\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, \lambda_i \neq 0\}$. Se no puede tener $k = 1$, pues $P_1 \neq 0$, luego

$$\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_k P_k = -\sum_{i<k} \lambda_i P_i.$$

Esta última igualdad es imposible porque $\lambda_k P_k$ es un polinomio de grado d_k (pues $\lambda_k \neq 0$) y $-\sum_{i<k} \lambda_i P_i$ es un polinomio de grado a lo sumo $d_{k-1} < d_k$. Así todos los λ_k son nulos. El mismo enfoque se aplica cuando se sustituye el grado por la valoración y se busca la valoración más pequeña en lugar del grado más alto.

Solución del ejercicio 1029 ▲005574

1. Para p y q enteros relativos, se escribe $I(p,q) = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x}\,dx$.
   Si $p \neq q$, $I(p,q) = \frac{1}{i(p-q)}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$. Sean entonces p y q dos enteros naturales.
   Entonces si $p \neq q$, $J(p,q)\frac{1}{2}\mathrm{Re}(I(p,q)+I(p,-q)) = 0$, luego $K(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$, y así $L(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(I(p,-q)-I(p,q)) = 0$.
   Si $p = q$, $J(p,p) = 2\pi$, si $p = 0$ y π si $p \neq 0$; $K(p,p) = 0$; luego $L(p,p) = \pi$ si $p \neq 0$ y 0 si $p = 0$.
2. En el espacio E funciones continuas en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ y 2π-periódicas, la aplicación que a (f,g) elemento de E^2 asociada $\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ es clásicamente un producto escalar. La familia de funciones propuesta es una familia ortogonal para este producto escalar y no contiene el vector nulo de E. Esta familia es, por lo tanto libre.

Solución del ejercicio 1030 ▲006870

1. $$\begin{aligned}\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 &\iff \alpha(2,1,4) + \beta(1,-1,2) + \gamma(3,3,6) = (0,0,0)\\ &\iff \big(2\alpha+\beta+3\gamma, \alpha-\beta+3\gamma, 4\alpha+2\beta+6\gamma\big) = (0,0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta+3\gamma = 0\\ \alpha-\beta+3\gamma = 0\\ 4\alpha+2\beta+6\gamma = 0\end{cases} \iff \cdots \qquad \text{(resolver el sistema)}\\ &\iff \alpha = -2t, \beta = t, \gamma = t \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si se toma $t=1$ por ejemplo entonces $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=1$ da $-2v_1+v_2+v_3=0$. Esta solución no es única, los otros coeficientes adecuados son los $(\alpha=-2t, \beta=t, \gamma=t)$, para todo $t\in\mathbb{R}$.

2. Por lo tanto, se trata de encontrar un vector $v=(x,y,z)$ en P_1 y P_2 y que debe verificar $x-y+z=0$ y $x-y=0$: $v=(x,y,z)\in P_1\cap P_2 \iff x-y+z=0$ y $x-y=0 \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$$\iff \cdots \quad \text{(resolver el sistema)} \iff (x=t, y=t, z=0),\ t\in\mathbb{R}.$$

Así, si se fija por ejemplo $t=1$, entonces $v=(1,1,0)$ es un vector director de la recta vectorial D, una ecuación paramétrica es $D=\{(t,t,0)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Solución del ejercicio 1031 ▲007410

1. Se observa que $v_3=v_2-v_1$ y que $v_4=v_1+v_2$, por lo tanto $V=\text{vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)=\text{vect}(v_1,v_2)$. Como además v_1 y v_2 son linealmente independientes, (v_1,v_2) es una base de V. Entonces $\dim(V)=2$. El sistema no es libre porque por ejemplo $v_3=v_2-v_1$ es una relación de dependencia lineal no trivial. El sistema no es generador de $\mathbb{R}^4$, pues $\dim(V)=2<4$, por lo tanto $\text{vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)=V\neq\mathbb{R}^4$.

2. Como se ha visto en la pregunta 1, (v_1,v_2) es una base de V. Se hace escalonada la matriz cuyas filas son los vectores v_1 y v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora se ve que podemos completar la base (v_1,v_2) en una base de $\mathbb{R}^4$ adjuntando los vectores $(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ porque la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es de rango 4.

3. $V=\text{vect}(v_1,v_2)$. Ahora sea $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. $(x,y,z,t)\in V$ si y solo si $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tales que $(x,y,z,t)=\lambda v_1+\mu v_2$. Es suficiente por lo tanto de ver para cuáles valores de (x,y,z,t) este sistema de ecuaciones tiene solución. El sistema se escribe :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+x \\ 0 & -1 & t-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \\ 0 & 0 & t-x+y \end{array}\right).$$

El sistema tiene una solución si y solo si $z+x-2y=0$ y $t-x+y=0$, estas son ecuaciones cartesianas para V, es decir que

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-2y+z=0 \ \text{ y } \ -x+y+t=0\}.$$

4. H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ porque es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal y homogénea.

5. $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /-3x+y+2z-t=0\}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/y=3x-2z+t\}$
$=\{(x,3x-2z+t,z,t)/x,z,t\in\mathbb{R}\}=\{x(1,3,0,0)+z(0,-2,1,0)+t(0,1,0,1)/x,z,t\in\mathbb{R}\}$
Se tiene entonces $H=\mathrm{vect}((1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1))$. Además, el sistema de vectores $((1,3,0,0),$ $(0,-2,1,0)$, $(0,1,0,1))$ es una base de H, pues

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&1\\0&-2&1&0\end{pmatrix}=\mathrm{rang}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}=3.$$

Y por lo tanto $\dim(H)=3$.

6. $v_3\in H$, pues $-3\times1+1\times1+2\times1-1\times0=0$. Pero $v_1\notin H$, pues $-3\times1+1\times0+2\times-1-1\times1=-6\neq0$. Como $v_3\in V$ y que se acaba de ver que $v_3\in H$, se deduce que $v_3\in V\cap H$ y así que $\mathrm{vect}(v_3)\subseteq V\cap H$. Se ha obtenido por lo tanto que $\dim(V\cap H)\geqslant1$. Como además $V\cap H\subseteq V$ se sabe que $\dim(V\cap H)\leqslant2$. Ahora bien, si se tiene $\dim(V\cap H)=2$ esto implica que $V\cap H=V$ y así que $V\subseteq H$, lo cual es falso porque $v_1\in V$, pero $v_1\notin H$. Se obtiene por lo tanto $\dim(V\cap H)=1$. Usando la fórmula de Grassmann se obtiene entonces que

$$\dim(V+H)=\dim(V)+\dim(H)-\dim(V\cap H)=2+3-1=4.$$

7. Sea ha visto que $\dim(V\cap H)=1$ y que $\mathrm{vect}(v_3)\in V\cap H$, entonces se obtiene $\mathrm{vect}(v_3)=V\cap H$ y entonces (v_3) es una base de $V\cap H$.

Solución del ejercicio 1032 ▲000919

Primero se hace una observación que simplifica los cálculos :

$$v_3=2v_1+3v_2.$$

Así de hecho se tiene $\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\}=\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}$ y es un espacio de dimensión 2, es decir un plano vectorial. Por la misma relación, se encuentra que $\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\}=\mathrm{vect}\{v_2,v_3\}$.

1. Cierto. $\mathrm{vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ está incluido en $\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\}$, pues $(1,1,0,0)=v_1+v_2$ y $(-1,1,-4,2)=v_1-v_2$. Como son del mismo tamaño son iguales (dicho de otro modo : como un plano está incluido en otro, entonces son iguales).
2. Cierto. Se tiene que $(1,1,0,0)=v_1+v_2$, $(1,1,0,0)\in\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}$, o $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}=\mathrm{vect}\{v_2,v_3\}\subset\mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}$. Así $(1,1,0,0)\in\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}\cap\mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. Falso. Siempre la misma relación nos da que $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}\cap\mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}=\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}$, por lo tanto es de dimensión 2. Es por lo tanto un plano vectorial y no una recta.
4. Falso. Una vez más, la relación da que $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}+\mathrm{vect}\{v_2,v_3,v_4\}=\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_4\}$, por lo tanto 3 vectores no pueden generar $\mathbb{R}^4$ que es de dimensión 4.
5. Cierto. Hacer el cálculo : la intersección es $\{0\}$ y la suma es $\mathbb{R}^4$.

Solución del ejercicio 1033 ▲000920

1. No. Primero por definición $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}+\mathrm{vect}\{v_3\}=\mathrm{vect}\{v_1,v_2,v_3\}$. Encontrar un vector de $\mathbb{R}^4$ que no está en $\mathrm{vect}\{v_1,v_2\}+\mathrm{vect}\{v_3\}$. Hay que tantear un poco para la escogencia, por ejemplo

haciendo el cálculo con $u=(0,0,0,1)$. $u \in \operatorname{vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ si y solo si existe de reales α,β,γ tales que $u=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$. Si se escribe los vectores verticalmente, se busca así α,β,γ tales que :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Lo que es equivalente a encontrar α,β,γ verificando el sistema lineal :

$$\begin{cases}0=\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0\\0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 1\\0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 1+\gamma\cdot 0\\1=\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0\end{cases}\quad\text{que equivale a}\quad\begin{cases}0=\alpha\\0=\gamma\\0=\beta\\1=\alpha.\end{cases}$$

Claramente no hay solución a este sistema (las tres primeras filas implican $\alpha=\beta=\gamma=0$ y esto entonces contradice la cuarta).

Otro tipo de razonamiento, mucho más rápido, es decir que estos dos espacios no pueden generar todo $\mathbb{R}^4$ porque no hay suficientes vectores, de hecho 3 vectores no pueden generar el espacio $\mathbb{R}^4$ de dimensión 4.

2. Sí. Denotemos $F=\operatorname{vect}\{v_1,v_2\}$ y $G=\operatorname{vect}\{v_4,v_5\}$. Para demostrar $F\oplus G=\mathbb{R}^4$ es necesario demostrar $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$ y $F+G=\mathbb{R}^4$.

   (a) Demostrar $F\cap G=\{(0,0,0,0)\}$. Sea $u\in F\cap G$, por un lado $u\in F=\operatorname{vect}\{v_1,v_2\}$, entonces existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $u=\alpha v_1+\beta v_2$. Por otra parte $u\in G=\operatorname{vect}\{v_4,v_5\}$, entonces existe $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tales que $u=\gamma v_4+\delta v_5$. Se tiene escribe u de dos maneras por lo tanto se tiene la igualdad $\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_4+\delta v_5$. Escribiendo los vectores como de vectores columnas esto da

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

   Entonces $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ es solución del siguiente sistema lineal :

$$\begin{cases}\alpha=0\\0=\delta\\\beta=0\\\alpha=\gamma+\delta.\end{cases}$$

   Esto implica $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ y entonces $u=(0,0,0,0)$. Así el solo vector de $F\cap G$ es el vector nulo.

   (b) Demostrar $F+G=\mathbb{R}^4$. $F+G=\operatorname{vect}\{v_1,v_2\}+\operatorname{vect}\{v_4,v_5\}=\operatorname{vect}\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$. Hay que por lo tanto demostrar que no importa qué vector $u=(x_0,y_0,z_0,t_0)$ de $\mathbb{R}^4$ se escribe como una combinación lineal de v_1,v_2,v_4,v_5. Se fija u y buscamos $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4+\delta v_5=u$. Después de haber considerado los vectores como de vectores columnas viene a resolver el sistema lineal :

$$\begin{cases} \alpha = x_0 \\ \delta = y_0 \\ \beta = z_0 \\ \alpha + \gamma + \delta = t_0. \end{cases}$$

Dado un vector $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ se ha calculado que eligiendo $\alpha = x_0$, $\beta = z_0$, $\gamma = t_0 - x_0 - y_0$, $\delta = y_0$ se obtiene así $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Así todo vector es generado por $F + G$.

Así $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$ y $F + G = \mathbb{R}^4$, por lo tanto $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. No. ¡Estos dos espacios no son complementarios porque existen demasiados vectores ! Generan todo, pero la intersección no es trivial. De hecho, rápidamente notamos que $v_5 = v_3 + v_4$ está en la intersección. También se puede obtener este resultado resolviendo un sistema.
4. No. De hecho, hay cuatro vectores, pero existen relaciones entre ellos. Se puede demostrar $\mathrm{vect}\{v_1, v_4\}$ y $\mathrm{vect}\{v_3, v_5\}$ no son suplementarios de dos maneras.

   Primer método : su intersección es no nula, por ejemplo $v_4 = v_5 - v_3$ está en la intersección.

   Segundo método : los dos espacios no engendran todo, de hecho, es fácil ver que $(0,0,1,0) \notin \mathrm{vect}\{v_1, v_4\} + \mathrm{vect}\{v_3, v_5\} = \mathrm{vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Solución del ejercicio 1036 ▲000923

Analicemos primero las funciones de E que no están en F : estas son las funciones h que verifica $h(0) \neq 0$ **o** $h'(0) \neq 0$. Por ejemplo, las funciones constantes $x \mapsto b$, $(b \in \mathbb{R}^*)$ o las homotecias $x \mapsto ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ no perteneces a F. Esto nos da la idea de poner

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Demostrar que G es un suplemento de F en E.

Sea $f \in F \cap G$, entonces $f(x) = ax + b$ (pues $f \in G$) y $f(0) = b$ y $f'(0) = a$; pero $f \in F$, por lo tanto $f(0) = 0$, por lo que $b = 0$ y $f'(0) = 0$,y $a = 0$. Ahora f es la función nula : $F \cap G = \{0\}$.

Sea $h \in E$, entonces observamos que para $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la función f verifica $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, por lo tanto $f \in F$. Si se escribe la igualdad de otra manera se tiene

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Se define $g(x) = h(0) + h'(0)x$, entonces la función $g \in G$ y

$$h = f + g,$$

lo que prueba que toda función de E se escribe como la suma de una función de F y de una función de G : $E = F + G$. En conclusión se ha demostrado que $E = F \oplus G$.

Solución del ejercicio 1039 ▲000926

Se denota F el espacio vectorial de sucesiones constantes y G el espacio vectorial de sucesiones que convergen a 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. De hecho, una sucesión constante que converge hacia 0 es la sucesión nula.

2. $F+G=E$. Sea (u_n) un elemento de E. Denotemos ℓ el límite de (u_n). Sea (v_n) la sucesión definida por $v_n = u_n - \ell$, entonces (v_n) converge a 0. Así $(v_n) \in G$. Denotemos (w_n) la sucesión constante igual a ℓ. Entonces se tiene $u_n = \ell + u_n - \ell$, o aún $u_n = w_n + v_n$, esto para todo $n \in \mathbb{N}$. En términos de sucesión, esto da $(u_n) = (w_n) + (v_n)$. Lo que da la descomposición deseada.

Balance : F y G están en suma directa en E : $E = F \oplus G$.

Solución del ejercicio 1040 ▲002433

Denotar la base antigua $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ y lo que es la nueva base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Sea P la matriz de pasaje que contiene -en columnas- las coordenadas de los vectores de la nueva base $\mathscr{B}'$ expresados en la antigua base $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que P es invertible (se va incluso a calcular su inversa) por lo tanto $\mathscr{B}'$ es una base. Además

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y se calcula } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B es la matriz de f en la base $\mathscr{B}'$.

Solución del ejercicio 1041 ▲003305

1. (a) Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ que se descompone en $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$. Entonces $P = (P_1+P_2)(X^2) - (1-X)P_2(X^2) = (1-X)P_1(X^2) + X(P_1+P_2)(X^2)$, lo que prueba que las dos sumas son iguales a $\mathbb{R}[X]$. Estas sumas son directas.

   (b) Esto no cambia A : los elementos de A son aquellos cuyas partes pares e impares son opuestas (salvo el factor X), independientemente del hecho (verdadero) que estas partes son polinomios.

2. Sea f un isomorfismo de E_1 sobre E_2 y $F = \{x - f(x) / x \in E_1\}$. Entonces $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$.

Solución del ejercicio 1049 ▲003659

Los f_i son proyectores que conmutan dos a dos, son simultáneamente diagonalizables. Sea e_1 tal que $f_1(e_1) = e_1$: $f_i(e_1) = f_i \circ f_1(e_1) = 0$ si $i \geqslant 2$ así los soportes de las restricciones de f_i, con una base común son dos a dos disjuntos no vacíos, estos son puntos aislados.

Solución del ejercicio 1050 ▲005178

$F = \text{vect}(u)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, porque es el núcleo de la forma lineal $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$.
Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Entonces,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \lambda \in \mathbb{R} / \ x - \lambda u \in G,$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

La proyección en F, paralelamente a G de un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ es

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \dots, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)$$

y el proyectado del mismo vector sobre G, paralelamente a F es

$$x - (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).u = (x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \dots, x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).$$

Solución del ejercicio 1051 ▲005185

Se tiene

$$n = \dim E = \dim(\ker f + \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g),$$

pero también,

$$n = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 2n - \dim\ker f - \dim(\ker g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

Por consiguiente,

$$n + \dim(\ker f \cap \ker g) = \dim(\ker f) + \dim\ker g = n - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

luego $n + \dim(\ker f \cap \ker g) = n - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \Rightarrow \dim(\ker f \cap \ker g) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$ o aún $\dim(\ker f \cap \ker g) = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$, y finalmente, $\ker f \cap \ker g = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$. Esto demuestra que las sumas propuestas son directas.

Solución del ejercicio 1052 ▲005565

1a solución. F es el núcleo de una forma lineal no nula en E y es, por lo tanto un hiperplano de E.
Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un elemento de $F \cap G$. Existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $x = (\lambda, \dots, \lambda)$ y $n\lambda = 0$ y entonces $\lambda = 0$, luego $x = 0$. Así $F \cap G = \{0\}$. Además, $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 1 = n = \dim(E) < +\infty$ y entonces $F \oplus G = E$.
Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vector de E. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. $x - (\lambda, \dots, \lambda) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \lambda) + \cdots + (x_n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. El proyectado de x sobre G, paralelamente a F es, por lo tanto $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(1, \dots, 1)$ y el proyectado de x sobre F, paralelamente a G es $x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(1, \dots, 1)$.
2a solución (en el caso donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Se provee $\mathbb{R}^n$ de su estructura euclidiana canónica. Se define $\overrightarrow{u} = (1, \dots, 1)$.
Se tiene $F = \overrightarrow{u}^{\perp} = G^{\perp}$. Así, F es el suplemento ortogonal de F.
Sea $x \in E$. La proyección ortogonal de x sobre G es $\frac{x \cdot u}{\|u\|^2} u = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}(1, \dots, 1)$.

Solución del ejercicio 1053 ▲006871

1. Si las dos rectas vectoriales son distintas, entonces generan un plano vectorial y, por lo tanto, no todo $\mathbb{R}^3$. Si se confunden es peor : solo generan una recta. En todos los casos, no generan $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto, no son suplementarios.

2. Si P y P' son dos planos vectoriales entonces $P \cap P'$ es una recta vectorial si $P \neq P'$ o el plano P entero si $P = P'$. Cuidado, todos los planos vectoriales tienen una ecuación del tipo $ax+by+cz=0$ y deben pasar por el origen, entonces no existen dos planos paralelos por ejemplo. Entonces la intersección $P \cap P'$ nunca se reduce al vector nulo. Así P y P' no son suplementarios.

3. Sea D una recta y P un plano, u un vector director de D. Si el vector u pertenece al plano P, entonces $D \subset P$ y los espacios no son complementarios (no genera todo $\mathbb{R}^3$). Si $u \notin P$, entonces por un lado $D \cap P$ es justo el vector nulo por otro lado D y P generan todo $\mathbb{R}^3$; D y P son suplementarios.

   Detallemos un ejemplo : si P es el plano de ecuación $z=0$, entonces es generado por los dos vectores $v=(1,0,0)$ y $w=(0,1,0)$. Sea D una recta con vector director $u=(a,b,c)$.

   Entonces $u \notin P \iff u \notin \operatorname{vect}\{v,w\} \iff c \neq 0$. En este caso es claro que por un lado que $D = \operatorname{vect}\{u\}$ intersecado con P se reduce al vector nulo. Así $D \cap P = \{(0,0,0)\}$. Y por otra parte todo vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $D+P = \operatorname{vect}\{u,v,w\}$.

   Es suficiente observar que $(x,y,z) - \frac{z}{c}(a,b,c) = (x-\frac{za}{c}, y-\frac{zb}{c}, 0) = (x-\frac{za}{c})(1,0,0) + (y-\frac{zb}{c})(0,1,0)$.

   Y así $(x,y,z) = \frac{z}{c}u + (x-\frac{za}{c})v + (y-\frac{zb}{c})w$. Entonces $D+P=\mathbb{R}^3$.

   Balance se tiene $D \oplus P = \mathbb{R}^3$: D y P están en suma directa.

Solución del ejercicio 1054 ▲007414

1. Se verifica fácilmente que F y G son subconjuntos no vacíos de E estable por combinación lineal.

2. — La intersección de subespacios F y G es trivial : si $f \in F \cap G$, $f \in F$ implica que f es una función polinomial de grado 1, sea $x \mapsto ax+b$, para ciertos reales a y b, pero entonces se tiene $f(0)=b$ y $f'(0)=a$, por lo tanto $f \in G$ implica $a=b=0$ y finalmente $f=0$.

   — Queda por verificar que E es la suma de F y G. Como F y G son subespacios vectoriales de E se tiene evidentemente $F+G \subset E$. Para la inclusión inversa, sea $f \in E$, sea g la función definida en $\mathbb{R}$ por $x \mapsto f'(0)x + f(0)$. Sea $h = f-g$. Se tiene $g \in F$, y $h \in G$ porque la derivación es lineal ; además, $f = g+h$. Por lo tanto, se ha demostrado $E = F+G$.

   De los dos puntos precedentes, resulta que $E = F \oplus G$.

Solución del ejercicio 1055 ▲000979

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, por lo tanto la familia $\mathscr{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sus coordenadas en $\mathscr{B}$ son, por lo tanto $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sus coordenadas en $\mathscr{B}$ son, por lo tanto $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces sus coordenadas en $\mathscr{B}$ son $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Solución del ejercicio 1057 ▲000981

1. Para demostrar que la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base vamos a demostrar que esta familia es libre y generatriz.

   (a) Demostrar que la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es libre. Sea una combinación lineal nula $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, se debe demostrar que entonces los coeficientes a, b, c son nulos. Aquí el vector nulo es $\mathbf{0} = (0,0,0)$,

   $$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Así los coeficientes satisfacen $a = b = c = 0$, esto prueba que la familia es libre.

   (b) Demostrar que la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es generatriz. Para cualquier vector $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ se deben encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

   $$\begin{aligned} & av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\ \iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\ \iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y \quad (L_2) \\ a+b=z \quad (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x \quad (L_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y \quad (L_3')=(L_3-L_2) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2b = x+z-y \quad (L_1'+L_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) \quad (L_1'-L_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z). \end{cases} \end{aligned}$$

   Para $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ se tiene así la relación $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x, y, z) = v$. Entonces la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es generatriz.

   (c) La familia es libre y generatriz por lo que es una base.

   (d) Para escribir $w = (1,1,1)$ en la base (v_1, v_2, v_3) se puede resolver el sistema correspondiente a la relación $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Pero de hecho ya se ha resuelto para todo vector (x, y, z), en particular para el vector $(1,1,1)$ la solución es $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Los datos de contacto de w en la base (v_1, v_2, v_3) son, por lo tanto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Para demostrar que la familia es libre y generatriz los cálculos son similares a los de la pregunta anterior. Denotemos $\mathscr{B}$ la base (v_1, v_2, v_3). Expresar entonces e_1 en esta base, los cálculos dan : $e_1 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Sus coordenadas en la base $\mathscr{B}$ son $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. $e_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$. Sus coordenadas en $\mathscr{B}$ son $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. $e_3 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3$. Sus coordenadas en $\mathscr{B}$ son $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Los cálculos son entonces terminados, se observa que $w = (1, 2, -3)$ vale de hecho $w = e_1 + 2e_2 - 3e_3$ por lo que por los cálculos anteriores $w = \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 + 2(\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3) - 3(\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_3) = 2v_2 + 3v_3$. Las coordenadas de w en $\mathscr{B}$ son $(0, 2, 3)$.

3. Por ejemplo, la familia $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es libre en $\mathbb{R}^3$, pero no generatriz.

4. La familia $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ es generatriz en $\mathbb{R}^3$, pero no libre.

Solución del ejercicio 1061 ▲000985

1. Falso. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (1,1,0)$.
2. Cierto. Sea una combinación lineal nula $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_p x_p = 0$. Se supone que uno de los coeficientes es no nulo : por ejemplo $\lambda_1 \neq 0$. Entonces se escribe $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1} x_p$. Entonces x_1 es una combinación lineal de $\{x_2, \ldots, x_p\}$. Lo que contradice la hipótesis del enunciado, entonces todos los coeficientes son nulos y $\{x_1, \ldots, x_p\}$ es una familia libre.

Solución del ejercicio 1063 ▲000987

1. Es una base.
2. No es una base : $v_3 = 4v_1 - v_2$. Entonces el espacio $\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$.
3. No es una base : $v_3 = 5v_1 - 4v_2$. Entonces el espacio $\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$.

Solución del ejercicio 1068 ▲000992

1. Primero la familia $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ contiene $n+1$ vectores en el espacio $E = \mathbb{R}_n[X]$ de dimensión $n+1$. Aquí un vector es un polinomio : P_0 es un polinomio constante no nulo, P_1 es un polinomio de grado exactamente 1,... Recordar que cuando el número de vectores es igual a la dimensión del espacio se tienen las equivalencias, entre *ser una familia libre* y *ser una familia generatriz* y por lo tanto, también *ser una base*.

   Por lo tanto, demostrar que $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ es una familia libre. Sea una combinación lineal nula :

   $$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0.$$

   Se introducen la hipótesis concernientes a los grados : $\mathrm{grad}\, P_0 = 0$, $\mathrm{grad}\, P_1 = 1, \ldots, \mathrm{grad}\, P_n = n$. Se define el polinomio $P(X) = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$.

   Se va a demostrar sucesivamente $\lambda_n = 0$, luego $\lambda_{n-1} = 0, \ldots, \lambda_0 = 0$.
   Por reducción al absurdo se supone $\lambda_n \neq 0$ y se escribe $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, como $\mathrm{grad}\, P_n(X) = n$, entonces $a_n \neq 0$. Ahora $P(X)$ es también un polinomio de grado exactamente n que se escribe

   $$P(X) = \lambda_n \cdot a_n \cdot X^n + \text{términos de grado inferior.}$$

   La combinación lineal nula implica que $P(X) = 0$ (el polinomio nulo). Así, identificando los coeficientes ante X^n se obtiene $\lambda_n \cdot a_n = 0$. Se obtiene $a_n = 0$ o $\lambda_n = 0$. Lo que es una contradicción. Conclusión $\lambda_n = 0$.

   Ahora la combinación lineal nula se escribe $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0$. Por recurrencia descendente se encuentra $\lambda_{n-1} = 0, \ldots,$ hasta $\lambda_0 = 0$.
   Balance : $\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, por lo tanto la familia $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ es libre, es así también generatriz ; $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ es una base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Un punto que hemos utilizado y que quizás sea útil detallar es el siguiente : si un polinomio es igual al polinomio nulo, entonces todos estos coeficientes son nulos. Aquí hay una justificación : escribir $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = 0$ y dividir por X^n :

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{X} + \frac{a_{n-2}}{X^2} + \cdots + \frac{a_1}{X^{n-1}} + \frac{a_0}{X^n} = 0.$$

Cuando se hace tender X hacia $+\infty$, entonces el término de la izquierda tiende a a_n y el de la derecha es 0, entonces por unicidad del límite $a_n = 0$. Se hace entonces una recurrencia descendente para demostrar $a_{n-1} = 0, \dots, a_0 = 0$.

Una consecuencia es que si dos polinomios son iguales entonces sus coeficientes son iguales. Y otra formulación es decir que $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Se encuentra $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Luego, $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.

Solución del ejercicio 1072 ▲000996

Cuando el número de vectores es igual a la dimensión del espacio se tienen las equivalencias, entre *ser una familia libre* y *ser una familia generatriz* y por lo tanto, también *ser una base*. Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ forman, por lo tanto una base si y solo si forman una familia libre. Verificar cuando es el caso.

$$a(1,0,t) + b(1,1,t) + c(t,0,1) = (0,0,0) \iff (a+b+tc, b, at+bt+c) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} a+b+tc = 0 \\ b = 0 \\ at+bt+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a+tc = 0 \\ at+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (-tc)t + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = -tc \\ (t^2-1)c = 0. \end{cases}$$

Primer caso : si $t \neq \pm 1$. Entonces $t^2 - 1 \neq 0$, por lo que la única solución del sistema es $(a = 0, b = 0, c = 0)$. En este caso la familia es libre y es, por lo tanto también una base.

Segundo caso : si $t = \pm 1$. Entonces la última línea del sistema desaparece y hay soluciones no triviales (por ejemplo si $t = 1$, $(a = 1, b = 0, c = -1)$ es una solución). La familia no es libre y no es, por lo tanto una base.

Solución del ejercicio 1082 ▲001006

1. Es una base. Como se tienen tres vectores y deseamos demostrar que forman una base de un espacio vectorial de dimensión 3, es suficiente demostrar que o la familia es libre, o es generatriz (estas condiciones son equivalentes para n vectores en un espacio vectorial de dimensión n).

   Es más simple demostrar que la familia es libre. Sea una combinación lineal nula $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ es suficiente demostrar que $a = b = c = 0$. Pero tenga cuidado aquí el cuerpo de base es $K = \mathbb{C}$, por lo tanto a, b, c son números complejos.

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \iff a(1,-1,i) + b(-1,i,1) + c(i,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\iff (a-b+ic, -a+ib+c, ia+b-c) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a-b+ic = 0 \\ -a+ib+c = 0 \\ ia+b-c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \cdots \text{ se resuelve el sistema } \iff a = 0, b = 0, c = 0.$$

   La familia (v_1, v_2, v_3) es libre, por lo tanto también generatriz ; es, por lo tanto una base de $\mathbb{C}^3$.

2. Se busca $a,b,c \in \mathbb{C}$ tales que $av_1+bv_2+cv_3=v$. Se trata por lo tanto de resolver el sistema :

$$\begin{cases} a-b+ic=1+i \\ -a+ib+c=1-i \\ ia+b-c=i. \end{cases}$$

Se encuentra $a=0$, $b=\frac{1}{2}(1-i)$, $c=\frac{1}{2}(1-3i)$. Se tiene por lo tanto $v=\frac{1}{2}(1-i)v_2+\frac{1}{2}(1-3i)v_3$ y por lo tanto, las coordenadas de v en la base (v_1,v_2,v_3) son $(0,\frac{1}{2}(1-i),\frac{1}{2}(1-3i))$.

Solución del ejercicio 1090 ▲003317

$$\begin{cases} x' = \phantom{-x+{}} 2y+z \\ 3y' = -x +z \\ 3z' = -x+3y+z. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 1091 ▲003318

$r=3, \quad 2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+5\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{b}-2\overrightarrow{d}-\overrightarrow{e}=\overrightarrow{0}.$

Solución del ejercicio 1093 ▲003320

3. $\pi_H : \begin{cases} 4x' = 3x-y-z \\ 4y' = -x+3y-z \\ 4z' = -2x-2y+2z, \end{cases} \qquad s_H : \begin{cases} 2x' = x-y-z \\ 2y' = -x+y-z \\ 2z' = -2x-2y. \end{cases}$

Solución del ejercicio 1095 ▲005179

1. Sea n un entero igual a 2.
   Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tal que $\sqrt{n}=\frac{a}{b}$ o incluso tal que $n \cdot b^2 = a^2$. Pero entonces, por unicidad de la descomposición de un entero natural mayor o igual que 2 en factores primos, todos los factores primos de n tienen un exponente, por lo que significa exactamente que n es un cuadrado perfecto. Si $n=0$ o $n=1$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ y n es por otro lado un cuadrado perfecto. Se ha demostrado que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ es un cuadrado perfecto})$$

   o aún por contraposición

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ no es un cuadrado perfecto} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$

2. De acuerdo a 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ son irracionales. $E=\text{vect}_{\mathbb{Q}}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ y entonces, E es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y $(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ es una familia generatriz. Demostrar que esta familia es $\mathbb{Q}$-libre. Sea $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$.

   $$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 &\Rightarrow (a+d\sqrt{6})^2=(-b\sqrt{2}-c\sqrt{3})^2 \\ &\Rightarrow a^2+2ad\sqrt{6}+6d^2=2b^2+2bc\sqrt{6}+3c^2 \\ &\Rightarrow a^2-2b^2-3c^2+6d^2=2(-ad+bc)\sqrt{6} \end{aligned}$$

como $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, se obtiene $a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2 = 2(-ad + bc) = 0$ (porque si $bc - ad \neq 0$, $\sqrt{6} = \dfrac{a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2}{2(-ad + bc)} \in \mathbb{Q}$) o aún,

$$\begin{cases} a^2 - 3c^2 = 2b^2 - 6d^2 & (1) \\ ad = bc. & (2) \end{cases}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 &\Rightarrow (a + c\sqrt{3})^2 = (-b\sqrt{2} - d\sqrt{6})^2 \\ &\Rightarrow (a^2 + 2ac\sqrt{3} + 3c^2 = 2b^2 + 4bd\sqrt{3} + 6d^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 3c^2 = 2b^2 + 6d^2 & (3) \\ ac = 2bd. & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

(ya que $\sqrt{3}$ es irracional). Sumando y restando (1) y (3), se obtiene $a^2 = 2b^2$ y $c^2 = 2d^2$. Porque $\sqrt{2}$ es irracional, no se puede tener $b \neq 0$ (porque entonces $\sqrt{2} = \pm\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) o $d \neq 0$. Entonces, $b = d = 0$, luego $a = c = 0$. Finalmente, la familia $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ es $\mathbb{Q}$-libre y es, por lo tanto una base de E.

Solución del ejercicio 1096 ▲005572

Primera solución. Cada P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, es de grado $k + n - k = n$ y por lo tanto, está en $\mathbb{R}_n[X]$. Los polinomios P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ tienen valoraciones dos a dos distintas y por lo tanto, constituyen una familia libre. Como además $\mathrm{card}(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} = n + 1 = \dim(E) < +\infty$, la familia $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ es una base de E.
Segunda solución. La matriz cuadrada M de la familia $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ en la base canónica de $\mathbb{R}_n[X]$ es triangular inferior. Sus coeficientes diagonales son todos no nulos porque son iguales a 1. M es, por lo tanto invertible y $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ es una base de E.

Solución del ejercicio 1097 ▲005573

Unicidad. Sea $i \in [\![0, n]\!]$. L_i debe admitir las n raíces dos a dos distintas a_j, donde j es diferente de i y entonces L_i es divisible por el polinomio $\prod_{j \neq i} (X - a_j)$. L_i debe ser de grado n y entonces existe un real no nulo λ tal que $L_i = \lambda \prod_{j \neq i} (X - a_j)$. Finalmente, $L_i(a_i) = 1$ proporciona $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$. Así necesariamente $L_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.
Existencia. Los L_i así definidos sirven.

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.}$$

Demostrar que la familia $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ es libre.
Sean $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, $n + 1$ números complejos tales que $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. En particular, para un índice i de $[\![0, n]\!]$ dado, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = 0$ y entonces $\lambda_i = 0$ en vista de las igualdades que definen los L_j. La familia $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ es libre. Además, los L_i están todos en $\mathbb{C}_n[X]$ y verifican $\mathrm{card}(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} = n + 1 = \dim \mathbb{C}_n[X] < +\infty$. Entonces la familia $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ es una base de $\mathbb{C}_n[X]$. Sea P un polinomio cualquiera de grado menor o igual

que n. Se escribe P en la base $(L_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$: $P=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j L_j$. Tomado el valor en a_i, i dada en $[\![0,n]\!]$, se obtiene $\lambda_i = P(a_i)$. De ahí la escritura general de un polinomio de grado menor o igual que n en la base $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ P=P(a_0)L_0+\cdots+P(a_n)L_n.}$$

Pero entonces : $(\forall i\in[\![0,n]\!],\ P(a_i)=b_i)\Rightarrow P=b_0L_0+\cdots+b_nL_n$. Recíprocamente, el polinomio $P=b_0L_0+\cdots+b_nL_n$ verifica por supuesto las igualdades solicitadas y es de grado menor o igual a n. Así, existe un único polinomio de grado menor o igual a n verificando $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(a_i)=b_i$ a saber $P_0=\sum_{i=0}^{n}b_iL_i$.

Sean $P\in\mathbb{C}[X]$ y $R=(X-a_0)\cdots(X-a_n)$ ($\mathrm{grad}(R)=n+1$).

$$\begin{aligned}(\forall i\in[\![0,n]\!]\ P(a_i)=b_i) &\Leftrightarrow (\forall i\in[\![0,n]\!]\ P(a_i)=P_0(a_i))\\ &\Leftrightarrow P-P_0 \text{ admite los } n+1 \text{ raíces dos a dos distintas } a_0,\dots,a_n\\ &\Leftrightarrow P-P_0 \text{ es divisible por } R\Leftrightarrow \exists Q\in\mathbb{C}[X]/\ P=P_0+QR.\end{aligned}$$

Los polinomios buscados son los P_0+QR, donde Q recorre $\mathbb{C}[X]$.

Solución del ejercicio 1099 ▲001015

---

1. $F\cap G$ es un subespacio vectorial de E, entonces es de dimensión finita. Sea $(e_1,\dots,e_k)$ una base de $F\cap G$, con $k=\dim F\cap G$. $(e_1,\dots,e_k)$ es una familia libre en F así se puede completar en una base de F por el teorema de la base incompleta. Sean así $(f_1,\dots,f_\ell)$ vectores de F tales que $(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell)$ sea una base de F. Se sabe que $k+\ell=\dim F$. Se observa que los vectores f_i están en $F\setminus G$ (porque están en F, pero no en $F\cap G$).

   Se parte de la familia $(e_1,\dots,e_k)$, pero esta vez se completa a una base de G : sea por lo tanto $(g_1,\dots,g_m)$ vectores de G tales que $(e_1,\dots,e_k,g_1,\dots,g_m)$ sea una base de G. Se sabe que $k+m=\dim G$. Se observa que esta vez los vectores g_i están en $G\setminus F$.

2. Demostrar que $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell,g_1,\dots,g_m)$ es una base de $F+G$.

   Es una familia generatriz porque

   $$F=\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell)\subset\mathrm{vect}(\mathscr{B})\ \text{ y }\ G=\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_k,g_1,\dots,g_m)\subset\mathrm{vect}(\mathscr{B}).$$

   Entonces $F+G\subset\mathrm{vect}(\mathscr{B})$.

   Es una familia libre : en efecto, sea una combinación lineal nula

   $$a_1e_1+\cdots+a_ke_k\quad+\quad b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell\quad+\quad c_1g_1+\cdots+c_mg_m=0.$$

   Se denota $e=a_1e_1+\cdots+a_ke_k$, $f=b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell$, $g=c_1g_1+\cdots+c_mg_m$. Entonces la combinación lineal se convierte en :

   $$e+f+g=0.$$

   Entonces $g=-e-f$, por lo que e y f están en F, por lo tanto g pertenece a F. Pero los vectores g_i no están en F. Entonces $g=c_1g_1+\cdots+c_mg_m$ es necesariamente el vector nulo. Se obtiene $c_1g_1+\cdots+c_mg_m=0$, por lo tanto, es una combinación lineal nula para la familia libre $(g_1,\dots,g_m)$. Entonces todos los coeficientes $c_1,\dots,c_m$ son nulos. El resto de la ecuación se convierte en $a_1e_1+\cdots+a_ke_k+b_1f_1+\cdots+b_\ell f_\ell=0$, donde $(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_\ell)$ es una base de F, por lo tanto todos los coeficientes $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_\ell$ son nulos.

   Balance : todos los coeficientes son nulos por lo que la familia es libre. Como es generatriz, es una base.

3. Porque $\mathscr{B}$ es una base de $F+G$, entonces la dimensión de $F+G$ es el número de vectores en la base $\mathscr{B}$:
$$\dim(F+G) = k+\ell+m.$$
Por lo tanto $k = \dim F \cap G$, $\ell = \dim F - k$, $m = \dim G - k$, y así
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Solución del ejercicio 1100 ▲001016

Sea E un espacio vectorial de dimensión n y F un subespacio vectorial de E. Por reducción al absurdo supongamos que F no es de dimensión finita, entonces existe $v_1, \dots, v_{n+1}$, $n+1$ vectores de F linealmente independientes en F. Pero son también linealmente independientes en E. Entonces la dimensión de E es al menos $n+1$. Contradicción.

Dos observaciones :
- De hecho, incluso hemos demostrado que la dimensión de F es menor que la dimensión de E.
- Se ha usado el siguiente resultado : si E admite una familia libre de k elementos entonces la dimensión de E es más grande que k (o es infinito). Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema de la base incompleta.

Solución del ejercicio 1103 ▲001019

1. G es generado por dos vectores, por lo que $\dim G \leqslant 2$. Claramente v_4 y v_5 no son ld, por lo tanto $\dim G \geqslant 2$, es decir $\dim G = 2$.
2. F es generado por tres vectores por lo que $\dim F \leqslant 3$. Un cálculo demuestra que la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es libre, de donde $\dim F \geqslant 3$ y entonces $\dim F = 3$.
3. Intentemos primero estimar la dimensión de $F \cap G$. Por una parte $F \cap G \subset G$, por lo tanto $\dim(F \cap G) \leqslant 2$. Se utiliza, por otra parte, la fórmula $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. Como $F+G \subset \mathbb{R}^4$, se tiene $\dim(F+G) \leqslant 4$, de donde se tiene la desigualdad $\dim(F \cap G) \geqslant 1$. Así $\dim(F \cap G) = 1$ o bien $\dim(F \cap G) = 2$.

   Se supone que $\dim(F \cap G)$ es igual a 2. Como $F \cap G \subset G$ se tiene en este caso $F \cap G = G$ y entonces $G \subset F$. En particular existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Es fácil comprobar que no es el caso, así $\dim(F \cap G)$ no es igual a 2. Por lo tanto, se puede concluir $\dim(F \cap G) = 1$
4. Por la fórmula $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, se obtiene $\dim(F+G) = 2+3-1 = 4$. Esto implica $F+G = \mathbb{R}^4$.

Solución del ejercicio 1111 ▲001027

1. Por la fórmula $\dim(G+H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H)$, se sabe que $\dim(G+H) \leqslant \dim(G) + \dim(H)$. Para $G = \operatorname{Im} u$ y $H = \operatorname{Im} v$ se obtiene : $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$. Por lo tanto $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Así $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. Se aplica la fórmula anterior a $u+v$ y $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$, por lo tanto $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$, y $\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Entonces $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$. Se empieza de nuevo intercambiando u y v, para obtener : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.

Solución del ejercicio 1124 ▲003322

$\operatorname{codim} H = 0$: suplementario = $\{\overrightarrow{0}\}$.
$\operatorname{codim} H = p$: Sea $\overrightarrow{u} \in E \setminus (H \cup K)$: Entonces $H \oplus K\overrightarrow{u}$ y $K \oplus K\overrightarrow{u}$ tienen un complemento común, L, por lo tanto H y K tienen un complemento común : $L \oplus K\overrightarrow{u}$.

Solución del ejercicio 1125 ▲005183

• e_4 y e_5 no son claramente colineales. Entonces (e_4, e_5) es una familia libre y $\dim G = \operatorname{rg}(e_4, e_5) = 2$. Luego, ya que e_1 y e_2 no son colineales, se tiene $2 \leqslant \dim F \leqslant 3$. Sea entonces $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & ((3)-(2)) \\ \nu - \lambda = 0 & ((1)-(2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Se ha demostrado que : $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$. (e_1, e_2, e_3) es, por lo tanto libre y $\dim F = \operatorname{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$.
• Como $F \subset F + G$, $\dim(F + G) \geqslant 3$ o aún $\dim(F + G) = 3$ o 4. Además :

$$\dim(F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

Se busca entonces $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tal que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ que proporciona el sistema :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2, & (4) \end{cases}$$

$(3) - (2)$ proporciona $\lambda = -1$, luego $(1) - (2)$ proporciona $\nu = -2$, luego (2) proporciona $\mu = 4$. Ahora, (4) no se verifica porque $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. El sistema propuesto no admite solución y por lo tanto, $e_4 \notin \operatorname{vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Así, $\dim(F + G) = 4$. En fin,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

$$\boxed{\dim(F) = 3,\ \dim(G) = 2,\ \dim(F+G) = 4 \text{ y } \dim(F \cap G) = 1.}$$

Solución del ejercicio 1126 ▲005184

Se tiene $H_1 \subset H_1 + H_2$ y entonces $\dim(H_1 + H_2) \geqslant n - 1$ o aún $\dim(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$. Entonces

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n-1) + (n-1) - (n-1) = n - 1 \\ \text{o} \\ (n-1) + (n-1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Ahora, si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, entonces $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ y por lo tanto, en particular, $H_1 = H_2$.
Recíprocamente, si $H_1 = H_2$, entonces $H_1 + H_2 = H_1$ y $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$.

En resumen, si H_1 y H_2 son dos hiperplanos distintos, $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$ y por supuesto, si $H_1 = H_2$, entonces $\dim(H_1 \cap H_2) = n-1$. Si $n = 2$, los hiperplanos son rectas vectoriales y la intersección de dos rectas vectoriales distintas del plano vectorial tiene dimensión 0, es decir se reduce al vector nulo. Si $n = 3$, los hiperplanos son planos vectoriales y la intersección de dos planos vectoriales distintos del espacio dimensional 3 es una recta vectorial.

Solución del ejercicio 1127 ▲005575

Sea f la aplicación de $F \times G$ en E que a un elemento (x,y) de $F \times G$ asociada $x+y$. f es claramente lineal y por el teorema del rango

$$\dim(F \times G) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f), \text{ con } \dim(F \times G) = \dim F + \dim G \text{ y } \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(F+G).$$

Queda por analizar $\ker f$. Sea $(x,y) \in E^2$. (x,y) es elemento de $\ker f$ si y solo si x está en F, y está en G y $x+y=0$ o aún si y solo si x e y están en $F \cap G$ y $y=-x$. Entonces $\ker f = \{(x,-x),\ x \in F \cap G\}$. Demostrar finalmente que $\ker f$ es isomorfo a $F \cap G$. Sea φ la aplicación de $F \cap G$ en $\ker f$ que al elemento x de $F \cap G$ asociada $(x,-x)$ en $\ker f$. φ es claramente una aplicación lineal, claramente inyectiva y claramente sobreyectiva. Entonces φ es un isomorfismo de $F \cap G$ sobre $\ker f$ y, en particular $\dim(\ker f) = \dim(F \cap G)$. Finalmente,

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

Solución del ejercicio 1128 ▲005576

$$\begin{aligned}\dim(F+G+H) &= \dim((F+G)+H) = \dim(F+G) + \dim H - \dim((F+G)\cap H)\\ &= \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim((F+G)\cap H).\end{aligned}$$

Ahora, $F\cap H + G \cap H \subset (F+G)\cap H$ (porque si x está en $F\cap H + G\cap H$ existe y en F y en H y z en G y en H tal que $x = y+z$ y x está de hecho en $F+G$ y también en H). Entonces

$$\begin{aligned}\dim((F+G)\cap H) &\geqslant \dim(F\cap H + G\cap H) = \dim(F\cap H) + \dim(G\cap H) - \dim((F\cap H)\cap(G\cap H))\\ &= \dim(F\cap H) + \dim(G\cap H) - \dim(F\cap G\cap H)\end{aligned}$$

y finalmente

$$\boxed{\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim(F\cap H) - \dim(G\cap H) + \dim(F\cap G\cap H).}$$

El caso de tres rectas vectoriales de $\mathbb{R}^2$ dos a dos distintos proporciona un caso de desigualdad estricta.

Solución del ejercicio 1129 ▲005577

Demostrar por inducción que $\forall n \geqslant 2$, $\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n)$.

• Para $n = 2$, $\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1\cap F_2) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

• Sea $n \geqslant 2$. Se supone que si $F_1, \ldots, F_n$ son n subespacios de E, $\dim(F_1+\cdots+F_n) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_n)$. Sean $F_1, \ldots, F_{n+1}$ $n+1$ subespacios de E.

$$\begin{aligned}\dim(F_1+F_2+\cdots+F_{n+1}) &\leqslant \dim(F_1+\cdots+F_n) + \dim(F_{n+1}) \text{ (según el caso } n=2)\\ &\leqslant \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_{n+1}) \text{ (por hipótesis de recurrencia).}\end{aligned}$$

El resultado es demostrado por recurrencia.
Se sabe que si la suma $F_1+\cdots+F_n$ es directa, se tiene $\dim(F_1+\cdots+F_n)=\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_n)$. Demostrar por inducción que $\forall n\geqslant, 2[\dim(F_1+\cdots+F_n)=\dim F_1+\cdots+\dim F_n]\Rightarrow$ la suma $F_1+\cdots+F_n$ es directa.
• Para n=2, de acuerdo con 1128, $\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)\Rightarrow\dim(F_1\cap F_2)=0\Rightarrow F_1\cap F_2=\{0\}$.
• Sea $n\geqslant 2$. Sean $F_1,\dots,F_{n+1}$, $n+1$ subespacios de E tales que $\dim(F_1+\cdots+F_{n+1})=\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_{n+1})$. Se sabe que

$$\begin{aligned}\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_{n+1})&=\dim(F_1+\cdots+F_{n+1})\\&=\dim(F_1+\cdots+F_n)+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1})\\&\leqslant\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_{n+1})-\dim((F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1}),\end{aligned}$$

y entonces $\dim((F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1})\leqslant 0$, luego $\dim((F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1})=0$. Así $(F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$ y también $\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_{n+1})=\dim(F_1+\cdots+F_n)+\dim(F_{n+1})$ y entonces $\dim(F_1+\cdots+F_n)=\dim(F_1)+\cdots+\dim(F_n)$. Pero entonces, por hipótesis de recurrencia, la suma $F_1+\cdots+F_n$ es directa y si recordamos que $(F_1+\cdots+F_n)\cap F_{n+1}=\{0\}$, se ha demostrado que la suma $F_1+\cdots+F_{n+1}$ es directa. El resultado es demostrado por recurrencia.

Solución del ejercicio 1130 ▲005578

Sea $n\geqslant 3$. Demostrar por inducción que $\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, si $H_1,\dots,H_k$, son k hiperplanos de E, entonces $\dim(H_1\cap\cdots\cap H_k)\geqslant n-k$. • Para $k=2$. Sean H_1 y H_2 dos hiperplanos de E. $\dim(H_1\cap H_2)=\dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2)\geqslant(n-1)+(n-1)-n=n-2$.
• Sea $k\in[\![2,n-3]\!]$. Se supone que la dimensión de una intersección de k hiperplanos de E sea superior o igual a $n-k$. Sean $H_1,\dots,H_k$, H_{k+1} $k+1$ hiperplanos de E.

$$\begin{aligned}\dim(H_1\cap\cdots\cap H_k\cap H_{k+1})&=\dim(H_1\cap\cdots\cap H_k)+\dim(H_{k+1})-\dim((H_1\cap\cdots\cap H_k)+H_{k+1})\\&\geqslant(n-k)+(n-1)-n=n-(k+1),\end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado por recurrencia.
Para $k=n-1$, se obtiene en particular $\dim(H_1\cap\cdots\cap H_{n-1})\geqslant n-(n-1)=1>0$ y entonces $H_1\cap\cdots\cap H_{n-1}\neq\{0\}$.

Solución del ejercicio 1131 ▲005579

Si $m=n$, es inmediato. Se supone $m<n$.

$$\begin{aligned}r=\dim(\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_n))&=\dim\left(\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_m)+\mathrm{vect}(x_{m+1},\dots,x_n)\right)\\&\leqslant\dim(\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_m))+\dim(\mathrm{vect}(x_{m+1},\dots,x_n))\\&\leqslant s+(n-m),\end{aligned}$$

y entonces $s\geqslant r+m-n$. Se tiene la igualdad si y solo si cada desigualdad es una igualdad, es decir si y solo si $\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_m)\cap\mathrm{vect}(x_{m+1},\dots,x_n)=\{0\}$ (para el primero) y la familia $(x_{m+1},\dots,x_n)$ es libre (para el segundo).

Solución del ejercicio 1132 ▲005580

$\mathrm{Im}(f+g)=\{f(x)+g(x),\ x\in E\}\subset\{f(x)+g(x'),\ (x,x')\in E^2\}=\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Im}\,g$. Entonces

$$\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Im}\,g)\leqslant\mathrm{rg}\,f+\mathrm{rg}\,g$$

luego $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}((f+g)+(-g)) \leqslant \operatorname{rg}(f+g)+\operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g)+\operatorname{rg} g$ (pues $\operatorname{Im}(-g) = \{-g(x),\ x \in E\} = \{g(-x),\ x \in E\} = \{g(x'),\ x' \in E\} = \operatorname{Im} g$) y entonces $\operatorname{rg}(f+g) \geqslant \operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g$. Igualmente, cambiando los roles de f y g, $\operatorname{rg}(f+g) \geqslant \operatorname{rg} g - \operatorname{rg} f$ y finalmente $\operatorname{rg}(f+g) \geqslant |\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g|$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2,\ |\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.}$$

Solución del ejercicio 1133 ▲005581

$\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F)$ proporciona $\operatorname{rg}(gof) \leqslant \operatorname{rg} g$. Sea $g' = g_{|f(E)}$. Por el teorema del rango, se tiene

$$\operatorname{rg} f = \dim(f(E)) = \dim\ker g' + \dim\operatorname{Im} g' \geqslant \dim\operatorname{Im} g') = \operatorname{rg}(g \circ f)$$

y por lo tanto, $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

Del teorema del rango, se ve que la desigualdad $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f)$ es equivalente a la desigualdad $\dim(\ker(g \circ f)) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$.

Sea $f' = f_{|\ker(g \circ f)}$. Por el teorema del rango, $\dim(\ker(g \circ f)) = \dim\ker f' + \dim\operatorname{Im} f'$. Pero $\ker f' \subset \ker f$, luego $\operatorname{Im} f' = \{f(x)/\ x \in E\ \text{ y }\ g(f(x)) = 0\} \subset \{y \in F/\ g(y) = 0\} = \ker g$ y finalmente $\dim\ker(g \circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G),\ \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}.}$$

Solución del ejercicio 1136 ▲000929

1. f_1 es lineal. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big) \\ &= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big) \\ &= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big) \\ &= \big(2x+y, x-y\big) + \big(2x'+y', x'-y'\big) \\ &= f_1(x,y) + f_1(x',y'). \end{aligned}$$

   Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y\big) = \lambda \cdot \big(2x+y, x-y\big) = \lambda \cdot f_1(x,y).$$

2. f_2 no es lineal, de hecho, por ejemplo $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ no es igual a $f_2(2,2,0)$.
3. f_3 es lineal : es necesario verificar primero que para todo (x,y,z) y (x',y',z'), entonces $f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$. Y luego para todo (x,y,z) y λ se tiene $f_3\big(\lambda \cdot (x,y,z)\big) = \lambda \cdot f_3(x,y,z)$.
4. f_4 es lineal : es necesario verificar primero que para todo (x,y) y (x',y'), entonces $f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y)+f_4(x',y')$. Y luego para todo (x,y) y λ se tiene $f_4\big(\lambda \cdot (x,y)\big) = \lambda \cdot f_4(x,y)$.
5. f_5 es lineal : sean $P, P' \in \mathbb{R}_3[X]$, entonces

$$\begin{aligned} f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1), (P+P')(0), (P+P')(1)\big) \\ &= \big(P(-1)+P'(-1), P(0)+P'(0), P(1)+P'(1)\big) \\ &= \big(P(-1), P(0), P(1)\big) + \big(P'(-1), P'(0), P'(1)\big) \\ &= f_5(P) + f_5(P'). \end{aligned}$$

Y si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_5\big(\lambda \cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)\big) \\ &= \big(\lambda \times P(-1), \lambda \times P(0), \lambda \times P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \\ &= \lambda \cdot f_5(P). \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 1137 ▲000930

Demostrar que la familia $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ es libre. Sean $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x) = 0$. Entonces : $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = 0$. pero como además $\phi^n = 0$, se tiene la igualdad $\phi^{n-1}\big(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) + \phi^n\big(\lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1}\phi^{n-2}(x)\big) = \phi^{n-1}(\lambda_0 x) = \lambda_0 \phi^{n-1}(x)$. Como $\phi^{n-1}(x) \neq 0$ se obtiene $\lambda_0 = 0$.
Calculando a continuación $\phi^{n-2}\big(\lambda_1 \phi(x) + \dots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)\big)$ se obtiene $\lambda_1 = 0$ después, paso a paso, $\lambda_2 = 2, \dots, \lambda_{n-1} = 0$. La familia $\{x, \phi(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ es, por lo tanto, libre. Además, tiene n vectores, como $\dim E = n$ es libre y maximal y por lo tanto, forma una base de E.

Solución del ejercicio 1143 ▲003312

3. $|a| \neq |b|$.

Solución del ejercicio 1144 ▲005170

1. Si f existe entonces necesariamente, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

   $$f((x,y,z)) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) = x(1,1) + y(0,1) + z(-1,1) = (x-z, x+y+z).$$

   Se deduce que la unicidad de f.
   Recíprocamente, f así definida verifica las tres igualdades del enunciado. Por lo tanto, queda por convencerse de que f es lineal.
   Sean $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ y $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x-z, x+y+z) + \mu(x'-z', x'+y'+z') \\ &= \lambda f((x,y,z)) + \mu f((x',y',z')). \end{aligned}$$

   f es, por lo tanto lineal y adecuada. Se deduce la existencia de f. Se tiene entonces $f((3,-1,4)) = (3-4, 3-1+4) = (-1,6)$.
   Observación. La demostración de la linealidad de f arriba es en realidad superfluo porque el curso da la expresión general de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$.

2. Determinación de $\ker f$. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   $$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0) \Leftrightarrow (x-z, x+y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases}$$

Así, $\ker f = \{(x,-2x,x),\ x\in\mathbb{R}\} = \{x(1,-2,1),\ x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1,-2,1))$. La familia $((1,-2,1))$ engendra $\ker f$ y es libre. Entonces, la familia $((1,-2,1))$ es una base de $\ker f$. Determinación de $\mathrm{Im} f$. Sea $(x',y')\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x',y')\in \mathrm{Im} f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ f((x,y,z))=(x',y')\\ &\Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases}x-z=x'\\ x+y+z=y'\end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases}z=x-x'\\ y=-2x+x'+y'\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \text{el sistema de incógnitas } (x,y,z):\ \begin{cases}z=x-x'\\ y=-2x+x'+y'\end{cases} \text{ tiene al menos una solución.}\end{aligned}$$

Por tanto, el triplete $(0,x'+y',-x')$ es solución y el sistema propuesto admite una solución. Así, todo (x',y') de $\mathbb{R}^2$ está en $\mathrm{Im} f$ y finalmente, $\mathrm{Im} f=\mathbb{R}^2$.
Determinación de un suplemento de $\ker f$. Se define $e_1=(1,-2,1)$, $e_2=(1,0,0)$ y $e_3=(0,1,0)$, luego $F=\mathrm{vect}(e_2,e_3)$ y demostrar que $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus F$.
Primeramente, $\ker f\cap F=\{0\}$. En efecto :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\ker f\cap F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z)=ae_1=be_2+ce_3\\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases}x=a=b\\ y=-2a=c\\ z=a=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0\end{aligned}$$

Verificar luego que $\ker f+F=\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\ker f+F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z)=ae_1+be_2+ce_3\\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases}a+b=x\\ -2a+c=y\\ a=z\end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ \begin{cases}a=z\\ b=x-z\\ c=y+2z.\end{cases}\end{aligned}$$

El sistema anterior (de incógnita (a,b,c)) por lo tanto siempre admite una solución y se ha demostrado que $\mathbb{R}^3=\ker f+F$. Finalmente, $\mathbb{R}^3=\ker f\oplus F$ y F es un suplemento de $\ker f$ en $\mathbb{R}^3$. Verificar en fin que F es isomorfo a $\mathrm{Im} f$. Pero, $F=\{(x,y,0),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ y $\begin{array}{rcl}\varphi: F&\to&\mathbb{R}^2\\ (x,y,0)&\mapsto&(x,y)\end{array}$ es claramente un isomorfismo de F sobre $\mathrm{Im} f(=\mathbb{R}^2)$.

Solución del ejercicio 1145 ▲005186

1. Si P es un polinomio de grado menor o igual que n, entonces $P(X+1)-P(X)$ es aún un polinomio de grado menor o igual que n. Así, φ es de hecho una aplicación de E en sí mismo. Sean entonces $(P,Q)\in E^2$ y $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q)&=(\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X)=\lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X))\\ &=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ es lineal de E en E y por lo tanto, un endomorfismo de E.

2. Sea $P\in E$. $P\in\ker\varphi\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ P(x+1)=P(x)$. Demostrar entonces que P es constante. Sea $Q=P-P(0)$. Q es un polinomio de grado menor o igual que n se anula en los números naturales 0, 1, 2,... (pues $P(0)=P(1)=P(2)=\cdots$) y tiene así una infinidad de raíces dos a dos distintas. Q

es, por lo tanto el polinomio nulo o bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(0)$. Así, P es un polinomio constante. Recíprocamente, los polinomios constantes están claramente en $\ker\varphi$ y entonces

$$\ker\varphi = \{\text{polinomios constantes}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Para determinar $\operatorname{Im}\varphi$, se observa primero que si P es un polinomio de grado menor o igual que n, entonces $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$. En efecto, si $P = a_nX^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$ (con a_n cualquiera, eventualmente nulo) entonces

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{términos de grado inferior o igual a } n-1\\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{términos de grado inferior o igual a } n-1\\ &= \text{términos de grado inferior o igual a } n-1.\end{aligned}$$

Entonces, $\operatorname{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pero por el teorema del rango,

$$\dim\operatorname{Im}(\varphi) = \dim\mathbb{R}_n[X] - \dim\ker(\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim\mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

y entonces $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (Se puede notar que el problema difícil « sea $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. ¿Existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $P(X+1) - P(X) = Q$? » ha sido resuelto simplemente por el teorema del rango.)

Solución del ejercicio 1146 ▲005188

Sean $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ y $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f es, por lo tanto $\mathbb{R}$-lineal. Se observa que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ y que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Como $a \neq 0$, se tiene $f(ia) \neq if(a)$. f no es $\mathbb{C}$-lineal. Sea $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Se define $z = re^{i\theta}$, donde $r \in \mathbb{R}_+^*$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \ker f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{i\theta} + a\mathrm{e}^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2i\theta} = -a.$$

1er caso. Si $|a| \neq 1$, entonces, para todo real θ, $\mathrm{e}^{2i\theta} \neq -a$. En este caso, $\ker f = \{0\}$ y por el teorema del rango, $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$.
2o caso. Si $|a| = 1$, se escribe $a = \mathrm{e}^{i\alpha}$.

$$\mathrm{e}^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha+\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

En este caso, $\ker f = \operatorname{vect}(\mathrm{e}^{i(\alpha+\pi)/2})$. Por el teorema del rango, $\operatorname{Im} f$ es una recta vectorial y para determinar $\operatorname{Im} f$, solo proporcione un vector no nulo de él, como por ejemplo $f(1) = 1 + a$. Entonces, si $a \neq -1$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(1+a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ y $\operatorname{Im} f = i\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 1147 ▲005189

1. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se escribe $f((x,y)) = (x',y')$.

$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y. \end{cases}$$

2. Con las notaciones anteriores,

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) &= (\alpha \frac{z+\bar{z}}{2} + \gamma \frac{z-\bar{z}}{2i}) + i(\beta \frac{z+\bar{z}}{2} + \delta \frac{z-\bar{z}}{2i}) \\ &= \left(\frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}\right) z + \left(\frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z}, \end{aligned}$$

donde $a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2}$ y $b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$.

3. Recíprocamente, si $z' = az + b\bar{z}$, poniendo $a = a_1 + ia_2$ y $b = b_1 + ib_2$, donde $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, se obtiene :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

y entonces,

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 1151 ▲000934

1. No hay problema...
2. Por definición de f y que es la suma de dos subespacios vectoriales, la imagen es

$$\operatorname{Im} f = \{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} = E_1 + E_2.$$

Para el núcleo :

$$\ker f = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$

Pero se puede ir un poco más allá. De hecho, un elemento $(x_1, x_2) \in \ker f$, verifica $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ y $x_1 = -x_2$. Entonces $x_1 \in E_2$ y $x_1 \in E_1 \cap E_2$.
Recíprocamente, si $x \in E_1 \cap E_2$, entonces $(x, -x) \in \ker f$. Y así,

$$\ker f = \{(x, -x)/x \in E_1 \cap E_2\}.$$

Además, la aplicación $x \mapsto (x, -x)$ demuestra que $\ker f$ es isomorfo a $E_1 \cap E_2$.

3. El teorema del rango se escribe :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim(E_1 \times E_2).$$

Teniendo en cuenta el isomorfismo entre $\ker f$ y $E_1 \cap E_2$ se obtiene :

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \times E_2).$$

Pero $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$, entonces encontramos lo que se llama el teorema de las cuatro dimensiones :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Solución del ejercicio 1158 ▲000941

Demostrar esto por recurrencia : Para $n=1$, la afirmación es trivial : $x \notin \ker\varphi \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$. Se supone que si $x \notin \ker\varphi$, entonces $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, $(n \geqslant 2)$. Se fija $x \notin \ker\varphi$, Entonces por hipótesis de inducción $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$, pero $\varphi^{n-1}(x) = \varphi(\varphi^{n-2}(x)) \in \operatorname{Im}\varphi$, por lo tanto $\varphi^{n-1}(x) \notin \ker\varphi$ gracias a la suposición sobre φ. Así $\varphi(\varphi^{n-1}(x)) \neq 0$, sea $\varphi^n(x) \neq 0$. Lo que termina la recurrencia.

Solución del ejercicio 1160 ▲000943

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se supone $\ker f = \operatorname{Im} f$. Sea $x \in E$, entonces $f(x) \in \operatorname{Im} f$, por lo tanto $f(x) \in \ker f$, esto implica $f(f(x)) = 0$; por lo tanto $f^2 = 0$. Además, de acuerdo con la fórmula de rango $\dim\ker f + \operatorname{rg}(f) = n$, pero $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$, así $2\operatorname{rg}(f) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f^2 = 0$, entonces $\operatorname{Im} f \subset \ker f$, porque para $y \in \operatorname{Im} f$ existe x tal que $y = f(x)$ y $f(y) = f^2(x) = 0$. Además, si $2\operatorname{rg}(f) = n$, entonces la fórmula de rango da $\dim\ker f = \operatorname{rg}(f)$, es decir $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f$. Se sabe entonces que $\operatorname{Im} f$ está incluido en $\ker f$, pero estos espacios son de la misma dimensión por lo que son iguales : $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Solución del ejercicio 1164 ▲000947

Se va a demostrar $g(\ker f) \subset \ker f$. Sea $y \in g(\ker f)$. Existe $x \in \ker f$ tal que $y = g(x)$. Demostrar $y \in \ker f$:

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

Se hace un razonamiento similar para demostrar $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$. Sea $z \in g(\operatorname{Im} f)$, existe $y \in \operatorname{Im} f$ tal que $z = g(y)$. Entonces existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$ y así :

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

Solución del ejercicio 1166 ▲000949

Para demostrar la igualdad $\ker f \cap \operatorname{Im} f = f(\ker f^2)$, se demuestra la doble inclusión.
Sea $y \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, entonces $f(y) = 0$ y existe x tal que $y = f(x)$. Además, $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$, por lo tanto $x \in \ker f^2$. Como $y = f(x)$, entonces $y \in f(\ker f^2)$. Así $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f(\ker f^2)$.
Para la otra inclusión, se tiene ya que $f(\ker f^2) \subset f(E) = \operatorname{Im} f$. Además, $f(\ker f^2) \subset \ker f$, porque si $y \in f(\ker f^2)$ existe $x \in \ker f^2$ tal que $y = f(x)$, y $f^2(x) = 0$ implica $f(y) = 0$, por lo tanto $y \in \ker f$.
En consecuencia $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

Solución del ejercicio 1168 ▲000951

1. Por ejemplo, $f(x,y) = (0,x)$, entonces $\ker f = \operatorname{Im} f = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. Por ejemplo, la identidad : $f(x,y) = (x,y)$. De hecho, un pequeño ejercicio es demostrar que las únicas aplicaciones posibles son aplicaciones biyectivas (es muy particular de las aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$).
3. La aplicación nula : $f(x,y) = (0,0)$. Ejercicio : ¡es la única posible !

Solución del ejercicio 1171 ▲000954

1. ¿Cómo se define ϕ a partir de la definición sobre los elementos a partir de la base ? Para $x \in E$, entonces x se escribe en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Y ϕ se define en E por la fórmula
$$\phi(x) = \alpha_1 \phi(e_1) + \alpha_2 \phi(e_2) + \alpha_3 \phi(e_3).$$
Sea aquí :
$$\phi(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3.$$
Esta definición hace automáticamente ϕ lineal (¡verificarlo si no se está convencido !).
2. Se busca averiguar si ϕ es inyectiva. Sea $x \in E$ tal que $\phi(x) = 0$, por lo tanto $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)e_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)e_2 + t\alpha_3 e_3 = 0$. Como $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base entonces todos los coeficientes son nulos :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad t\alpha_3 = 0.$$
Si $t \neq 0$, entonces resolviendo el sistema se tiene $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Entonces $x = 0$ y ϕ es inyectiva. Si $t = 0$, entonces ϕ no es inyectiva, resolviendo el mismo sistema se tiene soluciones no triviales, por ejemplo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Entonces, para $x = e_1 + e_2 - 2e_3$ se obtiene $\phi(x) = 0$.
3. Para la sobreyectividad se pueden hacer cálculos, o sea aplicar la fórmula de rango. Examinemos este segundo método. ϕ es sobreyectiva si y solo si la dimensión de $\operatorname{Im}\phi$ es igual a la dimensión del espacio de llegada (aquí E de dimensión 3). Por lo tanto se tiene una fórmula para $\dim \operatorname{Im}\phi$:
$$\dim \ker \phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim E.$$
Si $t \neq 0$, ϕ es inyectiva entonces $\ker \phi = \{0\}$ es de dimensión 0. Entonces $\dim \operatorname{Im}\phi = 3$ y ϕ es sobreyectiva. Si $t = 0$, entonces ϕ no es inyectiva entonces $\ker\phi$ es de dimensión de al menos 1 (de hecho 1 exactamente), por lo tanto $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant 2$. Entonces ϕ no es sobreyectiva. Se observa que ϕ es inyectiva si y solo si es sobreyectiva. El cual es el resultado del curso para aplicaciones que tienen el mismo espacio de salida y llegada de dimensión (finita).

Solución del ejercicio 1173 ▲000956

Calcular el núcleo es similar a resolver un sistema lineal, y calcular la imagen también. Se puede entonces hacer todo “a mano”. Pero se puede también aplicar un poco de teoría ! Núcleo y imagen están ligados por la fórmula del rango : $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$, para $f : E \to F$. Entonces, si encontramos el núcleo, sabemos la dimensión de la imagen. Y es suficiente entonces encontrar el mayor número de vectores de la imagen.

1. f_1 es inyectiva, sobreyectiva (y por lo tanto, biyectiva).
   (a) Hacer todo a mano. Calculemos el núcleo :
$$\begin{aligned}(x,y) \in \ker f_1 &\iff f_1(x,y) = (0,0) \iff (2x+y, x-y) = (0,0)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)\end{aligned}$$
   Así $\ker f_1 = \{(0,0)\}$ y entonces f_1 es inyectiva.
   (b) Calculemos la imagen. ¿Cuáles elementos (X,Y) puede ser escritos como $f_1(x,y)$?
$$\begin{aligned}f_1(x,y) = (X,Y) &\iff (2x+y, x-y) = (X,Y)\\ &\iff \begin{cases} 2x+y=X \\ x-y=Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X+Y}{3} \\ y = \frac{X-2Y}{3} \end{cases}\\ &\iff (x,y) = \left(\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3}\right)\end{aligned}$$

Así para todo $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ se encuentra un antecedente $(x,y) = (\frac{X+Y}{3}, \frac{X-2Y}{3})$ que verifica así $f_1(x,y) = (X,Y)$. Entonces $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^2$. Así f_1 es sobreyectiva.

(c) Conclusión : f_1 es inyectiva y sobreyectiva por lo tanto biyectiva.

2. (a) Calculemos primero el núcleo :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker f_2 &\iff f_2(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff (2x+y+z, y-z, x+y) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Así $\ker f_2 = \operatorname{vect}(-1,1,1)$ y entonces f_2 no es inyectiva.

(b) Ahora se va a utilizar que $\ker f_2 = \operatorname{vect}(-1,1,1)$, dicho de otro modo $\dim \ker f_2 = 1$. La fórmula del rango, aplicada a $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se escribe $\dim \ker f_2 + \dim \operatorname{Im} f_2 = \dim \mathbb{R}^3$. Entonces $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$. Encontrar una base de $\operatorname{Im} f_2$. Entonces basta con encontrar dos vectores linealmente independientes. Se toma por ejemplo $v_1 = f_2(1,0,0) = (2,0,1) \in \operatorname{Im} f_2$ y $v_2 = f_2(0,1,0) = (1,1,1) \in \operatorname{Im} f_2$. Por construcción, estos vectores están en la imagen de f_2 y es claro que son linealmente independientes. Entonces $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\operatorname{Im} f_2$.

(c) f_2 no es ni inyectiva, ni sobreyectiva (por lo tanto no es biyectiva).

3. Sin ningún cálculo se sabe $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ no puede ser sobreyectiva porque el espacio de llegada es de dimensión estrictamente mayor que el espacio de salida.

(a) Calculemos el núcleo :

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \ker f_3 &\iff f_3(x,y) = (0,0,0,0) \iff (y, 0, x-7y, x+y) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} y=0 \\ 0=0 \\ x-7y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \cdots \iff (x,y) = (0,0).
\end{aligned}
$$

Así $\ker f_3 = \{(0,0)\}$ y entonces f_3 es inyectiva.

(b) La fórmula de rango, aplicada a $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ se escribe $\dim \ker f_3 + \dim \operatorname{Im} f_3 = \dim \mathbb{R}^2$. Entonces $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$. Así $\operatorname{Im} f_3$ es un espacio vectorial de dimensión 2 incluido en $\mathbb{R}^3$, f_3 no es sobreyectiva. Para describir $\operatorname{Im} f_3$ encontrar dos vectores independientes de $\operatorname{Im} f_3$. Hay un número infinito de escogencias : tomemos por ejemplo $v_1 = f(1,0) = (0,0,1,1)$. Para v_2 se busca (un poco a tientas) un vector linealmente independiente de v_1. Intentemos $v_2 = f(0,1) = (1,0,-7,1)$. Por construcción $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$; son claramente linealmente independientes y como $\dim \operatorname{Im} f_3 = 2$, entonces $\{v_1, v_2\}$ es una base de $\operatorname{Im} f_3$. Así $\operatorname{Im} f_3 = \operatorname{vect}\{v_1, v_2\} = \big\{\lambda(0,0,1,1) + \mu(1,0,-7,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\}$.

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ va de un espacio unidimensional 4 a un espacio de dimensión estrictamente menor y entonces f_4 no puede ser inyectiva.

(a) Calculemos el núcleo. Escribir un polinomio P de grado $\leqslant 3$ bajo la forma $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Entonces $P(0) = d$, $P(1) = a+b+c+d$, $P(-1) = -a+b-c+d$.

$$\begin{aligned}
P(X) \in \ker f_4 &\iff \big(P(-1), P(0), P(1)\big) = (0,0,0)\\
&\iff (-a+b-c+d, d, a+b+c+d) = (0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0\\ d = 0\\ a+b+c+d = 0\end{cases}\\
&\iff \cdots\\
&\iff \begin{cases} a = -c\\ b = 0\\ d = 0\end{cases}\\
&\iff (a,b,c,d) = (t,0,-t,0) \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así el núcleo $\ker f_4 = \{tX^3 - tX \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}\{X^3 - X\}$. f_4 no es inyectiva su núcleo es de dimensión 1.

(b) La fórmula de rango para $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ se escribe $\dim \ker f_4 + \dim \operatorname{Im} f_4 = \dim \mathbb{R}_3[4]$. Dicho de otra manera $1 + \dim \operatorname{Im} f_4 = 4$. Entonces $\dim \operatorname{Im} f_4 = 3$. Así $\operatorname{Im} f_4$ es un espacio de dimensión 3 en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\operatorname{Im} f_4 = \mathbb{R}^3$. Conclusión f_4 es sobreyectiva.

Solución del ejercicio 1176 ▲000959

---

1. Sea $P \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la división euclidiana de AP por B se escribe $AP = Q \cdot B + R$, entonces multiplicando por λ se obtiene : $A \cdot (\lambda P) = (\lambda Q)B + \lambda R$, que es la división euclidiana de $A \cdot (\lambda P)$ por B, entonces si $f(P) = R$, se tiene $f(\lambda P) = \lambda R$ y $f(\lambda P) = \lambda f(P)$.
   Sean $P, P' \in E$. Se escriben las divisiones euclidianas :
   $$AP = Q \cdot B + R, \quad AP' = Q' \cdot B + R'.$$
   Sumando :
   $$A(P+P') = (Q+Q')B + (R+R')$$
   que es la división euclidiana de $A(P+P')$ por B. Entonces si $f(P) = R$, $f(P') = R'$, entonces $f(P+P') = R + R' = f(P) + f(P')$ y f es lineal.
2. (Sentido $\Rightarrow$) Se supone que f es biyectiva, así en particular f es sobreyectiva, en particular existe $P \in E$ tal que $f(P) = 1$ (1 es el polinomio constante igual a 1). La división euclidiana es, por lo tanto $AP = BQ + 1$, dicho de otro modo $AP - BQ = 1$. Por el teorema de Bézout, A y B son primos entre sí.
3. (Sentido $\Leftarrow$) Suponemos que A, B son primos entre sí. Demostrar que f es inyectiva. Sea $P \in E$ tal que $f(P) = 0$. Entonces la división euclidiana se escribe : $AP = BQ + 0$. Entonces B divide AP. Como A y B son primos entre sí, por el lema de Gauss, entonces B divide P. Por lo tanto B es de grado $n+1$ y P de grado menor que n, entonces la única solución es $P = 0$. Así f es inyectiva. Como $f : E \longrightarrow E$ es inyectiva y E es de dimensión finita, entonces f es biyectiva.

Solución del ejercicio 1180 ▲000963

---

1. Demostrar que si ϕ es un isomorfismo, la imagen de toda base de E es una base de F : sea $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y denotamos $\mathscr{B}'$ la familia $\{\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)\}$.
   (a) $\mathscr{B}'$ es libre. Sean de hecho $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1\phi(e_1)+\cdots+\lambda_n\phi(e_n) = 0$. Entonces $\phi(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n) = 0$, por lo tanto, como ϕ es inyectiva, $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n = 0$, luego como $\mathscr{B}$ es libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   (b) $\mathscr{B}'$ es generatriz. Sea $y \in F$. Como ϕ es sobreyectiva, existe $x \in E$ tal que $y = \phi(x)$. Como $\mathscr{B}$ es generatriz, se puede elegir $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$. Entonces $y = \lambda_1\phi(e_1)+\cdots+\lambda_n\phi(e_n)$.
2. Se supone que la imagen por ϕ de todo base de E sea una base F. Sean $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E y $\mathscr{B}'$ la base $\{\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)\}$.
   (a) $\operatorname{Im}\phi$ contiene $\mathscr{B}'$ que es una parte generatriz de F. Entonces ϕ es sobreyectiva.
   (b) Sea ahora $x \in E$ tal que $\phi(x) = 0$. Como $\mathscr{B}$ es una base, existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$. Entonces $\phi(x) = 0 = \lambda_1\phi(e_1)+\cdots+\lambda_n\phi(e_n)$ así porque $\mathscr{B}'$ es libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En consecuencia, si $\phi(x) = 0$, entonces $x = 0$: ϕ es inyectiva.

De hecho se demuestra de la misma manera que “ϕ es un isomorfismo si y solo si la imagen por ϕ **de una** base en E es una base de F”.

Solución del ejercicio 1190 ▲003310

1. $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} - g\circ f(\overrightarrow{u})) + g\circ f(\overrightarrow{u})$.
2. $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
   $f = (f\circ g)\circ f \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f\circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Solución del ejercicio 1193 ▲003316

1. $\varphi(v\circ w) = \varphi(v)\circ w + v\circ\varphi(w)$.
2. Por recurrencia $\varphi^n(v\circ w) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^k(v)\circ\varphi^{n-k}(w)$, entonces si $v \in c_p$ y $w \in c_q$, o sea $v\circ w \in c_{p+q-1}$.

Solución del ejercicio 1199 ▲003332

$$2.\ \operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g) \iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}_F\} \\ \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\overrightarrow{0}_F\} \\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \exists \overrightarrow{z} \text{ tal que } f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{y}) = (f+g)(\overrightarrow{z}). \end{cases}$$

$\Rightarrow$: Entonces $f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}) = g(\overrightarrow{z} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}$. Para $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}) + \overrightarrow{z} \in \ker f + \ker g$.
$\Leftarrow$: Sean $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_f + \overrightarrow{x}_g$ y $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}_f + \overrightarrow{y}_g$:
Entonces $f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}_g) + g(\overrightarrow{y}_f) = (f+g)(\overrightarrow{x}_g + \overrightarrow{y}_f)$.

Solución del ejercicio 1202 ▲003335

$\operatorname{Im} f \subset \ker g \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \dim E$.
$f+g$ es sobreyectiva $\Rightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E \Rightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geqslant \dim E$.

Solución del ejercicio 1203 ▲003336

1. $\dim H + \dim K = \dim E$.
2. Si $H \oplus K \neq E$, entonces $\mathscr{E}$ no es estable para $\circ$.

Solución del ejercicio 1206 ▲003350

3. $\dim \mathscr{K} = (\dim E)(\dim \ker f) = \dim \mathscr{I}$, $\quad \dim(\mathscr{K} \cap \mathscr{I}) = (\operatorname{rg} f)^2$.

Solución del ejercicio 1207 ▲003351

$(\operatorname{rg} u)(\operatorname{rg} v)$.

Solución del ejercicio 1209 ▲005171

1. Siempre se tiene $\ker f \subset \ker f^2$. En efecto, si x es un vector de $\ker f$, entonces $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (pues f es lineal) y x está en $\ker f^2$.
   Demostrar entonces que : $[\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}]$. Se supone que $\ker f = \ker f^2$ y demostrar que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Sea $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$. Entonces, por un lado $f(x) = 0$ y por otro lado, existe y elemento de E tal que $x = f(y)$. Pero entonces, $f^2(y) = f(x) = 0$ y $y \in \ker f^2 = \ker f$. Entonces, $x = f(y) = 0$. Se ha demostrado que $\ker f = \ker f^2 \Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Se supone que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ y demostrar que $\ker f = \ker f^2$.
   Sea $x \in \ker f^2$. Entonces $f(f(x)) = 0$ y $f(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Entonces, $f(x) = 0$ y x está en $\ker f$. Se ha así demostrado que $\ker f^2 \subset \ker f$ y, ya que siempre se tiene $\ker f \subset \ker f^2$, finalmente se tiene $\ker f = \ker f^2$. Se ha demostrado que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Rightarrow \ker f = \ker f^2$.
   Siempre se tiene $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. En efecto : $y \in \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E /\, y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \operatorname{Im} f$.
   Se supone que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ y demostrar que $\ker f + \operatorname{Im} f = E$. Sea $x \in E$. Porque $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, existe $t \in E$ tal que $f(x) = f^2(t)$. Sea entonces $z = f(t)$ y $y = x - f(t)$. Se tiene $x = y + z$ y $z \in \operatorname{Im} f$. Además, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ y y es bien elemento de $\ker f$. Por lo tanto, se ha demostrado que $E = \ker f + \operatorname{Im} f$.
   Se supone que $\ker f + \operatorname{Im} f = E$ y demostrar que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
   Sea $x \in E$. Existe $(y,z) \in \ker f \times \operatorname{Im} f$ tal que $x = y + z$. Pero entonces $f(x) = f(z) \in \operatorname{Im} f^2$, pues z está en $\operatorname{Im} f$. Así, para todo x de E, $f(x)$ está en $\operatorname{Im} f^2$, lo que demuestra que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ y como se tiene siempre $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$, se ha demostrado que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. $\mathrm{Id} - p$ proyector $\Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ proyector.
   Sea x un elemento de E. $x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow \exists y \in E /\, x = p(y)$. Pero entonces $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ y $\forall x \in E,\ (x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow p(x) = x)$.
   Recíprocamente, si $p(x) = x$, entonces por supuesto, x está en $\operatorname{Im} p$.
   Finalmente, para todo vector x de E, $x \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(\mathrm{Id} - p)$. Se ha demostrado que $\operatorname{Im} p = \ker(\mathrm{Id} - p)$.
   Aplicando esto que precede a $\mathrm{Id} - p$ que es un proyector, se obtiene $\operatorname{Im}(\mathrm{Id} - p) = \ker(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p)) = \ker p$. En fin, ya que $p^2 = p$ y por lo tanto, en particular que $\ker p = \ker p^2$ y $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p^2$, la parte 1) demuestra que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

3. $p=p\circ q$ y $\circ p \Leftrightarrow p\circ(\mathrm{Id}-q)=0$ y $q\circ(\mathrm{Id}-p)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-q)\subset\ker p$ y $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p)\subset\ker q$
$\Leftrightarrow \ker q\subset\ker p$ y $\ker p\subset\ker q$ (de acuerdo a 2))
$\Leftrightarrow \ker p=\ker q$.
4. $p\circ q+q\circ p=0 \Rightarrow p\circ q=(p\circ p)\circ q=p\circ(p\circ q)=-p\circ(q\circ p)$ e igualmente, $q\circ p=q\circ p\circ p=-p\circ q\circ p$.
En particular, $p\circ q=q\circ p$ y entonces $0=p\circ q+q\circ p=2p\circ q=2q\circ p$, luego $p\circ q=q\circ p=0$.
El recíproco es inmediato.
$p+q$ proyector $\Leftrightarrow (p+q)^2=p+q \Leftrightarrow p^2+pq+qp+q^2=p+q \Leftrightarrow pq+qp=0 \Leftrightarrow pq=qp=0$ (de acuerdo con lo anterior). Luego, $\mathrm{Im}(p+q)=\{p(x)+q(x),\ x\in E\}\subset\{p(x)+q(y),\ (x,y)\in E^2\}=\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$.
Recíprocamente, sea z un elemento de $\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$, existen dos vectores x e y de E tales que $z=p(x)+q(y)$. Pero entonces, $p(z)=p^2(x)+pq(y)=p(x)$ y $q(z)=qp(x)+q^2(y)=q(y)$ y entonces
$$z=p(x)+p(y)=p(z)+q(z)=(p+q)(z)\in\mathrm{Im}(p+q).$$
Entonces, $\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q\subset\mathrm{Im}(p+q)$ y finalmente, $\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$. $\ker p\cap\ker q=\{x\in E/\ p(x)=q(x)=0\}\subset\{x\in E/\ p(x)+q(x)=0\}=\ker(p+q)$.
Recíprocamente, si x es elemento de $\ker(p+q)$, entonces $p(x)+q(x)=0$. Así, $p(x)=p^2(x)+pq(x)=p(p(x)+q(x))=p(0)=0$ y $q(x)=qp(x)+q^2(x)=q(0)=0$. Entonces, $p(x)=q(x)=0$ y $x\in\ker p\cap\ker q$. Finalmente, $\ker(p+q)=\ker p\cap\ker q$.

Solución del ejercicio 1210 ▲005181

---

1. $\Leftarrow$ Sea $(u,v)((\mathscr{L}(E))^2$. Se supone que existe $w\in\mathscr{L}(E)$ tal que $u=w\circ v$. Sea x un elemento de $\ker v$. Entonces $v(x)=0$ y entonces $u(x)=w(v(x))=w(0)=0$. Pero entonces, x está en $\ker u$. Entonces $\ker v\subset\ker u$.
$\Rightarrow$ Se supone que $\ker v\subset\ker u$. Se busca definir w, elemento de $\mathscr{L}(E)$ tal que $w\circ v=u$. Es necesario definir con precisión w sobre $\mathrm{Im}\,v$ porque en $E\setminus\mathrm{Im}\,v$, solo se tiene la restricción de la linealidad. Sea y un elemento de $\mathrm{Im}\,v$. (Existe x elemento de E tal que $y=v(x)$. Entonces se quiere plantear $w(y)=u(x)$, pero el problema es que y, elemento de $\mathrm{Im}\,v$ dado puede tener varios antecedentes x, x'... Y se puede tener $u(x)\neq u(x')$ de modo que ni siquiera habría definido una aplicación w.)
Sean x y x' dos elementos de E tales que $v(x)=v(x')=y$, entonces $v(x-x')=0$ y entonces $x-x'\in\ker v\subset\ker u$. Así, $u(x-x')=0$ o aún $u(x)=u(x')$.
En resumen, para y elemento dado de $\mathrm{Im}\,v$, existe x elemento de E tal que $v(x)=y$. Se define así $w(y)=u(x)$ notando que $w(y)$ está bien definida únicamente, porque no depende de la elección del antecedente x de y por v. w aún no está definida en todo E. Denotemos F el suplemento cualquiera de $\mathrm{Im}\,v$ en E (la existencia de F es admitida). Sea X un elemento de E, existen dos vectores y y z, de $\mathrm{Im}\,v$ y F respectivamente, tales que $X=y+z$. Se define así $w(X)=u(x)$, donde x es un antecedente cualquiera de y por v (se toma por restricción de w a F la aplicación nula). w así definida es una aplicación de E en E pues, para X dado y es definido únicamente, luego $u(x)$ es definido de forma única (pero no necesariamente x).
Sea x un elemento de E y $y=v(x)$. $w(v(x))=w(y)=w(y+0)=u(x)$ (por 1.) y está en $\mathrm{Im}\,v$ 2.) 0 está en F 3.) x es un antecedente de y por v) y entonces $w\circ v=u$.
Demostrar que w es lineal. Sean, con los notaciones precedentes, $X_1=y_1+z_1$ y $X_2=y_2+z_2$...
$$\begin{aligned} w(X_1+X_2)&=w((y_1+y_2)+(z_1+z_2))=u(x_1+x_2)\quad (\text{pues } y_1+y_2=v(x_1)+v(x_2)=v(x_1+x_2))\\ &=u(x_1)+u(x_2)=w(X_1)+w(X_2)\end{aligned}$$

y

$$w(\lambda X) = w(\lambda y + \lambda z) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda w(X).$$

2. Se aplica 1.) a $u = \mathrm{Id}$.

$$v \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \ker v = \{0\} \Leftrightarrow \ker v = \ker \mathrm{Id} \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ w \circ v = \mathrm{Id}.$$

Solución del ejercicio 1211 ▲005182

1. $\forall P \in E$, $f(P) = P'$ es un polinomio y, por lo tanto f es una aplicación de E hacia E. $\forall (P,Q) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ y f es un endomorfismo de E. Sea $P \in E$. $P \in \ker f \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ es constante. $\ker f$ no es nulo y f no es inyectiva.
   Sean $Q \in E$, luego P el polinomio definido por : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \int_0^x Q(t)\,dt$. P es un polinomio tal que $f(P) = Q$. f es sobreyectiva.
   Sea $F = \{P \in E / \ P(0) = 0\}$. F es un subespacio de E en tanto que núcleo de la forma lineal $P \mapsto P(0)$. $\ker f \cap F = \{0\}$ porque si un polinomio es constante y se anula en 0, este polinomio es nulo. En fin, si P es cualquier polinomio, $P = P(0) + (P - P(0))$ y P se puede escribir como la suma de un polinomio constante y un polinomio que se anula en 0. Finalmente, $E = \ker f \oplus F$.
2. Demostrar fácilmente que g es un endomorfismo de E. $P \in \ker g \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x P(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$ (derivando). Entonces, $\ker g = \{0\}$ y g es inyectiva.
   Si P está en $\mathrm{Im}\, g$, entonces $P(0) = 0$, lo que demuestra que g no es sobreyectiva. Además, si $P(0) = 0$, entonces $\int_0^x P'(t)\,dt = P(x) - P(0) = P(x)$, lo que demuestra que $P = g(P')$ está en $\mathrm{Im}\, g$ y así que $\mathrm{Im}\, g = \{P \in E / \ P(0) = 0\}$.

Solución del ejercicio 1212 ▲005187

Sea $u = (x,y,z,t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x+z)e_1 + (-y+t)e_2 + (x+2z)e_3 + (y-t)e_4. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t. \end{cases}$$

Así, $\ker f = \{(0,y,0,y),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((0,1,0,1))$.

$$\boxed{\ker f = \mathrm{vect}((0,1,0,1)).}$$

Sea $u' = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u' = (x',y',z',t') \in \mathrm{Im}\, f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y' = -t' \end{aligned}$$

(si $y' \neq -t'$, el sistema anterior, de incógnitas x, y, z y t, no tiene solución y si $y' = -t'$, el sistema anterior admite al menos una solución como por ejemplo $(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}(2x'-z'), 0, \frac{1}{3}(-x'+2z'), y'\right)$. Así, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \, y+t=0\} = \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2-e_4) + ze_3, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4\} = \operatorname{vect}(e_1, e_2-e_4, e_3)$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,-y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \operatorname{vect}(e_1, e_2-e_4, e_3).}$$

Otra solución para la determinación de $\operatorname{Im} f$. $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \operatorname{vect}(2e_1+e_3, -e_2+e_4, e_1+2e_3, e_2-e_4) = \operatorname{vect}(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$. Pero, por otra parte, de acuerdo con teorema de rango, $\dim(\operatorname{Im} f) = 4-1 = 3$. Entonces, $(2e_1+e_3, e_1+2e_3, e_2-e_4)$ es una base de $\operatorname{Im} f$.

Solución del ejercicio 1213 ▲005190

Por definición, $\operatorname{rg}(u+v) = \dim(\operatorname{Im}(u+v))$.

$$\operatorname{Im}(u+v) = \{u(x)+v(x), \ x \in E\} \subset \{u(x)+v(y), \ (x,y) \in E^2\} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$

Así,

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim(\operatorname{Im}(u+v)) \\ &\leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \\ &\leqslant \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v. \end{aligned}$$

Se ha demostrado que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \ \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.}$$

entonces,

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v-v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v,$$

(es claro que $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im} v$) y entonces $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$. Intercambiando los roles de u y v, se tiene también $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v)$ y finalmente

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2, \ |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v).}$$

Solución del ejercicio 1214 ▲005191

1. • **(1)⇒(2).** Si $\ker f = \operatorname{Im} f$, entonces para todo elemento x de E, $f(x)$ está en $\operatorname{Im} f = \ker f$ y entonces $f(f(x)) = 0$. Así, $f^2 = 0$. Además, de acuerdo con teorema de rango, $n = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f$, lo que demuestra que n es necesariamente par y que $\operatorname{rg} f = \frac{n}{2}$.

   • **(2)⇒(3).** Si $f^2 = 0$ y $n = 2 \operatorname{rg} f$ ($\in 2\mathbb{N}$), encontrar un endomorfismo g de E tal que $f \circ g + g \circ f = \operatorname{Id}_E$. Se define $r = \operatorname{rg} f$ y entonces $n = 2r$, luego $F = \ker f = \operatorname{Im} f$ ($\dim F = r$).

   Sea G un suplemento de F en E ($\dim G = r$). Sea $(e'_1, \ldots, e'_r)$ una base de G. Para $i \in [\![1, r]\!]$, se establece $e_i = f(e'_i)$. Demostrar que la familia $(e_1, \ldots, e_r)$ es libre. Sea $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i \in \ker f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\}, \ \lambda_i = 0,$$

porque la familia $(e_i')_{1\leqslant i\leqslant r}$ es libre. $(e_1,\ldots,e_r)$ es una familia libre de $F=\operatorname{Im} f$ de cardinal r y por lo tanto, una base de $F=\ker f=\operatorname{Im} f$. Por cierto, ya que $E=F\oplus G$, $(e_1,\ldots,e_r,e_1',\ldots,e_r')$ es una base de E. Sea entonces g el endomorfismo de E definido por las igualdades : $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $g(e_i)=e_i'$ y $g(e_i')=e_i$ (g está enteramente determinado por las imágenes de los vectores de una base de E). Para i elemento de $[\![1,r]\!]$, se tiene entonces :

$$(f\circ g+g\circ f)(e_i)=f(e_i')+g(0)=e_i+0=e_i,$$

y

$$(f\circ g+g\circ f)(e_i')=f(e_i)+g(e_i)=0+e_i'=e_i'.$$

Así, los endomorfismos $f\circ g+g\circ f$ y Id_E coinciden sobre la base de E y entonces $f\circ g+g\circ f=\mathrm{Id}_E$.

• **(3)⇒(1).** Se supone que $f^2=0$ y que existe $g\in\mathscr{L}(E)$ tal que $f\circ g+g\circ f=\mathrm{Id}_E$. Como $f^2=0$, se tiene $\operatorname{Im} f\subset\ker f$. Por otra parte, si x es un elemento de $\ker f$, entonces $x=f(g(x))+g(f(x))=f(g(x))\in\operatorname{Im} f$ y se tiene también $\ker f\subset\operatorname{Im} f$. Finalmente, $\ker f=\operatorname{Im} f$.

2. La existencia de una base $(e_1,\ldots,e_p,e_1',\ldots,e_p')$ de E verificando las condiciones del enunciado se ha establecido (con $p=r=\operatorname{rg} f$).

Solución del ejercicio 1215 ▲005192

1. Sean k un entero natural y x un elemento de E.

$$x\in N_k\Rightarrow f^k(x)=0\Rightarrow f(f^k(x))=f(0)=0\Rightarrow f^{k+1}(x)=0\Rightarrow x\in N_{k+1}.$$

Se ha demostrado que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $N_k\subset N_{k+1}$. Luego,

$$x\in I_{k+1}\Rightarrow\exists y\in E/\ x=f^{k+1}(y)\Rightarrow\exists z(=f(y))\in E/\ x=f^k(z)\Rightarrow x\in I_k.$$

Se ha demostrado que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $I_{k+1}\subset I_k$.

2. (a) Sea k un entero natural. Se supone que $N_k=N_{k+1}$. Se tiene ya $N_{k+1}\subset N_{k+2}$. Demostrar que $N_{k+2}\subset N_{k+1}$. Sea x un elemento de E.

$$\begin{aligned}x\in N_{k+2}&\Rightarrow f^{k+2}(x)=0\Rightarrow f^{k+1}(f(x))=0\Rightarrow f(x)\in N_{k+1}=N_k\Rightarrow f^k(f(x))=0\\&\Rightarrow f^{k+1}(x)=0\Rightarrow x\in N_{k+1}.\end{aligned}$$

(b) Se tiene $\{0\}=N_0\subset N_1\subset N_2\cdots$ Se supone que cada una de estas inclusiones son estrictas. Entonces, $0=\dim N_0<\dim N_1<\dim N_2\cdots$ Entonces $\dim N_1\geqslant 1$, $\dim N_2\geqslant 2$ y por una recurrencia fácil, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dim N_k\geqslant k$. En particular, $\dim N_{n+1}\geqslant n+1>n=\dim E$, lo que es imposible. Entonces, existe k entero natural tal que $N_k=N_{k+1}$. Sea p el menor de estos enteros k (la existencia de p se demuestra adecuadamente de la siguiente manera : si $K=\{k\in\mathbb{N}/\ N_k=N_{k+1}\}$, K es una parte no vacía de $\mathbb{N}$ y por lo tanto, admite un elemento más pequeño). Se observa que ya que f es no inyectiva, $\{0\}=N_0\underset{\neq}{\subset}N_1$ y entonces $p\in\mathbb{N}^*$. Por definición de p, para $k<p$, $N_k\underset{\neq}{\subset}N_{k+1}$ y, de acuerdo con a) y como $N_p=N_{p+1}$, se demuestra por inducción solo para $k=p$, se tiene $N_k=N_p$.

(c) $0<\dim N_1<\cdots<\dim N_p$ demuestra que para $k\leqslant p$, se tiene $\dim N_k=k$ y, en particular $p\leqslant\dim N_p=n$.

3. Porque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ y que $\dim E < +\infty$, se tiene :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \mathrm{rg}\ (f^k) = n - \mathrm{rg}\ (f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Entonces, para $k < p$, $I_k \underset{neq}{\subset} I_{k+1}$ y para $k = p$, $I_k = I_{k+1}$.

4. Sea $x \in I_p \cap N_p$. Entonces, $f^p(x) = 0$ y $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$. De donde, $f^{2p}(y) = 0$ y $y \in N_{2p} = N_p$ (ya que $2p \geqslant p$) y entonces $x = f^p(y) = 0$. Se ha demostrado que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Ahora, el teorema del rango demuestra que $E = \dim(I_p) + \dim(N_p)$ y entonces $E = I_p \oplus N_p$. Se define $f_{|I_p} = f'$. f' es ya un endomorfismo de I_p, pues $f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p$. Sea entonces $x \in I_p$. $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$.

$$x \in \ker f' \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(f^p(y)) = 0 \Rightarrow y \in N_{p+1} = N_p x = f_p(y) = 0.$$

Entonces $\ker f' = \{0\}$ y entonces, ya que $\dim I_p < +\infty$, $f' \in \mathrm{GL}(I_p)$.

5. Sean k un entero natural y g_k la restricción de f a I_k. De acuerdo con el teorema de rango, $d_k = \dim(I_k) = \dim(\ker g_k) + \dim(\mathrm{Im}\, g_k)$. Ahora, $\mathrm{Im}\, g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ y entonces $\dim(\mathrm{Im}\, g_k) = d_{k+1}$. Por otra parte, $\ker g_k = \ker f_{|I_k} = \ker f \cap I_k$. Así, para todo entero natural k, $d_k - d_{k+1} = \dim(\ker f \cap I_k)$. Porque la sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente para la inclusión, la sucesión de enteros naturales $(\dim(\ker f \cap I_k))_{k\in\mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Solución del ejercicio 1216 ▲005194

Sea $x \in E$.

$$x \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id}) \Rightarrow f(x) = 2x \text{ y } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Entonces, $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id}) = \{0\}$ (mismo si $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id} \neq 0$). Sea $x \in E$. Se busca y y z tales que $y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$, $z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$ y $x = y + z$.

Si y y z existen, y y z son solución del sistema $\begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$ y entonces $\begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$.

Recíprocamente. Sean $x \in E$, luego $y = 3x - f(x)$ y $z = f(x) - 2x$. Se tiene bien $y + z = x$, luego

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{pues } f^2 = 5f - 6\,\mathrm{Id}) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

y $y \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$. Igualmente,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

y $z \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$. Se ha demostrado que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) + \ker(f - 3d)$, y finalmente que

$$E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 3d).$$

Solución del ejercicio 1217 ▲005582

Por supuesto, una condición necesaria es $\dim F + \dim G = \dim E$ (y no $F \oplus G = E$). Demostrar que esta condición es suficiente. Sean F y G dos subespacios de E tales que $\dim F + \dim G = \dim E$. Sea F' un suplemento de F en E (F' existe porque E es de dimensión finita). Si $G = \{0\}$ (y entonces $F = E$), $f = 0$ sirve. Si $G \neq \{0\}$, existe un isomorfismo φ de F' sobre G (pues F' y G tienen la misma dimensión finita) luego existe un endomorfismo único de E verificando : $f_{|F} = 0_{|F}$ y $f_{|F'} = \varphi$. Pero entonces $\operatorname{Im} f = f(F \oplus F') = f(F) + f(F') = \{0\} + G = G$, luego $F \subset \ker f$ y por razones de dimensión, $F = \ker f$.

Solución del ejercicio 1218 ▲005583

1. ($\Leftarrow$) Si $f = 0$, f no es inyectiva (pues $E \neq \{0\}$). Si $f \neq 0$ y si existe un endomorfismo no nulo g de E tal que $f \circ g = 0$, entonces existe un vector x de E tal que $g(x) \neq 0$ y $f(g(x)) = 0$. Así $\ker f \neq \{0\}$ y f no es inyectiva.

   ($\Rightarrow$) Se supone f no inyectiva y no nula. Sean $F = \ker f$ y G un suplementario cualquiera de F en E. Sea p la proyección sobre F, paralelamente a G. Porque $F = \ker f$, se tiene $f \circ p = 0$ y como f no es nulo, F es distinto de E y entonces G no es nulo (E es de dimensión finita) o aún p no es nulo. f es, por lo tanto un divisor de cero a la izquierda.
2. ($\Leftarrow$) Si $f = 0$, f no es sobreyectiva. Si f no es nulo y si existe un endomorfismo no nulo g de E tal que $g \circ f = 0$, entonces f no puede ser sobreyectiva porque si no $g(E) = g(f(E)) = \{0\}$ contradiciendo $g \neq 0$.

   ($\Rightarrow$) Se supone f no sobreyectiva y no nula. Sean $G = \operatorname{Im} f$ y F un suplementario cualquiera de G en E, luego p la proyección sobre F, paralelamente a G. F y G son no nulos y distintos de E y entonces p no es nula y verifica $p \circ f = 0$. f es, por lo tanto divisor de cero a la derecha.

Solución del ejercicio 1219 ▲005586

1. (a) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $x \in E$. $x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, N_k \subset N_{k+1}.}$$

   Sean $k \in \mathbb{N}$ y $y \in I_{k+1} \Rightarrow \exists x \in E /\, y = f^{k+1}(x) \Rightarrow \exists x \in E /\, y = f^k(f(x)) \Rightarrow y \in I_k$.

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, I_{k+1} \subset I_k.}$$

   (b) Sea $x \in N$. existe un entero k tal que x está en N_k o incluso tal que $f^k(x) = 0$. Pero entonces $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = 0$ y $f(x)$ está en N_k y por lo tanto, en N. Así, N es estable por f.

   Sea $y \in I$. Entonces, para todo natural k, existe $x_k \in E$ tal que $y = f^k(x_k)$. Pero entonces, para todo entero k, $f(y) = f(f^k(x_k)) = f^k(f(x))$ está en I_k, y entonces $f(y)$ está en I. I es estable por f.

   (c) Si $N_k = N_{k+1}$, se tiene ya $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Demostrar que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$. Sea $x \in N_{k+2}$. Entonces $f^{k+1}(f(x)) = 0$ y entonces $f(x) \in N_{k+1} = N_k$. Entonces, $f^k(f(x)) = 0$ o aún x está en N_{k+1}. Se ha demostrado que

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\, [(N_k = N_{k+1}) \Rightarrow (N_{k+1} = N_{k+2})].}$$

2. (a) Denotemos primero que, para todo entero natural k, $N_k \subset N_{k+1}$ y $I_{k+1} \subset I_k$. Si además, se está en dimensión finita, entonces por el teorema del rango,

   $$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}.$$

   Entonces $A = B$ (eventualmente $= \varnothing$).

   La sucesión de núcleos iterados no puede ser estrictamente creciente para la inclusión porque entonces la sucesión de dimensiones de estos núcleos son una sucesión estrictamente creciente de enteros naturales, verificando por una fácil inducción $\dim N_k \geqslant k$, para todo natural k, y, en particular $\dim N_{n+1} > \dim E$, lo que está excluido. Entonces existe un entero k tal que $N_k = N_{k+1}$. Sea p el menor de estos enteros k. Por definición de p, N_k está estrictamente incluido en N_{k+1}, para $k < p$, luego $N_p = N_{p+1}$ y de acuerdo a 1.c) para todo entero natural k superior o igual a p se tiene $N_k = N_p$ (por inducción en $k \geqslant p$). Entonces $A = \{p, p+1, p+2, ...\}$. En fin, $\dim(N_0) < \dim(N_1) < \cdots < \dim(N_p)$ y entonces $\dim(N_p) \geqslant p$ que impone $p \leqslant n$.

(b) Se tiene ya $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Queda por verificar que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Sea x un elemento de $I_p \cap N_p$. Entonces $f^p(x) = 0$ y existe $y \in E$ tal que $x = f^p(y)$. Pero entonces $f^{2p}(y) = 0$ y y está en $N_{2p} = N_p$ (pues $2p \geqslant p$) o aún $x = f^p(y) = 0$.

$$\boxed{E = I_p \oplus N_p.}$$

(c) Aquí $N = N_p = \ker f^p$ y $I = I_p = \operatorname{Im} f^p$. Sea $f' = f_{|N}$. De acuerdo a 1.b), f' es un endomorfismo de N, luego inmediatamente, $f'^p = 0$. Entonces $f_{|N}$ es nilpotente. Sea $f'' = f_{|I}$. f'' es de acuerdo a 1)b) un endomorfismo de I. Para demostrar que f'' es un automorfismo de I, es suficiente verificar que $\ker f'' = \{0\}$. Pero $\ker f'' \subset \ker f \subset N$ y también $\ker f'' \subset I$. Entonces $\ker f'' \subset N \cap I = \{0\}$. Entonces $f_{|I} \in \mathrm{GL}(I)$.

3. Por supuesto, hay que buscar ejemplos en dimensión infinita.

(a) Sea f de $\mathbb{R}[X]$ en sí mismo que a un polinomio P asocia su derivada P'. Se comprueba fácilmente que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathbb{R}_k[X]$ y por lo tanto, la sucesión de núcleos iterados es estrictamente creciente. La sucesión de los I_k es, sin embargo constante : $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{R}[X]$. En este caso, A es vacío y $B = \mathbb{N}$.

(b) A un polinomio P, se asocia el polinomio XP. Los N_k son todos nulos y para $k \in \mathbb{N}$ dado, I_k consiste en los polinomios de valuación mayor o igual a k o aún $I_k = X^k\mathbb{R}[X]$. En este caso, $A = \mathbb{N}$ y $B = \varnothing$.

(c) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}[X]$ que a X^n asociada X^{n+1} si n no es una potencia de 2 y 0 si n es una potencia de 2 ($f(1) = X$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 0$, $f(X^3) = X^4$, $f(X^4) = 0$,...)
Sea k un entero natural.

$$f^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \neq 0 \text{ y } f^{2^k}(X^{2^k+1}) = f(X^{2^{k+1}}) = 0.$$

Entonces, para todo entero natural k, N_{2^k-1} está estrictamente incluido en N_k. A es vacío. Luego, $X^{2^{k+1}} \in I_{2^k-1}$, pero $X^{2^{k+1}} \notin I_{2^k}$. En efecto, si $l \geqslant 2^{k+1}+1$, $f^{2^k}(X^l)$ es o bien nulo o bien de grado mayor o igual a $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$ y si $l \leqslant 2^{k+1}$, $f^{2^k}(X^l) = 0$, porque entre l y $2^k + l - 1$, hay una potencia de 2 (hay 2^k números entre l y $2^k + l - 1$, entonces $2^k + l - 1 < 2^k + 2^{k+1} = 3 \times 2^k < 2^{k+2}$ y finalmente la diferencia entre dos potencias de 2 inferiores a 2^{k+1} vale como máximo $2^{k+1} - 2^k = 2^k$). Entonces, I_{2^k} contiene el polinomio cero o polinomios de grado estrictamente mayor que 2^{k+1} y por lo tanto, no contiene $X^{2^{k+1}}$. Finalmente, para todo entero natural k, I_{2^k} está estrictamente incluido en I_{2^k-1} y B es vacío.

4. Para k entero natural dado, se denota f_k la restricción de f a I_k. Por el teorema del rango, se tiene

$$\dim I_k = \dim\ker f_k + \dim\operatorname{Im} f_k, \text{ con } \operatorname{Im} f_k = f(I_k) = I_{k+1}.$$

Entonces, para todo entero natural k, $d_k - d_{k+1} = \dim\ker f_k$. Por tanto, para todo entero natural k, $\ker f_{k+1} = \ker f \cap I_{k+1} \subset \ker f \cap I_k = \ker f_k$ y entonces $d_{k+1} - d_{k+2} = \dim\ker f_{k+1} \leqslant \dim\ker f_k = d_k - d_{k+1}$. Finalmente, para todo entero natural k, $d_{k+1} - d_{k+2} \leqslant d_k - d_{k+1}$ y la sucesión de imágenes iteradas decrece cada vez menos rápidamente.

Solución del ejercicio 1220 ▲005601

---

1. Si $N = \ker f \neq \{0\}$, se considera g no nulo tal que $\operatorname{Im} g \neq \{0\}$ y $\operatorname{Im} g \subset \ker f$. Para tal g, $f \circ g = 0$, luego $f \circ g \circ f = 0$ y entonces $g = 0$ por hipótesis, contradiciendo g no nula. Entonces $\ker f = \{0\}$. Si $\operatorname{Im} f \neq F$, se escoge g nula en $\operatorname{Im} f$ y no nulo en un suplemento de $\operatorname{Im} f$ (cuya existencia se admite en dimensión infinita). Entonces, $g \circ f = 0$, luego $f \circ g \circ f = 0$ y entonces $g = 0$ contradiciendo g no nula. Así $\operatorname{Im} f = F$. Finalmente, f es de hecho un isomorfismo de E sobre F.
2. Sea $A = \{g \in \mathscr{L}(F,E)/\ f \circ g \circ f = 0\}$. En primer lugar, A es de hecho un subespacio vectorial de $\mathscr{L}(F,E)$, pues contiene la aplicación nula y es estable bajo combinación lineal (o bien A es el núcleo de la aplicación lineal de $\mathscr{L}(F,E)$ en $\mathscr{L}(E,F)$ que a g asociada $f \circ g \circ f$). Sea J un suplemento de $I = \operatorname{Im} f$ en F. Un elemento g de $\mathscr{L}(F,E)$ está enteramente determinada por sus restricciones a I y J.
$$f \circ g \circ f = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)_{|I} = 0 \text{ y } g_{|J} \text{ es cualquiera} \Leftrightarrow g(I) \subset N.$$
Para ser lo más meticuloso posible, se puede entonces considerar la aplicación G de $\mathscr{L}(I,N) \times \mathscr{L}(J,E)$ en $\mathscr{L}(F,E)$ que a un par (g_1,g_2) combina la única aplicación lineal g de F en E tal que $g_{|I} = g_1$ y $g_{|J} = g_2$. G es lineal e inyectiva de imagen A. Entonces
$\dim A = \dim \mathscr{L}(I,N) \times \dim \mathscr{L}(J,E) = \dim \mathscr{L}(I,N) + \dim \mathscr{L}(J,E) = r(p-r) + (n-r)p = pn - r^2.$

Solución del ejercicio 1221 ▲005602

---

1. u está en $\mathscr{L}(E)$, pues u es lineal y si P es un polinomio de grado a lo sumo n, entonces $u(P)$ es un polinomio de grado a lo sumo n.
• Los polinomios constantes están en $\ker u$. Recíprocamente, sea P un elemento de $\ker u$, luego $Q = P - P(0)$.
Por hipótesis, $P(0) = P(1) = P(2) = \cdots$ y entonces 0, 1, 2,... son raíces de Q. Dado que el polinomio Q admite una infinidad de raíces, Q es nulo y, por lo tanto $P = P(0)$ y $P \in \mathbb{K}_0[X]$. Así, $\ker u = \mathbb{K}_0[X]$.
• Pero entonces, de acuerdo con teorema de rango, $\operatorname{rg} u = (n+1) - 1 = n$. Por otra parte, si P está en $\mathbb{K}_n[X]$, $P(X+1) - P(X)$ está en $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ (si se establece $P = a_nX^n + \cdots$, el coeficiente de X^n en $u(P)$ es $a_n - a_n = 0$).
En resumen, $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ y $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X] < +\infty$ y entonces $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
$$\boxed{\ker u = \mathbb{K}_0[X] \text{ y } \operatorname{Im} u = \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$
2. Se sale de $P_0 = 1$ y también de $P_1 = X$ que verifican $u(P_0) = 0$ y $u(P_1) = P_0$. Encontrar $P_2 = aX^2 + bX$ tal que $u(P_2) = P_1$ (es claro que si $\operatorname{grad}(P) \geqslant 1$, $\operatorname{grad}(u(P)) = \operatorname{grad}(P) - 1$ y por otro lado, las constantes son inútiles porque $\ker u = \mathbb{K}_0[X]$).
$u(P_2) = P_1 \Leftrightarrow a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X \Leftrightarrow (2a-1)X + a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ y $b = -a$.
Se toma $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{1}{2}X(X-1)$. Encontrar $P_3 = aX^3 + bX^2 + cX$ tal que $u(P_3) = P_2$.
$$\begin{aligned} u(P_3) = P_2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) - aX^3 - bX^2 - cX = \tfrac{1}{2}X^2 - \tfrac{1}{2}X \\ &\Leftrightarrow \left(3a - \tfrac{1}{2}\right)X^2 + \left(3a + 2b - \tfrac{1}{2}\right)X + a + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \tfrac{1}{6} \text{ y } b = -\tfrac{1}{2} \text{ y } c = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$
Se toma $P_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$. Intentemos, para $1 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$.

Para $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$u(P_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X-i) = \frac{1}{(k+1)!}((X+1)-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$$
$$= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = P_k.$$

En fin, los P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, constituyen una familia de $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ polinomios de grados escalonados de $\mathbb{K}_n[X]$ y así la familia $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ es una base de $\mathbb{K}_n[X]$. En esta base, la matriz de u en la forma deseada.

Solución del ejercicio 1230 ▲000974

1. La única función que es tanto par como impar es la función nula : $P \cap I = \{0\}$. Demostrar que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se descompone en una función par y una función impar. En efecto :
$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
La función $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ es par (verificarlo !), la función $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ es impar. Así $P+I = E$. Resumen : $E = P \oplus I$.
2. El proyector sobre P de dirección I es la aplicación $\pi : E \longrightarrow E$ que a f asocia la función $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, es decir a f se asocia la parte par de f. Se tiene
— $\pi(f) \in P$. Por definición de π, $\pi(f)$ es de hecho una función par.
— $\pi \circ \pi = \pi$. Si g es una función par entonces $\pi(g) = g$. Aplicar esto con $g = \pi(f)$ (lo que es bueno es una función par) por lo tanto $\pi(\pi(f)) = \pi(f)$.
— $\ker \pi = I$. Si $\pi(f) = 0$, entonces esto significa exactamente que la función $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ es la función nula. Así para todo x : $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$, por lo tanto $f(x) = -f(-x)$; esto implica que f es una función impar. Recíprocamente, si $f \in I$ es una función impar, su parte par es nula, entonces $f \in \ker f$.

Solución del ejercicio 1232 ▲000976

1. f es lineal...
2. Sea P tal que $f(P) = 0$. Entonces P verifica la ecuación diferencial
$$P + (1-X)P' = 0.$$
La solución es $P = \lambda(X-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\ker f$ es de dimensión 1 y una base es dada por un solo vector : $X-1$.
3. Por el teorema del rango, la dimensión de la imagen es :
$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker f = (n+1) - 1 = n.$$
Por lo tanto, se deben encontrar n vectores linealmente independientes en $\operatorname{Im} f$. Evaluemos $f(X^k)$, entonces
$$f(X^k) = (1-k)X^k + kX^{k-1}.$$

Esto da $f(1)=1, f(X)=1, f(X^2)=-X^2+2X, \dots$ Se observa que por $k=2,\dots n$, $f(X^k)$ es de grado k sin término constante. Así el conjunto

$$\{f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)\}$$

es una familia de n vectores, perteneciendo a $\operatorname{Im} f$, y libre (porque los grados son distintos). Entonces forman una base de $\operatorname{Im} f$.

Solución del ejercicio 1244 ▲003342

2. (c) $g(\vec{x}) = \vec{z}$.

Solución del ejercicio 1245 ▲003343

3. (a) $(f+g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f^k(\vec{x}) + g\circ f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$.
Para $k=p$: $f^{k-1}(\vec{x}) = \vec{0}$, luego para $k=p-1$: $f^{k-2}(\vec{x}) = \vec{0}$, etc, hasta $\vec{x} = \vec{0}$.
3. (b) Mismo principio en la ecuación : $(f+g)(\vec{x}) = \vec{y}$.
Se obtiene : $(f+g)^{-1} = g^{-1}\circ\left(\mathrm{Id} - g^{-1}\circ f + g^{-2}\circ f^2 - \dots + (-1)^{p-1}g^{1-p}\circ f^{p-1}\right)$.

Solución del ejercicio 1250 ▲003348

$f(\vec{x}) = \alpha\vec{x} + \beta(\vec{x})\vec{u}$, $\beta \in E^*$.

Solución del ejercicio 1251 ▲003354

1. $\psi_{ij}\circ\psi_{k\ell} = \delta_{jk}\psi_{i\ell}$.
2. ψ_{11} es un proyector no trivial.
3. Si $\sum \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$, entonces aplicando ψ_{1j} : $\lambda_j \vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_j = 0$.
4. Descomponer g en la base (φ_{ij}).

Solución del ejercicio 1252 ▲003355

$g =$ una proyección sobre $\operatorname{Im} f$ y $h = f$.

Solución del ejercicio 1257 ▲003489

$f^2 = f\circ g\circ f = f\circ g = f$, por lo tanto f es una proyección. g idem.
$f\circ g = f \Rightarrow \ker g \subset \ker f$ y entonces, por simetría, $\ker f = \ker g$.
Recíprocamente, si f, g son dos proyecciones en la misma dirección, entonces $f\circ g$ y f coinciden en la base y dirección de g, por lo tanto son iguales. Igualmente, $g\circ f = g$.

Solución del ejercicio 1258 ▲003490

Dirección = $\ker f$ y Base = $\operatorname{Im} g$.

Solución del ejercicio 1259 ▲003491

Dirección = $\ker p \cap \ker q$ y Base = $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Solución del ejercicio 1260 ▲003492

Si $\lambda \neq 1$, $(\mathrm{Id}-f)^{-1} = \mathrm{Id}+\frac{1}{1-\lambda}f$.

Solución del ejercicio 1262 ▲003494

1.

2. $\begin{cases} 2x' = x-2y-z \\ 2y' = -x-z \\ 2z' = -x-2y+z. \end{cases}$

Solución del ejercicio 1263 ▲003495

Si $A=\varnothing$ es evidente.
Si no, A es un subgrupo de $\mathrm{GL}(E)$, por lo tanto $\frac{u}{\operatorname{card} A}$ es un proyector y $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{card}(A)\operatorname{rg}(u)$.

Solución del ejercicio 1264 ▲005193

1. Sea $p(\in \mathbb{N}^*)$ el índice de nilpotencia de u. Por definición, $u^{p-1} \neq 0$ y más generalmente, para $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $u^k \neq 0$ porque si $u^k = 0$, entonces $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ que no lo es.
   Porque $u^{p-1} \neq 0$, existe al menos un vector x no nulo tal que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   Demostrar que la familia $(u^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ es libre.
   Sea $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tal que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Se supone que al menos uno de los coeficientes λ_k no sea nulo. Sea $i = \min\{k \in \{0,\dots,p-1\}/\ \lambda_k \neq 0\}$.
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i}\Big(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x)\Big) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0, (\text{ porque para } k \geqslant i+1,\ p-1-i+k \geqslant p \text{ y entonces } u^{p-1-i+k} = 0) \\ \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{pues } u^{p-1}(x) \neq 0), \end{aligned}$$
   lo que contradice la definición de i. Entonces todos los coeficientes λ_k son nulos y se ha demostrado que la familia $(u^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ es libre.
2. La cardinalidad de una familia libre es menor o igual a la dimensión del espacio y por lo tanto, $p \leqslant n$. Por consiguiente, $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$.
3. Se aplica el ejercicio 1215.
   Porque $u^{n-1} \neq 0$, se tiene $N_{n-1} \underset{\neq}{\subset} N_n$. Así (de acuerdo al ejercicio 1216, 2.c)), las inclusiones $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = E$ son todas estrictas y por lo tanto,
   $$0 < \dim N_1 < \dim N_2 \cdots < \dim N_n = n.$$
   Para $k \in \{0,\dots,n\}$, se denota d_k es la dimensión de N_k. Para $k \in \{0,\dots,n-1\}$, se tiene $d_{k+1} \geqslant d_k$ y una recurrencia fácil demuestra que, para $k \in \{0,\dots,n\}$, se tiene $d_k \geqslant k$.

Pero si además, para cierto índice i elemento de $\{1,\dots,n-1\}$, se tiene $d_i = \dim N_i > i$, entonces, por una recurrencia fácil, para $i \leqslant k \leqslant n$, se tiene $d_k > k$ y, en particular $d_n > n$, lo que no es. Entonces,

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ \dim(N_k) = k,$$

o aún, de acuerdo con teorema de rango, $\forall k \in \{0,\dots,n\}$, rg $(u^k) = n-k$, y, en particular rg $(u) = n-1$.

Solución del ejercicio 1265 ▲005584

1a solución. Si $f = 0$, es inmediato. Si no, sea p el índice de nilpotencia de f ($p \geqslant 2$).
Por definición de p, existe un vector x_0 tal que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ (y $f^p(x_0) = 0$).
Demostrar que la familia $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ es libre. En caso contrario, existe $a_0,\dots,a_{p-1}$, p escalares no todos nulos tales que $a_0x_0 + \dots + a_{p-1}f^{p-1}(x_0) = 0$. Sea $k = \min\{i \in [\![0,p-1]\!] \,/\, a_i \neq 0\}$.

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_if^i(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{p-1} a_if^i(x_0) = 0 \Rightarrow f^{p-1}\left(\sum_{i=k}^{p-1} a_if^i(x_0)\right) = 0$$
$$\Rightarrow a_kf^{p-1}(x_0) = 0 \text{ (porque para } i \geqslant p,\ f^i = 0$$
$$\Rightarrow a_k = 0 \text{ (pues } f^{p-1}(x_0) \neq 0).$$

Esto contradice la definición de k y así la familia $(f^k(x_0))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ es libre. Porque el cardinal de una familia libre es menor que la dimensión del espacio, se ha demostrado que $p \leqslant n$ o, que equivale a, $f^n = 0$.

2a solución. (para repetidores)
Sea $p \in \mathbb{N}^*$ el índice de nilpotencia de f. El polinomio X^p es anulador de f. Su polinomio minimal es un divisor de X^p y por lo tanto, igual a X^k por cierto $k \in [\![1,p]\!]$. Por definición del índice de nilpotencia, $k = p$, luego $\mu_f = X^p$. Por el teorema de CAYLEY-HAMILTON, μ_f divide χ_f que es de grado n y, en particular $p \leqslant n$.

Solución del ejercicio 1266 ▲005587

Se transforma ligeramente el enunciado. Si x es un vector no nulo tal que $(x, f(x))$ es ld, entonces existe un escalar λ_x tal que $f(x) = \lambda_x x$. Si $x = 0$, $f(x) = 0 = 0x$ y de nuevo existe un escalar λ_x tal que $f(x) = \lambda_x x$. Inversamente, si para todo x de E, existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tal que $f(x) = \lambda_x x$, entonces la familia $(x, f(x))$ es ld. Entonces

$$[(\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ ld}) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda_x x)].$$

Denotar además que en el caso en que $x \neq 0$, la familia (x) es una base de la recta vectorial vect(x) y, en particular, el número λ_x es definido de forma única.
Demostrar ahora que f es una homotecia, es decir demostrar que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$.
Sean x_0 un vector no nulo y fijo de E, luego x un vector cualquiera de E.
1er caso. Se supone que la familia (x_0, x) libre. Se tiene $f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}(x+x_0)$, pero también $f(x+x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$ y entonces

$$(\lambda_{x+x_0} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0})x_0 = 0.$$

Porque la familia (x_0, x) es libre, se obtiene $\lambda_{x+x_0} - \lambda_x = \lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0} = 0$ y entonces $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$. Así, para todo vector x tal que (x, x_0) libre, se tiene $f(x) = \lambda_{x_0}x$.
2o caso. Se supone que la familia (x_0, x) es ld. Porque x_0 es no nulo, existe un escalar μ tal que $x = \mu x_0$. Pero entonces

$$f(x) = \mu f(x_0) = \mu \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} x.$$

Finalmente, existe un escalar $k = \lambda_{x_0}$ tal que para todo vector x, $f(x) = kx$ y f es una homotecia. El recíproco es claro, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ [(f \text{ homotecia}) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ (x, f(x)) \text{ ld})].}$$

Solución del ejercicio 1267 ▲005588

Observaciones. 1) Sea $(G,*)$ un grupo. El centro de G es el conjunto de elementos de G que conmutan con todos los elementos de G. Este centro, a menudo denotado Z, es un subgrupo de $(G,*)$.
2) $(\mathscr{L}(E),\circ)$ es un magma [11] asociativo y unitario pero no conmutativo (para $\dim E > 1$), pero $(\mathscr{L}(E),\circ)$ no es un grupo. Sin embargo, $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ es un grupo (grupo de invertibles de $(\mathscr{L}(E),\circ)$).
Sea f un endomorfismo (resp. automorfismo) de E conmutando con todos endomorfismos (resp. automorfismos) de E. f conmuta en particular con todas las simetrías. Sea x un vector no nulo de E y s la simetría con respecto a $\mathrm{vect}(x)$, paralelamente a un suplemento dado de $\mathrm{vect}(x)$).

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x).$$

Por lo tanto, $f(x)$ es invariante por s y por lo tanto, pertenece a $\mathrm{vect}(x)$. Así, si f conmuta con todo endomorfismo (resp. automorfismo) de E, f verifica necesariamente $\forall x \in E$, $(x, f(x))$ ld y por el 1266, f es necesariamente una homotecia. Recíprocamente, las homotecias de E conmutan efectivamente con todo endomorfismo de E.

$$\boxed{\text{Los endomorfismos de } E \text{ que conmutan con todos los endomorfismos de } E \text{ son las homotecias.}}$$

Para el centro de $\mathrm{GL}(E)$, es necesario quitar la aplicación nula que es una homotecia, pero que no es invertible.

Solución del ejercicio 1268 ▲005589

($\Rightarrow$) Si $p+q$ es un proyector entonces la igualdad $(p+q)^2 = p+q$ proporciona $pq+qp = 0$. Componiendo con p a la derecha o a la izquierda, se obtiene $pqp+qp = 0 = pq+pqp$ y entonces $pq = qp$. Esta igualdad junto a la igualdad $pq+qp = 0$ proporciona $pq = qp = 0$.
($\Leftarrow$) Si $pq = qp = 0$, entonces $(p+q)^2 = p^2+pq+qp+q^2 = p+q$ y $p+q$ es un proyector.

$$\boxed{\text{Para todos los proyectores } p \text{ y } q,\ (p+q \text{ proyector} \Leftrightarrow p\circ q = q\circ p = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \ker p \ \text{ y } \ \mathrm{Im}\, p \subset \ker q).}$$

De ahora en adelante, $p+q$ es un proyector o lo que es lo mismo $pq = qp = 0$. Se tiene $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$. Inversamente, para $x \in E$,

$$x \in \ker(p+q) \Rightarrow (p+q)(x) = 0 \Rightarrow p(p(x)+q(x)) = 0 \Rightarrow p(x) = 0,$$

e igualmente $q(x) = 0$. Así, $\ker(p+q) \subset \ker p \cap \ker q$ y entonces $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.
Se tiene $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Inversamente, para $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q \Rightarrow \exists (x_1,x_2) \in E^2 /\ x = p(x_1)+q(x_2).$$

11. Un magma es por definición un conjunto con una ley de composición interna

Pero entonces, $(p+q)(x) = p^2(x_1)+pq(x_1)+qp(x_2)+q^2(x_2) = p(x_1)+q(x_2) = x$ y entonces $x \in \mathrm{Im}(p+q)$. Así, $\mathrm{Im}\, p+\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}(p+q)$ y entonces $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p+\mathrm{Im}\, q$.
En resumen, si p y q son dos proyectores tales que $p+q$ sea un proyector, entonces

$$\boxed{\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q \text{ y } \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p+\mathrm{Im}\, q.}$$

Solución del ejercicio 1269 ▲005590

Sea p un proyector de E. Si $p = 0$, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = 0$ y si $p = \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = n$.
De ahora en adelante, p es un proyector de rango $r \in [\![1, n-1]\!]$. Se elige una base de E $\mathscr{B}$ adaptada a la descomposición $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$. En esta base, la matriz de p se escribe $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, donde el número de 1 es $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r$. Pero entonces $\mathrm{tr}(p) = r$.

$$\boxed{\text{En dimensión finita, la traza de un proyector es su rango.}}$$

Solución del ejercicio 1270 ▲005591

($\Leftarrow$) Si $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$, entonces

$$(p_1+\cdots+p_n)^2 = p_1^2+\cdots+p_n^2+\sum_{i\neq j} p_i \circ p_j = p_1+\cdots+p_n,$$

y $p_1+\cdots+p_n$ es un proyector.
($\Rightarrow$) Se supone que $p = p_1+\cdots+p_n$ sea un proyector. Se define $F_i = \mathrm{Im}\, p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, luego $F = F_1+\cdots+F_n$ y $G = \mathrm{Im}\, p$. Se sabe que la traza de un proyector es su rango. Por linealidad de la traza, se obtiene

$$\mathrm{rg}\, p = \mathrm{tr}\, p = \mathrm{tr}(p_1)+\cdots+\mathrm{tr}(p_n) = \mathrm{rg}(p_1)+\cdots+\mathrm{rg}(p_n),$$

y entonces $\dim G = \dim F_1+\cdots+\dim F_n \geqslant \dim F$. Por otra parte, $G = \mathrm{Im}(p_1+\cdots+p_n) \subset \mathrm{Im}\, p_1+\cdots+\mathrm{Im}\, p_n = F_1+\cdots+F_n = F$.
Se obtiene por lo tanto $G = F$ y también $\dim(F_1+\cdots+F_n) = \dim F_1+\cdots+\dim F_n$. Por el ejercicio 1129, $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, es decir

$$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_n).$$

Queda por comprobar que para $i \neq j$ y x en E, $p_i(p_j(x)) = 0$ o lo que es lo mismo que para $i \neq j$ y y en $\mathrm{Im}(p_j)$, $p_i(y) = 0$.
Sea y en $\mathrm{Im}(p_j)$ (y por lo tanto, en $\mathrm{Im}\, p$). Las igualdades $y = p_j(y) = p(y)$ proporcionan $\sum_{i\neq j} p_i(y) = 0$. La suma $\sum_i \mathrm{Im}(p_i)$ es directa, se tiene $p_i(y) = 0$, para cada $i \neq j$, lo que faltaba demostrar.

$$\boxed{p_1+\cdots+p_n \text{ proyector} \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0.}$$

Solución del ejercicio 1271 ▲005592

1. De acuerdo con el 1270, $\mathrm{Im}(p_1+\cdots+p_n)=\mathrm{Im}(p_1)+\cdots+\mathrm{Im}(p_n)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}(p_n)$. Cada p_i es de rango al menos 1, pero si uno de los p_i es de rango mayor o igual a 2, entonces $n=\dim E\geqslant \mathrm{rg}(p_1+\cdots+p_n)=\mathrm{rg}(p_1)+\cdots+\mathrm{rg}(p_n)>n$, lo que es imposible. Así cada p_i es de rango 1.
2. Las imágenes de p_i (resp. q_i) son las rectas vectoriales. Para cada i, se denota e_i (resp. e'_i) un vector no nulo de $\mathrm{Im}(p_i)$ (resp. $\mathrm{Im}(q_i)$). De acuerdo a 1), $E=\mathrm{vect}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{vect}(e_n)$ o aún $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) es una base de E.
   Sea f el automorfismo de E definido por $f(e_i)=e'_i$ (f es un automorfismo porque la imagen por f de una base de E es una base de E).
   Sea $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $f\circ p_i\circ f^{-1}(e'_j)=f(p_i(e_j))=f(\delta_{i,j}e_i)=\delta_{i,j}e'_i=q_i(e_j)$. Así, endomorfismos q_i y $f\circ p_i\circ f^{-1}$ coincidir sobre la base de E y por lo tanto, son iguales.

Solución del ejercicio 1272 ▲005593

Sea $q=\frac{1}{n}\sum\limits_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$.

$$q^2=\frac{1}{n}\sum_{(g,h)\in G^2} h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}.$$

Pero si g y h son dos elementos de G y x es un vector cualquiera de E, $p(g^{-1}(x))$ está en F y por lo tanto, por hipótesis $h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)$ está aún en F (h^{-1} está en G ya que G es un grupo). Se deduce que

$$h\circ p\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=h\circ h^{-1}\circ g\circ p\circ g^{-1}=g\circ p\circ g^{-1}.$$

Pero entonces

$$q^2=\frac{1}{n^2}\sum_{(g,h)\in G^2} g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n^2}\times n\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}=q$$

y q es un proyector. Demostrar que $F\subset \mathrm{Im}\,q$. Sea x un elemento de F. Para cada $g\in G$, $g^{-1}(x)$ está aún en F y entonces $p(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)$, luego $g(p(g^{-1}(x)))=x$.
Pero entonces

$$q(x)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G} x=x,$$

o aún x está en $\mathrm{Im}\,q$. Se ha demostrado que $F\subset \mathrm{Im}\,q$.
Demostrar que $\mathrm{Im}\,q\subset F$. Sea x un elemento de $\mathrm{Im}\,q$.

$$\begin{aligned}
p(x)=p(q(x))&=\frac{1}{n}\sum_{g\in G} p\circ g\circ p\circ g^{-1}(x)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}(x)\ \text{(pues } p\circ g^{-1}(x)\in F \text{ y entonces } g\circ p\circ g^{-1}(x)\in F)\\
&=q(x)=x,
\end{aligned}$$

y x está en F. Se ha demostrado que $\mathrm{Im}\,q\subset F$ y finalmente que $\mathrm{Im}\,q=F$.

$$\boxed{q \text{ es un proyector de imagen } F.}$$

Solución del ejercicio 1273 ▲005598

Dos casos particulares se tratan de inmediato.
Si $f=0$, se toma $p=0$ y $g=\mathrm{Id}_E$ y si $f\in GL(E)$, se toma $p=\mathrm{Id}_E$ y $g=f$.
A partir de ahora, tomaremos el caso en que $\ker f$ y $\operatorname{Im} f$ no se reducen a 0.
Sea F un suplemento de $\ker f$ en E y G un suplemento de $\operatorname{Im} f$ en E. Se sabe que la restricción f' de f a F realiza un isomorfismo de F sobre $\operatorname{Im} f$. Por otra parte $\dim\ker f=\dim G<+\infty$ y entonces $\ker f$ y G son isomorfos. Sea φ un isomorfismo de $\ker f$ sobre G. Se define una única aplicación lineal g poniendo $g_{|\ker f}=\varphi$ y $g_{|F}=f'$.
g es un automorfismo de E. En efecto,

$$g(E)=g(\ker f+F)=g(\ker f)+g(F)=\varphi(\ker f)+f'(F)=G+\operatorname{Im} f=E,$$

(ya que φ y f' son isomorfismos) y entonces g es sobreyectiva. Así g es biyectiva de E en sí mismo porque $\dim E<+\infty$.
Sea p la proyección sobre F, paralelamente a $\ker f$. Se tiene

$$(g\circ p)_{|\ker f}=g\circ 0_{|\ker f}=0_{|\ker f}=f_{|\ker f} \text{ y } (g\circ p)_{|F}=g\circ \mathrm{Id}_{|F}=f'=f_{|F}.$$

Así los endomorfismos $g\circ p$ y f coinciden en dos subespacios suplementarios de E y entonces $g\circ p=f$.
Finalmente, si se denota $\mathscr{P}(E)$ el conjunto de proyectores de E,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{L}(E),\ \exists g\in GL(E),\ \exists p\in\mathscr{P}(E)/\ f=g\circ p.}$$

Solución del ejercicio 1274 ▲005599

(No confundir : $(\forall x\in E,\ \exists p\in\mathbb{N}^*/\ f^p(x)=0)$ y $(\exists p\in\mathbb{N}^*/\ \forall x\in E,\ f^p(x)=0)$. En el segundo caso, p es independiente de x, entonces que en el primer caso, p puede variar cuando x varía).
Sea $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ una base de E. Para cada $i\in[\![1,n]\!]$, existe un entero no nulo p_i tal que $f^{p_i}(e_i)=0$. Sea $p=\max\{p_1,\dots,p_n\}$. p es un entero natural no nulo y para i en $[\![1,n]\!]$, se tiene

$$f^p(e_i)=f^{p-p_i}(f^{p_i}(e_i))=f^{p-p_i}(0)=0.$$

Así el endomorfismo f^p se anula sobre una base de E y se sabe que $f^p=0$.
Por lo tanto, hemos encontrado un entero no nulo p tal que $f^p=0$ y consecuentemente f es nilpotente.

Solución del ejercicio 1275 ▲005600

1. A partir de $fg-gf=af+bg$ (1), se obtiene luego de la composición a la derecha por g, $fg-gfg=afg+bg$ o aún $fg=g\circ\frac{1}{1-a}(fg+b\mathrm{Id})$ (ya que $1-a\neq 0$). Se deduce
$$\operatorname{Im}(fg)\subset\operatorname{Im} g.$$
Pero entonces escribiendo (1) bajo la forma $f=\frac{1}{a}(fg-gf-bg)$ (ya que a no es nulo), se obtiene
$$\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} g.$$
La igualdad $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} g$ demuestra que todo vector de $\operatorname{Im} f$ es invariante por g y por lo tanto, proporciona la igualdad $gf=f$. Se compone entonces (1) a la derecha con f y teniendo en cuenta $gf=f$ y de $f^2=f$, se obtiene $f-f=af+bf$ y entonces $(a+b)f=0$, luego $b=-a$ ya que f no es nulo. (1) entonces se escribe $fg-f=a(f-g)$. Componiendo a la derecha con g, se obtiene : $a(fg-g)=0$ y entonces $fg=f$ ya que a no es nulo. (1) se escribe ahora $g-f=a(f-g)$ o aún $(a+1)(g-f)=0$ y entonces, ya que f y g son distintos, $a=-1$.

2. (De acuerdo a 1), si a es distinto de 0 y de 1, necesariamente $a=-1$ y (1) se escribe $fg-gf=-f+bg$). Sea x un elemento de $\ker g$. (1) proporciona $-g(f(x))=af(x)$ $(*)$, luego tomando la imagen por g, $(a+1)g(f(x))=0$. Porque a es distinto de -1, se obtiene $g(f(x))=0$ y $(*)$ proporciona $af(x)=0$, luego $f(x)=0$. Entonces x es elemento de $\ker f$. Se ha demostrado que $\ker g\subset\ker f$.

   Se deduce $\mathrm{Im}(g-\mathrm{Id})\subset\ker f$ y entonces $f(g-\mathrm{Id})=0$ o aún $fg=f$. (1) se escribe $f-gf=af+bg$ y componiendo a la izquierda por f, se obtiene $f-fgf=af+bfg$. Teniendo en cuenta que $fg=f$, se obtiene $(a+b)f=0$ y entonces $b=-a$.

   (1), entonces se escribe $f-gf=a(f-g)$ y componiendo a la izquierda por g, se obtiene $0=a(gf-g)$ y entonces $gf=g$. (1) se escribe finalmente $f-g=a(f-g)$ y entonces $a=1$.

3. Si $a=0$, (1) se escribe $fg-gf=bg$. Componiendo a la izquierda o a la derecha con g, se obtiene $gfg-gf=bg$ y $fg-gfg=bg$. Sumando estas dos igualdades, se obtiene $fg-gf=2bg$. De donde, considerando el hecho (1), $bg=2bg$ y desde g no es nulo, $b=0$. Así $fg-gf=0$, lo que está excluido en el enunciado. Entonces, no se puede tener $a=0$. De acuerdo a 1) y 2), $(a,b)\in\{(-1,1),(1,-1)\}$.

   1er caso. $(a,b)=(-1,1)$. Es el 1) : $fg-gf=-f+g$. Sea ha visto sucesivamente que $gf=f$ ya que $fg=g$ proporcionando $(g-\mathrm{Id})f=0$ y $(f-\mathrm{Id})g=0$ o aún $\mathrm{Im}\,f\subset\ker(g-\mathrm{Id})=\mathrm{Im}\,g$ y $\mathrm{Im}\,g\subset\mathrm{Im}\,f$ y entonces $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Im}\,g$.

   Recíprocamente, si f y g son dos proyectores con la misma imagen entonces $gf=f$, $fg=g$ y $fg-gf=-f+g$. El primer caso es, por lo tanto el caso de dos proyectores con la misma imagen.

   2o caso. $(a,b)=(1,-1)$. Este es el caso de dos proyectores con el mismo núcleo.

Solución del ejercicio 1276 ▲003315

No, no tienen la misma dimensión si $E\neq\{\overrightarrow{0}\}$ o $F\neq\{\overrightarrow{0}\}$.

Solución del ejercicio 1277 ▲003356

Se quiere $\mathrm{Im}\,g\subset\ker f$ y $\ker g\supset\mathrm{Im}\,f$, por lo tanto g está totalmente definida por su restricción a un suplemento de $\mathrm{Im}\,f$, aplicación lineal a valores en $\ker f$. Se deduce que $\dim F=(\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,f)(\dim\ker f)=(\dim\ker f)^2$.

Solución del ejercicio 1278 ▲003357

Sea $p=\frac{1}{\mathrm{card}\,G}\sum_{g\in G}g$. Entonces $g\circ p=p$, para todo $g\in G$, por lo tanto $p^2=p$, $F\subset\mathrm{Im}\,p$ y si $x\in\mathrm{Im}\,p$, se tiene $p(x)=x$, de donde $g(x)=x$, para todo $g\in G$, es decir $x\in F$. Entonces $F=\mathrm{Im}\,p$ y $\dim F=\mathrm{rg}(p)=\mathrm{tr}(p)$ (traza de un proyector).

Solución del ejercicio 1279 ▲001040

Si $C=A\times B$, entonces se tiene el coeficiente c_{ij} (ubicado en la i-ésima fila y la j-ésima columna de C) realizando el producto escalar del i-ésimo vector-línea de A, con el j-ésimo vector columna de B. Se encuentra

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\5&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&4&-1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&-2\\6&5&7\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1291 ▲001052

Se encuentra

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo da $A^3 - A = 4I$. Factorizando por A se obtiene $A \times (A^2 - I) = 4I$. Entonces $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, así A es invertible y

$$A^{-1} = \tfrac{1}{4}(A^2 - I) = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1292 ▲001053

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1295 ▲001056

Demostrar que E es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$. Sean $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$ dos elementos de E. Entonces $M + M' = \begin{pmatrix} a+a' & 0 & c+c' \\ 0 & b+b' & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' \end{pmatrix} \in E$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix}$ pertenece a E, como la matriz 0. Entonces E es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$.

Sea $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ un elemento de E. Entonces $M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se define $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Las matrices M_1, M_2 y M_3 pertenecen a E y la relación anterior demostrar que generan E. Por otra parte, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, entonces $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La familia $\{M_1, M_2, M_3\}$ es libre y genera E. Es una base de E.

Solución del ejercicio 1296 ▲001057

F es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, por lo tanto $\dim(F) \in \{0, \dots, 4\}$. Como $F \neq M_2(\mathbb{R})$ se tiene también $\dim(F) \neq 4$. Por otro lado las matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pertenecen a F y son linealmente independientes. En efecto, si $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$, entonces $\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Entonces $\dim(F) \geqslant 3$, es decir $\dim(F) = 3$. Finalmente, $\{M_1, M_2, M_3\}$ es una familia libre de tres vectores en F que es un espacio de dimensión 3. Es por lo tanto una base de F.

Solución del ejercicio 1300 ▲001061

$$\begin{aligned} A(\theta)\times A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\operatorname{sen}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta' - \operatorname{sen}\theta\cos\theta' \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \cos\theta\operatorname{sen}\theta' & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\operatorname{sen}(\theta+\theta') \\ \operatorname{sen}(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta+\theta') \end{aligned}$$

Resumen : $A(\theta)\times A(\theta') = A(\theta+\theta')$.

Demostrar por inducción sobre $n \geqslant 1$ que $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$.

— Por supuesto es cierto para $n = 1$.

— Se fija $n \geqslant 1$ y se supone que $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$, entonces

$$\big(A(\theta)\big)^{n+1} = \big(A(\theta)\big)^n \times A(\theta) = A(n\theta)\times A(\theta) = A(n\theta+\theta) = A((n+1)\theta)$$

— Así es verdad para todo $n \geqslant 1$.

Observaciones :

— Se tiene así la fórmula $A(\theta')\times A(\theta) = A(\theta+\theta') = A(\theta)\times A(\theta')$. Las matrices $A(\theta)$ y $A(\theta')$ conmutan.

— De hecho, no es más difícil demostrar que $\big(A(\theta)\big)^{-1} = A(-\theta)$. Se sabe también que por definición $\big(A(\theta)\big)^0 = I$. Y se deduce que para $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$.

— En términos geométricos $A(\theta)$ es la matriz de rotación de ángulo θ (centrada en el origen). Se viene de demostrar que si se compone una rotación de ángulo θ, con un ángulo de rotación θ', entonces se tiene un ángulo de rotación $\theta+\theta'$.

Solución del ejercicio 1302 ▲001063

Denotemos E_{ij} la matriz elemental (ceros en todas partes excepto el coeficiente 1 a la i-ésima fila y la j-ésima columna). Sea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$A \times E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

La única columna no nula es la j-ésima columna.

La traza es la suma de los elementos de la diagonal. Aquí el único elemento no nulo de la diagonal es a_{ji}, por lo tanto se deduce

$$\operatorname{tr}(A \times E_{ij}) = a_{ji}$$

(cuidado con la inversión de los índices).
Ahora tomemos dos matrices A,B tales que $\mathrm{tr}(AX)=\mathrm{tr}(BX)$, para toda matriz X. Entonces, para $X=E_{ij}$ se deduce que $a_{ji}=b_{ji}$. Se hace esto para todas las matrices elementales E_{ij}, con $1\leqslant i,j\leqslant n$, lo que implica $A=B$.

Solución del ejercicio 1303 ▲001064

Se denota $A=(a_{ij})$, $B={}^tA$ si los coeficientes son $B=(b_{ij})$, entonces por definición de la transpuesta se tiene $b_{ij}=a_{ji}$.
Luego se denota $C=A\times B$, entonces por definición del producto de matrices los coeficientes c_{ij} de C se obtiene por la fórmula :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

Aplicar esto con $B={}^tA$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}.$$

Y para un coeficiente de la diagonal se tiene $i=j$, por lo tanto

$$c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2.$$

Dado que la traza es la suma de los coeficientes de la diagonal, se tiene :

$$\mathrm{tr}(A\,{}^tA)=\mathrm{tr}(C)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}a_{ik}^2.$$

Si se cambia el índice k en j se obtiene

$$\mathrm{tr}(A\,{}^tA)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}^2.$$

Entonces esta traza es la suma de los cuadrados de todos los coeficientes.
Consecuencia : si $\mathrm{tr}(A\,{}^tA)=0$, entonces la suma de cuadrados $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}^2$ es nula por lo que cada cuadrado a_{ij}^2 es nulo. Así $a_{ij}=0$ (para todo i,j) dicho de otro modo A es la matriz nula.

Solución del ejercicio 1308 ▲001069

Sea $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vector tal que $AX=0$. Demostrar entonces que X es el vector nulo lo que significa que A es invertible.
Por reducción al absurdo se supone $X\neq 0$. Entonces, si i_0 es un índice tal que $|x_{i_0}|=\max\left\{|x_i|\mid i=1,\dots,n\right\}$, se tiene $|x_{i_0}|>0$. Pero entonces como $AX=0$, se tiene para todo $i=1,\dots,n$:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j=0$$

por lo tanto

$$|a_{i_0,i_0}x_{i_0}|=\left|-\sum_{j\neq i_0}a_{i_0,j}x_j\right|\leqslant\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|\cdot|x_j|\leqslant|x_{i_0}|\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$$

y, ya que $|x_{i_0}|>0$, se obtiene $|a_{i_0,i_0}|\leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$ contradiciendo las hipótesis del enunciado. Así $X=0$. Se ha entonces probado «$AX=0\Rightarrow X=0$» lo que equivale a A invertible.

Solución del ejercicio 1319 ▲001080

1. $A=\begin{pmatrix}-9&-18\\6&12\end{pmatrix}$
2. $U_n=A^nU_0$
3. Esto es la recta generada por $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. El rango es 1.
4. Esto es la recta generada por $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
5. Ce son dos vectores no colineales. Se tiene
$$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}.$$
6. Se tiene $A=PDP^{-1}$, por lo tanto $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-3^{n+1}&-2\cdot 3^{n+1}\\2\cdot 3^n&4\cdot 3^n\end{pmatrix}$.
7. Entonces
$$\begin{cases}x_n=-137\cdot 3^{n+1}-36\cdot 3^{n+1}\\y_n=274(3^n)+72\cdot 3^n\end{cases}$$

Solución del ejercicio 1320 ▲002442

1. Denotemos $C=AB$ y $D=BA$. Entonces por la definición del producto de matrices :
$$c_{ij}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}b_{kj},\qquad \text{por lo tanto } c_{ii}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}b_{ki}.$$
Así
$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}C=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ii}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}b_{ki}.$$
Igualmente
$$\operatorname{tr}(BA)=\operatorname{tr}D=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}b_{ik}a_{ki}.$$
Si en esta última fórmula se renombra el índice i por k y el índice k por i (son variables ficticias por lo que les damos el nombre que queremos) entonces se obtiene :
$$\operatorname{tr}(BA)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}b_{ki}a_{ik}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}b_{ki}=\operatorname{tr}(AB)$$
2. M y M' son semejantes por lo que existe una matriz de pasaje P tal que $M'=P^{-1}MP$, por lo tanto
$$\operatorname{tr}M'=\operatorname{tr}\left(P^{-1}(MP)\right)=\operatorname{tr}\left((MP)P^{-1}\right)=\operatorname{tr}(MI)=\operatorname{tr}M.$$

3. La traza también tiene la propiedad obvia que
$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B.$$
Fijar una base de E. Denotemos A la matriz de f en esta base y B la matriz de g en esta misma base. Entonces AB es la matriz de $f \circ g$ y BA es la matriz de $g \circ f$. Así la matriz de $f \circ g - g \circ f$ es $AB - BA$ Entonces
$$\mathrm{tr}(f \circ g - g \circ f) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0.$$

Solución del ejercicio 1322 ▲002444

Sean A, B tal que $B = P^{-1}AP$.

1. Se supone A invertible, entonces existe A' tal que $A \times A' = I$ y $A' \times A = I$. Denotemos entonces $B' = P^{-1}A'P$. Se tiene
$$B \times B' = \left(P^{-1}AP\right) \times \left(P^{-1}A'P\right) = P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)A'P = P^{-1}AA'P = P^{-1}IP = I.$$
Igualmente $B' \times B = I$. Entonces B es invertible con inversa B'.
2. Se supone que $A^n = I$. Entonces
$$\begin{aligned} B^n &= \left(P^{-1}AP\right)^n = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \\ &= P^{-1}IP = I. \end{aligned}$$
Entonces B es idempotente.
3. Si $A^n = (0)$, entonces el mismo cálculo anterior conduce a $B^n = (0)$.
4. Si $A = \lambda I$, entonces $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I \times P^{-1}P = \lambda I$ (porque la matriz λI conmuta con todas las matrices).

Solución del ejercicio 1333 ▲002774

Sobre todo, un vistazo a la matriz nos informa de dos cosas :
(a) A no es la matriz nula, entonces $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$;
(b) hay 3 filas, así $\mathrm{rg}(A) \leqslant 3$ (el rango es más pequeño que el número de columnas y el número de filas).

1. Demostrar de diferentes maneras que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Primer método : sub-determinante no nulo.** Se encuentra una submatriz 2×2 cuyo determinante es no nulo. Por ejemplo, la subo-matriz extraída de la esquina inferior izquierda verifica $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, por lo tanto $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   — **Segundo método : espacio vectorial generado por columnas.** Se sabe que la imagen de la aplicación lineal asociado a la matriz A es generado por los vectores columna. Y el rango es la dimensión de esta imagen. Se encuentra fácilmente dos columnas linealmente independientes : la segunda $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y la tercera $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ columna. Entonces $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.

— **Tercer método : espacio vectorial generado por las líneas.** Sucede que la dimensión del espacio vectorial generado por las líneas es igual a la dimensión del espacio vectorial generado por las columnas (pues $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$). Como la segunda y tercera fila son linealmente independientes entonces $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
Cuidado : ¡Las dimensiones de los espacios vectoriales generados son iguales, pero los espacios son diferentes !

2. Usando el último método : el rango es exactamente 2 si la primera recta está en el subespacio generado por las otras dos. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = 2 &\iff (a,2,-1,b) \in \mathrm{Vect}\big\{(3,0,1,-4),(5,4,-1,2)\big\} \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad (a,2,-1,b) = \lambda(3,0,1,-4)+\mu(5,4,-1,2) \\
&\iff \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 3\lambda+5\mu = & a \\ 4\mu = & 2 \\ \lambda-\mu = & -1 \\ -4\lambda+2\mu = & b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ b = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusión, el rango de A es 2 si $(a,b) = (1,3)$. Si no el rango de A es 3.

Solución del ejercicio 1336 ▲003359

2. Si $A,B \in \mathscr{D}$ y $AB = I$, entonces para $i \neq j$, $\forall k$, $a_{ik}b_{kj} = 0$. Sea $a_{i1} \neq 0$: entonces $b_{1j} = 0$, para todo $j \neq i$, por lo tanto $a_{i1} = b_{1i} = 1$. Entonces cada columna de A contiene $n-1$ veces 0 y una vez 1. A es invertible $\Rightarrow A$ es una matriz de permutación.

Solución del ejercicio 1338 ▲003393

1.

2. $X = \begin{pmatrix} \alpha & 1+\beta \\ -2\alpha & 1-2\beta \\ 1+\alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1339 ▲003394

$B = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1340 ▲003395

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_n^2 & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1342 ▲003397

1. $\begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{pmatrix}$, con $\begin{cases} a = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k + (n-1)(-1)^k\right) \\ b = \frac{1}{n}\left((2n-1)^k - (-1)^k\right). \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2+k & \frac{1}{3}(4k^3+6k^2+2k) \\ 0 & 1 & 2k & 2k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\right]^k = (x^2+y^2+z^2)^{k-1}A.$

Solución del ejercicio 1343 ▲005258

Sean x e y dos reales.

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} y & \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} y & \operatorname{ch} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y & \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x+y) & \operatorname{sh}(x+y) \\ \operatorname{sh}(x+y) & \operatorname{ch}(x+y) \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

y $A(x)$ es invertible con inversa $A(-x)$. También se tiene, para n entero natural no nulo dado :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)\cdots A(x) = A(x+x+\cdots+x) = A(nx),$$

lo que queda claro para $n=0$, pues $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. En fin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalmente,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(nx) & \operatorname{sh}(nx) \\ \operatorname{sh}(nx) & \operatorname{ch}(nx) \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1344 ▲005262

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^p$ de matriz A en la base canónica $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^p$. Para $1 \leqslant k \leqslant p$, se tiene $f(e_k) = e_{p+1-k}$ y entonces $f^2(e_k) = e_k$. Así, $A^2 = I_p$. Pero entonces, es inmediato que, para n entero natural dado, $A^n = I_p$ si n es par y $A^n = A$ si n es impar.

Solución del ejercicio 1345 ▲005263

Para $x \in]-1,1[$, se escribe $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Se define así $G = \{M(x),\ x \in]-1,1[\}$. Sea entonces $x \in]-1,1[$. Se define $a = \operatorname{argth} x$ de manera que $x = \operatorname{th} a$. Se tiene

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ch} a \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{th} a \\ \operatorname{th} a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}.$$

Se pone, para $a \in \mathbb{R}$, $N(a) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}$. Se tiene así $\forall x \in]-1,1[$, $M(x) = N(\operatorname{argth} x)$ o también, $\forall a \in \mathbb{R}$, $N(a) = M(\operatorname{th} a)$. Así, $G = \{N(a),\ a \in \mathbb{R}\}$. Sea entonces $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & \operatorname{sh} a \\ \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} b & \operatorname{sh} b \\ \operatorname{sh} b & \operatorname{ch} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b & \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \\ \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a+b) & \operatorname{sh}(a+b) \\ \operatorname{sh}(a+b) & \operatorname{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Demostrar entonces que G es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$. $N(0) = I_2 \in G$ y entonces G es no vacío.
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\det(N(a)) = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1 \neq 0$ y entonces $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a)N(b) = N(a+b) \in G$.
$\forall a \in \mathbb{R}$, $(N(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & -\operatorname{sh} a \\ -\operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix} = N(-a) \in G$.
Se ha demostrado que G es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

Solución del ejercicio 1346 ▲005611

Por hipótesis, $a_{i,j} = 0$, para $j \leqslant i+r-1$ y $bi, j = 0$, para $j \leqslant i+s-1$.
Sean i y j dos índices tales que $j \leqslant i+r+s-1$. El coeficiente fila i, columna j, de AB vale $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.
En esta suma, si $k \leqslant i+r-1$, $a_{i,k} = 0$. Si no $k \geqslant i+r$ y entonces $j \leqslant i+r+s-1 \leqslant k+s-1$ y en este caso $b_{k,j} = 0$.
Finalmente, el coeficiente línea i, columna j, de AB es nula si $j \leqslant i+r+s-1$.

Solución del ejercicio 1349 ▲005257

1. Sea $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. $MX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $u(2i-3j+5k) = i+2j-3k$.

2. Sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -3x-y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=x. \end{cases}$$

Entonces, $\ker u = \operatorname{vect}(i-2j+k)$. En particular, $\dim(\ker u) = 1$ y, de acuerdo con teorema de rango, $\operatorname{rg} u = 2$. Por tanto, $u(j) = i-j$ y $u(k) = j+k$ son dos vectores no colineales de $\operatorname{Im} u$ que es un plano vectorial y por lo tanto, $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(i-j, j-k)$.

3. $$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

4. $\ker u^2$ es obviamente el plano de ecuación $x+y+z=0$. Una base en $\ker u^2$ es $(i-j, j-k)$ y entonces $\ker u^2 = \operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(i-j, j-k)$.
Por el teorema del rango, $\operatorname{Im} u^2$ es una recta vectorial. Pero $u^3 = 0$ se escribe aún $u \circ u^2 = 0$, y entonces $\operatorname{Im} u^2$ está contenido en $\ker u$ que es una recta vectorial. Entonces, $\operatorname{Im} u^2 = \ker u = \operatorname{vect}(i-2j+k)$.
5. $(I-M)(I+M+M^2) = I - M^3 = I$. Así, $I-M$ es invertible a la derecha y por lo tanto, invertible y
$$(I-M)^{-1} = I+M+M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1350 ▲005260

1. Para P elemento de $\mathbb{R}_n[X]$,
$$f(P) = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' = e^{X^2}(P'e^{-X^2} - 2XPe^{-X^2}) = P' - 2XP.$$
Así, si P es un polinomio de grado menor o igual que n, $f(P) = P' - 2XP$ es un polinomio de grado menor o igual que $n+1$, y f es de hecho una aplicación de $\mathbb{R}_n[X]$ en $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Además, para $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ y $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, se tiene :
$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$
f es elemento de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
2. La matriz A buscada es un elemento de $\mathscr{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$. Para $k=0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$ y para $1 \leqslant k \leqslant n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. Se tiene entonces :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. Sea $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $f(P) = 0$. Si P no es nulo, $-2XP$ en un grado estrictamente mayor que P' y entonces $f(P)$ no es nulo. Así, $\ker f = \{0\}$ (f es, por lo tanto inyectiva) y por el teorema del rango, $\operatorname{rg} f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 0 = n+1$, lo que demuestra que $\operatorname{Im} f$ no es $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (f no es sobreyectiva).

Solución del ejercicio 1351 ▲005269

1.
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{rg}(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1))$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{rg}(C_1, C_2, C_3 - C_2))$$

Si $m = \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 2$ (se observa entonces que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) y si $m \neq \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 3$ y A es invertible.

2. $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$, $(\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1))$

1er caso. si a, b y c son dos a dos distintos.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si a, b y c son dos a dos distintos entonces $\text{rg}A = 3$.

2o caso. Si $b = c \neq a$ (o $a = c \neq b$ o $a = b \neq c$). A tiene el mismo rango que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, si $b = c \neq a$ o $a = c \neq b$ o $a = b \neq c$, $\text{rg}A = 2$.

3o caso. Si $a = b = c$, es claro desde el principio que A es de rango 1.

3. Porque $\text{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{rg}(C_1, C_2 - aC_1, C_3 - C_1, C_4 - bC_1)$,

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

1er caso. Si $a \neq b$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}A &= 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(L_1, L_2, L_3) = \text{rg}(L_2, L_1, L_3)). \\
&= 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} \\
&= 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab)-(2-a^2-ab) \end{pmatrix} \\
&= 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (a-b)(a+b) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $|a| \neq |b|$, $\text{rg}A = 4$ y si $a = -b \neq 0$, $\text{rg}A = 3$.

2o caso. Si $a = b$.

$$\text{rg}A = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

Si $a = b = \pm 1$, $\text{rg}A = 1$ y si $a = b \neq \pm 1$, $\text{rg}A = 2$.

4. Para $n \geqslant 2$ y $j \in \{1,\dots,n\}$, se denota C_j la j-ésima columna de la matriz proposée.

$$C_j = (i+j+ij)_{1\leqslant i\leqslant n} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n} + j(i+1)_{1\leqslant i\leqslant n} = jU+V,$$

con $U = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ \vdots\\ i+1\\ \vdots\\ n+1 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ n \end{pmatrix}$. Así, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $C_j \in \mathrm{vect}(U,V)$, lo que demuestra que $\mathrm{rg}A \leqslant 2$. Además, la matriz extraída $\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (filas y columnas 1 y 2) es invertible y finalmente $\mathrm{rg}A = 2$.

5. Se supone $n \geqslant 2$. La j-ésima columna de la matriz se escribe

$$C_j = (\mathrm{sen}\, i \cos j + \mathrm{sen}\, j \cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{sen}\, jC + \cos jS \text{ con } C = (\cos i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ y } S = (\mathrm{sen}\, i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Así, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, $C_j \in \mathrm{vect}(C,S)$, lo que demuestra que $\mathrm{rg}A \leqslant 2$. Además, la matriz extraída formada por los términos filas y columnas 1 y 2 es invertible porque su determinante es $\mathrm{sen}\,2\,\mathrm{sen}\,4 - \mathrm{sen}^2 3 = -0,7... \neq 0$ y finalmente $\mathrm{rg}A = 2$.

6. Determinar $\ker A$. Sea $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker A \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ ax_i + bx_{i+1} = 0 \text{ y} bx_1 + ax_n = 0\ (S).$$

1er caso. Si $a = b = 0$, entonces claramente $\mathrm{rg}A = 0$.
2o caso. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}\ x_i = 0$. En este caso, $\ker A = \{0\}$ y entonces $\mathrm{rg}A = n$.
3o caso. Si $a \neq 0$. Se define $\alpha = -\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}(S) &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n-1\},\ x_k = \alpha x_{k+1} \text{ y } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = \alpha^{-(k-1)} x_1 \text{ y } x_n = \alpha x_1\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\},\ x_k = \alpha^{k-1} x_1 \text{ y } \alpha^n x_1 = x_1\end{aligned}$$

Pero entonces, si $\alpha^n \neq 1$, el sistema (S) admite la única solución $(0,\dots,0)$ y $\mathrm{rg}A = n$, y si $\alpha^n = 1$, $\ker A = \mathrm{vect}((1,\alpha^{n-1},\dots,\alpha^2,\alpha))$ es de dimensión 1 y $\mathrm{rg}A = n-1$.

En resumen, si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}A = 0$ y si $a = 0$ y $b \neq 0$, $\mathrm{rg}A = n$. Si $a \neq 0$ y $-\frac{b}{a} \in U_n$, $\mathrm{rg}A = n-1$ y si $a \neq 0$ y $-\frac{b}{a} \notin U_n$, $\mathrm{rg}A = n$.

Solución del ejercicio 1352 ▲005603

(De hecho, es un ejercicio sobre los polinomios de TCHEBYCHEV de 1era especie y se puede generalizar este ejercicio pasando al formato n en lugar de tamaño 4.)
Si se denota C_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, la j-ésima columna de A, entonces $C_j = (\cos(i+j-2)a)_{1\leqslant i\leqslant 4}$, luego para j elemento de $\{1,2\}$,

$$C_{j+2} + C_j = (2\cos(i+j-1)a\cos a)_{1\leqslant i\leqslant 4} = 2\cos aC_{j+1}$$

y entonces $C_3 = 2\cos aC_2 - C_1 \in \mathrm{vect}(C_1,C_2)$ y $C_4 = 2\cos aC_3 - C_2 \in \mathrm{vect}(C_2,C_3) \subset \mathrm{vect}(C_1,C_2)$.
Así $\mathrm{vect}(C_1,C_2,C_3,C_4) = \mathrm{vect}(C_1,C_2)$ y $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(C_1,C_2) \leqslant 2$.

Finalmente, $\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) \\ \cos(a) & \cos(2a) \end{vmatrix} = \cos(2a) - \cos^2 a = \cos^2 a - 1 = -\operatorname{sen}^2 a$.
• Si a no está en $\pi\mathbb{Z}$, este determinante no es nulo y por lo tanto, las dos primeras columnas no son colineales. En este caso, $\operatorname{rg} A = 2$.
• Si a está en $\pi\mathbb{Z}$, la primera columna no es nula y las otras columnas son colineales con ella. En este caso, $\operatorname{rg} A = 1$.

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 2 \text{ si } a \notin \pi\mathbb{Z} \text{ y } \operatorname{rg}(A) = 1 \text{ si } a \in \pi\mathbb{Z}.}$$

Solución del ejercicio 1353 ▲005607

Para $j \in [\![1,n]\!]$, se denota C_j la j-ésima columna de la matriz A. Se define aún $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}$.

Para $j \in [\![1,n]\!]$, se tiene

$$Cj = (i + j(i+1))_{1 \leqslant i \leqslant n} = (i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + j(i+1)_{1 \leqslant i \leqslant n} = U + jV.$$

Entonces $\operatorname{vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \operatorname{vect}(U, V)$ y, en particular, $\operatorname{rg} A \leqslant 2$. Ahora, si $n \geqslant 2$, las dos primeras columnas de A no son colineales porque $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que, si $n \geqslant 2$, $\operatorname{rg} A = 2$ y si $n = 1$, $\operatorname{rg} A = 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2,\ \operatorname{rg}(i + j + ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 2 \text{ y si } n = 1,\ \operatorname{rg}(i + j + ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = 1.}$$

Solución del ejercicio 1354 ▲005622

Se denota r el rango de A. Si $r = 0$, A es nula y, por lo tanto B es nula.
Si no, existen dos matrices cuadradas invertibles P y Q de tamaño n tales que $A = PJ_rQ$, donde $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sean las matrices $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ y $Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$. Dado que se tiene $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ y $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$, las matrices P' y Q' son invertibles. Además, un cálculo por bloques muestra que

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J'_rQ', \text{ donde } J'_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matriz B es equivalente a la matriz J'_r y por lo tanto, tiene el mismo rango que J'_r. En fin, eliminando filas nulas y columnas nulas, se ve que la matriz J'_r tiene el mismo rango que la matriz I_{pr} a saber pr. En todos los casos, se ha demostrado que

$\boxed{\operatorname{rg} B = p \operatorname{rg} A.}$

Solución del ejercicio 1355 ▲005623

Sea r el rango de H. Existe dos matrices cuadradas invertibles P y Q de tamaño n tales que $H = PJ_rQ$, donde $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La igualdad $HAH = \lambda_A H$ se escribe luego de simplificaciones $J_rQAPJ_r = \lambda_A J_r$. Ahora, cuando A recorre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matriz $B = QAP$ también recorre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (por ejemplo, la aplicación que a A asociada QAP es una permutación de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de inversa la aplicación que a A asociada $Q^{-1}AP^{-1}$). El enunciado se escribe ahora de manera más simple : demostremos que $(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists \lambda_B \in \mathbb{K}/\ J_rBJ_r = \lambda_B J_r) \Rightarrow r \leqslant 1$. Un cálculo por bloques proporciona estableciendo $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$

$$J_rBJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero si $r \geqslant 2$, existen matrices cuadradas B_1 de tamaño r que no son matrices escalares y por lo tanto, tales que B_1 no es colineal con I_r. Entonces $r \leqslant 1$.

Solución del ejercicio 1356 ▲005624

(1) $\Rightarrow$ (2). $M^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} M \subset \ker M \Rightarrow \operatorname{rg} M \leqslant \dim(\ker M) = 3 - \operatorname{rg} M$ y entonces $\operatorname{rg} M \leqslant 1$.
Si $\operatorname{rg} M = 0$, entonces $\operatorname{tr} M = 0$. Se supone ahora que $\operatorname{rg} M = 1$ y entonces $\dim(\ker M) = 2$.
Sea e_1 un vector no nulo de $\operatorname{Im} M$, entonces existe un vector e_3 (no nulo) tal que $Me_3 = e_1$.
Se completa la familia libre (e_1) de $\operatorname{Im} M \subset \ker M$ en (e_1, e_2) base en $\ker M$. La familia (e_1, e_2, e_3) es una base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pues

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Rightarrow M(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0 \Rightarrow ce_1 = 0 \Rightarrow c = 0,$$

luego $a = b = 0$, porque la familia (e_1, e_2) es libre.
M es, por lo tanto semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, en particular $\operatorname{tr} M = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Si $\operatorname{rg} M = 0$, $M^2 = 0$.
Si $\operatorname{rg} M = 1$, se puede recordar la escritura general de una matriz de rango 1 : existen tres reales u_1, u_2 y u_3 no todos nulos y tres reales v_1, v_2 y v_3 no todo cero tales que $M = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{pmatrix}$ o aún existen dos vectores columna, ambos no nulos U y V tales que $M = U^tV$.
La igualdad $\operatorname{tr} M = 0$ proporciona $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ o aún ${}^tUV = 0$. Pero entonces

$$M^2 = U^tVU^tV = U^t({}^tUV)^tV = 0.$$

Este ejercicio admite soluciones mucho más breves con conocimientos sobre la reducción.

Solución del ejercicio 1363 ▲001087

La expresión de f en la base $\mathscr{B}$ es la siguiente $f(x,y) = (x-y, 0)$. Dicho de otra manera a un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se asocia el vector $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$. Se observa que f es de hecho una aplicación lineal. Esta expresión nos permite calcular las matrices solicitadas.

Observación : como $\mathscr{B}$ es la base canónica que se denota $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ que es el vector $x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$.

1. Cálculo de $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B})$. Como $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, la matriz se obtiene calculando $f(\overrightarrow{i})$ y $f(\overrightarrow{j})$:
$$f(\overrightarrow{i})=f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\overrightarrow{i}, \quad f(\overrightarrow{j})=f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}=-\overrightarrow{i},$$
por lo tanto
$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B})=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se guarda la misma aplicación lineal pero la base de partida cambia (la base de llegada permanece $\mathscr{B}$). Si se denota $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$, se tiene $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j},-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Se expresa $f(\overrightarrow{u})$ y $f(\overrightarrow{v})$ en la base de llegada $\mathscr{B}$.
$$f(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})=f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\overrightarrow{v})=f(-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j})=f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix},$$
por lo tanto
$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B})=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Siempre con el mismo f se toma $\mathscr{B}'$ como base de salida y llegada, se trata pues de expresar $f(\overrightarrow{u})$ y $f(\overrightarrow{v})$ en la base $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Se viene de calcular que
$$f(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})=f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=2\overrightarrow{i}, \quad f(\overrightarrow{v})=f(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j})=f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}=-5\overrightarrow{i}.$$
Pero falta obtener una expresión en función de la base $\mathscr{B}'$. Se observa que
$$\begin{cases} \overrightarrow{u}= & \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}= & -2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j} \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{i}= & 3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{j}= & 2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}. \end{cases}$$
Entonces
$$f(\overrightarrow{u})=f(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j})=2\overrightarrow{i}=6\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'},$$
$$f(\overrightarrow{v})=f(-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j})=-5\overrightarrow{i}=-15\overrightarrow{u}-5\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$$
Así
$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{B}')=\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$
Observación : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$ designa el vector $x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$.

Solución del ejercicio 1369 ▲001093

---

1. Se debe demostrar $\ker f\cap \mathrm{Im} f=\{0\}$ y $\ker f+\mathrm{Im} f=E$.
   (a) Si $x\in\ker f\cap\mathrm{Im} f$, entonces por un lado $f(x)=0$ y por otro lado existe $x'\in E$ tal que $x=f(x')$. Entonces $0=f(x)=f\big(f(x')\big)=f(x')=x$, por lo tanto $x=0$ (se ha usado $f\circ f=f$). Así $\ker f\cap\mathrm{Im} f=\{0\}$.

(b) Para $x \in E$ se reescribe $x = x - f(x) + f(x)$. Entonces $x - f(x) \in \ker f$ (pues $f\big(x - f(x)\big) = f(x) - f \circ f(x) = 0$) y $f(x) \in \operatorname{Im} f$. Por lo tanto $x \in \ker f + \operatorname{Im} f$. Así $\ker f + \operatorname{Im} f = E$.

(c) Conclusión : $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

2. Denotemos r el rango de f : $r = \dim \operatorname{Im} f$. Sea $\{e_1, \dots, e_r\}$ una base de $\operatorname{Im} f$ y sea $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ una base de $\ker f$. Como $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$, entonces $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de E.

   Para $i > r$, entonces $e_i \in \ker f$, por lo tanto $f(e_i) = 0$. Como $f \circ f = f$ así que para cualquier $x \in \operatorname{Im} f$ se tiene $f(x) = x$: de hecho, como $x \in \operatorname{Im} f$, existe $x' \in E$ tal que $x = f(x')$ así $f(x) = f\big(f(x')\big) = f(x') = x$. En particular, si $i \leqslant r$, entonces $f(e_i) = e_i$.

3. La matriz de f en la base $(e_1, \dots, e_n)$ es, por lo tanto :

$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

   donde I denota la matriz de identidad de tamaño $r \times r$ y los (0) denotan las matrices nulas.

Solución del ejercicio 1370 ▲001094

1. Es fácil ver que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, por lo tanto f es lineal, de más, P es un polinomio de grado $\leqslant n$, entonces $f(P)$ también.

2. Para $n = 3$, se calcula la imagen de cada uno de elementos de la base :

$$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0, \quad f(X) = (X+1) + (X-1) - 2X = 0,$$

$$f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = 6X.$$

   Entonces la matriz de f en la base $(1, X, X^2, X^3)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Para el caso general, se calcula

$$f(X^p) = (X+1)^p + (X-1)^p - 2X^p = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p = \sum_{\substack{p-k \text{ par} \\ k<p}} 2\binom{p}{k} X^k$$

   Entonces la matriz es

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2\binom{2}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{0} & 0 & \\
 & 0 & 0 & 2\binom{3}{1} & & 0 & 2\binom{p+1}{1} & \\
 & & 0 & 0 & \ddots & 2\binom{p}{2} & 0 & \\
 & & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} & \vdots \\
 & & & & \ddots & \vdots & 0 & \\
 & & & & & 0 & \vdots & \\
 & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

   En este ejemplo de matriz, p es par. Cada columna comienza con un valor nulo/no nulo alternado hasta el elemento diagonal (que es nulo).

3. Se sabe que $f(1) = 0$ y $f(X) = 0$, por lo tanto 1 y X están en el núcleo $\ker f$. Es también claro que las columnas de las matrices $f(X^2), \dots, f(X^n)$ son linealmente independientes (porque la matriz es escalonada). Entonces $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)\}$ y $\dim \operatorname{Im} f = n-1$. Por la fórmula de rango $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X]$, por lo tanto $\dim \ker f = 2$. Como ya se tiene dos vectores del núcleo, entonces $\ker f = \operatorname{Vect}\{1, X\}$.
4. (a) Sea $Q \in \operatorname{Im} f$. Existe por lo tanto $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tal que $f(R) = Q$. Se define entonces $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$. Se tiene todo hecho para que $P(0) = 0$ y $P'(0) = 0$. Además, por la linealidad de f y su núcleo entonces

$$f(P) = f\big(R(X) - R(0) - R'(0)X\big) = f\big(R(X)\big) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$

Entonces, el polinomio P sirve.

(b) Demostrar la unicidad. Sean P y $\tilde{P}$ tales que $f(P) = f(\tilde{P}) = Q$, con $P(0) = P'(0) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(0)$. Entonces $f(P - \tilde{P}) = Q - Q = 0$, por lo tanto $P - \tilde{P} \in \ker f = \operatorname{Vect}\{1, X\}$. Así $P - \tilde{P}$ se escribe $P - \tilde{P} = aX + b$. Pero como $(P - \tilde{P})(0) = 0$, entonces $b = 0$, y como $(P - \tilde{P})'(0) = 0$, se tiene $a = 0$. Esto demuestra que $P = \tilde{P}$.

Solución del ejercicio 1373 ▲001097

---

1. Se denota la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. La matriz $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ se compone de los vectores columna $\phi(e_i)$, se sabe

$$\phi(e_1) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \quad \phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}, \quad \phi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}},$$

por lo tanto
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de ϕ (o el de A) es el conjunto de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $AX = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Así $\ker \phi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3)$. El núcleo es, por lo tanto de dimensión 1.

2. Se aplica el pivote de Gauss como si es un sistema lineal :

$$\begin{cases} e_1 \qquad - e_3 = f_1 & L_1 \\ e_1 - e_2 \qquad = f_2 & L_2 \\ -e_1 + e_2 + e_3 = f_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 \qquad - e_3 = f_1 & \\ - e_2 + e_3 = f_2 - f_1 & L_2 - L_1 \\ e_2 \qquad = f_3 + f_1 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

Se deduce
$$\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3. \end{cases}$$
Así todos los vectores de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ se expresan en función de (f_1, f_2, f_3), así la familia (f_1, f_2, f_3) es generatriz. Como ella tiene exactamente 3 elementos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3, entonces $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ es una base.

3. $\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$,
   $\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$
   $\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$.
   Entonces, en la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, se tiene
   $$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \quad , \quad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} \quad , \quad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} .$$
   Entonces la matriz de ϕ en la base $\mathscr{B}'$ es
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   ϕ es la proyección sobre $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, paralelamente a $\mathrm{Vect}(f_1)$ (en otras palabras, es la proyección en el plano de la ecuación $(x' = 0)$, paralelamente al eje de las x', esto en la base $\mathscr{B}'$).
4. P es la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ hacia $\mathscr{B}'$. En efecto, la matriz de pasaje contiene -en columnas- las coordenadas de vectores de la nueva base $\mathscr{B}'$ expresados en la antigua base $\mathscr{B}$. Si un vector tiene coordenadas X en la base $\mathscr{B}$ y X' en la base $\mathscr{B}'$, entonces $PX' = X$ (cuidado con el orden). Y si A es la matriz de ϕ en la base $\mathscr{B}$ y B es la matriz de ϕ en la base $\mathscr{B}'$, entonces
   $$B = P^{-1}AP.$$
   (Una matriz de pasaje entre dos bases es invertible.)
   Aquí se calcula la inversa de P :
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{por lo tanto} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Se reencuentran por lo tanto, los mismos resultados que anteriormente.

Solución del ejercicio 1374 ▲001098

Pongamos : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_{3,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_{4,\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Denotemos $\varphi_{\alpha,\beta}$ la aplicación lineal asociado a $M_{\alpha,\beta}$ y $F = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2\}$. Por definición de la matriz asociada a una aplicación lineal, $\mathrm{Im}(\varphi_{\alpha,\beta}) = \mathrm{Vect}\,\{e_1, e_2, e_{3,\alpha}, e_{4,\beta}\}$. En particular, $F \subset \mathrm{Im}(\varphi_{\alpha,\beta})$. Como e_1 y e_2 son linealmente independientes, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) \geqslant 2$. Así $\varphi_{\alpha,\beta}$ es sobreyectiva si y solo si uno de los dos vectores $e_{3,\alpha}$ o $e_{4,\beta}$ no pertenece a F.

En este caso en efecto, $\mathrm{rg}(\varphi_{\alpha,\beta}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Por lo tanto $e_{3,\alpha}$ y $e_{4,\beta}$ pertenecen a F si y solo si existen $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ tales que : $e_{3,\alpha} = \lambda e_1 + \mu e_2$ y $e_{4,\beta} = \lambda' e_1 + \mu' e_2$. Un pequeño cálculo demuestra que $\varphi_{\alpha,\beta}$ no es sobreyectiva si y solo si $\alpha = 22$ y $\beta = 4$. Entonces $\varphi_{\alpha,\beta}$ es sobreyectiva si y solo si $\alpha \neq 22$ o $\beta \neq 4$.

Solución del ejercicio 1375 ▲001099

1. (a) Comenzar por observaciones elementales : la matriz es no nulo por lo tanto $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$ y como hay $p = 4$ filas y $n = 3$ columnas entonces $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p) = 3$.
   (b) Luego se va a demostrar $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$; en efecto, el sub-determinante 2×2 (extraída de la esquina superior izquierda) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ es no nulo.
   (c) Demostrar que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Con los determinantes es necesario verificar que para todas las sub-matrices 3×3, los determinantes son nulos. Para evitar numerosos cálculos se nota aquí que las columnas son ld para la relación $v_2 = v_1 + v_3$. Así $\mathrm{rg}(A) = 2$.
   (d) La aplicación lineal asociada a la matriz A es la aplicación $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Y el teorema de rango $\dim\ker f_A + \dim \mathrm{Im}\, f_A = \dim \mathbb{R}^3$, da aquí $\dim\ker f_A = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$. Pero la relación $v_2 = v_1 + v_3$ da inmediatamente, un elemento del núcleo : que se escribe $v_1 - v_2 + v_3 = 0$, entonces $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Así $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker f_A$, y como el núcleo es de dimensión 1, tenemos
$$\ker f_A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (e) Para una base de la imagen, que es de dimensión 2, es suficiente por ejemplo tomar los dos primeros vectores columna de la matriz A (son claramente no colineales) :
$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Se hace el mismo trabajo con B y f_B.
   (a) Matriz no nula con 4 filas y 4 columnas, por lo tanto $1 \leqslant \mathrm{rg}(B) \leqslant 4$.
   (b) Como el sub-determinante (de la esquina superior izquierda) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$ es no nulo, entonces $\mathrm{rg}(B) \geqslant 2$.
   (c) Y lo mismo con el sub-determinante 3×3 :
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$
   que es no nulo, o sea $\mathrm{rg}(B) \geqslant 3$.

(d) Ahora se calcula el determinante de la matriz B y se encuentra $\det B = 0$, por lo tanto $\operatorname{rg}(B) < 4$. Conclusión $\operatorname{rg}(B) = 3$. Por el teorema de rango entonces $\dim \ker f_B = 1$.

(e) Esto significa que las columnas (y también las líneas) son ld, como no es claro encontrar la relación que nos ocupa resolvemos el sistema $BX = 0$, para encontrar esta relación ; dicho de otro modo :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o aún} \quad \begin{cases} 2x+2y-z+7t=0 \\ 4x+3y-z+11t=0 \\ -y+2z-4t=0 \\ 3x+3y-2z+11t=0. \end{cases}$$

Después de resolver este sistema se tiene que las soluciones se escriben $(x,y,z,t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Y así

$$\ker f_B = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y para una base de la imagen es suficiente, por ejemplo, tomar los 3 primeros vectores columna v_1, v_2, v_3 de la matriz B, porque son linealmente independientes :

$$\operatorname{Im} f_B = \operatorname{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución del ejercicio 1376 ▲001100

$\mathscr{L}(E)$ es isomorfo a $M_n(\mathbb{R})$, entonces es de dimensión finita n^2. La familia $\{\mathrm{Id}_E, \varphi, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte n^2+1 vectores por lo tanto es ld es decir : existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}$ en $\mathbb{R}$, no todos nulos y tales que $\lambda_0 id_E + \lambda_1 \varphi + \cdots + \lambda_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$. El polinomio $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$ responde, por lo tanto a la pregunta.

Solución del ejercicio 1377 ▲001101

Se asocia a la matriz A su aplicación lineal natural f. Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $f(e_1)$ es dado por el primero vector columna, $f(e_2)$ por el segundo, etc. Entonces aquí

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, \; f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1}, \dots \quad \text{y en general } f(e_i) = e_{n+1-i}$$

Calculemos lo que vale la composición $f \circ f$. Como una aplicación lineal está definida por las imágenes de los elementos de una base, entonces se calcula $f \circ f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, aplicando la fórmula anterior dos veces :

$$f \circ f(e_i) = f\big(f(e_i)\big) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i.$$

Como $f \circ f$ deja invariantes todos los vectores de la base, entonces $f \circ f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. O sea $f \circ f = \mathrm{Id}$. Se deduce $f^{-1} = f$ y que la composición iterada verifica $f^p = \mathrm{Id}$ si p es par y $f^p = f$ si p es impar. Conclusión : $A^p = I$ si p es par y $A^p = A$ si p es impar.

Solución del ejercicio 1380 ▲001104

1. Denotemos P la matriz de pasaje de la base canónica $\mathscr{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ hacia (que va a ser) la base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2)$. Es la matriz compuesta por los vectores columna e_1 y e_2 :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\det P = -4 \neq 0$, por lo tanto P es invertible y así $\mathscr{B}'$ es una base. Entonces la matriz de f en la base $\mathscr{B}'$ es :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Es muy fácil calcular la potencia de una matriz diagonal :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}.$$

Como $A = PBP^{-1}$ se va a deducir A^n :

$$A^n = \big(PBP^{-1}\big)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}.$$

3. si se denota $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces las ecuaciones verificadas por las sucesiones se escriben en términos matriciales :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Si se notan las condiciones iniciales $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces $x_n = A^nX_0$. Se deduce

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{4}\Big((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0\Big) \\ y_n = \frac{1}{4}\Big((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0\Big). \end{cases}$$

Solución del ejercicio 1383 ▲002565

Sea $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ una matriz cuadrada $n \times n$. Se quiere demostrar el siguiente resultado debido a Hadamard : Se supone que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

entonces A es invertible.

1. *Demostrar el resultado de $n = 2$.*

   En este caso, la matriz A se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

   y las hipótesis se convierten

$$|a_{11}| > |a_{12}| \text{ y } |a_{22}| > |a_{21}|.$$

   La matriz A es invertible si y solo si su determinante es no nulo, por lo que

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

   y, dadas las hipótesis,

$$|a_{11}a_{22}| = |a_{11}||a_{22}| > |a_{12}||a_{21}| = |a_{12}a_{21}|,$$

   se tiene $|a_{11}a_{22}| > |a_{12}a_{21}|$, por lo tanto $a_{12}a_{21} \neq a_{12}a_{21}$ y el determinante es no nulo.

2. Sea B, la matriz obtenida reemplazando, para $j \geqslant 2$, cada columna c_j de A por la columna

$$c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} c_1,$$

   Calculemos los b_{ij} en función de los a_{ij}. Demostrar que si los coeficientes de A satisfacen las desigualdades anteriores, entonces para $i \geqslant 2$, se tiene

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}|.$$

   Se tiene

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{11}}{a_{i1}} \quad \text{si} \quad j \geqslant 2 \;\text{ y }\; b_{i1} = a_{i1}.$$

   Por la desigualdad triangular, se tiene

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |b_{ij}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}| \leqslant \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{1j}||a_{11}|}{|a_{i1}|} = \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |a_{1j}|.$$

   Pero, por hipótesis, para $i = 1$, se tiene

$$\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}|,$$

   por lo tanto

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|.$$

   De donde, reemplazando en la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |b_{ij}| < \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |a_{ij}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}| < |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|a_{1i}| \\ \leqslant \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| = |b_{ii}|. \end{aligned}$$

3. *Probar el resultado de Hadamard para n cualquiera.*
Sea $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ una matriz cuadrada $n\times n$, verificando para todo $i\in\{1,\dots,n\}$,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Se quiere demostrar que A es invertible.
El resultado es cierto para $n=2$, de acuerdo a la pregunta 1). Sea n arbitrario fijo, se supone que el resultado es verdadero para $n-1$ y se quiere demostrarlo para n.
Se tiene $\det A = \det B$, donde B es la matriz construida en la pregunta 2)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \left((b_{ij})_{(2\leqslant i,j\leqslant n)}\right) & \\ a_{n1} & & & \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $(b_{ij})_{(2\leqslant i,j\leqslant n)}$ es una matriz cuadrada de orden $n-1$ que verifica las hipótesis de Hadamard, de acuerdo a la pregunta 2). Por lo tanto, es invertible por la hipótesis de inducción. Y, en consecuencia, la matriz A es invertible porque $a_{11}\neq 0$.

Solución del ejercicio 1384 ▲002585

Sean A y B de matrices no nulas de $M_n(\mathbb{R})$. Se supone que $A\cdot B = \mathbf{0}$.

1. Demostrar que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$. Sea $y\in \operatorname{Im} B$, existe $x\in\mathbb{R}^n$ tal que $y = Bx$, de donde $Ay = ABx = 0$, así $y\in\ker A$, lo que prueba la inclusión.
2. Se supone que el rango de A es igual a $n-1$, determinar el rango de B. Se tiene $\operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Im} B$ y se sabe que $\dim \operatorname{Im} A + \dim\ker A = n$, en consecuencia, si $\operatorname{rg} A = n-1$ se tiene $\dim\ker A = 1$ y la inclusión $\operatorname{Im} B\subset \ker A$ implica $\dim \operatorname{Im} B\leqslant 1$, y como B se supone no nula, se tiene $\dim\operatorname{Im} B = 1 = \operatorname{rg} B$.

Solución del ejercicio 1387 ▲003407

1. $\phi(P) = (-X-1)^{n-1}P\left(-\frac{1}{X+1}\right)$.
2. I.

Solución del ejercicio 1388 ▲005261

f no es nula y por lo tanto, $\dim(\ker f)\leqslant 2$. Porque $f^2=0$, $\operatorname{Im} f\subset\ker f$. En particular, $\dim(\ker f)\geqslant \operatorname{rg} f = 3-\dim(\ker f)$ y $\dim(\ker f)\geqslant \frac{3}{2}$.
Finalmente, $\dim(\ker f) = 2$. $\ker f$ es un plano vectorial y $\operatorname{Im} f$ es una recta vectorial contenida en $\ker f$. f no es nulo y por lo tanto, existe e_1 tal que $f(e_1)\neq 0$ (y, en particular $e_1\neq 0$). Se define $e_2 = f(e_1)$. Porque $f^2=0$, $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$ y e_2 es un vector no nulo de $\ker f$. Por el teorema de base incompleta, existe un vector e_3 de $\ker f$ tal que (e_2,e_3) sea una base de $\ker f$.
Demostrar que (e_1,e_2,e_3) es una base de $\mathbb{R}^3$.
Sea $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3 = 0 \Rightarrow f(\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3) = 0 \Rightarrow \alpha e_2 = 0\Rightarrow \alpha = 0 \text{ (pues } e_2\neq 0).$$

Después, como $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, se obtiene $\beta = \gamma = 0$ (porque la familia (e_2, e_3) es libre). Finalmente, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y se ha demostrado que (e_1, e_2, e_3) es libre. Como esta familia es de cardinal 3, es una base de $\mathbb{R}^3$. En esta base, la matriz A de f se escribe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1389 ▲007411

1. $$A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -6 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Para demostrar que los vectores v_1, v_2 y v_3 forman un sistema libre de $\mathbb{R}^3$, se considera λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0,$$
y se quiere demostrar que entonces necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Esto equivale a demostrar que el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
tiene la única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego se aplica el algoritmo de Gauss a la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Después de escalonar completamente esta matriz, se obtiene el siguiente sistema equivalente
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
que tiene la única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Los vectores v_1, v_2 y v_3 forman así un sistema libre de 3 elementos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, que es de dimensión 3, por lo tanto forman un sistema que también genera $\mathbb{R}^3$ y es una base de $\mathbb{R}^3$.

3. La matriz de pasaje $P := [\mathrm{Id}_{R^3}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ es
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matriz de pasaje $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}$ es la inversa de la matriz de pasaje $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ i.e. $[\mathrm{Id}_{R^3}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P^{-1}$. Para calcular la inversa de P, se aplica el algoritmo de Gauss a la matriz
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Para hacer esto, se toman las operaciones realizadas sobre la matriz P en la pregunta anterior para obtener

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

y así

$$[\mathrm{Id}_{R^3}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Se utiliza la fórmula

$$[f]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}'} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$$

   y se tiene entonces

$$M = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Se tiene

$$A = PMP^{-1},$$

   por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} A^n = PM^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n+2.3^n & -2^n+3^n & -2^n+3^n \\ -2.3^n+2.5^n & -3^n+2.5^n & -3^n+5^n \\ 2.2^n-2.5^n & 2.2^n-2.5^n & 2.2^n-5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 1390 ▲007412

1. Sea $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Como la derivación es una aplicación lineal se tiene :

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).$$

   Φ es una aplicación lineal. Examinar la imagen de los vectores de base $(1, X, X^2)$ por Φ :

$$\Phi(1)(X) = 2X+1, \qquad \Phi(X)(X) = X^2+X+1, \qquad \Phi(X^2)(X) = X^2+2X.$$

   por lo tanto $\Phi(X^j) \in \mathbb{R}_2[X]$, para $j \in \{0,1,2\}$. Es un endomorfismo.

2. Aplicando la pregunta anterior, se tiene :

$$[\Phi]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \left[[\Phi(1)]_{\mathscr{B}} \,|\, [\Phi(X)]_{\mathscr{B}} \,|\, [\Phi(X^2)]_{\mathscr{B}}\right] = A$$

3. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\Phi)$. Se aplica un método de Gauss a la matriz A :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

4. Como rg $A = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, la aplicación Φ es sobreyectiva. La matriz A es cuadrada por lo que al aplicar el teorema del rango, es también inyectiva, por lo tanto biyectiva.
5. El núcleo está dado por :

$$\ker(A - I_3) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tales que}\,(A - I_3)^t(x,y,z) = 0\right\}.$$

$$(A - I_3)^t(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad 2x = -2z.$$

Así $\ker(A - I_3) = \{(x,0,-x),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1,0,-1))$. $(-1,0,1)$ es una base de $\ker(A - I_3)$. Una base en $\ker(\Phi - I_d)$ es, por lo tanto : $X^2 - 1$.
6. Por el teorema del rango : $\dim \text{Im}(\Phi - \text{Id}) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker(\Phi - \text{Id}) = 3 - 1 = 2$. Queda por determinar una base de la imagen.

$$\begin{aligned}
\text{Im}(A - I_3) &= \left\{(A - I_3)^t(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{(y, 2(x+z), y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\
&= \left\{(y,x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(1,0,1) + x(0,1,0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \text{vect}((1,0,1),\ (0,1,0)).
\end{aligned}$$

La familia $((1,0,1),\ (0,1,0))$ es una familia generatriz de la imagen que es de dimensión 2. Es por lo tanto una base. Se deduce que una base de $\ker(\Phi - \text{Id})$ es $((X^2 + 1), X)$.
7. Se tiene la igualdad conjuntista :

$$\begin{aligned}
\left\{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{tales que } 2X\,P = (X^2 - 1)\,P'\right\} &= \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \text{tales que}\,(\Phi - \text{Id})P = 0\} \\
&= \ker(\Phi - \text{Id}).
\end{aligned}$$

Pero una base de $\ker(\Phi - \text{Id})$ es $X^2 - 1$. Así se tiene :

$$\left\{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{tales que } 2X\,P = (X^2 - 1)\,P'\right\} = \mathbb{R}(X^2 - 1).$$

Solución del ejercicio 1393 ▲003362

1.
2. $M^{-1} = \dfrac{-a}{b(na+b)}U + \dfrac{1}{b}I.$
3.
4. $M^n = \dfrac{(na+b)^n - b^n}{n}U + b^n I \Rightarrow \begin{cases} n \text{ par} & : a = 0, \text{ o } -\frac{2b}{n},\ b = \pm 1 \\ n \text{ impar} & : a = 0,\ b = 1. \end{cases}$

Solución del ejercicio 1394 ▲003365

1.

2. $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$

Solución del ejercicio 1396 ▲003376

1.

2. Si A es diagonal : $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $a_{k\ell} \neq 0 : M = I - \frac{\operatorname{tr} A}{a_{k\ell}} E_{\ell k}$.

Solución del ejercicio 1397 ▲003380

Antes de comenzar la resolución haremos un comentario importante : para $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector (considerado como una matriz de una sola columna) entonces vamos a calcular ${}^tXX$:

$$ {}^tXX = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. $$

Se denota $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ es la *norma* o la *longitud* del vector X. De este cálculo se deduce, por un lado que ${}^tXX \geqslant 0$. Y también que ${}^tXX = 0$ si y solo si x es el vector nulo.

1. Demostrar que $I+M$ es invertible mostrando que si un vector X verifica $(I+M)X = 0$, entonces $X = 0$. Estimar ${}^t(MX)(MX)$ de dos maneras. Por una parte, es un producto de la forma ${}^tYY = \|Y\|^2$ y entonces ${}^t(MX)(MX) \geqslant 0$. Por otra parte :

$$ \begin{aligned} {}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) && \text{pues } (I+M)X = 0, \text{ por lo tanto } MX = -X \\ &= {}^tX\,{}^tM(-X) && \text{pues } {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \\ &= {}^tX(-M)(-X) && \text{pues } {}^tM = -M \\ &= {}^tXMX \\ &= {}^tX(-X) \\ &= -{}^tXX \\ &= -\|X\|^2 \end{aligned} $$

   que es, por lo tanto negativo.
   La única posibilidad es $\|X\|^2 = 0$, por lo tanto $X = 0$ (= el vector nulo) y entonces $I+M$ invertible.

2. (a) Calculemos A^{-1}.

$$ A^{-1} = \left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)^{-1} = \left((I+M)^{-1}\right)^{-1} \times (I-M)^{-1} = (I+M)\times(I-M)^{-1} $$

   (no olvidar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

   (b) Calculemos ${}^tA$.

$$ \begin{aligned} {}^tA &= {}^t\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right) \\ &= {}^t\left((I+M)^{-1}\right)\times {}^t(I-M) && \text{pues } {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \\ &= \left({}^t(I+M)\right)^{-1}\times {}^t(I-M) && \text{pues } {}^t(A^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1} \\ &= \left(I+{}^tM\right)^{-1}\times(I-{}^tM) && \text{pues } {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \\ &= (I-M)^{-1}\times(I+M) && \text{porque aquí } {}^tM = -M \end{aligned} $$

(c) Demostrar que $I+M$ y $(I-M)^{-1}$ conmutan.

En primer lugar, $I+M$ y $I-M$ conmutan porque $(I+M)(I-M)=I-M^2=(I-M)(I+M)$. Ahora se tiene el pequeño resultado siguiente :

Lema. Si $AB=BA$, entonces $AB^{-1}=B^{-1}A$. Para la prueba se escribe :

$$AB=BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1}=B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A=AB^{-1}.$$

aplicando esto a $I+M$ y $I-M$ se encuentra $(I+M)\times(I-M)^{-1}=(I-M)^{-1}\times(I+M)$ y entonces $A^{-1}={}^tA$.

Solución del ejercicio 1398 ▲003381

3. $X=-A$ o $X=\frac{1}{2}A$ o $X=A-I$ o $X=-\frac{1}{2}A-I$.

Solución del ejercicio 1399 ▲003382

1. $J^2=J$.
2. $JM=MJ$.
3. $k=\operatorname{rg}J$.

Solución del ejercicio 1400 ▲003398

1. $\dfrac{A+(2-n)I}{n-1}$.
2. $\dfrac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & \cdots & (-b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-b) & \cdots & a+(n-2)b \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & \pm 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -1 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\dfrac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} (0) & & 1/a_n \\ & \ddots & \\ 1/a_1 & & (0) \end{pmatrix}$.
6. $\operatorname{diag}(\lambda_i)-\dfrac{1}{1+\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(\lambda_i\lambda_j)$.

Solución del ejercicio 1401 ▲003399

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} \approx \begin{pmatrix} 55.6 & -277.8 & 255.6 \\ -277.8 & 1446.0 & -1349.2 \\ 255.6 & -1349.2 & 1269.8 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1402 ▲005267

Sea $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la familia de elementos de $\mathbb{C}^n$ de matriz A en la base $\mathscr{B}$. Por definición, se tiene

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ e'_i = ie_i + \sum_{j=i+1}^{n} e_j \ \text{ y } \ e'_n = ne_n.$$

Restando miembro por miembro estas igualdades, se obtiene

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ e'_i - e'_{i+1} = i(e_i - e_{i+1}) \ \text{ y } \ e'_n = ne_n,$$

o aún

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ e_i - e_{i+1} = \frac{1}{i}(e'_i - e'_{i+1}) \ \text{ y } \ e_n = \frac{1}{n}e'_n.$$

Pero entonces, para $i \in \{1,\dots,n-1\}$, se tiene

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=i}^{n-1}(e_j - e_{j+1}) + e_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}(e'_j - e'_{j+1}) + \frac{1}{n}e'_n = \sum_{j=i}^{n-1}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j + \frac{1}{n}e'_n \\ &= \frac{1}{i}e'_i + \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-1}e'_j = \frac{1}{i}e'_i - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j(j-1)}e'_j. \end{aligned}$$

Pero entonces, $\mathbb{C}^n = \text{vect}(e_1,\dots,e_n) \subset \text{vect}(e'_1,\dots,e'_n)$, lo que demuestra que la familia $\mathscr{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ es generadora de $\mathbb{C}^n$ y por lo tanto, es una base de $\mathbb{C}^n$. Así, A es invertible y

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\mathscr{B} = (a'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \ \text{ donde } a'_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{i(i-1)} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 1403 ▲005272

Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector del núcleo de A. Se supone $X \neq 0$. Entonces, si i_0 es un índice tal que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|,\ i \in \{1,\dots,n\}\}$, se tiene $|x_{i_0}| > 0$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \\ &\Rightarrow |a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = |-\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j| \leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|\cdot|x_j| \leqslant |x_{i_0}|\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}| \end{aligned}$$

y, ya que $|x_{i_0}| > 0$, se obtiene $|a_{i_0,i_0} \leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}|$ contradiciendo las hipótesis del enunciado. Entonces, es absurdo suponer que $\ker A$ contiene un vector no nulo y A es de hecho invertible.

Solución del ejercicio 1404 ▲005274

Sean k y l dos enteros tales que $1 \leqslant k \leqslant n$ y $1 \leqslant l \leqslant n$. El coeficiente fila k, columna l de $A\overline{A}$ vale :

$$\sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(l-1)} = \sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1}.$$

1er caso. Si $k = l$, $\omega^{k-l} = 1$, y el coeficiente es $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

2o caso. Si $k \neq l$. Se tiene $-(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1$, con $k-l \neq 0$ y entonces, $k-l$ no es múltiplo de n. Así, $\omega^{k-l} \neq 1$ y

$$\sum_{j=1}^{n} (\omega^{k-l})^{j-1} = \frac{1-(\omega^{k-l})^n}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En resumen, $A\overline{A} = nI_n$. Entonces A es invertible a la izquierda y por lo tanto, invertible y $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Solución del ejercicio 1405 ▲005276

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$ que, a un polinomio P de grado menor o igual que n, asocia el polinomio $P(X+1)$.

Por la fórmula binomial de NEWTON, se ve que A es la matriz de f en la base canónica $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f es claramente un automorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$, su inversa es la aplicación que, a un polinomio P asocia el polinomio $P(X-1)$.

A es, por lo tanto invertible y $A^{-1} = (b_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, donde $b_{i,j} = 0$ si $i > j$ y $b_{i,j} = (-1)^{i+j} C_j^i$ si $i \leqslant j$.

Solución del ejercicio 1406 ▲005597

Sea H un hiperplano de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. H es el núcleo de una forma lineal no nula f. Para $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, se escribe $f(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} m_{i,j}$, donde los $a_{i,j}$ son n^2 escalares independientes de M y no todos nulos.

1er caso. Se supone que existen dos índices distintos k y l tales que $a_{k,l} \neq 0$. Sea $M = I_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} E_{k,l}$. M es invertible porque es triangular con coeficientes diagonales todos no nulos y M está en H, pues $f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} - a_{k,l} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}{a_{k,l}} = 0$.

2o caso. Si todos los $a_{k,l}$, $k \neq l$, son nulos, H contiene la matriz invertible $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1407 ▲005604

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&\cdots&\dots&0\\0&1&3&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\0&\cdots&&\cdots&0&1\end{pmatrix}=I+N,\text{ donde }N=\begin{pmatrix}0&2&0&\cdots&\dots&0\\0&0&3&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&\ddots&n-1\\0&\cdots&&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

N es nilpotente y, por lo tanto $N^n=0$. Así,

$$I=I-(-N)^n=(I+N)(I-N+\cdots+(-N)^{n-1}).$$

Así A es invertible a la izquierda y por lo tanto, invertible, de inversa $I-N+\cdots+(-N)^{n-1}$. Cálculo de N^p, para $1\leqslant p\leqslant n$.

$$N^2=\left(\sum_{j=2}^{n}jE_{j-1,j}\right)^2=\sum_{2\leqslant j,k\leqslant n}jkE_{j-1,j}E_{k-1,k}=\sum_{j=2}^{n-1}j(j+1)E_{j-1,j}E_{j,j+1}=\sum_{j=3}^{n}j(j-1)jE_{j-2,j},$$

es decir $N^2=\begin{pmatrix}0&0&2\cdot3&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&3\cdot4&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&\ddots&(n-1)n\\\vdots&&&&&0\\0&\cdots&&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$

Luego, $N^3=\left(\sum_{j=3}^{n}(j-1)jE_{j-2,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n}kE_{k-1,k}\right)=\sum_{j=4}^{n}j(j-1)(j-2)E_{j-3,j}$.

Se supone solo para p dada en $[\![1,n-1]\!]$, $N^p=\sum_{j=p+1}^{n}j(j-1)\cdots(j-p+1)E_{j-p,j}$.

Entonces $N^{p+1}=\left(\sum_{j=p+1}^{n}j(j-1)\cdots(j-p+1)E_{j-p,j}\right)\left(\sum_{k=2}^{n}kE_{k-1,k}\right)=\sum_{j=p+2}^{n}j(j-1)\cdots(j-p)E_{j-p-1,j}$.

Así

$$\boxed{A^{-1}=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\text{ donde }a_{i,j}=0\text{ si }i>j,\ 1\text{ si }i=j\text{ y }(-1)^{i+j-2}\prod_{k=0}^{j-i-1}(j-k)\text{ si no.}}$$

Solución del ejercicio 1408 ▲005610

Se invierte A interpretándola como una matriz de pasaje. Sea $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $(e'_1,\dots,e_n)$ la familia de vectores de $\mathbb{R}^n$ de matriz A en la base $\mathscr{B}$.

$$A\text{ invertible}\Leftrightarrow(e'_1,\dots,e'_n)\text{ base en }E\Leftrightarrow\text{vect}(e_1,\dots,e_n)\subset\text{vect}(e'_1,\dots,e'_n)\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ e_i\in\text{vect}(e'_1,\dots,e'_n).$$

En este caso, A^{-1} es la matriz de pasaje de $\mathscr{B}'$ a $\mathscr{B}$.
Sea $u=e_1+\cdots+e_n$. Para todo $i\in[\![1,n]\!]$, $e'_i=a_ie_i+u$, lo que proporciona $e_i=\frac{1}{a_i}(e'_i-u)$.

Agregando miembro a miembro estos n igualdades, se obtiene $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} e'_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) u$ y entonces $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} e'_i$, donde $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

1er caso. Si $\lambda \neq 0$, se puede expresar u en función de los e'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, y por lo tanto, las e_i función de las e'_i. En este caso A es invertible. Más precisamente, $u = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} e'_i$ después, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = \frac{1}{a_i} \left(e'_i - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} e'_j \right)$ y en fin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} - \frac{1}{\lambda a_1^2} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_1} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_2} & \frac{1}{a_2} - \frac{1}{\lambda a_2^2} & & & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{\lambda a_2 a_3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{\lambda a_{n-1}^2} & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} \\ -\frac{1}{\lambda a_1 a_n} & -\frac{1}{\lambda a_2 a_n} & \cdots & -\frac{1}{\lambda a_n a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\lambda a_n^2} \end{pmatrix}, \text{ donde } \lambda = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

2o caso. Si $\lambda = 0$, se tiene $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} e'_i = 0$, lo que demuestra que la familia $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es ld y por lo tanto, que A no es invertible.

Solución del ejercicio 1409 ▲005612

Denotemos A la matriz del enunciado. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$ de matriz A en la base canónica $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. De acuerdo con la fórmula del binomio de NEWTON, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = (X+1)^k$. f coincide así sobre la base $\mathscr{B}$, con el endomorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$ que a un polinomio P asociada $P(X+1)$ y f es así este endomorfismo. f es un automorfismo de $\mathbb{R}_n[X]$ de recíproco la aplicación que a un polinomio P asociada $P(X-1)$. Así, A es invertible con inversa la matriz de f^{-1} en la base $\mathscr{B}$.

El coeficiente línea i, columna j, de A^{-1} por lo tanto vale 0 si $i > j$ y $(-1)^{i+j} \binom{j}{i}$ si $i \leqslant j$.

Solución del ejercicio 1410 ▲005613

Calculemos $A\overline{A}$. Sea $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$. El coeficiente fila j, columna k de $A\overline{A}$ vale

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(j-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(k-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^{u-1}.$$

• Si $j = k$, este coeficiente vale n.
• Si $j \neq k$, ya que $j-k$ es estrictamente comprendida entre $-n$ y n y que $j-k$ no es nulo, ω^{j-k} es diferente de 1. El coeficiente fila j, columna k, de $A\overline{A}$ es, por lo tanto igual a $\frac{1-\left(\omega^{j-k}\right)^n}{1-\omega^{j-k}} = \frac{1-1}{1-\omega^{j-k}} = 0$.

Finalmente, $A\overline{A} = nI_n$. Así, A es invertible a la izquierda y por lo tanto, invertible, de inversa $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

Solución del ejercicio 1411 ▲005617

Demostrar que $\ker A$ se reduce a $\{0\}$. En caso contrario, se dispone de un vector columna no nulo X_0 tal que $AX_0 = 0$. Se define $X_0 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Para todo $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j \Rightarrow |a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

Entonces se toma por i un índice i_0 tal que $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$. Porque $X \neq 0$, se tiene $|x_{i_0}| > 0$. Además,

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|,$$

y desde $|x_{i_0}| > 0$, se obtiene luego de la simplificación $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$, lo que contradice las hipótesis. Así, $\ker A = \{0\}$ y A es invertible.

Solución del ejercicio 1412 ▲006872

1. Si el determinante $ad-bc$ es no nulo la inversa es $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
3. si $|\alpha| \neq 1$, entonces la inversa es $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$
4. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (0) & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Solución del ejercicio 1413 ▲007413

1. $\det(D_2) = x^2-1 = (x+1)(x-1)$, $\det(D_3) = x^3-3x+2 = (x+2)(x-1)^2$

2. Sumar todas las filas a la primera fila, se tiene :

$$\det(D_n) = \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \dots & \cdots & x+n-1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix},$$

y como todos los elementos en la primera línea son $x+n-1$, por lo tanto

$$\det(D_n) = (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

3. Por el método del pivote de Gauss, $L_2 - L_1, L_3 - L_1 \dots, L_n - L_1$, se obtiene un determinante de la forma triangular

$$\det(D_n) = (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Así $\det(D_n) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$.

4. D_n es invertible si y solo si $\det(D_n) \neq 0$, por lo tanto $x \neq 1-n$ y $x \neq 1$.

Solución del ejercicio 1415 ▲003368

No hay solución.

Solución del ejercicio 1416 ▲003400

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Solución del ejercicio 1417 ▲003401

$P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 0 & 4a & 12a+4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$ es invertible para $a \neq 0$.

Solución del ejercicio 1418 ▲003402

$N = P^{-1}AP$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Solución del ejercicio 1419 ▲003403

$B-I$ es invertible.

Solución del ejercicio 1421 ▲003405

oui, $P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1424 ▲005259

1. $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(i),u(j),u(k)) = rg(u(j),u(k),u(i))$. La matriz de esta última familia en la base (i,j,k) es $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}$. Esta última familia es de rango 3. Entonces, $\operatorname{rg} u=3$ y u es de hecho un automorfismo de $\mathbb{R}^3$. Se define $e_1=u(i)$, $e_2=u(j)$ y $e_3=u(k)$.

$$\begin{cases}e_1=k\\e_2=i-3k\\e_3=j+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=e_1\\i=3e_1+e_2\\j=-3e_1+e_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^{-1}(k)=i\\u^{-1}(i)=3i+j\\u^{-1}(j)=-3i+k\end{cases}$$

y

$$A^{-1}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})=\begin{pmatrix}3&-3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. (Preguntas 2) y 3)). Se define $e_1=xi+yj+zk$ (e_1, e_2 y e_3 designan otros vectores que los de 1)).

$$u(e_1)=e_1\Leftrightarrow(u-\operatorname{Id})(e_1)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=0\\-y+z=0\\x-3y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z.$$

Se toma $e_1=i+j+k$. Pongamos $e_2=xi+yj+zk$.

$$u(e_2)=e_1+e_2\Leftrightarrow(u-\operatorname{Id})(e_2)=e_1\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=1\\-y+z=1\\x-3y+2z=1\end{cases}\Leftrightarrow y=x+1\ \text{ y }\ z=x+2.$$

Se toma $e_2=j+2k$. Pongamos $e_3=xi+yj+zk$.

$$u(e_3)=e_2+e_3\Leftrightarrow(u-\operatorname{Id})(e_3)=e_2\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=0\\-y+z=1\\x-3y+2z=2\end{cases}\Leftrightarrow y=x\ \text{ y }\ z=x+1.$$

Se toma $e_3=k$. La matriz de la familia (e_1,e_2,e_3) en la base (i,j,k) es $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

Esta matriz es de rango 3 y por lo tanto, es invertible. Así (e_1,e_2,e_3) es una base de $\mathbb{R}^3$. En fin,

$$\begin{cases} e_1 = i+j+k \\ e_2 = j+2k \\ e_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_3 \\ j = e_2-2e_3 \\ i = e_1-e_2+e_3, \end{cases}$$

y

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ver la pregunta anterior.

4. Sea T es la matriz de u en la base (e_1,e_2,e_3). $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las fórmulas de cambio de base se escriben $T = P^{-1}AP$ o aún $A = PTP^{-1}$. Así, para todo relativo n, $A^n = PT^nP^{-1}$.

   Se define $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $N^3 = 0$. Entonces, para n entero natural mayor o igual que 2 dado, ya que I y N conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON proporciona

$$T^n = (I+N)^n = I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Esta fórmula queda clara para $n=0$ y $n=1$. Para $n=-1$, $(I+N)(I-N+N^2) = I+N^3 = I$ y entonces

$$T^{-1} = (I+N)^{-1} = I-N+N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{(-1)(-1-1)}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   y la fórmula es aún válida para $n=-1$. Así para n entero natural no nulo dado, se tiene que $T^{-n} = (I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$, pero $(I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2)(I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2) = I$ y entonces $T^{-n} = I-nN+\frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalmente,

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ T^n = I+nN+\frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Luego

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 1 & n+1 & n(n+1)/2 \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)(n-2)/2 & -n(n-2) & n(n-1)/2 \\ n(n-1)/2 & -(n-1)(n+1) & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & -n(n+2) & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   lo que proporciona $u^n(i)$, $u^n(j)$ y $u^n(k)$.

Solución del ejercicio 1425 ▲005626

Si $M(a)$ y $N(a)$ son semejantes entonces necesariamente $\operatorname{tr}(M(a)) = \operatorname{tr}(N(a))$. Por tanto, para todo escalar a, $\operatorname{tr}(M(a)) = 4-3a = \operatorname{tr}(N(a))$. La traza no proporciona ninguna información. También se debe tener $\det(M(a)) = \det(N(a))$. Por tanto, $\det(N(a)) = (1-a)^2(2-a)$ y

$$\begin{aligned}\det(M(a)) &= (4-a)(a^2-1-2)+6(1-a+1)+2(2-1-a) = (4-a)(a^2-3)+14-8a\\ &= -a^3+4a^2-5a+2 = (a-1)^2(2-a) = \det(N(a)).\end{aligned}$$

El determinante no proporciona ninguna información. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ de matriz $M(a)$ en la base canónica $\mathscr{B}_0 = (i,j,k)$ de $\mathbb{K}^3$. El problema propuesto equivale a la existencia de una base $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ tal que $f(e_1) = (1-a)e_1$, $f(e_2) = (1-a)e_2+e_1$ y $f(e_3) = (2-a)e_3$.
Sea (x,y,z) un elemento de $\mathbb{K}^3$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=0\\ -6x-2y+2z=0\\ 2x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x\\ z=x\end{cases}$. Se puede tomar $e_1 = (1,-2,1)$.

• $f((x,y,z)) = (1-a)(x,y,z)+(1,-2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=1\\ -6x-2y+2z=-2\\ 2x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1\\ z=x-2\end{cases}$. Se puede tomar $e_2 = (0,-1,-2)$.

• $f((x,y,z)) = (2-a)(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0\\ -6x-3y+2z=0\\ 2x+y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x\\ z=0\end{cases}$. Se puede tomar $e_3 = (1,-2,0)$.

La matriz de la familia $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ en la base $\mathscr{B}_0$ es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. $\det P = -4+4+1 = 1 \neq 0$ y así la familia $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ es una base de $\mathbb{K}^3$. Porque $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_0} f = M(a)$ y $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = N(a)$, las matrices $M(a)$ y $N(a)$ son semejantes.

Solución del ejercicio 1426 ▲005627

Sean A y B dos matrices cuadradas reales de tamaño n semejantes en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Existe P elemento de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que $PB = AP$ (mucho más manejable que $B = P^{-1}AP$). Se define $P = Q+iR$, donde Q y R son matrices reales. Por identificación de partes reales e imaginarias, se tiene $QB = AQ$ y $RB = AR$, pero este ejercicio aún no ha terminado porque Q o R no tiene por qué ser invertible.
Se tiene $QB = AQ$ y $RB = AR$ y por lo tanto, más generalmente para todo real x, $(Q+xR)B = A(Q+xR)$.
Ahora, $\det(Q+xR)$ es un polinomio con coeficientes reales en x, pero no es el polinomio nulo porque su valor en i (tal que $i^2 = -1$) es $\det P$ que es no nulo. Entonces solo existe un número finito de reales x, eventualmente nulos, tales que $\det(Q+xR) = 0$. En particular, existe al menos un real x_0 tal que la matriz $P_0 = Q+x_0R$ sea invertible. P_0 es una matriz real invertible tal que $P_0A = BP_0$ y A y B son semejantes en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución del ejercicio 1429 ▲002475

1. Sea M una matriz tal que $M^2 = 0$ y sea f la aplicación lineal asociada a M. Como $M^2 = 0$, entonces $f \circ f = 0$. Esto implica $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Discutir según la dimensión del núcleo :
   (a) Si $\dim \ker f = 3$, entonces $f = 0$, por lo tanto $M = 0$ (la matriz nula).

(b) Si $\dim\ker f = 2$, vamos a tomar una base de $\mathbb{R}^3$ formada de dos vectores del núcleo y un tercer vector. En esta base la matriz de f es $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, pero como $f \circ f = 0$, entonces $M'^2 = 0$; un pequeño cálculo implica $c = 0$. Entonces M y M' son las matrices de la misma aplicación lineal f, pero expresados en diferentes bases, por lo tanto M y M' son semejantes.

(c) Si $\dim\ker f = 1$, entonces como $\operatorname{Im} f \subset \ker f$ se tiene $\dim\operatorname{Im} f \leqslant 1$, pero entonces esto contradice el teorema del rango : $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}^3$. Este caso no es posible.

(d) Conclusión : M es una matriz que satisface $M^2 = 0$ si y solo si existe una matriz invertible P y los reales a, b tales que
$$M = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P$$

2. Se utiliza el ejercicio 1369. Si $M^2 = M$ y f es la aplicación lineal asociada, entonces $f \circ f = f$. Sea ha visto en el ejercicio 1369 que entonces $\ker f \oplus \operatorname{Im} f$ y que podemos elegir una base (e_1, e_2, e_3) tal que $f(e_i) = e_i$, luego $f(e_i) = 0$. Dependiendo de la dimensión del núcleo da que la matriz M' de f en esta base es
$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ahora M es semejante a una de estas matrices : existe P invertible tal que $M = P^{-1}M'P$, donde M' es una de las cuatro matrices A_i arriba. Geométricamente, nuestra aplicación es una proyección (proyección sobre una recta para la segunda matriz y sobre un plano para la tercera).

3. Se define $N = \frac{I+M}{2}$ y entonces $M = 2N - I$. Así $M^2 = I \iff (2N-I)^2 = I \iff 4N^2 - 4N - I = I \iff N^2 = N$. Para la segunda pregunta N es semejante a una de las matrices A_i : $N = P^{-1}A_iP$, y $M = 2P^{-1}A_iP - I = P^{-1}(2A_i - I)P$. Así M es semejante a una de matrices $2A_i - I$ siguientes :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Estas son matrices de simetría (con respecto al origen para la primera matriz, con respecto a una recta para la segunda matriz y con respecto a un plano para la tercera). La idea de escribir $N = \frac{I+M}{2}$ es la siguiente : si $M^2 = I$, entonces geométricamente la aplicación lineal s asociada a M es una *simetría*, mientras que si $N^2 = N$, entonces la aplicación lineal p asociada es una *proyección*. Y la proyección y la simetría están relacionadas por $p(x) = \frac{x+s(x)}{2}$ (¡hacer un dibujo !) es decir $p = \frac{\mathrm{Id}+s}{2}$ o aún $N = \frac{I+M}{2}$.

Solución del ejercicio 1434 ▲003371

1.

2. Para $i < j$, se tiene $M(I+E_{ij}) = (I+E_{ij})M \Rightarrow \begin{cases} a_{ki} = 0 & \text{si } k \neq i \\ a_{jk} = 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$

Solución del ejercicio 1435 ▲003372

$(\alpha+\operatorname{tr}A)\operatorname{tr}X=\operatorname{tr}B$.

Si $\alpha(\alpha+\operatorname{tr}A)\neq 0$:	solución única $X=\frac{1}{\alpha}\left(B-\frac{\operatorname{tr}B}{\alpha+\operatorname{tr}A}A\right)$.
Si $\alpha=0$:	soluciones si y solo si A y B son proporcionales.
Si $\alpha+\operatorname{tr}A=0$:	soluciones si y solo si $\operatorname{tr}B=0$, $X=\frac{1}{\alpha}B+\lambda A$.

Solución del ejercicio 1441 ▲003383

2. $u_{|\operatorname{Im}v}=\operatorname{Id}\Rightarrow \operatorname{tr}\left(u_{|\operatorname{Im}v}\right)=\operatorname{rg}v\Rightarrow \operatorname{tr}\left(v_{|\operatorname{Im}v}\right)=k\operatorname{rg}v$.

Solución del ejercicio 1443 ▲003385

$M_k=A^kM_0+S_kB$, con $S_k=I+A+\cdots+A^{k-1}=(I-A^k)(I-A)^{-1}$ si $I-A$ es invertible.

Solución del ejercicio 1444 ▲003386

1. $A^3-(\lambda+\mu)A^2+\lambda\mu A=0$.
2. $U=\dfrac{\mu A-A^2}{\lambda(\mu-\lambda)}$, $V=\dfrac{\lambda A-A^2}{\mu(\lambda-\mu)}$ y el valor propio es 0, λ o μ.

Solución del ejercicio 1447 ▲003389

1. Compacidad.
2. Si $x_1=0$, sea $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$: $R(Y)\geqslant\min\left(a_{11}+\dfrac{a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}{\alpha},\dfrac{\alpha a_{21}}{x_2}+R(X_0),\ldots,\dfrac{\alpha a_{n1}}{x_n}+R(X_0)\right)>R(X_0)$, para $\alpha>0$ bastante pequeño.
3. Si $y_1>0$, se establece $X=X_0+\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$: $AX-RX=Y+\alpha\begin{pmatrix}a_{11}-R\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$, por lo tanto para $\alpha>0$ bastante pequeño, $R(X)>R$.
4. Desigualdad triangular.

Solución del ejercicio 1448 ▲003390

1.
2. La base canónica de E es $(F_{ij}=E_{ij}-E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$, donde (E_{ij}) es la base canónica de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
   Si $M\in E$, la coordenada de M siguiente F_{ij} es el coeficiente de índice i,j de M. En particular, denotando $A=(a_{ij})$, la coordenada de $f(F_{ij})$ siguiente F_{ij} es $a_{ii}+a_{jj}$, por lo tanto :
   $$\operatorname{tr}f=\sum_{i,j}(a_{ii}+a_{jj})=(n-1)\operatorname{tr}A.$$

Solución del ejercicio 1450 ▲003392

Sea φ tal morfismo. Entonces, para toda matriz $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se tiene $\dot{0} = p\varphi(M) = \varphi(M^p)$, por lo tanto φ se anula en toda matriz que sea de una potencia p-ésima. Denotemos $P(i,j,\alpha)$ la matriz de la operación elemental $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, que es también la matriz de la operación elemental $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$. Toda matriz $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se puede transformar, usando solo estas operaciones elementales, en una matriz $M' = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\det(M))$ por una adaptación del algoritmo de Gauss. Como $P(i,j,\alpha) = P(i,j,\alpha/p)^p$ y $\det(M) = \pm(|\det(M)|^{1/p})^p$, se obtiene : $\varphi(M) = \dot{0}$ si $\det(M) > 0$ y $\varphi(M) = \varphi(\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)) = x$ si $\det(M) < 0$. Recíprocamente, la función φ así definida es efectivamente un morfismo de grupo si y solo si $2x = \dot{0}$, sea $x = \dot{0}$, para p impar, y $x \in \{\dot{0}, \dot{q}\}$, para $p = 2q$.

Solución del ejercicio 1451 ▲005264

1. Una demostración más simple se da en el próximo capítulo : el determinante de una matriz triangular es el producto de sus coeficientes diagonales. Esta matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo o si y solo si ninguno de los coeficientes de la diagonal es nulo.

   Por el momento, lo más simple es usar el rango de una matriz. Si ninguno de los coeficientes de la diagonal es nulo, se sabe que el rango de la matriz es su formato y por lo tanto, que esta matriz es invertible. Recíprocamente, se denota $(e_1,\dots,e_n)$ la base canónica de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Se supone que A sea una matriz triangular inferior cuyo coeficiente fila i, columna i, es nulo. Si $i = n$, la última columna de A es nula y A no es de rango n y por lo tanto, no es invertible. Si $i < n$, entonces las $n-i+1$ últimas columnas están en $\mathrm{vect}(e_{i+1},\dots,e_n)$ que es de dimensión a lo sumo $n-i$ $(< n-i+1)$, y una vez más, la familia de columnas de A es ld.

2. Sea $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ una matriz triangular superior y f el endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ de matriz A en la base canónica $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Sea $\mathscr{B}' = (e_n,\dots,e_1)$. $\mathscr{B}'$ es aún una base de $\mathbb{K}^n$. Sea entonces P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, luego A' la matriz de f en la base $\mathscr{B}'$. Las fórmulas de cambio de bases permiten afirmar que $A' = P^{-1}AP$ y así que A y A' son semejantes.

   Verificar entonces que A' es una matriz triangular inferior. Para $i \in \{1,\dots,n\}$, se escribe $e'_i = e_{n+1-i}$. A es triangular superior. Entonces, para todo i, $f(e_i) \in \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_i)$. Pero, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $f(e'_{n+1-i}) \in \mathrm{vect}(e'_n,\dots,e'_{n+1-i})$ o aún, para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $f(e'_i) \in \mathrm{vect}(e'_n,\dots,e'_i)$. Esto demuestra que A' es una matriz triangular inferior.

Solución del ejercicio 1452 ▲005265

1. $E = \mathrm{vect}(I,J)$. Entonces, E es un subespacio vectorial de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La familia (I,J) es claramente libre y por lo tanto, es una base de E. Así, $\dim E = 2$.

2. $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$. Más generalmente, para $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$,

   $$M(x,y)M(x',y') = (xI+yJ)(x'I+y'J) = xx'I + (xy'+yx')J + yy'J^2 = (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J \ (*).$$

   Demostrar entonces que $(E,+,\times)$ es un subanillo de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

   E contiene $I = 1\cdot I + 0 \cdot J$. $(E,+)$ es un subgrupo de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$ y, de acuerdo a $(*)$, E es estable para $\times$. Entonces, $(E,+,\times)$ es un subanillo de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

3. Sea $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$M(x,y)M(x',y') = I \Leftrightarrow (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I \Leftrightarrow \begin{cases} xx'-yy' = 1 \\ yx'+(x+2y)y' = 0. \end{cases}$$

El determinante de este último sistema de incógnitas x' y y' vale $x(x+2y)+y^2 = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Si $y \neq -x$, este sistema admite una única solución par. Así, si $y \neq -x$, existe $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tal que $M(x,y)M(x',y') = I$. En este caso, la matriz $M(x,y)$ es invertible en E. Si $y = -x$, el sistema se escribe $\begin{cases} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{cases}$ y claramente no tiene solución.

4. (a) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 1 \\ 2y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{o} \begin{cases} x^2-y^2 = 1 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = 0 \\ x = -1. \end{cases}$$

En E, la ecuación $X^2 = I$ admite exactamente dos soluciones a saber I y $-I$.

(b) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ 2y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x.$$

En E, la ecuación $X^2 = 0$ admite solución de la forma $\lambda(J-I) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x,y)^2 = M(x,y) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = x \\ 2y(x+y) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = x \\ y(2x+2y-1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = x \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = -x+\frac{1}{2} \\ x^2-(-x+\frac{1}{2})^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{o} \begin{cases} \frac{1}{4} = 0 \\ y = -x+\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = 0 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En E, la ecuación $X^2 = X$ admite exactamente dos soluciones a saber 0 e I.

Solución del ejercicio 1453 ▲005266

Sea (i,j) la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y (e_1,e_2,e_3) la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se busca $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ y $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ tales que

$$f \circ g(e_1) = -e_2+e_3,\ f \circ g(e_2) = -e_1+e_3 \text{ y } f \circ g(e_3) = -e_1-e_2+2e_3 (= f \circ g(e_1+e_2)).$$

Se define $g(e_1) = i$, $g(e_2) = j$ y $g(e_3) = i+j$, luego $f(i) = -e_2+e_3$ y $f(j) = -e_1+e_3$.
Aplicaciones lineales f y g sirven, o incluso si se escribe

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$. A y B denotan ahora dos matrices cualesquiera, elementos de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ y $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivamente, tales que $AB=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Calculemos $(AB)^2$. Se obtiene

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=AB.$$

Pero entonces, multiplicando los dos miembros de esta igualdad por B a la izquierda y A a la derecha, se obtiene

$$(BA)^3=(BA)^2. \qquad (*)$$

Se nota entonces que

$$\text{rg}(BA)\geqslant\text{rg}(ABAB)=\text{rg}((AB)^2)=\text{rg}(AB)=2,$$

y entonces, BA es una matriz cuadrada de tamaño 2, $\text{rg}(BA)=2$. BA es, por lo tanto una matriz invertible. Así, se pueden simplificar los dos miembros de la igualdad $(*)$ por $(BA)^2$ y se obtiene $BA=I_2$.

Solución del ejercicio 1454 ▲005268

Sea $A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A conmuta con toda matriz, en particular : $\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, $AE_{i,j}=E_{i,j}A$. Ahora,

$$AE_{i,j}=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}E_{k,j}\ \text{ y }\ E_{i,j}A=\sum_{k,l}a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l}.$$

Se observa que si $k\neq i$ o $l\neq j$, $E_{k,j}\neq E_{i,l}$. Porque la familia $(E_{i,j})$ es libre, se pueden identificar los coeficientes y se tiene : si $k\neq i$, $a_{k,i}=0$. Por otra parte, el coeficiente de $E_{i,j}$ es $a_{i,i}$ en la primera suma y $a_{j,j}$ en la segunda. Estos coeficientes deben ser iguales. Finalmente, si A conmuta con toda matriz, sus coeficientes no diagonales son cero y sus coeficientes diagonales son iguales. Así, existe un escalar $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $A=\lambda I_n$.

Recíprocamente, si A es una matriz escalar, A conmuta con toda matriz.

Solución del ejercicio 1455 ▲005270

Sea H un hiperplano de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ y f una forma lineal no nula en $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $H=\ker f$.
Para $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, se escribe $f(A)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{i,j}a_{i,j}$.

1er caso. Se supone $\exists(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2/\ i\neq j$ y $\alpha_{i,j}\neq0$. Se define así $S=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,k}$ y se considera $A=\sum_{k=1}^{n}E_{k,k}-\frac{S}{\alpha_{i,j}}E_{i,j}$. A es triangular con coeficientes diagonales no nulos y por lo tanto, es invertible. Además, $f(A)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,k}-\frac{S}{\alpha_{i,j}}\alpha_{i,j}=S-S=0$ y A es elemento de H.

2o caso. Se supone $\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, $(i\neq j\Rightarrow\alpha_{i,j}=0)$. Entonces, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,i}a_{i,i}$. Sea $A=E_{n,1}+E_{2,1}+E_{3,2}+\dots+E_{n-1,n}$. A es invertible porque, por ejemplo, es igual a la matriz de pasaje de la base canónica $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ en la base $(e_n,e_1,\dots,e_{n-1})$. Además, $f(A)=0$.

Solución del ejercicio 1457 ▲005273

1. Sea $(i,j) \in \{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,r\}$. El coeficiente fila i, columna j, de la matriz $M+N$ es la suma del coeficiente fila i, columna j, de la matriz M y del coeficiente línea i, columna j, de la matriz N o aún la suma del coeficiente de fila i, columna j, de la matriz A y del coeficiente línea i, columna j, de la matriz A'. Se tienen resultados similares para los demás valores del par (i,j) y entonces

$$M+N = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}.$$

2. Se define $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, donde $A \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, luego $A' \in \mathscr{M}_{t,p}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathscr{M}_{u,p}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathscr{M}_{t,q}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathscr{M}_{u,q}(\mathbb{K})$ (el corte de M en columna es el mismo que el corte de N en líneas). Sea entonces $(i,j) \in \{1,\dots,r\} \times \{1,\dots,t\}$. El coeficiente fila i, columna j de la matriz MN vale

$$\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} m_{i,k} n_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}.$$

Pero, $\sum_{k=1}^{p} m_{i,k} n_{k,j}$ es el coeficiente fila i, columna j del producto AA' y $\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ es el coeficiente fila i, columna j del producto BC'. Finalmente, $\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ es el coeficiente fila i, columna j del producto $AA'+BC'$. Se tienen resultados similares para los demás valores del par (i,j) y entonces

$$MN = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1458 ▲005275

1. Un vector no nulo x es colineal con su imagen si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $u(x) = \lambda x$. Los números λ correspondientes son los complejos tales que existe un vector $x \neq 0$ en $\ker(u - \lambda \,\mathrm{Id})$ o aún tales que $A - \lambda I_4 \notin \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$. El determinante de $A - \lambda I_4$ vale :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7-\lambda & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} &= (7-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 0 & 0 \\ 11 & -6-\lambda & -12 \\ -6 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 20 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (7-\lambda)(-7-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 4(-12) \begin{vmatrix} -6-\lambda & -12 \\ 6 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-7)(\lambda+7)(\lambda^2-5\lambda+6) + 48(\lambda^2-5\lambda+6) \\
&= (\lambda^2-5\lambda+6)(\lambda^2-49+48) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Así, $A - \lambda I_4 \notin \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lambda \in \{-1,1,2,3\}$.

- Caso $\lambda = -1$. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \ker(u+\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+4y=0 \\ -12x-6y=0 \\ 20x+11y-5z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+12t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ -2x-5z-12t=0 \\ z+2t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=-2t \\ -2x-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ t=-x \\ z=2x. \end{cases}$$

Así, $\ker(u+\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(e_1)$, donde $e_1 = (1,-2,2,-1)$.

- Caso $\lambda = 1$. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \ker(u-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=0 \\ -12x-8y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+10t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 20x+11y-7z-12t=0 \\ -6x-3y+3z+5t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ 14z+24t=7x \\ 6z+10t=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ z=\frac{1}{2}x \\ t=0. \end{cases}$$

Así, $\ker(u-\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(e_2)$, donde $e_2 = (2,-3,1,0)$.

- Caso $\lambda = 2$. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \ker(u-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=0 \\ -12x-9y=0 \\ 20x+11y-8z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+9t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=02z+3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=-\frac{3}{2}t. \end{cases}$$

Así, $\ker(u-2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(e_3)$, donde $e_3 = (0,0,3,-2)$.

- Caso $\lambda = 3$. Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x,y,z,t) \in \ker(u-\mathrm{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y=0 \\ -12x-10y=0 \\ 20x+11y-9z-12t=0 \\ -12x-6y+6z+8t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=03z+4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=-\frac{4}{3}t. \end{cases}$$

Así, $\ker(u-3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{vect}(e_4)$, donde $e_4 = (0,0,4,-3)$.

Sea P la matriz (e_1,e_2,e_3,e_4) en la base canónica (i,j,k,l). Se tiene $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Demostrar que P es invertible y determinar su inversa.

$$\begin{cases} e_1 = i-2j+2k-l \\ e_2 = 2i-3j+k \\ e_3 = 3k-2l \\ e_4 = 4k-3l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3-2e_4 \\ l = 4e_3-3e_4 \\ e_1 = i-2j+2(3e_3-2e_4)-(4e_3-3e_4) \\ e_2 = 2i-3j+(3e_3-2e_4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3-2e_4 \\ l = 4e_3-3e_4 \\ i-2j = e_1-2e_3+e_4 \\ 2i-3j = e_2-3e_3+2e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3-2e_4 \\ l = 4e_3-3e_4 \\ i = -3e_1+2e_2+e_4 \\ j = -2e_1+e_2+e_3. \end{cases}$$

Así, $\mathbb{C}^4 = \text{vect}(i,j,k,l) \subset \text{vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Entonces, la familia (e_1,e_2,e_3,e_4) es generatriz de $\mathbb{C}^4$ y por lo tanto, una base de $\mathbb{C}^4$. Así, P es invertible y

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Las fórmulas de cambio de base se escriben $A = PDP^{-1}$, con $D = \text{diag}(-1,1,2,3)$.
3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Calculemos A^n.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3(-1)^n & -2(-1)^n & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 3\cdot 2^n & 4\cdot 2^n \\ 3^n & 0 & -2\cdot 3^n & -3\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3(-1)^n+4 & -2(-1)^n+2 & 0 & 0 \\ 6(-1)^n-6 & 4(-1)^n-3 & 0 & 0 \\ -6(-1)^n+2+4\cdot 3^n & -4(-1)^n+1+3\cdot 2^n & 9\cdot 2^n-8\cdot 3^n & 12(2^n-3^n) \\ 3((-1)^n-3^n) & 2((-1)^n-2^n) & 6(3^n-2^n) & -8\cdot 2^n+9\cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1459 ▲005585

Encontrar una matriz A de tamaño $(3,2)$ y una matriz B de tamaño $(2,3)$ tales que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Se define $E = \mathbb{R}^2$ y denotar (i,j) la base canónica de E. Se define $F = \mathbb{R}^3$ y denotar (e_1,e_2,e_3) la base canónica de F. El problema planteado matricialmente también se puede enunciar en términos de aplicaciones lineales : encontrar $f \in \mathscr{L}(E,F)$ y $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tales que $f\circ g(e_1) = 8e_1+2e_2-2e_3$, $f\circ g(e_2) = 2e_1+5e_2+4e_3$ y $f\circ g(e_3) = -2e_1+4e_2+5e_3$. Se observa en primer lugar que el problema planteado no tiene necesariamente solución porque por ejemplo $\text{rg}(f\circ g) \leqslant \min\{f,g\} \leqslant \dim E = 2$ y si la matriz propuesta tiene rango 3 (es decir, invertible), el problema planteado no tiene solución.

Aquí, $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8\times 9 - 2\times 18 - 2\times 18 = 0$ y la matriz propuesta tiene rango a lo sumo 2, luego de rango 2 porque sus dos primeras columnas no son colineales.

Una relación de dependencia de las columnas es $C_1 = 2C_2 - 2C_3$.

Un par (f,g) solución debe verificar $f\circ g(e_1) = 2f\circ g(e_2) - 2f\circ g(e_3)$.

Tomemos cualquier expresión para $g(e_2)$ y $g(e_3)$, pero luego se toma $g(e_1) = 2g(e_2) - 2g(e_3)$.

Por ejemplo, se escribe $g(e_2) = i$, $g(e_3) = j$ y $g(e_1) = 2i-2j$, luego $f(i) = 2e_1+5e_2+4e_3$ y $f(j) = -2e_1+4e_2+5e_3$ o incluso sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Sean A y B dos matrices de formatos respectivos $(3,2)$ y $(2,3)$ tales que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculemos BA (no hay por supuesto unicidad de A y B, pero el enunciado sugiere que el producto BA debe ser independiente de A y B). En primer lugar,

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9AB.$$

Además, $\operatorname{rg}(BA) \geqslant \operatorname{rg}(A(BA)B) = \operatorname{rg}((AB)^2) = \operatorname{rg}(9AB) = \operatorname{rg}(AB) = 2$ y entonces $\operatorname{rg}(BA) = 2$, luego $BA \in GL_2(\mathbb{R})$. De la igualdad $(AB)^2 = 9AB$, se tiene luego de la multiplicación a la izquierda por B y a la derecha por A, $(BA)^3 = 9(BA)^2$ y, ya que BA es una matriz cuadrada invertible y por lo tanto, simplificable para la multiplicación de matrices, $BA = 9I_2$.

$$\boxed{BA = 9I_2.}$$

Solución del ejercicio 1460 ▲005594

Sea $A = \sum_{M\in G} M$. Entonces $A^2 = \sum_{(M,N)\in G^2} MN$. Sea $M \in G$ fija. Se considera la aplicación φ de G en G que a un elemento N de G asociada MN. Porque G es estable para el producto, φ es una aplicación. Más precisamente, φ es una permutación de G porque la aplicación ψ de G en sí mismo que tiene un elemento N de G asociada $M^{-1}N$ verifica $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_G$. Se deduce que

$$A^2 = \sum_{M\in G}\left(\sum_{N\in G} MN\right) = \sum_{M\in G} A = pA, \quad \text{donde } p = \operatorname{card}(G).$$

Finalmente, la matriz $P = \frac{1}{p}A$ es idempotente porque $\left(\frac{1}{p}A\right)^2 = \frac{1}{p^2}pA = \frac{1}{p}A$. Como A es una matriz de proyección, se sabe que $\operatorname{rg} P = \operatorname{tr} P = \sum_{M\in G} \operatorname{tr} M = 0$ y entonces $P = 0$ o aún $\sum_{M\in G} M = 0$.

Solución del ejercicio 1461 ▲005595

Por el mismo método que en 1460, se ve que $f = \frac{1}{p}\sum_{g\in G} g$ es un proyector y, por lo tanto $\frac{1}{p}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} g = \operatorname{rg} f$.

Ahora, si x es un elemento de F así que para todo g en G, $g(x) = x$ y entonces $f(x) = x$. Así, un elemento x de F está en $\operatorname{Im} f$. Inversamente, sea x un elemento de $\operatorname{Im} f$. Para $g \in G$,

$$g(x) = g(f(x)) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} g\circ h(x) = \frac{1}{p}\sum_{h\in G} h(x) = f(x) = x.$$

(Como en el 1460, la aplicación que, para $g \in G$ fijado, asociada a un elemento h de G el elemento $g\circ h$, es una permutación de G). Así, el elemento x de $\operatorname{Im} f$ está en F. Se ha demostrado que $F = \operatorname{Im} f$. Porque f es un proyector, se deduce que

$$\dim F = \operatorname{rg} f = \operatorname{tr} f = \frac{1}{p}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} g.$$

Solución del ejercicio 1462 ▲005596

Como en el ejercicio 1460, la matriz $A = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} A_k$ es idempotente y, por lo tanto $\mathrm{tr}A = \mathrm{rg}A$ de acuerdo con 1269. Así, $\mathrm{tr}(A_1)+\cdots+\mathrm{tr}A_p = p\,\mathrm{rg}A$ es un entero divisible por p.

Solución del ejercicio 1463 ▲005605

Se denota $\mathscr{B} = (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canónica de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{tr}\, f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}$, donde $\alpha_{i,j}$ designa la (i,j)-ésimo coordenadas de $f(E_{i,j}) = AE_{i,j}+E_{i,j}A$ en la base $\mathscr{B}$. Pero para $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ dado,

$$AE_{i,j} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

e igualmente,

$$E_{i,j}A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}.$$

Entonces $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = a_{i,i}+a_{j,j}$, luego

$$\mathrm{tr}\, f = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{i,i}+a_{j,j}) = 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,i} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) = 2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{tr}A = 2n\,\mathrm{tr}A.$$

$$\boxed{\mathrm{tr}\, f = 2n\,\mathrm{tr}A.}$$

Solución del ejercicio 1464 ▲005606

Si M es solución, necesariamente $a\,\mathrm{tr}M + (\mathrm{tr}M)(\mathrm{tr}A) = \mathrm{tr}B$ o aún $(\mathrm{tr}M)(a+\mathrm{tr}A) = \mathrm{tr}B$.
1er caso. Si $\mathrm{tr}A \neq -a$, entonces necesariamente $\mathrm{tr}M = \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}$, luego $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}A\right)$.
Recíprocamente, si $M = \frac{1}{a}\left(B - \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}A\right)$, entonces

$$aM + (\mathrm{tr}M)A = B - \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}A + \frac{1}{a}\left(\mathrm{tr}B - \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}\mathrm{tr}A\right)A = B.$$

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{tr}A \neq -a, \quad \mathscr{S} = \left\{\frac{1}{a}\left(B - \frac{\mathrm{tr}B}{a+\mathrm{tr}A}A\right)\right\}.}$$

2o caso. Si $\mathrm{tr}A = -a$ y $\mathrm{tr}B \neq 0$, no hay solución.
3o caso. Si $\mathrm{tr}A = -a$ y $\mathrm{tr}B = 0$, M es necesariamente de la forma $\frac{1}{a}B + \lambda A$, donde λ es un real arbitrario.
Recíprocamente, sean $\lambda\in\mathbb{R}$, luego $M = \frac{1}{a}B + \lambda A$. Entonces

$$aM + (\mathrm{tr}M)A = B + a\lambda A + \left(\frac{1}{a}\mathrm{tr}B + \lambda\,\mathrm{tr}A\right)A = B + a\lambda A - a\lambda A = B,$$

y toda matriz de la forma $B+\lambda A$, $\lambda\in\mathbb{R}$, es solución.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{tr}A = -a,\ \mathscr{S} = \varnothing \text{ si } \mathrm{tr}B \neq 0 \text{ y } \mathscr{S} = \{B+\lambda A,\ \lambda\in\mathbb{R}\} \text{ si } \mathrm{tr}B = 0.}$$

Solución del ejercicio 1465 ▲005608

1. $E = \text{vect}(I,J)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimensión inferior o igual a 2. Además, la familia (I,J) es libre porque la matriz J no es una matriz escalar y por lo tanto, $\dim E = 2$.
2. Porque $(E,+,\cdot)$ es un espacio vectorial, $(E,+)$ es un grupo conmutativo. Luego, $I^2 = I \in E$, $IJ = JI = J \in E$ y $J^2 = (I+E_{1,2})^2 = I+2E_{1,2} = I+2(J-I)-I = 2J-I \in E$. Por bilinealidad del producto de matrices, la multiplicación es interna en E y conmutativo. Además, $I \in E$ y finalmente E es un subanillo conmutativo de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Observación. $M(x,y)M(x',y') = xx'I + (xy'+yx')J + yy'(2J-I) = (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J$.
3. Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x,y) \text{ es invertible en } E \Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; (xx'-yy')I + (xy'+yx'+2yy')J = I$$
$$\Leftrightarrow \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2/; \begin{cases} xx'-yy' = 1 \\ yx' + (x+2y)y' = 0 \end{cases} \text{(porque la familia } (I,J) \text{ es libre)} \quad (*).$$

El determinante de este sistema de incógnitas (x',y') es $x(x+2y)+y^2 = (x+y)^2$.
• Si $x+y \neq 0$, el sistema $(*)$ admite una y solo una solución. En este caso, $M(x,y)$ es invertible en E.
• Si $x+y=0$, el sistema $(*)$ se escribe $\begin{cases} x(x'+y') = 1 \\ -x(x'+y') = 0 \end{cases}$ y no tiene solución. En este caso, $M(x,y)$ no es invertible en E.

$$\boxed{M(x,y) \text{ es invertible en } E \Leftrightarrow x+y \neq 0.}$$

Observación. porque $I \in E$, $M(x,y)$ es invertible en E si y solo si $M(x,y)$ es invertible en $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Se define $X = xI + yJ$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) De acuerdo a 1), $X^2 = (x^2-y^2)I + (2xy+2y^2)J$. Entonces

$$X^2 = I \Leftrightarrow x^2-y^2 = 1 \text{ y } 2xy+2y^2 = 0 \text{ (porque la familia } (I,J) \text{ es libre)}$$
$$\Leftrightarrow (y=0 \text{ y } x^2=1) \text{ o } (y=-x \text{ y } 0=1) \Leftrightarrow (y=0 \text{ y } x=1) \text{ o } (y=0 \text{ y } x=-1)$$
$$\Leftrightarrow X = I \text{ o } X = -I.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{I,-I\}.}$$

   (b) $X^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = 0 \text{ y } 2xy+2y^2 = 0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ y } x^2=0) \text{ o } (y=-xy0=0) \Leftrightarrow y=-x.$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x(I-J),\ x \in \mathbb{R}\}.}$$

   Observación. La ecuación $X^2 = 0$, de grado 2, admite una infinidad de soluciones en E, lo que demuestra de nuevo que $(E,+,\times)$ no es un cuerpo.
   (c) $X^2 = X \Leftrightarrow x^2-y^2 = x \text{ y } 2xy+2y^2 = y \Leftrightarrow y(2x+2y-1) = 0 \text{ y } x^2-y^2 = x$
$$\Leftrightarrow (y=0 \text{ y } x^2=x) \text{ o } (2(x+y)=1 \text{ y } (x+y)(x-y)=x)$$
$$\Leftrightarrow (X=0 \text{ o } X=I) \text{ o } (2(x+y)=1 \text{ y } x-y=2x)$$
$$\Leftrightarrow X=0 \text{ o } X=I.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0,I\}.}$$

5. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se define $N = J-I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $M(x,y) = xI + y(I+N) = (x+y)I + yN$.
   Porque I y N conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON proporciona

$$(M(x,y))^n = ((x+y)I+yN) = (x+y)^n I + ny(x+y)^{n-1}N \text{ (pues } N^k = 0 \text{ para } k \geqslant 2)$$
$$= \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x,y))^n = \begin{pmatrix} (x+y)^n & ny(x+y)^{n-1} \\ 0 & (x+y)^n \end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 1466 ▲005609

$\{0\}$ es un ideal bilateral del anillo $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.
Sea I un ideal no nulo del anillo $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$. Demostrar que $I=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Existe una matriz A no nula en I. Para todo cuádruple de índices (i,j,k,l), I contiene el producto

$$E_{i,j}AE_{k,l} = \sum_{1\leqslant u,v\leqslant n} a_{u,v}E_{i,j}E_{u,v}E_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}.$$

A es no nulo y podemos elegir j y k tales que $a_{j,k}$ sea no nulo.
I, entonces contiene $a_{j,k}E_{i,l}\frac{1}{a_{j,k}}I_n = E_{i,l}$. Finalmente, I contiene todas las matrices elementales y por lo tanto, todas las sumas del tipo $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}I_nE_{i,j} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, es decir todo $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Los ideales bilaterales del anillo } (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times) \text{ son } \{0\} \text{ y } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Solución del ejercicio 1467 ▲005618

No, pues $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0\neq n=\mathrm{tr}(I_n)$.

Solución del ejercicio 1468 ▲005619

Sea f una forma lineal en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Para $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, se escribe $f(A)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\alpha_{i,j}a_{i,j}$, donde los $\alpha_{i,j}$ son independientes de A (los $\alpha_{i,j}$ son los $f(E_{i,j})$). Sean i y j dos enteros distintos tomados de $[\![1,n]\!]$.

$$\alpha_{i,i}=f(E_{i,i})=f(E_{i,j}E_{j,i})=f(E_{j,i}E_{i,j})=f(E_{j,j})=\alpha_{j,j},$$

y

$$\alpha_{i,j}=f(E_{i,j})=f(E_{i,i}E_{i,j})=f(E_{i,j}E_{i,i})=f(0)=0.$$

Finalmente, denotando α el valor común de los $\alpha_{i,i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, para toda matriz A se tiene $f(A)=\alpha\sum_{i=1}^n a_{i,i}=\alpha\,\mathrm{tr}A$, donde α es independiente de A. (Recíprocamente, los $f=\alpha\,\mathrm{tr}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, son formas lineales verificando $\forall(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB)=f(BA)$.)

Solución del ejercicio 1469 ▲005620

Porque $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2+\left(\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2=1$, existe un único real $\theta_n\in[-\pi,\pi[$ tal que

$$\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\theta_n=\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

La matriz A_n se escribe $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\operatorname{sen}\theta_n \\ \operatorname{sen}\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ y entonces

$$(A_n)^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\operatorname{sen}(n\theta_n) \\ \operatorname{sen}(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\times o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Luego, denotando ε el signo de a, $\theta_n = \varepsilon \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y se deduce que

$$n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\operatorname{sen}(\theta_n) = n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 1470 ▲005621

Sean i y j dos índices tomados de $[\![1,n]\!]$.

$$f(E_{i,j}) = E_{i,j}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l},$$

y rellenando coeficiente a coeficiente, se encuentra la matriz definida por bloques $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {}^tA \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 1471 ▲005625

Sea p un entero superior o igual que 2.

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 + A^{p-2}BA^2 - \cdots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}(A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1}) = \sum_{k=0} A^{p-k-1}(AB-BA)A^k = \sum_{k=0} A^{p-k-1}AA^k \sum_{k=0} A^p \\ &= pA^p. \end{aligned}$$

Así $2010\times\operatorname{tr}(A^{2010}) = \operatorname{tr}(2010\,A^{2010}) = \operatorname{tr}(A^{2010}B) - \operatorname{tr}(BA^{2010}) = 0$ y $\operatorname{tr}(A^{2010}) = 0$.

Solución del ejercicio 1472 ▲005628

---

1. Sean p el índice de nilpotencia de A y q el índice de nilpotencia de B. Porque A y B conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON proporciona

$$(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

En esta suma, • si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ y entonces $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
• si $k \leqslant p-1$, entonces $p+q-1-k \geqslant q$ y aún una vez $B^{p+q-1-k} = 0$.
Finalmente, $(A+B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ y $A+B$ es nilpotente de índice menor o igual a $p+q-1$. Las sumas que definen $\exp A$, $\exp B$ y $\exp(A+B)$ son finitas porque A, B y $A+B$ son nilpotentes y

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j\right) \text{ (todas las sumas son finitas)} \\ &= \exp A \times \exp B.\end{aligned}$$

2. Si A es nilpotente, $-A$, lo es también y conmuta con A. Entonces $\exp A \times \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$. $\exp A$ es invertible a la izquierda y por lo tanto, invertible y $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.
3. Las potencias de A son bien conocidas e inmediatamente, se encuentra

$$\exp A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 1473 ▲000451

1. Sea $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y $x \notin \mathbb{Q}$. Por reducción al absurdo supongamos que $r+x \in \mathbb{Q}$, entonces existen dos enteros p', q' tales que $r+x = \frac{p'}{q'}$. Entonces $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$, lo que es absurdo porque $x \notin \mathbb{Q}$. De la misma manera si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$, entonces $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$. Y por lo tanto $x = \frac{p'}{q'} \frac{q}{p}$. Lo cual es absurdo.
2. *Método "clásico"*. Se supone, por contradicción, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, entonces existen dos enteros p, q tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Además, podemos suponer que la fracción es irreducible (p y q son primos entre sí). Al elevar al cuadrado la igualdad se tiene $q^2 \times 2 = p^2$. Entonces p^2 es un número par, esto implica que p es un número par (si no está convencido escribir la contrapositiva "p impar $\Rightarrow p^2$ impar"). Entonces $p = 2 \times p'$, con $p' \in \mathbb{N}$, de donde $p^2 = 4 \times p'^2$. Nosotros se obtiene $q^2 = 2 \times p'^2$. Se deduce ahora que q^2 es par y como en el caso anterior que q es par. Se obtiene así una contradicción porque p y q siendo ambas pares la fracción $\frac{p}{q}$ no es irreducible y puede ser simplificado. Entonces $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Otro método. Se supone por reducción al absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, para dos enteros $p, q \in \mathbb{N}^*$. Entonces se tiene $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Se considera el siguiente conjunto :

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto $\mathcal{N}$ es una parte de $\mathbb{N}^*$ que no es vacío porque $q \in \mathcal{N}$. Se puede entonces tomar el elemento más pequeño de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particular $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Se define ahora n_1 de la manera siguiente : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Sucede que n_1 pertenece también a $\mathcal{N}$ porque por un lado $n_1 \in \mathbb{N}$ (pues n_0 y $n_0 \cdot \sqrt{2}$ son enteros) y por otro lado $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$.

Demostrar ahora que n_1 es más pequeño que n_0. Como $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, entonces $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ y es no nulo.

Balance : se ha encontrado $n_1 \in \mathcal{N}$ estrictamente más pequeño que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Esto proporciona una contradicción. Conclusión : $\sqrt{2}$ no es un número racional.

3. Sean r, r' dos racionales con $r < r'$. Denotemos $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. Por una parte $x \in]r, r'[$ (pues $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) y de acuerdo con las dos primeras preguntas $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$, por lo tanto $x \notin \mathbb{Q}$. Y por lo tanto x es un número irracional comprendido entre r y r'.

Solución del ejercicio 1479 ▲000457

1. Sea $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, con $\text{mcd}(\alpha, \beta) = 1$. Para $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, entonces $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Después de la multiplicación por β^n se obtiene la siguiente igualdad :

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \cdots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n = 0.$$

Factorizando todos los términos de esta suma excepto el primero por β, se escribe $a_n \alpha^n + \beta q = 0$. Esto implica que β divide $a_n \alpha^n$, pero como β y α^n son primos entre sí, entonces por el lema de Gauss β divide a_n. De manera similar, factorizando por α todos los términos de la suma anterior, excepto el último, se obtiene $\alpha q' + a_0 \beta^n = 0$ y por un razonamiento similar α divide a_0.

2. Denotemos $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Entonces $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Y por lo tanto $\left(\gamma^2 - 5\right)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Se elige $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$, que se escribe aún $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Dada la elección de p, se tiene $p(\gamma) = 0$. si se supone que γ es racional, entonces $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ y de acuerdo a la primera pregunta α divide el término constante de p, es decir 1. Entonces $\alpha = \pm 1$. Igualmente β divide el coeficiente del término de mayor grado de p, por lo tanto β divide 1, sea $\beta = 1$. Así $\gamma = \pm 1$, este ¡lo cual es obviamente absurdo !

Solución del ejercicio 1481 ▲000459

1. Sea $p = 1997\,1997 \ldots 1997$ y $q = 1\,0000\,0000 \ldots 0000 = 10^{4n}$. Entonces $N_n = \frac{p}{q}$.
2. Se observa que $10\,000 \times M = 1997, 1997\,1997 \ldots$ Entonces $10\,000 \times M - M = 1997$; por lo tanto $9999 \times M = 1997$, de donde $M = \frac{1997}{9999}$.
3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. De donde $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Solución del ejercicio 1483 ▲000461

Por reducción al absurdo supongamos que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ sea un racional. Entonces se escribe $\frac{p}{q}$, con $p \geqslant 0, q > 0$ enteros. Se obtiene $q\ln 3 = p\ln 2$. Tomando la exponencial se tiene : $\exp(q\ln 3) = \exp(p\ln 2)$ sea $3^q = 2^p$. Si $p \geqslant 1$, entonces 2 divide 3^q, por lo tanto 2 divide 3, lo que es absurdo. Entonces $p = 0$. Esto nos lleva a la igualdad $3^q = 1$, por lo tanto $q = 0$. La única solución posible es $p = 0$, $q = 0$. Lo que contradice $q \neq 0$. Entonces $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ es irracional.

Solución del ejercicio 1486 ▲000506

Sea (u_n) una sucesión que converge en $\ell \in \mathbb{R}$. Por definición

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N \;\; |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Se escoge $\varepsilon = 1$, se obtiene el N correspondiente. Entonces, para $n \geqslant N$, se tiene $|u_n - \ell| < 1$; dicho de otro modo $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Denotemos $M = \max\limits_{n=0,\dots,N-1} \{u_n\}$ y luego $M' = \max(M, \ell + 1)$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M'$. Así mismo poniendo $m = \min\limits_{n=0,\dots,N-1} \{u_n\}$ y $m' = \min(m, \ell - 1)$ se obtiene para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m'$.

Solución del ejercicio 1487 ▲000507

Es fácil convencerse de que (u_n) no tiene límite, pero más difícil dar una prueba formal. En efecto, ya que no sabemos que una sucesión (u_n) converge, no se puede escribir $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, es un número que no está definido. Por ejemplo, la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} : (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

no tiene sentido. Por otro lado, esto es lo que se puede decir : *Como la sucesión $1/n$ tiende a 0, cuando $n \to \infty$, la sucesión u_n es convergente si y solo si la sucesión $(-1)^n$ lo es. Además, en el caso en que ambas sean convergentes, ellas tienen el mismo límite.* Esta afirmación proviene simplemente de teorema siguiente :

Teorema : Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones que convergen a dos límites ℓ y ℓ'. Entonces la sucesión (w_n) definida por $w_n = u_n + v_n$ es convergente (por lo tanto se puede hablar de su límite) et $\lim w_n = \ell + \ell'$. Además, no es cierto que toda sucesión convergente deba ser necesariamente creciente y mayorada o decreciente y minorada. Por ejemplo, $(-1)^n/n$ es una sucesión convergente hacia 0, pero que no es creciente, ni decreciente.

Aquí hay un ejemplo de cómo escribir el ejercicio. Se quiere demostrar que la sucesión (u_n) no es convergente. Se supone pues por reducción al absurdo que es convergente y se denota $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. (Esta expresión tiene sentido, ya que suponemos que u_n converge).

Observación Una *sub-sucesión* de (u_n) (también se dice *sucesión extraída* de (u_n)) es una sucesión (v_n) de la forma $v_n = u_{\phi(n)}$, donde ϕ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Esta función ϕ corresponde "a la elección de los índices que se quiere mantener" en nuestra sub-sucesión. Por ejemplo, si no se quiere quedar en la sucesión (u_n) que los términos para los cuales n es múltiplo de tres, se puede preguntar $\phi(n) = 3n$, es decir $v_n = u_{3n}$.

Se consideran ahora las sub-sucesiones $v_n = u_{2n}$ y $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n). Se tiene que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ y que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Pero se tiene el siguiente teorema sobre las sub-sucesiones de una sucesión convergente :

Teorema : Sea (u_n) una sucesión convergente al límite ℓ (el teorema es aún cierto si $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$). Entonces, toda sub-sucesión (v_n) de (u_n) tiene el límite ℓ. En consecuencia, aquí, se tiene que $\lim v_n = \ell$ y

$\lim w_n = \ell$, por lo tanto $\ell = 1$ y $\ell = -1$, lo cual es una contradicción. La hipótesis de que (u_n) es convergente es, por lo tanto falsa. Entonces (u_n) no converge.

Solución del ejercicio 1492 ▲003066

Primero se supone $\left|r-\sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$. Esto implica $|r| \leqslant \sqrt{a}+1$. Se mayora $|r^2-a|$:

$$|r^2-a| = |r-\sqrt{a}| \times |r+\sqrt{a}| \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(|r|+\sqrt{a}\right) \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a}+1\right)$$

Minoremos $|r^2-a|$, poniendo $r = \frac{p}{q}$, $a = \frac{m}{n}$.

$$|r^2-a| = \left|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{m}{n}\right| = \left|\frac{np^2-mq^2}{nq^2}\right| \geqslant \frac{1}{nq^2}$$

La última desigualdad proviene de que el numerador np^2-mq^2 no es nulo (si no $\sqrt{a}$ es racional). Se deduce de estas dos mayoraciones :

$$\frac{1}{nq^2} \leqslant |r^2-a| \leqslant |r-\sqrt{a}| \times \left(2\sqrt{a}+1\right)$$

Y por lo tanto :

$$|r-\sqrt{a}| \geqslant \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)}\frac{1}{q^2}.$$

Esta desigualdad también se verifica claramente si $\left|r-\sqrt{a}\right| > \frac{1}{q^2}$. La constante $C = \frac{1}{n(2\sqrt{a}+1)}$ sirve.

Solución del ejercicio 1493 ▲003067

$\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a+\sqrt{b}} \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b} \Leftrightarrow b+4xy-4\sqrt{bxy} = (x+y-a)^2$.
$\Rightarrow : bxy = r^2 \Rightarrow \sqrt{b}\left(1-\frac{2r}{b}\right) = x+y-a \Rightarrow r = \frac{b}{2}$ y $x+y = a \Rightarrow (x-y)^2 = a^2-b$.
$\Leftarrow : a^2-b = u^2$. Se toma $x = \frac{a+u}{2}$ y $y = \frac{a-u}{2} \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy} = a+\sqrt{b}$.

Solución del ejercicio 1494 ▲003144

$= \frac{q-1}{2}$.

Solución del ejercicio 1495 ▲003145

Si $p \in P : \exists\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{n}{p} \in A$, con $n \wedge p = 1$. Así para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, se tiene $\frac{nx+py}{p} \in A$, por lo tanto $\frac{1}{p}\mathbb{Z} \subset A$.

Solución del ejercicio 1497 ▲003147

1. Si $x_n = \frac{p}{q} \neq 0$: $\frac{1}{k_n} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{1}{k_n-1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{k_np-q}{k_nq}$ y $0 \leqslant k_np-q < p$. Entonces la sucesión de numeradores es estrictamente decreciente.
2. Porque $x_{n+1} = \frac{p}{q} - \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_n-1} - \frac{1}{k_n}$.

3. $n_p > n_{p-1}(n_{p-1}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-1}} + \frac{1}{n_p} < \frac{1}{n_{p-1}-1}$.
$n_{p-1}-1 \geqslant n_{p-2}(n_{p-2}-1) \Rightarrow \frac{1}{n_{p-2}} + \frac{1}{n_{p-1}-1} \leqslant \frac{1}{n_{p-2}-1}$, etc.
Finalmente, $x < \frac{1}{n_0-1} \Rightarrow n_0 = k_0$.
(cf. INA opt. 1977)

Solución del ejercicio 1498 ▲003148

1. Para $x = \frac{p}{q}$, se puede tomar : $m = qc - pd$, y $n = pb - qa$.
2. (m,n) es único módulo un factor.
3. $\frac{ma+nc}{mb+nd} - \frac{a}{b} = \frac{n(bc-ad)}{b(mb+nd)}$, y $\frac{c}{d} - \frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{m(bc-ad)}{d(mb+nd)}$.

Solución del ejercicio 1499 ▲003149

1. $x = -\frac{1}{2}$.
2. $x = \frac{2}{3}$.
3. Sin solución.

Solución del ejercicio 1500 ▲003150

1. $x^y = y^x \Leftrightarrow \frac{p^{p'q}}{q^{p'q}} = \frac{p'^{pq'}}{q'^{pq'}}$ (formas irreducibles)
$\Rightarrow \begin{cases} p^{p'q} = p'^{pq'} \\ q^{p'q} = q'^{pq'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^b = p'^a \\ q^b = q'^a. \end{cases}$
Como $a \wedge b = 1$, se descompone p, p', q, q' en factores primos $\Rightarrow$ el resultado.
2. $\left(pq' = m^a n^b,\ p'q = m^b n^a,\ m \wedge n = 1,\ a < b\right) \Rightarrow d = m^a n^a$, $a = n^{b-a}$ y $b = m^{b-a}$.
3. $m \geqslant n+1$, entonces si $b-a \geqslant 2$, se tiene : $m^{b-a} - n^{b-a} = (m-n)(m^{b-a-1} + \cdots + n^{b-a-1}) > b-a$.
Así $b-a = 1 = m-n$, $a = n$, $x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Estos valores son adecuados.

Solución del ejercicio 1501 ▲005209

1. Sean m y n dos enteros naturales mayores que 2.
$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ a^n = m \times b^n.$$
En primer lugar, si $b = 1$, $m = a^n$ y m es una potencia n-ésima perfecta. Luego, $a = 1$ es imposible porque $m \times b^n \geqslant 2$. Se supone entonces que a y b sean números enteros mayores a 2 (y que $a^n = m \times b^n$). El exponente de todo factor primo de a^n o de b^n es múltiplo de n y por la unicidad de la descomposición en factores primos, lo mismo es cierto para todo factor primo de m. Esto demuestra que, si $\sqrt[n]{m}$ es racional, m es una potencia n-ésima perfecta. Recíprocamente, si m es una potencia n-ésima perfecta, $\sqrt[n]{m}$ es un entero y en particular un número racional.
En resumen :

$$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2,\ \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ es una potencia } n\text{ -ésima perfecta.}}$$

Así, si m no es una potencia n-ésima perfecta, $\sqrt[n]{m}$ es irracional.

2.

$$\log 2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 10^a = 2^b$$
$$\Rightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 /\ 5^a = 2^{b-a}.$$

Porque $5^a > 1$, esto impone $b - a \in \mathbb{N}^*$. Pero entonces, la igualdad anterior es imposible para $a \neq 0$ y $b \neq 0$ por unicidad de la descomposición en factores primos de un entero natural mayor o igual que 2. Se ha demostrado por absurdo que

$$\boxed{\log 2 \text{ es irracional.}}$$

3. Se supone por reducción al absurdo que π sea racional. Entonces existen dos enteros naturales no nulos p y q tales que $\pi = \frac{p}{q}$. Para n entero natural no nulo dado, se escribe

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(p-qx)^n \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{n!}\int_0^{p/q} x^n(p-qx)^n \operatorname{sen} x\, dx.$$

• En primer lugar, para $0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{q}$, se tiene $0 \leqslant x(p-qx) = \frac{p}{2q}\left(p - \frac{p}{2q} \times q\right) = \frac{p^2}{4q}$, y entonces (ya que $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, para $x \in [0,\pi]$),

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{p/q} \left(\frac{p^2}{4q}\right)^n dx = \frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n.$$

Según el resultado admitido por el enunciado, $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, y así por el teorema del límite por encuadramiento, la sucesión (I_n) converge y $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

• Luego, porque para x elemento de $[0,\pi]$, se tiene $x^n(p-qx)^n \operatorname{sen} x \geqslant 0$, para n entero natural no nulo dado, se tiene

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(p-qx)^n \operatorname{sen} x\, dx \geqslant \frac{1}{n!}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n(p-qx)^n \operatorname{sen} x\, dx$$
$$\geqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{p}{4q}\left(p - \frac{p}{4q} \times q\right)\right)^n \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}n!}\left(\frac{3p^2}{16q}\right)^n > 0.$$

Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

• Se debe verificar en fin que, para todo entero natural no nulo n, I_n es un entero (relativo).

Sea $P_n = \frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n$. P_n es un polinomio de grado $2n$ y 0 y $\frac{p}{q}$ son raíces de orden n de P_n y entonces, para $0 \leqslant k \leqslant n$, raíces de orden $n-k$ de $P_n^{(k)}$. En particular, $P_n^{(k)}(0)$ y $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ son, para $0 \leqslant k < n$, enteros relativos. Igualmente, ya que $\deg P_n = 2n$, para $k \geqslant 2n+1$, $P_n^{(k)} \geqslant 0$ y, en particular, $P_n^{(k)}(0)$ y $Pn^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ son, para $k \geqslant 2n+1$, enteros relativos. Sea k un entero tal que $n \leqslant k \leqslant 2n$.

$$\frac{1}{n!}x^n(p-qx)^n = \frac{1}{n!}x^n\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^{n-i}(-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{n!}p^{n-i}(-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n}\frac{C_n^{k-n}}{n!}p^{2n-k}(-1)^{k-n}q^{k-n}x^k.$$

Entonces se sabe que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times (\text{coeficiente de } x^k) = (-1)^{k-n}\frac{k!}{n!}C_n^{k-n}p^{2n-k}q^{k-n}.$$

lo que demuestra que $P_n^{(k)}(0)$ es entero relativo (ya que $n \leqslant k \leqslant 2n$). Luego, como $P_n\left(\frac{p}{q}-x\right) = P_n(x)$, todavía se tiene $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}-x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ y, en particular $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Se ha demostrado que para todo entero natural k, $P_n^{(k)}(0)$ y $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ son enteros relativos.

Demostremos entonces que I_n es un entero relativo. Una primera integración por partes proporciona :

$$I_n = \left[-P_n(x)\cos x\right]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx.$$

cos toma valores enteros en 0 y $\frac{p}{q} = \pi$ del mismo modo que P_n. Así,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Una segunda integración por partes proporciona :

$$\int_0^{p/q} P_n'(x)\cos x\,dx = \left[P_n'(x)\operatorname{sen} x\right]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x)\operatorname{sen} x\,dx.$$

Si se toman valores enteros en 0 y $\frac{p}{q} = \pi$, del mismo modo P_n' y

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x)\operatorname{sen} x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

renovando las integraciones por partes y dado que seno y coseno toman valores enteros en 0 y π, así que las derivadas sucesivas de P_n, se deduce que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\operatorname{sen} x\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Pero,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{p/q} \frac{1}{n!}(-q)^n(2n)!\operatorname{sen} x\,dx = 2(-q)^n(2n)(2n-1)\cdots(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Así para todo natural n, I_n es un entero relativo, estrictamente positivo de acuerdo con lo anterior. Se deduce que para todo natural n, $I_n \geqslant 1$. Esta última verificación contradice el hecho de que la sucesión (I_n) converge a 0. La hipótesis π es racional es, por lo tanto absurda y en consecuencia,

$$\boxed{\pi \text{ es irracional.}}$$

4. Demostrar por inducción que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,dt$.

• Para $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,dt = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}-1$ y entonces, $\mathrm{e} = 1 + \int_0^1 \mathrm{e}^t\,dt = \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!}\mathrm{e}^t\,dt$.

• Sea $n \geqslant 0$. Se supone que $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt$. Una integración por partes proporciona :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)\times n!} \mathrm{e}^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \, dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \, dt,$$

y por lo tanto,

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \, dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \, dt.$$

El resultado es demostrado por inducción. Sea n un entero natural no nulo. De acuerdo con lo anterior,

$$0 < \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, dt < \mathrm{e} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Se supone entonces por reducción al absurdo que e sea racional. Entonces, existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \, e = \frac{a}{b}$. Sea n un entero natural no nulo cualquiera. De acuerdo con lo anterior, se tiene $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} < \frac{3}{(n+1)!}$, que todavía se escribe luego de multiplicar los tres miembros por $bn!$

$$0 < a \times n! - b \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

en particular, para $n = 3b$, se tiene $0 < a \times (3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Pero esto es imposible porque $a \times n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ es un entero relativo. Por lo tanto, es absurdo suponer que e es racional y finalmente,

$$\boxed{\text{e es irracional.}}$$

5. Una ecuación de tercer grado cuyas soluciones son $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$ es

$$(X - \cos\tfrac{2\pi}{7})(X - \cos\tfrac{4\pi}{7})(X - \cos\tfrac{6\pi}{7}) = 0,$$

o aún

$$X^3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) X^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right) X$$
$$- \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculemos entonces estas tres coeficientes. Sea $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/7}$. Porque $\omega^7 = 1$ y que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, se tiene según las fórmulas de EULER

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

después,

$$\cos\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7} + \cos\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{6\pi}{7} + \cos\tfrac{4\pi}{7}\cos\tfrac{6\pi}{7} =$$
$$\frac{1}{4}((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4)) =$$
$$\tfrac{1}{4}((\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3) + (\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2)) =$$
$$\frac{2(-1)}{4} = -\tfrac{1}{2},$$

y enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4)$$
$$= \frac{1}{8}(\omega^3+\omega^6+\omega+\omega^4)(\omega^3+\omega^4)$$
$$= \frac{1}{8}(\omega^6+1+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega) = \frac{1}{8}.$$

Los tres números $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ y $\cos\frac{6\pi}{7}$ son, por lo tanto la solución de la ecuación $X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}=0$ o aún de la ecuación

$$8X^3+4X^2-4X-1=0.$$

Demostrar que esta ecuación no admite raíz racional. En caso contrario, si, para p entero relativo no nulo y q entero natural no nulo tal que p y q son primos entre sí, el número $r=\frac{p}{q}$ es la raíz de esta ecuación, entonces $8p^3+4p^2q-4pq^2-q^3=0$. Esto todavía se puede escribir $8p^3=q(-4p^2+4pq+q^2)$, lo que demuestra que q divide $8p^3$.
Como q es primo con p y así con p^3, se deduce del teorema de GAUSS que q divide 8. Igualmente, la igualdad $q^3=p(8p^2+4pq-4q^2)$ demuestra que p divide q^3 y así como p divide 1. Así, $p\in\{-1,1\}$ y $q\in\{1,2,4,8\}$ o aún $r\in\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right\}$. Entonces se verifica fácilmente que ninguno de estos números es raíz de la ecuación considerada y por lo tanto, esta ecuación no tiene raíz racional. En particular,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{7}\text{ es irracional.}}$$

6. Se sabe que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son irracionales, pero esto no impone nada en la suma $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Sea $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

$$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\Rightarrow(\alpha-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2\Rightarrow\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2=8+2\sqrt{15}$$
$$\Rightarrow(\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha-6)^2=60\Rightarrow\alpha^4+8\alpha^2-24=4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2-6).$$

Si ahora suponemos que α es racional, como $\sqrt{2}$ es irracional, tenemos necesariamente $\alpha(\alpha^2-6)=0$ (en caso contrario, $\sqrt{2}=\dfrac{\alpha^4+8\alpha^2-24}{4\alpha(\alpha^2-6)}\in\mathbb{Q}$). Pero α no es ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (pues $\alpha^2>2+3+5=10>6$). Así

$$\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\text{ es irracional.}}$$

Solución del ejercicio 1502 ▲005214

Sean k un entero natural no nulo y n un entero natural superior o igual a k.

$$\binom{n+10\times k!}{k} = \frac{(n+10\times k!)(n+10\times k!-1)\cdots(n+10\times k!-k+1)}{k!}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)+10\times k!\times K}{k!}\quad\text{(para cierto entero }K)$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+10K=\binom{n}{k}+10K.$$

La diferencia $\binom{n+10\times k!}{k}-\binom{n}{k}$ es, por lo tanto divisible por 10. Así, $\binom{n+10\times k!}{k}$ y $\binom{n}{k}$ tienen el mismo dígito de las unidades en la base 10. Así, $\forall n \geqslant k$, $u_{n+10\times k!}=u_n$ y así la sucesión u es, por lo tanto $10k!$-periódica. Entonces se sabe que

$$\boxed{0,u_ku_{k+1}u_{k+2}\dots \text{ es racional.}}$$

Solución del ejercicio 1503 ▲005243

Sea x un irracional y $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de racionales que tienden a x (p_n entero relativo y q_n entero natural no nulo, la fracción $\frac{p_n}{q_n}$ no es necesariamente irreducible). Se supone que la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a $+\infty$. Entonces :

$$\exists A>0/\ (\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\geqslant n_0/\ q_n\geqslant A)$$

o aún, existe una sucesión extraída $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es acotada. La sucesión $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales que es acotada, y por lo tanto, esta sucesión toma solo un número finito de valores. Pero entonces, se puede extraer de la sucesión $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ y así de la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que es constante y en particular convergente. La sucesión $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}=(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de enteros relativos convergente y, por lo tanto, es constante a partir de cierto rango. Así, se puede extraer de la sucesión $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ y así de la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $(p_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ constante.
La sucesión $(q_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es igualmente constante porque se extrae de la sucesión constante $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ y finalmente, se ha extraído de la sucesión $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sub-sucesión $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ constante. Pero la sucesión $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a x y por lo tanto, la sucesión extraída $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a x. Porque $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ es constante, se tiene $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}=x$ y entonces x es racional. Contradicción.
Así la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$. Finalmente, si $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a $+\infty$, se puede extraer de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sub-sucesión acotada $(p_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Pero entonces, la sucesión $(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $x=0$ contradiciendo la irracionalidad de x. En fin, la sucesión $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 1504 ▲000464

Explicitar la fórmula de $\max(x,y)$. Si $x\geqslant y$, entonces $|x-y|=x-y$, por lo tanto $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x$. Del mismo modo si $x\leqslant y$, entonces $|x-y|=-x+y$, por lo tanto $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=y$. Para tres elementos, se tiene $\max(x,y,z)=\max\big(\max(x,y),z\big)$, entonces de acuerdo con las fórmulas para dos elementos :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z)&=\frac{\max(x,y)+z+|\max(x,y)-z|}{2}\\&=\frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+z+\left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)-z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 1505 ▲000465

$(u_{2k})_k$ tiende a $+\infty$ y entonces A no tiene cota superior, así A no tiene cota superior (sin embargo algunos escriben entonces $\sup A=+\infty$). Por otra parte, todos los valores de (u_n) son positivos y $(u_{2k+1})_k$ tiende a 0, por lo tanto $\inf A=0$.

Solución del ejercicio 1506 ▲000466

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Los mayorantes : $[1,+\infty[$. Los minorantes : $]-\infty,0]$. La cota superior : 1. La cota inferior : 0. El elemento más grande : 1. El elemento más pequeño 0.
2. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$. Los mayorantes : $[1,+\infty[$. Los minorantes : $]-\infty,0]$. La cota superior : 1. La cota inferior : 0. No existe ni elemento el más grande ni el elemento más pequeño.
3. $\mathbb{N}$. Sin mayorantes, sin cota superior, ni de mayor elemento. Los minorantes : $]-\infty,0]$. La cota inferior : 0. El elemento más pequeño : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Los mayorantes : $[\frac{5}{4},+\infty[$. Los minorantes : $]-\infty,-1]$. La cota superior : $\frac{5}{4}$. La cota inferior : -1. El elemento más grande : $\frac{5}{4}$. Sin elemento más pequeño.

Solución del ejercicio 1516 ▲000476

1. Sean A y B dos partes acotadas de $\mathbb{R}$. Se sabe que $\sup A$ es una cota superior de A, es decir para todo $a \in A$, $a \leqslant \sup A$. Igualmente, para todo $b \in B$, $b \leqslant \sup B$. Se quiere demostrar que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A+B$. Sea así $x \in A+B$. Esto significa que x es de la forma $a+b$, para un $a \in A$ y un $b \in B$. Por lo tanto $a \leqslant \sup A$, y $b \leqslant \sup B$ y $x = a+b \leqslant \sup A + \sup B$. Como este razonamiento es válido para todo $x \in A+B$ eso significa que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A+B$.
2. Se quiere demostrar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ no es un mayorante de $A+B$. Así se toma un $\varepsilon > 0$ cualquiera, y se quiere demostrar que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ no es mayorado de $A+B$. Por lo tanto, en lo que sigue nos abstenemos de modificar ε. Como $\sup A$ es la menor de las cotas superiores de A, $\sup A - \varepsilon/2$ no es un mayorante de A. Esto significa que existe un elemento a de A tal que $a > \sup A - \varepsilon/2$. *Cuidado : $\sup A - \varepsilon/2$ no está forzosamente en A ; $\sup A$ tampoco.* De la misma forma, existe $b \in B$ tal que $b > \sup B - \varepsilon/2$. Pero el elemento x definido por $x = a+b$ es un elemento de $A+B$, y verifica $x > (\sup A - \varepsilon/2) + (\sup B - \varepsilon/2) = \sup A + \sup B - \varepsilon$. Esto implica que $\sup A + \sup B - \varepsilon$ no es una un mayorante de $A+B$.
3. $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A+B$ de acuerdo a la parte 1. Pero, de acuerdo a la parte 2., desde que se toma un $\varepsilon > 0$, $\sup A + \sup B - \varepsilon$ no es un mayorante de $A+B$. Entonces $\sup A + \sup B$ es de hecho la menor de las cotas superiores de $A+B$, por lo que es la cota superior de $A+B$. Dicho de otra manera $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Solución del ejercicio 1517 ▲000477

1. Cierto.
2. Falso. Esto es cierto con la hipótesis $B \subset A$ y no $A \subset B$.
3. Cierto.
4. Falso. Existe igualdad.
5. Cierto.
6. Cierto.

Solución del ejercicio 1527 ▲005210

A y B son dos partes no vacías y mayoradas de $\mathbb{R}$ y por lo tanto, admiten cotas superiores denotadas respectivamente α y β. Para todo $(a,b) \in A \times B$, se tiene $a+b \leqslant \alpha+\beta$. Esto demuestra que $A+B$ es una parte no vacía y mayorada de $\mathbb{R}$, y así que $\sup(A+B)$ existe en $\mathbb{R}$. (Además, ya que $\alpha+\beta$ es una cota superior de $A+B$, se tiene $\sup(A+B) \leqslant \alpha+\beta$).
Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a \leqslant \alpha$ y $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b \leqslant \beta$, y por lo tanto, tales que $\alpha+\beta-\varepsilon < a+b \leqslant \alpha+\beta$.
En resumen,

$$\textbf{(1)} \quad \forall (a,b) \in A \times B,\ a+b \leqslant \alpha+\beta \ \text{ y } \ \textbf{(2)} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B/\ a+b > \alpha+\beta-\varepsilon.$$

Se deduce que

$$\boxed{\sup(A+B) = \alpha+\beta = \sup A + \sup B.}$$

Para las cotas inferiores, se puede rehacer el trabajo anterior adaptándolo o aplicar el resultado anterior a los conjuntos $-A$ y $-B$, pues $\inf A = -\sup(-A)$.

Solución del ejercicio 1528 ▲005211

Se define para n entero natural no nulo $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de manera que $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{0, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{3}-1, \frac{1}{4}+1, \frac{1}{5}-1, \dots\right\}$. Para $n \geqslant 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 < u_{2n} \leqslant \frac{3}{2}$. Para $n \geqslant 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_{2n-1} \leqslant 0$. Así, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_n \leqslant \frac{3}{2}$. Entonces, $\sup A$ y $\inf A$ existen en $\mathbb{R}$ y además $-1 \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \frac{3}{2}$. Luego, $\frac{3}{2} = u_2 \in A$. Entonces,

$$\boxed{\sup A = \max A = \frac{3}{2}.}$$

En fin, para cada entero natural no nulo n, se tiene $-1 \leqslant \inf A \leqslant u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Si se hace tender n a infinito en este encuadramiento, se obtiene

$$\boxed{\inf A = -1}$$

(esta cota inferior no es un mínimo).

Solución del ejercicio 1529 ▲005212

Pongamos $B = \{|y-x|,\ (x,y) \in A^2\}$. A es una parte no vacía y acotada de $\mathbb{R}$, y entonces $m = \inf A$ y $M = \sup A$ existen en $\mathbb{R}$. Para $(x,y) \in A^2$, se tiene $m \leqslant x \leqslant M$ y $m \leqslant y \leqslant M$, y entonces $y - x \leqslant M - m$ y $x - y \leqslant M - m$ o aún $|y-x| \leqslant M - m$. Así, B es una parte no vacía y mayorada de $\mathbb{R}$. B tiene una cota superior. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tal que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ y $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$. Estos dos elementos x_0 y y_0 verifican,

$$|y_0 - x_0| \geqslant y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En resumen,

1. $\forall (x,y) \in A^2$, $|y-x| \leqslant \sup A - \inf A$ y
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (x,y) \in A^2/\ |y-x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Así, $\sup B = \sup A - \inf A$.

$$\boxed{\sup\{|y-x|,\ (x,y)\in A^2\} = \sup A - \inf A.}$$

Solución del ejercicio 1530 ▲005213

1. $A\cap B$ puede ser vacío y no hay nada que decir. Se supone $A\cap B$ no vacío. Para $x\in A\cap B$, se tiene $x\leqslant \sup A$ y $x\leqslant \sup B$ y entonces $x\leqslant \min\{\sup A,\sup B\}$. En este caso, $\sup(A\cap B)$ existe y $\sup(A\cap B)\leqslant \min\{\sup A,\sup B\}$. No se puede mejorar. Por ejemplo, sea $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ y $B=([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))\cup\{0\}$. Se tiene $\sup A=1$, $\sup B=1$, $A\cap B=\{0\}$ y entonces $\sup(A\cap B)=0<1=\min\{\sup A,\sup B\}$.
2. Para $x\in A\cup B$, se tiene $x\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}$. Entonces $\sup(A\cup B)$ existe en $\mathbb{R}$ y $\sup(A\cup B)\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}$. Inversamente, se supone por ejemplo $\sup A\geqslant \sup B$ de manera que $\max\{\sup A,\sup B\}=\sup A$. Sea entonces $\varepsilon>0$. Existe $a\in A$ tal que $\sup A-\varepsilon<a\leqslant \sup A$. a está en A y por lo tanto, en $A\cup B$.
   En resumen, $\forall x\in(A\cup B)$, $x\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}$ y $\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in(A\cup B)/\max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon<x$ y entonces
   $$\boxed{\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}.}$$
3. Según el ejercicio 1527, $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
4. Para $\sup(AB)$, todo es posible. Por ejemplo, si $A=B=]-\infty,0]$, entonces $\sup A=\sup B=0$, pero $AB=[0,+\infty[$ y $\sup(AB)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 1535 ▲000491

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2\sqrt{a+b}\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant 2(a+b)$$

porque los términos son positivos, y la función $x\mapsto x^2$ es creciente en $\mathbb{R}_+$. Evaluemos la diferencia $2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$:

$$2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

Entonces por la equivalencia, se obtiene la desigualdad deseada.

Solución del ejercicio 1541 ▲000497

1. Calculemos primero $f(0)$. Se sabe $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$, por lo tanto $f(0)=0$. Demostremos el resultado requerido por recurrencia : para $n=1$, se tiene bien $f(1)=1\times f(1)$. Si $f(n)=nf(1)$, entonces $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$.
2. $0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)$. Entonces $f(-1)=-f(1)$. Luego como antes $f(-n)=nf(-1)=-nf(1)$.
3. Sea $q=\frac{a}{b}$. Entonces $f(a)=f(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b})=f(\frac{a}{b})+\cdots+f(\frac{a}{b})$ (b términos en estas sumas). Entonces $f(a)=bf(\frac{a}{b})$. Sea $af(1)=bf(\frac{a}{b})$. Lo que también se escribe $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(1)$.
4. Se fija $x\in\mathbb{R}$. Sea (α_i) una sucesión creciente de racionales que tiende a x. Sea (β_i) una sucesión decreciente de racionales que tiende a x :
   $$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\cdots\leqslant x\leqslant\cdots\leqslant\beta_2\leqslant\beta_1.$$

Como $\alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i$ y como f es creciente, se tiene $f(\alpha_i) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_i)$. Por la pregunta anterior, esta desigualdad se convierte en : $\alpha_i f(1) \leqslant f(x) \leqslant \beta_i f(1)$. Como (α_i) y (β_i) tienden a x. Por el “teorema de los gendarmes” se obtiene pasando al límite : $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$. Sea $f(x) = xf(1)$.

Solución del ejercicio 1552 ▲003065

1. $a = bq + r \Rightarrow \sum = \underbrace{q + q + \cdots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \cdots + (q+1)}_{r} = bq + r = a.$
2.

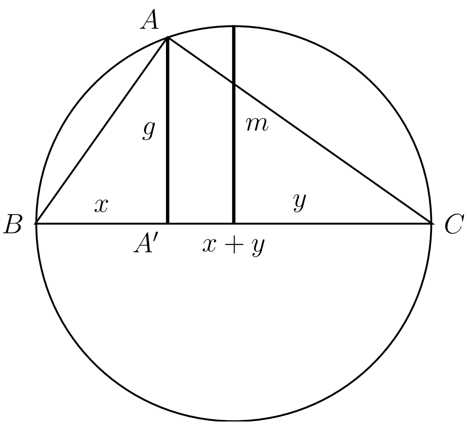
Solución del ejercicio 1553 ▲005146

Sean x e y dos reales tales que $0 < x \leqslant y$.

1. Se tiene ya $x = \frac{x+x}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} = m \leqslant \frac{y+y}{2} = y$ y entonces $\boxed{x \leqslant m \leqslant y.}$

   (también podemos escribir : $m - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. Se tiene así $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ y entonces $\boxed{x \leqslant g \leqslant y.}$
3. $m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ y entonces, $\boxed{x \leqslant g \leqslant m \leqslant y.}$
4. De acuerdo a 1), la media aritmética de $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ está comprendido entre $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$, lo que proporciona $\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{h} \leqslant \frac{1}{x}$, o aún $\boxed{x \leqslant h \leqslant y.}$
5. De acuerdo a 3), la media geométrica de los dos números reales $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ es inferior o igual a su media aritmética. Esto proporciona $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ o aún $\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$ y finalmente

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y, \text{ donde } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), g = \sqrt{xy} \text{ y } m = \frac{x+y}{2}.}$$



Nota 1. Se tiene $h = \frac{2xy}{x+y}$, pero esta expresión no permite comprender que $\frac{1}{h}$ es la media aritmética de $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$.
Nota 2. Se puede visualizar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.
Si (ABC) es un triángulo rectángulo en A y A' es el pie de la altura resultante de A, se sabe que $AA'^2 = A'B.A'C$. Se usa esta observación para construir g y compararla gráficamente a m.
Se unen dos segmentos de longitudes respectivas x e y. Se construye entonces un triángulo rectángulo de hipotenusa este segmento (de longitud $x+y$) denotado $[BC]$, tal que el tercer vértice A tiene una proyección ortogonal A' sobre (BC) verificando $BA' = x$ y $CA' = y$. La media aritmética de x e y es $m = \frac{x+y}{2}$, el radio del círculo, y la media geométrica de x e y es $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B \cdot A'C} = AA'$, la altura desde A del triángulo (ABC).

Solución del ejercicio 1554 ▲005151

Si uno de los reales a, b o c es estrictamente más grande que 1, entonces al menos uno de tres reales $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ es negativo (ya que a, b y c son positivos) y por lo tanto, menor o igual que $\frac{1}{4}$. Si no, los tres reales a, b y c están en $[0,1]$. El producto de los tres reales $a(1-b)$, $b(1-c)$ y $c(1-a)$ vale

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Pero, para $x \in [0,1]$, $x(1-x)$ es positivo y por otro lado, $x(1-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Por consiguiente,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}.$$

Es imposible entonces que los tres números reales $a(1-b)$, $b(1-c)$ y $c(1-a)$ sean estrictamente mayores que $\frac{1}{4}$, es su producto en este caso estrictamente mayor que $\frac{1}{4^3}$. Se ha demostrado en todos los casos que al menos uno de los tres reales $a(1-b)$, $b(1-c)$ y $c(1-a)$ es inferior o igual a $\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 1555 ▲005152

1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$, luego $E(x)+1 \leqslant x+1 < (E(x)+1)+1$. Como $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, se tiene $E(x+1) = E(x)+1$.
2. Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene $E(x)+E(y) \leqslant x+y$. Así, $E(x)+E(y)$ es un entero relativo menor o igual a $x+y$. Como $E(x+y)$ es el mayor entero relativo menor o igual a $x+y$, se tiene $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.

   Mejoremos. $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ y $E(y) \leqslant y < E(y)+1$ proporciona $E(x)+E(y) \leqslant x+y < E(x)+E(y)+2$ y entonces $E(x+y)$ vale, según el caso, $E(x)+E(y)$ o $E(x)+E(y)+1$ (y es en todos los casos mayor o igual a $E(x)+E(y)$).
3. Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se define $k = E(x)$ y $l = E(y)$.

   1er caso. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ y $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, entonces $x+y \in [k+l, k+l+1[$ y entonces $E(x+y) = k+l$, luego $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$. Por otra parte, $2x \in [2k, 2k+1[$ y $2y \in [2l, 2l+1[$. Así, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. En este caso, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

   2o caso. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ y $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$, entonces $x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[$ y entonces $E(x+y) = k+l$ o $k+l+1$, luego $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ o $2k+2l+1$.
   Por otra parte, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ y $2y \in [2l, 2l+1[$. Así, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. En este caso, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

   3o caso. Si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ y $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, se tiene lo mismo $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

   4o caso. Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ y $y \in [l+\frac{1}{2}, l+1[$, se tiene $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.

   Finalmente, se tiene en todos los casos $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

Solución del ejercicio 1556 ▲005153

p es determinado por el encuadramiento : $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ que se escribe aún $p \leqslant \frac{\ln n}{\ln 10} < p+1$. Así,

$$\boxed{p = E(\log_{10}(n)).}$$

$$\boxed{\text{El número de dígitos en un entero } n \text{ en base 10 es, por lo tanto } E(\log_{10}(n))+1.}$$

Solución del ejercicio 1557 ▲005155

1. Por definición de un entero, hay n enteros entre 1 y n. Luego, para todo entero natural k, se tiene

$$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant E(x).$$

Hay por lo tanto, $E(x)$ enteros entre 1 y x.

2. Hay $n+1$ enteros entre 0 y n y $E(x)+1$ enteros entre 0 y x.

3. Los números naturales pares son los enteros de la forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

El número de enteros pares entre 0 y x es aún el número de enteros k en sentido amplio entre 0 y $\frac{x}{2}$. De acuerdo a 2.), hay $E(\frac{x}{2})+1$ enteros pares entre 0 y x. Igualmente, hay $E(\frac{x}{3})+1$ múltiplos de 3 entre 0 y x. Igualmente,

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E(\frac{x-1}{2}).$$

Por lo tanto hay $E(\frac{x-1}{2})+1 = E(\frac{x+1}{2})$ enteros impares entre 0 y x.

4. Hay $E(\frac{x}{3})+1$ múltiplos de 3 entre 0 y x.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Se tiene

$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$

Entonces, (x,y) es solución si y solo si $y \in \mathbb{N}$ y $n-2y \in \mathbb{N}$ o aún si y solo si $0 \leqslant 2y \leqslant n$. Por lo tanto hay $E(\frac{n}{2})+1$ pares de soluciones.

6. Si x e y son respectivamente el número de piezas de 10 céntimos de euro y el número de monedas 20 céntimos de euro, el número buscado es el número de pares de números naturales soluciones de la ecuación $10x+20y = 1000$ que se escribe aún $x+2y = 100$. De acuerdo a 5), hay $E(\frac{100}{2})+1 = 51$ formas de pagar 10 euros con monedas de 10 y 20 céntimos de euro.

7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Se tiene

$$2x+3y = n \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2}.$$

Entonces,

$$(x,y) \text{ solución} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ y } y \in \mathbb{N} \text{ y } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Ahora, como $n-3y = (n-y)-2y$ y que $2y$ es un entero par, $n-3y$ es par si y solo si $n-y$ es par entonces que equivale a decir que y a la paridad de n. Así,

$$(x,y) \text{ solución} \Leftrightarrow x = \frac{n-3y}{2} \text{ y } y \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leqslant y \leqslant \frac{n}{3} \text{ y } y \text{ a la paridad de } n.$$

1er caso. Si n es par, el número de pares de soluciones es aún el número de enteros pares y ampliamente entendido entre 0 y $\frac{n}{3}$. Hay $E(\frac{n}{6})+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tales enteros.

2o caso. Si n es impar, el número de pares de soluciones es nuevamente el número de enteros impares y ampliamente entendido entre 0 y $\frac{n}{3}$. Hay $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2})+1=E(\frac{n+3}{6})$ tales enteros.

Finalmente, el número buscado es $E(\frac{n+6}{6})$ si n es par y $E(\frac{n+3}{6})$ si n es impar.

Solución del ejercicio 1558 ▲005156

1. Por definición de un entero, hay n enteros entre 1 y n. Luego, para todo entero natural k, se tiene

$$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant E(x).$$

Por lo tanto hay $E(x)$ enteros entre 1 y x.

2. Hay $n+1$ enteros entre 0 y n y $E(x)+1$ enteros entre 0 y x.

3. Los números naturales pares son los enteros de la forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

El número enteros pares comprendido entre 0 y x es aún el número de enteros k ampliamente entendido entre 0 y $\frac{x}{2}$. De acuerdo a 2), hay $E(\frac{x}{2})+1$ enteros pares entre 0 y x. Igualmente, hay $E(\frac{x}{3})+1$ múltiplos de 3 entre 0 y x. Igualmente,

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E(\frac{x-1}{2}).$$

Por lo tanto hay $E(\frac{x-1}{2})+1=E(\frac{x+1}{2})$ enteros impares entre 0 y x.

4. Hay $E(\frac{x}{3})+1$ múltiplos de 3 entre 0 y x.

5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Se tiene

$$x+2y=n \Leftrightarrow x=n-2y.$$

Entonces, (x,y) es solución si y solo si $y \in \mathbb{N}$ y $n-2y \in \mathbb{N}$ o aún si y solo si $0 \leqslant 2y \leqslant n$. Por lo tanto hay $E(\frac{n}{2})+1$ pares de soluciones.

6. Si x e y son respectivamente el número de piezas de 10 céntimos de euro y el número de monedas 20 céntimos de euro, el número buscado es el número de pares de números naturales soluciones de la ecuación $10x+20y=1000$ que se escribe aún $x+2y=100$. De acuerdo a 5), hay $E(\frac{100}{2})+1=51$ formas de pago 10 euros con monedas de 10 y 20 céntimos de euro.

7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Se tiene

$$2x+3y=n \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2}.$$

Entonces,

$$(x,y) \text{ solución} \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2} \text{ y } y \in \mathbb{N} \text{ y } n-3y \in 2\mathbb{N}.$$

Ahora, como $n-3y=(n-y)-2y$ y que $2y$ es un entero par, $n-3y$ es par si y solo si $n-y$ es par entonces que equivale a decir que y a la paridad de n. Así,

$$(x,y) \text{ solución} \Leftrightarrow x=\frac{n-3y}{2} \text{ y } y \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leqslant y \leqslant \frac{n}{3} \text{ y } y \text{ a la paridad de } n.$$

1er caso. Si n es par, el número de pares de soluciones es aún el número de enteros pares y ampliamente entendido entre 0 y $\frac{n}{3}$. Hay $E(\frac{n}{6}))+1 = E(\frac{n+6}{6})$ tales enteros.

2o caso. Si n es impar, el número de pares de soluciones es nuevamente el número de enteros impares y ampliamente entendido entre 0 y $\frac{n}{3}$. Hay $E(\frac{\frac{n}{3}-1}{2}))+1 = E(\frac{n+3}{6})$ tales enteros.

Finalmente, el número buscado es $E(\frac{n+6}{6})$ si n es par y $E(\frac{n+3}{6})$ si n es impar.

Solución del ejercicio 1559 ▲005159

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1 \Rightarrow nE(x) \leqslant nx < nE(x)+n \Rightarrow nE(x) \leqslant E(nx) < nE(x)+n$$
$$\Rightarrow E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1 \Rightarrow E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).$$

Solución del ejercicio 1560 ▲005160

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1,1]^n$ tales que $x_1+x_2+\dots+x_n = 0$. Se escribe

$(x_1+2x_2+\dots+nx_n) = (x_1+x_2+\dots+x_n)+(x_2+x_3+\dots.+x_n)+(x_3+\dots+x_n)+\dots+(x_{n-1}+x_n)+x_n,$

con $x_1+\dots+x_n = 0$ y entonces $x_2+\dots+x_n = -x_1$...

1er caso. Si $n = 2p$ es par, entonces $\frac{n^2}{4} = p^2$ y $E(\frac{n^2}{4}) = p^2 = \frac{n^2}{4}$. En este caso, se puede escribir

$$\begin{aligned}
|x_1+2x_2+\dots+nx_n| &\leqslant |x_1+x_2+\dots+x_{2p}|+|x_2+\dots+x_{2p}|+\dots+|x_p+\dots+x_{2p}| \\
&+|x_{p+1}+\dots+x_{2p}|\dots+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}| \\
&= 0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+\dots+|-x_1+\dots-x_{p-1}| \\
&+|x_{p+1}+\dots+x_{2p}|\dots+|x_{2p-1}+x_{2p}|+|x_{2p}| \\
&\leqslant 0+1+2+\dots+(p-1)+p+(p-1)+\dots+1 \\
&= 2\frac{p(p-1)}{2}+p = p^2 = E(\frac{n^2}{4}).
\end{aligned}$$

2o caso. Si $n = 2p+1$ es impar, entonces $\frac{n^2}{4} = p^2+p+\frac{1}{4}$ y $E(\frac{n^2}{4}) = p^2+p = \frac{n^2-1}{4}$. En este caso, se puede escribir

$$\begin{aligned}
|x_1+2x_2+\dots+nx_n| &\leqslant |x_1+x_2+\dots+x_{2p+1}|+\dots+|x_{p+1}+\dots+x_{2p+1}| \\
&+|x_{p+2}+\dots+x_{2p+1}|\dots+|x_{2p+1}| \\
&= 0+|-x_1|+|-x_1-x_2|+\dots+|-x_1+\dots-x_p| \\
&+|x_{p+2}+\dots+x_{2p+1}|\dots+|x_{2p+1}| \\
&\leqslant 0+1+2+\dots+(p-1)+p+p+(p-1)+\dots+1 = 2\frac{p(p+1)}{2} \\
&= p^2+p = E(\frac{n^2}{4}).
\end{aligned}$$

En todos los casos, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_1+2x_2+\dots+nx_n| \leqslant E(\frac{n^2}{4}).}$$

Solución del ejercicio 1561 ▲005215

Para $n=1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ y $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la identidad propuesta es cierta para $n=1$.

Sea $n\geqslant 1$. Se supone que $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2(n+1)-1}\frac{(-1)^k}{k+1}&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+1)}=\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+2}^{2(n+1)}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que $\forall n\geqslant 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ (identidad de CATALAN).

Solución del ejercicio 1562 ▲005216

1. Si los b_k son todos nulos, la desigualdad es clara. Si no, para x real, se escribe
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+xb_k)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$
f es un trinomio cuadrático de signo constante en $\mathbb{R}$. Su discriminante reducido es, por lo tanto negativo o nulo, lo que proporciona :
$$0\geqslant\Delta'=\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$
o aún $\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, que es la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ.

2. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\quad(\text{CAUCHY-SCHWARZ})\\&=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$
y entonces, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$, que es la desigualdad de MINKOWSKI.

Solución del ejercicio 1563 ▲005217

Para $x\geqslant 1$, $x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}+1)^2\geqslant 0$.
Igualmente, $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2\geqslant 0$. Entonces, si se establece $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si y solo $x\geqslant 1$ y para $x\geqslant 1$, $f(x)=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$. Así,

$$f(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\ \text{ y }\ \sqrt{x-1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\ \text{ y }\ \sqrt{x-1}=1,$$

lo que es imposible. La ecuación propuesta no tiene solución.

Solución del ejercicio 1564 ▲005218

1. Sea G un subgrupo no nulo de $(\mathbb{R},+)$ ($\{0\} = 0.\mathbb{Z}$ es del tipo deseado). Existe en G un real no nulo x_0. Porque G es un subgrupo de $(\mathbb{R},+)$, el real $-x_0$ está también en G y uno de los dos reales x_0 o $-x_0$ es estrictamente positivo. Sea entonces $A = G\cap]0,+\infty[$. De acuerdo con lo anterior, A es una parte no vacía y minorada (por 0) de $\mathbb{R}$. A por lo tanto admite una cota inferior que denotamos a.

   1er caso. Si $a = 0$, demostrar en este caso que G es denso en $\mathbb{R}$ (es por ejemplo el caso de $(\mathbb{Q},+)$). Sean x un real y ε un real estrictamente positivo. Porque $\inf A = \inf(G\cap]0,+\infty[) = 0$, existe en G un elemento g tal que $0 < g < \varepsilon$. Después existe un entero relativo n tal que $ng \leqslant x-\varepsilon < (n+1)g$, a saber $n = E\left(\frac{x-\varepsilon}{g}\right)$. Sea $y = (n+1)g$. Por una parte, y está en G (si $n+1 = 0$, $(n+1)g = 0 \in G$, si $n+1 > 0$, $(n+1)g = g+g+\cdots+g \in G$ y si $n+1 < 0$, $(n+1)g = -(-(n+1)g) \in G$) y por otra parte

   $$x-\varepsilon < (n+1)g = ng+g < x-\varepsilon+\varepsilon = x.$$

   Se ha demostrado que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in G/\ x-\varepsilon < y < x$ y entonces

   $$\boxed{\text{si } G \neq \{0\} \text{ y si } \inf(G\cap]0,+\infty[) = 0,\ G \text{ es denso en } \mathbb{R}.}$$

   2o caso. Si $a > 0$, demostrar en este caso que $G = a\mathbb{Z}$. Por esto, se demuestra primero que a está en G. Pero si a no es elemento de G, por definición de a, existe un real x en $G\cap]a,2a[$, luego existe un real y en $G\cap]a,x[$. El real $x-y$ está entonces en $G\cap]0,a[$, lo que es imposible. Entonces a es elemento de G. Demostrar entonces que $G = a\mathbb{Z}$. Porque a está en G, G contiene todavía $a+a = 2a$, luego $a+a+a = 3a$ y más en general todos los na, $n \in \mathbb{N}^*$. Porque G también contiene los opuestos de estos números e igualmente $0 = 0\times a$, G contiene finalmente todos los na, $n \in \mathbb{Z}$. Se ha así demostrado que $a\mathbb{Z} \subset G$. Recíprocamente, sea x un elemento de G y $n = E\left(\frac{x}{a}\right)$ $(\in \mathbb{Z})$. Entonces, $n \leqslant \frac{x}{a} < n+1$, luego $0 \leqslant x-na < a$. Por tanto, x está en G y na está en G. Entonces, $x-na$ está en $G\cap[0,a[= \{0\}$, luego $x = na \in a\mathbb{Z}$. Por lo tanto, se ha demostrado la inclusión opuesta y, por lo tanto, $G = a\mathbb{Z}$.

   $$\boxed{\text{si } \inf(G\cap]0,+\infty[) = a > 0,\ G = a\mathbb{Z}.}$$

2. Sea $G = \{a+b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Se comprueba fácilmente que G es un subgrupo de $(\mathbb{R},+)$. Ahora, la fórmula del binomio de NEWTON demuestra que, para cada entero natural n,

   $$(\sqrt{2}-1)^n \in G\cap]0,+\infty[.$$

   Por tanto, $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ y entonces $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0$. Esto demuestra que $\inf(G\cap]0;+\infty[) = 0$ y así que G es denso en $\mathbb{R}$.

3. (a) Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $G_f = \{T \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$. 0 es elemento de G_f (e incluso es el único elemento de G_f si f no es periódica) y entonces $G \neq \varnothing$. Además, si T y T' son dos elementos de G, entonces, para x real dado :

   $$f(x+(T-T')) = f((x-T')+T) = f(x-T') = f(x-T'+T') = f(x),$$

   y $T-T'$ es aún un elemento de G. Se ha demostrado que

   $$\boxed{G_f \text{ es un subgrupo de } (\mathbb{R},+).}$$

(b) Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ admitiendo 1 y $\sqrt{2}$ por periodos. G_f contiene aún todos los números de la forma $a+b\sqrt{2}$, $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ y por lo tanto, es denso en $\mathbb{R}$. Demostrar que si además f es continua en $\mathbb{R}$, f es constante. Sea x un real arbitrario. Se va a demostrar que $f(x)=f(0)$.
Observación preliminar : sea T un período estrictamente positivo de f. Existe un entero relativo p tal que $pT\leqslant x<(p+1)T$ a saber $p=E\left(\frac{x}{T}\right)$. Se tiene entonces $f(x)=f(x-pT)$, con $0\leqslant x-pT<T$. Sea entonces $n\in\mathbb{N}^*$. Porque G_f es denso en $\mathbb{R}$, existe en G_f un real T_n tal que $0<T_n<\frac{1}{n}$ (lo que implica $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=0$). Pero entonces, ya que $0<x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n<T_n$, se tiene también $\lim\limits_{n\to+\infty}x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n=0$. Ahora, la sucesión $\left(f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es constante igual a $f(x)$) y por lo tanto, converge a $f(x)$. Se deduce que

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to+\infty}f\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(x-E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)\quad\text{(por continuidad de } f \text{ en } 0)\\&=f(0)\end{aligned}$$

lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 1565 ▲005219

Sean x un real y ε un real estrictamente positivo. Se tiene $\sqrt[3]{x}<\sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Porque $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe un racional r tal que $\sqrt[3]{x}<r<\sqrt[3]{x+\varepsilon}$ y por lo tanto, tal que $x<r^3<x+\varepsilon$, por estricto crecimiento de la función $t\mapsto t^3$ sobre $\mathbb{R}$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\{r^3,\ r\in\mathbb{Q}\}\text{ es denso en }\mathbb{R}.}$$

Solución del ejercicio 1566 ▲005982

1. Por definición es el único número $E(x)\in\mathbb{Z}$ tal que
$$E(x)\leqslant x<E(x)+1.$$

2. Para el real kx, $(k=1,\dots,n)$ el encuadramiento anterior se escribe $E(kx)\leqslant kx<E(kx)+1$. Estas dos desigualdades se escriben también $E(kx)\leqslant kx$ y $E(kx)>kx-1$, de ahí el encuadramiento $kx-1<E(kx)\leqslant kx$. Se suma este encuadramiento, k variando de 1 a n, para obtener :
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1)<\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{n}kx.$$
Lo que da
$$x\cdot\sum_{k=1}^{n}k-n<n^2\cdot u_n\leqslant x\cdot\sum_{k=1}^{n}k.$$

3. Se recuerda que $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ así se tiene el encuadre :
$$x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n}<u_n\leqslant x\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$
$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ tiende a $\frac{1}{2}$, entonces por el teorema de los gendarmes (u_n) tiende a $\frac{x}{2}$.

4. Cada u_n es un racional (numerador y denominador son enteros). Como la sucesión (u_n) tiende a $\frac{x}{2}$, entonces la sucesión de racionales $(2u_n)$ tiende a x. Cada real $x \in \mathbb{R}$ puede ser aproximado tan de cerca como uno desee por racionales, por lo tanto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 1567 ▲007169

Se aplica la desigualdad aritmético-geométrica a $\frac{a^2}{4}$ y a b^2, lo que da

$$\frac{a^2}{4} + b^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot b^2} = |ab| \geqslant ab.$$

Se puede generalizar reemplazando 4 por un real estrictamente positivo. Una formulación es la siguiente. Para a y b reales y $\lambda > 0$, se tiene

$$2|ab| \leqslant \frac{a^2}{\lambda} + \lambda b^2.$$

Solución del ejercicio 1568 ▲007170

Denotemos a y b los números del enunciado. Se tiene $ab = 100$. La desigualdad aritmético-geométrica proporciona :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = 10$$

con igualdad si y solo si $a = b$, por lo tanto la suma es superior a 20, con igualdad si y solo si $a = b = 10$.

Solución del ejercicio 1569 ▲007171

Denotemos $a_1, \dots, a_n$ los números del enunciado. Se tiene

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

La desigualdad aritmético-geométrica proporciona :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{1} = 1,$$

con igualdad si y solo si todos los a_i son iguales. Se deduce que la suma es superior a n, con igualdad si y solo si todos los reales son iguales (y entonces iguales a 1).

Solución del ejercicio 1570 ▲007172

Se trata de saber la cual de las dos cantidades

$$a^3 + b^3 + c^3 \text{ y } 3abc$$

es la más grande. Por tanto, aplicando la desigualdad aritmético-geométrica a a^3, b^3 y c^3, se obtiene directamente :

$$\tfrac{1}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geqslant \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = abc.$$

Es entonces mejor comprar los tres cubos.

Solución del ejercicio 1571 ▲007173

Se aplica la desigualdad aritmético-geométrica a $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{b^2}{ca}$ y $\frac{c^2}{ab}$, lo que da

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ca}\frac{c^2}{ab}} = 3$$

Solución del ejercicio 1572 ▲007174

Se aplica la desigualdad aritmético-geométrica a los reales $\frac{a_i}{b_i}$, lo que da

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{b_n}} = n\sqrt[n]{1} = n.$$

Solución del ejercicio 1573 ▲007175

Se aplica la desigualdad aritmético-geométrica a cada uno de los dos factores, lo que da :

$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant (2\sqrt{a^2})(2\sqrt{b^2}) = 4|ab| \geqslant 4ab.$$

Observación : se puede igualmente desarrollar el lado izquierdo y minorar con un solo uso de la desigualdad aritmético-geométrica de cuatro variables :

$$(1+a^2)(1+b^2) = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2a^2b^2} = 4\sqrt[4]{a^4b^4} = 4|ab| \geqslant 4ab.$$

Solución del ejercicio 1574 ▲007176

Se aplica la desigualdad aritmético-geométrica a cada uno de los dos factores, lo que da :

$$a^2b+b^2c+c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a} = 3abc$$

y

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 3\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2} = 3abc.$$

multiplicando, se obtiene el resultado.

Solución del ejercicio 1575 ▲007177

Se puede tratar de aplicar la desigualdad aritmético-geométrica a cada factor. Esto da

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant \left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{b}}\right) = \frac{4}{\sqrt{ab}},$$

lo que minora la cantidad por 1 después de una segunda utilización de la desigualdad aritmético-geométrica en el denominador y utilisation de $a+b=8$, pero esta última minoración es evidente en sita de la forma inicial de la expresión : los dos factores son superiores a 1.

(Observación : cuando se utilizó por primera vez la desigualdad aritmético-geométrica, era igualdad si y solo si $a = 1$ y $b = 1$, lo que es imposible dado el enunciado.
Por lo tanto, la desigualdad es siempre estricta, lo que indica que la reducción probablemente no sea muy precisa). Así que empecemos por desarrollar la cantidad a minorar en su lugar. Se tiene

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \frac{1+a+b+ab}{ab} = \frac{9+ab}{ab} = 1+\frac{9}{ab}.$$

Se trata pues de aumentar el producto ab. La desigualdad aritmético-geométrica da $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} = 4$, por lo tanto $ab \leqslant 16$. Se deduce que $\frac{1}{ab} \geqslant \frac{1}{16}$ y así como

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

con igualdad si y solo si $a = b = 4$.
Observación : es preferible utilizar los restricciones (aquí $a+b = 8$) el más tôt posible en los mayoraciones o minoraciones sucesivas, para ganar precisión.

Solución del ejercicio 1576 ▲007178

Desarrollando, la desigualdad es equivalente a

$$a^2d^2+b^2c^2 \geqslant 2abcd.$$

aplicando la desigualdad aritmético-geométrica a a^2d^2 y b^2c^2, se obtiene :

$$a^2d^2+b^2c^2 \geqslant 2\sqrt{a^2d^2b^2c^2} = 2|abcd| \geqslant 2abcd.$$

Segunda solución : de hecho, se tiene la notable identidad

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Observación : mayorar cada uno de los dos factores en el lado izquierdo da solo

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant 4|ab|\cdot|cd|,$$

lo que no permite concluir ya que también tenemos

$$(ac+bd)^2 \geqslant 4|acbd|.$$

Solución del ejercicio 1577 ▲007179

La ecuación es equivalente a

$$2^x+\frac{1}{2^x} = 2-x^2.$$

Por tanto, por desigualdad aritmético-geométrica, se tiene

$$2^x+\frac{1}{2^x} \geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}} \geqslant 2,$$

con igualdad si y solo si $2^x = \frac{1}{2^x}$, es decir si y solo si $x = 0$.

Por otra parte, $2-x^2 \geqslant 2$, con igualdad si y solo si $x=0$ también.
Se deduce que la ecuación admite bien una solución, único, igual a 0.

Solución del **ejercicio 1578** ▲007180

Si (x,y,z) es una solución, entonces sumando las tres ecuaciones se obtiene

$$4x+\frac{18}{y}+2y+\frac{9}{z}+9z+\frac{16}{x}=14+15+17=46.$$

Por otra parte, por desigualdad aritmético-geométrica, se tiene

$$4x+\frac{16}{x}\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{16}{x}}=16,\quad 2y+\frac{18}{y}\geqslant 12,\quad 9z+\frac{9}{z}\geqslant 18,$$

de donde

$$4x+\frac{16}{x}+2y+\frac{18}{y}+9z+\frac{9}{z}\geqslant 46,$$

con igualdad si y solo si cada una de los tres desigualdad son las igualdades por lo tanto si y solo si $(x,y,z)=(2,3,1)$. El sistema de ecuaciones admite entonces una única solución, $(2,3,1)$.

Solución del **ejercicio 1579** ▲007181

Aplicar la desigualdad aritmético-geométrica a $2a^3$ y a b^3 no parece dar el resultado. Se tiene $2a^3+b^3=a^3+a^3+b^3$. Apliquemos la desigualdad aritmético-geométrica a las tres variables. Se obtiene :

$$2a^3+b^3=a^3+a^3+b^3\geqslant 3\sqrt[3]{a^3a^3b^3}=3a^2b.$$

Solución del **ejercicio 1580** ▲007182

Partir del miembro izquierdo y aplicar la desigualdad aritmético-geométrica de tres variables no da inmediatamente, el resultado. Por otro lado, se puede tratar de unir por separado cada uno de los tres términos del lado derecho :

$$a^2b=\sqrt[3]{a^3a^3b^3}\leqslant\frac{2a^3+b^3}{3},\quad b^2c=\sqrt[3]{b^3b^3c^3}\leqslant\frac{2b^3+c^3}{3},\quad c^2a=\sqrt[3]{c^3c^3a^3}\leqslant\frac{2c^3+a^3}{3},$$

lo que da el resultado sumando los tres desigualdades.

Solución del **ejercicio 1581** ▲007183

Partir del miembro izquierdo y aplicar la desigualdad aritmético-geométrica de tres variables no da inmediatamente, el resultado. Si se desarrolla el miembro de la derecha, se obtiene

$$a^2bc+b^2ca+c^2ab,$$

que se puede tratar de minorar por tres utilizaciones independientes de la desigualdad aritmético-geométrica a las cuatro variables :

$$a^2bc=\sqrt[4]{a^4a^4b^4c^4}\leqslant\tfrac{1}{4}\left(a^4+a^4+b^4+c^4\right)=\tfrac{1}{4}\left(2a^4+b^4+c^4\right).$$

Igualmente,

$$b^2ac \leqslant \tfrac{1}{4}\left(a^4+2b^4+c^4\right) \text{ y } c^2ab \leqslant \tfrac{1}{4}\left(a^4+b^4+2c^4\right).$$

sumando estas tres desigualdades, se obtiene el resultado.

Solución del ejercicio 1582 ▲007184

La desigualdad aritmético-geométrica aplicada a $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}$ únicamente da :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geqslant 2\frac{a}{c}.$$

Se obtiene igualmente

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} \text{ y } \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2} \geqslant \frac{c}{b}.$$

Sumando estas tres desigualdades, se obtiene el resultado.

Solución del ejercicio 1583 ▲007185

Aplicando la desigualdad aritmético-geométrica, se ve que a y c se simplifican, pero no b y $b+c$. La idea es entonces de modificar la forma de la desigualdad para obtener la simplificación. Por tanto, la desigualdad es equivalente a

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}+1 \geqslant 3, \quad \text{es decir a} \quad \frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c} \geqslant 3.$$

Bajo esta forma, la desigualdad aritmético-geométrica da el resultado :

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\frac{a}{b+c}\frac{b+c}{c}} = 3\sqrt[3]{1} = 3.$$

Solución del ejercicio 1585 ▲000505

1. Cierto. Toda sub-sucesión de una sucesión convergente es convergente y admite el mismo límite (es un resultado del curso).
2. Falso. Un contra-ejemplo es la sucesión $(u_n)_n$ definida por $u_n = (-1)^n$. Entonces $(u_{2n})_n$ es la sucesión constante (por lo tanto convergente) de valor 1, y $(u_{2n+1})_n$ es constante de valor -1. Sin embargo, la sucesión $(u_n)_n$ no es convergente.
3. Cierto. La convergencia de la sucesión $(u_n)_n$ hacia ℓ, que se quiere demostrar, se escribe :

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{tal que} \ (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

   Se fija $\varepsilon > 0$. Como, por hipótesis, la sucesión $(u_{2p})_p$ converge a ℓ, entonces existe N_1 tal

   $$2p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$

   Y de mismo, para la sucesión $(u_{2p+1})_p$ existe N_2 tal que

   $$2p+1 \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

   Sea $N = \max(N_1, N_2)$, entonces

   $$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

   Esto demuestra que la convergencia de $(u_n)_n$ hacia ℓ.

Solución del ejercicio 1592 ▲000518

1. Sucesión no convergente porque no es acotada.
2. Sucesión convergente a 0.
3. Sucesión no convergente porque la sub-sucesión $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ es siempre más grande que 1. Entonces que la sub-sucesión $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ es siempre menor que 0.

Solución del ejercicio 1593 ▲000519

Sea (u_n) una sucesión de enteros que converge a $\ell \in \mathbb{R}$. En el intervalo $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longitud 1, existe a lo sumo un elemento de $\mathbb{N}$. Entonces $I \cap \mathbb{N}$ es ya sea vacío, sea un punto aislado $\{a\}$. La convergencia de (u_n) se escribe :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \text{tal que} \;\; (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Se fija $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se obtiene un N correspondiente. Y para $n \geqslant N$, $u_n \in I$. Pero además u_n es un entero, por lo tanto

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En consecuencia, $I \cap \mathbb{N}$ no es vacío (por ejemplo u_N es un elemento) por lo tanto $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. La implicación anterior se escribe ahora :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n = a.$$

Entonces la sucesión (u_n) es estacionaria (al menos) a partir de N. Además, es obviamente convergente a $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Solución del ejercicio 1594 ▲000520

1. La función $t \mapsto \frac{1}{t}$ es decreciente en $[n, n+1]$, por lo tanto

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$

(Es un marco delimitador del área del conjunto de puntos (x,y) del plano tal que $x \in [n, n+1]$ y $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ por el área de dos rectángulos.) Calculando la integral se tiene la desigualdad :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, se mayora cada término de esta suma usando la desigualdad $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenido previamente : se obtiene $H_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) + 1$. Esta suma es telescópica (la mayoría de los términos se eliminan y además $\ln(1) = 0$) y da $H_n \leqslant \ln(n) + 1$. La otra desigualdad se obtiene de manera similar utilizando la desigualdad $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. Como $H_n \geqslant \ln(n+1)$ y que $\ln(n+1) \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$, entonces $H_n \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$ de acuerdo con la primera pregunta. Entonces $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Así $u_{n+1} \leqslant u_n$ y la sucesión (u_n) es decreciente. Finalmente, como $H_n \geqslant \ln(n+1)$, entonces $H_n \geqslant \ln(n)$ y $u_n \geqslant 0$.

5. La sucesión (u_n) es decreciente y acotada inferiormente (por 0) por lo tanto converge a un real γ. Este real γ se llama *la constante de Euler* (de Leonhard Euler, 1707-1783, matemático nacido en Suiza). Esta constante vale alrededor $0,5772156649\ldots$, pero no se sabe si γ es racional o irracional.

Solución del ejercicio 1598 ▲000524

1. $u_{n+q} = \cos\left(\frac{2(n+q)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{q}\right) = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\left(\frac{2nq\pi}{q}\right) = \cos(2n\pi) = 1 = u_0$ y $u_{nq+1} = \cos\left(\frac{2(nq+1)\pi}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = u_1$.
   Se supone, por reducción al absurdo que (u_n) converge a ℓ. Entonces la sub-sucesión $(u_{nq})_n$ converge a ℓ como $u_{nq} = u_0 = 1$, para todo n, entonces $\ell = 1$. Por otra parte la sub-sucesión $(u_{nq+1})_n$ converge también a ℓ, pero $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, por lo tanto $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Se obtiene una contradicción porque para $q \geqslant 2$, se tiene $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Entonces la sucesión (u_n) no converge.

Solución del ejercicio 1623 ▲004672

1.
2. $\ell = \pi$.

Solución del ejercicio 1627 ▲004676

$\frac{x}{2}$.

Solución del ejercicio 1631 ▲004680

1. $u_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.
2.
3.
4.

Solución del ejercicio 1632 ▲004681

Si $|a| < 1$, a partir de un cierto rango, $\left|\frac{a}{1+a^n}\right| < \alpha < 1 \Rightarrow \lim = 0$. Si $|a| > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 \Rightarrow u_n \to 0$.

Solución del ejercicio 1635 ▲004684

$\lim S_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Si $u_n = (3i/2)^n$, entonces (u_n) diverge, pero $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Solución del ejercicio 1640 ▲004689

1. $1 \leqslant S(n+1) \leqslant S(n)+1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{S(n+1)}{S(n)} \leqslant 2$.
2. $\inf = 0$ $(99\ldots99)$, $\sup = 2$ $(100\ldots00)$.
3.

Solución del ejercicio 1644 ▲004693

1. Si no, se construye una sub-sucesión estrictamente creciente.
2. La sucesión $(\min(x_0,\dots,x_n))$ converge a 0, y toma una infinidad de valores diferentes.

Solución del ejercicio 1647 ▲004696

$u_{2n}-u_n \geqslant \frac{1+\cdots+n}{4n^2} \geqslant \frac{1}{8}$.

Solución del ejercicio 1648 ▲004697

1. Por recurrencia, $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$.
2. $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+\sqrt{2(n-1)}} \Rightarrow \lim = 1$.
3. $\sqrt{n+\sqrt{n-1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{2(n-2)}}} \Rightarrow \lim = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 1649 ▲004698

Sea $\ell = \inf\{b_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_p \leqslant \ell+\varepsilon$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se efectúa la división euclidiana de n por $p : n = pq+r$, de donde $a_n \leqslant a_p^q a_r$ y $b_n \leqslant b_p + \frac{\ln a_r}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$, para n bastante grande.

Solución del ejercicio 1650 ▲004699

Si $e^{i\alpha}$ no es valor de adherencia entonces existe $\delta > 0$ tal que $|e^{ih(n)} - e^{i\alpha}| > \delta$, para todo n lo suficientemente grande por lo que el conjunto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\alpha-\delta+2k\pi, \alpha-\delta+2k\pi]$ no contiene ningún término de la sucesión $(h(n))$, para n lo suficientemente grande lo que contradice las hipótesis $h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ y $h(n+1)-h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ 0.

Solución del ejercicio 1651 ▲004700

Sea E el conjunto de valores de adherencia de (u_n). Si $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$, entonces $u_{n_k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda+\lambda^2$, por lo tanto E es estable para la aplicación $f : x \mapsto x+x^2$. De hecho E es invariante por esta aplicación porque la sucesión (u_{n_k-1}) admite un valor de adherencia $\mu \in E$ y se tiene $\mu^2+\mu = \lambda$. En particular el intervalo $[\inf(E), \sup(E)]$ es invariante por f, lo que implica $\sup(E) = \inf(E) = 0$.

Solución del ejercicio 1652 ▲004701

Sea ℓ un valor de adherencia de (x_n). Si se supone que (x_n) no converge a ℓ, entonces existe un vecindario $[a,b]$ de ℓ tal que existe una infinidad de términos en $[a,b]$ y una infinidad fuera de $[a,b]$. Esto implica que $[c,d] = f([a,b])$ no está incluido en $[a,b]$ y que $[c,d] \setminus [a,b]$ contiene una infinidad de términos, por lo tanto (x_n) tiene un segundo valor adherente en $[c,d] \setminus]a,b[$.

Solución del ejercicio 1653 ▲004702

Las sucesiones $(\ln(u_n)/2^n)$ y $(\ln(1+u_n)/2^n)$ son adyacentes.

Solución del ejercicio 1654 ▲005221

Se supone sin pérdida de generalidad u creciente (basta reemplazar u por $-u$). En este caso, o bien u converge, o bien u tiende a $+\infty$. Se supone que u tiende a $+\infty$, y demostrar que lo mismo es cierto para la sucesión v. Sea $A\in\mathbb{R}$, existe un rango n_0 tal que para n natural mayor o igual que n_0, $u_n\geqslant 2A$. Para $n\geqslant n_0+1$, se tiene entonces,

$$v_n=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k\right)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}.$$

Ahora, cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tiende a $2A$ y entonces, existe un rango n_1 a partir del cual $v_n\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}>A$. Se ha demostrado que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists n_1\in\mathbb{N}/\ (\forall n\in\mathbb{N})$, $(n\geqslant n_1\Rightarrow v_n>A)$. Así, $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. En contraposición, si v no tiende a $+\infty$, la sucesión u no tiende a $+\infty$ y por lo tanto, converge, según el comentario inicial.

Solución del ejercicio 1655 ▲005222

1. La función $x\mapsto\frac{1}{x}$ es continua y decreciente en $]0,+\infty[$ y entonces, para $k\in\mathbb{N}^*$, se tiene :

$$\frac{1}{k+1}=(k+1-k)\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leqslant(k+1-k)\frac{1}{k}=\frac{1}{k}.$$

Entonces, para $k\geqslant 1$, $\frac{1}{k}\geqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$ y, para $k\geqslant 2$, $\frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$. Sumando estas desigualdades, se obtiene por $n\geqslant 1$,

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\ln(n+1),$$

y para $n\geqslant 2$,

$$H_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx=1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx=1+\ln n,$$

esta última desigualdad es verdadera cuando $n=1$. Entonces,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant 1+\ln n.}$$

2. Sea n un entero natural no nulo.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\leqslant 0$$

pues la función $x\mapsto\frac{1}{x}$ decrece en $[n,n+1]$. Igualmente,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx=\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\geqslant 0$$

pues la función $x\mapsto\frac{1}{x}$ decrece en $[n+1,n+2]$. En fin,

$$u_n-v_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

y así la sucesión $u-v$ tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$. Finalmente, la sucesión u decrece, la sucesión v crece y la sucesión $u-v$ tiende a 0. Se deduce que las sucesiones u y v son adyacentes, y en particular convergentes y de mismo límite. Denotemos γ este límite. Para todo natural no nulo n, se tiene $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$, y, en particular, $v_3 \leqslant \gamma \leqslant u_1$, con $v_3 = 0,5...$ y $u_1 = 1$. Entonces, $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Más precisamente, para n entero natural no nulo dado, se tiene

$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{e^{0,005}-1} = 199,5... \Leftrightarrow n \geqslant 200.$$

Entonces $0 \leqslant \gamma - v_{100} \leqslant \frac{10^{-2}}{2}$ y un valor aproximado de v_{200} con un error de $\frac{10^{-2}}{2}$ (es decir redondeado al tercer decimal más próximo) es un valor aproximado de γ con un error de 10^{-2}. Se encuentra $\gamma = 0,57$ con un error de 10^{-2}. Más precisamente,

$$\boxed{\gamma = 0,5772156649...\ (\gamma \text{ es la constante de EULER}).}$$

Solución del ejercicio 1656 ▲005225

Se define $\alpha = \arccos\frac{a}{b}$. α existe porque $0 < \frac{a}{b} < 1$ y es elemento de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Además, $a = b\cos\alpha$. En fin, para todo entero natural n, $\frac{\alpha}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y entonces, $\cos\frac{\alpha}{2^n} > 0$. Se tiene $u_0 = b\cos\alpha$ y $v_0 = b$, luego $u_1 = \frac{1}{2}(u_0+v_0) = \frac{b}{2}(1+\cos\alpha) = b\cos^2\frac{\alpha}{2}$ y $v_1 = \sqrt{u_1v_0} = \sqrt{b\cos^2\frac{\alpha}{2}\times b} = b\cos\frac{\alpha}{2}$, luego $u_2 = \frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1+\cos\frac{\alpha}{2}) = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$ y $v_2 = \sqrt{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}\times b\cos\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}$... Demostrar por inducción que para todo entero natural no nulo n, $v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ y $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$. Esto es verdadero para $n=1$ y si para $n \geqslant 1$ dado, se tiene $v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ y $u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$, entonces,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n\cos\frac{\alpha}{2^n} + v_n\right) = v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}} \text{ y } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \text{ (pues } \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

y entonces, $v_{n+1} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$, luego $u_{n+1} = v_{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$. Se ha demostrado por recurrencia que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \text{ y } u_n = v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.}$$

Para todo natural no nulo n, se tiene $v_n > 0$ y $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$. La sucesión v es estrictamente decreciente. Luego, para todo entero natural no nulo n, se tiene $u_n > 0$ y

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

La sucesión u es estrictamente creciente. Ahora, para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} = b\prod_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2^k}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2^n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Entonces, cuando n tiende a $+\infty$, $v_n \sim \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{2^n \dfrac{\alpha}{2^n}} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$, luego $u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n} \sim v_n \sim \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$. Así, las sucesiones u y v son adyacentes de límite común $b\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)}$.

Solución del ejercicio 1657 ▲005226

1. Para $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$. Como $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\operatorname{sen} n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0.}$$

2. Cuando n tiende a $+\infty$, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Entonces, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ tiende a 1 después, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)}$ tiende a $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.}$$

3. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Para n entero natural no nulo, se tiene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Entonces, cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+1/n)} = \mathrm{e}^{-n(1/n+o(1/n))} = \mathrm{e}^{-1+o(1)}$. Así, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende a $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$. Se sabe entonces que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

4. Para $n \geqslant 1$, $\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$. Por tanto, $\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ y $\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$ tienden a 1, cuando n tiende a $+\infty$ y entonces, por el teorema del límite por encuadramiento, la sucesión u converge y tiene el límite 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.}$$

5. Cuando n tiende a $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} = \mathrm{e}^{2\ln n/n} = \mathrm{e}^{o(1)}$, y entonces $\sqrt[n]{n^2}$ tiende a 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.}$$

6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.

7. $\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \dfrac{2n^3}{6n^3} = \dfrac{1}{6}$.

8. $\prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}}$. Para x real, se escribe $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. f es derivable en $\mathbb{R}$ en tanto que polinomio y para todo real x,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)'(x).$$

Para $x \neq 1$, se tiene

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

en particular, $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{(\frac{1}{2}-1)^2} \to 4$ (de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados). Finalmente,

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k} \to 2^{4/2} = 4.$$

Solución del ejercicio 1658 ▲005227

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$4(n+u_n) = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n+\frac{1}{4}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$

Así, cuando n tiende a $+\infty$,

$$u_n = -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+o(1) = \frac{1}{2}+o(1).$$

La sucesión (u_n) converge y tiene el límite $\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 1659 ▲005232

Se supone que la sucesión $(\sqrt[n]{v_n})$ tiende al real positivo ℓ.

- Se supone que $0 \leqslant \ell < 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.
  ε es un número real estrictamente positivo y por lo tanto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$. Para $n \geqslant n_0$, por crecimiento de la función $t \mapsto t^n$ sobre $\mathbb{R}^+$, se obtiene $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Por tanto, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ y entonces $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Resulta que u_n tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$.

- Se supone que $\ell > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2})$. Pero entonces, para $n \geqslant n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Por tanto, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, y entonces $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$. Resulta que $|u_n|$ tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$.

Sea, para α real y n entero natural no nulo, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = \mathrm{e}^{\alpha\frac{\ln n}{n}}$ tiende a 1, cuando n tiende a $+\infty$, y esto para todo valor de α. Pero, si $\alpha < 0$, u_n tiende a 0, si $\alpha = 0$, u_n tiende a 1 y si $\alpha > 0$, u_n tiende a $+\infty$. Entonces, si $\ell = 1$, no se puede concluir nada.

Solución del ejercicio 1660 ▲005233

1. Se supone $\ell > 0$. Sea ε un real estrictamente positivo, elemento de $]0,\ell[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2})$. Para $n > n_0$, ya que $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}\cdots\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}u_{n_0}$, se tiene $u_{n_0}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, y entonces
$$(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant (u_{n_0})^{1/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Ahora, el miembro izquierdo de este marco tiende a $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$, y el miembro derecho tiende a $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Así, se puede encontrar un entero natural $n_1 \geqslant n_0$ tal que, para $n \geqslant n_1$, $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$, y $(u_{n_0})^{1/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n}\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$. Para $n \geqslant n_1$, se tiene entonces $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$. Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ (n \geqslant n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon)$. Entonces, $\sqrt[n]{u_n}$ tiende a ℓ. Se trata de manera análoga el caso $\ell = 0$.
2. Sean a y b dos reales tales que $0 < a < b$. Sea u la sucesión definida por
$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = a^p b^p \text{ y } u_{2p+1} = a^{p+1}b^p.$$
(se parte de 1, luego se multiplica alternativamente por a o b). Entonces, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ y $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}}b^{\frac{p}{2p+1}} \to \sqrt{ab}$. Entonces, $\sqrt[n]{u_n}$ tiende a $\sqrt{ab}$ (y en particular converge). Se tiene claramente $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ y $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La sucesión $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ por lo tanto, admite dos sucesiones extraídas convergentes de límites distintos y, por lo tanto, es divergente. El recíproco de 1) por lo tanto, es falso.
3. (a) Para n entero natural dado, se escribe $u_n = \binom{2n}{n}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$
Así, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende a 4, cuando n tiende a $+\infty$, y entonces $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tiende a 4, cuando n tiende a $+\infty$.

   (b) Para n entero natural dado, se escribe $u_n = \frac{n^n}{n!}$ y $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
Así, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende a e, cuando n tiende a $+\infty$, y entonces $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tiende a e, cuando n tiende a $+\infty$.

(c) Para n entero natural dado, se escribe $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$
$$= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}.$$

Ahora, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = \mathrm{e}^{-2n\ln(1+1/n)} = \mathrm{e}^{-2n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = \mathrm{e}^{-2+o(1)}$, y entonces $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende a $27\mathrm{e}^{-2}$. Así, $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tiende a $\frac{27}{\mathrm{e}^2}$.

Solución del ejercicio 1661 ▲005234

Por el teorema del límite por encuadramiento : $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow u$ converge y tiende a 1.
Lo mismo se aplica a v intercambiando los roles de u y v.

Solución del ejercicio 1662 ▲005235

Si $u_n^2 \to 0$, entonces $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \to 0$ y entonces $u_n \to 0$. Si $u_n^2 \to \ell \neq 0$, entonces $(u_n) = \left(\frac{u_n^3}{u_n^2}\right)$ converge. (El ejercicio es de interés solo si la sucesión u es una sucesión compleja, porque si u es una sucesión real, se escribe inmediatamente, $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (y no $u_n = \sqrt{u_n^2}$)).

Solución del ejercicio 1663 ▲005236

Las sucesiones u y v están definidas a partir del rango 1 y son estrictamente positivas. Para todo entero natural no nulo n, se tiene :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(n+2)+n\ln n-(2n+1)\ln(n+1)}.$$

Para x real estrictamente positivo, se escribe entonces $f(x) = (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)$. f es derivable en $]0,+\infty[$ y para $x>0$,

$$f'(x) = \frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+1}{x+1}-2\ln(x+1)$$
$$= \frac{x+2-1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+2-1}{x+1}-2\ln(x+1)$$
$$= -\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\ln x+\ln(x+2)-2\ln(x+1).$$

Igualmente, f' es derivable en $]0,+\infty[$ y para $x>0$,

$$f''(x) = \frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{x(x+1)^2-x(x+2)^2+(x+1)^2(x+2)^2+x(x+1)^2(x+2)-2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2}$$
$$= \frac{-2x^2-3x+(x^2+2x+1)(x^2+4x+4)+(x^2+2x)(x^2+2x+1)-2(x^2+x)(x^2+4x+4)}{x(x+1)^2(x+2)^2}$$
$$= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0.$$

f' es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$ y entonces, para $x>0$,

$$f'(x)<\lim_{t\to+\infty} f'(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+1}+\ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)=0.$$

Entonces, f es estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$. Por tanto, para $x>0$,

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)\\
&=(x+(x+1)-(2x+1))\ln x+(x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}-2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Se sabe que $\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$, y entonces, cuando x tiende a $+\infty$, $f(x)$ tiende a $0+0+2-2=0$. Como f es estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$, para todo real $x>0$, se tiene $f(x)>\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$.

La función f por lo tanto, es estrictamente positiva en $]0,+\infty[$. Así, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)>0$ y entonces $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{f(n)}>1$. La sucesión u es estrictamente creciente.

(Observación. También se puede estudiar directamente la función $x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sobre $]0,+\infty[$). Se demuestra de manera análoga que la sucesión v es estrictamente decreciente. En fin, ya que u_n tiende a e, y que $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$ tiende a e, las sucesiones u y v son adyacentes.

(Observación. En consecuencia, para todo entero natural no nulo n, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Por ejemplo, para $n=10$, se obtiene $\left(\frac{11}{10}\right)^{10}<e<\left(\frac{11}{10}\right)^{11}$ y entonces, $2,59...<e<2,85...$ y para $n=100$, se obtiene $1,01^{100}<e<1,01^{101}$ y entonces $2,70...<e<2,73...$ Estas dos sucesiones convergen en e lentamente).

Solución del ejercicio 1664 ▲005237

Es inmediato que u crece estrictamente y que $v-u$ es estrictamente positiva y tiende a 0. Además, para n entero natural dado,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)\times(n+1)!}<0,$$

y la sucesión v es estrictamente decreciente. Las sucesiones u y v son, por lo tanto adyacentes y convergen hacia un límite común (a saber e). (Observación. En este caso, la convergencia es muy rápida. Se tiene para todo entero natural no nulo n, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$ y $n=5$ proporciona por ejemplo $2,716...<e<2,718...$).

Solución del ejercicio 1665 ▲005238

Para n entero natural no nulo dado, se tiene

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.$$

Igualmente,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0.$$

La sucesión u es estrictamente creciente y la sucesión v es estrictamente decreciente. En fin,

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

y la sucesión $v-u$ converge a 0. Las sucesiones u y v son adyacentes y por lo tanto, convergentes, de mismo límite.

Solución del ejercicio 1666 ▲005241

La igualdad propuesta es cierta para $n=2$, pues $\cos\frac{\pi}{2^2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sea $n \geqslant 2$. Se supone que $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicales). Entonces, ya que $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) > 0$ (pues $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ está en $]0,\frac{\pi}{2}[$),

$$\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}})} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}},\ (n \text{ radicales}).$$

Se ha demostrado por recurrencia que, para $n \geqslant 2$, $\cos(\frac{\pi}{2^n}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicales). Luego, para $n \geqslant 2$,

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2^n}) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicales})$$

En fin,

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2^n\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi.$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \pi$.

Solución del ejercicio 1667 ▲005242

1. Para x real positivo, se escribe $f(x) = x - \ln(1+x)$ y $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. f y g son derivables en $[0,+\infty[$ y para $x>0$, se tiene

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

y

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

f y g son, por lo tanto estrictamente crecientes en $[0,+\infty[$ y, en particular, para $x>0$, $f(x) > f(0) = 0$ e igualmente, $g(x) > g(0) = 0$. Finalmente, f y g son estrictamente positivos en $]0,+\infty[$ o aún,

$$\forall x>0,\ \ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x).$$

2. Sea k un entero natural no nulo. De acuerdo a 1), $\ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} < (1+\frac{1}{k})\ln(1+\frac{1}{k})$, lo que proporciona $k\ln(1+\frac{1}{k}) < 1 < (k+1)\ln(1+\frac{1}{k})$, después, por el estricto crecimiento de la función exponencial en $\mathbb{R}$,

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0 < (1+\frac{1}{k})^k < \mathrm{e} < (1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

multiplicando miembro a miembro estos encuadramientos, se obtiene para todo entero natural no nulo n :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

Ahora,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Igualmente,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k}}{\prod_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Se ha demostrado que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ y entonces

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\frac{n+1}{n}(n+1)^{1/n}.$$

Por el teorema del límite por encuadramientos, como $\frac{n+1}{n}$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito al igual que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, se ha demostrado que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tiende a $\frac{1}{e}$, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 1668 ▲005244

Se define $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$,... es decir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ no es primo} \\ 1 \text{ si } n \text{ es primo.} \end{cases}$$

Sea k un entero natural superior o igual a 2. Para $n \geqslant 2$, el entero kn es compuesto y por lo tanto, para $n \geqslant 2$, $u_{kn} = 0$. En particular, la sucesión $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge y tiene el límite 0. Ahora, el conjunto de números primos es infinito y si p_n es el n-ésimo número primero, la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente. La sucesión $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es extraída de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y es constante igual a 1. En particular, la sucesión $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 1. Así la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite al menos dos sucesiones extraídas convergentes con límites distintos y por lo tanto, la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aunque todas las sucesiones $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente hacia 0, para $k \geqslant 2$.

Solución del ejercicio 1669 ▲005245

Sea f una aplicación de $\mathbb{N}$ en sí mismo, inyectiva. Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$. Sean A un real luego $m = \max(0, 1+E(A))$. Porque f es inyectiva, se tiene $\operatorname{card}(f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) \geqslant m+1$. En particular, $f^{-1}(\{0,1,\dots,m\})$ es finito (eventualmente vacío).

Se define $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) = \varnothing \\ \max f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) & \text{si no.} \end{cases}$

Por definición de n_0, si $n \geqslant n_0$, n no es elemento de $f^{-1}(\{0,1,\dots,m\})$ y entonces $f(n) > m > A$. Se ha demostrado que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ o aún $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Solución del ejercicio 1670 ▲005247

1. Se define $a = \frac{2p\pi}{q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ y $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$. Para todo natural n, se tiene

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La sucesión u es, por lo tanto q-periódica e igualmente la sucesión v es q-periódica. Ahora, una sucesión periódica converge si y solo si es constante (en efecto, sean T un período estrictamente positivo de u y ℓ el límite de u. Sea $k \in \{0,\dots,T-1\}$. $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \to |\ell - \ell| = 0$, cuando n tiende a infinito).

Por tanto, si $a = \frac{2p\pi}{q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, entonces $u_1 \neq u_0$ y la sucesión u no es constante y por lo tanto, diverge, y si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la sucesión u es constante y por lo tanto, converge.

2. (a) y b)) Para todo natural n,

$$v_{n+1} = \operatorname{sen}((n+1)a) = \operatorname{sen}(na)\cos a + \cos(na)\operatorname{sen} a = u_n \operatorname{sen} a + v_n \cos a.$$

porque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\operatorname{sen} a \neq 0$ y entonces $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\operatorname{sen} a}$. Así, si v converge entonces u converge. Igualmente, a partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na)\cos a - \operatorname{sen}(na)\operatorname{sen} a$, se ve que si u converge entonces v converge. Las sucesiones u y v son, por lo tanto, simultáneamente convergentes o divergentes.

Se supone que la sucesión u converge, entonces la sucesión v converge. Sean ℓ y ℓ' los límites respectivos de u y v. De acuerdo con lo anterior, ℓ y ℓ' son soluciones del sistema :

$$\begin{cases} \ell \operatorname{sen} a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \operatorname{sen} a = \ell. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \operatorname{sen} a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \operatorname{sen} a = 0. \end{cases}$$

El determinante de este sistema es $-\operatorname{sen}^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$, pues $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Este sistema admite por lo tanto la solución única $\ell = \ell' = 0$ que contradice la igualdad $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Entonces, las sucesiones u y v divergen.

3. (a) Sea $E' = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se supone que E' es denso en $\mathbb{R}$ y demostrar que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ y $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ son densos en $[-1,1]$. Sean x un real de $[-1,1]$ y $b = \arccos x$, de manera que $b \in [0,\pi]$ y que $x = \cos b$. Sea $\varepsilon > 0$. Para n todo natural y k entero relativo dados, se tiene :

$$\begin{aligned} |u_n - x| &= |\cos(na) - \cos b| = |\cos(na + 2k\pi) - \cos b| = 2|\operatorname{sen}(\frac{na + 2k\pi - b}{2})\operatorname{sen}(\frac{na + 2k\pi + b}{2})| \\ &\leqslant 2\left|\frac{na + 2k\pi - b}{2}\right| \text{ (la desigualdad } |\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \text{ válido para todo real } x \text{ es clásico)} \\ &= |na + 2k\pi - b|. \end{aligned}$$

En resumen, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x| \leqslant |na + 2k\pi - b|$. Ahora, si E' es denso en $\mathbb{R}$, se puede encontrar $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $|na + 2k\pi - b| < \varepsilon$ y entonces $|u_n - x| < \varepsilon$. Finalmente, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[-1,1]$. Igualmente, se demuestra que $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[-1,1]$. Queda así por demostrar que E' es denso en $\mathbb{R}$.

(b) Sea $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$. E es un subgrupo no nulo de $(\mathbb{R},+)$ y así es ya sea de la forma $\alpha\mathbb{Z}$, con $\alpha = \inf(E \cap]0,+\infty[) > 0$, o ya sea denso en $\mathbb{R}$ si $\inf(E \cap]0,+\infty[) = 0$. Se supone por reducción al absurdo que $\inf(E\cap]0,+\infty[)>0$. Porque $E=\alpha\mathbb{Z}$ y que 2π está en E, existe un entero natural no nulo q tal que $2\pi=q\alpha$, y por lo tanto, tal que $\alpha=\frac{2\pi}{q}$. Pero entonces, a está también en E, existe un entero relativo p tal que $a=p\alpha=\frac{2p\pi}{q}\in 2\pi\mathbb{Q}$. Esto se excluye y por lo tanto, E es denso en $\mathbb{R}$.

(c) Sea x en $[-1,1]$. De acuerdo con lo anterior, para $\varepsilon>0$ dado, existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que $|\cos(na)-x|<\varepsilon$ y entonces $|u_{|n|}-x|<\varepsilon$, lo que demuestra que $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ es denso en $[-1,1]$. Igualmente, $\{v_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ es denso en $[-1,1]$.

Solución del ejercicio 1671 ▲005250

La sucesión u no es mayorada. Entonces, $\forall M\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{N}/\ u_n>M$. En particular, $\exists n_0\in\mathbb{N}/\ u_{n_0}\geqslant 0$.
Sea $k=0$. Se supone que hemos construido enteros $n_0,\ n_1,\dots,n_k$ tales que $n_0<n_1<\cdots<n_k$ y $\forall i\in\{0,\dots,k\}$, $u_{n_i}\geqslant i$. No se puede tener : $\forall n>n_k$, $u_n<k+1$ porque si no la sucesión u es mayorada con el número $\max\{u_0,u_1,\dots,u_{n_k},k+1\})$. Así, $\exists n_{k+1}>n_k/\ u_{n_{k+1}}\geqslant k+1$. Se viene de construir por recurrencia una sucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraído de la sucesión u tal que $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{n_k}\geqslant k$ y en particular tal que $\lim\limits_{k\to+\infty}u_{n_k}=+\infty$.

Solución del ejercicio 1672 ▲005251

Si u converge a un real ℓ, entonces $\ell\in[0,1]$ después, pasando al límite cuando n tiende a $+\infty$, $\ell(1-\ell)\geqslant\frac14$, y entonces $(\ell-\frac12)^2\leqslant 0$ y finalmente $\ell=\frac12$. Así, si u converge, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac12$. Además, ya que la sucesión u tiene valores en $]0,1[$, para n natural dado, se tiene :

$$u_n(1-u_n)=\frac14-\left(\frac12-u_n\right)^2\leqslant\frac14<u_{n+1}(1-u_n),$$

y porque $1-u_n>0$, se tiene $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n<u_{n+1}$.
u es creciente y acotada superiormente. Así u converge y $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac12$ (divertido no !).

Solución del ejercicio 1673 ▲005316

1. Para todo real a,

$$\mathrm{e}^{i(2p+1)a}=(\cos a+i\operatorname{sen}a)^{2p+1}=\sum_{j=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{j}\cos^{2p+1-j}a(i\operatorname{sen}a)^j,$$

luego

$$\operatorname{sen}((2p+1)a)=\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{i(2p+1)a})=\sum_{j=0}^{p}C_{2p+1}^{2j+1}\cos^{2(p-j)}a(-1)^j\operatorname{sen}^{2j+1}a.$$

Para $1\leqslant k\leqslant p$, poniendo $a=\frac{k\pi}{2p+1}$, se obtiene :

$$\forall k\in\{1,\dots,p\},\ \sum_{j=0}^{p}C_{2p+1}^{2j+1}\cos^{2(p-j)}\frac{k\pi}{2p+1}(-1)^j\operatorname{sen}^{2j+1}\frac{k\pi}{2p+1}=0.$$

luego, para $1\leqslant k\leqslant p$, $0<\frac{k\pi}{2p+1}<\frac{\pi}{2}$ y entonces $\operatorname{sen}^{2p+1}\frac{k\pi}{2p+1}\neq 0$. Dividiendo los dos miembros de $(*)$ por $\operatorname{sen}^{2p+1}\frac{k\pi}{2p+1}$, se obtiene :

$$\forall k\in\{1,\dots,p\},\ \sum_{j=0}^{p}(-1)^jC_{2p+1}^{2j+1}\operatorname{cotan}^{2(p-j)}\frac{k\pi}{2p+1}=0.$$

Ahora, los p números $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ son dos a dos distintos. En efecto, para $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Por tanto, sobre $]0, \frac{\pi}{2}[$, la función $x \mapsto \cotan x$ es estrictamente decreciente y estrictamente positiva, de manera que la función $x \mapsto \cotan^2 x$ es estrictamente decreciente y en particular inyectiva. Estas p números distintos dos a dos son raíces del polinomio $P = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$, que es de grado p. Estas son así todas las raíces de P (estas raíces son, por lo tanto simples y reales). De las relaciones entre los coeficientes y las raíces de un polinomio dividido, se tiene :

$$\sum_{k=1}^{p} \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^3}{C_{2p+1}^1} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

luego,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p} (1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2. Para n entero natural no nulo dado, se tiene

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

y la sucesión (u_n) es estrictamente creciente. Además, para $n \geqslant 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La sucesión (u_n) es creciente y es acotada superiormente por 2. Así, la sucesión (u_n) converge a un real menor o igual a 2.

3. Para x elemento de $[0, \frac{\pi}{2}]$, se escribe $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \tan x - x$. f y g son derivables en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y para x elemento de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 1 - \cos x$ y $g'(x) = \tan^2 x$. f' y g' son estrictamente positivos en $]0, \frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto, estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Como $f(0) = g(0) = 0$, se deduce que f y g son estrictamente positivos en $]0, \frac{\pi}{2}[$. Entonces, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$ y pasando a la inversa $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

4. Para $1 \leqslant k \leqslant p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ y entonces $0 < \cotan \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{2p+1}{k\pi} < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2p+1}}$.

Luego, $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < (\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}) \frac{1}{k^2} < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2p+1}}$. Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^{p} \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

los miembros de izquierda y de recta tienden a $\frac{\pi^2}{6}$, cuando p tiende a infinito y por lo tanto, la sucesión (u_p) tiende a $\frac{\pi^2}{6}$.

Solución del ejercicio 1674 ▲005459

---

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant (\frac{\pi}{2})^n$ y entonces, por crecimiento de la integral,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 (\frac{\pi}{2})^n dx = \frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n.$$

De acuerdo a un teorema de crecimientos comparados, $\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Por el teorema de los gendarmes, u_n tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$.

2. $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+0}\,dx = \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{1}{n+1}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\int_0^\pi \frac{n \operatorname{sen} x}{x+n}\,dx - \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx\right| = \left|\int_0^\pi \frac{-x \operatorname{sen} x}{x+n}\,dx\right| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{-x \operatorname{sen} x}{x+n}\,dx\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{0+n}\,dx = \frac{\pi^2}{n}.$$

Por tanto, $\frac{\pi^2}{n}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, y entonces $\int_0^\pi \frac{n \operatorname{sen} x}{x+n}\,dx$ tiende a $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 1678 ▲000539

---

1. La función polinomial $P(x) := x^3 - 3x + 1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es $P'(x) = 3x^2 - 3$, que es estrictamente negativo en $]-1,+1[$. En consecuencia P es estrictamente decreciente en $]-1,+1[$. Como $P(0) = 1 > 0$ y $P(1/2) = -3/8 < 0$ resulta gracias al teorema del valor intermedio de que existe un único real $\alpha \in]0,1/2[$ tal que $P(\alpha) = 0$.
2. Como $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ resulta que α es la única solución de la ecuación $f(x) = x$ en $]0,1/2[$.
3. Como $f'(x) = (x^2+2)/3 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Como $f(0) = 1/9$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se deduce que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9, +\infty[$. Como $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0$, entonces $x_1 > x_0 = 0$; f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, se deduce por recurrencia que $x_{n+1} > x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que la sucesión (x_n) es creciente.
4. Un simple cálculo muestra que $f(1/2) < 1/2$. Como $0 = x_0 < 1/2$ y que f es creciente, se deduce por inducción que $x_n < 1/2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (de hecho, si $x_n < 1/2$, entonces $x_{n+1} = f(x_n) < f(1/2) < 1/2$).
5. Según las preguntas anteriores, la sucesión (x_n) es creciente y acotada superiormente, por lo tanto, converge a un número real $\ell \in]0,1/2]$. Además, como $x_{n+1} = f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se deduce por continuidad de f que $\ell = f(\ell)$. Como $f(1/2) < 1/2$, Se deduce que $\ell \in]0,1/2[$ y se comprueba la ecuación $f(\ell) = \ell$. Según la pregunta 2, se deduce que $\ell = \alpha$ y entonces (x_n) converge a α.

Solución del ejercicio 1702 ▲004703

---

1. $u_n \searrow \sqrt{a}$, y $u_n - \sqrt{a} < \frac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.
2. $u_{2n} \to 0$, $u_{2n+1} \to 1$.
3. Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $u_n \searrow 0$, si no $u_n \searrow -\infty$.
4. — $\frac{1}{4} < \alpha$: $u_n \to \infty$;

— $-\frac{3}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{4} : u_n \to \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$,
— $-1 < \alpha \leqslant -\frac{3}{4}$: 1 punto fijo y dos puntos recíprocos. (u_n) no converge.

5. Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.
6. $u_n \to \frac{1}{2}$.
7. Teorema del punto fijo en $]-\infty, \frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.
8. Si $u_0 \neq 1$, $\exists\ n$ tal que $4-3u_n < 0 \Rightarrow$ sucesión finita.
9. $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.
10. 1 es punto fijo, hay dos puntos recíprocos. (u_n) no converge.
11. — $1 < \alpha : u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$
    — $-1 < \alpha < 1 : u_n \to 1$
    — $\alpha \leqslant -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.
12. $e^{1/e} < \alpha : u_n \to \infty$. $1 < \alpha < e^{1/e}$: 2 puntos fijos, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, y $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$. $e^{-e} \leqslant \alpha < 1$: 1 punto fijo, β, y $u_n \to \beta$. $\alpha < e^{-e}$: 1 punto fijo y dos puntos recíprocos. (u_n) no converge.

Solución del ejercicio 1703 ▲004704

CV (hacia 0) si y solo si $|ka_0| < 1$.

Solución del ejercicio 1705 ▲004706

$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución del ejercicio 1706 ▲004707

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geqslant u_n$. No existe un punto fijo.

Solución del ejercicio 1709 ▲004710

$y_n - x_n = \text{cte} \Rightarrow x_n \to 0,\ y_n \to y_0 - x_0$.

Solución del ejercicio 1710 ▲004711

$y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{3^n}$ y $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \longrightarrow \frac{y_0 + x_0}{2}$.

Solución del ejercicio 1711 ▲004712

$x_n y_n = c^{te} \Rightarrow x_n, y_n \to \sqrt{x_0 y_0}$.

Solución del ejercicio 1712 ▲004713

1.

2. $\ell = b\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}$.

Solución del ejercicio 1713 ▲004714

1. $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\big((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\big)$.
2. $3c_{n+1}-3b_{n+1}=a_n+b_n+c_n-3\sqrt[3]{a_nb_nc_n}\geqslant 0\Rightarrow b_{n+1}\leqslant c_{n+1}$.
   $\frac{3}{a_{n+1}}-\frac{3}{b_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}-\frac{3}{\sqrt[3]{a_nb_nc_n}}\geqslant 0\Rightarrow a_{n+1}\leqslant b_{n+1}$.

   Entonces (a_n) crece y (c_n) decrece : $a_n\longrightarrow a$, $b_n\longrightarrow b$, $c_n\longrightarrow c$, con $\begin{cases}\frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\ b^2=ac\\ 2c=a+b\end{cases}\Rightarrow a=b=c.$

Solución del ejercicio 1714 ▲004715

Para $u_0>0$ se tiene $u_n\searrow 0$ y para $u_0<0$ se tiene $u_n\nearrow 0$. $f'(0)=\frac{1}{2}$, por lo tanto $u_{n+1}\sim\frac{1}{2}u_n$ y la serie $\sum u_n$ converge absolutamente (d'Alembert).

Solución del ejercicio 1715 ▲004716

El conjunto de valores de adherencia de la sucesión es un intervalo cuyos elementos son todos puntos fijos por f. Si existen varios valores de adherencia, se debe pasar de uno a otro con una longitud de salto que tiende a cero, se debe caer en un punto fijo entre los dos, contradicción.

Solución del ejercicio 1716 ▲005228

1. Cálculo formal de u_n. Sea $x\in\mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x}=x\Leftrightarrow 2x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ o $x=1$. Para n entero natural dado, se tiene entonces

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\frac{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}{\frac{u_n}{3-2u_n}}=\frac{3u_n-3}{u_n}=3\frac{u_n-1}{u_n}.$$

   Así, $\frac{u_n-1}{u_n}=3^n\frac{u_0-1}{u_0}$, luego $u_n=\frac{u_0}{u_0-3^n(u_0-1)}$.
2. Cálculo formal de u_n. Sea $x\in\mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x}=x\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2$. Para n entero natural dado, se tiene entonces

$$\frac{1}{u_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n}-2}=\frac{u_n}{2(u_n-2)}=\frac{u_n-2+2}{2(u_n-2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{u_n-2}.$$

   Así, $\frac{1}{u_n-2}=\frac{n}{2}+\frac{1}{u_0-2}$, luego $u_n=2+\frac{2(u_0-2)}{(u_0-2)n+2}$.

Solución del ejercicio 1717 ▲005229

Para todo natural n, se tiene $\begin{cases}u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(v_n-u_n)\\ v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}(v_n-u_n)\\ v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n-u_n).\end{cases}$
La última relación demuestra que la sucesión $v-u$ mantiene un signo constante, entonces las dos primeras relaciones muestran que para todo entero natural n, $\operatorname{sgn}(u_{n+1}-u_n)=\operatorname{sgn}(v_n-u_n)$ y $\operatorname{sgn}(v_{n+1}-v_n)=$

$-\text{sgn}(v_n - u_n)$. Las sucesiones u y v son, por lo tanto monótonas con direcciones de variación opuestos. Si por ejemplo $u_0 \leqslant v_0$, entonces, para todo natural n, se tiene :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

En este caso, la sucesión u es creciente y es acotada superiormente por v_0 y por lo tanto, converge a algún real ℓ. Igualmente, la sucesión v es decreciente y acotada inferiormente por u_0 y por lo tanto, converge a algún real ℓ'. En fin, porque para todo entero natural n, se tiene $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$, se obtiene pasando al límite cuando n tiende a infinito, $\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ y entonces $\ell = \ell'$. Las sucesiones u y v son, por lo tanto adyacentes. Si $u_0 > v_0$, solo cambia de rol u y v.

Cálculo de sucesiones u y v. Para n entero natural dado, se tiene $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La sucesión $v - u$ es geométrico de razón $\frac{1}{3}$. Para todo natural n, se tiene $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$. Por otra parte, para n entero natural dado, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La sucesión $v + u$ es constante y por lo tanto, para todo entero natural n, se tiene $v_n + u_n = v_0 + u_0$. Sumando y restando las dos igualdades precedentes, se obtiene para todo los números naturales n :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right) \text{ y } v_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right).$$

En particular, $\ell = \ell' = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

Solución del ejercicio 1718 ▲005230

Para todo natural n, se tiene $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ y entonces, $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$. Igualmente, cambiando los roles de u, v y w, $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$ y $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$ (Cuidado, esta última igualdad no es otra que la suma de las dos primeras y aún falta una ecuación). También se tiene, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ y entonces, para todo natural n, $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$. Así, u_n, v_n y w_n son soluciones del sistema

$$\begin{cases} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - u_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{cases}.$$

Así, para todo entero natural n, se tiene

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0)\right) \\ v_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0)\right) \\ w_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0)\right) \end{cases}.$$

Las sucesiones u, v y w convergente hacia $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$.

Solución del ejercicio 1719 ▲005231

Demostrar primeramente que :

$$\forall (x,y,z) \in]0,+\infty[^3,\ (x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leqslant \sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}).$$

Pongamos $m = \frac{x+y+z}{3}$, $g = \sqrt[3]{xyz}$ y $h = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Sean y y z dos reales estrictamente positivos tales que $y \leqslant z$. Para $x \in]0,y]$, se escribe

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z).$$

u es derivable en $]0,y]$ y para $x \in]0,y]$,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leqslant \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

u es, por lo tanto decreciente en $]0,y]$ y para x en $]0,y]$, $u(x) \geqslant u(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. Sea z un número real fijo estrictamente positivo. Para $y \in]0,z]$, se escribe $v(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. v es derivable en $]0,z]$ y para $y \in]0,z]$,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leqslant \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

v es, por lo tanto decreciente en $]0,z]$ y para y en $]0,z]$, se tiene $v(y) \geqslant v(z) = 0$. Se viene de demostrar que $g \leqslant m$. Aplicando este resultado a $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$, se obtiene $\frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h}$ y entonces $h \leqslant g$. En fin, $m \leqslant \frac{z+z+z}{3} = z$ y $h \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} = x$. Finalmente,

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant z.}$$

Con este resultado preliminar establecido, ya que $0 < u_0 < v_0 < w_0$, por recurrencia, las sucesiones u, v y w están definidas entonces, para todo natural n, se tiene $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, y además $u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant w_0$. La sucesión u es creciente y es acotada superiormente por w_0 y por lo tanto, converge. La sucesión w es decreciente y acotada inferiormente por u_0 y por lo tanto, converge. En fin, porque para todo entero natural n, $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$, la sucesión v converge. Sean entonces a, b y c los límites respectivos de las sucesiones u, v y w. Porque para todo entero natural n, se tiene $0 < u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, se tiene ya pasando al límite $0 < u_0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Siempre pasando al límite cuando n tiende a $+\infty$:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc = ab + ac \\ b^2 = ac \\ a + b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c - a \\ a^2 - 5ac + 4c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a = c \text{ y } b = c) \text{ o } (a = 4c \text{ y } b = -2c).$$

$b = -2c$ es imposible porque b y c son estrictamente positivos y por lo tanto, $a = b = c$. Las sucesiones u, v y w convergente a un límite común.

Solución del ejercicio 1720 ▲005240

En primer lugar, se demuestra fácilmente por inducción que, para todo entero natural no nulo n, u_n existe y $u_n \geqslant 1$. Pero entonces, para todo entero natural no nulo n, $1 \leqslant u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leqslant 1 + n$. Así, para $n \geqslant 2$, $1 \leqslant u_n \leqslant n$, lo que es aún cierto para $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant n.$$

Se supone momentáneamente que la sucesión $(u_n - \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge a un real ℓ. En este caso :

$$1+\frac{n}{u_n}=1+\frac{n}{\sqrt{n}+\ell+o(1)}=1+\sqrt{n}\frac{1}{1+\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=1+\sqrt{n}\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\sqrt{n}+1-\ell+o(1).$$

Por otra parte,

$$u_{n+1}=\sqrt{n+1}+\ell+o(1)=\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+\ell+o(1)=\sqrt{n}+\ell+o(1),$$

y entonces $\ell-(1-\ell)=o(1)$ o aún $2\ell-1=0$. Entonces, si la sucesión $(u_n-\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge a un real ℓ, entonces $\ell=\frac{1}{2}$. Queda por demostrar que la sucesión $(u_n-\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge. Se observa que para todo entero natural no nulo,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}(-u_n^2+u_n+n)=\frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})-u_n\right)\left(u_n-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4n+1})\right).$$

Demostrar por inducción que para $n\geqslant 1$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$.
Se define $v_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ y $w_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$. Si $n=1$, $v_1=1\leqslant u_1=1\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=w_1$. Sea $n\geqslant 1$. Se supone que $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$. Entonces,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}\leqslant u_{n+1}=1+\frac{n}{u_n}\leqslant 1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}.$$

Pero, para $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5})-(1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1})) &= \operatorname{sgn}((1+\sqrt{4n+5})(1+\sqrt{4n-3})-2(2n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&= \operatorname{sgn}(\sqrt{4n+5}(1+\sqrt{4n-3})-(4n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&= \operatorname{sgn}((4n+5)(1+\sqrt{4n-3})^2-(4n+1+\sqrt{4n-3})^2)\\
&\qquad \text{(por crecimiento de } x\mapsto x^2 \text{ sobre } [0,+\infty[)\\
&= \operatorname{sgn}((4n+5)(4n-2+2\sqrt{4n-3})-((4n+1)^2+2(4n+1)\sqrt{4n-3}+4n-3))\\
&= \operatorname{sgn}(-8+8\sqrt{4n-3})=\operatorname{sgn}(\sqrt{4n-3}-1)=\operatorname{sgn}((4n-3)-1)=\operatorname{sgn}(n-1)=+
\end{aligned}$$

Así, $u_{n+1}\leqslant 1+1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}\leqslant w_{n+1}$. Por otra parte,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}+1}=\frac{(\sqrt{4n+1}+1)^2}{2(\sqrt{4n+1}+1)}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})=v_{n+1},$$

y por lo tanto, $v_{n+1}\leqslant u_{n+1}\leqslant w_{n+1}$. Se ha demostrado por recurrencia que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})\leqslant u_n\leqslant\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}),$$

(lo que demuestra de paso que u es creciente). Entonces, para $n\geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\sqrt{n}\leqslant u_n-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}-\sqrt{n},$$

o aún, para todo $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}} \leqslant u_n-\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}}.$$

Ahora, como las dos sucesiones $(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}})$ y $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}})$ convergentes los dos a $\frac{1}{2}$, de acuerdo con teorema del límite por encuadramientos, la sucesión $(u_n-\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ converge a $\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 1721 ▲005277

---

1. Se define $J=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ de manera que $A=I+J$. Se tiene $J^2=2j$ y entonces, más generalmente : $\forall k\geqslant 1$, $J^k=2^{k-1}J$. Pero entonces, ya que I y J conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON proporciona para n entero natural no nulo dado :

$$\begin{aligned}A^n &= (I+J)^n = I+\sum_{k=1}^{n} C_n^k J^k = I+(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1})J = I+\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k - 1)J\\ &= I+\frac{1}{2}((1+2)^n-1)J = I+\frac{1}{2}(3^n-1)J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

lo que es aún cierto para $n=0$. Entonces,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}.$$

Para n entero natural dado, se escribe $X_n=\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\end{pmatrix}$. Para todo natural n, se tiene entonces $X_{n+1}=A\cdot X_n$ y entonces,

$$X_n=A^n\cdot X_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1\\ 3^n-1 & 3^n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2}\end{pmatrix}.$$

Así,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\ \text{ y }\ v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

2. Sea $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n)$. Entonces, la sucesión $u+v$ es una sucesión geométrica de razón 3 y de primer término $u_0+v_0=1$. Se deduce que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n=3^n \quad (I).$$

Igualmente, para todo entero natural n $u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n$. Entonces, la sucesión $u+v$ es una sucesión constante. Porque $u_0-v_0=1$, se deduce que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-v_n=1 \quad (II).$$

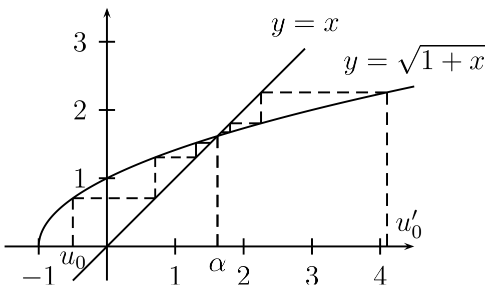
Sumando y restando (I) y (II), se obtiene

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{3^n+1}{2}\ \text{ y }\ v_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

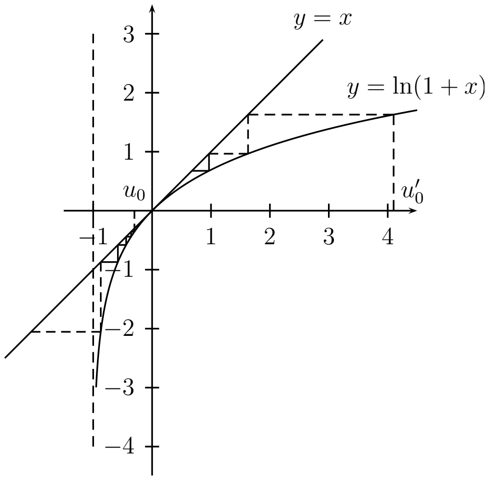
Solución del ejercicio 1722 ▲005425

1. Para $x \geqslant -1$, se escribe $f(x) = \sqrt{1+x}$ y $g(x) = f(x) - x$. Sea $u_0 \in I = [-1, +\infty[$. f se define en I y además $f(I) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[$. Se deduce, por una demostración por inducción, que la sucesión u se define. Si la sucesión u converge, ya que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant -1$, su límite ℓ verifica $\ell \geqslant -1$. Porque f es continua en $[-1, +\infty[$ y por lo tanto, en ℓ,
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$
y ℓ es un punto fijo de f. Por tanto, para $x \geqslant -1$,
$$\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1+x = x^2 \text{ y } x \geqslant 0 \Leftrightarrow (x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ y } x \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$
Así, si la sucesión (u_n) converge, es hacia el número $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Para $x \geqslant -1$,
$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f(x)-\alpha) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\alpha}) = \operatorname{sgn}((1+x)-(1+\alpha))\ (x \mapsto x^2 \text{creciente en } [0,+\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x-\alpha).\end{aligned}$$
Así, los intervalos $[-1, \alpha[$ y $]\alpha, +\infty[$ son estables por f. Entonces, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, luego por recurrencia $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$ y si $u_0 > \alpha$, luego $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$.
Sea $x \geqslant -1$. Si $x \in [-1, 0]$, $\sqrt{1+x} - x \geqslant 0$ y si $x \geqslant 0$,
$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(g(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{1+x} - x)\\ &= \operatorname{sgn}((1+x) - x^2) \quad (\text{por crecimiento de } x \mapsto x^2 \text{ sobre } [0, +\infty[)\\ &= \operatorname{sgn}(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2})(-x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - x) = \operatorname{sgn}(\alpha - x) \text{ (porque aquí } x \geqslant 0).\end{aligned}$$
Se deduce que, si $x \in [-1, \alpha[$, $f(x) > x$, y si $x \in]\alpha, +\infty[$, $f(x) < x$. Pero entonces, si $-1 \leqslant u_0 < \alpha$, ya que $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant u_n < \alpha$, para n entero natural dado, se tiene
$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n.$$
La sucesión u es estrictamente creciente, mayorada por α y por lo tanto, convergente. También se sabe que su límite es necesariamente α. Si $u_0 > \alpha$, ya que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \alpha$, para n entero natural dado, se tiene
$$u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$
La sucesión u es estrictamente decreciente, minorada por α y por lo tanto, convergente. También se sabe que su límite es necesariamente α. En fin, si $u_0 = \alpha$, la sucesión u es constante.

En resumen, si $u_0 \in [-1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la sucesión u es estrictamente creciente, convergente de límite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, si $u_0 \in]\frac{\sqrt{5}+1}{2}, +\infty[$, la sucesión u es estrictamente decreciente, convergente de límite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, si $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}[$, la sucesión u es constante y en particular convergente de límite $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Así, en todos los casos, la sucesión u es convergente y $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



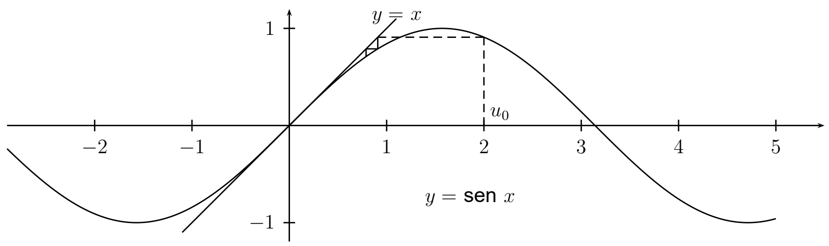
2. Si $u_0 > 0$, entonces porque f se define en el intervalo $I =]0,+\infty[$ y que I es estable por f ($\forall x > 0$, $\ln(1+x) > \ln 1 = 0$), la sucesión u es definida y es estrictamente positiva. Si la sucesión u converge, su límite ℓ es un real positivo **o nulo**. Por continuidad de f sobre $[0,+\infty[$ y por lo tanto, en ℓ,
$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell).$$
Para $x > -1$, se escribe $g(x) = \ln(1+x) - x$. g está definida y es derivable en $]-1,+\infty[$ y para $x > -1$,
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$
g' es estrictamente positiva en $]-1,0[$ y estrictamente negativa en $]0,+\infty[$. g es, por lo tanto estrictamente creciente en $]-1,0]$ y estrictamente decreciente en $[0,+\infty[$. Así, si $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $g(x) < 0$. En particular, para $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $f(x) \neq x$. Porque $f(0) = 0$, f admite en $]-1,+\infty[$ uno y solo un punto fijo a saber 0.
En resumen, si $u_0 > 0$, la sucesión u se define, estrictamente positiva, y además, si la sucesión u converge, entonces $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Pero, para n entero natural dado,
$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n) - u_n < 0.$$



Así, la sucesión u es estrictamente decreciente, minorada por 0 y entonces, de acuerdo a esto que precede, converge a 0. Si $u_0 = 0$, la sucesión u es constante. Por lo tanto, queda por estudiar el caso en que $u_0 \in]-1,0[$. Demostrar por reducción al absurdo que existe un rango n_0 tal que $u_{n_0} \leqslant -1$. En caso contrario, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$. Como antes, por recurrencia, la sucesión u tiene valores en $]-1,0[$ y estrictamente decreciente. Es minorada por -1, la sucesión u converge a algún real ℓ. Porque $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n \leqslant u_0 < 0$, se tiene $-1 \leqslant \ell \leqslant u_0 < 0$. Entonces, o bien $\ell = -1$, o bien f es continua en ℓ y ℓ es un punto fijo de f elemento de $]-1,0[$.
Sea ha visto que f no admite un punto fijo en $]-1,0[$ y por lo tanto, este último caso queda excluido. Luego, si $\ell = -1$, existe un rango N tal que $u_N \leqslant -0.9$. Pero entonces, $u_{N+1} \leqslant \ln(-0,9+1) = -2,3\ldots < -1$, lo que es aún una contradicción. Entonces, existe un rango n_0 tal que $u_{n_0} \leqslant -1$ y la sucesión u no está definida a partir de cierto rango.
En resumen, si $u_0 \in]0,+\infty[$, la sucesión u es estrictamente decreciente, convergente y $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, si $u_0 = 0$, la sucesión u es constante, y si $u_0 \in]-1,0[$, la sucesión u no está definida a partir de cierto rango.

3. Para toda elección de u_0, $u_1 \in [-1,1]$. En adelante se supone que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la sucesión u es constante. Si $u_0 \in [-1,0[$, consideremos la sucesión u' definida por $u'_0 = -u_0$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_{n+1} = \operatorname{sen}(u'_n)$. La función $x \mapsto \operatorname{sen} x$, es claro por recurrencia que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = -u_n$. En adelante se supone que $u_0 \in]0,1]$. Porque $]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$, se tiene $\operatorname{sen}]0,1] \subset]0,1]$ y el intervalo $I =]0,1]$ es estable por f. Así, si $u_0 \in]0,1]$, entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$. Para $x \in [0,1]$, se escribe $g(x) = \operatorname{sen} x - x$. g es derivable en $[0,1]$ y para $x \in [0,1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' es estrictamente negativa en $]0,1]$ y por lo tanto, estrictamente decreciente en $[0,1]$. Se deduce que para $x \in]0,1]$, $g(x) < g(0) = 0$. Pero entonces, para n entero natural dado, $u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n) < u_n$. La sucesión u es, por lo tanto estrictamente decreciente, minorada por 0 y por lo tanto, converge a $\ell \in [0,1]$. La función $x \mapsto \operatorname{sen} x$ es continua

en $[0,1]$ y entonces, ℓ es un punto fijo de f. El estudio de g demuestra que f tiene un solo punto fijo en $[0,1]$ a saber 0. La sucesión u es, por lo tanto convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. El estudio preliminar demuestra que la sucesión u converge a 0, para todas las escogencias de u_0.



4. Si u_0 es un real cualquiera, $u_1 \in [-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, luego $u_2 \in [0,1]$. En adelante se supone que $u_0 \in [0,1]$. Se tiene $\cos([0,1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0,504..., 1] \subset [0,1]$. Entonces, la función $x \mapsto \cos x$ deja estable el intervalo $I = [0,1]$. Se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. Para $x \in [0,1]$, se establece $g(x) = \cos x - x$. g es la suma de dos funciones estrictamente decrecientes en $[0,1]$ y por lo tanto, es estrictamente decreciente en $[0,1]$. Además, g es continua en $[0,1]$ y se comprueba que $g(0) = \cos 0 > 0$ y $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. g se anula así una y solo una vez en $[0,1]$ en cierto real α. Así, f admite en $[0,1]$ un solo punto fijo, a saber α. Porque f es continua en el segmento $[0,1]$, se sabe que si la sucesión u converge, es hacia α. La función $f: x \mapsto \cos x$ es derivable en $[0,1]$ y para $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| = |-\text{sen} x| \leqslant \text{sen} 1 < 1.$$

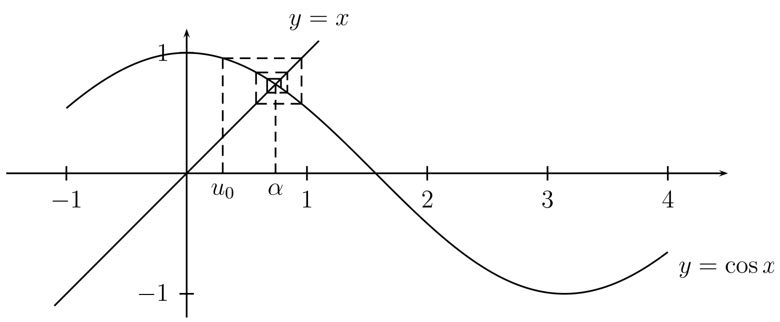
La desigualdad de los incrementos finitos muestra que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|\cos x - \cos y| \leqslant \text{sen} 1 |x-y|$. Para n entero natural dado, se tiene entonces

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \text{sen} 1 |u_n - \alpha|,$$

y entonces, para todo entero natural n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant (\text{sen} 1)^n |u_0 - \alpha| \leqslant (\text{sen} 1)^n.$$

Como $0 \leqslant \text{sen} 1 < 1$, la sucesión $(\text{sen} 1)^n$ converge a 0, y así la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. Se puede notar que como la función $x \mapsto \cos x$ es estrictamente decreciente en $[0,1]$, las dos sucesiones $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ son estrictamente monótonas, de sentido de variaciones contrarias (en el caso donde $u_0 \in [0,1]$. También se puede señalar que si $n > \dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln(\text{sen} 1)} = 26,6...$, entonces $(\text{sen} 1)^n < 10^{-2}$. Así, u_{27} es un valor aproximado de α con un error de 10^{-2}. La máquina proporciona $\alpha = 0,73...$ (e incluso $\alpha = 0,739087042.....$).



5. Si u_0 es un real cualquiera, entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [-1,1]$. Se supone sin pérdida de generalidad que $u_0 \in [-1,1]$. Si $u_0 = 0$, la sucesión u es constante y por otro lado, el estudio del caso $u_0 \in [-1,0[$ se reduce, como en 3), al estudio del caso $u_0 \in]0,1]$. En adelante se supone que $u_0 \in]0,1]$. Si $x \in]0,1]$, entonces $2x \in]0,2] \subset]0,\pi[$ y entonces $\text{sen}(2x) \in]0,1]$. El intervalo $I =]0,1]$ es, por lo tanto estable por la función $f:\ x \mapsto \text{sen}(2x)$. Se deduce que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

   Para $x \in [0,1]$, se escribe $g(x) = \text{sen}(2x) - x$. g es derivable en $[0,1]$ y para $x \in [0,1]$, $g'(x) = 2\cos(2x) - 1$. g es, por lo tanto estrictamente creciente en $[0,\frac{\pi}{4}]$ y estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{4},1]$. Se deduce que si $x \in]0,\frac{\pi}{4}]$, $g(x) > g(0) = 0$. Por otra parte, g es continua y estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{4},1]$ y se comprueba $g(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ y $g(1) = \text{sen}\,2 - 1 < 0$. g se anula así una y solo una vez en un cierto real $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$.

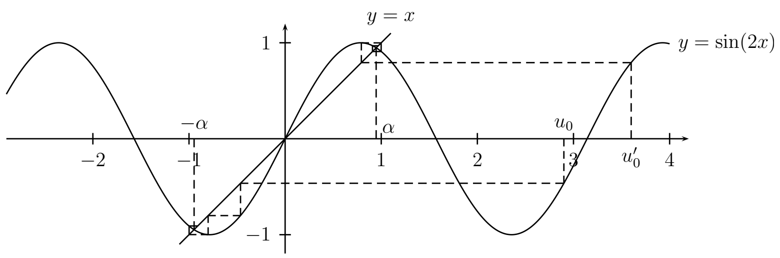
   En resumen, g se anula una vez y solo una vez en $]0,1]$ en cierto real $\alpha \in]\frac{\pi}{4},1[$, g es estrictamente positiva en $]0,\alpha[$ y estrictamente negativa en $]\alpha,1]$. Se supone que $u_0 \in]0,\frac{\pi}{4}[$ y se demuestra por reducción al absurdo que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. En caso contrario, todos los u_n están en $]0,\frac{\pi}{4}[$. Pero entonces, para todo entero natural n,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0.$$

   La sucesión u es estrictamente creciente. Es mayorado por $\frac{\pi}{4}$, la sucesión u converge. Como g es continua en $[u_0,\frac{\pi}{4}]$ y que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [u_0,\frac{\pi}{4}]$, se sabe que el límite de u es un punto fijo de f elemento de $[u_0,\frac{\pi}{4}]$. Pero el estudio de g ha demostrado que f no admite un punto fijo en este intervalo (u_0 es estrictamente positivo). Se llega a una contradicción. Entonces, o bien $u_0 \in [\frac{\pi}{4},1]$, o bien $u_0 \in]0,\frac{\pi}{4}[$ y en este caso, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. En todos los casos, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \in [\frac{\pi}{4},1]$. Pero entonces, ya que $f([\frac{\pi}{4},1]) = [\text{sen}\,2,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}] \subset [\frac{\pi}{4},1]$ (pues $\text{sen}\,2 = 0{,}909... > 0{,}785... = \frac{\pi}{4}$), para todo entero $n \geqslant n_0$, $u_n \in [\frac{\pi}{4},1]$. Para $x \in [\frac{\pi}{4},1]$, $|g'(x)| = |2\cos(2x)| \leqslant |2\cos 2|$. La desigualdad de los incrementos finitos muestra que $\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant |2\cos 2| \cdot |u_n - \alpha|$, ya que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \alpha| \leqslant |2\cos 2|^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|.$$

   Como $|2\cos 2| = 0{,}83... < 1$, se deduce que la sucesión u converge a α. La máquina también da $\alpha = 0{,}947....$



6. Para $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 2.$$

   Entonces, si la sucesión u converge, solo puede ser hacia 1 o 2. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ll} u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2) & \text{(I)} \\ u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 & \text{(II)} \\ u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2). & \text{(III)} \end{array}$$

   1er caso. Si $u_0 = 1$ o $u_0 = 2$, la sucesión u es constante.

2o caso. Si $u_0 \in]1,2[$, (II) y (III) permite demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]1,2[$. (I), luego se demuestra que la sucesión u es estrictamente decreciente. Es minorada por 1, converge a un real $\ell \in [1,u_0] \subset [1,2[$. En este caso, la sucesión (u_n) converge a 1.

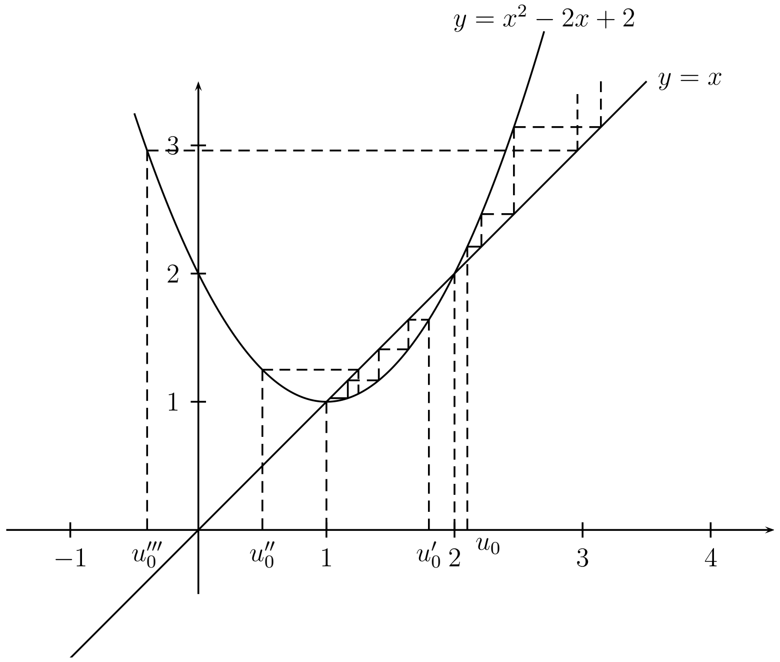
3o caso. Si $u_0 \in]2,+\infty[$, (III) permite demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Pero entonces, (I) demuestra que la sucesión u es estrictamente creciente.
Si u converge, es hacia un real $\ell \in [u_0,+\infty[\subset]2,+\infty[$. f es sin punto fijo en este intervalo, la sucesión u diverge, u es estrictamente creciente y se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4o caso. Si $u_0 \in]0,1[$, entonces $u_1 = (u_0-1)^2+1 \in]1,2[$, lo que nos lleva al segundo caso. La sucesión u converge a 1.

5o caso. Si $u_0 = 0$, entonces $u_1 = 2$ y la sucesión u es constante a partir del rango 1. En este caso, la sucesión u converge a 2.

6o caso. Si $u_0 < 0$, entonces $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, lo que nos lleva al tercer caso. La sucesión u tiende a $+\infty$.

En resumen, si $u_0 \in]0,2[$, la sucesión u converge a 1, si $u_0 \in \{0,2\}$, la sucesión u converge a 2 y si $u_0 \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, la sucesión u tiende a $+\infty$.



Solución del ejercicio 1723 ▲005435

1. Para $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, se escribe $f(x) = \operatorname{sen} x$. Se tiene $f\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right) =]0,1] \subset \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Entonces, ya que $u_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Se sabe que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x < x$ y además, para $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{sen} x = x \Leftrightarrow x = 0$. La sucesión u tiene valores en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ y entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{sen}(u_n) < u_n$. La sucesión u es, por lo tanto estrictamente decreciente y, es minorada por 0, converge a un real ℓ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ que verifica (f es continua en el segmento $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) $f(\ell) = \ell$ o aún $\ell = 0$.
En resumen,

$$\boxed{\text{la sucesión } u \text{ es estrictamente positiva, estrictamente decreciente y converge hacia } 0.}$$

2. Sea α un real arbitrario. Porque la sucesión u tiende a 0, se tiene

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = (\operatorname{sen} u_n)^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha$$
$$= u_n^\alpha\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) = u_n^\alpha\left(-\alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$$
$$= -\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2})$$

Para $\alpha = -2$ se tiene
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

De acuerdo al lema de CÉSARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ o aún $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) = \frac{1}{3} + o(1)$ y finalmente,
$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$
Así, ya que la sucesión u es estrictamente positiva,
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.}$$

Solución del ejercicio 1724 ▲005436

Es inmediato por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ y entonces, ya que la sucesión u es estrictamente positiva, $u_{n+1} < u_n$. La sucesión u es estrictamente decreciente, minorada por 0 y por lo tanto, converge a un real ℓ verificando $\ell = \ell e^{-\ell}$ o aún $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$ o aún $\ell = 0$.

$$\boxed{u \text{ es estrictamente positiva, estrictamente decreciente y converge hacia } 0.}$$

Sea α un real arbitrario. Porque la sucesión u tiende a 0,
$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(e^{-\alpha u_n} - 1) = u_n^\alpha(-\alpha u_n + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1}).$$
Para $\alpha = -1$, se obtiene en particular $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + o(1)$. Después, como en el número anterior, $\frac{1}{u_n} = n + \frac{1}{u_0} + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ y entonces
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

Solución del ejercicio 1725 ▲000563

Se observa primero que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}$. Escribiendo las fracciones de u_n en esta forma, la escritura se simplifica radicalmente :
$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2}\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1)\cdot(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$

Todos los términos de los numeradores se reencuentran en el denominador (y viceversa), excepto en los extremos. De donde :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Entonces (u_n) tienden a $\frac{1}{2}$, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 1730 ▲000568

1. 0.	2. 1.	3. $7/30$.	4. $1/2$.	5. 1.
6. $-3/2$.				
7. 1.				
8. 3.				
9. 1 ; 2.	10. $3/4$.			
11. 0.	12. 0.	13. $1/3$.		

Solución del ejercicio 1731 ▲000569

1. $u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2+a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) = \frac{1}{4}\frac{(u_n^2-a)^2}{u_n^2}$.
2. Es claro que para $n \geqslant 0$ se tiene $u_n > 0$. De acuerdo con la igualdad anterior para $n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$ y como u_{n+1} es positivo, entonces $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. Sea $n \geqslant 1$. Calculemos el cociente de u_{n+1} por u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{u_n^2}\right)$ por lo tanto $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$, pues $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Entonces $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ y $u_{n+1} \leqslant u_n$. La sucesión $(u_n)_{n\geqslant 1}$ por lo tanto, es decreciente.
3. La sucesión $(u_n)_{n\geqslant 1}$ es decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{a}$ por lo que converge a un límite $\ell > 0$. Según la relación
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
cuando $n \to +\infty$, entonces $u_n \to \ell$ y $u_{n+1} \to \ell$. En el límite se tiene la relación
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$
La única solución positiva es $\ell = \sqrt{a}$. Conclusión (u_n) converge a $\sqrt{a}$.
4. La relación
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2}$$
también se escribe
$$(u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2(u_n+\sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$
Entonces
$$\begin{aligned} u_{n+1}-\sqrt{a} &= (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(u_{n+1}+\sqrt{a})}\left(\frac{u_n+\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{4(2\sqrt{a})}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leqslant (u_n-\sqrt{a})^2\frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

5. Por recurrencia para $n=1$, $u_1-\sqrt{a}\leqslant k$. Si la proposición es verdadera para n, entonces

$$u_{n+1}-\sqrt{a}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2\leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

6. Sea $u_0=3$, entonces $u_1=\frac{1}{2}(3+\frac{10}{3})=3,166\dots$ Como $3\leqslant\sqrt{10}\leqslant u_1$, por lo tanto $u_1-\sqrt{10}\leqslant 0.166\dots$. Se puede escoger $k=0,17$. Para que el error $u_n-\sqrt{a}$ sea menor que 10^{-8} es suficiente calcular el término u_4 porque entonces el error (calculada por la fórmula de la pregunta anterior) es inferior a $1,53\times10^{-10}$. Se obtiene $u_4=3,16227766\dots$
Balance $\sqrt{10}=3,16227766\dots$, con una precisión de 8 cifras luego del punto decimal. El número de dígitos exactos se duplica con cada iteración, con u_5 se tiene (al menos) 16 cifras exactas, y con u_6 al menos 32...

Solución del ejercicio 1732 ▲000570

1. La sucesión (u_n) es estrictamente creciente, en efecto, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$. La sucesión (v_n) es estrictamente decreciente :

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!}(\frac{2}{n}-1).$$

Así a partir de $n\geqslant 2$, la sucesión (v_n) es estrictamente decreciente.

2. Como $u_n\leqslant v_n\leqslant v_2$, entonces (u_n) es una sucesión creciente y mayorada, por lo que converge a $\ell\in\mathbb{R}$. Igualmente $v_n\geqslant u_n\geqslant u_0$, por lo tanto (v_n) es una sucesión decreciente y minorada y converge a $\ell'\in\mathbb{R}$. Además, $v_n-u_n=\frac{1}{n!}$. Y por lo tanto (v_n-u_n) tiende a 0, lo que prueba que $\ell=\ell'$.

3. Se supone que $\ell\in\mathbb{Q}$, se escribe entonces $\ell=\frac{p}{q}$, con $p,q\in\mathbb{N}$. Se obtiene para $n\geqslant 2$:

$$u_n\leqslant\frac{p}{q}\leqslant v_n.$$

Se escribe esta igualdad para $n=q$: $u_q\leqslant\frac{p}{q}\leqslant v_q$ y multiplicar por $q!$: $q!u_q\leqslant q!\frac{p}{q}\leqslant q!v_q$. ¡En esta doble desigualdad todos los términos son enteros ! Además, $v_q=u_q+\frac{1}{q!}$, por lo tanto :

$$q!u_q\leqslant q!\frac{p}{q}\leqslant q!u_q+1.$$

Así el entero $q!\frac{p}{q}$ es igual al entero $q!u_q$ o en $q!u_q+1=q!v_q$. Se obtiene que $\ell=\frac{p}{q}$ es igual a u_q o en v_q. Se supone por ejemplo que $\ell=u_q$, como la sucesión (u_n) es estrictamente creciente, entonces $u_q<u_{q+1}<\cdots<\ell$, lo que conduce a una contradicción. El mismo razonamiento se aplica suponiendo $\ell=v_q$ porque la sucesión (v_n) es estrictamente decreciente. Para concluir, se ha demostrado que ℓ no es un número racional.

De hecho ℓ es el número $\mathrm{e}=\exp(1)$.

Solución del ejercicio 1733 ▲000571

---

1. Si $u_0 \leqslant u_1$, entonces como f es creciente $f(u_0) \leqslant f(u_1)$, por lo tanto $u_1 \leqslant u_2$, entonces $f(u_1) \leqslant f(u_2)$ sea $u_2 \leqslant u_3$,... Por recurrencia se demuestra que (u_n) es decreciente. Como es minorada por a, entonces converge. Si $u_0 \leqslant u_1$, entonces la sucesión (u_n) es creciente y es acotada superiormente por b por lo tanto converge. Denotemos ℓ el límite de $(u_n)_n$. Como f es continua entonces $(f(u_n))$ tiende a $f(\ell)$. Además, el límite de $(u_{n+1})_n$ es también ℓ. Pasando al límite en la expresión $u_{n+1} = f(u_n)$ se obtiene la igualdad $\ell = f(\ell)$.
2. La función f definida por $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ es continua y derivable en el intervalo $[0,4]$ y $f([0,4]) \subset [0,4]$. La función f es creciente (calcular su derivada). Como $u_0 = 4$ y $u_1 = 3$, entonces (u_n) es decreciente. Calculemos el valor de su límite ℓ. ℓ es solución de la ecuación $f(x) = x$ sea $4x+5 = x(x+3)$. Como $u_n \geqslant 0$, para todo n, entonces $\ell \geqslant 0$. La única solución positiva de la ecuación de segundo grado $4x+5 = x(x+3)$ es $\ell = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2,7912\ldots$
3. Si f es decreciente entonces $f \circ f$ es creciente (pues $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$). Se aplica la primera pregunta a la función $f \circ f$. La sucesión $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0),\ u_4 = f \circ f(u_2), \ldots)$ es monótona y convergente. Igualmente para la sucesión $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1),\ u_5 = f \circ f(u_3), \ldots)$.
4. La función f definida por $f(x) = (1-x)^2$ es continua y derivable de $[0,1]$ en $[0,1]$. Es decreciente en este intervalo. Se tiene $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19\ldots$ Entonces la sucesión (u_{2n}) es creciente, se sabe que converge y denotamos ℓ su límite. La sucesión (u_{2n+1}) es decreciente, se denota ℓ' su límite. Los límites ℓ y ℓ' son soluciones de la ecuación $f \circ f(x) = x$. Esta ecuación se escribe $(1-f(x))^2 = x$, o aún $(1-(1-x)^2)^2 = x$ sea $x^2(2-x)^2 = x$. Hay dos soluciones evidentes 0 y 1. Se factoriza el polinomio $x^2(2-x)^2 - x$ en $x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)$, con λ y μ las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 : \lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,3819\ldots$ y $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$. Las soluciones de la ecuación $f \circ f(x) = x$ son, por lo tanto $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Como (u_{2n}) es creciente y que $u_0 = \frac{1}{2}$, entonces (u_{2n}) converge a $\ell = 1$ que es el único punto fijo de $[0,1]$ superior a $\frac{1}{2}$. Como (u_{2n+1}) es decreciente y que $u_1 = \frac{1}{4}$, entonces (u_{2n+1}) converge a $\ell' = 0$ que es el único punto fijo de $[0,1]$ inferior a $\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 1734 ▲000572

1. Sean $a, b > 0$. Se quiere demostrar que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Como los dos miembros de esta desigualdad son positivos, esta desigualdad es equivalente a $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$. Además,
$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2$$
lo que es siempre cierto porque $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ es un cuadrado perfecto. Se tiene así la desigualdad buscada.
2. Si se intercambian a y b (que no cambia las medias aritmética y geométrica, y que conserva el hecho de estar incluido entre a y b), se puede asumir que $a \leqslant b$. Luego sumando las dos desigualdades
$$a/2 \leqslant a/2 \leqslant b/2, \qquad a/2 \leqslant b/2 \leqslant b/2,$$
se obtiene
$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b.$$

Igualmente, como todo es positivo, multiplicando las dos desigualdades

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \leqslant \sqrt{b}$$

se obtiene

$$a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. En primer lugar, hay que señalar que para todo n, u_n y v_n son estrictamente positivos, lo que permite decir que las dos sucesiones están bien definidas. Se prueba por inducción : es claro para u_0 y v_0, y si u_n y v_n son estrictamente positivos entonces sus medias geométricas (que es u_{n+1}) y aritmética (que es v_{n+1}) son estrictamente positivos.
   (a) Se quiere demostrar que para cada n, $u_n \leqslant v_n$. La desigualdad es clara para $n = 0$, gracias a las hipótesis hechas sobre u_0 y v_0. Si ahora n es más grande que 1, u_n es la media geométrica de u_{n-1} y v_{n-1} y v_n es la media aritmética de u_{n-1} y v_{n-1}, por lo tanto, por 1., $u_n \leqslant v_n$.
   (b) Se sabe por 2. que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$. En particular, $u_n \leqslant u_{n+1}$ i.e. (u_n) es creciente. Igualmente, de acuerdo a 2., $u_n \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En particular, $v_{n+1} \leqslant v_n$ i.e. (v_n) es decreciente.
   (c) Para todo n, se tiene $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. (u_n) por lo tanto, es creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge a un límite ℓ. Y (v_n) es decreciente y minorada y por lo tanto, converge a un límite ℓ'. Se sabe ahora que $u_n \to \ell$, así también $u_{n+1} \to \ell$, y $v_n \to \ell'$; la relación $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ se escribe en el límite :
   $$\ell = \sqrt{\ell\ell'}.$$
   Así mismo la relación $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ da el límite :
   $$\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}.$$
   Un pequeño cálculo con una u otra de estas igualdades implica $\ell = \ell'$.

Hay otro método un poco más largo, pero también válido.
Definición Dos sucesiones (u_n) y (v_n) se dicen *adyacentes* si

1. $u_n \leqslant v_n$,
2. (u_n) es creciente y (v_n) es decreciente,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Entonces, se tiene el teorema siguiente :
Teorema : Si (u_n) y (v_n) son dos sucesiones adyacentes, ambos son convergentes y tienen el mismo límite. Para aplicar este teorema, puesto que ya se sabe que (u_n) y (v_n) verifican los puntos 1 y 2 de la definición, es suficiente demostrar que $\lim(u_n - v_n) = 0$. Primero se tiene que $v_n - u_n \geqslant 0$. Por tanto, de acuerdo a 1.

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Entonces, si se denota $w_n = v_n - u_n$, se tiene que $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n/2$. Entonces, se puede demostrar (por recurrencia) que $0 \leqslant w_n \leqslant \frac{w_0}{2^n}$, lo que implica $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$. Entonces $v_n - u_n$ tiende a 0, y esto completa la prueba de que las dos sucesiones (u_n) y (v_n) son convergentes y tienen el mismo límite usando el teorema sobre sucesiones adyacentes.

Solución del ejercicio 1736 ▲000574

Denotemos $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \ \ -1.$$

1. La función f_n es continua en $[0,1]$. Además, $f_n(0) = -1 < 0$ y $f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. De acuerdo con el teorema de valores intermediarios, f_n, admite un cero en el intervalo $[0,1]$. Además, es estrictamente creciente (calcular su derivada) sobre $[0,1]$, entonces este cero es único.
2. Calculemos $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1}^k - 1 = a_{n-1}^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) = a_{n-1}^n \ \ \text{(pues } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0\text{, por definición de } a_{n-1}\text{).} \end{aligned}$$

   Se tiene la desigualdad

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

   Por lo tanto f_n es estrictamente creciente, la desigualdad anterior implica $a_n < a_{n-1}$. Se viene de demostrar que la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente. Se observa antes de continuar que $f_n(x)$ es la suma de una sucesión geométrica :

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2.$$

   Evaluar ahora $f_n(\frac{1}{2})$, utilizando la expresión anterior

$$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

   Entonces $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ implica $\frac{1}{2} < a_n$. Para resumir, se ha demostrado que la sucesión $(a_n)_n$ es estrictamente decreciente y minorada por $\frac{1}{2}$.
3. Como $(a_n)_n$ es decreciente y acotada inferiormente por $\frac{1}{2}$, entonces converge, se denota ℓ su límite :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell < a_n.$$

   Apliquemosf_n (que es estrictamente creciente) a esta desigualdad :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

   que se escribe aún :

$$-\frac{1}{2^n} \leqslant f_n(\ell) < 0,$$

   y esto cualquiera que sea $n \geqslant 1$. La sucesión $(f_n(\ell))_n$ converge así a 0 (teorema de los “gendarmes”). Pero se sabe también que

$$f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2;$$

   por lo tanto $(f_n(\ell))_n$ converge a $\frac{1}{1-\ell} - 2$, pues $(\ell^n)_n$ converge a 0. Así

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ de donde } \ell = \frac{1}{2}.$$

Solución del ejercicio 1755 ▲005252

1. En primer lugar, para $n \geqslant 1$, $\frac{n-1}{n}$ existe y es elemento de $[-1,1]$. Entonces, $\arccos \frac{n-1}{n}$ existe para todo entero natural no nulo n. Cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{n-1}{n}$ tiende a 1 y entonces $\arccos \frac{n-1}{n}$ tiende a 0. Pero entonces,
$$\arccos \frac{n-1}{n} \sim \operatorname{sen}(\arccos \frac{n-1}{n}) = \sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$
2. $\arccos \frac{1}{n}$ tiende a 1 y entonces $\arccos \frac{1}{n} \sim 1$.
3. $\operatorname{ch}(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.
4. $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim n.\frac{1}{n} = 1$ y entonces, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)}$ tiende a e. Así, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \mathrm{e}$.
5. $\operatorname{argch} n$ existe para $n \geqslant 1$ y como, para $n \geqslant 1$, $n^4+n^2-1 \geqslant n^4 > 0$, $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$ existe para $n \geqslant 1$.
$$\operatorname{argch} n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) \sim \ln(n+n) = \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \sim \ln n.$$
Así, $\frac{\operatorname{argch} n}{\sqrt{n^4+n^2-1}} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n^4}} = \frac{\ln n}{n^2}$.
6. $-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}+1) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}(\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})) = -\sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - 1+o(1)$, y entonces
$$(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1+o(1)} \sim \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}.$$
7. $$\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln \operatorname{sen}\frac{1}{n}) \sim (\cos\frac{1}{n}-1)\ln(\frac{1}{n}) \sim (-\frac{1}{2n^2})(-\ln n) = \frac{\ln n}{2n^2}.$$
8. $(\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n})^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-\frac{6}{5n\pi}+o(\frac{1}{n}))$, y entonces
$$(\frac{\pi}{2})^{3/5} - (\arctan n)^{3/5} = (\frac{\pi}{2})^{3/5}(1-1+\frac{6}{5n\pi}+o(\frac{1}{n})) \sim (\frac{\pi}{2})^{3/5}\frac{6}{5n\pi}$$
9. En primer lugar, para $n \geqslant 1$, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1$, y entonces $1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 0$, luego $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ existe. Así, cuando n tiende a $+\infty$,
$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 \sim \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$$

Solución del ejercicio 1756 ▲005253

Para $n \geqslant 2$, se tiene
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1+\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}.$$

Pero, para $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ (el producto conteniendo al menos los dos primeros factores. Así,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Se deduce que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Como $\frac{1}{n}$ también tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, se deduce que $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k!$ tiende a 1 y así como

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!.$$

Solución del ejercicio 1757 ▲005254

1. Sea $\varepsilon > 0$. Las sucesiones u y v son equivalentes y la sucesión v es estrictamente positiva. Entonces, existe un rango n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} v_n$. Sea $n > n_0$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| = \frac{|U_n - V_n|}{V_n} &\leqslant \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n} |u_k - v_k| \\ &\leqslant \frac{1}{V_n} \left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k\right) \\ &\leqslant \frac{1}{V_n} \left(\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2} V_n\right) = \frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ahora, la expresión $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ es constante cuando n varía, y por otro lado, V_n tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$. Se deduce que $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k|$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Así, existe un rango $n_1 > n_0$ tal que, para $n \geqslant n_1$, $\frac{1}{V_n} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Para $n \geqslant n_1$, se tiene entonces $\left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{U_n}{V_n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Así, la sucesión $\frac{U_n}{V_n}$ tiende a 1, cuando n tiende a $+\infty$ y entonces $U_n \sim V_n$.

2. $$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Además,

$$\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}.$$

   Esta última expresión tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$.
   En resumen, para $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 0$, pero cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ y enfin, $\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$. De acuerdo a 1),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \sim 2\sqrt{n}.$$

$$(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=(n+1-n)\ln n+(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})=\ln n+1+o(1)\sim\ln n.$$

Como $\sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1)-k\ln k)=(n+1)\ln(n+1)$ tiende a $+\infty$ y que las sucesiones consideradas son positivas, se deduce que

$$\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k\sim\sum_{k=1}^{n}((k+1)\ln(k+1)-k\ln k)=(n+1)\ln(n+1)\sim n\ln n.$$

Solución del ejercicio 1758 ▲005255

Para $n\geqslant 1$, se escribe $u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}+\frac{1}{n}$. Se tiene entonces

$$n(u_n+u_{n+1}-\frac{2}{n})=1+\frac{n}{n+1}-2+n(-1)^n(\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)})=\frac{(-1)^n n(\ln(n+1)-\ln n)}{\ln n\ln(n+1)}+o(1)$$
$$=\frac{(-1)^n n\ln(1+1/n)}{\ln n\ln(n+1)}+o(1)=\frac{(-1)^n(1+o(1))}{\ln n\ln(n+1)}+o(1)=o(1).$$

Entonces, $n(u_n+u_{n+1}-\frac{2}{n})=o(1)$, o aún $u_n+u_{n+1}=\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$, y finalmente, $u_n+u_{n+1}\sim\frac{2}{n}$. Por lo tanto, u_n es equivalente a $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ y nunca equivalente a $\frac{1}{n}$ ($|nu_n|=\frac{n}{\ln n}\to+\infty$).
Se supone ahora que $u_n+u_{2n}\sim\frac{3}{2n}$ y demostrar que $u_n\sim\frac{1}{n}$.
Se define $v_n=u_n-\frac{1}{n}$. Se trata ahora de demostrar que $v_n=o(\frac{1}{n})$ bajo la hipótesis $v_n+v_{2n}=o(\frac{1}{n})$.
Sea $\varepsilon>0$. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geqslant n_0$, $n|v_n+v_{2n}|<\frac{\varepsilon}{4}$.
Sean $n\geqslant n_0$ y $p\in\mathbb{N}$.

$$|v_n|=|v_n+v_{2n}-v_{2n}-v_{4n}+\cdots+(-1)^p(v_{2^pn}+v_{2^{p+1}n})+(-1)^{p+1}v_{2^{p+1}n}|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|v_{2^kn}+v_{2^{k+1}n}|+|v_{2^{p+1}n}|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{2^kn}+|v_{2^{p+1}n}|=\frac{\varepsilon}{4n}\frac{1-\frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}}+|v_{2^{p+1}n}|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n}+|v_{2^{p+1}n}|.$$

Ahora, la sucesión u tiende a 0, y es lo mismo con la sucesión v. Así, para cada $n\geqslant n_0$, es posible elegir p tal que $|v_{2^{p+1}n}|<\frac{\varepsilon}{2n}$.
En resumen, si n es un entero dado mayor o igual que n_0, $n|v_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}/\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geqslant n_0\Rightarrow|nv_n|<\varepsilon.$$

Así, $v_n=o(\frac{1}{n})$ y entonces $u_n=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$, o aún $u_n\sim\frac{1}{n}$.

Solución del ejercicio 1759 ▲005256

1. Es inmediato que la sucesión u es definida y con valores en $[-1,\frac{\pi}{2}]$. Más precisamente, $u_0\in]0,\frac{\pi}{2}]$, y si por $n\geqslant 0$, $u_n\in]0,\frac{\pi}{2}]$, entonces $u_{n+1}\in]0,1]\subset]0,\frac{\pi}{2}]$. Se ha demostrado por recurrencia que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0,\frac{\pi}{2}]$. Demostrar que para todo real $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, se tiene $\operatorname{sen}x>x$.
   Para $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, se escribe $f(x)=x-\operatorname{sen}x$. f es derivable en $[0,\frac{\pi}{2}]$ y para $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=1-\cos x$. Así, f' es estrictamente positiva en $]0,\frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto, estrictamente creciente en $[0,\frac{\pi}{2}]$. Pero entonces, para $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$, se tiene $f(x)>f(0)=0$. Sea $n\in\mathbb{N}$. Porque $u_n\in]0,\frac{\pi}{2}]$, se tiene $u_{n+1}=$

$\text{sen}(u_n) < u_n$. La sucesión u es estrictamente decreciente. Porque la sucesión u es por otro lado minorada por 0, la sucesión u converge a un real denotado ℓ. Porque para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, se tiene $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}$. Pero entonces, por continuidad de la función $x \mapsto \text{sen}\, x$ sobre $[0, \frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto, en ℓ, se tiene

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \text{sen}(u_n) = \text{sen}(\lim_{n\to+\infty} u_n) = \text{sen}(\ell).$$

Por tanto, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\text{sen}\, x < x$ y, en particular $\text{sen}\, x \neq x$. Entonces, $\ell = 0$. La sucesión u es estrictamente positiva, estrictamente decreciente, de límite nulo.

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Porque u_n tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$,

$$u_{n+1}^{\alpha} = (\text{sen}(u_n))^{\alpha} = (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^{\alpha} = u_n^{\alpha}(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{\alpha}$$
$$= u_n^{\alpha}(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)) = u_n^{\alpha} - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}),$$

y entonces, $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = -\frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$. Tomado $\alpha = -2$, se obtiene entonces

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

Según el lema de CÉSARO, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ también tiende a $\frac{1}{3}$. Pero,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}).$$

Así, $\frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}) = \frac{1}{3} + o(1)$ después, $\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{1}{u_0^2} + o(n) = \frac{n}{3} + o(n)$. Entonces, $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$, luego $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ y enfin, ya que la sucesión u es estrictamente positiva,

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Solución del ejercicio 1773 ▲001202

La ecuación característica es :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Entonces u_n es de la forma

$$u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

para α, β de reales que se calculan gracias a u_0 y u_1. En efecto, $u_0 = 1 = \alpha\lambda^0 + \beta\mu^0$, por lo tanto $\alpha + \beta = 1$. Y como $u_1 = 1 = \alpha\lambda^1 + \beta\mu^1$ se obtiene $\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$.

Resolviendo estas dos ecuaciones se tiene se obtiene $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda)$ y $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu)$.

Se escribe para terminar :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}).$$

Solución del ejercicio 1775 ▲001204

La ecuación característica es :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda = 2$ y $\mu = 1$. Entonces u_n es de la forma

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta.$$

Pero la sucesión $(2^n)_n$ tiende a $+\infty$. Entonces si $(u_n)_n$ es acotada, $\alpha = 0$. Así $(u_n)_n$ es la sucesión constante igual a β. Recíprocamente, toda sucesión constante que satisface $u_n = \beta$, para $n \in \mathbb{N}$ verifica la relación de recurrencia $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Entonces las sucesiones buscadas son las sucesiones constantes.

Solución del ejercicio 1779 ▲003068

1. $u_n = \frac{1}{3}((a+2b) + 2(a-b)(-\frac{1}{2})^n)$.
2.
3. $v_n = \lambda \times \mu^{(-\frac{1}{2})^n}$.
4.

Solución del ejercicio 1780 ▲003069

1. $u_n = \frac{n^2}{4} - n + \frac{3}{8}(1 - (-1)^n)$.
2. $u_n = \frac{n-1}{3} + aj^n + bj^{2n}$.

Solución del ejercicio 1781 ▲003070

$$2u_n = u_0 + v_0 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0), \quad 2v_n = u_0 + v_0 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n (u_0 - v_0).$$

Solución del ejercicio 1782 ▲003071

1. $u_n^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (-1)^{k-p} u_{n+p}$.
2.

Solución del ejercicio 1783 ▲003072

1.
2. $6T_n = \left(3+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n + \left(3-\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$.

Solución del ejercicio 1785 ▲005239

1. La ecuación característica es $4z^2-4z-3=0$. Sus soluciones son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$. Las sucesiones buscadas son las sucesiones de la forma $(u_n)=\left(\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$, donde λ y μ son dos reales (o dos complejos si buscamos todas las sucesiones complejas). Si u_0 y u_1 son los dos primeros términos de la sucesión u, λ y μ son las soluciones del sistema $\begin{cases}\lambda+\mu=u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=u_1\end{cases}$ y entonces $\lambda=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)$ y $\mu=\frac{1}{4}(u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

2. Claramente $u_{2n}=\frac{1}{4^n}u_0$ y $u_{2n+1}=\frac{1}{4^n}u_1$ y entonces $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}(1+(-1)^n)u_0+2\times\frac{1}{2^n}(1-(-1)^n)u_1\right)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left((1+(-1)^n)u_0+2(1-(-1)^n)u_1\right).}$$

3. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son sucesiones de la forma $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Una solución particular de la ecuación propuesta es una constante a tal que $4a=4a+3a+12$ y entonces $a=-4$. Las soluciones de la ecuación propuesta son entonces las consecuencias de la forma $\left(-4+\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$, donde λ y μ son las soluciones del sistema $\begin{cases}\lambda+\mu=4+u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=4+u_1\end{cases}$ y entonces $\lambda=\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)$ y $\mu=\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-4+\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

4. La sucesión $v=\frac{1}{u}$ es solución de la recurrencia $2v_{n+2}=v_{n+1}-v_n$ y entonces, (v_n) es de la forma $\left(\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ y entonces $u_n=\dfrac{1}{\lambda\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son sucesiones de la forma $(\lambda+\mu 2^n)$. 1 es raíz simple de la ecuación característica y por lo tanto, existe una solución particular de la ecuación propuesta de la forma $u_n=an^4+bn^3+cn^2+dn$. Para $n\geqslant 2$, se tiene

$$\begin{aligned}u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2}=&(an^4+bn^3+cn^2+dn)-3(a(n-1)^4+b(n-1)^3+c(n-1)^2+d(n-1))\\&+2(a(n-2)^4+b(n-2)^3+c(n-2)^2+d(n-2))\\=&a(n^4-3(n-1)^4+2(n-2)^4)+b(n^3-3(n-1)^3+2(n-2)^3)\\&+c(n^2-3(n-1)^2+2(n-2)^2)+d(n-3(n-1)+2(n-2))\\=&a(-4n^3+30n^2-52n+29)+b(-3n^2+15n-13)+c(-2n+5)+d(-1)\\=&n^3(-4a)+n^2(30a-3b)+n(-52a+15b-2c)+29a-13b+5c-d.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u\text{ es solución}&\Leftrightarrow -4a=1\ \text{ y }\ 30a-3b=0\ \text{ y }\ -52a+15b-2c=0\ \text{ y }\ 29a-13b+5c-d=0\\&\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4},\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{49}{4},\ d=-36.\end{aligned}$$

Las sucesiones buscadas son las sucesiones de la forma $\left(-\frac{1}{4}(n^3+10n^2+49n+144)+\lambda+\mu 2^n\right)$.

6. Para todo complejo z, $z^3-6z^2+11z-6=(z-1)(z-2)(z-3)$ y las sucesiones solución son las sucesiones de la forma $(\alpha+\beta 2^n+\gamma 3^n)$.
7. Para todo complejo z, $z^4-2z^3+2z^2-2z+1=(z^2+1)^2-2z(z^2+1)=(z-1)^2(z^2+1)$. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son sucesiones de la forma $\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n$. 1 es raíz doble de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación propuesta admite una solución particular de la forma $u_n=an^7+bn^6+cn^5+dn^4+en^3+fn^2$. Para todo natural n, se tiene

$$\begin{aligned}u_{n+4}-2u_{n+3}+2u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n &= a((n+4)^7-2(n+3)^7+2(n+2)^7-2(n+1)^7+n^7)\\ &\quad +b((n+4)^6-2(n+3)^6+2(n+2)^6-2(n+1)^6+n^6)\\ &\quad +c((n+4)^5-2(n+3)^5+2(n+2)^5-2(n+1)^5+n^5)\\ &\quad +d((n+4)^4-2(n+3)^4+2(n+2)^4-2(n+1)^4+n^4)\\ &\quad +e((n+4)^3-2(n+3)^3+2(n+2)^3-2(n+1)^3+n^3)\\ &\quad +f((n+4)^2-2(n+3)^2+2(n+2)^2-2(n+1)^2+n^2)\\ &= a(84n^5+840n^4+4340n^3+12600n^2+19348n+12264)\\ &\quad +b(60n^4+480n^3+1860n^2+3600n+2764)\\ &\quad +c(40n^3+240n^2+620n+600)+d(24n^2+96n+124)+e(12n+24)+4f\\ &= n^5(84a)+n^4(840a+60b)+n^3(4340a+480b+40c)+n^2(12600a+1860b+240c+24d)\\ &\quad +n(19348a+3600b+620c+96d+12e)+(12264a+2764b+600c+124d+24e+4f)\end{aligned}$$

u es solución si y solo si $84a=1$ y $a=\frac{1}{84}$, luego $840a+60b=0$ y $b=-\frac{1}{6}$, así $4340a+480b+40c=0$ y entonces $c=\frac{17}{24}$, $12600a+1860b+240c+24d=0$ y $d=-\frac{5}{12}$, luego $19348a+3600b+620c+96d+12e=0$ y $e=-\frac{59}{24}$, luego $12264a+2764b+600c+124d+24e+4f=0$ y entonces $f=\frac{1}{12}$. La solución general de la ecuación con segundo miembro es, por lo tanto :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{168}(2n^7-28n^6+119n^5-70n^4-413n^3+14n^2)+\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4.$$

Solución del ejercicio 1796 ▲005145

1. Sea $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1.$$

2. Sea $a\in]0,\pi[$ y $n\in\mathbb{N}^*$. Entonces, para todo natural no nulo k, se tiene $0<\frac{a}{2^k}\leqslant\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{a}{2^k}\neq 0$. Se sabe que para todo real x, $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$. Así, para todo natural k,

$$\operatorname{sen}(2.\frac{a}{2^k})=2\operatorname{sen}\frac{2^k}{\cos 2^k}\frac{a}{2^k}\quad\text{y entonces}\quad\cos\frac{a}{2^k}=\frac{\operatorname{sen}(a/2^{k-1})}{2\operatorname{sen}(a/2^k)}.$$

Pero,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sen}(a/2^{k-1})}{2\operatorname{sen}(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}(a/2^k)}{\prod_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(a/2^k)}=\frac{\operatorname{sen}a}{2^n\operatorname{sen}(a/2^n)}.$$

Solución del ejercicio 1797 ▲005148

Para $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}$. Para $k \in \{0,\dots,n\}$, se escribe $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$, luego $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Para $k \in \{1,\dots,n-1\}$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{C_n^{k+1}.n^k}{C_n^k.n^{k+1}} = \frac{1}{n}.\frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(k+1)} \\ &\leqslant -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \text{ (pues } k \geqslant 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, para $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}u_k$ y entonces, inmediatamente, por recurrencia,

$$u_k \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}u_1 = \frac{1}{2^{k-1}}\frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Teniendo en cuenta que $u_0 = 1$, se tiene para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2(1-\frac{1}{2^n}) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Solución del ejercicio 1798 ▲005154

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Para $1 \leqslant k \leqslant n$, se tiene

$$kx - 1 < E(kx) \leqslant kx.$$

sumando estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{E(x)+E(2x)+\dots+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{x+2x+\dots+nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

y también,

$$\frac{E(x)+E(2x)+\dots+E(nx)}{n^2} > \frac{(x-1)+(2x-1)+\dots+(nx-1)}{n^2} = \frac{n(n+1)x/2-n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalmente, para todo natural no nulo,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(x)+E(2x)+\dots+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Los dos miembros extremos de este encuadramiento tienden a $\frac{x}{2}$, cuando n tiende a $+\infty$. Por el teorema de los gendarmes, se puede decir que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{E(x)+E(2x)+\dots+E(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}.}$$

Solución del ejercicio 1799 ▲005220

1. Sea $\varepsilon > 0$. existe un rango n_0 tal que, si $n \geqslant n_0$, entonces $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea n un entero natural estrictamente superior a n_0.

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ahora, $\sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$ es una expresión constante cuando n varía y por lo tanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| = 0$. Así, existe un entero $n_1 \geqslant n_0$ tal que para $n \geqslant n_1$, $\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Para $n \geqslant n_1$, se tiene entonces $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \ (\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$. La sucesión (v_n) es, por lo tanto convergente y $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Si la sucesión u converge a ℓ, entonces la sucesión v converge a ℓ.

El recíproco es falso. Para n en $\mathbb{N}$, se escribe $u_n = (-1)^n$. La sucesión (u_n) es divergente. Por otra parte, para n en $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$ vale 0 o 1 según la paridad de n y entonces, en todos los casos, $|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Así, la sucesión (v_n) converge y $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2. Si u es acotada, existe un real M tal que, para todo natural n, $|u_n| \leqslant M$. Para n entero natural dado, se tiene entonces

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} M = \frac{1}{n+1} (n+1) M = M.$$

La sucesión v por lo tanto es acotada.

Si la sucesión u es acotada, entonces la sucesión v es acotada.

El recíproco es falso.

Sea u la sucesión definida por : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p \text{ si } n = 2p, \ p \in \mathbb{N} \\ -p \text{ si } n = 2p+1, \ p \in \mathbb{N}. \end{cases}$

u no es acotada porque la sucesión extraída (u_{2p}) tiende a $+\infty$, cuando p tiende a $+\infty$. Pero, si n es impar, $v_n = 0$, y si n es par, $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$, y en todos los casos $|v_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ y la sucesión v es acotada.

3. Si u es creciente, para n entero natural dado se tiene :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2) \sum_{k=0}^{n} u_k \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (u_{n+1} - u_k) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La sucesión v por lo tanto, es creciente.

$$\boxed{\text{Si la sucesión } u \text{ es creciente, entonces la sucesión } v \text{ es creciente.}}$$

Solución del ejercicio 1800 ▲005246

Para n no nulo natural y x real positivo, se escribe $f_n(x) = x^n + x - 1$.
Para $x \geqslant 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ y entonces $u_1 = \frac{1}{2}$.
Para $n \geqslant 2$, f_n es derivable en $\mathbb{R}^+$ y para $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$. f_n es así continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y por lo tanto, biyectiva de $\mathbb{R}^+$ sobre $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$, y, en particular,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/ \ f_n(x) = 0.$$

Sea u_n este número. Porque $f_n(0) = -1 < 0$ y que $f_n(1) = 1 > 0$, por estricto crecimiento de f_n sobre $[0, +\infty[$, se tiene :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < u_n < 1.$$

La sucesión u por lo tanto es acotada. Luego, para n entero natural dado y porque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

y entonces $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ después, por estricto crecimiento de f_{n+1} sobre $\mathbb{R}^+$, se obtiene :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < u_{n+1}.$$

La sucesión u es acotada y estrictamente creciente. Entonces, la sucesión u converge a un real ℓ, elemento de $[0,1]$. Si $0 \leqslant \ell < 1$, existe un rango n_0 tal que para $n \geqslant n_0$, se tiene : $u_n \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Pero entonces, para $n \geqslant n_0$, se tiene $1 - u_n = u_n^n \leqslant (\frac{1+\ell}{2})^n$ y cuando n tiende a $+\infty$, se obtiene $1 - \ell \leqslant 0$ que está en contradicción con $0 \leqslant \ell < 1$. Entonces, $\ell = 1$.

Solución del ejercicio 1801 ▲005248

Sea x en $[-1,1]$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\theta = \operatorname{arcsen} x$ (por lo tanto θ es elemento de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $x = \operatorname{sen}\theta$). Para k entero natural no nulo dado, existe un entero n_k tal que $\ln(n_k) \leqslant \theta + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$, a saber $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$. Pero,

$$0 < \ln(n_k+1) - \ln(n_k) = \ln(1 + \frac{1}{n_k}) < \frac{1}{n_k}$$

(según la desigualdad clásica $\ln(1+x) < x$, para $x > 0$, obtenido por ejemplo estudiando la función $f: x \mapsto \ln(1+x) - x$). Así,

$$0 \leqslant \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k+1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

luego

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\ln(n_k))| &= 2|\operatorname{sen}(\frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2})\cos(\frac{\theta + 2k\pi + \ln(n_k)}{2})| \\ &\leqslant 2\left|\frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2}\right| = |\theta + 2k\pi - \ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}.\end{aligned}$$

Sea entonces ε un real estrictamente positivo. Porque $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$ tiende a $+\infty$, cuando k tiende a $+\infty$, se puede encontrar un entero k tal que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ y para este entero k, se tiene $|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(\ln(n_k))| < \varepsilon$. Se ha demostrado que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / |x - \text{sen}(\ln n)| < \varepsilon$, y entonces $\{\text{sen}(\ln n),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ es denso en $[-1,1]$.

Solución del ejercicio 1802 ▲005249

Para $\alpha \in]0,\pi[$, se escribe $f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|)$. $\{(\text{sen}(n\alpha),\ n \in \mathbb{N}\}$ es una parte no vacía y mayorada (por 1) de $\mathbb{R}$. Entonces, para todo real α de $]0,\pi[$, $f(\alpha)$ existe en $\mathbb{R}$. Si α está en $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|) \geqslant \text{sen}\,\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α está en $]0, \frac{\pi}{3}]$. Sea n_0 el entero natural tal que $(n_0-1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha$ (n_0 existe porque la sucesión $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente). Entonces,

$$\frac{\pi}{3} \leqslant n_0\alpha = (n_0-1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Pero,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|) \geqslant |\text{sen}(n_0\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α está en $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$, se observa que

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n(\pi-\alpha)|) = f(\pi-\alpha) \geqslant f(\frac{\pi}{3}),$$

pues $\pi - \alpha$ está en $]0, \frac{\pi}{3}]$. Se ha probado que $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces, $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|))$ existe en $\mathbb{R}$ y

$$\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|)) = \min_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\text{sen}(n\alpha)|)) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solución del ejercicio 1807 ▲001936

1. Para $n \geqslant 4$
$$\frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \underbrace{\frac{4}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{6}{n^2}.$$
Como $\sum \frac{6}{n^2}$ es convergente, entonces $\sum \frac{n!}{n^n}$ es también convergente por comparación.

2. Demostrar que $(\text{ch}\sqrt{\ln n})^{-2} \geqslant \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2}$, para n bastante grande. Se tiene :
$$\begin{array}{rcll} 4\ln n & \leqslant & \ln^2 n & \text{para } n \text{ bastante grande} \\ \ln n & \leqslant & \left(\frac{1}{2}\ln n\right)^2 & \\ \sqrt{\ln n} & \leqslant & \frac{1}{2}\ln n = \ln\sqrt{n} & \\ \text{ch}(\sqrt{\ln n}) & \leqslant & \text{ch}(\ln\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{pues } x \mapsto \text{ch} x \text{ es creciente} \\ \text{ch}(\sqrt{\ln n})^{-2} & \geqslant & 4\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} & \end{array}$$

Por lo tanto $\sqrt{n} \sim \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$, y $\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-2} \sim \frac{1}{n}$, por lo que $\sum\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2}$ es divergente. Por comparación, la serie de término general $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^2$ es divergente.

3. Demostrar que $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim n^{-1}$. Se tiene : $\frac{n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}}$. Así $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, de donde $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$. Por equivalencia, la serie de término general $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es divergente porque la serie armónica es divergente.
4. Demostrar que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$. Utilizando el desarrollo limitado de $\ln(1+x)$ en 0, se tiene : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. De ahí se tiene que $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$. Por equivalencia, la serie de término general $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es, por lo tanto divergente.
5. Se sabe que : $\ln(\mathrm{e}^n - 1) \leqslant \ln \mathrm{e}^n = n$. Además, $\ln n \geqslant 1$, para n bastante grande, en consecuencia $\frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n-1)} \geqslant \frac{1}{n}$. Se concluye comparando que la serie $\sum \frac{\ln n}{\ln(\mathrm{e}^n-1)}$ es divergente.
6. Demostrar que $n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant n^{-2}$. Se denota que $n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{(\ln n)^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$. Pero para u bastante grande $4u^2+4u \leqslant \mathrm{e}^u$, sea $4u^2 - \mathrm{e}^u \leqslant -4u$. Usando$u = \ln\sqrt{n} = \frac{1}{2}\ln n$, se tiene $\ln^2 n - \sqrt{n} \leqslant -2\ln n$. De donde
$$\underbrace{\mathrm{e}^{\ln^2 n-\sqrt{n}}}_{n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}} \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{-2\ln n}}_{\frac{1}{n^2}}$$
Por comparación, la serie de término general $n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ es convergente porque la serie de término general $\frac{1}{n^2}$ es convergente.

(*Solución de Lévi Operman*)

Solución del ejercicio 1808 ▲001937

— Para $p=0$:
$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1 + \frac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{n!} > 1$$
u_n no tiende a 0, por lo tanto, $\sum u_n$ diverge groseramente para $p=0$.

— Para $p=1$:
$$u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{2!}{(n+1)!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+1)!}$$
$$u_n \geqslant \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$
Por lo tanto $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, por lo tanto $\sum u_n$ diverge para $p=1$.

— Para $p=2$:
$$u_n = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{2!}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!}$$
Se está tentado a decir que se tiene una suma de series convergentes, por lo tanto $\sum u_n$ converge. Sin embargo, el número de términos aumenta según n, (se tiene una infinidad) y no se puede concluir nada.
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+2)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{n(n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$u_n \leqslant 2\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n^2}$$

Por lo tanto $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, por lo tanto $\sum u_n$ converge para $p = 2$.

— Para $p \geqslant 3$:

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{nn!}{(n+p)!} = \frac{nn!}{n!(n+1)\cdots(n+p)}$$

simplificando por $n!$ y poniendo $u_n \leqslant \frac{n}{(n+1)\cdots(n+p)}$

$$\frac{n}{(n+1)\cdots(n+p)} \sim \frac{n}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}, \text{ con } p \geqslant 3.$$

Por lo tanto $\sum \frac{1}{n^{p-1}}$ es una serie de Riemann convergente porque $p-1 \geqslant 2$, por lo tanto $\sum u_n$ converge para $p \geqslant 3$. Nota : también se puede observar que u_n (cuando $p \geqslant 3$) es mayorada por u_n (cuando $p = 2$), y este último es convergente.

(*Solución de Eugène Ndiaye*)

Solución del ejercicio 1809 ▲001938

---

1. Se define $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k}$. La idea es de calcular la suma de $(1-3^{-1})S_n$. Se tiene así :

$$\begin{aligned}(1-3^{-1})S_n &= (1-3^{-1})\sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-k} - \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}k3^{-k} + \sum_{k=0}^{n}3^{-k} - \sum_{k=0}^{n}(k+1)3^{-(k+1)},\end{aligned}$$

reindexando las sumas, se obtiene :

$$\begin{aligned}(1-3^{-1})S_n &= \sum_{k=1}^{n}k3^{-k} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=1}^{n}k3^{-k} - (n+1)3^{-(n+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k} - \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} - \underbrace{\frac{n+1}{3^{n+1}}}_{\to 0}\end{aligned}$$

suma de términos de una sucesión geométrica de razón $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Y por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)S_n = \frac{3}{2}$$

de donde

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)3^{-k} = \frac{9}{4}\cdot$$

Observación : Se reconoce la serie geométrica derivada primera con razón $\frac{1}{3}$.

2. Se define $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$ y se trata de descomponerlo en elementos simples.

$$\begin{aligned} n^4+n^2+1 &= (n^4+2n^2+1)-n^2 = (n^2+1)^2-n^2 \\ &= (n^2+n+1)(n^2-n+1), \end{aligned}$$

de donde $u_n = \dfrac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}$. Encontrar ahora A y $B \in \mathbb{R}$ tales que $u_n = \dfrac{A}{n^2+n+1} + \dfrac{B}{n^2-n+1}$, sea tal que $A(n^2-n+1)+B(n^2+n+1) = n$, lo que equivale a $(A+B)n^2+(B-A)n+(A+B) = n$. Por identificación, se tiene :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

De donde :

$$u_n = \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2-n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Por lo tanto $n^2+n+1 = (n+1)^2-(n+1)+1$. Reindexando la segunda suma :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2-n+1} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2-n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(N+1)^2-(N+1)+1}\right) \quad \text{telescópica.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es convergente y la suma es

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Descomponer $v_n = \dfrac{2n-1}{n^3-4n}$ en elementos simples. Como

$$n^3-4n = n(n^2-4) = n(n-2)(n+2),$$

buscar α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que :

$$v_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2} + \frac{\gamma}{n-2}.$$

Sea

$$\begin{aligned} 2n-1 &= \alpha(n-2)(n+2) + \beta n(n-2) + \gamma n(n+2) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)n^2 + (2\gamma-2\beta)n - 4\alpha \end{aligned}$$

Por identificación :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2(\gamma-\beta)=2 \\ -4\alpha=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\frac{1}{4} \\ \gamma=1+\beta \\ \alpha+2\beta+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\frac{1}{4} \\ \beta=-\frac{5}{8} \\ \gamma=\frac{3}{8}. \end{cases}$$

De donde
$$\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{1}{4n}-\frac{5}{8(n+2)}+\frac{3}{8(n-2)}$$
y
$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{N} v_n &= \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{4n}-\frac{5}{8(n+2)}+\frac{3}{8(n-2)}\right)\\ &= \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{4n}-\sum_{n=3}^{N}\frac{5}{8(n+2)}+\sum_{n=3}^{N}\frac{3}{8(n-2)}\,.\end{aligned}$$
Rindexando las dos últimas sumas :
$$\sum_{n=3}^{N} v_n=\frac{1}{8}\left[2\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}-5\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}+3\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n}\right]$$
Luego, por ser telescópica,
$$\sum_{n=3}^{N} v_n=\frac{1}{8}\left(\frac{89}{12}-\frac{3}{N-1}-\frac{3}{N}-\frac{5}{N+1}-\frac{5}{N+2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{89}{12}.$$
Entonces, la serie converge y $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^3-4n}=\frac{89}{96}$.

(*Solución de Antoine Poulain*)

Solución del ejercicio 1815 ▲001949

Convergencia de $W_n=\ln(u_n n^{b-a})$.
Se observa que W_n es la suma parcial de la sucesión del término general
$$\begin{aligned} w_n=W_{n+1}-W_n &= \ln\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\right]\\ &=\ln\left[\frac{n+a}{n+b}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{b-a}\right]=\ln\left[\frac{n(1+\frac{a}{n})}{n(1+\frac{b}{n})}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b-a}\right]\\ &=(b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{n}\right).\end{aligned}$$
Es suficiente demostrar que esta serie converge, para demostrar que (W_n) converge. Se utiliza el desarrollo limitado de $\ln(1+x)$ en 0, lo que da
$$w_n=(b-a)\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Así $\sum_{n\to\infty} w_n$ es una serie convergente y (W_n) converge. Sea ℓ su límite.
Condiciones sobre a,b, para que $\sum_{n\to\infty} u_n$ sea convergente.
Se sabe que $\lim_{n\to\infty}\ln u_n n^{b-a}=\ell$; por composición de los límites, $\lim_{n\to\infty} u_n n^{b-a}=e^{\ell}$, por lo tanto $u_n\sim\frac{e^{\ell}}{n^{b-a}}$. Así $\sum_{n\to\infty}\frac{1}{n^{b-a}}$ es una serie de Riemann, que converge si y solo si $b-a>1$. Entonces, por equivalencia, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si y solo si $b-a>1$.

Cálculo de la suma parcial de s_n.
Por hipótesis $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$, de donde $[u_{n+1}(n+b)]=[u_n(n+a)]$ y

$$\sum_{j=0}^{n}[u_{j+1}((j+1)+(b-1))]=\sum_{j=0}^{n}[u_j(j+a)].$$

Efectuando un cambio de índice se tiene :

$$\sum_{j=1}^{n+1}[u_j(j+b-1)]=\sum_{j=0}^{n}[u_j(j+a)]$$

$$\sum_{j=1}^{n}[u_j(j+b-1)]+u_{n+1}(n+b)=\sum_{j=1}^{n}[u_j(j+a)]+au_0$$

$$u_{n+1}(n+b)-au_0=\sum_{j=1}^{n}[u_j(a-b+1)].$$

Si $b-a\neq 1$, se obtiene que $s_n=\frac{u_{n+1}(n+b)-a}{a-b+1}$.
Valor de la suma.
Se considera el caso donde la serie converge, i.e. $b-a>1$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}(n+b)=0$. Se sabe que $u_n\sim\frac{e^{\ell}}{n^{b-a}}$, además, $n+b\sim n$. Entonces $u_{n+1}(n+b)\sim e^{l}n^{1+a-b}$. Dado que $1+a-b<0$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ell}n^{1+a-b}=0$. Finalmente,

$$s_n=\frac{u_{n+1}(n+b)-a}{a-b+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{-a}{a-b+1}$$

y se concluye que $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_n=\frac{a}{b-a-1}$.

(*Solución de Lévi Operman*)

Solución del ejercicio 1820 ▲002722

Sea $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $I_{(\alpha,\beta)}=\displaystyle\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt$. Una integración por partes nos da

$$I_{(\alpha,\beta)}=\underbrace{\left[(\alpha t+\beta t^2)\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\alpha+2\beta t)\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

y haciendo una integración por parte sobre la segunda integral, se tiene :

$$\begin{aligned}I_{(\alpha,\beta)}&=\left[\frac{\alpha+2\beta t}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{2\beta\cos(nt)}{n^2}\,dt\\&=\left(\frac{\alpha+2\beta\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{\alpha}{n^2}\right)+\underbrace{\frac{2\beta}{n^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}.\end{aligned}$$

Se obtiene $I_{(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha+2\beta\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{\alpha}{n^2}$.

$$\begin{aligned}I_{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{n^2}&\iff(\alpha+2\beta\pi)\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}-\alpha=1\\&\iff(\alpha+2\beta\pi)(-1)^n-(1+\alpha)=0\end{aligned}$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (\alpha+2\beta\pi)(-1)^n = 0 \\ (1+\alpha) = 0. \end{cases}$$

Así tomando $\alpha = -1$ y $\beta = \frac{1}{2\pi}$, se obtiene :

$$I_{(-1,\frac{1}{2\pi})} = \int_0^\pi \left(-t + \frac{1}{2\pi}t^2\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2},$$

de donde,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \left(-t + \frac{1}{2\pi}t^2\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,dt. \tag{1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^n \mathrm{e}^{ikt}\right) - 1 = \frac{\mathrm{sen}(\frac{n+1}{2}t)}{\mathrm{sen}(\frac{t}{2})}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\frac{nt}{2}}) - 1 \\ &= \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \times \frac{\mathrm{sen}(\frac{n}{2}t)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{n}{2}t)\,\mathrm{sen}(\frac{t}{2})}{\mathrm{sen}(\frac{t}{2})} - 1 \\ &= \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\cot\left(\frac{t}{2}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{nt}{2}\right) - 1}_{=-\,\mathrm{sen}^2(\frac{nt}{2})}\end{aligned}$$

Entonces $\sum\limits_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(nt)\cot\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)$. Aplicando este resultado a (1) se obtiene :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{sen}(nt)\cot\left(\frac{t}{2}\right)\,dt - \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)\,dt$$

poniendo $\phi(t) = (-t + \frac{1}{2\pi}t^2)\cot(\frac{t}{2})$, se tiene :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \phi(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt - \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \left(-t + \frac{1}{2\pi}t^2\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)\,dt$$

Como

$$(-t + \frac{1}{2\pi}t^2)\cot\frac{t}{2} = (-t + \frac{1}{2\pi}t^2)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}} \sim_{t\to0} -t\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = -2\cos\frac{t}{2} \sim -2.$$

La aplicación ϕ se extiende por continuidad en 0. Se utiliza el resultado clásico siguiente : si h es una función continua en $[0,\pi]$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi h(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi h(t)\cos(nt)\,dt = 0.$$

aplicada a ϕ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \phi(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0$. Además,

$$\int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)\,dt = \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\left(\frac{1-\cos(nt)}{2}\right)\,dt.$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)\,dt = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\,dt.$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(-t+\frac{t^2}{2\pi}\right) dt = -\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(*Solución de Eugène Ndiaye*)

Solución del ejercicio 1823 ▲005108

Demostrar por inducción que $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

• Para $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)(1+2)}$ y la fórmula propuesta es cierta para $n = 1$.

• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ y se debe demostrar $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (por hipótesis de recurrencia)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Demostración directa. Para $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 1824 ▲005109

---

1. Demostrar por inducción que : $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Para $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$.

   Sea $n \geqslant 1$. Se supone que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y demostrar que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (por hipótesis de recurrencia)}\\ = (n+1)(\frac{n}{2}+1) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

   Se ha demostrado por recurrencia que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

   Se puede dar varias demostraciones directas.

   1ª demostración. Para $k \geqslant 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ y entonces $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2-k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ que se escribe $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ o aún $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2+n$ o finalmente $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   2ª demostración. se escribe

$$\begin{array}{ccccccccc} 1+ & 2 & + & 3 & +\cdots+ & (n-1) & +n & = & S\\ n+ & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 2 & +1 & = & S \end{array}$$

   y agregando (verticalmente), se obtiene $2S = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) = n(n+1)$ de ahí el resultado. La misma demostración se escribe con el símbolo sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

   3ª demostración. Se cuenta el número de puntos de un rectángulo teniendo n puntos ancho y $n+1$ puntos de largo. Hay $n(n+1)$. Este rectángulo está dividido en dos triángulos isósceles, cada uno conteniendo $1+2+\cdots+n$ puntos. De donde el resultado.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \cdots & & & \cdots & *\\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots\\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots\\ & & & & & & * & * & *\\ \vdots & & & & & \ddots & & * & *\\ * & \cdots & & & \cdots & * & * & & * \end{array}$$

   4ª demostración. En el triángulo de PASCAL, se sabe que para n y p enteros naturales dados, $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

   Entonces, para $n \geqslant 2$ (el resultado es claro para $n = 1$),

$$1+2+\cdots+n = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_k^1 = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(C_{k+1}^2 - C_k^2\right) = 1 + (C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Para $k \geqslant 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Entonces, para $n \geqslant 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

De donde,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n),$$

y entonces

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Para $k \geqslant 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Entonces, para $n \geqslant 1$, se tiene

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

De donde :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1) + 2n+1)$$

$$= \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

Para $k \geqslant 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$. Entonces, para $n \geqslant 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

De donde :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n)\\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1))\\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Sea p un entero natural. Para $k \geqslant 1$,

$$(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^{j}.$$

Entonces, para $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^{j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{p+1}-k^{p+1}\right)=(n+1)^{p+1}-1.$$

Por lo tanto, la fórmula de recurrencia :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^{*},\ \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} S_{j}=(n+1)^{p+1}-1.}$$

Solución del ejercicio 1825 ▲005143

1. Para todo entero natural no nulo k, se tiene $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Para todo natural no nulo k, se tiene $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$, y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}^{*}$.
- Cálculo de $\mathbf{S_1}$. Se define $P_1=aX^2+bX+c$. Se tiene

$$P_1(X+1)-P_1(X)=a((X+1)^2-X^2)+b((X+1)-X)=2aX+(a+b).$$

Por consiguiente,

$$P_1(X+1)-P_1(X)=X \Leftrightarrow 2a=1 \text{ y } a+b=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \text{ y } b=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftarrow P_1=\frac{X^2}{2}-\frac{X}{2}=\frac{X(X-1)}{2}.$$

Pero entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n}\left(P_1(k+1)-P_1(k)\right)=P_1(n+1)-P_1(1)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- Cálculo de $\mathbf{S_2}$. Se define $P_2=aX^3+bX^2+cX+d$. Se tiene

$$\begin{aligned}P_2(X+1)-P_2(X)&=a((X+1)^3-X^3)+b((X+1)^2-X^2)+c((X+1)-X)\\&=3aX^2+(3a+2b)X+a+b+c.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$P_2(X+1)-P_2(X)=X^2 \Leftrightarrow 3a=1 \text{ y } 3a+2b=0 \text{ y } a+b+c=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3} \text{ y } b=-\frac{1}{2} \text{ y } c=\frac{1}{6}$$
$$\Leftarrow P_2=\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}+\frac{X}{6}=\frac{X(X-1)(2X-1)}{6}.$$

Pero entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n}(P_2(k+1)-P_2(k))=P_2(n+1)-P_2(1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Cálculo de $\mathbf{S_3}$. Se define $P_3=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$. Se tiene

$$\begin{aligned}P_3(X+1)-P_3(X)&=a((X+1)^4-X^4)+b((X+1)^3-X^3)+c((X+1)^2-X^2)+d((X+1)-X)\\&=4aX^3+(6a+3b)X^2+(4a+3b+2c)X+a+b+c+d.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}P_3(X+1)-P_3(X)=X^3&\Leftrightarrow 4a=1,\ 6a+3b=0,\ 4a+3b+2c=0 \text{ y } a+b+c+d=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4} \text{ y } d=0\\&\Leftarrow P_3=\frac{X^4}{4}-\frac{X^3}{2}+\frac{X^2}{4}=\frac{X^2(X-1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Pero entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\sum_{k=1}^{n}(P_3(k+1)-P_3(k))=P_3(n+1)-P_3(1)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Cálculo de $\mathbf{S_4}$. Se define $P_4=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$. Se tiene

$$\begin{aligned}P_4(X+1)-P_4(X)&=a((X+1)^5-X^5)+b((X+1)^4-X^4)+c((X+1)^3-X^3)\\&\quad+d((X+1)^2-X^2)+e((X+1)-X)\\&=5aX^4+(10a+4b)X^3+(10a+6b+3c)X^2+(5a+4b+3c+2d)X\\&\quad+a+b+c+d+e.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}P_4(X+1)-P_4(X)=X^4&\Leftrightarrow 5a=1,\ 10a+4b=0,\ 10a+6b+3c=0,\ 5a+4b+3c+2d=0\\&\quad \text{ y } a+b+c+d+e=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{3},\ d=0 \text{ y } e=-\frac{1}{30}\\&\Leftarrow P_4=\frac{X^5}{5}-\frac{X^4}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X}{30}=\frac{X(X-1)(6X^3-9X^2+X+1)}{30}.\end{aligned}$$

Pero entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\sum_{k=1}^{n}(P_4(k+1)-P_4(k))=P_4(n+1)-P_4(1)=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N}^*,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \text{y } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se recuerda que

$$\boxed{\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}.}$$

Sea entonces k un entero natural no nulo. Se tiene

$$\arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \arctan \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan k.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Para k entero natural no nulo dado, se tiene

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \arctan(k-1)\\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0\\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 1826 ▲005144

1. Sea n un entero superior o igual que 2. Entre los n^2 pares (i,j) tales que $1 \leqslant i,j \leqslant n$, hay n tales que $i = j$ y entonces $n^2 - n = n(n-1)$ tales que $1 \leqslant i,j \leqslant n$ y $i \neq j$. Como hay tantas pares (i,j) tales que $i > j$ que de pares (i,j) tales que $i < j$, hay $\frac{n(n-1)}{2}$ pares (i,j) tales que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Finalmente,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} j\right) = \sum_{j=1}^{n} nj = n\sum_{j=1}^{n} j = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Sea n un entero superior o igual a 2.

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j$$
$$= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{n(n+1)^2}{6}.$$

3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} h^2k^2 = \sum_{h=1}^{n}\left(h^2\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{h=1}^{n} h^2\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$

Como, por otra parte, $\sum_{h=1}^{n} h^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, se tiene

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} h^4 = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h^4\right) = \sum_{h=1}^{n} nh^4 = n\sum_{h=1}^{n} h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

y claramente $\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Así,

$$u_n = \frac{1}{n^5}\left(2.5\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right)$$
$$= \frac{1}{n^5}\left(2n^6 - 2n^6 + n^5\left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) + \text{términos de grado a lo sumo 4}\right)$$
$$= -1 + \text{términos tendiendo a } 0$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$$

Solución del ejercicio 1827 ▲005149

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n reales estrictamente positivos.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right).$$

Para $x > 0$, se escribe entonces $f(x) = x + \frac{1}{x}$. f es derivable en $]0,+\infty[$ y para $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f es, por lo tanto estrictamente decreciente en $]0,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. f admite así un mínimo en 1. Por lo tanto,

$$\forall x > 0,\ f(x) \geqslant f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

(**Observación.** La desigualdad entre media geométrica y aritmética también permite obtener el resultado :

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqslant \sqrt{x.\frac{1}{x}} = 1.)$$

Entonces se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geqslant n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2 = n+2\frac{n^2-n}{2} = n^2.$$

Solución del ejercicio 1828 ▲005223

Sea r la razón de la sucesión u. Para todo natural k, se tiene

$$\frac{r}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

Sumando estas igualdades, se obtiene :

$$r\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}.$$

Si $r \neq 0$, se obtiene $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, y si $r=0$ (y $u_0 \neq 0$), u es constante y el resultado es inmediato.

Solución del ejercicio 1829 ▲005224

Sea k un entero natural no nulo. Se sabe que $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Determinar entonces tres números reales a, b y c tales que, para todo entero natural no nulo k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1}. \quad (*)$$

Para k entero natural no nulo dado,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1)+bk(2k+1)+ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2+(3a+b+c)k+a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Por consiguiente,

$$(*) \Leftarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24, \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).$$

Entonces, de acuerdo al ejercicio 1655, cuando n tiende a $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, luego

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = H_{n+1}-1 = -1+\ln(n+1)+\gamma+o(1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma-1+o(1) = \ln n+\gamma-1+o(1).$$

En fin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}&=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=-1+H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n\\&=\ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+o(1)=\ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\\&=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)\end{aligned}$$

Finalmente, cuando n tiende a $+\infty$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}=6\left(\ln n+\gamma+\ln n+\gamma-1-4\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)\right)=6(3-4\ln 2)+o(1).$$

Así,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}=6(3-4\ln 2).}$$

Solución del ejercicio 1830 ▲005697

Para $n\in\mathbb{N}^*$, se tiene $\left(\sqrt{u_n}-\frac{1}{n}\right)^2$ y entonces $0\leqslant\frac{\sqrt{u_n}}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$. Como la serie de término general $\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{n^2}\right)$ converge, la serie de término general $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Solución del ejercicio 1831 ▲005698

Para $n\geqslant 2$, $v_n=\frac{u_n+1-1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}=\frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_{n-1})}-\frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$ y por otro lado $v_1=1-\frac{1}{1+u_1}$. Entonces, para $n\geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n}v_k=1-\frac{1}{(1+u_1)\cdots(1+u_n)}\text{ (suma telescópica).}$$

Si la serie de término general u_n converge entonces $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ y entonces $0<u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(1+u_n)$. Entonces la serie de término general $\ln(1+u_n)$ converge o aún la sucesión $\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge a algún real ℓ. Pero la sucesión $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$ converge al real estrictamente positivo $P=e^{\ell}$. En este caso, la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n}v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge a $1-\frac{1}{P}$. Si la serie de término general u_n diverge, la serie de término general $\ln(1+u_n)$ diverge a $+\infty$ y lo mismo que la sucesión $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geqslant 1}$. En este caso, la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n}v_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge a 1.

Solución del ejercicio 1832 ▲005699

Estudiar primero la convergencia de la serie de término general $\frac{u_n}{S_n}$.

Si $\frac{u_n}{S_n}$ tiende a 0, entonces

$$0 < \frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1-\frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n)-\ln(S_{n-1}).$$

Por hipótesis, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Se deduce que la serie de término general $\ln(S_n)-\ln(S_{n-1})$ es divergente porque $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(S_k)-\ln(S_{k-1}) = \ln(S_n)-\ln(S_0) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. En este caso, la serie de término general $\frac{u_n}{S_n}$ diverge, que es también el caso si $\frac{u_n}{S_n}$ no tiende a 0. Entonces, en todos los casos, la serie de término general $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.

Si $\alpha \leqslant 1$, ya que S_n tiende a $+\infty$, a partir de cierto rango se tiene $S_n^\alpha \leqslant S_n$ y entonces $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \geqslant \frac{u_n}{S_n}$. Entonces, si $\alpha \leqslant 1$, la serie de término general $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge. Si $\alpha > 1$, ya que la sucesión (S_n) es creciente,

$$0 < \frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right),$$

que es el término general de una serie telescópica convergente ya que $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$ tiende a 0, cuando n tiende a infinito. En este caso, la serie de término general $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

$$\boxed{\text{La serie de término general } \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge si y solo si } \alpha > 1.}$$

Solución del ejercicio 1833 ▲005704

Para todo natural no nulo n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ y la serie de término general u_n converge si y solo si $p > 2$.

Solución del ejercicio 1834 ▲005705

(Se aplica la regla de RAABE-DUHAMEL que no es un resultado del curso.)
Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

y « se sabe » que existe un real estrictamente positivo K tal que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^a}$.

Solución del ejercicio 1968 ▲005710

La sucesión $\left((-1)^n \frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es alternada en signo y su valor absoluto tiende a 0 decreciendo. Entonces la serie de término general $(-1)^n \frac{1}{3n+1}$, $n \geqslant 1$, converge en virtud del criterio especial a series alternadas.
Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{3k}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Pero $\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{3n+3}\,dt = \frac{1}{3n+4}$. Se deduce que $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y así como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculemos esta última integral.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Solución del ejercicio 1845 ▲004488

1.
2.
3. Sea (r_n) una enumeración de $\mathbb{Q}$. Se establece $f(x) = \sum_{r_n<x}\frac{1}{(n+1)^2}$. f es estrictamente creciente porque para $x<y$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x<r_n<y$, por lo tanto $f(y)-f(x)\geqslant\frac{1}{(n+1)^2}$. Si $x\in\mathbb{Q}$, $x=r_k$, entonces $f(x^+)-f(x^-)\geqslant\frac{1}{(k+1)^2}$, de donde f es discontinua en x. Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces existe un vecindario de x que no contiene ningún r_i, $i\leqslant n$, de donde $f(x^+)-f(x^-)\leqslant\sum_{i>n}\frac{1}{(i+1)^2}$ y f es continua en x.

Solución del ejercicio 1846 ▲004489

Sea $[a,b]$ de longitud mayor o igual a $2\zeta(2)$ y $F_n=[a,b]\setminus(I_1\cup\cdots\cup I_n)$. Entonces (F_n) verifica el teorema de conjuntos cerrados anidados en un compacto.

Solución del ejercicio 1847 ▲004490

1. Agrupación en $i+j$ constante $\Rightarrow$ CV si y solo si $\alpha>2$.
2. Para $\alpha\geqslant 1$ se tiene por convexidad : $2^{1-\alpha}(i+j)^\alpha\leqslant i^\alpha+j^\alpha\leqslant(i+j)^\alpha$, entonces hay convergencia si y solo si $\alpha>2$.
3. Hay una infinidad de términos mayores que $1/4$.
4. $\frac{1}{a^p+b^q}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a^p}\sqrt{b^q}}\Rightarrow$ sumable.

Solución del ejercicio 1848 ▲004491

$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!}=2\mathrm{e}.$

Solución del ejercicio 1849 ▲004492

$-\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Solución del ejercicio 1850 ▲004493

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n-1}$ diverge.
2. $\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}=\frac{1}{4n^2}$ si $n\neq 0$, $-\frac{\pi^2}{6}$ si $n=0$. $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}=-\frac{\pi^2}{8}=-\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

Solución del ejercicio 1851 ▲004494

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}=\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}}^{+\infty} x^{(p+1)(2n+1)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{1-x^{2p+2}}.$

Solución del ejercicio 1853 ▲004496

1. $|t|<1$.
2. $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn}$ y se pueden intercambiar las dos sumas porque existe convergencia absoluta.
3. Se supone $t\in\,]0,1[$. $\frac{d}{dx}\left(\frac{t^x}{1-t^x}\right)=\frac{t^x\ln t}{(1-t^x)^2}<0$ por lo que se aplica el criterio de series alternadas, el resto se mayora en valor absoluto por el primer término del resto. Entonces
$$0\leqslant\frac{t^k(1-t)}{1-t^k}=\frac{t}{1+\frac{1}{t}+\cdots+\frac{1}{t^{k-1}}}\leqslant\frac{1}{k}$$
por lo que el término general converge uniformemente a 0. Por inversión de límite (porque hay convergencia uniforme) se obtiene $\lim_{t\to 1^-}(1-t)S(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$.
4. $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}t^{kn}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{kn=p}(-1)^{k-1}t^p=\sum_{p=1}^{\infty}\sigma(p)t^p$, con $\sigma(p)=$ (número de divisores impares de p) $-$ (número de divisores pares de p) $=\sigma_i(p)-\sigma_p(p)$.
Si $p=2^\alpha q$, con q impar entonces $\sigma_p(p)=\alpha\sigma_i(p)=\alpha\sigma_i(q)$, por lo tanto $\sigma(p)>0$ si y solo si p es impar *(un bello ejercicio)*.

Solución del ejercicio 1854 ▲004497

1. Hay convergencia si $|z|<1$. Se tiene entonces $f(z)=\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} z^{anp+bn+cp}$. También hay convergencia para $|z|>1$, cuando $a>b$ y se tiene en este caso : $f(z)=\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} z^{-anp+bn-cp}$ (no simétrica en b,c).

2. $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n$, con d_n = número de divisores de n en $[\![1, n-1]\!]$.

Solución del ejercicio 1855 ▲004498

$A = \zeta(2)^2$, $B = \zeta(2)\zeta(4)$, $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

Solución del ejercicio 1856 ▲004499

$\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Solución del ejercicio 1859 ▲004502

La serie converge para todo $x \notin \{-2, -3, \dots\}$ porque el criterio de series alternadas se aplica a partir de cierto rango (función de x). Es el mismo para todas las series obtenidas por derivaciones sucesivas término a término, y estas series convergen localmente uniformemente (el resto de una serie que satisface la CSA es mayorada en valor absoluto por el valor absoluto del primer término que aparece en el resto) por lo tanto f es $\mathscr{C}^\infty$. Para $|x| < 2$ se tiene

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{-x}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k^{n+1}} x^n = (1-\ln 2) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-(1-2^{-n})\zeta(n+1))x^n.$$

Solución del ejercicio 1860 ▲004403

$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \Rightarrow \cos z \in [-1,1]$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 1861 ▲004404

Expresar $1 + \frac{z}{n}$ en forma trigonométrica.

Solución del ejercicio 1862 ▲004405

Desarrollo en serie.

Solución del ejercicio 1863 ▲004406

$\left|\frac{e^z - 1}{z}\right|^2 = \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x \cos y}{x^2 + y^2}$. Después de simplificaciones, se es llevado a probar que $x^2(1-\cos y) \leqslant y^2(\operatorname{ch} x - 1)$, lo cual es cierto porque podemos encasillar $\frac{1}{2}x^2y^2$ entre los dos. Hay igualdad si y solo si $y = 0$.

Solución del ejercicio 1865 ▲004408

$$e^{x+iy} = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y/\tan y \\ e^{-y/\tan y} = \operatorname{sen} y/y. \end{cases}$$

En un vecindario de $2k\pi^+$, $e^{-y/\tan y} < \operatorname{sen} y/y$ (punto plano) y en un vecindario de $(2k+1)\pi^-$, $e^{-y/\tan y} > \operatorname{sen} y/y$ (límite infinito).

Solución del ejercicio 1866 ▲004409

1. $z \equiv \pm i \ln(2+\sqrt{3}) \pmod{2\pi}$.
2. $z \equiv i\pi \pmod{2i\pi}$.
3. $z \equiv 0 \pmod{2\pi}$ o $z \equiv 0 \pmod{2j\pi}$ o $z \equiv 0 \pmod{2j^2\pi}$.
4. $\Leftrightarrow 6e^{2iz} - (7+5i)e^{iz} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1+i & : \quad z \equiv \pi/4 - i\ln\sqrt{2} \pmod{2\pi} \\ e^{iz} = (1-i)/6: & z \equiv -\pi/4 - i\ln(\sqrt{2}/6) \pmod{2\pi}. \end{cases}$

Solución del ejercicio 1867 ▲004410

$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \sup = \operatorname{ch} 1$.
$|\operatorname{sen}(x+iy)|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x$. Para x fijo, el módulo aumenta con $|y|$, por lo que se alcanza el máximo en el borde del disco.
$\varphi(\theta) = \operatorname{sen}^2 \cos\theta + \operatorname{sh}^2 \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \varphi'(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{\operatorname{sh}(2\operatorname{sen}\theta)}{2\operatorname{sen}\theta} - \frac{\operatorname{sen}(2\cos\theta)}{2\cos\theta}\right) \Rightarrow \sup = \operatorname{sh} 1$.

Solución del ejercicio 1869 ▲004412

Si x es un vector propio de M es también de $\exp(M)$, por lo tanto $x = ke_1$ y el valor propio asociado es $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $e^\alpha = 2i$ ($\alpha = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$). Se tiene $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\exp(M) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \beta \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$, de donde $\beta = \frac{1-i}{2}$.

Solución del ejercicio 1874 ▲004413

1. $\sim -\frac{e}{2n} \Rightarrow$ DV.
2. $\sim \frac{\alpha}{2^{\alpha-1}} e^{n(\alpha-2)} \Rightarrow$ CV si y solo si $\alpha < 2$.
3. $\sim -\frac{3}{n^2} \Rightarrow$ CV.
4. $\sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ CV.
5. $\sim \sqrt{\frac{2}{n^3}} \Rightarrow$ CV.
6. cv si y solo si $|a| \neq 1$.
7. Serie alternada $\Rightarrow$ CV.
8. Serie alternada $\Rightarrow$ CV.
9. armónica + alternada $\Rightarrow$ DV.
10. d'Alembert $\Rightarrow$ CV.
11. $u_n \leqslant \frac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow$ CV.
12. $= \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ CV.
13. Descomposición en 3 series alternadas $\Rightarrow$ CV.
14. $= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ DV.
15. Agrupación de términos $\Rightarrow$ DV.
16. Agrupación por paquetes + CSI $\Rightarrow$ CV.

17. Término general no tiende a cero, DV.
18. $= \frac{1}{n^{\ln \ln n}} \Rightarrow$ CV.

Solución del ejercicio 1875 ▲004414

$P(n) = n^3 + \frac{3}{4}n + C.$

Solución del ejercicio 1876 ▲004415

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ converge.

Solución del ejercicio 1877 ▲004416

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$, hay convergencia si y solo si $\alpha > \frac{2}{3}$.

Solución del ejercicio 1878 ▲004417

Efectuar una desarrollo asintótica para los dos primeros. Convergen si y solo si $\alpha > \frac{1}{2}$. La tercera diverge por comparación serie-integral.

Solución del ejercicio 1879 ▲004418

$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n-1}} \to ab$ y $\frac{u_{2n}}{u_{2n-2}} \to ab$ (cuando $n \to \infty$) entonces hay convergencia si $|ab| < 1$.

Solución del ejercicio 1881 ▲004420

$n = 21$, $S \approx 0.65314389$.

Solución del ejercicio 1882 ▲004421

$1 \Rightarrow 2$ por comparación serie-integral. Contraejemplo para $(2) \not\Rightarrow (1)$: $u_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{n^2}$, $S_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - 1$, $f(t) = \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

Solución del ejercicio 1883 ▲004422

$\frac{n^2}{(n^2+1)^2} - \frac{1}{n^2-1} = -\frac{3n^2+1}{(n^2+1)^2(n^2-1)} \geqslant -\frac{4}{n^4}$, para $n \geqslant 3$. Así $S = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} + R_N$, con $-\frac{4}{3N^3} \leqslant R_N \leqslant 0$ y $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{N+\frac{1}{2}}{N(N+1)}$. Para $N = 25$ se obtiene : $0.76981 < S < 0.76990$.

Solución del ejercicio 1885 ▲004424

Si $\sum u_n$ y $\sum v_n$ convergen, entonces $n^2 u_n \to \infty$ (cuando $n \to \infty$) por lo tanto $u_n v_n \sim 1/n^2$. Así, las sucesiones $(\sqrt{u_n})$ y $(\sqrt{v_n})$ son cuadrados sumables mientras que la sucesión $(\sqrt{u_n v_n})$ no es sumable, es absurdo. Si $\sum u_n$ diverge, no se puede decir nada : con $u_n = 1$ se tiene $\sum v_n$ convergente mientras que con $u_n = \frac{1}{n}$ se tiene $\sum v_n$ divergente.

Solución del ejercicio 1886 ▲004425

1. $u_1+\cdots+u_n = 1-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \leqslant 1.$
2. $\ln\big((1+a_1)\cdots(1+a_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to +\infty \Rightarrow \sum u_n = 1$, cuando $n\to\infty$.

Solución del ejercicio 1887 ▲004426

Agrupación de términos por valor constante de $p_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{10^p-10^{p-1}}{a^p} = \frac{9}{a-10}$.

Solución del ejercicio 1889 ▲004428

1.
2. $|v_n| = O(n^{-3/2}) \Rightarrow$ CV.

Solución del ejercicio 1890 ▲004429

Serie alternada.

Solución del ejercicio 1891 ▲004430

1. $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{1}{4}$.
3. $S_p-(p+1)S_{p+1} = S_p - \frac{1}{(p+1)!} \Rightarrow S_p = \frac{1}{pp!}$.
4. $\frac{23}{144}$.
5. $\ln 3$.
6. $-\ln 2$.
7. $\ln\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}\right)$.
8. $\frac{1}{\alpha} - 2\operatorname{cotan}(2\alpha)$.
9. $109-40\mathrm{e}$.
10. $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$, para $|x|<1$ por recurrencia.
11. $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|>1$.
12. $S_n = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{qn+r} - \frac{r}{qn+r+1}$.

    $$S_n = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\cdots+\frac{1}{qn+n}-\frac{1}{q+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{(N+1)n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}\right) = \ln n.$$

Solución del ejercicio 1892 ▲004431

Si $n+1$ no es un cuadrado, entonces $u_n = 0$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

Solución del ejercicio 1893 ▲004432

1. $y = \mathrm{e}^{-x}(a\cos x + b\operatorname{sen} x)$, $y = \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x + \mathrm{e}^{-2x}(cx+d)$.
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-n\pi}(\mathrm{e}^{\pi}+1)}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 1894 ▲004433

$\frac{\pi^2}{3} - 3$.

Solución del ejercicio 1895 ▲004434

$\dfrac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = \dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1} \Rightarrow s_n = 18 - 24\sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} + \dfrac{6}{n+1} \to 18 - 24\ln 2$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 1896 ▲004435

$\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2,\ b=1,\ S=-\ln 2.$

Solución del ejercicio 1897 ▲004436

$\tan s_n = n+1$ por recurrencia y $s_n \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k+1} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 2$.

Solución del ejercicio 1898 ▲004437

1. $\sim \frac{a}{n^2}$.
2. $S(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+a) - \arctan k \to \frac{\pi}{2} + \arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} + \cdots + \arctan\frac{1}{n} \Rightarrow S(a) \to +\infty$, cuando $a \to +\infty$.

Solución del ejercicio 1899 ▲004438

El desplazamiento máximo entre la primera moneda y la última para apilar n monedas es $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2(n-1)}$ (en diámetro de una moneda). Es superior a 1 para $n > 4$.

Solución del ejercicio 1900 ▲004439

1. $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.
2. $\ln(\ln n)$.

Solución del ejercicio 1901 ▲004440

$u_n \sim n\ln^2 n \Rightarrow$ CV.

Solución del ejercicio 1902 ▲004441

2997.

Solución del ejercicio 1903 ▲004442

$\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Solución del ejercicio 1905 ▲004444

$T_{n+1}-T_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0$

$S_{n+1}-S_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right) dt > 0.$

Solución del ejercicio 1906 ▲004445

$\frac{u_{n,k}}{k} = \frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right]$, por lo tanto $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n,k}}{k}$ es una suma de Riemann, para la integral $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt$. La función $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]$ es Riemann-integrable en $[0,1]$, por lo tanto $v_n \to I$, cuando $n \to \infty$. Cálculo de I : $I_n = \int_{1/n}^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]\right) dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} k\,dt = \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \to 1-\gamma = I$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 1907 ▲004446

1. Comparación de series integrales : $u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$.
2. Comparación de series integrales aún (v_n es la suma de las áreas entre los rectángulos con puntos enteros y la curva de $t \to \ln(t)/t$).
3. $v_n - \ell = -\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,dt - \frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) = -\sum_{k=n}^{\infty} w_k$, con $w_k \sim \frac{\ln k}{2k^2}$, por lo tanto
$$v_n - \ell \sim -\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{2t^2}\,dt \sim -\frac{\ln n}{2n}.$$

Solución del ejercicio 1908 ▲004447

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{2n}.$

Solución del ejercicio 1909 ▲004448

1.
2.
3.
4.
5. $S_n + \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant S \leqslant S_n + \frac{1}{\ln n}$.
Para $n = 60 : 2.06857 < S < 2.06956$.

Solución del ejercicio 1910 ▲004449

La función $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ es decreciente en el intervalo $[n, n+1]$, $0 < \dfrac{1}{t^x} \leqslant \dfrac{1}{n^x}$. Entonces,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x} \quad \text{por positividad de la integral,}$$

luego

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \quad \text{por la relación de Chasles.}$$

Del mismo modo en $[n-1, n]$, $\dfrac{1}{t^x} \geqslant \dfrac{1}{n^x} > 0$ y

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

$$\int_1^{N} \frac{dt}{t^x} = \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \quad \text{por la relación de Chasles.}$$

Finalmente,

$$1 + \int_1^{N} \frac{dt}{t^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

$$\text{Entonces, se tiene :} \quad \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{dt}{t^x}. \tag{25}$$

Calculemos primero, $\displaystyle\int_1^{N} \frac{dt}{t^x}$:

$$\int_1^{N} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^N = \frac{N^{1-x}-1}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{x-1}$$

con el mismo límite para $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x}$. Así se ha demostrado que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^x}$, serie de Riemann con $x > 1$, es convergente. Se deduce entonces de (25), haciendo tender N hacia $+\infty$:

$$\begin{array}{lccccc} & \frac{1}{x-1} & \leqslant & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & 1 + \frac{1}{x-1} \\ \text{por lo tanto} & \frac{x-1}{x-1} & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & (x-1)\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \\ \text{después} & 1 & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & x. \end{array}$$

De donde, por el teorema de los gendarmes :

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1.$$

(*Solución de Antoine Poulain*)

Solución del ejercicio 1911 ▲004450

Si $u_n \to 0$, entonces $v_n \sim u_n$; sinon, $v_n \not\to 0$.

Solución del ejercicio 1912 ▲004451

1.
2. $\frac{r}{(1-r)^2}$.

Solución del ejercicio 1913 ▲004452

Se observa que $\sum u_i$ diverge porque $u_n \sim \frac{U_n}{n\alpha} \geqslant \frac{U_1}{n\alpha}$. Se calcula $\sum_{k=0}^{n} ku_k$ por partes :

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k-1}) = nU_n - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Como $U_n \sim \alpha n u_n$, término general estrictamente positivo de una serie divergente, se tiene $\sum_{k=0}^{n} U_k \sim \alpha \sum_{k=0}^{n} ku_k$, de donde : $(1+\alpha)\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim nU_n$ y cuando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=0}^{n} ku_k \sim \frac{nU_n}{(1+\alpha)n^2 u_n} \to \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Solución del ejercicio 1914 ▲004453

$S_n = \sum_{k=0}^{n} ku_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 + \frac{S_n}{n}$.

Solución del ejercicio 1915 ▲004454

1.
2.
3. $kr^k = k(u_k - u_{k+1})$, con $u_k = \frac{r^k}{1-r}$, por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$.

   Igualmente, $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} kr^k = \frac{(n-1)r^n}{1-r} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^k}{1-r} = \frac{nr^n}{1-r} + \frac{r^{n+1}}{(1-r)^2}$.

   $k^2 r^k = k(S_k - S_{k+1})$ y (S_k) decrece, de donde $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k = \sum_{k=1}^{\infty} S(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{kr^k}{1-r} + \frac{r^{k+1}}{(1-r)^2}\right) = \frac{r+r^2}{(1-r)^3}$.

Solución del ejercicio 1916 ▲004455

1.
2. $p_n = \frac{u_0}{S_n} \to 0$, por lo tanto la serie de término general $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.

Solución del ejercicio 1917 ▲004456

Método de rectángulos : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}} \geqslant \int_{a_{n+1}}^{a_0} \frac{dt}{t} \to +\infty$, cuando $k \to \infty$.
Si $a_k \sim a_{k+1}$ la serie dada diverge. Si no, también diverge porque su término general no tiende a 0.

Solución del ejercicio 1918 ▲004457

$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \sum_{k/2<n\leqslant k} \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N-1} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant 2 \sum_{k=1}^{2N-1} u_k.$

Solución del ejercicio 1919 ▲004458

$\sum_{k=1}^{n} v_k + nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$
Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge también (SP mayoradas) y $nv_n \to \ell \Rightarrow \ell = 0$.
Si $\sum u_n$ diverge y $\sum v_n$ converge, entonces $nv_n \to +\infty$, contradicción.

Solución del ejercicio 1920 ▲004459

$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k \sum_{p=k}^{n} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{ku_k}{k-1} \Rightarrow$ CV.

Solución del ejercicio 1921 ▲004460

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k.$

Solución del ejercicio 1922 ▲004461

Para $n > 2$, $u_{n+1} < \frac{1}{n}$, por lo tanto $u_{n+2} > \frac{1}{(n+1)\mathrm{e}^{1/n}} \sim \frac{1}{n}$, entonces la serie diverge.

Solución del ejercicio 1925 ▲004464

1.
2. $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{a-b+1}{n+b-1}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } a-b+1 > 0, v_n \to +\infty \\ \text{si } a-b+1 = 0, v_n = \text{cte} \\ \text{si } a-b+1 < 0, v_n \to 0. \end{cases}$
3. $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \Rightarrow (n+b)u_{n+1} + (b-a-1)\sum_{k=1}^{n} u_k - au_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}.$

Solución del ejercicio 1926 ▲004465

La sucesión (u_n) es creciente por lo que tiende a $\ell \in]0,+\infty]$. Se tiene ℓ finito si y solo si la serie telescópica $\sum(u_{n+1}-u_n)=\sum \frac{1}{n^a u_n}$ es convergente, o sea si y solo si $a>1$. Para $a<1$ se tiene $u_{n+1}^2=u_n^2+\frac{2}{n^a}+o\left(\frac{2}{n^a}\right)$, por lo tanto $u_{n+1}^2-u_n^2 \sim \frac{2}{n^a}$ y $u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-a}}{1-a}}$ (suma de relaciones de comparación). Para $a=1$ se tiene lo mismo $u_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

Solución del ejercicio 1927 ▲004466

$\alpha>1 \Rightarrow \sum u_n$ cv y vale $\zeta(\alpha)^2$.

$\alpha<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{2N} u_n \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \sum u_n$ dv.

Solución del ejercicio 1929 ▲004468

$\frac{a}{(1-a)^2}$ y $\frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

Solución del ejercicio 1931 ▲004470

1. Césaro.
2. $v_0+v_1+\cdots+v_n=2(u_0+u_1+\cdots+u_n)-v_n$.

Solución del ejercicio 1932 ▲004471

$|a_n| \leqslant M \Rightarrow \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}\right| \leqslant M\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p} \leqslant M\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^p}=\frac{M}{p-1} \Rightarrow a_1=0.$

Solución del ejercicio 1933 ▲004472

Demostración para x_1 : $\sum x_n=0$, $\sum x_{2n}=0 \Rightarrow \sum_{n\text{ impar}} x_n=0$. Se retiran los múltiplos impares de 3 ($\sum x_{3n}-\sum x_{6n}=0) \Rightarrow \sum_{\substack{n\not\equiv 0[2]\\ n\not\equiv 0[3]}} x_n=0$. Se retiran los múltiplos restantes de $5,7,\ldots$ Se obtiene así una sucesión $(s_p)_{p\text{ primero}}$ nula que converge a x_1, por lo tanto $x_1=0$.

¿Se puede prescindir de la convergencia absoluta?

Solución del ejercicio 1934 ▲004473

1. Recurrencia en p.
2. Transformación de Abel e inversión de sumatorias : $\sum_{n=0}^{p} v_n=\sum_{k=0}^{p}\frac{C_{p+1}^{k+1}}{2^p}\sum_{n=0}^{k} u_n$.

   Teorema de Césaro $\Rightarrow \sum v_n=2\sum u_n$.

Solución del ejercicio 1935 ▲004474

1. $nu_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, $nu_{2n+1} \leqslant \sum_{k=n+2}^{2n+1} u_k$.

2. $\varepsilon > 0$: Para k suficientemente grande, $u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{k}$, por lo tanto $u_k \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow k \leqslant n\varepsilon$. Entonces $\sum_{u_k \geqslant 1/n} \frac{1}{u_k} \leqslant n^2\varepsilon + Kn$.

Solución del ejercicio 1936 ▲004475

1. TIF : $\exists\ x_n \in [R_{n+1}, R_n]$ tal que $R_n^{1-p} - R_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{R_n - R_{n+1}}{x_n^p} \geqslant (1-p)\frac{a_n}{R_n^p}$. Así, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} \leqslant \frac{A^{1-p}}{1-p}$.
2. Esto es $\frac{1}{1-p}$: Para $a_n = k^n$, $A^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^p} = \frac{1-k}{1-k^{1-p}} \to \frac{1}{1-p}$, cuando $k \to 1^-$.

Solución del ejercicio 1937 ▲004476

(u_n) es creciente. Si la sucesión (u_n) converge entonces $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n) \leqslant M(u_{n+1} - u_n)$, por lo tanto las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas.
Si $\sum a_n$ converge, entonces $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leqslant \frac{a_n}{u_0}$, por lo tanto $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Solución del ejercicio 1942 ▲004481

Transformación de Abel.

Solución del ejercicio 1943 ▲004482

Transformación de Abel + corte, $v_n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 1944 ▲004483

$|u_n| + |v_n| \leqslant (|u_1| + |v_1|) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)$ y el producto infinito es trivialmente convergente.

Solución del ejercicio 1945 ▲004484

1.
2. (a) $1 + S_N \leqslant P_N$ ya no es trivial pero es aún cierto por recurrencia (la diferencia es una función decreciente de a_1).

   (b)
3. La sucesión $(P_N e^{-S_N})$ es positiva decreciente por lo que converge, lo que conduce a la convergencia de (P_N). Se tiene $P_N \to 0$ si y solo si $P_N e^{-S_N} \to 0$ (cuando $N \to \infty$) o sea si y solo si la serie del término general $\ln(1 + a_n) - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}$ diverge.
4. (a) Demostrar la desigualdad expandiendo los dos miembros. Sabiendo que la sucesión (P_N) es acotada deduciendo que es de Cauchy por lo tanto, converge.

   (b)

Solución del ejercicio 1946 ▲004485

Se tiene $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f(x^n)}{2^{n-1}}$. Sea $a\in[0,1[$ y M_a, m_a el máximo y el mínimo de f sobre $[0,a]$. Según la relación anterior, $m_a\geqslant m_{a^2}$ y $M_a\leqslant M_{a^2}$ así de hecho $m_a=m_{a^2}$ y $M_a=M_{a^2}$. Se deduce que $f([0,a])=f([0,a^2])=\dots=f([0,a^{2^k}])=\dots=\{f(0)\}$. Entonces f es constante y a la inversa las funciones constantes son adecuadas.

Solución del ejercicio 1947 ▲004486

Sea $(p_0,p_1,\dots)$ la sucesión creciente de números primos y $S_k=\sum_{P(n)\leqslant k}\frac{1}{n}$. Se tiene $S_k=S_{k-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^i}=\frac{p_k}{p_k-1}S_{k-1}$, lo que prueba que S_k es finito. La serie solicitada es $\frac{S_0}{p_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k-S_{k-1}}{p_k}=\frac{S_0}{p_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{p_k^2}$. Demostrar que $S_k\leqslant 2\sqrt{p_k}$, esto demuestra la convergencia. Es cierto para $k=0$ y $k=1$, y si es cierto para $k-1$, con $k\geqslant 2$, entonces se obtiene $S_k\leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_kp_{k-1}}{(p_k-1)^2}}\leqslant 2\sqrt{p_k}\sqrt{\frac{p_k(p_k-2)}{(p_k-1)^2}}\leqslant 2\sqrt{p_k}$. Observación : en realidad se tiene $S_k\sim e^{\gamma}\ln(p_k)$, donde γ es la constante de Euler (fórmula de Mertens).

Solución del ejercicio 1948 ▲005142

1. Sea $n\geqslant 3$.
$$\sum_{i=3}^{n}i=\frac{(3+n)(n-2)}{2}=\frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$
Sea $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\frac{(1+(2n-1))n}{2}=n^2$$
y
$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)=\frac{(19+3n+10)(n-2)}{2}=\frac{1}{2}(3n+29)(n-2)=\frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$
2. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Se define $u_n=1,\underbrace{11\dots1}_{n}$. Se tiene
$$u_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}=1+\frac{1}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{10}{9}-\frac{1}{9.10^n}.$$
Cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{1}{9.10^n}$ tiende a 0, y entonces, u_n tiende a $\frac{10}{9}$.
$$\boxed{1,11111....=\frac{10}{9}.}$$
Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Se define $u_n=0,\underbrace{99\dots9}_{n}$. Se tiene
$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}=\frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}=1-\frac{1}{10^n}.$$
Cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tiende a 0, y entonces, u_n tiende a 1.
$$\boxed{0,9999....=1.}$$

3. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se define $u_n = \underbrace{1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}}_{n}$. Se tiene

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ 1 \text{ si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Cuando n tiende a $+\infty$, se obtiene

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1.}$$

5. Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2} &= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\pi/2})(= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} i^k)) \\ &= \mathrm{Re}(\frac{1-\mathrm{e}^{(n+1)i\pi/2}}{1-\mathrm{e}^{i\pi/2}}) = \mathrm{Re}(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\pi/4}}{\mathrm{e}^{i\pi/4}}\frac{-2i\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in 4\mathbb{N}\cup(4\mathbb{N}+1) \\ 0 \text{ si } n \in (4\mathbb{N}+2)\cup(4\mathbb{N}+3). \end{cases}\end{aligned}$$

de hecho, se puede ver simplemente que $\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2} = 1+0-1+0 = 0$, y se tiene inmediatamente, $S_{4n} = 1$, $S_{4n+1} = S_{4n}+0 = 1$, $S_{4n+2} = S_{4n+1}-1 = 0$ y $S_{4n+3} = S_{4n+2}+0 = 0$.

6. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Se define $C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{sen}(k\theta)$. Entonces, según la fórmula de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(k\theta)+i\,\mathrm{sen}(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{i\theta})^k.$$

-1er caso. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$. Así,

$$C_n + iS_n = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\theta(n+1-1)/2}\frac{-2i\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}} = \mathrm{e}^{en\theta/2}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}.$$

Por consiguiente,

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n+iS_n) = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}} \text{ y } S_n = \mathrm{Im}(C_n+iS_n) = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}.$$

-2o caso. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene inmediatamente, $C_n = n+1$ y $S_n = 0$.
Finalmente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ y } \sum_{k=0}^{n}\mathrm{sen}(k\theta) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{n\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(n+1)\theta}{2}}{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}}$$

7. Sean $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Porque $-x \neq 1$, se tiene

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}(1-(-x)^n).$$

Por consiguiente,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

Pero entonces,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Como $\frac{1}{n+1}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, se deduce que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

en particular,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8. (a) Sea $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La sucesión $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión geométrica, de razón $q = 2$ y de primer término $u_0 - 3 = -2$. Se deduce que, para n entero natural dado, $u_n - 3 = -2.2^n$. Entonces,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 3(n+1) - 2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

Solución del ejercicio 1949 ▲005150

Para x real, se escribe $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$. Se observa que para todo real x, $f(x) \geqslant 0$. Desarrollando los n cuadrados, se obtiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2) = (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)x^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)x + (\sum_{k=1}^{n} a_k^2).$$

1er caso. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$, f es un trinomio cuadrático de signo constante en $\mathbb{R}$. Su discriminante reducido es entonces negativo o nulo. Esto proporciona

$$0 \geqslant \Delta' = (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 - (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)(\sum_{k=1}^{n} a_k^2),$$

y entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2o caso. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, entonces todos los b_k son nulos y la desigualdad es inmediata.

Finalmente, en todos los caso,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

Esta desigualdad es aún válida reemplazando los a_k y los b_k por sus valores absolutos, que proporciona las desigualdades intermediarias.
Se encuentra entonces la desigualdad del ejercicio 1827. Porque los a_k son estrictamente positivos, se puede escribir :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = n^2.$$

Solución del ejercicio 1950 ▲005458

Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{k}{n^2} = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik/n^2}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i/n^2}\frac{1-e^{ni/n^2}}{1-e^{i/n^2}}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2n^2}}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2n^2}\operatorname{sen}\frac{1}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2n^2}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

(también se puede empezar desde el encuadre $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6} \leqslant \operatorname{sen}\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{k}{n^2}$).

Solución del ejercicio 1951 ▲005688

1. Para $n \geqslant 1$, se establece $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n \geqslant 1$, u_n existe

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Como la serie de término general $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge (serie de RIEMANN de exponente $\alpha > 1$), la serie de término general u_n converge.
2. Para $n \geqslant 2$, se establece $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n \geqslant 2$, u_n existe y demás $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Como la serie de término general $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$, diverge y es positiva, la serie de término general u_n diverge.
3. Para $n \geqslant 1$, se establece $u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Para $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ y

$$\ln(u_n) = \ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)\left(-\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\ln 2\ln(n)+o(1).$$

   Entonces $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n} = \frac{1}{n^{\ln 2}}$. Como la serie de término general $\frac{1}{n^{\ln 2}}$, $n \geqslant 1$, diverge (serie de RIEMANN de exponente $\alpha \leqslant 1$) y es positiva, la serie de término general u_n diverge.

4. Para $n \geqslant 2$, se establece $u_n = \frac{1}{\ln(n)\ln(\text{ch}\, n)}$. u_n existe para $n \geqslant 2$. $\ln(\text{ch}\, n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ y $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)} > 0$. Verificar entonces que la serie de término general $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge. La función $x \to x\ln x$ es continua, creciente y estrictamente positiva en $]1,+\infty[$ (producto de dos funciones estrictamente positivas y crecientes sobre $]1,+\infty[$). Así, la función $x \to \frac{1}{x\ln x}$ es continua y decreciente en $]1,+\infty[$ y para todo entero k superior o igual a 2,

$$\frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx.$$

Por consiguiente, para $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Entonces u_n es positivo y equivalente al término general de una serie divergente. La serie de término general u_n diverge.

5. Para $n \geqslant 1$, se establece $u_n = \arccos \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$. u_n existe para $n \geqslant 1$. Además, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. Se deduce que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \text{sen}(u_n) = \text{sen}\left(\arccos \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2/3}} \underset{n \to +\infty}{=} \sqrt{1 - 1 + \frac{2}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{n} > 0$$

término general de una serie de RIEMANN divergente.

6. Para $n \geqslant 1$, se establece $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe y $u_n \neq 0$, para $n \geqslant 1$. Además,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0 < 1.$$

Según la regla de d'ALEMBERT, la serie de término general u_n converge.

7. Para $n \geqslant 1$, se establece $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$. u_n se define para $n \geqslant 1$ porque para $n \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y entonces $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Luego

$$\ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Luego, $n\ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ y entonces

$$u_n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} - \frac{1}{\sqrt{e}} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n\sqrt{e}} < 0.$$

La serie de término general $-\frac{1}{12n\sqrt{e}}$ es divergente y por lo tanto, la serie de término general u_n diverge.

8. $$\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\right)=\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{n^2+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2}{n\pi}<0.$$
Entonces, la serie de término general u_n diverge.

9. Para $n\geqslant 1$, se establece $u_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$. Para $n\geqslant 1$, la función $x\mapsto\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,dx$ es continua en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y positivo y por lo tanto, u_n existe y es positivo. Además, para $n\geqslant 1$,
$$0\leqslant u_n\leqslant\int_0^{\pi/2}\frac{1}{n^2+0}\,dx=\frac{\pi}{2n^2}.$$
La serie de término general $\frac{\pi}{2n^2}$ converge y así la serie de término general u_n converge.

10. $-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-1+O\left(\frac{1}{n}\right)$, luego
$$-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln(n)+o(1).$$
Por consiguiente,
$$0<u_n=e^{-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\ln n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-\ln n}=\frac{1}{n}.$$
La serie de término general $\frac{1}{n}$ diverge y la serie de término general u_n diverge.

11. $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ y entonces
$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{=}e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{e}{2n}>0.$$
La serie de término general $\frac{e}{2n}$ diverge y la serie de término general u_n diverge.

Solución del ejercicio 1952 ▲005689

1. Si P no es unitario de grado 3, u_n no tiende a 0 y la serie de término general u_n diverge groseramente. Sea P un polinomio mónico de grado 3. Se define $P=X^3+aX^2+bX+c$.
$$u_n=n\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}-\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+\frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
• Si $a\neq 0$, u_n no tiende a 0 y la serie de término general u_n diverge groseramente.
• Si $a=0$ y $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\neq 0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{n}$. u_n es, por lo tanto de signo constante para n grande y es equivalente al término general de una serie divergente. Entonces la serie de término general u_n diverge.
• Si $a=0$ y $\frac{1}{2}-\frac{b}{3}=0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En este caso, la serie de término general u_n converge (absolutamente).
En resumen, la serie de término general u_n converge si y solo si $a=0$ y $b=\frac{3}{2}$ o aún la serie de término general u_n converge si y solo si P es de la forma $X^3+\frac{3}{2}X+c$, $c\in\mathbb{R}$.

2. Para $n \geqslant 2$, se escribe $u_n = \frac{1}{n^\alpha}S(n)$. Para $n \geqslant 2$,

$$0 < S(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2}S(n)$$

y entonces $\forall n \geqslant 2$, $S(n) \leqslant \frac{S(2)}{2^{n-2}}$. Así,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\frac{S(2)}{2^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

para todo real α, la serie de término general u_n converge.

3. $\forall u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$. Así, $\forall n \geqslant 2$, $0 < u_n < \frac{1}{n}$. Se deduce que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ y consecuentemente $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. La serie de término general u_n diverge.

4. Se sabe que existe infinitos números primos. Denotemos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la sucesión creciente de números primos. La sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros y por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ o aún $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{p_n} = 0$. Así, $0 < \frac{1}{p_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ y las serie de término general $\frac{1}{p_n}$ y $\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$ son de la misma naturaleza. Queda por lo tanto por estudiar la naturaleza de la serie de término general $\ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$. Demostrar que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \geqslant \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right)$. Sea $n \geqslant 1$, entonces $\frac{1}{p_n} < 1$ y la serie de término general $\frac{1}{p_n^k}$, $k \in \mathbb{N}$, es una serie geométrica convergente con suma : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} = \left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$. Sea entonces N un entero natural superior o igual a 2 y $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ la lista de números primos menores o iguales a N. Todo entero entre 1 y N se escribe de manera única $p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$, donde $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\frac{\ln(N)}{\ln(p_i)}\right)$ y dos enteros distintos tienen descomposiciones distintas. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) \text{ (pues } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1} > 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^i}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\alpha_k} \frac{1}{p_k^i}\right)\right) = \ln\left(\sum_{\substack{0\leqslant\beta_1\leqslant\alpha_1 \\ \cdots 0\leqslant\beta_n\leqslant\alpha_n}} \frac{1}{p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}}\right) \\
&\geqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = +\infty$ y entonces $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}\right) = +\infty$. La serie de término general $\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ diverge y también lo hace la serie de término general $\frac{1}{p_n}$. (Esto demuestra que existen muchos números primos y en todo caso muchos más números primos que son cuadrados perfectos por ejemplo).

5. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se define $n = a_p \times 10^p + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$, donde $\forall i \in [\![0,p]\!]$, $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ y $a_p \neq 0$. Entonces $c(n) = p+1$. Determinar p está en función de n. Se tiene $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ y entonces $p = E(\log(n))$. Así

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n(E(\log n)+1)^\alpha}.$$

Dado que, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^\alpha(10)}{n\ln^\alpha(n)}$ y la serie de término general u_n converge si y solo si $\alpha > 1$ (series de BERTRAND). Redemostrar este resultado que no es un resultado del curso. La serie de término general $\frac{1}{n\ln n}$ es divergente (ver el ejercicio 1951, 4)). Así, si $\alpha \leqslant 1$, la serie de término general $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ es divergente porque $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n\ln^\alpha(n)} \geqslant \frac{1}{n\ln n}$. Sea $\alpha > 1$. Porque la función $x \mapsto \frac{1}{x\ln^\alpha x}$ es continua y estrictamente decreciente en $]1,+\infty[$, para $k \geqslant 3$,

$$\frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$$

después, para $n \geqslant 3$, sumando para $k \in [\![3,n]\!]$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^\alpha k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)} - \frac{1}{\ln^{\alpha-1}(n)}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ln^{\alpha-1}(2)}.$$

Así, la sucesión de sumas parciales de la serie de términos positivos, de término general $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$, es mayorada y entonces la serie de término general $\frac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge.
Sea $n \geqslant 2$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln^a(n+1)}{(n+1)^b} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1$$

y de acuerdo a la regla de d'ALEMBERT, la serie de término general u_n converge.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$. Entonces

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan(u_n)$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n}\right)^a}{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^a} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\frac{2a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Así, la serie de término general u_n converge si y solo si $a = 0$.

7. La función $x \mapsto x^{3/2}$ es continua y creciente en $\mathbb{R}^+$. Entonces, para $k \geqslant 1$, $\int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant k^{3/2} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n x^{3/2}\,dx \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^{3/2}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} x^{3/2}\,dx = \int_1^{n+1} x^{3/2}\,dx$$

lo que proporciona

$$\tfrac{2}{5}n^{5/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \leqslant \tfrac{2}{5}((n+1)^{5/2}-1) \text{ y } \sum_{k=1}^{n} k^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{5/2}}{5}.$$

Así $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^{\frac{5}{2}-\alpha}}{5} > 0$. La serie de término general u_n converge si y solo si $\alpha > \frac{7}{2}$.

8. Para $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right) - 1 \geqslant \frac{1}{n^\alpha} + \frac{2}{n^\alpha} + \cdots + \frac{n}{n^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha} > 0.$$

Como $\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\alpha-2}}$, si $\alpha \leqslant 3$, se tiene $\alpha-2\leqslant 1$ y la serie de término general u_n diverge. Si $\alpha > 3$,

$$0 < u_n \leqslant \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right)^n - 1 = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}},$$

término general de una serie de RIEMANN convergente, y, ya que $\alpha-2>1$, la serie de término general u_n converge. Finalmente, la serie de término general u_n converge si y solo si $\alpha>3$.

Solución del ejercicio 1953 ▲005690

1. Para $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi(n^2-1+1)}{n+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}+(n-1)\pi\right) = (-1)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$
La sucesión $\left((-1)^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se alternada en signo y su valor absoluto tiende a 0 en forma decreciente. La serie de término general u_n converge así en virtud del criterio especial de series alternadas.
2. (La sucesión $\left(\frac{1}{n+(-1)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no es decreciente a partir de cierto rango).
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La serie de término general $\frac{(-1)^n}{n}$ converge en virtud del criterio especial de series alternadas y la serie de término general $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ es absolutamente convergente. Se deduce que la serie de término general u_n converge.
3. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Las series de términos generales respectivos $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ y $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ son convergentes y la serie de término general $-\frac{1}{2n}$ es divergente. Si la serie de término general u_n converge entonces la serie de término general $-\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge lo que no es cierto. Entonces la serie de término general u_n diverge.
Observación. La serie de término general u_n diverge aunque u_n es equivalente al término general de una serie convergente.
4. Si $\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces las dos primeras series divergen y la última converge.
Sea $\alpha\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $v_n = \mathrm{e}^{en\alpha}$ y $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ de manera que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe todavía $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Para $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, se escribe finalmente $R_n^p = \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$.
(Luego se realiza una transformación de ABEL).
$$R_n^p = \sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k(V_k-V_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_k V_k - \sum_{k=n}^{n+p-1}\varepsilon_{k+1}V_k$$
$$= \varepsilon_{n+p}V_{n+p} - \varepsilon_{n+1}V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})V_k.$$

Ahora, para $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = e^{i\alpha} \frac{e^{en\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = e^{i\alpha} \frac{\operatorname{sen}(n\alpha/2)}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$ y entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{sen}(\alpha/2)|}$. Así, para $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$\begin{aligned}
|R_n^p| &= \left| \frac{1}{n+p} V_{n+p} - \frac{1}{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) V_k \right| \\
&\leqslant \frac{1}{|\operatorname{sen}(\alpha/2)|} \left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{|\operatorname{sen}(\alpha/2)|} \left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} \right) = \frac{2}{|\operatorname{sen}(\alpha/2)|(n+1)} \\
&\leqslant \frac{2}{n|\operatorname{sen}(\alpha/2)|}.
\end{aligned}$$

Sea entonces ε un real estrictamente positivo. Para $n \geqslant E\left(\frac{2}{\varepsilon|\operatorname{sen}(\alpha/2)|}\right) + 1$ y p cualquier entero natural no nulo, se tiene $|R_n^p| < \varepsilon$. Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^*$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \right| < \varepsilon$. Así, la serie de término general u_n verifica el criterio de CAUCHY y por lo tanto, es convergente. Sucede lo mismo para las series de términos generales respectivos $\frac{\cos(n\alpha)}{n} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{en\alpha}}{n}\right)$ y $\frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{n} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{en\alpha}}{n}\right)$.

5. Para $x \in]0,+\infty[$, se escribe $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. f es derivable en $]0,+\infty[$ y $\forall x > e$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x} < 0$. Entonces, la función f es decreciente en $[e,+\infty[$. Se deduce que la sucesión $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 3}$ es una sucesión decreciente. Pero entonces la serie de término general $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge en virtud del criterio especial a series alternadas.
6. • Si $\operatorname{grad} P \geqslant \operatorname{grad} Q$, u_n no tiende a 0 y la serie de término general u_n es groseramente divergente.
   • Si $\operatorname{grad} P \leqslant \operatorname{grad} Q - 2$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y la serie de término general u_n es absolutamente convergente.
   • Si $\operatorname{grad} P = \operatorname{grad} Q - 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \frac{\operatorname{dom} P}{n \operatorname{dom} Q} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. u_n es entonces la suma de dos términos generales de series convergentes y la serie de término general u_n converge.
   En resumen, la serie de término general u_n converge si y solo si $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$.
7. $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, luego para $n \geqslant 2$, $n!e = 1 + n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$. Para $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $\frac{n!}{k!}$ es un entero divisible por $n(n-1)$ y por lo tanto, es un entero par que se denota $2K_n$. Para $n \geqslant 2$, se obtiene

$$\operatorname{sen}(n!\pi e) = \operatorname{sen}\left(2K_n\pi + (n+1)\pi + \pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\pi \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right).$$

Determinar un desarrollo limitado de orden 2 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$, cuando n tiende a $+\infty$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Ahora, para $k \geqslant n+3$, $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{k(k-1)\cdots(n+1)} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{k-n}}$ y entonces

$$\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{(n+1)^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

Se deduce que $\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Queda

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Finalmente, $\text{sen}(n!\pi e) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\text{sen}\left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\text{sen}(n!\pi e)$ es la suma de dos términos generales de series convergentes y la serie de término general $\text{sen}(n!\pi e)$ converge. Si $p \geqslant 2$, $|\text{sen}^p(n!\pi e)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^p}{n^p}$ y la serie de término general $\text{sen}^p(n!\pi e)$ converge absolutamente.

Solución del ejercicio 1954 ▲005691

1. $\frac{n+1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Así, la serie de término general $\frac{n+1}{3^n}$ converge.

   1er cálculo. Sea $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\\ &= (S-1) - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = S - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

   Se deduce que $S = \frac{9}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}.}$$

   2o cálculo. Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se establece $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. f_n es derivable en $\mathbb{R}$ y para $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k.$$

   Por consiguiente, para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = f_n'(x) = \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

   Para $x = \frac{1}{3}$, se obtiene $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^{n-1}} + 1}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}$ y cuando n tiende a infinito, se obtiene de nuevo $S = \frac{9}{4}$.

2. Para $k \geqslant 3$, $\frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{3}{8(k-2)} + \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)}$. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k} &= \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + o(1)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{3}{8}\times\frac{3}{2} + \frac{5}{8}\times\frac{7}{12} + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{89}{96} + o(1).\end{aligned}$$

La serie propuesta es, por lo tanto convergente de suma $\frac{89}{96}$.

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.}$$

3. Para $k \in \mathbb{N}$, se tiene $1^{3k}+j^{3k}+(j^2)^{3k}=3$, luego $1^{3k+1}+j^{3k+1}+(j^2)^{3k+1}=1+j+j^2=0$ y $1^{3k+2}+j^{3k+2}+(j^2)^{3k+2}=1+j^2+j^4=0$. Así,

$$\mathrm{e}+\mathrm{e}^j+\mathrm{e}^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n+j^n+(j^2)^n}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!},$$

y entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} &= \frac{1}{3}(\mathrm{e}+\mathrm{e}^j+\mathrm{e}^{j^2}) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+2\mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-i\sqrt{3}/2})\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+2\mathrm{e}^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}+\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ (suma telescópica)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

5. $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Entonces la serie de término general $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge. Se define $S=\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$, luego para $n\geqslant 2$, $S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$. Porque la serie converge $S=\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{p\to+\infty} S_{2p+1}$, con

$$\begin{aligned}S_{2p+1} &= \sum_{k=2}^{2p+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}(\ln(2k)-\ln(2k+1)+\ln(2k+1)-\ln(2k)) = 0\end{aligned}$$

y cuando p tiende a $+\infty$, se obtiene $S=0$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.}$$

6. Si $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, entonces, para todo entero natural n, $\frac{a}{2^n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y entonces $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0$. Luego, $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ y la serie converge. Luego,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(2a)}{2^{n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \text{ (producto telescópico)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(2a)}{2^{n+1} \times \frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(2a)}{2a}\right).$$

$$\boxed{\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(2a)}{2a}\right).}$$

7. Verificar que para todo real x se tiene $\operatorname{th}(2x) = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}$.
Sea $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \operatorname{ch}(2x)$ y $2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \operatorname{sh}(2x)$, luego

$$\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th}(2x).$$

Así, para $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}x}$. Pero entonces, para $a \in \mathbb{R}^*$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}\operatorname{th}\frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k\operatorname{th}\frac{a}{2^k}}\right)$$

$$= \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{2^n\operatorname{th}\frac{a}{2^n}} \text{ (suma telescópica)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a},$$

lo cual es aún cierto cuando $a = 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\operatorname{th}\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2}{\operatorname{th}(2a)} - \frac{1}{a}.}$$

Solución del ejercicio 1955 ▲005692

Es necesario verificar que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$0 < (2n)u_{2n} = 2(\underbrace{u_{2n} + \cdots + u_{2n}}_{n}) \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \text{ (porque la sucesión } u \text{ es decreciente)}$$
$$= 2(S_{2n} - S_n).$$

Porque la serie de término general u_n converge, $\lim_{n\to+\infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ y entonces $\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$. Luego, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Entonces, las sucesiones de términos de rangos pares e impares extraídos de la sucesión $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y tienen el mismo límite, a saber 0. Se deduce que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ o aún que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Contre ejemplo con u no monótona. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ es un cuadrado perfecto no nulo} \\ 0 \text{ si no.} \end{cases}$

La sucesión u es positiva y $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty$. Por lo tanto, $p^2 u_{p^2} = 1 \underset{p\to+\infty}{\to} 1$ y la sucesión (nu_n) admite una sucesión extraída que converge a 1. No se tiene entonces que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Solución del ejercicio 1956 ▲005693

Sea σ una permutación de $[\![1,n]\!]$. Demostrar que la sucesión $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$, $n \geqslant 1$, no verifica el criterio de CAUCHY. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \\ &\geqslant \frac{1}{4n^2}(1+2+\cdots+n) \quad \text{(los } n \text{ enteros } \sigma(k),\ 1 \leqslant k \leqslant n, \text{ son estrictamente} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{positivos y dos a dos distintos)} \\ &= \frac{n(n+1)}{8n^2} \geqslant \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Si la sucesión (S_n) converge, se debe tener $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$, lo que contradice la desigualdad anterior. Entonces la serie de término general $\frac{\sigma(n)}{n^2}$, $n \geqslant 1$, diverge.

Solución del ejercicio 1957 ▲005694

Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $v_n = \ln(1+u_n)$, $w_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ y $t_n = \int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^{\mathrm{e}}}$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, entonces $0 \leqslant u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. En este caso, serie de término general u_n, v_n y w_n son de la misma naturaleza. Por otra parte, para $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{1+u_n^{\mathrm{e}}} \leqslant t_n \leqslant u_n$, luego $\frac{1}{1+u_n^{\mathrm{e}}} \leqslant \frac{t_n}{u_n} \leqslant 1$ y entonces $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Las series de términos generales u_n y t_n también son de la misma naturaleza.

• Si u_n no tiende a 0, la serie de término general u_n es groseramente divergente. Porque $u_n = \mathrm{e}^{v_n} - 1$, v_n no tiende a 0 y la serie de término general v_n es groseramente divergente. En este caso también, la serie de término general son de la misma naturaleza.

Igualmente, ya que $w_n = \frac{u_n}{1+u_n} < 1$, se tiene $u_n = \frac{w_n}{1-w_n}$ y w_n no puede tender a 0. En fin, ya que u_n no tiende a 0, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo entero natural N, existe $n = n(N) \geqslant N$ tal que $u_n \geqslant \varepsilon$. Para este ε y estos n, se tiene $t_n \geqslant \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{1+x^{\mathrm{e}}} > 0$ (función continua, positiva y no nula) y la sucesión t_n no tiende a 0. En el caso donde u_n no tiende a 0, las cuatro series son muy divergentes.

Solución del ejercicio 1958 ▲005695

Para $n\in\mathbb{N}$, se escribe $u_n=(n+1)!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$. Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}=1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots k}$$

Se tiene $0<\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}=\frac{1}{(n+2)^5}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+2)^4(n+1)}\leqslant\frac{1}{n^5}$.

Se deduce que $\sum_{k=n+6}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots k}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
u_n&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\\
&\quad+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{5}{n}+\frac{19}{n^2}\right)+\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{9}{n}\right)+\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{(n+1)!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Solución del ejercicio 1959 ▲005696

Para $n\in\mathbb{N}$, se escribe $u_n=\operatorname{sen}\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$. De acuerdo con la fórmula del binomio de NEWTON, $(2+\sqrt{3})^n=A_n+B_n\sqrt{3}$, donde A_n y B_n son números naturales. Un cálculo conjugado también proporciona $(2-\sqrt{3})^n=A_n-B_n\sqrt{3}$. Así, $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2A_n$ es un entero par. Así, para $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\operatorname{sen}\left(2A_n\pi-\pi(2-\sqrt{3})^n\right)=-\operatorname{sen}\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right).$$

Pero $0<2-\sqrt{3}<1$ y entonces $(2-\sqrt{3})^n\underset{n\to+\infty}{\to}0$. Se deduce que $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\pi(2-\sqrt{3})^n$ término general de una serie geométrica convergente. Entonces la serie de término general u_n converge.

Solución del ejercicio 1960 ▲005700

Si $\alpha<0$, $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n^{-2\alpha}$ y si $\alpha=0$, $u_n=1+(-1)^n$. Entonces si $\alpha\leqslant0$, u_n no tiende a 0.

La serie de término general u_n diverge groseramente en este caso. Se supone ahora que $\alpha > 0$. Para todo natural no nulo n, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ y por lo tanto, la serie de término general u_n converge absolutamente si y solo si $\alpha > 1$. Queda por estudiar el caso en que $0 < \alpha \leqslant 1$. Se tiene $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}$. La sucesión $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tiende a 0 decreciendo y por lo tanto, la serie de término general $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge en virtud del criterio especial a series alternadas. Se deduce que la serie de término general u_n converge si y solo si la serie de término general $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge o aún si y solo si $\alpha > \frac{1}{2}$.
En resumen

Si $\alpha \leqslant 0$, la serie de término general $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge groseramente,
si $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la serie de término general $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ diverge,
si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la serie de término general $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ es semi convergente,
si $\alpha > 1$, la serie de término general $\dfrac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ converge absolutamente.

Solución del ejercicio 1961 ▲005701

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se denota S_n la suma de los n primeros términos de la serie considerada y se establece $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Se sabe que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$. Sea $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{m(p+q)} &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2}+\cdots+\frac{1}{4q}\right)+\cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{2(m-1)p+1}+\cdots+\frac{1}{2mp-1}\right) - \left(\frac{1}{2(m-1)q+2}+\cdots+\frac{1}{2mq}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{2k} = H_{2mp} - \frac{1}{2}(H_{mp}+H_{mq}) \\
&\underset{m\to+\infty}{=} (\ln(2mp)+\gamma) - \frac{1}{2}(\ln(mp)+\gamma+\ln(mq)+\gamma) + o(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

Así, la sucesión extraída $(S_{m(p+q)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge a $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$. Demostrar entonces que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Existe un único entero natural no nulo m_n tal que $m_n(p+q) \leqslant n < (m_n+1)(p+q)$ a saber $m_n = E\left(\frac{n}{p+q}\right)$.

$$\begin{aligned}
|S_n - S_{m_n(p+q)}| &\leqslant \frac{1}{2m_np+1}+\cdots+\frac{1}{2(m_n+1)p-1} + \frac{1}{2m_nq+2} + \frac{1}{2(m_n+1)q} \\
&\leqslant \frac{p}{2m_np+1} + \frac{q}{2m_nq+2} \leqslant \frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_n} = \frac{1}{m_n}.
\end{aligned}$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Porque $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para $n \geqslant n_0$, $\frac{1}{m_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y también

$$\left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $n \geqslant n_0$, se tiene entonces

$$\left|S_n - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant |S_n - S_{m_n(p+q)}| + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{m_n} + \left|S_{m_n(p+q)} - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|S_n - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)\right)\right| < \varepsilon)$ y entonces, la serie propuesta converge y tiene la suma $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Solución del ejercicio 1962 ▲005702

La serie propuesta es el producto de CAUCHY de la serie de término general $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, por sí misma.

• Si $\alpha > 1$, se sabe que la serie de término general $\frac{1}{n^\alpha}$ converge absolutamente y por lo tanto, la serie propuesta converge.

• Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, para $0 < k < n$ se tiene $0 < k(n-k) \leqslant \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}$. Entonces $u_n \geqslant \frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha}$, con $\frac{n-1}{\left(\frac{n^2}{4}\right)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$. Como $2\alpha - 1 \leqslant 1$, la serie propuesta diverge.

• Si $\alpha < 0$, $u_n \geqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ y entonces u_n no tiende a 0. En este caso, la serie propuesta diverge groseramente.

Solución del ejercicio 1963 ▲005703

1. Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}2n^3 - 3n^2 + 1 &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53n + 79\\ &= 2(n+3)(n+2)(n+1) - 15(n+3)(n+2) + 53(n+3) - 80.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!} - \frac{15}{(n+1)!} + \frac{53}{(n+2)!} - \frac{80}{(n+3)!}\right) = 2\mathrm{e} - 15(\mathrm{e}-1) + 53(\mathrm{e}-2) - 80\left(\mathrm{e} - \frac{5}{2}\right)\\ &= -40\mathrm{e} + 111.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} = -40\mathrm{e} + 111.}$$

2. Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene $u_{n+1} = \frac{n+1}{a+n+1}u_n$. Así $(n+a+1)u_{n+1} = (n+1)u_n = (n+a)u_n + (1-a)u_n$, luego

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(k+a+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(k+a)u_k = (n+a+1)u_{n+1} - (a+1)u_1 = (n+a+1)u_{n+1} - 1.$$

Si $a = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. En este caso, la serie diverge.

Si $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1-a}((n+a+1)u_{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1}(a+n+1)u_{n+1}$.

Si $a>1$, la sucesión u es estrictamente positiva y la sucesión de sumas parciales (S_n) es mayorada por $\frac{1}{a-1}$. Entonces la serie de término general u_n converge. Lo mismo ocurre con la sucesión $((a+n+1)u_{n+1})$.
Sea $\ell = \lim_{n\to+\infty}(a+n+1)u_{n+1}$. Si $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+a+1}$ contradiciendo la convergencia de la serie de término general u_n. Entonces $\ell = 0$ y

$$\text{si } a>1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}.$$

Si $0<a<1$, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \frac{1}{n+1}$. En este caso, la serie diverge.

Solución del ejercicio 1964 ▲005706

Para todo natural no nulo n, $0 < \frac{1}{2^p n^{p-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}}$ y la serie de término general u_n converge si y solo si $p>2$.

Solución del ejercicio 1965 ▲005707

Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Porque la serie de término general $\frac{1}{k^2}$, $k\geqslant 1$, converge, la sucesión (R_n) es definida y tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. $0 < \frac{1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ y dado que la serie de término general $\frac{1}{k^2}$ converge, la regla de equivalencia de residuos de series de términos positivos convergentes nos permite afirmar que

$$\begin{aligned}
R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \text{ (sobre todo, no descomponer en dos sumas)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) \text{ (suma telescópica)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

o aún $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Más precisamente, para $n\in\mathbb{N}^*$, $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}$.

Por lo tanto $-\frac{1}{k^2(k-1)} + \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)}$ luego

$$\frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} - \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = -\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
R_n = \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} &= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2(k-1)(k-2)} \\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)(k-2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)}.
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^4},$$

o aún

$$-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{6}{k^2(k-1)(k-2)(k-3)} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Luego,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)}-\frac{1}{k(k-1)}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{N(N-1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

y

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)}-\frac{1}{k(k-1)(k-2)}\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\right) = \frac{2}{3n(n-1)(n-2)}$$
$$= \frac{2}{3n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

y finalmente

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^4}\right)+\left(\frac{2}{3n^3}+\frac{2}{n^4}\right)-\frac{3}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).}$$

Solución del ejercicio 1966 ▲005708

1. La sucesión $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tiende a 0, en forma decreciente a partir del rango 3 (proporcionada por el estudio de funciones $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ sobre $[e,+\infty[$) y por lo tanto, la serie de término general $(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, $n\geqslant 1$, converge en virtud del criterio especial a series alternadas. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se establece $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p}$. $(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ no es de signo constante a partir de cierto rango y por lo tanto, no se le puede aplicar la regla de equivalencia de restos. Sin embargo, ya que la serie de término general $(-1)^k\frac{\ln k}{k}$ converge, se sabe que se pueden asociar los términos a voluntad y para $k\in\mathbb{N}^*$, se tiene

$$R_{2k-1} = \sum_{p=2k}^{+\infty}(-1)^p\frac{\ln p}{p} = \sum_{p=k}^{+\infty}\left(\frac{\ln(2p)}{2p}-\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}\right).$$

Porque la función $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ es decreciente en $[e,+\infty[$ y por lo tanto, en $[3,+\infty[$, para $p \geqslant 2$, $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} \geqslant 0$ y se puede usar la regla de la equivalencia de restos de series con términos positivos convergentes. Se busca un equivalente más simple de $\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$, cuando p tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} &= \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{-1} \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{2p} - \frac{1}{2p}\left(\ln(2p) + \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln(2p)}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p + \ln 2}{4p^2} + o\left(\frac{\ln p}{p^2}\right) \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{4p^2}.\end{aligned}$$

y por lo tanto, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^2}$. Encontrar ahora un equivalente simple de $\frac{\ln p}{p^2}$ de la forma $v_p - v_{p+1}$. Sea $v_p = \frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}$ (sugerido por $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2}$). Entonces

$$\begin{aligned}v_p - v_{p+1} &= \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{p}\left(\ln p + \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\ln p}{p^2}.\end{aligned}$$

Según la regla de la equivalencia de los restos de series con términos positivos convergentes,

$$R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\sum_{p=k}^{+\infty}\left(\frac{\ln p}{p} - \frac{\ln(p+1)}{p+1}\right) = \frac{\ln k}{4k} \text{ (serie telescópica).}$$

Luego,

$$R_{2k} = R_{2k-1} - \frac{\ln(2k)}{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln(2k)}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} - \frac{\ln k}{2k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

En resumen, $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k}$ y $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k}$.

Se puede unificar : $R_{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2k-1)}{2(2k-1)}$ y $R_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln k}{4k} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2k)}{2(2k)}$. Finalmente,

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln p}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{2n}.}$$

2. $\sum n^n$ es una serie de términos positivos groseramente divergente.

1 era solución.

$0 < n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n - (n-1)^{n-1}$, pues $\frac{n^n - (n-1)^{n-1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Según la regla de equivalencia de sumas parciales de series con términos positivos divergentes,

$$\sum_{p=1}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n} p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=2}^{n} (p^p - (p-1)^{p-1}) = n^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.$$

(La suma es equivalente a su último término.)

2a solución. Para $n\geqslant 3$, $0\leqslant \frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p\leqslant \frac{1}{n^n}\times(n-2)(n-2)^{n-2}\leqslant \frac{n^{n-1}}{n^n}=\frac{1}{n}$. Entonces $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p$. Se deduce que $\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n}p^p=1+\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}+\frac{1}{n^n}\sum_{p=1}^{n-2}p^p \underset{n\to+\infty}{=} 1+o(1)+o(1)=1+o(1)$.

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}p^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n.}$$

Solución del ejercicio 1967 ▲005709

Sea $p\in\mathbb{N}^*$. Para $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{p\}$, $\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)$. Entonces, para $N>p$,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}&=\frac{1}{2p}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n\neq p}}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{2p}\left(\sum_{\substack{1-p\leqslant k\leqslant N-p\\ k\neq 0}}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{p+1\leqslant k\leqslant N+p\\ k\neq 2p}}\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{2p}\left(-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N+p}\frac{1}{k}+\frac{1}{2p}+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2p}\left(\frac{3}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Ahora, $\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\frac{1}{N-p+1}+\cdots+\frac{1}{N+p}$ es una suma de $2p-1$ términos tendiendo a 0, cuando N tiende a $+\infty$. Porque $2p-1$ es constante cuando N varía, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}=0$ y entonces

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{1}{2p}\times\frac{3}{2p}=\frac{3}{4p^2},\ \text{luego}\ \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{3}{4p^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Para $n\in\mathbb{N}^*$ dado, se tiene también $\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ p\neq n}}\frac{1}{n^2-p^2}=-\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ p\neq n}}\frac{1}{p^2-n^2}=-\frac{3}{4n^2}$ y entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ p\neq n}}\frac{1}{n^2-p^2}\right)=-\frac{\pi^2}{8}.$$

Se deduce que la sucesión doble $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n\neq p}}$ no es sumable.

Solución del ejercicio 1968 ▲005710

La sucesión $\left((-1)^n\frac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se alternada en signo y su valor absoluto tiende a 0 en forma decreciente. Entonces la serie de término general $(-1)^n\frac{1}{3n+1}$, $n\geqslant 1$, converge en virtud del criterio especial a series alternadas. Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt.$$

Pero $\left|(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\right|=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt\leqslant\int_0^1 t^{3n+3}\,dt=\frac{1}{3n+4}$. Se deduce que $(-1)^n\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}\,dt$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y así como

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Calculemos esta última integral.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\left[\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}.}$$

Solución del ejercicio 1969 ▲005711

Para todo entero $n\geqslant 2$, se tiene $nv_n-(n-1)v_{n-1}=u_n$, lo que es aún cierto para $n=1$ si se escribe además $v_0=0$. Así, para $n\in\mathbb{N}^*$

$$v_n^2-2u_nv_n=v_n^2-2(nv_n-(n-1)v_{n-1})v_n=-(2n-1)v_n^2+2(n-1)v_{n-1}v_n$$
$$\leqslant-(2n-1)v_n^2+(n-1)(v_{n-1}2+v_n^2)=(n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2.$$

Pero entonces, para $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}(v_n^2-2u_nv_n)\leqslant\sum_{n=1}^{N}((n-1)v_{n-1}^2-nv_n^2)=-nv_n^2\leqslant 0.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}2u_nv_n\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}\quad\text{(desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

Si $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}>0$, se obtiene luego de la simplificación por $\left(\sum_{n=1}^{N}v_n^2\right)^{1/2}$, luego elevando al cuadrando

$$\sum_{n=1}^{N}v_n^2\leqslant 4\sum_{n=1}^{N}u_n^2,$$

esta desigualdad queda clara si $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2\right)^{1/2} = 0$. Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{N} u_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

La sucesión de sumas parciales de la serie de término general $v_n^2 (\geqslant 0)$ es mayorada. Entonces la serie de término general v_n^2 converge y además, cuando N tiende a infinito, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$

Solución del ejercicio 1970 ▲005712

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt$$
$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Por consiguiente, para $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\frac{1-(-t^2)^{N+1}}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Por lo tanto $\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt\right| = \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt \leqslant \int_0^1 t^{2N+2}\,dt = \frac{1}{2N+3}$. Como $\frac{1}{2N+3}$ tiende a 0, cuando N tiende a $+\infty$, es lo mismo con $(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{(1+t^2)^2}\,dt$. Se deduce que la serie de término general u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge y además

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2}\times\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$
$$= \left[\frac{t}{2}\times\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}.}$$

Solución del ejercicio 1971 ▲000639

1. Se tiene para todo $x,y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$ (esta es la segunda formulación de la desigualdad triangular). Entonces, para todo $x \in I$: $\big||f(x)|-|f(a)|\big| \leqslant |f(x)-f(a)|$. La implicación anunciada se sigue inmediatamente, de la definición de la afirmación $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f,g son continuas entonces $\alpha f + \beta g$ es continua en I, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f+g$ y $f-g$ son continuas en I. La participación de 1. prueba entonces que $|f-g|$ es continua en I, y finalmente podemos concluir :
La función $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ es continua en I.

Solución del ejercicio 1974 ▲000642

1. $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ y $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$. Como $f(a) = f(b)$, entonces se tiene que $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$. Entonces o bien $g(a) \leqslant 0$ y $g(\frac{a+b}{2}) \geqslant 0$ o bien $g(a) \geqslant 0$ y $g(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$. Por el teorema del valor intermedio, g se anula en c, para un c entre a y $\frac{a+b}{2}$.
2. Denotemos t el tiempo (en horas) y $d(t)$ la distancia recorrida (en km) entre las instancias 0 y t. Se supone que la función $t \mapsto d(t)$ es continua. Sea $f(t) = d(t) - 4t$. Entonces $f(0) = 0$ y por hipótesis $f(1) = 0$. Apliquémosla pregunta precedente con $a = 0$, $b = 1$. Existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $g(c) = 0$, es decir $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$. Entonces $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$. Así entre c y $c + \frac{1}{2}$, (sea 1/2 hora), la persona recorre exactamente 2 km.

Solución del ejercicio 1975 ▲000643

Existe $x < 0$ tal que $f(x) < 0$ y $y > 0$ tal que $f(y) > 0$, de acuerdo con teorema de valores intermediarios, existe $z \in]x, y[$ tal que $f(z) = 0$. Entonces f se anula. Los polinomios de grado impar satisfacen las propiedades de los límites, por lo tanto se anulan. Esto es falso, en general, para los polinomios de grado par, por ejemplo observar $f(x) = x^2 + 1$.

Solución del ejercicio 1977 ▲000645

Como $f(x)^2 = 1$, entonces $f(x) = \pm 1$. ¡Cuidado! Esto no significa que la función es constante igual a 1 o -1. Se supone, por ejemplo, que existe x tal que $f(x) = +1$. Demostrar que f es constante igual a $+1$. Si existe $y \neq x$ tal que $f(y) = -1$, entonces f es positiva en x, negativa en y y continua en I. Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe z entre x e y tal que $f(z) = 0$, lo que contradice $f(z)^2 = 1$. Entonces f es constante igual a $+1$.

Solución del ejercicio 1978 ▲000646

Denotemos ℓ el límite de f en $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A \in \mathbb{R} \ x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Se fija $\varepsilon = +1$, se obtiene un A correspondiente tal que para $x > A$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. Se viene de demostrar que f es acotada "en infinito". La función f es continua en el intervalo cerrado acotado $[0, A]$, por lo tanto f es acotada en este intervalo : existe m, M tales que para todo $x \in [0, A]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Tomado $M' = \max(M, \ell + 1)$, y $m' = \min(m, \ell - 1)$ se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$, $m' \leqslant f(x) \leqslant M'$. Entonces f es acotada en $\mathbb{R}$. La función no llega necesariamente a sus cotas : observar $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Solución del ejercicio 1985 ▲000653

1. Si $f(0) = 0$ y es finito, ¡se ha encontrado el punto fijo! Si no $f(0)$ no es nulo. Entonces $f(0) > 0$ y $0 \in E$ y E no vacío.
2. Ahora E es una parte de $[0, 1]$ no vacía, así $\sup E$ existe y es finito. Denotemos $c = \sup E \in [0, 1]$. Se va a demostrar que c es un punto fijo.

3. Se aproxima aquí $c = \sup E$ por elementos de E : Sea (x_n) una sucesión de E tal que $x_n \to c$ y $x_n \leqslant c$. Tal sucesión existe a partir de las propiedades de $c = \sup E$. Como $x_n \in E$, entonces $x_n < f(x_n)$. Y como f es creciente $f(x_n) \leqslant f(c)$. Así para todo n, $x_n < f(c)$; como $x_n \to c$, entonces en el límite se tiene $c \leqslant f(c)$.
4. Si $c = 1$, entonces $f(1) = 1$ y se tiene el punto fijo. Si no, se utiliza ahora el hecho de que los elementos superiores a $\sup E$ no están en E : Sea (t_n) una sucesión tal que $t_n \to c$, $t_n \geqslant c$ y tal que $f(t_n) \leqslant t_n$. Tal sucesión existe porque de lo contrario c no es igual a $\sup E$. Se tiene $f(c) \leqslant f(t_n) \leqslant t_n$ y por lo tanto, en el límite $f(c) \leqslant c$. Se concluye que $c \leqslant f(c) \leqslant c$, por lo tanto $f(c) = c$ y c es un punto fijo de f.

Solución del ejercicio 1992 ▲000660

1. Sea $x \in [0,1]$ y $y = f(x) \in [0,1]$. Entonces $f(y) = y$, pues $f(f(x)) = f(x)$ y $E_f \neq \varnothing$. Se viene de demostrar que $I = f([0,1])$ está incluido en E_f.
2. Demostrar que recíprocamente E_f está incluido en I. Sea $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$, entonces $x \in I = f([0,1])$ (pues $x = f(x)$!). Así $E_f = I = f([0,1])$. Pero la imagen del intervalo $[0,1]$ por la función continua f es un intervalo entonces E_f es un intervalo.
3. El recíproco es cierto : una función continua para la cual $E_f = f([0,1])$ verifica también $f \circ f = f$. En efecto, para $x \in [0,1]$ y $y = f(x)$, entonces $y \in f([0,1])$, por lo tanto $y \in E_f$. Entonces $f(y) = y$, dicho de otro modo $f(f(x)) = f(x)$.

   Las funciones continuas que satisfacen $f \circ f = f$ son, por lo tanto exactamente las funciones continuas tales que $E_f = f([0,1])$. Para tal función si se denota $[a,b] = E_f$, entonces f se define en $[0,a]$ para cualquier función continua, tomando sus valores entre a y b, y vale a en a : $f([0,a]) \subset [a,b]$ y $f(a) = a$. Es entonces definida por la identidad en $[a,b]$: para todo $x \in [a,b]$, $f(x) = x$. Y finalmente en $[b,1]$ se define para toda función continua tomando sus valores entre a y b, y vale b en b : $f([b,1]) \subset [a,b]$ y $f(b) = b$.

Solución del ejercicio 1994 ▲000662

No, por ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Con $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. f no es continua (en 0), pero para todo a, b y para todo $y \in [f(a), f(b)]$, existe $x \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$.

Solución del ejercicio 2001 ▲000669

1. Para todo $x \in]a,b[$, se tiene $x \in [a,b]$, por lo tanto $f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$. En consecuencia $\sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$ es una cota superior de f en el intervalo $]a,b[$, entonces es mayor que el más pequeño de los mayorantes : $\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} f(t)$.
2. f es continua en un intervalo cerrado y acotado, entonces es acotada y alcanza sus límites. Sea x_0 el real donde se alcanza el máximo : $f(x_0) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, consideremos la sucesión $a_n = a + 1/n$. Para $n \geqslant \frac{1}{b-a}$ se tiene $a_n \in [a,b]$, por lo que se puede considerar la sucesión $(f(a_n))_{n \geqslant \frac{1}{b-a}}$. Por lo tanto a_n tiende a a, cuando n tiende a $+\infty$, y como f es continua, esto implica que $f(a_n)$ tiende a $f(a)$, cuando n tiende a $+\infty$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a_n) \leqslant f(x_0)$, lo que implica $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.

— si $x_0 = b$ se obtiene el resultado de la misma manera considerando la sucesión $b_n = b - 1/n$.
— si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ es mayorada por el sup de f sobre $]a,b[$, por lo tanto

$$f(x_0) \leqslant \sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = f(x_0)$$

por lo tanto, $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.

3. Con la función g, se tiene $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ porque para cada $x \in]0,1[$, $g(x) = 0$, y $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x) = 1$, pues $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. La propiedad demostrada anteriormente no es cierta en nuestro caso, porque la función g no satisface la condición esencial de ser continua.

Solución del ejercicio 2012 ▲003856

1. $f(x) - x$ cambia de signo entre 0 y 1.
2. Si no $f - g$ es de signo constante, por ejemplo positivo. Si a es el mayor punto fijo de f, entonces $g(a) > a$ y $g(a)$ es también un punto fijo de f, absurdo.

Solución del ejercicio 2014 ▲003858

Poniendo $b = f(a)$ se tiene $(f(a)-a)+(f(b)-b) = 0$, por lo tanto $x \mapsto f(x)-x$ se anula entre a y b. Igualmente, si existe $k \in \mathbb{N}^*$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que $f^k(a) = a$, entonces $(f(a)-a)+(f^2(a)-f(a))+\cdots+(f^k(a)-f^{k-1}(a)) = 0$, por lo tanto $f(x)-x$ se anula entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ y $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.

Solución del ejercicio 2017 ▲003861

1. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que f es discontinua en a. Existe una sucesión a_n tal que $a_n \to a$ y $|f(a_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. Entonces $f(a) \pm \varepsilon$ tiene una infinidad de antecedentes.
2.

Solución del ejercicio 2025 ▲003869

Si f no es idénticamente nula, entonces $f(0) = \pm 1$ y f es par, de signo constante. Por recurrencia, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(px) = \pm f^{p^2}(x) \Rightarrow$ por densidad, $f(x) = \pm\lambda^{x^2}$.

Solución del ejercicio 2026 ▲003870

$\omega(\delta) \to 0 \Leftrightarrow f$ (cuando $\delta \to 0^+$) es uniformemente continua. Continuidad en $\delta > 0$: se observa que ω es creciente así $\omega(\delta^-)$ y $\omega(\delta^+)$ existen y encuadran $\omega(\delta)$. Si $\delta_n \to \delta^+$ (cuando $n \to \infty$), sean x_n, y_n tales que $\omega(\delta_n) = |f(x_n) - f(y_n)|$ y $|x_n - y_n| \leqslant \delta_n$. Se extrae de (x_n, y_n) una sucesión convergente a (x,y), con $|x-y| \leqslant \delta$ y $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta^+)$, de donde $\omega(\delta^+) \leqslant \omega(\delta)$, luego $\omega(\delta^+) = \omega(\delta)$. Se tiene también $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|$ tal que $|x-y| < \delta\} \leqslant \omega(\delta^-)$, de donde $\omega(\delta^-) = \omega(\delta)$.

Solución del ejercicio 2027 ▲003871

f admite puntos fijos porque la aplicación $x \mapsto f(x) - x$ cambia de signo entre 0 y 1. Si E es el conjunto de puntos fijos de f, entonces E es estable por g, por lo tanto $f - g$ tiene signos opuestos en $\min(E)$ y $\max(E)$.

Solución del ejercicio 2028 ▲003872

1. No. Si φ es lipschitziana, entonces $\varphi(x) = O(\|x\|)$, cuando $\|x\|$ tiende a infinito, por lo que toda función f, con un decrecimiento suficientemente rápido hacia $-\infty$ no es minorable por una función lipschitziana. Contraejemplo explícito : $f(x) = -\|x\|^2$.
2. CNS : $x \mapsto f(x) + k\|x\|$ es minorada.
3. Se define $\varphi(x) = \sup\{g(x),\ g\ k\text{-lipschitziana minorando } f\}$. Es suficiente de verificar que φ es k-lipschitziana, será entonces la función más grande k-lipschitziana minorando f.

   Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y g_x, g_y funciones k-lipschitzianas minorando f tales que $g_y(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_x(x) + \varepsilon$ y $g_x(y) \leqslant \varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon$. Se tiene :

   $$\varphi(y) \leqslant g_y(y) + \varepsilon \leqslant g_y(x) + k\|x-y\| + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + k\|x-y\| + \varepsilon,$$
   $$\varphi(y) \geqslant g_x(y) \geqslant g_x(x) - k\|x-y\| \geqslant \varphi(x) - k\|x-y\| - \varepsilon.$$

   Entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k\|x-y\| + \varepsilon$ y se hace tender ε hacia 0^+.

Solución del ejercicio 2029 ▲003873

Sea para $x > 0$, $\ell(x) = \lim_{n \to +\infty} f(nx)$. Se tiene $\ell(kx) = \ell(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, de donde también para todo $k \in \mathbb{Q}^{+*}$. Demostrar entonces que $f(x) \to \ell(1)$, cuando $x \to +\infty$: sea $\varepsilon > 0$ y δ asociada en la definición de la continuidad uniforme de f. Se escoge un racional $\alpha \in]0, \delta[$ y un entero N tal que $|f(n\alpha) - \ell(1)| = |f(n\alpha) - \ell(\alpha)| \leqslant \varepsilon$, para todo $n \geqslant N$. Entonces $|f(x) - \ell(1)| \leqslant 2\varepsilon$, para todo $x \geqslant N\alpha$.

Solución del ejercicio 2030 ▲005382

Existe $a > 0$ tal que f está definida y es continua en $[a, +\infty[$.
1er caso. Se supone que ℓ es real. Sea $\varepsilon > 0$.

$$\exists A_1 \geqslant a / \ \forall X \in [a, +\infty[,\ (X \geqslant A_1 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(X+1) - f(X) < \ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Sea $X \geqslant A_1$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1) - f(X+k)) = f(X+n) - f(X) < \sum_{k=0}^{n-1}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}),$$

y por lo tanto, se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1 \geqslant a / \ \forall X \geqslant A_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^N *,\ n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(X+n) - f(X) < n(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Sea de nuevo $\varepsilon > 0$. Sea entonces $x \geqslant A_1 + 1$, luego $n = E(x - A_1) \in \mathbb{N}^*$ y $X = x - n$. Se tiene $X = x - E(x - A_1) \geqslant x - (x - A_1) = A_1$ y entonces $n(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < f(x) - f(x-n) < n(l + \frac{\varepsilon}{2})$ o aún

$$\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Así,

$$1 - \frac{A_1 + 1}{x} = \frac{x - A_1 - 1}{x} \leqslant \frac{n}{x} = \frac{E(x - A_1)}{x} \leqslant \frac{x - A_1}{x} = 1 - \frac{A_1}{x},$$

y como $1-\frac{A_1+1}{x}$ y $1-\frac{A_1}{x}$ tienden a 1, cuando x tiende a $+\infty$, se deduce que $\frac{n}{x}$ tiende a 1, cuando x tiende a $+\infty$.
Después, ya que f es continua en el segmento $[A_1, A_1+1]$, f es acotada en este segmento. Por lo tanto $n \leqslant x - A_1 < n+1$ se escribe aún $A_1 \leqslant x-n < A_1+1$ y entonces, poniendo $M = \sup\{|f(t)|, t \in [A_1, A_1+1]\}$, se tiene $\left|\frac{x-n)}{x}\right| \leqslant \frac{M}{x}$ que tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.
En resumen, $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell - \frac{\varepsilon}{2})$ y $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2})$ tienden respectivamente a $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ y $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$, cuando x tiende a $+\infty$. Se puede entonces encontrar un real $A_2 \geqslant a$ tal que $x \geqslant A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) > (\ell - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon$ y un real $A_3 \geqslant a$ tal que $x \geqslant A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x}(\ell + \frac{\varepsilon}{2}) < \ell + \varepsilon$.
Sea $A = \max(A_1, A_2, A_3)$ y $x \geqslant A$. Se tiene $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$. Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0$, $(\exists A \geqslant a / \forall x \geqslant A, \ \ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$ y entonces $\lim_{x \to +\infty} = \ell$.
2o caso. Se supone $\ell = +\infty$ (si $\ell = -\infty$, reemplazar f por $-f$). Sea $B > 0$. $\exists A_1 \geqslant a / \forall X \geqslant A_1, \ f(X+1) - f(X) \geqslant 2B$. Para $X \geqslant A_1$ y $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene : $f(X+n) - f(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(X+k+1) - f(X+k)) \geqslant 2nB$.
Sean $x \geqslant 1 + A_1$, $n = E(x - A_1)$ y $X = x - n$. Se tiene $f(x) - f(x-n) \geqslant 2nB$ y entonces,

$$\frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x},$$

que tiende a $2B$, cuando x tiende a $+\infty$ (procedimiento idéntico a 1er caso). Entonces $\exists A \geqslant A_1 > a$ tal que $x \geqslant A \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x} > B$.
Finalmente : $(\forall B > 0, \ \exists A > a / \ (\forall x \geqslant A, \ \frac{f(x)}{x} > B$ y entonces, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Solución del ejercicio 2031 ▲005383

Para $x \neq 0$, se escribe $g(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$. f se define en un vecindario de 0 y por lo tanto, existe $a > 0$ tal que $]-a, a[\subset D_f$. Pero entonces, $]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[\setminus \{0\} \subset D_g$. Sea $x \in]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[\setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})) + f(\frac{x}{2^n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g(\frac{x}{2^{k+1}}) + f(\frac{x}{2^n}).$$

Así, para $x \in]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[\setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que por hipótesis, g tiende a 0, cuando x tiende a 0,

$$\exists \alpha \in]0, \frac{a}{2}[/ \ \forall X \in]-\alpha, \alpha[, \ |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, para $x \in]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ y para k en $N*$, $\frac{x}{2^k}$ está en $]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ y consecuentemente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g(\frac{x}{2^{k+1}})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{1}{2^n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y entonces, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|$. Se ha así demostrado que

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Pero, a x fijado, $\frac{f(x/2^n)}{x}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Entonces, se puede elegir n tal que $\frac{f(x/2^n)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ y se tiene entonces $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in D_f,\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra que (f es derivable en 0 y que) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Solución del ejercicio 2032 ▲005384

$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ y $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f-g+|f-g|)$ son continuas en x_0 en virtud de teoremas generales.

Solución del ejercicio 2033 ▲005385

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $z \in A$. $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$. Por tanto, $\forall z \in A,\ |x-z| \geqslant d(x,A)$ y entonces $d(x,A) - |x-y|$ es una cota inferior de $\{|y-z|,\ z \in A\}$. Así, $d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A)$. Se ha demostrado que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ d(x,A) - d(y,A) \leqslant |y-x|.$$

Cambiando los roles de x e y, también se ha demostrado que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(y,A) - d(x,A) \leqslant |y-x|$. Finalmente, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||f(y) - f(x)| \leqslant |y-x|$. Así, f es, por lo tanto 1-lipschitziana y, en particular continua en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 2034 ▲005386

Sea $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Para $x \neq 5$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5}\right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5| \cdot |x_0-5|}.$$

Después, para $x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[$, se tiene $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2}[(>0)$, y entonces,

$$\forall x \in]x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}[,\ |f(x) - f(x_0)| = \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0|.$$

Sean $\varepsilon > 0$, luego $\alpha = \min\{\frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\}(>0)$.

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0| < \frac{28}{(x_0-5)^2}\frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28} = \varepsilon.$$

Se ha constatado que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\},\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. f es, por lo tanto continua en $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Solución del ejercicio 2035 ▲005387

Sea χ la función característica de $\mathbb{Q}$. Sea x_0 un real. Se observa que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0+\frac{1}{n})$ existe, $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0+\frac{\pi}{n})$ existe y $\lim_{n\to+\infty} \chi(x_0+\frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to+\infty} \chi(x_0+\frac{\pi}{n})$ (aunque $\lim_{n\to+\infty} x_0+\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} x_0+\frac{\pi}{n} = x_0$. Así, para todo real $x_0 \in \mathbb{R}$, la función característica de $\mathbb{Q}$ no tiene límite en x_0 y por lo tanto, es discontinua en x_0.

Solución del ejercicio 2036 ▲005388

Sea a un real estrictamente positivo. Ya se puede señalar que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = 0$. Entonces, si f tiene un límite cuando x tiende a a, solo puede ser 0 y f es, por lo tanto discontinua en todo racional estrictamente positivo.
a designa siempre un número real fijo estrictamente positivo. Sea $\varepsilon > 0$ y sea x un real estrictamente positivo tal que $f(x) \geqslant \varepsilon$. x es necesariamente racional, de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros naturales no nulos primos entre sí verificando $\frac{1}{p+q} \geqslant \varepsilon$ y entonces

$$2 \leqslant p+q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pero solo existe un número finito de pares de números naturales no nulos (p,q) verificando estas desigualdades y por lo tanto, solo existe un número finito de reales estrictamente positivos x tales que $f(x) \geqslant \varepsilon$. Así, $\exists \alpha > 0$ tal que ninguno de los reales x de $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ no verifica $f(x) \geqslant \varepsilon$. Entonces,

$$\forall a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall x > 0,\ (0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

o aún

$$\forall a > 0,\ \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = 0.$$

Así, f es continua en todo irracional y discontinua en todo lo racional.

Solución del ejercicio 2037 ▲005389

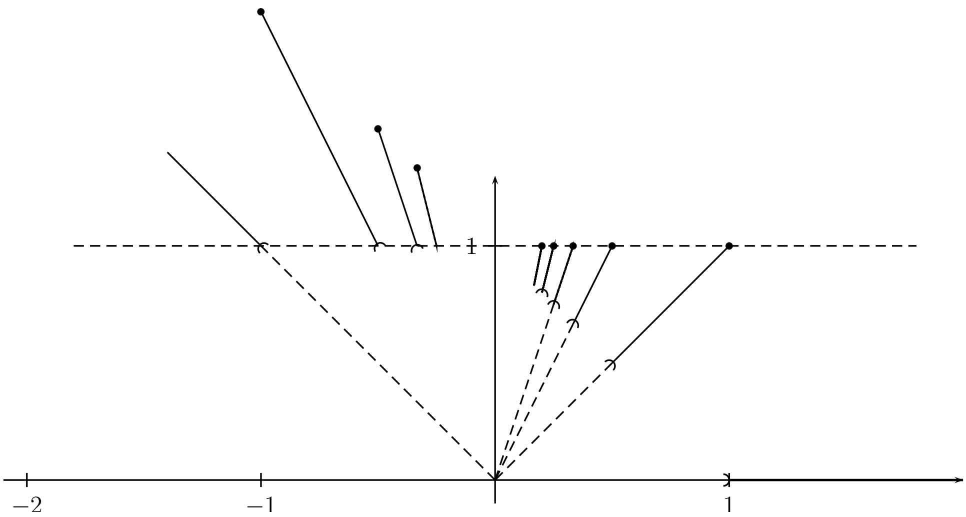
Dar primero una expresión más explícita de $f(x)$ para cada real x.
Si $x > 1$, entonces $\frac{1}{x} \in]0,1[$ y $f(x) = 0$. Si $\exists p \in \mathbb{N}^*/\ x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, $f(x) = px$. $f(0) = 1$ (y más generalmente, $\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ f(\frac{1}{p}) = 1$).
Si $x \leqslant -1$, entonces $\frac{1}{x} \in [-1,0[$ y entonces, $f(x) = -x$.
En fin, si $\exists p \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ tal que $x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, entonces $\frac{1}{p+1} < x \leqslant \frac{1}{p}(<0)$ proporciona, por función decreciente $x \mapsto \frac{1}{x}$ sobre $]-\infty,0[$, $p \leqslant \frac{1}{x} < p+1(<0)$ y entonces $f(x) = px$.
Estudio en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$ y entonces $1-x < f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$ y $1 \leqslant f(x) < 1-x$ si $x < 0$. Así,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)-1| \leqslant |x|,$$

y $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. f es, por lo tanto continua en 0. f es afín en cada intervalo de la forma $]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$, para p elemento de $\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$ y por lo tanto, es continua en estos intervalos y en particular continua por la izquierda en cada $\frac{1}{p}$. f es afín a $]-\infty,-1]$ y también en $]1,+\infty[$ y por lo tanto, es continua en estos intervalos. Queda por analizar la continuidad a la derecha en $\frac{1}{p}$, para p entero relativo no nulo dado. Pero,

$$f(\frac{1}{p}^{+}) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{p}\\ x>\frac{1}{p}}} (x(p-1)) = 1-\frac{1}{p} \neq 1 = f(\frac{1}{p}).$$

f es discontinua por la derecha en todo $\frac{1}{p}$, donde p es un entero no nulo dado. Gráfico de f :



Solución del ejercicio 2038 ▲005390

Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (\mathbb{Q}\cap[0,1])\setminus\{0,\frac{1}{2}\} \\ 1-x & \text{si } x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1] \\ 0 & \text{si } x=\frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{2} \text{ si } x=0. \end{cases}$

f es de hecho una aplicación definida en $[0,1]$, con valores en $[0,1]$.
Además, si $x \in (\mathbb{Q}\cap[0,1])\setminus\{0,\frac{1}{2}\}$, entonces $f(f(x)) = f(x) = x$.
Si $x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$, entonces $1-x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$ y $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.
En fin, $f(f(0)) = f(\frac{1}{2}) = 0$ y $f(f(\frac{1}{2})) = f(0) = \frac{1}{2}$.
Finalmente, $f\circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ y f, es una involución de $[0,1]$, es una permutación de $[0,1]$.
Sea a un real de $[0,1]$. Se observa que $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = 1-a$ y $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = a$. Entonces, si f tiene un límite en a, necesariamente $1-a=a$ y entonces $a=\frac{1}{2}$. Pero, si $a=\frac{1}{2}$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}\\ x\neq a}} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$ y entonces f es discontinua en todos los puntos $[0,1]$.

Solución del ejercicio 2039 ▲005391

Sea T un período estrictamente positivo de f. Se denota ℓ el límite de f en $+\infty$. Sea x un real. $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(x) = f(x+nT)$ y cuando n tiende a $+\infty$, se obtiene :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = \ell.$$

Así, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$ y entonces, f es constante en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 2040 ▲005392

Ver la solución de ejercicio 2033.

Solución del ejercicio 2041 ▲005395

Sea $E = \{x \in [a,b]/\ f(x) \geqslant x\}$. E es una parte no vacía de $\mathbb{R}$ (pues a está en E) y mayorada (por b). Así, E admite una cota superior c verificando $a \leqslant c \leqslant b$. Demostrar que $f(c) = c$.
Si $c = b$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E/\ b - \frac{1}{n} < x_n \leqslant b$. Porque f tiene valores en $[a,b]$ y que los x_n están en E, para todo entero natural no nulo n, se tiene

$$x_n \leqslant f(x_n) \leqslant b \quad (*).$$

Cuando n tiende a $+\infty$, la sucesión (x_n) tiende a b (teorema de los gendarmes) y entonces, f es creciente en $[a,b]$, la sucesión $(f(x_n))$ tiende a $f(b^-) \leqslant f(b)$. Pasando al límite cuando n tiende a $+\infty$ en $(*)$, se obtiene entonces $b \leqslant f(b^-) \leqslant f(b) \leqslant b$ y entonces $f(b) = b$.
Finalmente, en este caso, b es un punto fijo de f. Si $c \in [a,b[$, por definición de c, para x en $]c,b]$, $f(x) < x$ (pues x no está en E) y pasando al límite cuando x tiende a c para valores superiores y según las propiedades usuales de las funciones crecientes, se obtiene : $f(c)(\leqslant f(c+)) \leqslant c$.
Por otra parte, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E/\ c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c$. Así x_n está en E y se tiene $f(x_n) \geqslant x_n$. Cuando n tiende a $+\infty$, se obtiene : $f(c) \geqslant f(c^-) \geqslant c$.
Finalmente, $f(c) = c$ y en todos los casos, f admite al menos un punto fijo.

Solución del ejercicio 2042 ▲005396

Porque f es creciente en $[a,b]$, se sabe que f admite en todo punto x_0 de $]a,b[$ un límite izquierdo real y un límite derecho real que satisfacen $f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$, luego un límite a la derecha en a elemento de $[f(a),+\infty[$ y un límite a la izquierda en b elemento de $]-\infty, f(b)]$.
Si f es discontinua en un x_0 de $]a,b[$, entonces se tiene $f(x_0^-) < f(x_0)$ o $f(x_0) < f(x_0^+)$. Pero, si por ejemplo $f(x_0^-) < f(x_0)$, entonces, $\forall x \in [a,x_0[\ (\neq \varnothing),\ f(x) \leqslant f(x_0-)$ y $\forall x \in [x_0,b],\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
Así $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a,b]) = \varnothing$ que se excluye, ya que por otro lado $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \varnothing$ y $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (el proceso es el mismo si $f(x_0^+) > f(x_0)$).
Entonces, f es continua en $]a,b[$. Por un proceso similar, f es también continua en a o b y por lo tanto, en $[a,b]$.

Solución del ejercicio 2043 ▲005398

Pongamos $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Sea $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Sea $(x,y) \in [A,+\infty[^2$, entonces, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3}(< \varepsilon)$. Por otra parte, f es continua en el segmento $[0,A]$ y por lo tanto, es uniformemente continua en este segmento por el teorema de HEINE.
Así, $\exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,A]^2,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}(< \varepsilon)$.
Resumiendo. $\alpha > 0$ dado, sean x y y dos reales de $[0,+\infty[$ verificando $|x-y| < \alpha$.
Si $(x,y) \in [0,A]^2$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
Si $(x,y) \in [A,+\infty[^2$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Si en fin se tiene $x \leqslant A \leqslant y$, entonces, ya que $|A-x| \leqslant |x-y| < \alpha$, se tiene $|f(x)-f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y porque A e y están en $[A,+\infty[$, se tiene $|f(y)-f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Pero entonces,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(A)| + |f(y)-f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$. f es, por lo tanto uniformemente continua en $[0,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2044 ▲005401

Sea T un período estrictamente positivo de f. f es continua en el segmento $[0,T]$ y por lo tanto, es acotada en este segmento. f es entonces acotada en $\mathbb{R}$ por T-periodicidad.
Sea $\varepsilon > 0$. f es continua en el segmento $[0,T]$ y entonces, de acuerdo con teorema de Heine, f es uniformemente continua en este segmento. Entonces,

$$\exists \alpha \in]0,T[/\ \forall (x,y) \in [0,T],\ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean x y y dos reales tales que $|x-y| < \alpha$. si existe un entero natural k tal que $(x,y) \in [kT,(k+1)T]$, entonces $x-kT \in [0,T]$, $y-kT \in [0,T]$, luego $|(x-kT)-(y-kT)| = |y-x| < \alpha$ y $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Si no, suponiendo por ejemplo que $x \leqslant y$, porque se elige $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}/\ (k-1)T \leqslant x \leqslant kT \leqslant y \leqslant (k+1)T.$$

Pero entonces, $|x-kT| = |y-x| < \alpha$ y $|y-kT| \leqslant |y-x| < \alpha$. Así,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(kT)| + |f(y)-f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En todos los casos, si $|x-y| < \alpha$, entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon).$$

f es, por lo tanto uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 2045 ▲000670

Comenzar por el final, encontrar un tal δ demuestra que

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-(-3)| < \varepsilon$$

dicho de otro modo el límite de f en $x_0 = 0$ es -3. Como $f(0) = -3$, entonces esto también muestra que f es continua en $x_0 = 0$.

Dado un $\varepsilon > 0$, se debe encontrar este famoso δ. En primer lugar

$$|f(x)+3| = \left|\frac{2x+3}{3x-1} + 3\right| = \frac{11|x|}{|3x-1|}.$$

Entonces la condición se convierte en :

$$|f(x)+3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11|x|}{|3x-1|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \varepsilon\frac{|3x-1|}{11}.$$

Como queremos evitar los problemas en $x = \frac{1}{3}$, donde la función f no está definida, nos colocamos "lejos" de $\frac{1}{3}$.
Consideremos solamente los $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \frac{1}{6}$. Se tiene :

$$|x| < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x < +\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < 3x-1 < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < |3x-1|.$$

Y ahora vamos a explicitar δ : tomemos $\delta < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}$. Entonces, para $|x| < \delta$ se tiene

$$|x| < \delta = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} < \varepsilon \cdot |3x-1| \cdot \frac{1}{11}$$

lo que implica por las equivalencias precedentes que $|f(x)+3| < \varepsilon$.
Hay justo una pequeña corrección a aportar a nuestro δ : en los cálculos hemos supuesto que $|x| < \frac{1}{6}$, pero nada garantiza que $\delta \leqslant \frac{1}{6}$ (pues δ depende de ε que bien podría ser muy grande, aunque normalmente son los ε pequeños que interesan). Al final el δ que sirve es, por lo tanto :

$$\delta = \min\{\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{22}\}.$$

Observación final : por supuesto se sabe desde el principio que f es continua en $x_0 = 0$. En efecto, f es el cociente de dos funciones continuas, el denominador no se anula en x_0. Así sabemos desde el principio que un tal δ existe, pero aquí se ha hecho más, se ha encontrado una fórmula explícita para este δ.

Solución del ejercicio 2046 ▲000671

---

1. El gráfico se compone de una parte recta por encima de las $x \in]-\infty, 1[$; de una porción de una parábola para los $x \in [1,4]$, de una porción de otra parábola para los $x \in]4, +\infty[$. (Esta última rama es de hecho una parábola, pero no es en el sentido "usual", de hecho, si $y = 8\sqrt{x}$, entonces $y^2 = 64x$ y esta es de hecho la ecuación de una parábola.)

   Se "ve" inmediatamente, en el gráfico que la función es continua (las porciones se pegan !). Se "ve" también que la función es biyectiva.

2. La función es continua en $]-\infty, 1[$, $]1,4[$ y $]4,+\infty[$ porque en cada uno de estos intervalos está definida por una función continua. Es necesario examinar lo que pasa en $x = 1$ y $x = 4$. Para $x < 1$, $f(x) = x$, entonces el límite a la izquierda (es decir $x \to 1$, con $x < 1$) es, por lo tanto $+1$. Para $x \geqslant 1$, $f(x) = x^2$ por lo que el límite a la derecha también se cumple $+1$. Como se tiene $f(1) = +1$, entonces los límites a la izquierda, a la derecha y el valor en 1 coinciden, por lo tanto f es continua en $x = 1$. El mismo trabajo en $x = 4$. Para $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$ por lo que el límite a la izquierda en $x = 4$ es $+16$. También se tiene $f(4) = +16$. Finalmente, para $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, por lo que el límite a la derecha en $x = 4$ es también $+16$. Así f es continua en $x = 4$.

   Conclusión : f es continua en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto f es continua en $\mathbb{R}$.

3. El gráfico debe ayudar : en primer lugar ayuda a ver que f es de hecho biyectiva y que la fórmula de la biyección recíproca depende de intervalos. Recordatorio : la gráfica de la biyección recíproca f^{-1} se obtiene como simétrico del gráfico de f, con respecto a la bisectriz de la ecuación $(y = x)$ (en un marco ortonormal).

   Aquí se busca dar directamente la fórmula de f^{-1}. Para $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = x$. Entonces la biyección inversa está definida por $f^{-1}(y) = y$, para todo $y \in]-\infty, 1[$. Para $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$. La imagen del intervalo $[1,4]$ es el intervalo $[1,16]$. Así para cada $y \in [1,16]$, la biyección inversa está definida por $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Finalmente, para $x \in]4,+\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. La imagen del intervalo $]4,+\infty[$ es, por lo tanto $]16,+\infty[$ y f^{-1} es definida por $f^{-1}(y)=\frac{1}{64}y^2$, para cada $y\in]16,+\infty[$. Se define $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de tal manera que f^{-1} sea la biyección recíproca de f.

Es un buen ejercicio de demostrar que f es biyectiva sin calcular f^{-1} : se puede por ejemplo demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva. Otro argumento es utilizar un resultado de curso : f es continua, estrictamente creciente con un límite $-\infty$ en $-\infty$ y $+\infty$ en $+\infty$, entonces es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (y se sabe también que la biyección inversa es continua).

Solución del ejercicio 2047 ▲000672

Sea $x_0\neq 0$, entonces la función f es continua en x_0, porque se expresa como un cociente de funciones continuas, donde el denominador no se anula en x_0. Queda por estudiar la continuidad en 0. Pero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1=f(0),$$

por lo tanto f es continua en 0.

Solución del ejercicio 2052 ▲000677

1. La función se define en $\mathbb{R}^*$ y es continua en $\mathbb{R}^*$. Es necesario determinar una eventual extensión por continuidad en $x=0$, es decir saber si f tiene un límite en 0.

$$|f(x)|=|\operatorname{sen} x||\operatorname{sen} 1/x|\leqslant|\operatorname{sen} x|.$$

Entonces f tiene un límite en 0 que vale 0. Así al escribir $f(0)=0$, Se obtiene una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ que es continua.

2. La función g está definida y es continua en $\mathbb{R}^*$. Estudiar la situación en 0. Es necesario notar que g es la tasa de crecimiento en 0 de la función $k(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$: en efecto, $g(x)=\frac{k(x)-k(0)}{x-0}$. Entonces si k es derivable en 0, el límite de g en 0 es igual al valor de k' en 0. Pero la función k es derivable en $\mathbb{R}$ y $k'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, por lo tanto $k'(0)=0$.
Balance : poniendo $g(0)=0$ se obtiene una función g definida y continua en $\mathbb{R}$.

3. h está definida y es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{(1+x)}.$$

Entonces h tiene un límite $-\frac{1}{2}$, cuando x tiende a 1. Y así al escribir $h(1)=-\frac{1}{2}$, se define una función continua en $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la función h no se puede extender continuamente, porque en -1, h no admite un límite finito.

Solución del ejercicio 2055 ▲000680

Se fija $x\in\mathbb{R}$ y sea $y=x/2$, como $f(y)=f(2y)$ se obtiene $f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Luego tomando $y=\frac{1}{4}x$, se obtiene $f(\frac{1}{4}x)=f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Por una inducción fácil se tiene

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad f\left(\frac{1}{2^n}x\right)=f(x).$$

Denotemos (u_n) la sucesión definida por $u_n = \frac{1}{2^n}x$, entonces $u_n \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Por la continuidad de f en 0 se sabe entonces que : $f(u_n) \to f(0)$, cuando $n \to +\infty$. Pero $f(u_n) = f(\frac{1}{2^n}x) = f(x)$, por lo tanto $(f(u_n))_n$ es una sucesión constante igual a $f(x)$, y entonces el límite de esta sucesión es $f(x)$! Entonces $f(x) = f(0)$. Como este razonamiento es válido para todo $x \in \mathbb{R}$ se ha demostrado que f es una función constante.

Solución del ejercicio 2065 ▲000609

Por lo general, para calcular límites que involucran sumas de raíces cuadradas, es útil hacer intervenir la "expresión conjugada" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Las raíces al numerador han "desaparecido" utilizando la identidad $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$. Aplicar esto en un ejemplo :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} = \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} = \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}. \end{aligned}$$

Y se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Así el estudio del límite de f en 0 es el mismo que la de la función $x \mapsto x^{m-n}$. Se distinguen varios casos para el límite de f en 0.

- Si $m > n$, entonces x^{m-n}, y entonces $f(x)$, tiende a 0.
- Si $m = n$, entonces x^{m-n} y $f(x)$ tienden a 1.
- Si $m < n$, entonces $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$, con $k = n - m$ un exponente positivo. Si k es par entonces los límites a la derecha y a la izquierda de $\frac{1}{x^k}$ son $+\infty$. Para k impar el límite a la derecha vale $+\infty$ y el límite a la izquierda es $-\infty$. Conclusión para $k = n - m > 0$ par, el límite de f en 0 vale $+\infty$ y para $k = n - m > 0$ impar f *no tiene límite en* 0 porque los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales.

Solución del ejercicio 2068 ▲000612

1. Sea $p > 0$ el periodo : para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Por una inducción fácil, se demuestra :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+np) = f(x).$$

   Como f no es constante existe $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) \neq f(b)$. Denotemos $x_n = a + np$ y $y_n = b + np$. Se supone, por contradicción, que f tiene un límite ℓ en $+\infty$. Como $x_n \to +\infty$, entonces $f(x_n) \to \ell$. Pero $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, por lo tanto $\ell = f(a)$. Así mismo con la sucesión (y_n) : $y_n \to +\infty$, por lo tanto $f(y_n) \to \ell$ y $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, por lo tanto $\ell = f(b)$. Como $f(a) \neq f(b)$ se obtiene una contradicción.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y mayorada por $M \in \mathbb{R}$. Denotemos

$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

F es un conjunto (no vacío) de $\mathbb{R}$, se denota $\ell = \sup F$. Como $M \in \mathbb{R}$ es una cota superior de F, entonces $\ell < +\infty$. Sea $\varepsilon > 0$, por las propiedades de sup existe $y_0 \in F$ tal que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Como $y_0 \in F$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como f es creciente entonces :

$$\forall x \geqslant x_0, \quad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$

Además, por la definición de ℓ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leqslant \ell.$$

Las dos propiedades anteriores se escriben :

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$

Lo que expresa que el límite de f en $+\infty$ es ℓ.

Solución del ejercicio 2072 ▲000616

1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ esta expresión vale $x+2$, por lo que el límite a la derecha en $x = 0$ es $+2$.
   Si $x < 0$ la expresión vale -2, por lo que el límite a la izquierda en $x = 0$ es -2.
   Los límites a la derecha y a la izquierda son diferentes, y no existe límite en $x = 0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$, para $x < 0$. Entonces el límite cuando $x \to -\infty$ es $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, cuando $x \to 2$ esta expresión tiende a 4.
4. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. Cuando $x \to \pi$ el límite es entonces 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. Cuando $x \to 0$ el límite vale $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Cuando $x \to +\infty$, el límite vale 0.
7. Se tiene la igualdad $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Para $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ esto da :

   $$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

   Cuando $x \to 0$, entonces $a \to 1$ y el límite buscado es $\frac{1}{3}$.
   Otro método : si se sabe que el límite de una tasa de crecimiento corresponde a la derivada, se tiene un método menos inteligente. Recordar (o anticipación en un próximo capítulo) : para una función f derivable en a, entonces

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

   Para la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ teniendo $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ esto da en $a = 0$:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Entonces si $x\to 1$ el límite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ es n y el límite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 es $\frac{1}{n}$. El método con la tasa de crecimiento también funciona muy bien aquí. Sea $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$ y $a=1$. Entonces $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tiende a $f'(1)=n$.

Solución del ejercicio 2079 ▲000623

1. $-\infty$	2. 0	3. $+\infty$	4. $+\infty$	5. $\frac{3}{2}$	6. $-\infty$	7. 0	8. 0	9. 0	10. 0
11. -2	12. $-\infty$	13. 1	14. e^4	15. 1	16. e	17. e	18. 0	19. 0	20. 0

Solución del ejercicio 2084 ▲000628

1. Demostrar primero que el límite de
$$f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$
en α es $k\alpha^{k-1}$, k es un entero fijo. Un cálculo muestra que $f(x)=x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$; en efecto, $(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1})(x-\alpha)=x^k-\alpha^k$. Entonces el límite en $x=\alpha$ es $k\alpha^{k-1}$. Otro método consiste en decir que $f(x)$ es la tasa de crecimiento de la función x^k, y por lo tanto, el límite de f en α es exactamente el valor de la derivada de x^k en α, sea $k\alpha^{k-1}$. Habiendo hecho esto volvemos al límite del ejercicio : como
$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\times\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$
El primer término del producto tiende a $(n+1)\alpha^n$ y el segundo término, es el inverso de una tasa de crecimiento, tiende a $1/(n\alpha^{n-1})$. Entonces el límite buscado es
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La función $f(x)=\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(\cos 2x-\cos x)}$ también se escribe $f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x-\cos x)}$. Por lo tanto $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Se define $u=\cos x$, entonces
$$f(x)=\frac{1-u}{u(2u^2-u-1)}=\frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)}=\frac{1}{u(-1-2u)}$$
Cuando x tiende a 0, $u=\cos x$ tiende a 1, y entonces $f(x)$ tiende a $-\frac{1}{3}$

3. $$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}$$
Cuando $x\to+\infty$, entonces $\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ y $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}\to 0$, entonces el límite deseado es $\frac{1}{2}$.

4. La función se escribe

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}=\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Denotemos $g(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$, entonces utilizando la expresión conjugada

$$g(x)=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Así $g(x)$ tiende a 0, cuando $x\to\alpha^+$. Y ahora $f(x)=\frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tiende a $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Para todo real y se tiene la doble desigualdad $y-1<E(y)\leqslant y$. Entonces, para $y>0$, $\frac{y-1}{y}<\frac{E(y)}{y}\leqslant 1$. Se deduce que cuando y tiende a $+\infty$, entonces $\frac{E(y)}{y}$ tiende 1. Se obtiene el mismo resultado cuando y tiende a $-\infty$. Usando $y=1/x$, y haciendo tender x hacia 0, entonces $xE(\frac{1}{x})=\frac{E(y)}{y}$ tiende a 1.

6. $\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{e^x-e^2}{x-2}\times\frac{1}{x+3}.$

   El límite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vale e^2 ($\frac{e^x-e^2}{x-2}$ es la tasa de crecimiento de la función $x\mapsto e^x$ en el valor $x=2$), el límite deseado es $\frac{e^2}{5}$.

7. Sea $f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\operatorname{sen}^2 x}$. Se supone $\alpha\geqslant 4$, entonces probamos que f no tiene límite en $+\infty$. En efecto, para $u_k=2k\pi$, $f(2k\pi)=(2k\pi)^4$ tiende a $+\infty$, cuando k (y entonces u_k) tiende a $+\infty$. Sin embargo, para $v_k=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $f(v_k)=\frac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tiende a 0 (o hacia 1 si $\alpha=4$), cuando k (y entonces v_k) tiende a $+\infty$. Esto prueba que $f(x)$ no tiene límite cuando x tiende a $+\infty$.
   Queda el caso $\alpha<4$. Existe β tal que $\alpha<\beta<4$.

$$f(x)=\frac{x^4}{1+x^\alpha\operatorname{sen}^2 x}=\frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta}+\frac{x^\alpha}{x^\beta}\operatorname{sen}^2 x}.$$

   El numerador tiende $+\infty$, pues $4-\beta>0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tiende a 0 así como $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\operatorname{sen}^2 x$ (pues $\beta>\alpha$ y $\operatorname{sen}^2 x$ es acotada por 1). Entonces el denominador tiende a 0 (para valores positivos). El límite es, por lo tanto de tipo $+\infty/0^+$ (que no es indeterminado !) y por lo tanto, vale $+\infty$.

Solución del ejercicio 2090 ▲000634

Respuesta : $\frac{2}{3}$

Solución del ejercicio 2091 ▲000635

1. Como $-1\leqslant\operatorname{sen}\frac{1}{x}\leqslant+1$, entonces $1\leqslant 2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\leqslant+3$. Así para $x>0$, se obtiene $\frac{x}{3}\leqslant\frac{x}{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\leqslant x$.

   Se obtiene una desigualdad similar para $x<0$. Esto implica $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}=0$.

2. Sabiendo que $\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1$, cuando $t \to 0$, se puede reformular así $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$, para una función determinada μ que verifica $\mu(t) \to 1$, cuando $t \to 0$. Así $\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\mu(\mathrm{e}^{-x})$. Ahora

$$\begin{aligned}(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\mu(\mathrm{e}^{-x})\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\left(-x+\ln\mu(\mathrm{e}^{-x})\right)\right) = \exp\left(-1+\frac{\ln\mu(\mathrm{e}^{-x})}{x}\right)\end{aligned}$$

$\mu(\mathrm{e}^{-x}) \to 1$, por lo tanto $\ln\mu(\mathrm{e}^{-x}) \to 0$, por lo tanto $\frac{\ln\mu(\mathrm{e}^{-x})}{x} \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Balance : el límite es $\exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3.

4. Sabiendo $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \to 1$, cuando $x \to 0$, se reformula esto en $\mathrm{e}^x - 1 = x \cdot \mu(x)$, para una función determinada μ que verifica $\mu(x) \to 1$, cuando $x \to 0$. Esto da $\ln(\mathrm{e}^x-1) = \ln(x\cdot\mu(x)) = \ln x + \ln\mu(x)$.

$$x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}\ln x\right) = \exp\left(\frac{1}{\ln x+\ln\mu(x)}\ln x\right) = \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right).$$

Ahora $\mu(x) \to 1$, por lo tanto $\ln\mu(x) \to 0$, y $\ln x \to -\infty$, cuando $x \to 0$. Así $\frac{\ln\mu(x)}{\ln x} \to 0$. Esto da

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(\mathrm{e}^x-1)}} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{1+\frac{\ln\mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = \mathrm{e}.$$

Solución del ejercicio 2092 ▲000636

Respuesta : 1.

Solución del ejercicio 2093 ▲000637

Supongamos $a \geqslant b$. Entonces

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Por lo tanto $0 \leqslant \frac{b}{a} \leqslant 1$ y $0 \leqslant (\frac{b}{a})^x \leqslant 1$, para todo $x \geqslant 1$. Entonces $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant 1^{\frac{1}{x}}$.

Los dos términos extremos tienden hacia 1, cuando x tiende a $+\infty$ por lo que el término medio también tiende a 1.

Conclusión : si $a \geqslant b$, entonces $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a$. Si $b \geqslant a$, entonces este límite valdría b. Esto se resume en el caso general donde a, b son arbitrarios por $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a,b)$.

Solución del ejercicio 2094 ▲000638

Sea

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

$a^x\to 1$, $b^x\to 1$, por lo tanto $\frac{a^x+b^x}{2}\to 1$, cuando $x\to 0$ y se encuentra una forma indeterminada.
Se sabe que $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$. Dicho de otra manera existe una función μ tal que $\ln(1+t)=t\cdot\mu(t)$, con $\mu(t)\to 1$, cuando $t\to 0$. Aplicando esto a $g(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$ se tiene

$$g(x)=\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\mu(x)$$

donde $\mu(x)\to 1$, cuando $x\to 0$. (Se escribe para simplificar $\mu(x)$ en vez de $\mu(\frac{a^x+b^x}{2}-1)$.)

Se sabe también que $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$. En otras palabras, existe una función ν tal que $e^t-1=t\cdot\nu(t)$, con $\nu(t)\to 1$, cuando $t\to 0$. Si se aplica esto :

$$\begin{aligned}\frac{a^x+b^x}{2}-1&=\frac{1}{2}(e^{x\ln a}+e^{x\ln b})-1=\frac{1}{2}(e^{x\ln a}-1+e^{x\ln b}-1)\\&=\frac{1}{2}(x\ln a\cdot\nu(x\ln a)+x\ln b\cdot\nu(x\ln b))=\frac{1}{2}x(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b)).\end{aligned}$$

Hay que encajar todas las piezas del rompecabezas :

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}g(x)\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\cdot\mu(x)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot x(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b))\cdot\mu(x)\right)\\&=\exp\left(\frac{1}{2}(\ln a\cdot\nu(x\ln a)+\ln b\cdot\nu(x\ln b))\cdot\mu(x)\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(x)\to 1$, $\nu(x\ln a)\to 1$, $\nu(x\ln b)\to 1$, cuando $x\to 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right)=\sqrt{ab}.$$

Solución del ejercicio 2096 ▲005101

Para $x>0$, $(x^x)^x=e^{x\ln(x^x)}=e^{x^2\ln x}$ y $x^{(x^x)}=e^{x^x\ln x}$. Así,

$$\forall x>0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp(\ln x(x^2-x^x)).$$

Por tanto, $x^2-x^x=-x^x(1-x^{2-x})=-e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Cuando x tiende a $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tiende a $-\infty$. Entonces, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tiende a 1, luego x^2-x^x tiende a $-\infty$. Pero entonces, $\ln x(x^2-x^x)$ tiende a $-\infty$, luego $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp(\ln x(x^2-x^x))$ tiende a 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=0.}$$

Solución del ejercicio 2097 ▲000686

1. El denominador no se anula si $x \neq \frac{5}{2}$. Además, es necesario que el término debajo de la raíz sea positivo o cero, es decir $(2+3x)\times(5-2x)\geqslant 0$, o sea $x\in[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}]$. El conjunto de definiciones es entonces $[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}[$.
2. Es necesario que $x^2-2x-5\geqslant 0$, o sea $x\in]-\infty,1-\sqrt{6}]\cup[1+\sqrt{6},+\infty[$.
3. Es necesario que $4x+3>0$, o sea $x>-\frac{3}{4}$, el conjunto de definición es $]-\frac{3}{4},+\infty[$.

Solución del ejercicio 2101 ▲000690

Para todo $x\in\mathbb{R}$ se tiene :

$$0\leqslant|f(x)|=\frac{|\cos x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1.$$

En consecuencia, para todo $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in[-1,1]$, por lo tanto f es minorada (-1 es un minorante), mayorada (1 es un mayorante) y $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\leqslant 1$. Como $f(0)=1$ se tiene necesariamente $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)\geqslant 1$.
Conclusión :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1.$$

Solución del ejercicio 2113 ▲003883

$\alpha=\inf(A)\Rightarrow f(\alpha^+)\leqslant\alpha$ y $f(\alpha^-)\geqslant\alpha$.

Solución del ejercicio 2114 ▲003884

Se supone que existe $a,b\in\mathbb{R}$, con $a<b$ y $f(b)<f(a)$. Se denota $E=\{x\in[a,b]$ tal que $f(x)<f(a)\}$ y $c=\inf(E)$. Se tiene $c\in E$ y $c>a$, por hipótesis y por lo tanto, $f(c)=\lim_{x\to c^-} f(x)\geqslant f(a)$, absurdo.

Solución del ejercicio 2115 ▲003885

Inyectividad obvia. Monotonía : para $a<b<c$ se tiene $|a-b|<|a-c|$ y $|c-b|<|c-a|$, de donde las mismas desigualdades para $f(a),f(b),f(c)$, lo que prueba que $f(b)$ está estrictamente comprendida entre $f(a)$ y $f(c)$.
Continuidad : sea $a\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $x=a-\delta$, $y=a+\delta$ y $z=a-4\delta$. Se tiene $2\delta=|x-y|<|x-z|=3\delta$, por lo tanto $|f(x)-f(y)|<|f(x)-f(z)|$ y haciendo tender δ hacia 0^+ : $|f(a^-)-f(a^+)|\leqslant|f(a^-)-f(a^-)|=0$.
En fin : sean $x\in\mathbb{R}$, $h>0$, $z=x+h$ y $x-h<y<x$. Se tiene $|f(x)-f(y)|<|f(x)-f(x+h)|$, de donde haciendo tender y hacia $(x-h)^+$: $|f(x)-f(x-h)|\leqslant|f(x)-f(x+h)|$. Se obtiene la desigualdad inversa permutando y y z, por lo que $f(x-h)$ y $f(x+h)$ son equidistantes de $f(x)$ y, por inyectividad de f : $f(x)=\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$, lo que nos permite concluir con la continuidad de f.

Solución del ejercicio 2118 ▲003888

1. Estudiar los logs.
2. Idem.

Solución del **ejercicio 2119** ▲003889

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \frac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$. Para $x \geqslant 0$ fijado, la función $t \longmapsto \frac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ es decreciente.

Solución del **ejercicio 2122** ▲003892

1. Si si y solo si $|a| > |b|$.
2. Si si y solo si $|a| < |b|$.

Solución del **ejercicio 2123** ▲003893

$= \frac{\operatorname{ch}(nx/2)\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$.

Solución del **ejercicio 2124** ▲003894

$x = -\frac{2}{3}a$.

Solución del **ejercicio 2125** ▲003895

$2\coth 2x - \frac{1}{x}$.

Solución del **ejercicio 2126** ▲003896

$\coth\frac{x}{2} - 1$.

Solución del **ejercicio 2128** ▲003898

Sea $X = e^x$, $Y = e^y$: $\Rightarrow \begin{cases} X+Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b}. \end{cases}$ Hay soluciones si y solo si $a \geqslant \sqrt{b^2+4}$.

Solución del **ejercicio 2130** ▲003900

$= x + \ln\sqrt{2}$.

Solución del **ejercicio 2131** ▲003901

$x = \frac{5}{4}$.

Solución del **ejercicio 2132** ▲003902

1. $F(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-2x-1}{\sqrt{5}+2x+1} \right|$.

Solución del ejercicio 2133 ▲003903

1. Estudio de $x \mapsto \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \cdots + \left(\frac{a_p}{a}\right)^x$.
2. $x_a > x_b$.
3. $x_a \to \ell$. Si $\ell > 0$, $a^{a_a} \to +\infty$, pero $a_1^{x_a} + \cdots + a_p^{x_a} \to a_1^\ell + \cdots + a_p^\ell$. Entonces $\ell = 0$, y $x_a \ln a \to \ln p$.

Solución del ejercicio 2134 ▲003904

1. Para $x = 1$ se tiene $f \circ f(y) = yf(1)$, por lo tanto f es inyectiva y para $y = 1 : f(xf(1)) = f(x)$, de donde $f(1) = 1$.
2. $f(xy) = f(xf(f(y))) = f(y)f(x)$.
   Para $0 < x < 1$ se tiene $f(x^n) = f(x)^n \to +\infty$ (cuando $n \to \infty$) por lo tanto $f(x) > 1$, lo que implica por morfismo el decrecimiento de f. Finalmente, f es monótona y $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$, por lo tanto f no tiene saltos y es continua.
3. En tanto que un morfismo continuo, f es de la forma $x \mapsto x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ y la involutividad y el decrecimiento dan $\alpha = -1$.

Solución del ejercicio 2135 ▲003905

1. $4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = 2 \iff \theta \equiv \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.
2. $\operatorname{sen}\theta + \cdots + \operatorname{sen}4\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 4\operatorname{sen}(5\theta/2)\cos\theta\cos(\theta/2)$
   $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0 \iff \cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(2\pi/5)$ o $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \operatorname{sen}(2\pi/5)$
   $\Rightarrow$ módulo 2π, $\theta \in \{0, \pi, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$.
3. $\cos\theta \in \left\{-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \iff \theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ o $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$.
4. $2\operatorname{sen}(3\theta/2)\operatorname{sen}(\theta/2) = 2\operatorname{sen}(3\theta/2)\cos(3\theta/2)$
   $\iff \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ o $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ o $\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
5. $2\cos 4\theta\cos 3\theta = \cos 4\theta \iff \theta \equiv \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{4}}$ o $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{9} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$.
6. $2\cos 7\theta\cos 5\theta = \sqrt{3}\cos 5\theta \iff \theta \equiv \frac{\pi}{10} \pmod{\frac{\pi}{5}}$ o $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{42} \pmod{\frac{2\pi}{7}}$.
7. $\theta \equiv 0 \bmod \frac{\pi}{3}$ o $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}}$.
8. $\cos^3\theta\operatorname{sen}3\theta + \cos 3\theta\operatorname{sen}^3\theta = \frac{3}{4}\operatorname{sen}4\theta \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2}}$.
9. $\theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{8}}$.
10. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$ o $\theta \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
11. $\theta \equiv 0, \pm\arctan\sqrt{5} \pmod{\pi}$.

12. $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$. $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0 \iff \theta \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

    $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta \Rightarrow (\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2 + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}. \end{cases}$

    Los valores encontrados son adecuados.

13. $\tan x = \tan y = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 2136 ▲003906

1. $-\frac{2\pi}{3} < \theta \pmod{2\pi} < \frac{\pi}{3}$.
2. $2\alpha < \theta \pmod{2\pi} < 2\pi$, con $\begin{cases} \cos\alpha = 2/\sqrt{5} \\ \operatorname{sen}\alpha = 1/\sqrt{5}. \end{cases}$

Solución del ejercicio 2138 ▲003908

1. $1-\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\cos\beta+\cos\gamma = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.
2. $=1$.

Solución del ejercicio 2140 ▲003910

$\tan p - \tan q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p\cos q}$. $S_n = \begin{cases} \dfrac{\tan((n+1)\theta)-\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} & \text{si } \operatorname{sen}\theta \neq 0 \\ n & \text{si } \theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ -n & \text{si } \theta \equiv \pi \pmod{2\pi}. \end{cases}$

Solución del ejercicio 2141 ▲003911

Linealizar : $\sum = \frac{1}{4}\left(3^n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^n} - \operatorname{sen}\alpha\right)$.

Solución del ejercicio 2142 ▲003912

$\operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan} 2x = \tan x$, $\sum = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotan}\frac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{cotan} 2\alpha$.

Solución del ejercicio 2143 ▲003913

$\theta = \frac{\pi}{7}$: $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}3\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\operatorname{sen}3\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}2\theta}$.

Solución del ejercicio 2144 ▲005097

1. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Si f es par, entonces, para todo real x, $f(-x) = f(x)$. Derivando esta igualdad, se obtiene

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

y entonces f' es impar. Igualmente, si f es impar, para todo real x, se tiene $f(-x)=-f(x)$, y por derivación se obtiene para cualquier real x, $f'(-x)=f'(x)$. f' es, por lo tanto par.

$$\boxed{(f \text{ par} \Rightarrow f' \text{ impar}) \text{ y } (f \text{ impar} \Rightarrow f' \text{ par.})}$$

2. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y f una función n veces derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$. Se supone f par. Así, para todo real x, $f(-x)=f(x)$. Inmediatamente, por recurrencia, se tiene

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x)=(-1)^n f(x).$$

Esto demuestra que $f^{(n)}$ a la paridad de n, es decir que $f^{(n)}$ es una función par cuando n es un entero par y es una función impar cuando n es un entero impar. Igualmente, si f es impar y n veces derivable en $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ tiene la paridad opuesta a la de n.

3. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y impar y F una primitiva de f. Demostrar que F es par. Para x real, se escribe $g(x)=F(x)-F(-x)$. g es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$g'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x)=0.$$

g es, por lo tanto constante en $\mathbb{R}$ y consecuentemente, para todo real x, $g(x)=g(0)=F(0)-F(0)=0$. Así, g es la función nula y por lo tanto, para todo real x, $F(x)=F(-x)$. Se ha demostrado que F es par. Sin embargo, si f es par, F no es necesariamente impar. Por ejemplo, la función $f:\ x\mapsto 1$ es par, pero $F:\ x\mapsto x+1$ es una primitiva de f que no es impar.

4. Demostrar fácilmente derivando una o varias veces la igualdad : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T)=f(x)$, que las derivadas sucesivas de una función T-periódica son T-periódicas. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las primitivas. Por ejemplo, si para todo real x, $f(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, f es π-periódica, pero la función $F:\ x\mapsto \frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$, que es una primitiva de f sobre $\mathbb{R}$, no es π-periódica o incluso periódica en absoluto.

Solución del ejercicio 2145 ▲005098

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe $u_n=\sqrt[n]{n}$ después, para x real estrictamente positivo, $f(x)=x^{1/x}$ de modo que para todo natural no nulo n, se tiene $u_n=f(n)$. f se define en $]0,+\infty[$ y para $x>0$, $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x/x}$. f es derivable en $]0,+\infty[$ y para $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{e}^{\ln x/x}.$$

Para $x>0$, $f'(x)$ es del signo de $1-\ln x$ y entonces f' es estrictamente positiva en $]0,\mathrm{e}[$ y estrictamente negativa en $]\mathrm{e},+\infty[$. f es, por lo tanto estrictamente creciente en $]0,\mathrm{e}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e},+\infty[$. En particular, para $n\geqslant 3$,

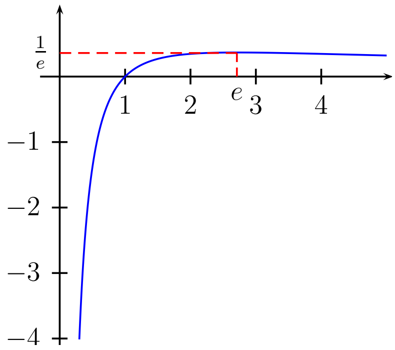
$$u_n=f(n)\leqslant f(3)=u_3=\sqrt[3]{3}.$$

Como $u_2=\sqrt{2}>1=u_1$, se tiene $\max\{u_n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\max\{\sqrt{2},\sqrt[3]{3}\}$. En fin, $\sqrt{2}=1,41...<1,44..=\sqrt[3]{3}$ (también podemos ver que $(\sqrt{2})^6=8<9=(\sqrt[3]{3})^6$). Finalmente,

$$\boxed{\max\{\sqrt[n]{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}=\sqrt[3]{3}=1,44...}$$

Solución del ejercicio 2146 ▲005099

1. Para $x>0$, se escribe $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f es definida y derivable en $]0,+\infty[$ y, para $x>0$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. f es, por lo tanto estrictamente creciente en $]0,\mathrm{e}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e},+\infty[$. El gráfico de f se deduce fácilmente :



2. Sean a y b dos enteros naturales no nulos tales que $a<b$. Se tiene entonces

$$a^b=b^a\Leftrightarrow \ln(a^b)=\ln(b^a)\Leftrightarrow b\ln a=a\ln b\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}\Leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Si $a\geqslant 3$, ya que f es estrictamente decreciente en $[\mathrm{e},+\infty[$, se tiene entonces $f(a)>f(b)$ y, en particular, $f(a)\neq f(b)$. a por lo tanto no es una solución. $a=1$ obviamente no es una solución. Por ejemplo, $a^b=b^a\Rightarrow 1^b=b^1\Rightarrow b=1=a$, lo que está excluido. Entonces, necesariamente $a=2$ y b es un entero mayor o igual que 3, y por lo tanto, a e, verificando $f(b)=f(2)$. Como f es estrictamente decreciente en $[\mathrm{e},+\infty[$, la ecuación $f(b)=f(2)$ tiene como máximo una solución en $[\mathrm{e},+\infty[$. En fin, como $2^4=16=4^2$, se ha demostrado que : existe uno y solo un par (a,b) de enteros naturales no nulos tales que $a<b$ y $a^b=b^a$, a saber $(2,4)$.

Solución del ejercicio 2147 ▲005100

---

1. Sea $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln 2&\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant\ln 2\Leftrightarrow\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant 2 \text{ y } x+1\neq 0\\&\Leftrightarrow -2\leqslant\frac{x+1}{2x+1}\leqslant 2\text{ y } x\neq -1\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x+1}+2\geqslant 0\text{ y }\frac{x+1}{2x+1}-2\leqslant 0\text{ y } x\neq -1\\&\Leftrightarrow\frac{5x+3}{2x+1}\geqslant 0\text{ y }\frac{-3x-1}{2x+1}\leqslant 0\text{ y } x\neq -1\\&\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty,-\tfrac{3}{5}\right]\cup\left]-\tfrac{1}{2},+\infty\right[\right)\text{ y }\left(\left]-\infty,-\tfrac{1}{2}\right[\cup\left[-\tfrac{1}{3},+\infty\right[\right)\text{ y } x\neq -1\\&\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]-1,-\tfrac{3}{5}]\cup[-\tfrac{1}{3},+\infty[\end{aligned}$$

2. Para $x>0$

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x&\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=x\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow\ln x(\sqrt{x}-\frac{x}{2})=0\\&\Leftrightarrow\ln x\times\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0\Leftrightarrow x=1\text{ o } x=4.\end{aligned}$$

3. $\operatorname{argch}3=\ln(3+\sqrt{3^2-1})=\ln(3+\sqrt{8})$ y $\operatorname{argth}\frac{7}{9}=\frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right)=\ln\sqrt{8}$.

Entonces, $\operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} = \ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$. Por consiguiente,

$$2\operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.$$

4. Para $x \in]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$,

$$\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x} + 2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)} + 3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10)) + 2\ln x(\ln x + 2\ln(10)) + 3\ln x(\ln x + \ln(10))}{\ln x(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10))} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\ln^2 x + 10\ln(10)\times\ln x + 2\ln^2(10) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \in \left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.$$

Como ninguno de estos dos números está en $\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$, $\mathscr{S} = \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

5. Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1} = 4\times 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x-\tfrac{3}{2}\right)\ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \tfrac{3}{2}.$$

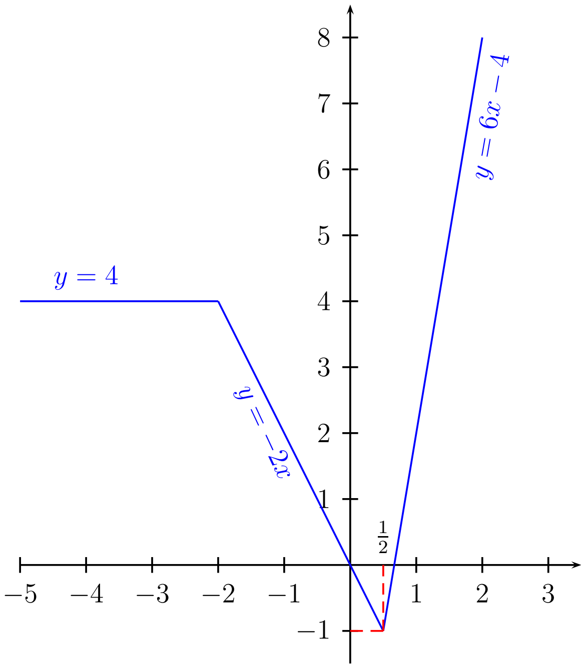
Solución del ejercicio 2148 ▲005102

Se denota $\mathscr{C}_i$ la gráfica de f_i.

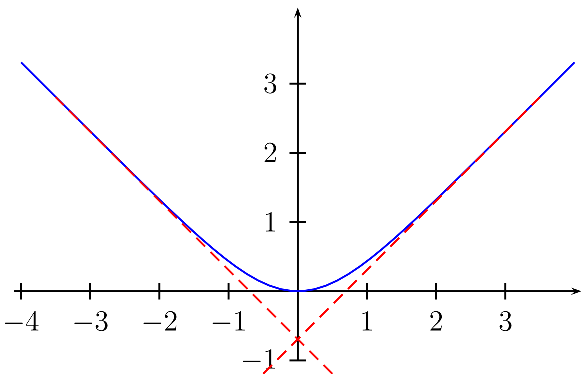
1. f_1 es definida y continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}\setminus\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$. Se especifica en una tabla la expresión de $f_1(x)$ según los valores de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ $\frac{1}{2}$	$\quad$ $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

Se deduce $\mathscr{C}_1$.



2. Sea $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ y entonces $f_2(x)$ existe y $f_2(x) \geqslant 0$. f_2 por lo tanto, se define en $\mathbb{R}$. Además, f_2 es continua y derivable en $\mathbb{R}$, par. Porque la función $x \mapsto \operatorname{ch} x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, con valores en $]0,+\infty[$ y la función $x \mapsto \ln x$ es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$, f_2 es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y, por paridad, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$. f_2 es par y por lo tanto, f_2' es impar. Así, $f_2'(0) = 0$ y $\mathscr{C}_2$ admite el eje de abscisas por tangente en $(0, f_2(0)) = (0,0)$.
Estudio en $+\infty$. Para $x \geqslant 0$,
$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\right) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - \ln 2 = \ln(\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1+\mathrm{e}^{-2x}).$$
Cuando x tiende a $+\infty$, e^{-2x} tiende a 0 y entonces, $\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})$ tiende a 0. Se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. Además, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ y la recta (D) de ecuación $y = x - \ln 2$ es asíntota a $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$. Por simetría con respecto a la recta (Oy), la recta (D') de ecuación $y = -x - \ln 2$ es asíntota a $\mathscr{C}_2$ en $-\infty$. En fin, para todo real x,
$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$
y $\mathscr{C}_2$ está estrictamente por encima (D) sobre $\mathbb{R}$. Igualmente, $\mathscr{C}_2$ está estrictamente por encima (D') sobre $\mathbb{R}$. Se deduce que $\mathscr{C}_2$.



3. f_3 es definida y continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
Estudio en $-\infty$. Sea $x \leqslant -1$.

$$f_3(x) = x+\sqrt{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Por tanto, cuando x tiende a $-\infty$, $x-\sqrt{x^2-1}$ tiende a $-\infty$ y entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$.
Estudio en $+\infty$. Inmediatamente,, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$. Luego, para $x \geqslant 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = 1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

que tiende a 2, cuando x tiende a $+\infty$. Pero entonces,

$$f_3(x)-2x = -x+\sqrt{x^2-1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_3(x)-2x) = 0$ y por lo tanto, que la recta (D) de ecuación $y = 2x$ es asíntota a $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$.
Estudio en 1. Para $x > 1$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

y para $x \in]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1-\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Así, $\lim\limits_{x\to1,\,x>1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to1,\,x<1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. Se deduce que f_3 no es derivable en 1, pero que $\mathscr{C}_3$ admite dos semi-tangentes paralelas a (Oy) en el punto de $\mathscr{C}_3$ de abscisa 1. Los resultados son similares en -1.
Estudio de las variaciones de $\mathbf{f_3}$. Para $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x) = x+\sqrt{x^2-1}$ y entonces

$$f_3'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x > 1$, se tiene $x+\sqrt{x^2-1} > 0$ y entonces, $f_3'(x) > 0$. Si $x < -1$, se tiene

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

y entonces, $x+\sqrt{x^2-1} < 0$, luego $f_3'(x) < 0$. Así, f_3 es estrictamente decreciente en $]-\infty,-1[$ y estrictamente creciente en $]1,+\infty[$. Para $x \in]-1,1[$, $f_3(x) = x+\sqrt{-x^2+1}$ y entonces

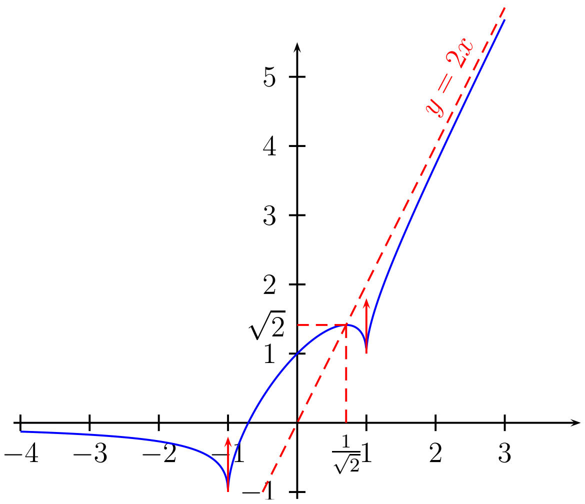
$$f_3'(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x \in]-1,0]$, se tiene claramente $f_3'(x) > 0$. Si x$\in [0,1[$, por estricto crecimiento de la función $x \mapsto x^2$ sobre $\mathbb{R}^+$, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(f_3'(x)) &= \operatorname{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x) = \operatorname{sgn}((-x^2+1)-x^2) = \operatorname{sgn}(1-2x^2)\\ &= \operatorname{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \operatorname{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}}-x).\end{aligned}$$

Entonces, f_3' es estrictamente positiva en $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, estrictamente negativo en $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ y se anula en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

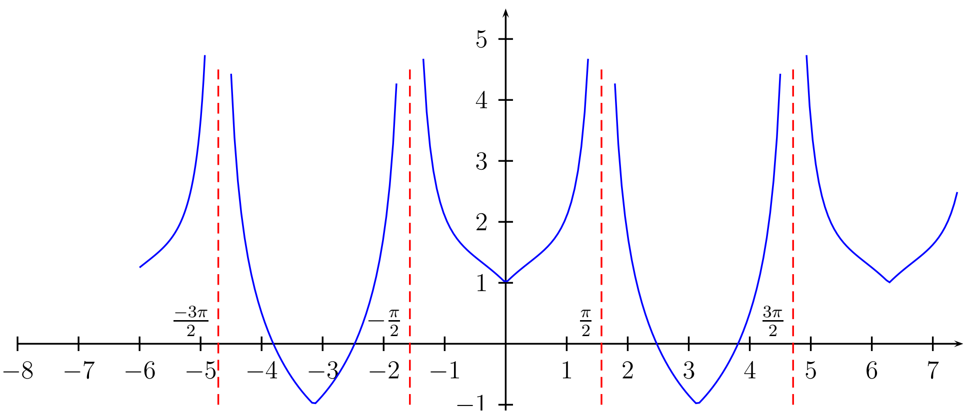
En resumen, f_3' es estrictamente negativa en $]-\infty, -1[$ y en $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ y estrictamente positivo en $\left]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y en $]1, +\infty[$. f_3 es, por lo tanto estrictamente creciente en $]-\infty, -1]$ y en $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ y estrictamente decreciente en $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ y en $[1, +\infty[$. Se deduce $\mathscr{C}_3$.



4. f_4 se define en $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-periódica y par. Se estudia así f_4 sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Estudio de las variaciones de $\mathbf{f_4}$. Para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ y entonces,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x \geqslant 1 - 1 = 0,$$

con igualdad si y solo si $\operatorname{sen} x = \cos^2 x = 1$, lo que es imposible. Entonces, f_4' es estrictamente positiva en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ y f_4 es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ y f_4 es estrictamente decreciente en $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ como la suma de dos funciones estrictamente decrecientes en $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Se tiene inmediatamente, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$. Se deduce $\mathscr{C}_4$.



5. Sea $x > 0$. x no es nulo entonces $\frac{1}{x}$ existe y $1 + \frac{1}{x} > 0$ y $f_6(x)$ existe.

Estudio en 0. Para $x>0$, $x\ln(1+\frac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1+x)$. Así, $x\ln(1+\frac{1}{x})$ tiende a 0, cuando x tiende a 0 para valores superiores y por lo tanto, $f_5(x) = \exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))$ tiende a 1. Se define aún $f_5(0) = 1$ y estudiar la derivabilidad de f_5 en 0. Para $x>0$,

$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))-1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Por tanto, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tiende a 0, cuando x tiende a 0, y entonces

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))-1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1.$$

Por otra parte, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tiende a $+\infty$, cuando x tiende a 0 superiores. Finalmente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = +\infty.$$

Así, f_5 no es derivable en 0, pero $\mathscr{C}_5$ admite el eje de ordenadas por tangente en $(0, f_5(0)) = (0,1)$.

Estudio en $+\infty$. Para $x>0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$ y entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Por consiguiente,

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = e.$$

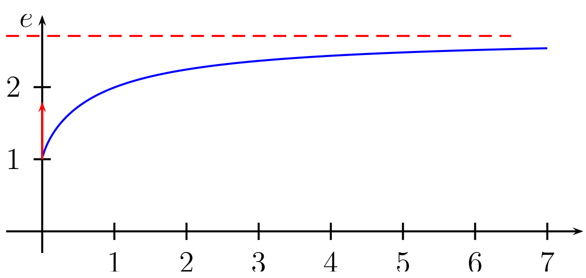
Estudio de las variaciones de $\mathbf{f_5}$. Para $x>0$, $f_5(x)>0$, luego $\ln(f_5(x)) = x\ln(1+\frac{1}{x})$. Así, para $x>0$,

$$f_5'(x) = f_5(x)\ln(f_5)'(x) = f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_5(x)g(x),$$

donde $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$. Sobre $]0,+\infty[$, f_5' es del signo de g. Para determinar el signo de g, estudiar primero las variaciones de g sobre $]0,+\infty[$. g es derivable en $]0,+\infty[$ y para $x>0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g es, por lo tanto estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$, y como $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g es estrictamente positiva en $]0,+\infty[$. Igualmente para f_5'. f_5 es estrictamente creciente en $]0,+\infty($. Se deduce que $\mathscr{C}_5$.



6. **Dominio de definición de $\mathbf{f_6}$**. Sea $x \in \mathbb{R}$.

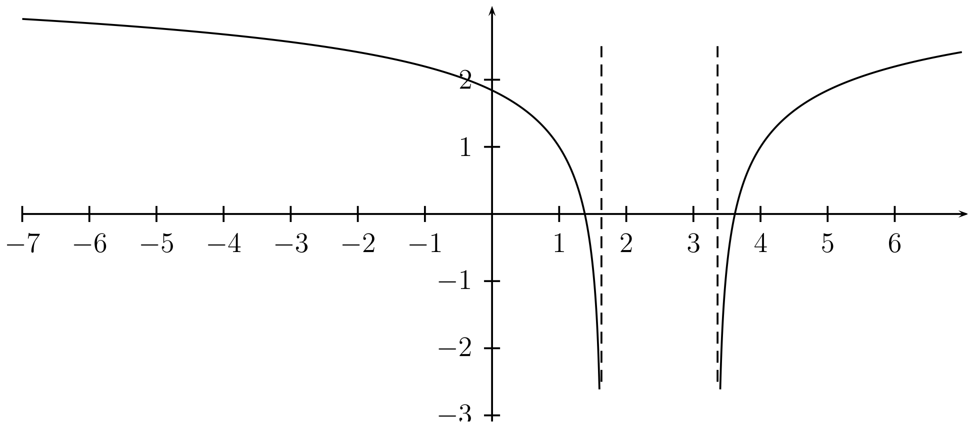
$$f_6(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ y } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ y } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}}<1$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ y } \ln(x^2-5x+6)>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6>\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[=\mathscr{D}_f.$$

Variaciones de $\mathbf{f_6}$. La función $x\mapsto x^2-5x+6$ es estrictamente decreciente en $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Como $\frac{5+\sqrt{3}}{2}>\frac{5}{2}$ y que $\frac{5-\sqrt{3}}{2}<\frac{5}{2}$, la función $x\mapsto x^2-5x+6$ es estrictamente decreciente sur$\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, con valores en $]0,+\infty[$, intervalo sobre el cual la función logaritmo natural es estrictamente creciente. La función $x\mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ tiene el mismo sentido de variaciones y finalmente f_6 es estrictamente decreciente en $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Eje de simetría Sea $x\in\mathbb{R}$. $x\in\mathscr{D}_f\Leftrightarrow\frac{5}{2}-x\in\mathscr{D}_f$ y además, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6=x^2-5x+6$. Así,

$$\forall x\in D,\ f_6(\frac{5}{2}-x)=f_6(x).$$

$\mathscr{C}_6$ por lo tanto admite la recta de ecuación $x=\frac{5}{2}$, por eje de simetría.
El cálculo de los límites es inmediato, se deduce que $\mathscr{C}_6$.



Solución del ejercicio 2149 ▲005404

Se tiene $0\leqslant f(0)\leqslant 1$ y $0\leqslant f(1)\leqslant 1$. Entonces $|f(1)-f(0)|\leqslant 1$. Pero, por hipótesis, $|f(1)-f(0)|\geqslant 1$. Así, $|f(1)-f(0)|=1$ y necesariamente, $(f(0),f(1))\in\{(0,1),(1,0)\}$.
Se supone que $f(0)=0$ y $f(1)=1$ y demostrar que $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x$.
Sea $x\in[0,1]$. Se tiene $|f(x)-f(0)|\geqslant|x-0|$, lo que proporciona $f(x)\geqslant x$. También se tiene $|f(x)-f(1)|=|x-1|$, lo que proporciona $1-f(x)\geqslant 1-x$ y entonces $f(x)\leqslant x$. Finalmente, $\forall x\in[0,1],\ f(x)=x$ y $f=\mathrm{Id}$.
Si $f(0)=1$ y $f(1)=0$, se escribe para $x\in[0,1]$, $g(x)=1-f(x)$. Entonces, $g(0)=0$, $g(1)=1$, luego para $x\in[0,1]$, $g(x)\in[0,1]$. En fin,

$$\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |g(y)-g(x)|=|f(y)-f(x)|\geqslant|y-x|.$$

Según el estudio del primer caso, $g = \mathrm{Id}$ y entonces $f = 1 - \mathrm{Id}$.
Recíprocamente, Id y $1 - \mathrm{Id}$ son soluciones del problema.

Solución del ejercicio 2150 ▲005443

1. f_1 es definida y de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^*$ en virtud de teoremas generales. Además, f_1 es par. Se estudia f_1 sobre $[0, +\infty[$ (tenga cuidado con la derivabilidad en 0).
Estudio en 0 (a la izquierda y a la derecha).

$$\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) - x(1 - x^2 + x^4 + o(x^4))] \\
&= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3} - \frac{4x^5}{5} + o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3} - \frac{4x^2}{5} + o(x^2)) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2x^2}{15} + o(x^2).
\end{aligned}$$

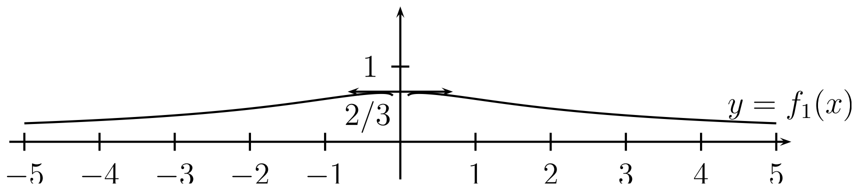
Así, f_1 se extiende por continuidad en 0 poniendo $f_1(0) = \frac{2}{3}$. Porque f_1 admite en 0 un desarrollo limitado de orden 1, la extensión aún denotada f_1 es derivable en 0 y $f_1'(0) = 0$. C_1 admite en el punto de abscisas 0 una tangente paralela a $(0x)$ de ecuación $y = \frac{2}{3}$. En fin, ya que $f(x) - \frac{2}{3}$ es, en un vecindario de 0, del signo de $-\frac{2x^2}{15}$, la curva está localmente debajo de su tangente.
Estudio en $+\infty$ (y $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, e igualmente $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.
Derivada, variaciones.
Para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4} - \frac{1}{x^2})(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}) \\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}) + \frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}) \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x + \frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2)}) = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}$$

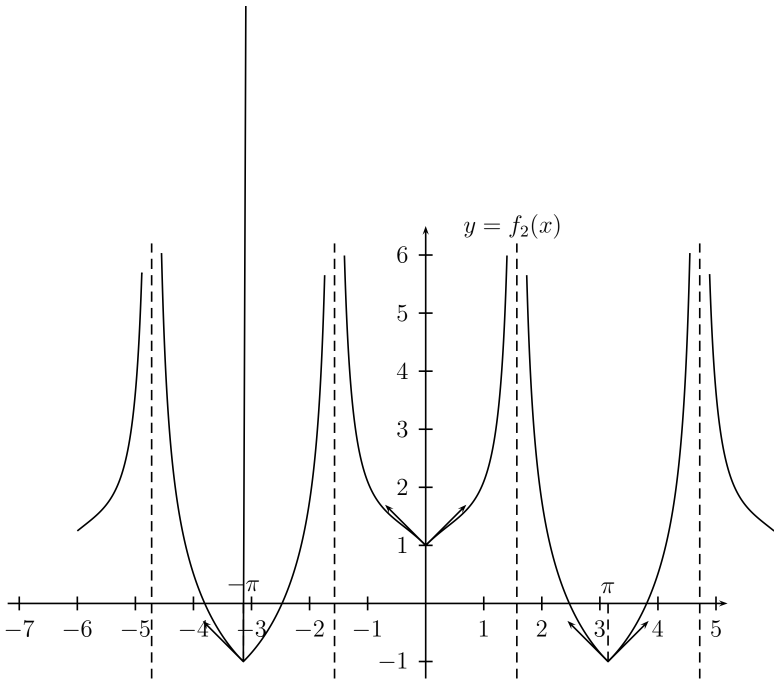
donde, para todo real x, $g(x) = -\arctan x + \frac{3x}{3+x^2}$. g es derivable en $\mathbb{R}$ y para x real,

$$g'(x) = 3\frac{(3+x^2) - 2x^2}{(3+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3(3-x^2)(1+x^2) - (3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' es, por lo tanto estrictamente negativa en $]0, +\infty[$ y consecuentemente, g es, por lo tanto estrictamente decreciente en $[0, +\infty[$. Porque $g(0) = 0$, para $x > 0$, $g(x) < 0$. Finalmente, f_1' es estrictamente negativa en $]0, +\infty[$ y f_1 es estrictamente decreciente en $[0, +\infty[$. El cuadro de variaciones de f_1 no aporta nada más.
Gráfico



2. f_2 se define en $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, par y 2π-periódica. f_2 es continua en D en virtud de teoremas generales. Se estudia f_2 sobre $[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Estudio en $\frac{\pi}{2}$. $f(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} |\tan x|$ y entonces, $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. C_2 admite la recta de ecuación $x = \frac{\pi}{2}$, para la recta asíntota.
Derivabilidad y derivada.
f_2 es derivable en $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en virtud de teoremas generales y para $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon\dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x$, donde ε es el signo de $\tan x$.
f_2 es también derivable por la recta en 0 y $(f_2)_d'(0) = 1$. Por simetría, f_2 es derivable a la izquierda en 0 y $(f_2)_g'(0) = -1$. f_2 no es derivable en 0. Igualmente, f_2 es derivable a la izquierda y a la derecha en π, con $(f_2)_g'(\pi) = -1$ y $(f_2)_d'(\pi) = 1$, y por lo tanto, no es derivable en π.
Variaciones. f_2 es estrictamente decreciente en $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ como la suma de dos funciones estrictamente decrecientes en $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Después, para x elemento de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{sen} x > 1 - 1 = 0$. f_2' es estrictamente positiva en $]0, \frac{\pi}{2}[$ y entonces f_2 es estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Gráfico.



3. Para x real, se escribe $P(x) = x^3 + 12x^2 + 60x + 120$. Para todo real x, se tiene $P'(x) = 3(x^2 + 8x + 20) = 3((x+4)^2 + 4) > 0$. P es una función polinomial de grado 3 estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, se anula una y solo una vez en un cierto real denotado α. Además, $P(-5)P(-4) < 0$ y $\alpha \in]-5, -4[$. En fin, P es estrictamente negativo en $]-\infty, \alpha[$ y estrictamente positivo en $]\alpha, +\infty[$.
f_3 se define en $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, y para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right| = x - \ln|P(x)| + \ln|P(-x)|.$$

Notemos que f_3 es impar.
Derivabilidad y derivada.
f_3 es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ en virtud de teoremas generales y para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&P(x)P(-x)-P'(x)P(-x)-P'(-x)P(x)\\
&\qquad=((12x^2+120)+(x^3+60x))((12x^2+120)-(x^3+60x))\\
&\qquad\ -3((x^2+20)+8x)((12x^2+120)-(x^3+60x)))-3((x^2+20)-8x))((12x^2+120)+(x^3+60x))\\
&\qquad=144(x^2+10)^2-x^2(x^2+60)^2-6((x^2+20)(12x^2+120)-(8x)(x^3+60x))\\
&\qquad=(-x^6+24x^4-720x^2+14400)-6(4x^4-120x^2+2400)=-x^6,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, $f_3'(x)=\frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.

Estudio en $+\infty$.

$$f_3(x)-x\underset{x\to+\infty}{=}-\ln(1+\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x}))+\ln(1-\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x}))=-\frac{24}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

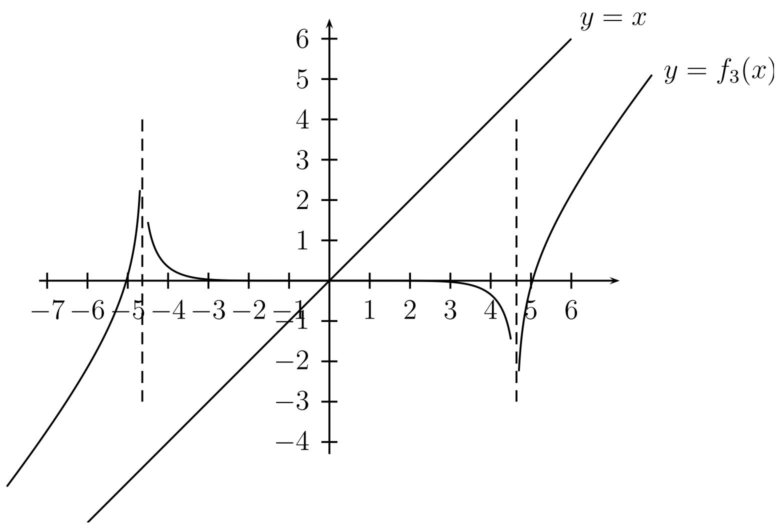
Se deduce en primer lugar que $\lim\limits_{x\to+\infty}f_3(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}f_3(x)=-\infty$, ya que C_3 admite en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la recta de ecuación $y=x$, para la recta asíntota y que C_3 está debajo (resp. encima) de esta recta en un vecindario de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

Variaciones.

Por una parte, $f_3'(0)=0$. Por otra parte, para $x>0$, $P(x)>0$. f_3' es, por lo tanto del signo de $-P(-x)$ sobre $]0,+\infty[\setminus\{\alpha\}$. Así, f_3' es estrictamente negativa en $]0,\alpha[$ y estrictamente positiva en $]\alpha,+\infty[$. Se deduce la tabla de variaciones de f_3.

x	0		α		$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_3	0 $\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Gráfico.



4. f_4 se define en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Además, para $x\neq 0$,

$$f_4(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{2/x}{1/x^2-1}}=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}}=\frac{1}{f_4(x)}.$$

Este tipo de constatación se puede utilizar para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)$ si se conoce $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_4(x)$ y obtener las variaciones de f_4 sobre $]0,1[$ si se conocen en $]1,+\infty[$... También se puede señalar que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ y entonces, para $x \neq 0$, $f_4(-x) = \frac{-x^2}{f_4(x)}$. Esta observación podría ser útil para deducir el estudio de f_4 en -1 del estudio en 1.

Estudio en $+\infty$ y $-\infty$.

Porque $\dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, se tiene $f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$, lo que demuestra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty$ y que C_4 admite en $+\infty$ y $-\infty$, una dirección asintótica de ecuación $y = x$. Más precisamente,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1} = \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2}),$$

luego,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + (\frac{2}{x}) + (\frac{2}{x})^2 + o(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

Se deduce que

$$f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x}).$$

Así, C_4 admite la recta de ecuación $y = x+2$, para la recta asíntota en $+\infty$ y $-\infty$. Además, el signo de $f_4(x)-(x+2)$ es localmente el signo de $\frac{2}{x}$, C_4 está por encima de su asíntota en un vecindario de $+\infty$ y por abajo en un vecindario de $-\infty$.

Estudio en 1 (y -1).

Claramente, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_4(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f_4(x) = -\infty$. Luego, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_4(x) = 0$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<-1}} f_4(x) = 0$. Se extiende f_4 por continuidad a la izquierda en 1 poniendo $f_4(1) = 0$, e igualmente en -1 y se estudia la derivabilidad de la extensión aún denotada f_4. f_4 es continua en $]-1,1]$, de clase C^1 sobre $]-1,1[$ y para $x \in]-1,1[$ (ver derivada-variaciones),

$$f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} 0.$$

Según un teorema clásico de análisis, f_4 es de clase C^1 sobre $]-1,1]$ y en particular derivable a la izquierda en 1 y $f_g'(1) = 0$. Igualmente, f_4 es derivable a la izquierda en -1 y $f_g'(-1) = 0$. C_4 admite en estos puntos semi tangentes paralelas al eje (Ox).

Derivada. Variaciones.

f_4 es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en virtud de teoremas generales y para $x \neq 0$,

$$\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} = (\ln|f_4|)'(x) = (\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1})'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2-2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},$$

y entonces

$$\forall x \neq 0,\ f4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

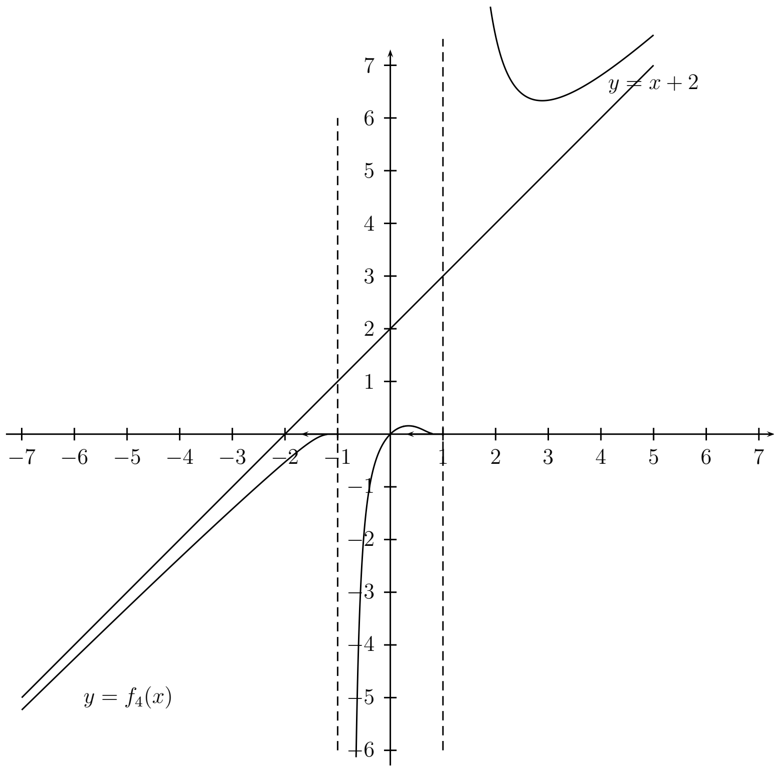
lo que es aún cierto para $x = 0$ por continuidad de f_4' en 0. f_4' es, por lo tanto del signo de $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$. Así, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2((x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) - 2) = x^2((x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) - 4) = \\ &= x^2(x + \frac{1}{x} - (1 - \sqrt{5})(x + \frac{1}{x} - (1 + \sqrt{5})) = (x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1)(x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 1), \end{aligned}$$

lo que es verdadero para $x = 0$. El primer trinomio tiene un discriminante igual a $(\sqrt{5} - 1)^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ y entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1 > 0$. El segundo trinomio tiene un discriminante igual a $(\sqrt{5} + 1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ y por lo tanto, admite dos raíces reales $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + \sqrt{5}}) = 2,89... > 1$ y $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in]0,1[$. Se deduce que la tabla de variación de f_4.

x	$-\infty$		-1	0		β		1		α		$+\infty$
$f_4'(x)$		$+$	‖		$+$	0	$-$	‖	$-$	0		$+$
f_4	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖	$-\infty$	$\nearrow$	$0,15...$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$6,34...$	$\nearrow$	$+\infty$

Gráfico.



5. Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ y si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Entonces, para $x \neq 0$, > 0 y f_5 se define en $\mathbb{R}^*$. Para $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x} - 1}{-x} = -\frac{1}{x}\ln(e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln\frac{e^x - 1}{x} = 1 - f(x).$$

Entonces, para todo real no nulo x, $f(x) + f(-x) = 1$. El punto de coordenadas $(0, \frac{1}{2})$ es centro de simetría de C_5.

Estudio en 0.

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)) = \frac{1}{x}((\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2+o(x^2)) = \frac{1}{2}+\frac{1}{24}x+o(x).$$

Así, f_5 se extiende por continuidad en 0 poniendo $f_5(0)=\frac{1}{2}$. La extensión, todavía denotado f_5, admite en 0 un desarrollo limitado de orden 1 y por lo tanto, es derivable en 0, con $f_5'(0)=\frac{1}{24}$. Una ecuación de la tangente a C_5 en el punto de abscisas 0 es $y=\frac{1}{24}x+\frac{1}{2}$. Por simetría, este punto es un punto de inflexión.

Estudio en $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(\ln(\mathrm{e}^x)+\ln(1-\mathrm{e}^{-x})-\ln x) = 1-\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1+o(1).$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)=1$. Por simetría, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-f_5(-x)) = 1-1 = 0$.

Derivada. Variaciones.

f_5 es derivable en $\mathbb{R}^*$ en virtud de teoremas generales (y por lo tanto, en $\mathbb{R}$) y para $x\neq 0$, (ya que $\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right| = \ln|\mathrm{e}^x-1|-\ln|x|$),

$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\frac{1}{x}(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(-\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-1).$$

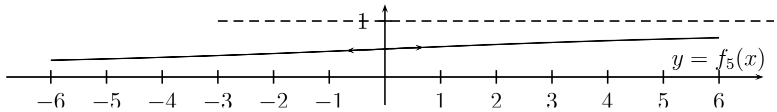
f_5' es, sobre $\mathbb{R}^*$, del signo de $g(x) = -\ln\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}+-1$. g es derivable en $\mathbb{R}^*$ y para x real no nulo,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x-1)-x\mathrm{e}^x.\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{-x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^x-1)^2+x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-x-1)}{x(\mathrm{e}^x-1)^2} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x-1)^2-x^2\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{(\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2})^2-x^2}{x(\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2})^2} = \frac{(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2-x^2}{x(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}-(\frac{x}{2})^2}{x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

La desigualdad $\mathrm{sh}\,x > x$, válido para $x>0$, es clásico (por ejemplo, la fórmula de TAYLOR-LAPLACE de orden 1 proporciona para $x>0$, $\mathrm{sh}\,x = x+\int_0^x (x-t)\,\mathrm{sh}\,t\,dt > x$.) Así, g' es estrictamente positiva en $]0,+\infty[$, y entonces g es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$. Teniendo en cuenta de $g(0^+)=0$, g por lo tanto, es estrictamente positiva en $]0,+\infty[$. Lo mismo sucede para f_5' y f_5 es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$.

Por simetría y continuidad en 0, f_5 es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Gráfico.



6. f_6 es definida y continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}\{-1,1\}$ en virtud de teoremas generales.

   Estudio en 1.

   $f_6(x)-f_6(1) = x-1+\sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, lo que demuestra que f_6 no es derivable en 1, pero que C_6 admite en el punto de abscisas 1 dos semi tangentes paralelas a (Oy).

   Estudio en -1.

   $f_6(x)-f_6(-1) = x+1+\sqrt{|x^2-1|} \underset{x\to -1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, lo que demuestra que f_6 no es derivable en -1, pero que C_6 admite en el punto de abscisas -1 dos semi tangentes paralelas a (Oy).

Estudio en $+\infty$. En un vecindario de $+\infty$, se tiene

$$f_6(x) = x + x(1-\frac{1}{x^2})^{1/2} = x + x(1-\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}),$$

lo que demuestra todo a la vez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$, luego la recta de ecuación $y = 2x$ es asíntota a C_6 en $+\infty$ y que C_6 está debajo de esta recta en un vecindario de $+\infty$.
Estudio en $-\infty$. En un vecindario de $-\infty$, se tiene, $f_6(x) = x - x(1+o(\frac{1}{x})) = o(1)$, y $\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x) = 0$.

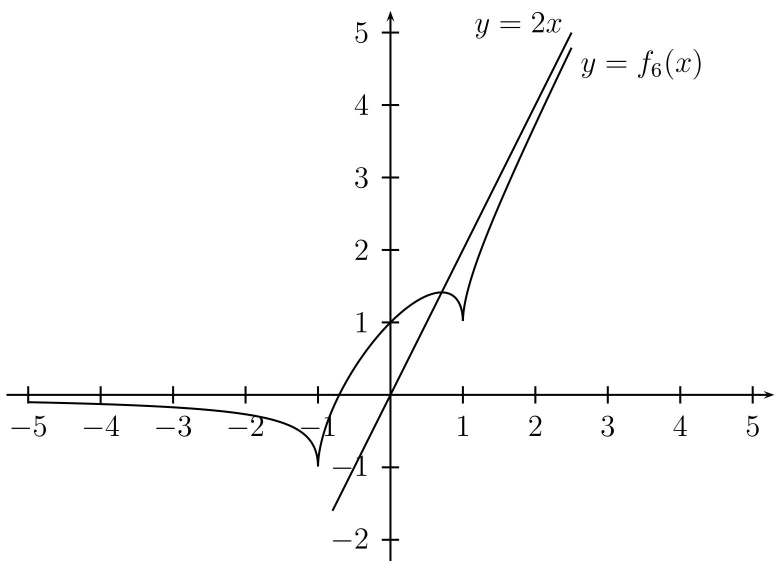
Derivada. Variaciones.
Sea ε el signo de x^2-1. Para $x \neq \pm 1$,

$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)} + \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

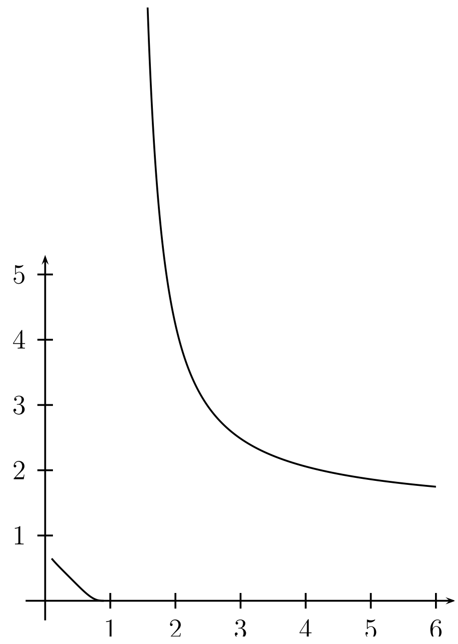
Si $-1 < x \leqslant 0$, (de manera que $\varepsilon x > 0$) o $x > 1$, $f_6'(x) > 0$. Si $x < -1$, $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = -$ y $f_6'(x) < 0$.
Si $0 \leqslant x < 1$. $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(-x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(-x^2 - (x^2-1)) = \text{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)$. De donde la tabla de variaciones de f_6 :

x	$-\infty$		-1		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f_6'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_6	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty$

Gráfico.



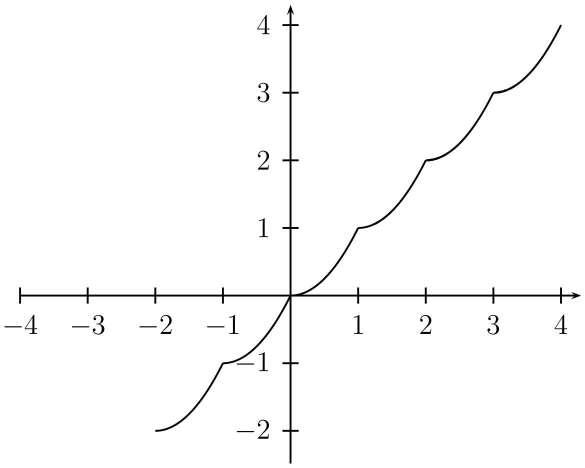
7.



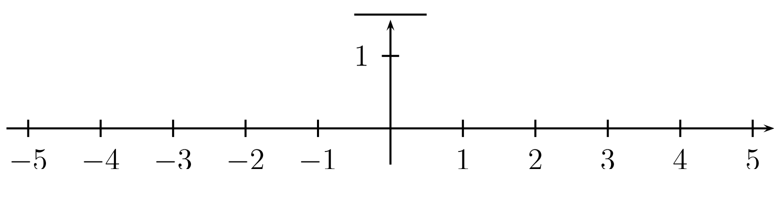
8.

9.

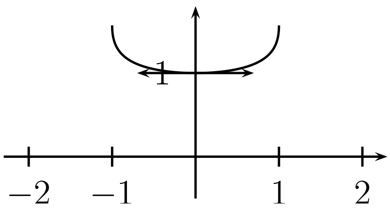
10.



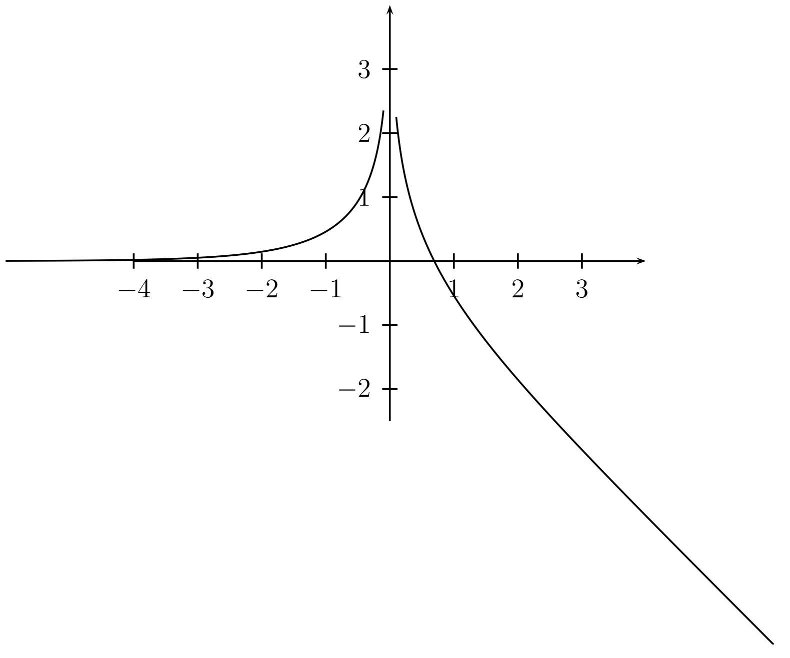
11.



12.



13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.



Solución del ejercicio 2159 ▲001216

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -1/2.$$

Solución del ejercicio 2160 ▲001217

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 0.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\operatorname{sen}(x))}{\tan(6x)} = 1/6.$
3. $\lim_{x\to 0} (\ln(\mathrm{e}+x))^{x^{-1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}.$
4. $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right)^{x^{-1}} = \mathrm{e}^{-1}.$

Solución del ejercicio 2162 ▲001219

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{\sqrt{2}}{8x^3}$
3. $\frac{a^3}{b^3}$
4. -1
5. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
6. $\frac{1}{2}x^2$
7. $-\frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)$
8. $\sqrt{e}$
9. $\frac{1}{\pi}$
10. 1
11. x

Solución del ejercicio 2164 ▲005161

Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\prod_{k=1}^{n}k = \prod_{k=1}^{n}k(n+1-k).$$

Ahora, la función $x \mapsto x(n+1-x)$ es estrictamente creciente en $[0,\frac{n+1}{2}]$ y estrictamente decreciente en $[\frac{n+1}{2},n+1]$. Porque $f(1)=f(n)=n$, se deduce que para $x\in[2,n-1]$, $f(x)>n$. Porque $n\geqslant 3$, se tiene $n-1\geqslant 2$ y se puede escribir

$$n!^2 = n^2\prod_{k=2}^{n-1}k(n+1-k) > n^2\prod_{k=2}^{n-2}n = n^n,$$

por lo tanto,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

Solución del ejercicio 2165 ▲005163

Sea $x\in\mathbb{R}$. Demostrar por inducción que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\operatorname{sen}(nx)|\leqslant n|\operatorname{sen}x|$.

- Esto es claro para $n=0$.
- Sea $n\geqslant 0$. Se supone que $|\operatorname{sen}(nx)|\leqslant n|\operatorname{sen}x|$, entonces,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(n+1)x| = |\operatorname{sen}nx\cos x+\cos nx\operatorname{sen}x| &\leqslant |\operatorname{sen}nx|\cdot|\cos x|+|\cos nx|\cdot|\operatorname{sen}x|\\
&\leqslant |\operatorname{sen}nx|+|\operatorname{sen}x|\\
&\leqslant n|\operatorname{sen}x|+|\operatorname{sen}x| \quad \text{(por hipótesis de recurrencia)}\\
&= (n+1)|\operatorname{sen}x|
\end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},,\ |\operatorname{sen}(nx)|\leqslant n|\operatorname{sen}x|}$.

Solución del ejercicio 2166 ▲005393

Para $x\in[a,b]$, se escribe $g(x)=f(x)-x$. g es continua en $[a,b]$ ya que f es. Además, $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ y $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Por el teorema del valor intermedio, g se anula al menos una vez en $[a,b]$ o aún, la ecuación $f(x)=x$, admite al menos una solución en $[a,b]$.

Solución del ejercicio 2167 ▲005394

Porque $\frac{f(x)}{x}$ tiende a $\ell\in[0,1[$, existe $A>0$ tal que para $x\geqslant A$, $\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{\ell+1}{2}<1$. Pero entonces, $f(A)<A$ (y $f(0)\geqslant 0$) lo que nos lleva a la situación del ejercicio 2166 : para $x\in[0,A]$, sea $g(x)=f(x)-x$...

Solución del ejercicio 2168 ▲005397

Sea $x>0$. Para todo natural n, $f(x)=f(\sqrt{x})=f(x^{1/4})=\cdots=f(x^{1/2^n})$. Por lo tanto, para x fijo, $\lim_{n\to+\infty} x^{1/2^n}=1$ y, f es continua en 1, se tiene :

$$\forall x>0,\ f(x)=\lim_{n\to+\infty} f(x^{1/2^n})=f(1).$$

f es, por lo tanto constante en $]0,+\infty[$, luego en $[0,+\infty[$ por continuidad de f en 0. Para $x\geqslant 0$, se escribe $f(x)=0$ si $x\neq 1$ y $f(x)=1$ si $x=1$. Para $x\geqslant 0$, se tiene $x^2=1\Leftrightarrow x=1$. f verifica así : $\forall x\geqslant 0,\ f(x^2)=f(x)$, pero f no es constante en $\mathbb{R}^+$.

Solución del ejercicio 2169 ▲005399

Sea f un morfismo de $(\mathbb{R},+)$, es decir que f es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ verificando

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Ya se sabe $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ y entonces $f(0)=0$. Después, para x real dado, $f(-x)+f(x)=f(-x+x)=f(0)=0$ y entonces, para todo real x, $f(-x)=-f(x)$ (f es, por lo tanto, impar). También se tiene $n\in\mathbb{N}^*$ y $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=f(x)+\cdots+f(x)=nf(x)$. De lo anterior, se deduce :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ f(nx)=nf(x).$$

Sea $a=f(1)$. De acuerdo con lo anterior, $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)=f(n.1)=nf(1)=an$. Luego, para $n\in\mathbb{N}^*$, $nf(\frac{1}{n})=f(n\frac{1}{n})=f(1)=a$ y entonces $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{n})=a\frac{1}{n}$. Además, para $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q})=pf(\frac{1}{q})=pa\frac{1}{q}=a\frac{p}{q}$. Finalmente,

$$\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=ar.$$

Ahora, si no se tiene la hipótesis de continuidad, no se puede ir más lejos. Se supone además que f sea continua en $\mathbb{R}$. Sea x un real, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ racional, convergente de límite x. f es continua en x, se tiene :

$$f(x)=f(\lim_{n\to+\infty} r_n)=\lim_{n\to+\infty} f(r_n)=\lim_{n\to+\infty} ar_n=ax.$$

Entonces, si f es un morfismo continuo de $(\mathbb{R},+)$, f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Recíprocamente, las aplicaciones lineales son adecuadas.

Solución del ejercicio 2170 ▲005400

Sean a y b dos reales fijos tales que $0<a<b$. Encontrar los números naturales no nulos k tales que $]ka,kb[\cap](k+1)a,(k+1)b[\neq\varnothing$. Para k en $\mathbb{N}^*$, se escribe $I_k=]ka,kb[$.

$$I_k\cap I_{k+1}\neq\varnothing\Leftrightarrow ka<(k+1)a<kb<(k+1)b\Leftrightarrow k>\frac{a}{b-a}\Leftrightarrow k\geqslant E(\frac{a}{b-a})+1.$$

Se define $k_0=E(\frac{a}{b-a})+1$. Para $k\geqslant k_0$, se tiene $I_k\cap I_{k+1}\neq\varnothing$ y entonces $\bigcup_{k\geqslant k_0}]ka,kb[=]k_0a,+\infty[$. Ahora, si $k_0=1$, $\bigcup_{k\geqslant k_0}]ka,kb[=]a,+\infty[$ y si $k_0>1$, $\bigcup_{k\geqslant k_0}]ka,kb[=(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[)\cup]k_0a,+\infty[$. Pero, si x está en $\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[$, entonces $x < (k_0-1)b < k_0 a$ y $(\bigcup_{k=1}^{k_0-1}]ka,kb[) \cap]k_0 a,+\infty[= \varnothing$. El valor más pequeño de A es, por lo tanto $(E(\frac{a}{b-a})+1)a$.

Solución del ejercicio 2171 ▲005402

Si f es estrictamente monótona en I, se sabe que f es inyectiva. Recíprocamente, se supone f inyectiva y continua en I y demostrar que f es estrictamente monótona. Se supone por reducción al absurdo que f no es estrictamente monótona. Se pueden entonces encontrar tres números reales a, b y c en el intervalo I tales que

$$a < b < c \text{ y } ((f(b) \geqslant f(a) \text{ y } f(b) \geqslant f(c)) \text{ o } (f(b) \leqslant f(a) \text{ y } f(b) \leqslant f(c))).$$

Se remplaza f por $-f$, se supone que $a < b < c$ y $f(b) \geqslant f(a)$ y $f(b) \geqslant f(c)$.
Porque f es inyectiva, se tiene incluso $a < b < c$ y $f(b) > f(a)$ y $f(b) > f(c)$. Sea $M = \max\{f(a), f(c)\}$. Se tiene $M < f(b)$. M es elemento de $[f(a), f(b)]$ y ya que f es continua en $[a,b]$, el teorema de valores intermedios permite afirmar que existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = M$. Además, no se puede tener $\alpha = b$, pues $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (y f inyectiva). Entonces,

$$\exists \alpha \in [a,b[/ \ f(\alpha) = M.$$

Igualmente, ya que M es elemento de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b,c]/ \ f(\beta) = M$. Así, se han encontrado en I dos reales α y β verificando $\alpha \neq \beta$ y $f(\alpha) = f(\beta)$, lo que contradice la inyectividad de f. Entonces, f es estrictamente monótona en I.

Solución del ejercicio 2172 ▲005403

Sea f la función característica de Q. El grupo de periodos de f es $\mathbb{Q}$. En efecto,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \ x + r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

y entonces
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \ f(x+r) = f(x)$. Pero se tiene también

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \ x + r \in \mathbb{Q}, \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

y por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \ f(x+r) \neq f(x)$.

Solución del ejercicio 2173 ▲005405

Id es solución. Recíprocamente, sea f una biyección de $[0,1]$ en sí mismo verificando $\forall x \in [0,1], \ f(2x - f(x)) = x$. Necesariamente, $\forall x \in [0,1], \ 0 \leqslant 2x - f(x) \leqslant 1$ y entonces $\forall x \in [0,1], \ 2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x$. Sea f^{-1} el recíproco de f.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \ f(2x - f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1], \ 2x - f(x) = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0,1], \ f(f(y)) - 2f(y) + y = 0 \\ &\quad (\text{pues } \forall x \in [0,1], \ \exists! y \ [0,1]/ \ x = f(y)).\end{aligned}$$

Sea $y \in [0,1]$ y $u_0 = y$. Usando $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$, se define una sucesión de reales de $[0,1]$ (pues $[0,1]$ es estable por f). La condición $\forall y \in [0,1], \ f(f(y)) - 2f(y) + y = 0$ proporciona $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, o aún $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. La sucesión $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es constante o aún u es aritmética. Pero,

u es igualmente acotada y por lo tanto, u es constante. En particular, $u_1 = u_0$, lo que proporciona $f(y) = y$. Se ha demostrado que $\forall y \in [0,1],\ f(y) = y$ y entonces $f = \mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 2174 ▲005406

1. Sea n un entero natural no nulo dado. Para x elemento de $[0,1-\frac{1}{n}]$, se escribe $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. g está definida y es continua en $[0,1-\frac{1}{n}]$. Además,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})) = f(1) - f(0) = 0.$$

   Ahora, si existe un entero k elemento de $\{0,\dots,n-1\}$ tal que $g(\frac{k}{n}) = 0$, se ha encontrado un real x de $[0,1]$ tal que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ (a saber $x = \frac{k}{n}$). Si no, todos los $g(\frac{k}{n})$ son no nulos y, es de suma nula, existen dos valores de la variable en los que g toma valores de signos opuestos. Porque g es continua en $[0,1-\frac{1}{n}]$, el teorema de valores intermedios nos permite afirmar que g se anula al menos una vez en este intervalo, lo que nuevamente proporciona una solución a la ecuación $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

2. Sea $a \in]0,1[$ tal que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Sea, para $x \in [0,1]$, $f(x) = |\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}| - x|\operatorname{sen} \frac{\pi}{a}|$. f es continua en $[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ pero,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) - f(x) = (|\operatorname{sen} \frac{\pi(x+a)}{a}| - |\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}|) - ((x+a) - x)|\operatorname{sen} \frac{\pi}{a}| = -a|\operatorname{sen} \frac{\pi}{a}| \neq 0.$$

3. (a) y b) Sea $g(t)$ la distancia, expresada en kilómetros, recorrida por el ciclista al instante t expresado en horas, $0 \leqslant t \leqslant 1$, después, para $t \in [0,1]$, $f(t) = g(t) - 20t$. f es continua en $[0,1]$ (si el ciclista mantiene una cierta coherencia) y se comprueba $f(0) = f(1) = 0$. De acuerdo a 1), $\exists t_1 \in [0,\frac{1}{2}]$, $\exists t_2 \in [0,\frac{19}{20}]$ tales que $f(t_1+\frac{1}{2}) = f(t_1)$ y $f(t_2+\frac{1}{20}) = f(t_2)$, lo que se escribe aún $g(t_1+\frac{1}{2}) - g(t_1) = 10$ y $g(t_2+\frac{1}{20}) - g(t_2) = 1$.

   c) Se define para $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(t) = |\operatorname{sen} \frac{4\pi t}{3}| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ y entonces, $g(t) = |\operatorname{sen} \frac{4\pi t}{3}| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t \in [0,\frac{1}{4}]$, $f(t+\frac{3}{4}) - f(t) \neq 0$ o aún $g(t+\frac{3}{4}) - g(t) \neq 15$.

Solución del ejercicio 2175 ▲000698

1. La función f_1 es derivable fuera de $x = 0$. En efecto, $x \mapsto \frac{1}{x}$ es derivable en $\mathbb{R}^*$ y $x \mapsto \cos x$ es derivable en $\mathbb{R}$, así por composición $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ es derivable en $\mathbb{R}^*$. Luego, multiplicando por la función derivable $x \mapsto x^2$, la función f_1 es derivable en $\mathbb{R}^*$. En lo que sigue, este tipo de discusión a menudo se omite o se abrevia como "f es derivable en I como suma, producto, composición de funciones derivables en I".

   Para saber si f_1 es derivable en 0 observar la tasa de crecimiento :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x\cos\frac{1}{x}.$$

   Pero $x\cos(1/x)$ tiende a 0 (si $x \to 0$) pues $|\cos(1/x)| \leqslant 1$. Así, la tasa de aumento tiende a 0. Entonces f_1 es derivable en 0 y $f_1'(0) = 0$.

2. Una vez más f_2 es derivable fuera de 0. La tasa de crecimiento en $x=0$ es :

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}.$$

Se sabe que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}\to 1$ y que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene límite cuando $x\to 0$. Así la tasa de crecimiento no tiene límite, por lo tanto f_2 no es derivable en 0.

3. La función f_3 se escribe :

$$f_3(x)=\frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

— Entonces, para $x\geqslant 1$ se tiene $f_3(x)=x$; para $0\leqslant x<1$ se tiene $f_3(x)=-x$; para $x<0$ se tiene $f_3(x)=x$.

— La función f_3 se define, continua y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. ¡Cuidado! La función $x\mapsto |x|$ no es derivable en 0.

— La función f_3 no es continua en 1, en efecto, $\lim\limits_{x\to 1+} f_3(x)=+1$ y $\lim\limits_{x\to 1-} f_3(x)=-1$. Entonces la función no es derivable en 1.

— La función f_3 es continua en 0. La tasa de crecimiento para $x>0$ es

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\frac{-x}{x}=-1$$

y para $x<0$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\frac{x}{x}=+1.$$

Entonces, la tasa de crecimiento no tiene límite en 0 y entonces f_3 no es derivable en 0.

Solución del ejercicio 2176 ▲000699

La función f es continua y derivable en $]0,1[$ y en $]1,+\infty[$. El único problema está en $x=1$. Primeramente, la función debe ser continua en $x=1$. El límite a la izquierda es $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=+1$ y a la derecha $\lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+bx+1=a+b+1$. Entonces $a+b+1=1$. Dicho de otra manera $b=-a$. Es necesario ahora que las derivadas derecha e izquierda sean iguales. Como la función f restringida a $]0,1]$ es definida por $x\mapsto\sqrt{x}$, entonces es derivable a la izquierda y la derivada y a la izquierda se obtiene evaluando la función derivada $x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$. Así $f'_g(1)=\frac{1}{2}$. Para la derivada a la derecha se trata de calcular el límite de la taza de crecimiento $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, cuando $x\to 1$, con $x>1$. Por lo tanto

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{ax^2+bx+1-1}{x-1}=\frac{ax^2-ax}{x-1}=\frac{ax(x-1)}{x-1}=ax.$$

La función f es derivable a la derecha y $f'_d(1)=a$. Para que f sea derivable, es necesario y suficiente que las derivadas a la derecha y a la izquierda existen y sean iguales, por lo tanto aquí la condición es $a=\frac{1}{2}$. El único par (a,b) que hace f derivable en $]0,+\infty[$ es $(a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2})$.

Solución del ejercicio 2177 ▲000700

f es C^∞ sobre $\mathbb{R}^*$.

1. Como $|\operatorname{sen}(1/x)|\leqslant 1$, entonces f tiende a 0, cuando $x\to 0$. Entonces extendiendo f por $f(0)=0$, la función f extendida es continua en $\mathbb{R}$.

2. La tasa de crecimiento es
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}.$$
Como anteriormente tiene un límite (que vale 0) en $x=0$. Entonces f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

3. Sobre $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\,\mathrm{sen}(1/x) - \cos(1/x)$, Entonces $f'(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$. Entonces f' no es continua en 0.

Solución del ejercicio 2178 ▲000701

1. Según que $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$, entonces $f^{(n)}(x)$ vale respectivamente $\mathrm{sen}\,x$, $\cos x$, $-\mathrm{sen}\,x$, $-\cos x$.
2. La derivada de $\mathrm{sen}^2 x$ es $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x = \mathrm{sen}\,2x$. Y las derivadas siguientes son : $2\cos 2x$, $-4\,\mathrm{sen}\,2x$, $-8\cos 2x$, $16\,\mathrm{sen}\,2x$,... Y según que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, entonces $g^{(n)}(x)$ vale respectivamente $2^{n-1}\,\mathrm{sen}\,2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\,\mathrm{sen}\,2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.
3. $\mathrm{sen}(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ y se deriva...

Solución del ejercicio 2186 ▲000709

El límite de f en 0 es 0, por lo tanto f es continua en 0. Igualmente la tasa de crecimiento de f en 0 es $f(x)/x$ que tiende a 0. Entonces f es derivable en 0 y $f'(0)=0$. Fuera de 0, se tiene $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^{-2}}x^{-3}$, por lo tanto f' es continua en 0. Se continua de la misma manera notando que si $f^{(n)}(x) = P(1/x)\exp(-1/x^2)$, donde P es un polinomio y $f^{(n)}(0)=0$. Entonces $f^{(n)}(x)$ tiende a 0 si x tiende a 0 y $f^{(n)}$ es continua. Además, $f^{(n)}$ es derivable en 0 porque su tasa de crecimiento es $1/xP(1/x)\exp(-1/x^2)$ que tiende a 0, por lo tanto $f^{(n+1)}(0)=0$. Fuera de 0 se $f^{(n+1)}(x) = Q(1/x)\exp(-1/x^2)$, donde Q es un polinomio. Y se comienza de nuevo...

Solución del ejercicio 2200 ▲005413

1. Para $n \geqslant 1$, se tiene por la fórmula de LEIBNIZ :
$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)} \text{ (pues } (x^{n-1})^{(n)}) = 0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-k}}\\ &\text{(pues } (\ln(1+x))^{(n-k)} = (\frac{1}{1+x})^{(n-k-1)}).\end{aligned}$$
Luego, para $x=0$, $(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(0) = n\cdot(n-1)! = n!$, y para $x \neq 0$,
$$\begin{aligned}(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(x) &= -\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\frac{x}{x+1})^{n-k} = -\frac{(n-1)!}{x}((1-\frac{x}{x+1})^{n}-1)\\ &= \frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}.\end{aligned}$$

2. Se puede derivar fácilmente las sumas o, más generalmente, las combinaciones lineales. Entonces, se linealiza :

$$\begin{aligned}\cos^3 x \operatorname{sen}(2x) &= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})^3(-\frac{1}{4})(\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{-2ix}) = -\frac{1}{32}(\mathrm{e}^{3ix}+3\mathrm{e}^{ix}+3\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-3ix})(\mathrm{e}^{2ix}-2+\mathrm{e}^{-2ix})\\ &= -\frac{1}{32}(\mathrm{e}^{5ix}+\mathrm{e}^{3ix}-2\mathrm{e}^{ix}-2\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-5ix}) = -\frac{1}{16}(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)).\end{aligned}$$

Luego, para n natural dado :

$$(\cos^3 x \operatorname{sen} 2x)^{(n)} = -\frac{1}{16}(5^n\cos(5x+n\frac{\pi}{2})+3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})-2\cos(x+n\frac{\pi}{2})),$$

expresión que se puede detallar según la congruencia de n módulo 4.

3. Se sabe cómo derivar objetos simples y, por lo tanto, se descomponen en elementos simples :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)^3} = \frac{X^2-2X+1+2X-2+2}{(X-1)^3} = \frac{1}{X-1}+\frac{2}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}.$$

Así, para n entero natural dado,

$$\begin{aligned}\left(\frac{X^2+1}{(X-1)^3}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+1}}+2\frac{(-1)^n(n+1)!}{(X-1)^{n+2}}+\frac{(-1)^n(n+2)!}{(X-1)^{n+3}}\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X-1)^{n+3}}((X-1)^2+2(n+1)(X-1)+(n+2)(n+1))\\ &= \frac{(-1)^n n!(X^2+2nX+n^2+n+1)}{(X-1)^{n+3}}.\end{aligned}$$

4. La función propuesta es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ en virtud de teoremas generales. La fórmula de LEIBNIZ da para $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}((x^3+2x-7)\mathrm{e}^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)}\\ &= ((x^3+2x-7)+n(3x^2+2)+\frac{n(n-1)}{2}(6x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 6)\mathrm{e}^x\\ &= (x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7)\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2201 ▲000715

$Q_n(t) = (1-t^2)^n$ es un polinomio de grado $2n$, si se deriva n veces, se obtiene un polinomio de grado n. Los valores -1 y $+1$ son raíces de orden n de Q_n, por lo tanto $Q_n(1) = Q_n'(1) = \cdots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$. Lo mismo en -1. Finalmente, $Q(-1) = 0 = Q(+1)$, entonces por el teorema de Rolle existe $c \in]-1,1[$ tal que $Q_n'(c) = 0$.

Entonces $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle dos veces (sobre $[-1,c]$ y en $[c,+1]$), se obtiene la existencia de raíces d_1, d_2, para Q_n'', que se añaden a las raíces -1 y $+1$. Se continua así por recurrencia. Se obtiene para $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ raíces : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Se aplica el teorema de Rolle n veces. Se obtienen n raíces para $P_n = Q_n^{(n)}$. Como un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces, se obtienen todas las raíces. Por construcción, estas raíces son reales y distintas, por lo tanto simples.

Solución del ejercicio 2203 ▲000717

---

1. Por reducción al absurdo se supone que existen (al menos) cuatro raíces distintas para $P_n(X) = X^n + aX + b$. Se denotan los $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Por el teorema de Rolle aplicado tres veces (entre x_1 y x_2, entre x_2 y x_3,...) existen $x_1' < x_2' < x_3'$ de raíces de P_n'. Se aplica el teorema de Rolle dos veces entre x_1' y x_2' y entre x_2' y x_3'. Se obtienen dos raíces distintas para P_n''. Por lo tanto $P_n'' = n(n-1)X^{n-2}$ solo puede tener 0 como raíces. Entonces se obtiene una contradicción.
2. *Otro método :* El resultado es obvio si $n \leqslant 3$. Se supone por lo tanto, $n \geqslant 3$. Sea P_n la aplicación $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces $P_n'(X) = nX^{n-1} + a$ se anula en dos valores como máximo. P_n es sucesivamente creciente-decreciente-creciente o decreciente-creciente-decreciente. Y por lo tanto P_n se anula a lo sumo tres veces.

Solución del ejercicio 2204 ▲000718

Como f' es derivable, es continua. Como f se anula $n+1$ veces, f' cambia de signo (al menos) $n+1$ veces, por lo tanto se anula (al menos) n veces. Por supuesto se puede comenzar de nuevo, el resultado se sigue.

Solución del ejercicio 2207 ▲000721

La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ así en particular en $[a,b]$. El teorema del incremento finito asegura la existencia de un número $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Pero para la función particular de este ejercicio podemos hacer explícito c. En efecto, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implica $\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a)$. Así $c = \frac{a+b}{2}$. Geométricamente, la gráfica $\mathscr{P}$ de f es una parábola. Si se toman dos puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ perteneciendo a esta parábola, entonces la recta (AB) es paralela a la tangente en $\mathscr{P}$ que pasa en $M = (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. La abscisa de M es el punto medio de las abscisas de A y B.

Solución del ejercicio 2210 ▲000724

1. Sea $g(t) = \ln t$. Se aplica el teorema de incrementos finitos en $[x,y]$. Existe $c \in]x,y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y-x)$. Sea $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$. Así $\frac{\ln y - \ln x}{y-x} = \frac{1}{c}$. Por lo tanto $x < c < y$, y se tiene $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$, lo que dan las desigualdades buscadas.
2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. Y $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Como f'' es negativo, entonces f' es decreciente en $[0,1]$. Por lo tanto $f'(0) = \frac{x - y - y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ de acuerdo con la primera pregunta y de la misma manera $f'(1) < 0$. Por el teorema de valores intermediarios, existe $c \in [x,y]$ tal que $f'(c) = 0$. Ahora f' es positiva en $[0,c]$ y negativo en $[c,1]$. Así f es creciente en $[0,c]$ y decreciente en $[c,1]$. Por lo tanto $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$, y para todo $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$. Esto prueba la desigualdad pedida.
3. Geométricamente, se ha probado que la función ln es cóncavo, es decir que la cuerda (el segmento que va de $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ está bajo la curva de ecuación $y = f(x)$.

Solución del ejercicio 2211 ▲000725

El teorema de incrementos finitos da : $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n+1-n) = \frac{1}{c_n}$, con $c_n \in [n, n+1]$. Por lo tanto $c_n \geqslant n$, por lo tanto $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{c_n}$. Por lo tanto :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La última igualdad se obtiene porque la suma es telescópica y $\ln 1 = 0$. Entonces $S_n \geqslant \ln(n+1)$, por lo tanto $S_n \to +\infty$.

Solución del ejercicio 2213 ▲000727

Para simplificar se supone $x > 0$.

1. Aplicar el teorema de incrementos finitos no va a ser suficiente. En efecto, sea $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. Entonces existe $c \in]0,x[$ tal que $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$. Sea $f(x) = (\mathrm{e}^c - 1)x$. Sea ahora $g(x) = \mathrm{e}^x - 1$, entonces, por el teorema de incrementos finitos de $[0,c]$ existe $d \in]0,c[$ tal que $g(c) - g(0) = g'(d)(c-0)$, sea $\mathrm{e}^c - 1 = \mathrm{e}^d c$. Así $\mathrm{e}^x - 1 - x = f(x) = (\mathrm{e}^c - 1)x = \mathrm{e}^d cx$. Como $d \leqslant c \leqslant x$, entonces $\mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \mathrm{e}^x x^2$.

   Esto da una desigualdad, pero falta un factor $\frac{1}{2}$.

2. Se va obtener la desigualdad por aplicación del teorema de Rolle. Sea ahora $f(t) = \mathrm{e}^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. Se tiene $f(0) = 0$, $x > 0$ es fijo, se elige k tal que $f(x) = 0$, (un tal k existe porque $\mathrm{e}^x - 1 - x > 0$ y $x^2 > 0$). Como $f(0) = 0 = f(x)$, entonces por Rolle existe $c \in]0,x[$ tal que $f'(c) = 0$. Pero $f'(t) = \mathrm{e}^t - t - kt$, por lo tanto $f'(0) = 0$. Ahora $f'(0) = 0 = f'(c)$, entonces existe (por Rolle siempre !) $d \in]0,c[$ tal que $f''(d) = 0$. Por lo tanto $f''(t) = \mathrm{e}^t - k$ y $f''(d) = 0$ da $k = \mathrm{e}^d$. Así $f(x) = 0$ se convierte en $\mathrm{e}^x - 1 - x = \mathrm{e}^d \frac{x^2}{2}$. Como $d \leqslant x$, entonces $\mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \mathrm{e}^x \frac{x^2}{2}$.

Solución del ejercicio 2215 ▲005408

Se tiene ya $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Porque $a \neq b$, se puede elegir A tal que $g(a) = 0$ (a saber $A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)$. Con las hipótesis hechas sobre f, g es por otro lado continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. El teorema de ROLLE entonces permite afirmar que existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$. Para $x \in]a,b[$, se tiene

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + A\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + A\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + A\frac{(b-x)^n}{n!} = \frac{(b-x)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

Así, existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{(b-c)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(c)) = 0$, y entonces, ya que $c \neq b$, $A = f^{(n+1)}(c)$. La igualdad $g(a) = 0$, entonces se escribe

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

para un cierto real c de $]a,b[$.

Solución del ejercicio 2216 ▲005409

Para $x \in [a,b]$, se escribe $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$, donde A se elige de manera que $g(b) = g(a) = 0$ (es decir $A = \frac{1}{(b-a)^3}(f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)))$.

$f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$ y entonces $g \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$. Para $x \in [a,b]$, se tiene :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x)+f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2,$$

luego

$$g''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) - 6A(x-a) = \frac{x-a}{2}(-12A - f^{(3)}(x)).$$

g es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y se comprueba además $g(a) = g(b)$. Entonces, de acuerdo con teorema de ROLLE, existe $d \in]a,b[$ tal que $g'(d) = 0$. Igualmente, g' es continua en $[a,d] \subset [a,b]$, derivable en $]a,d[(\neq \varnothing)$ y se comprueba además $g'(a) = g'(d)(= 0)$. Por el teorema de ROLLE, existe $c \in]a,d[\subset]a,b[$ tal que $g''(c) = 0$ o incluso tal que $A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (ya que $c \neq a$). Escribiendo explícitamente la igualdad $g(b) = 0$, se ha demostrado que :

$$\exists c \in]a,b[/\ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$ y si F es una primitiva de f sobre $[a,b]$, la fórmula anterior se escribe :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \frac{b-a}{2}(F'(b)+F'(a)) - \frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

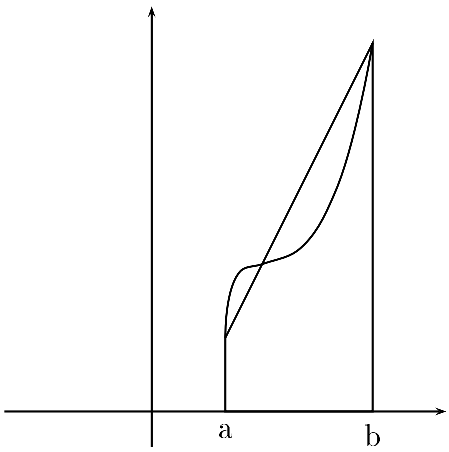
Así, si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \cap D^2(]a,b[,\mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a,b[/\ \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interpretación geométrica. Si f es positiva, $A_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ es el área del dominio $D = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ a \leqslant x \leqslant b$ y $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ y $A_2 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ es el área del trapecio $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$.

Si $M_2 = \sup\{|f''(x)|,\ x \in [a,b]\}$ existe en $\mathbb{R}$, se tiene :

$$|A_1 - A_2| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$



Solución del ejercicio 2217 ▲005412

---

1. $(X^2-1)^n$ es de grado $2n$ y entonces, L_n es de grado $2n-n=n$. Después, $\mathrm{dom}(L_n)=\mathrm{dom}((X^{2n})^{(n)})=\frac{(2n)!}{n!}$.
2. 1 y -1 son raíces de orden n de A_n y por lo tanto, raíces de orden $n-k$ de $A_n^{(k)}$, para todo k elemento de $\{0,\dots,n\}$. Demostrar por inducción sobre k que $\forall k\in\{0,\dots,n\}$, $A_n^{(k)}$ se anula en al menos k valores dos a dos distintos del intervalo $]-1,1[$. Para $k=1$, A_n es continuo en $[-1,1]$ y derivable en $]-1,1[$. Además, $A_n(0)=A_n(1)=0$ y de acuerdo con el teorema de ROLLE, A_n' se anula al menos una vez en el intervalo $]-1,1[$. Sea k elemento de $\{1,\dots,n-1\}$. Se supone que $A_n^{(k)}$ se anula en al menos k valores de $]-1,1[$. $A_n^{(k)}$ se anula además en 1 y -1, pues $k\leqslant n-1$ y por lo tanto, se anula en $k+2$ valores al menos en el intervalo $[-1,1]$. Por el teorema de ROLLE, $A_n^{(k+1)}$ se anula en al menos $k+1$ puntos de $]-1,1[$ (al menos una vez por intervalo abierto). Se ha demostrado que $\forall k\in\{0,\dots,n\}$, $A_n^{(k)}$ se anula en al menos k valores de $]-1,1[$. En particular, $A_n^{(n)}=L_n$ se anula en al menos n reales dos s dos distintos de $]-1,1[$. Porque L_n es de grado n, se han encontrado todas las raíces de L_n, todos reales, simples y en $]-1,1[$.

Solución del ejercicio 2218 ▲005415

Demostrar que $(\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Sea $x>0$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}&\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})\\&\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x)<1<(x+1)(\ln(x+1)-\ln x)\\&\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

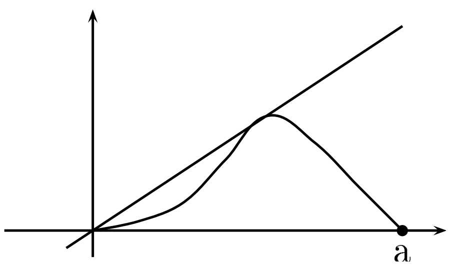
Sea x un número real fijo estrictamente positivo. Para $t\in[x,x+1]$, se escribe $f(t)=\ln t$. f es continua en $[x,x+1]$ y derivable en $]x,x+1[$. Entonces, por el teorema de incrementos finitos, existe un real c en $]x,x+1[$ tal que $f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)$ o aún

$$\exists c\in]x,x+1[/\ \ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c},$$

lo que demuestra que $\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$, y así como

$$\forall x>0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Solución del ejercicio 2219 ▲005416



Sea x_0 un real no nulo. Una ecuación de la tangente (T_{x_0}) a la curva representativa de f en el punto de abscisa x_0 es $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. (T_{x_0}) pasa por el origen si y solo si

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Para x real, se establece $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (g es « la función pendiente en el origen »).
Porque f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, g ya es continua y derivable en $\mathbb{R}^*$.
Porque f es derivable en 0 y que $f(0) = f'(0) = 0$, g es además continua en 0.
Finalmente, g es continua en $[0,a]$, derivable en $]0,a[$ y se comprueba $g(0) = g(a)(=0)$. Por el teorema de ROLLE, existe un real x_0 en $]0,a[$ tal que $g'(x_0) = 0$. Porque x_0 no es nulo, se tiene $g'(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$.
La igualdad $g'(x_0) = 0$ se escribe $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ y, por el inicio del año ejercicio, la tangente a la curva representativa de f en el punto de abscisa x_0 pasa por el origen.

Solución del ejercicio 2220 ▲005421

Pensando en la expresión desarrollada de Δ, se ve que Δ es continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y se comprueba $\Delta(a) = \Delta(b)(=0)$ (un determinante con dos columnas idénticas es nulo). Entonces, de acuerdo con teorema de ROLLE, $\exists c \in]a,b[/\ \Delta'(c) = 0$. Pero, para $x \in]a,b[$, $\Delta'(x) = f'(x)(g(a)-g(b)) - g'(x)(f(a)-f(b))$ (derivada de un determinante). La igualdad $\Delta'(c) = 0$ se escribe : $f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$, lo que faltaba demostrar.
(Observación. Este resultado generaliza el teorema de incrementos finitos ($g = \mathrm{Id}$ « es » el teorema de incrementos finitos.))

Solución del ejercicio 2222 ▲001229

---

1. Para todo $n \geqslant 2$ se tiene : $P_n(0) = -1$ y $P_n(1) = 3$. Como la aplicación $X \mapsto P_n(X)$ es continua, ella se anula en (al menos) un punto en el intervalo $]0,1[$. Como, por otro lado, para todo X positivo, $P_n'(X) = nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + 2X + 1$ es estrictamente positivo, la aplicación $X \mapsto P_n(X)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+$ y se anula en a lo sumo un punto de $\mathbb{R}_+$. En consecuencia P_n tiene una raíz positiva única λ_n que además satisfacen la desigualdad $0 < \lambda_n < 1$.
2. Para todo $X \in]0,1[, P_n(X) - P_{n-1}(X) = X^n - X^{n-2} < 0$. En particular $P_n(\lambda_{n-1}) < 0$, por lo tanto $\lambda_n > \lambda_{n-1}$. La sucesión $(\lambda_n)_{n\geqslant 2}$ es creciente y acotada superiormente (cf 1.) : es convergente.
3. Para todo $n \geqslant 2$ se tiene : $\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} = -\lambda_n^2 - \lambda_n + 1$. Por lo tanto $P_n\left(\frac{3}{4}\right) > \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 > 0$ y la sucesión $(\lambda_n^n + \lambda_n^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las desigualdades $0 < \lambda_n^n + \lambda_n^{n-1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ y converge a 0. Lo mismo ocurre con la sucesión $(-\lambda_n^2 - \lambda_n + 1)_{n\geqslant 2}$. Pasando al límite, se obtiene la igualdad : $\ell^2 + \ell - 1 = 0$. La única solución positiva de esta ecuación es $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, se tiene la igualdad : $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Observaciones

1. La desigualdad $0 < \lambda_n < 1$ (para todo $n \geqslant 2$) no implica que $(\lambda_n^n)_{n\geqslant 2}$ converge a 0. Por ejemplo, lo siguiente $(v_n)_{n\geqslant 1}$ definida por $v_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ converge a $\frac{1}{e}$. (Para verificar esto, se aplica el 1. del problema a $\log(v_n)$.)

2. La propiedad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$ no implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right) = 0$.

   Por ejemplo... $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \log(2)$.

Solución del ejercicio 2226 ▲001233

---

1. $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)$. Como f es continua, ε es continua en $]a,b[\setminus\{c\}$ y la continuidad en c de ε equivale a la derivabilidad de f en c. La unicidad es obvia.
2. Para todo $n \geqslant 1, S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} < 0$ (por ejemplo porque $\dfrac{1}{2n+2} < \dfrac{1}{2n}$ y $\dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{2n}$, por lo tanto $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} < 2 \times \dfrac{1}{2n}$) por lo que la sucesión $(S_n)_{n\geqslant 1}$ es decreciente. Es minorada (por 0) por lo que converge.
3. Para todo $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, por lo tanto $(n+1) \times \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant (n+1) \times \frac{1}{n}$, de donde, pasando al límite, la desigualdad $\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1$.
4. Sea ε la aplicación de $]-1,1[$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Para todos $n,k \in \mathbb{N}$, $n > 0$, se tiene la igualdad :

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

   por lo tanto $\sigma_n(f) - f'(0)S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$. Como, para todo $k \geqslant 0$, se tiene $\dfrac{1}{n+k} \leqslant \dfrac{1}{n}$, se deduce que las desigualdades :

$$|\sigma_n(f) - f'(0)S_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{n}\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|.$$

   Como $\displaystyle\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]} |\varepsilon(x)|$, esta cantidad converge a 0, cuando n tiende a infinito (ya que ε es continua y se anula en 0).
5. De las igualdades $\log\left(1+\dfrac{1}{n+k}\right) = \log\left(\dfrac{n+k+1}{n+k}\right) = \log(n+k+1) - \log(n+k)$ se deduce que :

$$\sigma_n(f) = \log(2n+1) - \log(n) = \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \log\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

   Como la función logaritmo es continua, $(\sigma_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge a $\log(2)$, cuando n tiende a infinito. Así $S = \log(2)$.
6. Por las dos cuestiones anteriores es inmediato que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \log(2)$.
7. Sea $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una aplicación continua, derivable en 0 y tal que $f(0) = 0$. Sea ε la aplicación de $]-1,1[$, con valores en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = f'(0)x + \varepsilon(x)$. Se pone, para todo $n,k \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$\sigma_n(p,f) = \sum_{k=0}^{pn} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \text{ y } S_{n,p} = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}.$$

Para todos $n,k \in \mathbb{N}, n>0$ se tiene la igualdad : $f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{n+k}f'(0) + \frac{1}{n+k}\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)$, de donde

$$|\sigma_n(p,f) - f'(0)S_{n,p}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant \frac{pn+1}{n} \sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]}\left|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

por lo tanto esta diferencia converge a 0, cuando n tiende a infinito. Cuando f es la función $x \mapsto \log(1+x)$, se obtiene (como anteriormente) que :

$$\sigma_n(p,f) = \log\left((p+1)n+1\right) - \log(n) = \log\left(1+p+\frac{1}{n}\right),$$

luego que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(p,f) = \log(p+1)$, es decir $S_p = \log(p+1)$.

Solución del ejercicio 2231 ▲003982

$y_i = \frac{x_i}{x_{i+1}} \Rightarrow \frac{n}{y_1\cdots y_n} \leqslant \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$.

Solución del ejercicio 2237 ▲003988

1.
2. $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \to 0$.
   TIF entre x y $x/2 \Rightarrow 2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant xf'(x) \leqslant 0 \Rightarrow xf'(x) \to 0$.

Solución del ejercicio 2243 ▲003994

1. Función decreciente en $\mathbb{R}^+$.
2. $f(x) - xf'(x) = -x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Así, $x \mapsto \frac{f(x)-p}{x} \searrow$ y $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} \nearrow$.
3. $p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x)$.

Solución del ejercicio 2244 ▲003995

1. Sean $x<y$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \frac{f(y)-f(0)}{y-0} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geqslant \frac{f(y)}{y} + f(0)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$.
2. Para $x<y$: $f(x+y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, con $t = \frac{x}{x-y} < 0$, por lo tanto $f(x+y) - f(x) - f(y) \leqslant \frac{xy}{x-y}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right) \leqslant 0$.

Solución del ejercicio 2248 ▲003999

1.
2. Tomar x tal que $f(x)$ sea maximal.
3.
4.

Solución del ejercicio 2249 ▲004000

Para $a_0 : \left|f(a_0+h)-f(a_0)-|h|\right| \leqslant \frac{|h|}{2}$.

Solución del ejercicio 2252 ▲004003

Sea $F(x)=x^2+xG(x)$. Se tiene para $h>0 : f(x) \leqslant \frac{F(x+xh)-F(x)}{xh} = 2x+xh+\frac{G(x+xh)-G(x)}{h}+G(x+xh)$. Sea $\varepsilon>0$ y A tal que $y \geqslant A \Rightarrow |G(y)| \leqslant \varepsilon^2$. Se toma $h=\varepsilon/\sqrt{x}$ y se obtiene $f(x)-2x-\varepsilon\sqrt{x} \leqslant \varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2$, de donde $f(x) \leqslant 2x+o(\sqrt{x})$. La desigualdad inversa se demuestra igualmente.

Solución del ejercicio 2253 ▲000728

$f'(x)=2(1-k)^3x+3(1+k)x^2$, $f''(x)=2(1-k)^2+6(1+k)x$. Se tiene $f'(0)=0$ y $f''(0)=2(1-k)^3$. Entonces si $k \neq 1$, la segunda derivada es no nula en $x=0$, 0 es un extremo (máximo o mínimo) local. Si $k=1$, entonces $f(x)=2x^3$ y por supuesto 0 no es un extremo local. En todos los casos 0 no es ni un mínimo global, ni un máximo global (observar los límites en $+\infty$ y $-\infty$).

Solución del ejercicio 2258 ▲000733

$f'(x)=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$, entonces los extremos pertenecen a $\{0,\frac{3}{4}\}$. Como $f''(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$. Entonces f'' no se anula en $\frac{3}{4}$, por lo tanto $\frac{3}{4}$ da un extremo local (que es incluso un mínimo global). Sin embargo, $f''(0)=0$ y $f'''(0) \neq 0$, por lo tanto 0 es un punto de inflexión que no es un extremo (ni siquiera local, pensar en una función del tipo $x \mapsto x^3$).

Solución del ejercicio 2259 ▲000734

1. $f'_\lambda(x)=\lambda e^x+2x$, $f''_\lambda(x)=\lambda e^x+2$. Los puntos de inflexión son las raíces de f''_λ, entonces si $\lambda \geqslant 0$ no existe punto de inflexión, si $\lambda<0$, entonces existe un punto de inflexión en $x_\lambda=\ln(-2/\lambda)$.
2. Si $\lambda \geqslant 0$, entonces f''_λ es siempre estrictamente positiva, por lo tanto f'_λ es estrictamente creciente, en $-\infty$ el límite de f'_λ es $-\infty$, en $+\infty$ el límite de f'_λ es $+\infty$, entonces existe un único real y_λ tal que $f'_\lambda(y_\lambda)=0$. f_λ es decreciente en $]-\infty,y_\lambda]$ y creciendo en $[y_\lambda,+\infty[$. Y en y_λ se tiene un mínimo absoluto.
3. Se supone $\lambda<0$. Entonces f''_λ se anula solo en x_λ. f'_λ es creciente en $]-\infty,x_\lambda]$ y decreciente en $[x_\lambda,+\infty[$. Entonces f'_λ tiene raíces si y solo si $f'(x_\lambda) \geqslant 0$. Por lo tanto $f'(x_\lambda)=-2+2x_\lambda$.
   (a) Si $\lambda=-2/e$, entonces $f'_\lambda(x_\lambda)=0$. Como $f''_\lambda(x_\lambda)=0$ y f'''_λ, no se anula entonces x_λ es un punto de inflexión que no es un extremo local.
   (b) Si $\lambda>-2/e$, entonces $f'_\lambda(x_\lambda)<0$, por lo tanto f'_λ es negativo entonces f es estrictamente decreciente. No hay extremo local.
   (c) Si $-2/e<\lambda<0$, entonces $f'_\lambda(x_\lambda)>0$. Así f'_λ se anula en dos puntos, una vez en $]-\infty,x_\lambda[$ y una en $]x_\lambda,+\infty[$. Estos son los extremos locales (mínimo y máximo respectivamente).

Solución del ejercicio 2263 ▲000738

El teorema de Rolle dice que si $h:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto $]a,b[$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c)=0$.

1. Se supone por reducción al absurdo, que existe $x_0 \in]a,b]$ tal que $g(x_0) = g(a)$. Entonces aplicando el teorema de Rolle a la restricción de g en el intervalo $[a,x_0]$ (las hipótesis son claramente verificadas), se deduce que existe $c \in]a,x_0[$ tal que $g'(c) = 0$, lo que contradice las hipótesis hechas sobre g. Por lo tanto, se ha demostrado que $g(x) \neq g(a)$, para todo $x \in]a,b]$.
2. Según la pregunta anterior, se tiene en particular $g(b) \neq g(a)$ y entonces p es un número real bien definido y $h = f - p \cdot g$ es entonces una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Un simple cálculo demuestra que $h(a) = h(b)$. De acuerdo con el teorema de Rolle, se sigue que existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$. Esto implica la relación requerida.
3. Para cada $x \in]a,b[$, se puede aplicar la pregunta 2. En las restricciones de f y g en el intervalo $[x,b]$, se deduce que existe un punto $c(x) \in]x,b[$, dependiendo de x tal que

   $$(*) \qquad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

   Entonces, como $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ y $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, (pues $c(x) \in]x,b[$) se deduce pasando al límite en $(*)$ que

   $$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$

   Este resultado es conocido bajo el nombre de “regla de l'Hôpital”.
4. Se considera las dos funciones $f(x) = \arccos x$ y $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, para $x \in [0,1]$. Estas funciones son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$ y $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, $g'(x) = -x/\sqrt{1-x^2} \neq 0$, para todo $x \in]0,1[$. Aplicando los resultados de la pregunta 3., se deduce que

   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Solución del ejercicio 2264 ▲000739

1. (a) Es claro que la función f es derivable en $\mathbb{R}^+$ ya que es una función racional sin polos en este intervalo. Además, de acuerdo con la fórmula de la derivada de un cociente, se obtiene por $x \geqslant 0$:

   $$f'(x) = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}.$$

   (b) Por la expresión anterior $f'(x)$ es del signo de $x^{n-1} - 1$ sobre $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto se tiene : $f'(x) \leqslant 0$, para $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $f'(x) \geqslant 0$, para $x \geqslant 1$. Resulta que f es decreciente en $[0,1]$ y creciendo en $[1,+\infty[$ y consecuentemente f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}^+$ en el punto 1 y este mínimo vale $f(1) = 2^{1-n}$.
2. (a) Se sigue de la pregunta 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y entonces

   $$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n).$$

   (b) Aplicando la desigualdad anterior con $x = b/a$, inmediatamente, se deduce la desigualdad requerida (el caso del par $(0,0)$ es trivial).

Solución del ejercicio 2265 ▲000740

1. f es derivable en $\mathbb{R}_-^*$ como una composición de funciones derivables, y en $\mathbb{R}_+^*$ porque es nula en este intervalo ; estudiar así la derivabilidad en 0. Se tiene

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tiende a 0, cuando t tiende a 0 para valores negativos. Entonces f es derivable a la izquierda y a la derecha en 0 y estas derivadas son idénticas, por lo tanto f es derivable y $f'(0)=0$.

2. Se tiene

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0, \end{cases}$$

por lo que la tasa de crecimiento de f' en un vecindario de 0 es

$$\frac{f'(t)-f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0, \end{cases}$$

y tiende a 0, cuando t tiende a 0 para valores superior e inferior. Entonces f admite una segunda derivada en 0, y $f''(0)=0$.

3. (a) Ya se ha encontrado que $f'(t)=-e^{1/t}/t^2$, por lo tanto $f'(t)=P_1(t)/t^2e^{1/t}$ si se establece $P_1(t)=-1$. Por otro lado, $f''(t)=e^{1/t}/t^4+e^{1/t}(2/t^3)=\frac{1+2t}{t^4}e^{1/t}$, por lo que la fórmula es verdadera para $n=2$ poniendo $P_2(t)=1+2t$.

   (b) Se supone que la fórmula es verdadera en el rango n. Entonces $f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$, de donde

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n}-P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t}+\frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$

   por lo que la fórmula es verdadera en el rango $n+1$, con

$$P_{n+1}(t)=P_n'(t)t^2-(2nt+1)P_n(t).$$

4. Sobre $\mathbb{R}_-^*$ y en $\mathbb{R}_+^*$, f es indefinidamente derivable, por lo que basta con estudiar lo que sucede en 0. Demostrar por inducción que f es indefinidamente derivable en 0, y eso para todo $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$. Se sabe que es cierto en el rango 1. Se supone que f es n-veces derivable, y que $f^{(n)}(0)=0$. Entonces la tasa de crecimiento de $f^{(n)}$ en 0 es :

$$\frac{f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t>0, \end{cases}$$

y su límite es 0, cuando t tiende a 0 para valores superior e inferior. Entonces $f^{(n)}$ es derivable en 0, y $f^{(n+1)}(0)=0$. Así la hipótesis de recurrencia se verifica en rango $n+1$. En consecuencia, f es de clase C^∞.

Solución del ejercicio 2268 ▲003934

Contra-ejemplo : $f(t) = t^2$ si $t \geqslant 0$ y $f(t) = -t^2$ si $t < 0$.

Solución del ejercicio 2273 ▲003939

Sea $g(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt$. Se obtiene $(g^3)'(x) \to 3\ell^2$, cuando $x \to +\infty$, lo que implica (clásicamente) que $g^3(x) \sim 3\ell^2 x$, luego $f(x) \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

Solución del ejercicio 2277 ▲003943

TIF $\Rightarrow \ell = \sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 2283 ▲003949

Derivar con respecto a a, luego con respecto a b.

Solución del ejercicio 2287 ▲003953

1.
2. $f^{(n)}(1) = 2^n n!$, $f^{(n)}(-1) = (-2)^n n!$.
3.

Solución del ejercicio 2291 ▲003957

$\frac{f'(0)}{2}$.

Solución del ejercicio 2293 ▲003959

$f = \mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 2296 ▲003962

1. AF $\Rightarrow \exists\ w(x)$ comprendido entre $u(x)$ y $v(x)$ tal que $\frac{u^v - v^v}{u - v} = vw^{v-1} \to a^a$.
2. $u^v - v^u = (u^v - v^v) + (v^v - v^u) = (u - v)(vw_1^{v-1} - (\ln v)v^{w_2})$
   $u^u - v^v = (u - v)w_3^{w_3}(1 + \ln w_2)$
   $\Rightarrow \lim = \frac{1 - \ln a}{1 + \ln a}$.

Solución del ejercicio 2297 ▲003963

1.
2. Para $k \geqslant 0$, la sucesión (u_n) es creciente y $\ln u_n \leqslant \frac{k}{1-k}$.
   Para $k < 0$, (u_{2n}) decrece y converge, y $u_{2n+1} \sim u_{2n}$.

Solución del ejercicio 2299 ▲003965

$(1+x^2)f^{(n+1)}+2nxf^{(n)}+n(n-1)f^{(n-1)}=0$, para $n\geqslant 1$.
$g^{(n+1)}=3x^2g^{(n)}+6nxg^{(n-1)}+3n(n-1)g^{(n-2)}$, para $n\geqslant 0$.

Solución del ejercicio 2300 ▲003966

$(-1)^n\mathrm{e}^{-x}\big(x^3+(2-3n)x^2+(3n^2-7n)x+(-n^3+5n^2-4n-5)\big)$.

Solución del ejercicio 2301 ▲003967

$f^{(n)}(x)=2^n\mathrm{e}^{x\sqrt{3}}\operatorname{sen}(x+n\frac{\pi}{6})$.

Solución del ejercicio 2302 ▲003968

$\frac{d^n}{dx^n}\big(x^n(1-x)^n\big)=\sum\limits_{k=0}^{n}n!\,\big(C_n^k\big)^2(-1)^{n-k}x^{n-k}(1-x)^k$.
coeficiente de $x^n=(-1)^nn!\,\sum\limits_{k=0}^{n}\big(C_n^k\big)^2=(-1)^nA_{2n}^n$.

Solución del ejercicio 2303 ▲003969

$\frac{(n-1)!}{t}$, $\qquad \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\exp(1/t)$.

Solución del ejercicio 2304 ▲003970

1. $a_{n+1,k}=a_{n,k-1}+2(2k-n)a_{n,k}$.
2. $a_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$.

Solución del ejercicio 2309 ▲003975

1. En el punto de abscisa α tal que $\ln\alpha=\frac{a\ln a}{1-a}+1$, para $\mathscr{C}$, y $\alpha'=a\alpha$, para $\mathscr{C}'$.
2. Centro = $\left(0,\frac{a\ln a}{1-a}\right)$, respecto = a.

Solución del ejercicio 2310 ▲003976

Si f cambia de signo, sea por ejemplo $f(a)>0$, $f(b)<0$, $a<b$ y $c=\sup\{x$ tal que $f_{|[a,x]}$ es creciente$\}$. Entonces f es creciente en $[a,c]$ y $f(c)=0$, contradicción.

Solución del ejercicio 2311 ▲003977

Si se establece $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, se constata que $a(x) = F^{-1}(1+F(x))$ que prueba la existencia, la unicidad y el carácter $\mathscr{C}^\infty$ de a. Por la simetría, hay que demostrar que $a(-a(x)) = -x$ sea $\int_{-a(x)}^{-x} e^{t^2}\,dt = 1$, lo que es inmediato.

Solución del ejercicio 2312 ▲003978

Toda función lineal $\varphi : x \mapsto ax$ sirve. Recíprocamente, si φ es solución, entonces $\varphi(0) = 0$. Se denota $a = \varphi'(0)$ y $\psi(x) = \varphi(x) - ax$: ψ es igualmente solución y $\psi'(0) = 0$.
Si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\psi(x) = 2^n\psi(x/2^n) \to 0$, cuando $n \to \infty$, de donde $\psi = 0$ y $\varphi(x) = ax$.

Solución del ejercicio 2313 ▲003979

1. $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = m^{-1/m}$.
2.
3.
4. f y f' tienen límites nulos en 0^+ e infinitas en $+\infty$, por lo tanto $f(x) = o_{x\to 0^+}(x)$ y $x = o_{x\to+\infty}(f(x))$, lo que implica $f(x) - x$ se anula en $]0,+\infty[$. Si existen dos puntos fijos, $a < b$, luego por teorema de incrementos finitos la ecuación $f'(x) = 1$ admite una solución en $]0,a[$ y una en $]a,b[$, en contradicción con la biyectividad de $f' = f^{-1}$.
5. Se denota a el punto fijo de f, b el de g y se supone $a \neq b$, por ejemplo $a < b$. Se tiene $g(x) < x$, para $x \in]0,b[$, por lo tanto $g(a) < a = f(a)$. En consecuencia $g(x) < x \leqslant f(x)$ si $x \in [a,b[$; sea $]c,b[$ el más grande intervalo sobre el cual $g(x) < f(x)$. Se tiene $0 \leqslant c < a$, $g(c^+) = f(c^+) \leqslant c$ y f, g son estrictamente creciente, por lo tanto $g^{-1}(x) > f^{-1}(x)$, para $x \in]c,b[$. Así $g - f$ es estrictamente creciente en $]c,b[$ tiene un límite cero en c^+ y es negativa en b, es absurdo.

   Observación : el punto fijo es la proporción áurea m. Además, si f y g son dos elementos de E distintos, entonces $f - g$ no tiene signo constante en ningún vecindario de m^- (misma demostración).

Solución del ejercicio 2314 ▲003980

Se tiene $f' \leqslant 0$, por lo tanto f es decreciente en $\mathbb{R}$, y en particular admite límites finitos, a y b en $-\infty$ y $+\infty$, con $-1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$. Se supone $a > 0$: sea $\alpha \in]0,a[$. Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \leqslant x_0,\ f(x) \geqslant a - \alpha > 0$, de donde $f'(x) \leqslant -1 + \sqrt{a-\alpha} < 0$. Esto es incompatible con el caracter cota de f, así como en realidad se tiene $a \leqslant 0$. Se demuestra del mismo modo $b \geqslant 0$ y como $b \leqslant a$, finalmente se tiene $a = b = 0$.

Solución del ejercicio 2315 ▲005407

f' es continua en el segmento $[a,b]$ y por lo tanto, es acotada en este segmento.
Sea $M = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$, y sea g la función afín que toma los mismos valores que f en a y b (es decir $\forall x \in [a,b],\ g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$) luego $h = f - g$. Se va a demostrar que $h = 0$ bajo la hipótesis $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
h es derivable en $[a,b]$ y, para $x \in [a,b]$, $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x) - M \leqslant 0$. h es, por lo tanto decreciente en $[a,b]$. Así, $\forall x \in [a,b]$, $0 = h(b) \leqslant h(x) \leqslant h(a) = 0$ y $\forall x \in [a,b]$, $h(x) = 0$, o aún $f = g$. f es, por lo tanto afín en $[a,b]$.

Solución del ejercicio 2316 ▲005410

Se supone que f es convexa en un intervalo abierto $I =]a,b[$ (a y b reales o infinitos). Sea $x_0 \in I$. Se sabe que la función pendiente en x_0 es creciente. Para $x \neq x_0$, se escribe $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Sea x' un elemento de $]x_0,b[$. $\forall x \in]a,x_0[$, se tiene $g(x) < g(x')$, lo que demuestra que g es mayorada en un vecindario de x_0 a la izquierda. Es creciente, g admite un límite real cuando x tiende a x_0 para valores inferiores o incluso, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe en $\mathbb{R}$. f es, por lo tanto derivable a la izquierda en x_0. Demostrar así como f es derivable a la derecha en x_0. Finalmente, f es derivable a la derecha y la izquierda en todo punto de $]a,b[$. En particular, f es continua a la derecha y a la izquierda en todo punto de $]a,b[$ y así continua en $]a,b[$.

Solución del ejercicio 2317 ▲005411

1. La función $f:\ x \mapsto \ln x$ es dos veces derivable en $]0,+\infty[$ y, para $x>0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Así, f es cóncava en $]0,+\infty[$. Se deduce que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (]0,1[)^n,\ \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \Rightarrow \ln(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k) \geqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k),$$

   y entonces por el crecimiento de f sobre $]0,+\infty[$,

   $$\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

   Si uno de los x_k es nulo, la desigualdad anterior es inmediata. Escogiendo en particular $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, de manera que $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (]0,1[)^n$ y que $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k = 1$, se obtiene

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in ([0,+\infty[)^n,\ \ \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n).$$

2. (a) Sean p y q dos reales estrictamente positivos que satisfacen $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (de manera que se tiene incluso $\frac{1}{p} < \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ y entonces $p>1$ y también $q>1$).
   Si $a=0$ o $b=0$, la desigualdad propuesta es inmediata.
   Sea entonces a un real estrictamente positivo luego, para $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$.
   f es derivable en $[0,+\infty[$ (pues $q>1$) y para $x \geqslant 0$, $f'(x) = x^{q-1} - a$. q es un real estrictamente mayor que 1, $q-1$ es estrictamente positivo y, por lo tanto, la función $x \mapsto x^{q-1}$ es estrictamente creciente en $[0,+\infty[$. Así,

   $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{q-1} > a \Leftrightarrow x > a^{1/(q-1)}.$$

   f es, por lo tanto estrictamente decreciente en $[0,a^{1/(q-1)}]$ y estrictamente creciente en $[a^{1/(q-1)},+\infty[$. Así,

   $$\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(a^{1/(q-1)}) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a\cdot a^{1/(q-1)}.$$

   Ahora, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ proporciona $q = \frac{p}{p-1}$, luego $q-1 = \frac{1}{p-1}$. Así, $\frac{q}{q-1} = p$, resulta que

   $$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^{q/(q-1)} - a\cdot a^{1/(q-1)} = (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)a^p = 0.$$

f por lo tanto, es positiva en $[0,+\infty[$, lo que proporciona $f(b) \geqslant 0$. Además,

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b = a^{1/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^{q/(q-1)} \Leftrightarrow b^q = a^p.$$

(b) Sean $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ y $B = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$.
Si $A = 0$, entonces $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $a_k = 0$ y la desigualdad es inmediata. Igualmente, si $B = 0$.
Si $A > 0$ y $B > 0$, demostremos que $\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant 1$.
De acuerdo con a),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{1/p}} \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{p} \frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{|b_k|^q}{B}) = \frac{1}{pA} \cdot A + \frac{1}{qB} \cdot B = 1,$$

que faltaba demostrar.

(c) Para $p > 1$, la función $x \mapsto x^p$ es dos veces derivable en $]0,+\infty[$ y $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$. Entonces, la función $x \mapsto x^p$ es estrictamente convexa en $]0,+\infty[$ y por lo tanto, en $[0,+\infty[$ por continuidad en 0. Entonces,

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in (]0,+\infty[)^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in ([0,+\infty[)^n \setminus \{(0,\dots,0)\},\ \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}\right)^p \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^p}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k},$$

y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leqslant (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)^{1-\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Se aplica entonces esto que precede a $\lambda_k = |b_k|^q$, luego $x_k = \lambda_k^{-1/p} |a_k|$ (de manera que $\lambda_k x_k = |a_k b_k|$) y se obtiene la desigualdad deseada.

(d) Para $p = q = 2$, es la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ demostrada anteriormente.

Solución del ejercicio 2318 ▲005414

f es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^*$ en virtud de teoremas generales.
Demostrar por recurrencia que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
Es verdadero para $n = 0$, con $P_0 = 1$.
Sea $n \geqslant 0$. Se supone que $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = (\frac{2}{x^3} \frac{P_n(x)}{x^{3n}} + (P_n'(x) \frac{1}{x^{3n}} - 3nP_n(x) \frac{1}{x^{3n+1}}) e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{3^{3(n+1)}} e^{-1/x^2},$$

donde $P_n + 1 = 2P_n + X^3 P_n' - 3nX^2 P_n$ es un polinomio. Se ha demostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] /\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

Demostrar entonces por inducción que para todo entero natural n, f es de clase C^n sobre $\mathbb{R}$ y que $f^{(n)}(0) = 0$.
Para $n = 0$, f es continua en $\mathbb{R}^*$ y además, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$. Entonces, f es continua en $\mathbb{R}$.

Sea $n \geqslant 0$, se supone que f es de clase C^n sobre $\mathbb{R}$ y que $f^{(n)}(0) = 0$. Por un lado f es de clase C^n sobre $\mathbb{R}$ y C^{n+1} sobre $\mathbb{R}^*$ y además, por los teoremas de crecimientos comparados, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} \mathrm{e}^{-1/x^2}$ tiende a 0, cuando x tiende a 0, $x \neq 0$. Según un teorema clásico de análisis, f es de clase C^{n+1} sobre $\mathbb{R}$ y, en particular, $f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n+1)}(x) = 0$.

Se ha demostrado por recurrencia que $\forall n \in \mathbb{N}$, f es de clase C^n sobre $\mathbb{R}$ y que $f^{(n)}(0) = 0$. f es, por lo tanto de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 2319 ▲005417

1. Sea m un elemento de $]f'(a), f'(b)[$. Porque $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ y que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = f'(b)$, se tiene (tomando, por ejemplo $\varepsilon = \min\{m - f'(a), f'(b) - m\} > 0$)

   $$\exists h_1 > 0 / \ \forall h \in]0, h_1[, \ (a+h \in I \Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m \text{ y}$$
   $$\exists h_2 > 0 / \ \forall h \in]0, h_2[\ (b+h \in I \Rightarrow \frac{f(b+h)-f(b)}{h} > m.$$

   El conjunto $E = \{h \in]0, \min\{h_1, h_2\}[/ \ a+h \text{ y } b+h \text{ están en } I\}$ no es vacío (pues I es abierto) y para todos los h de E, se tiene : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
   $h > 0$ es así de ahora en adelante fija.

2. La función f es continua en I y entonces, la función $g: \ x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es continua en $[a,b]$. Por el teorema del valor intermedio, como $g(a) < m < g(b)$, $\exists y \in [a,b] / \ g(y) = m$ o aún $\exists y \in [a,b] / \ \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = m$.

   Ahora, por el teorema de incrementos finitos, $\exists x \in]y, y+h[\subset I / \ m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h} = f'(x)$. Entonces una función derivada no es necesariamente continua, pero verifica igualmente el teorema de valores intermedios (Teorema de DARBOUX).

Solución del ejercicio 2320 ▲005419

Cuando x tiende a 0 para valores superiores,

$$\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = \frac{1}{2} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{(\sqrt{x})^2/2} \to -\frac{1}{2}.$$

f es, por lo tanto derivable a la derecha en 0 y $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.
Otra solución. f es continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^*$ en virtud de teoremas generales. Para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\sqrt{x})$. Cuando x tiende a 0, f' tiende a $-\frac{1}{2}$.
En resumen, f es continua en $\mathbb{R}$, de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^*$ y f' tiene un límite real cuando x tiende a 0 a saber 0. Se deduce que f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y, en particular, f es derivable en 0 y $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 2321 ▲005420

Sea $n \geqslant 2$ el grado de P.

1. Si P admite n raíces reales simples, el teorema de ROLLE proporciona al menos $n-1$ raíces reales distintas de dos a dos para P'. Pero, ya que P' es de grado $n-1$, estas son todas las raíces de P', necesariamente todos reales y simples. (El resultado falla si las raíces de P no son todos reales. Por ejemplo, $P = X^3 - 1$ tiene raíces simples en $\mathbb{C}$, pero $P' = 3X^2$ admite una raíz doble)

2. Separar las raíces simples y las raíces múltiples de P.
   Se define $P=(X-a_1)\cdots(X-a_k)(X-b_1)^{\alpha_1}\cdots(X-b_l)^{\alpha_l}$, donde los a_i y los b_j son $k+l$ números reales dos a dos distintos y los α_j enteros mayores o iguales que 2 (eventualmente $k=0$ o $l=0$ y en este caso el producto vacío vale convencionalmente 1). P se anula ya en $k+l$ números reales distintos por pares y el teorema de ROLLE proporciona $k+l-1$ raíces reales de dos en dos distintas y distintas de a_i y los b_j. Por otra parte, los b_j son raíces de orden α_j de P y por lo tanto, de orden α_j-1 de P'. Por lo tanto, se ha encontrado una serie de raíces (contadas en número de veces igual a su orden de multiplicidad) igual a $k+l-1+\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j-1)=k+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j-1=n-1$ raíces reales y es finito.

Solución del ejercicio 2322 ▲005422

Porque $\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=1$, $\exists A>0/\ \forall x>0,\ (x\geqslant A\Rightarrow xf'(x)\geqslant\frac{1}{2})$. Sea x un real fijo mayor o igual que A. $\forall t\in[A,x],\ f'(t)\geqslant\frac{1}{2x}$ y entonces, por crecimiento de la integral, $\int_A^x f'(t)\,dt\geqslant\int_A^x\frac{1}{2t}\,dt$, lo que proporciona :

$$\forall x\geqslant A,\ f(x)\geqslant f(A)+\tfrac{1}{2}(\ln x-\ln A),$$

y demuestra que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Solución del ejercicio 2323 ▲005423

$$\forall x\in\mathbb{R} f(\frac{x}{2}+3)=f(f\circ f(x))=f\circ f(f(x))=\frac{f(x)}{2}+3.$$

porque f es derivable en $\mathbb{R}$, se obtiene derivando $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{2}f'(\frac{x}{2}+3)=\frac{1}{2}f'(x)$, y entonces

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(\frac{x}{2}+3)=f'(x).$$

Sea entonces x un real dado y u la sucesión definida por $u_0=x$ y $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$. De acuerdo a esto que precede, $\forall n\in\mathbb{N},\ f'(x)=f'(u_n)$. Ahora, u es una sucesión aritmético-geométrica y se sabe que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-6=\frac{1}{2^n}(u_0-6),$$

lo que demuestra que la sucesión u converge a 6. La sucesión $(f'(u_n))_{n\geqslant 0}$ es constante, de valor $f'(x)$. f' es continua en $\mathbb{R}$, se deduce que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f'(u_n)=f'(\lim_{n\to+\infty} u_n)=f'(6),$$

lo que demuestra que la función f' es constante en $\mathbb{R}$ y así como f es afín. Recíprocamente, para x real, se escribe $f(x)=ax+b$.

$$\begin{aligned} f \text{ solución} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ a(ax+b)+b=\frac{x}{2}+3\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ (a^2-\frac{1}{2})x+ab+b-3=0\\ &\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}\text{ y }(a+1)b=3\Leftrightarrow(a=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ y }b=3(2-\sqrt{2}))\text{ o }(a=-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ y }b=3(2+\sqrt{2})).\end{aligned}$$

Se encuentran dos funciones de soluciones, las funciones f_1 y f_2 definidas por :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2}) \text{ y } f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2}).$$

Solución del ejercicio 2324 ▲005424

Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Para x real, se escribe $g(x) = e^x f(x)$. g es derivable en R y $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$. Ahora se tiene que demostrar que si $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}g'(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$. Sea ε un real estrictamente positivo.

$$\exists A > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant A \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < e^{-x}g'(x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}e^x \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}e^x).$$

Para x real dado mayor o igual que A, se obtiene al integrar en $[A,x]$:

$$-\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A) = \int_A^x -\frac{\varepsilon}{2}e^t\,dt \leqslant \int_A^x g'(t)\,dt = g(x)-g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A),$$

y entonces

$$\forall x \geqslant A,\ g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) \leqslant e^{-x}g(x) \leqslant g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}).$$

Ahora, $g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ y $g(A)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x})$ tienden respectivamente a $-\frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{\varepsilon}{2}$, cuando x tiende a $+\infty$. Entonces,

$$\exists B \geqslant A/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) > -\varepsilon \text{ y } g(A)e^{-x} - \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{A-x}) < \varepsilon.$$

Para $x \geqslant B$, por lo tanto se tiene $-\varepsilon < e^{-x}g(x) < \varepsilon$.
Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0/\ \forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant B \Rightarrow |e - xg(x)| < \varepsilon)$ y entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}g(x) = 0$, que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 2325 ▲001267

Usualmente se encuentra el desarrollo limitado de una función a partir de las derivadas sucesivas. Aquí se va a hacer lo contrario. Cálculo del dl (a un cierto orden) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{1+x^6} = x^3\frac{1}{1+x^6} = x^3\left(1 - x^6 + x^{12} - \cdots \pm x^{6\ell}\cdots\right) \\ &= x^3 - x^9 + x^{15} - \cdots \pm x^{3+6\ell}\cdots = \sum_{\ell\geqslant 0}(-1)^\ell x^{3+6\ell}. \end{aligned}$$

Se trata de identificar este desarrollo con la fórmula de Taylor :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Por unicidad del DL, identificando los coeficientes delante x^n se encuentra :

$$\begin{cases} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^\ell & \text{si } n = 3+6\ell \\[2ex] \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Si $n = 3+6\ell$ (con $\ell \in \mathbb{N}$), entonces se puede escribir $\ell = \frac{n-3}{6}$ y así podemos concluir :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-3}{6}} \cdot n! & \text{si } n \equiv 3 \pmod 6 \\ f^{(n)}(0) = 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Solución del ejercicio 2326 ▲001268

1. La fórmula de Taylor-Lagrange de orden 2 entre x y $x+h$ (con $h>0$) da :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}$$

donde $c_{x,h} \in]x, x+h[$. Esto da :

$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}.$$

Ahora se puede mayorar $f'(x)$:

$$h|f'(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2}\left|f''(c_{x,h})\right| \leqslant 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2.$$

Entonces

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

2. Sea $\phi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$. Es una función continua y derivable. El límite en 0 y $+\infty$ es $+\infty$. La derivada $\phi'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2M_0}{h^2}$ se anula en $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ y en este punto ϕ alcanza su mínimo $\phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$.
Se fija $x > a$. Como para todo $h > 0$ se tiene $|f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0 = \phi(h)$, entonces en particular para $h = h_0$ se obtiene $|f'(x)| \leqslant \phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$. Y por lo tanto f' es acotada.
3. Se fija $\varepsilon > 0$. g'' es acotada, se denota $M_2 = \sup_{x>0}|g''(x)|$. Como $g(x) \to 0$, entonces existe $a > 0$ tal que en el intervalo $]a,+\infty[$, g sea tan pequeño como se quiera. Más precisamente, se elige a de manera que

$$M_0 = \sup_{x>a}|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}.$$

La primera pregunta aplicada a g en el intervalo $]a,+\infty[$ implica que para todo $h > 0$:

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

En particular para $h = \frac{\varepsilon}{M_2}$ y usando $M_0 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4M_2}$ se obtiene :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\frac{\varepsilon}{M_2}}\frac{\varepsilon^2}{4M_2} + \frac{\frac{\varepsilon}{M_2}}{2}M_2 \leqslant \varepsilon.$$

Así para cada ε se ha encontrado $a > 0$ tal que si $x > a$, entonces $|g'(x)| \leqslant \varepsilon$. Esto es exactamente decir que $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

Solución del ejercicio 2332 ▲004004

$f'(a)f'''(a) - f''(a)^2$.

Solución del ejercicio 2335 ▲004007

1. Fórmula de Taylor Lagrange entre $\frac{1}{2}$ y 0.
2. Si no, la función $g : x \mapsto f(x) - (1-2x)^n$ es monótona en $[0, \frac{1}{2}]$ y nula en 0 y $\frac{1}{2}$, por lo tanto idénticamente nula. Imposible porque $g^{(n)}(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Solución del ejercicio 2336 ▲004008

1. Fórmula de Taylor para f y $f' \Rightarrow \lambda = 1/180$.
2.

Solución del ejercicio 2337 ▲004009

1. Fórmula de Taylor para calcular $f(a)$ y $f(b)$ a partir de $f(x)$.
2. Estudiar $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \pm M(x-a)^2/2$.

Solución del ejercicio 2338 ▲004010

Aplicar la fórmula de Taylor de orden 2 de x a a y de x a $-a$.

Solución del ejercicio 2339 ▲004011

$f^{(n)}(a+h\theta_h) = f^{(n)}(a) + h\theta_h f^{(n+1)}(a+\theta' h) = f^{(n)}(a) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta'' h)$.

Solución del ejercicio 2341 ▲004013

1. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x+\theta h)$.
2. $h = 2\sqrt{\alpha/\beta} \Rightarrow |f'| \leqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Solución del ejercicio 2342 ▲004014

1. $= f(x+y) + \frac{y^2}{2}(M - f''(z))$.
2. $\Delta \leqslant 0$.
3. $\sqrt{f}$ es afín.

Solución del ejercicio 2344 ▲004016

Sea $\varepsilon > 0$: $f(x+\varepsilon x) = f(x) + \varepsilon x f'(x) + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x) \Rightarrow x f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon x)-f(x)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon x^2}{2} f''(x+\varepsilon\theta x)$.

Solución del ejercicio 2345 ▲004017

Si $Q = P \circ f$, entonces $Q' = f' \times (P' \circ f)$ tiene tantas raíces como P', de donde $p = q$, $f(y_i) = x_i$ y $Q(y_i) = P(x_i)$. Además, en un vecindario de y_i :

$$\lambda_i (y-y_i)^{n_i} \sim Q'(y) = f'(y) \times P'(f(y)) \sim f'(y_i) \times \mu_i (f(y)-x_i)^{m_i} \sim \mu_i f'(y_i)^{1+m_i} (y-y_i)^{m_i}$$

de donde $m_i = n_i$.
Recíprocamente, si $p = q$, $P(x_i) = Q(y_i)$ y $m_i = n_i$, entonces poniendo $x_0 = y_0 = -\infty$ y $x_{p+1} = y_{p+1} = +\infty$, P induce un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo de $]x_i, x_{i+1}[$ sobre $P(]x_i, x_{i+1}[) = Q(]x_i, x_{i+1}[)$ (los límites de P y Q en $+\infty$ son iguales a $+\infty$ dados los coeficientes dominantes de P y Q ; aquellos en $-\infty$ se deducen contando los cambios de signo de P' o por Q' y se encuentra la misma cuenta desde $m_i = n_i$). Se denota f_i la función recíproca de $P_{|]x_i,x_{i+1}[}$ y f definida por $f(y) = f_i(Q(y))$ si $y_i < y < y_{i+1}$ y $f(y_i) = x_i$. f así definida es estrictamente creciente, de clase $\mathscr{C}^1$, con derivada no nula excepto quizás en y_i, y $P \circ f = Q$. Queda por estudiar el carácter $\mathscr{C}^1$ en y_i y para verificar que $f'(y_i) \neq 0$. En un vecindario de y_i, integrando los DL de P y Q se tiene :

$$\frac{\lambda_i}{1+m_i}(y-y_i)^{1+m_i} \sim Q(y) - Q(y_i) = P(f(y)) - P(f(y_i)) \sim \frac{\mu_i}{1+m_i}(f(y)-f(y_i))^{1+m_i},$$

de donde $\frac{f(y)-f(y_i)}{y-y_i} \to \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$, cuando $y \to y_i$, porque las tasas de crecimiento de f son positivos. Esto prueba que f es derivable en y_i y $f'(y_i) = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)} \neq 0$. Finalmente, se tiene, cuando $y \to y_i$:

$$f'(y) = \frac{Q'(y)}{P'(f(y))} \sim \frac{\lambda_i (y-y_i)^{m_i}}{\mu_i (f(y)-f(y_i))^{m_i}} \to \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{-m_i/(1+m_i)} = \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{1/(1+m_i)}$$

y entonces f es $\mathscr{C}^1$ en y_i.

Solución del ejercicio 2346 ▲005418

Sea $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Porque f es de clase C^3 sobre $\mathbb{R}$, la fórmula de TAYLOR-LAPLACE de orden 2 permite escribir

$$f(x+y) = f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \text{ y}$$
$$f(x-y) = f(x) - y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt.$$

Así,

$$\begin{aligned}
(f(x)^2) &\geqslant f(x+y)f(x-y) \\
&= (f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) + \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt) \times \\
&\quad (f(x) - y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) + \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt) \\
&= (f(x))^2 + y^2 (f(x) f''(x) - (f'(x))^2) \\
&\quad + (f(x) - y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x)) \int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\
&\quad + (f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x)) \int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \ (*)
\end{aligned}$$

Ahora, para $y \in [-1,1]$, ($f^{(3)}$ es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, continua en el segmento $[-1,1]$),

$$\left|\int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt\right| \leqslant |y| \cdot \frac{y^2}{2} \max\{|f^{(3)}(t)|,\ t \in [x-1,x+1]\},$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt\right| \leqslant |y| \max\{|f^{(3)}(t)|,\ t \in [x-1,x+1]\}.$$

Esta última expresión tiende a 0, cuando y tiende a 0. Se deduce que $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x+y} \frac{(x+y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt\right|$ tiende a 0, cuando y tiende a 0. Igualmente, $\frac{1}{y^2}\left|\int_x^{x-y} \frac{(x-y-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\, dt\right|$ tiende a 0, cuando y tiende a 0.
Se simplifica entonces $(f(x)^2$ en los dos miembros de $(*)$. Se divide los dos nuevos miembros por y^2, para $y \neq 0$, luego se hace tender y hacia 0 a x fijado. Se obtiene $0 \geqslant f(x)f''(x) - (f'(x))^2$, que es la desigualdad solicitada.

Solución del ejercicio 2347 ▲005457

Sea $x \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Según la fórmula de TAYLOR-LAPLACE de orden 1 proporciona

$$\operatorname{sen} x = x - \int_0^x (x-t) \operatorname{sen} t\, dt \leqslant x,$$

pues para $t \in [0,x]$, $(x-t) \geqslant 0$ y para $t \in [0,x] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{sen} t \geqslant 0$. Igualmente, la fórmula de TAYLOR-LAPLACE de orden 3 proporciona

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \operatorname{sen} t\, dt \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

Así, $\forall x \in [0,1]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x$. Sean entonces $n \geqslant 1$ y $k \in \{1,\dots,n\}$. Se tiene $0 \leqslant \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant 1$ y entonces

$$\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{(n+k)^2},$$

luego sumando

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant \sum_{k=1}^n \operatorname{sen} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Ahora, cuando n tiende a $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\, dx + o(1)\right) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Por otra parte,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} \leqslant n.\frac{1}{6n^6} = \frac{1}{6n^5},$$

y entonces, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{6(n+k)^6} = o(\frac{1}{n})$.n.

Se deduce que $2n(\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6}) = 2n(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})) = 1+o(1)$ y que $2n\frac{1}{(n+k)^2} = 1+o(1)$. Pero entonces, de acuerdo con teorema de los gendarmes, $2n\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{1}{(n+k)^2}$ tiende a 1, cuando n tiende a $+\infty$, o aún

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\frac{1}{(n+k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Solución del ejercicio 2348 ▲001237

1. $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o\left(x^6\right)$.
2. $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right)$.
3. $\operatorname{sen}(\tan x) = x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7+o\left(x^7\right)$.
4. $(\ln(1+x))^2 = x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+o\left(x^4\right)$.
5. $\exp(\operatorname{sen}x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)$.
6. $\operatorname{sen}^6 x = x^6+o\left(x^6\right)$.

Solución del ejercicio 2350 ▲001239

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)-\operatorname{arcsen}(x)} = -1.$$

Solución del ejercicio 2351 ▲001240

1. $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o\left(x^7\right)$.
2. $\dfrac{\arctan(x)-x}{\operatorname{sen}(x)-x} = 2-\frac{11}{10}x^2+o\left(x^3\right)$.
3. $\ln(\tan(1/2\,x+1/4\,\pi)) = x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)$.
4. $\ln\operatorname{sen}x = \ln(1/2\sqrt{2})+x-\frac{\pi}{4}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x} = 2/3\,\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^4})$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e-1/2\,ex+\frac{11}{24}ex^2-\frac{7}{16}ex^3+o\left(x^3\right)$..
7. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right) = 1/8\,\frac{\sqrt{2}}{x^2}+o(x^{-5})$.

Solución del ejercicio 2354 ▲001243

1. Primer método. Se aplica la fórmula de Taylor (alrededor del punto $x=1$)

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

Como $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, entonces $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ y entonces $f'(1)=\frac{1}{2}$. Luego se calcula $f''(x)$ (luego $f''(1)$), $f'''(x)$ (y en fin $f'''(1)$). Se encuentra el dl de $f(x)=\sqrt{x}$ en un vecindario de $x=1$:

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

Segundo método. Se define $h=x-1$ (y entonces $x=h+1$). Se aplica la fórmula dl de $\sqrt{1+h}$ alrededor de $h=0$.

$$\begin{aligned}
f(x)=\sqrt{x}&=\sqrt{1+h}\\
&=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\frac{1}{16}h^3+o(h^3) \quad \text{es la fórmula del dl de } \sqrt{1+h}\\
&=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+o((x-1)^3).
\end{aligned}$$

2. El primer método consiste en calcular $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$, luego $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$, para poder aplicar la fórmula de Taylor que conduce a :

$$\exp(\sqrt{x})=\mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)+\frac{\mathrm{e}}{48}(x-1)^3+o((x-1)^3)$$

(con $\mathrm{e}=\exp(1)$).

Otro método. Comenzar por calcular el dl de $k(x)=\exp x$ en $x=1$ que es muy fácil porque para todo n, $k^{(n)}(x)=\exp x$ y entonces $k^{(n)}(1)=\mathrm{e}$:

$$\exp x=\mathrm{e}+\mathrm{e}(x-1)+\frac{\mathrm{e}}{2!}(x-1)^2+\frac{\mathrm{e}}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

Para obtener el dl $g(x)=h(\sqrt{x})$ en $x=1$, se escribe primero :

$$\exp(\sqrt{x})=\mathrm{e}+\mathrm{e}(\sqrt{x}-1)+\frac{\mathrm{e}}{2!}(\sqrt{x}-1)^2+\frac{\mathrm{e}}{3!}(\sqrt{x}-1)^3+o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Queda entonces por sustituir $\sqrt{x}$ por su dl obtenido en la primera pregunta.

3. Se define $u=x-\frac{\pi}{3}$ (y entonces $x=\frac{\pi}{3}+u$). Entonces

$$\operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+u)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\cos(u)+\operatorname{sen}(u)\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u+\frac{1}{2}\operatorname{sen} u$$

Se conoce el dl de $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ alrededor de $u=0$ (porque se buscan un dl alrededor de $x=\frac{\pi}{3}$) por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos u+\frac{1}{2}\operatorname{sen} u\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{2!}u^2+o(u^3)\right)+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{3!}u^3+o(u^3)\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}u-\frac{\sqrt{3}}{4}u^2-\frac{1}{12}u^3+o(u^3)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2-\frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3+o((x-\frac{\pi}{3})^3).
\end{aligned}$$

Ahora para el dl de la forma $\ln(a+v)$ en $v=0$ se vuelve al dl de $\ln(1+v)$ así :

$$\ln(a+v) = \ln\left(a(1+\frac{v}{a})\right) = \ln a + \ln(1+\frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3).$$

Se aplica esto a $h(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ poniendo siempre $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\operatorname{sen} x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \text{se realiza el d.l. del } \ln \text{ y se reagrupan los términos} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3).
\end{aligned}$$

Se encuentra por lo tanto :

$$\ln(\operatorname{sen} x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3).$$

Por supuesto otro método consiste en calcular $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ y $h'''(1)$.

Solución del ejercicio 2355 ▲001244

1. DL de $f(x)$ de orden 2 en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \qquad \text{pues } \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \times \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4)} \qquad \text{se establece } u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \left(1-u+u^2+o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \left(1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})^2+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \left(1-\frac{x}{2}+o(x^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).
\end{aligned}$$

2. En $+\infty$ se va a escribir $h=\frac{1}{x}$ y se reduce a un dl en $h=0$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}=\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}}=f(h).$$

Aquí -milagrosamente- se reencuentra exactamente la expresión de f cuyo dl ya ha sido calculado en $h=0:\ f(h)=\frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)$. Así

$$f(x)=f(h)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2}).$$

3. Cuidado esto no funciona en absoluto $-\infty$. En el cálculo de la segunda pregunta, se estaba en vecindarios de $+\infty$ y se considera que x es positivo. En $-\infty$ es necesario prestar atención al signo, por ejemplo $\sqrt{1+x^2}=|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$. Así siempre poniendo $h=\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)}\\
&=-\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}}=-\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)}\\
&=-\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}=-\frac{1}{h}\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1-\frac{1}{2}h+o(h)}\\
&=-\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right)=-\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\right)\\
&=-\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h)=-x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Así un desarrollo (asintótico) de f en $-\infty$ es

$$f(x)=-x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Se deduce, por ejemplo, que $f(x)$ se comporta esencialmente como la función $-x$ en $-\infty$ y, en particular $\lim_{x\to-\infty}f=+\infty$.

Solución del ejercicio 2358 ▲002657

$$\ln(x+1)=\ln\left(x\times(1+\frac{1}{x})\right)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

Entonces

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x}).$$

Así

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x&=\exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)=\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right)\\
&=\exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})\right)=1+\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})
\end{aligned}$$

Inmediatamente, se deduce que
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=1$$
y que cuando $x\to+\infty$
$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\sim\frac{1}{\ln x}.$$

Solución del ejercicio 4372 ▲002683

A 1.
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\Big]\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))\\
&\qquad\qquad+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a)).
\end{aligned}$$
Efectuando el cambio de índice de suma $m=m'+1$ en la segunda suma; todos los términos se eliminan dos a dos, a excepción del primero término de la primera suma y del último término de la segunda suma, de ahí el resultado solicitado.

2a. Más generalmente, se tiene el resultado siguiente : si una función f es nula en cero y de clase C^{n+1} en un intervalo I conteniendo cero, $g(t)=f(t)/t$ es extensible por continuidad en cero y su extensión es de clase C^n. Tengamos cuidado de no deducir falazmente este resultado de la existencia de una expansión acotada de orden n de g. Se demuestra con ayuda de un desarrollo limitado de orden 1 de f que g es extensible por continuidad en 0 poniendo $\tilde{g}(0)=f'(0)$. Por otro lado, g es de clase C^{n+1} sobre $I\setminus\{0\}$. Haciendo la hipótesis de recurrencia
$$g^{(k-1)}(t)=\frac{f^{(k)}(0)}{k}+\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}+o(t^{n-k+1}),\ \ (1\leqslant k\leqslant n,\ t\neq 0).$$
Derivando k veces la identidad $f(t)=tg(t)$, se obtiene que $\forall t\neq 0$, $g^{(k)}(t)=\frac{f^{(k)}(t)-kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Por lo tanto $f^{(k)}(t)=f^{(k)}(0)+f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!}+\cdots+f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!}+o(t^{n+1-k})$. Sustituyendo estos desarrollos limitados en la identidad precedente, se demuestra que la hipótesis de recurrencia es verificada al rango siguiente, por lo tanto para todo entero k de 1 a $n+1$.

Se hace la hipótesis de recurrencia que $g^{(k)}(0)$ existe y es igual a $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$, $(0\leqslant k\leqslant n)$. El desarrollo limitado de $g^{(k)}$ (truncado de orden 1) y de la hipótesis de recurrencia, resulta que $g^{(k)}$ es continua y derivable en cero y que, si $k<n$, $g^{(k+1)}(0)=f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, lo que prueba por recurrencia que g es n veces continuamente derivable en I. En consecuencia, $t\mapsto\frac{e^t-1}{t}$ es extensible por continuidad en una función indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Esta función no se anula nunca, su inversa es igualmente definida e indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. La función $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$ es par pues
$$\frac{-t}{e^{-t}-1}+\frac{-t}{2}=\frac{-te^t}{1-e^t}-\frac{t}{2}=\frac{te^t-t+t}{e^t-1}-\frac{t}{2}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}.$$

Entonces el desarrollo limitado de $\frac{t}{e^t-1}$, cuyo existencia es garantizada por el hecho que la función es indefinidamente derivable, es de la forma pedida por el enunciado. En consecuencia

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1) = \Big(1-\frac{t}{2}+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_Nt^{2N}}{(2N)!}+o(t^n)\Big) \\ \times\Big(zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{z^nt^n}{n!}+o(t^n)\Big)$$

y $\phi_n(z)/n!$ es el coeficiente de t^n en este desarrollo :

$$\phi_n(z)/n! = \frac{z^n}{n!}-\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!}+\cdots+\frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

de donde la expresión de ϕ_n pedida.

2.b.

$$\begin{aligned}\phi_n(z+1)-\phi_n(z) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}-t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left(te^{zt}\right)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

Como $t\mapsto te^{zt}$ es de clase C^∞ y que su desarrollo limitado de orden n en $t=0$ es $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!}t^{k+1}+o(t^n)$, se tiene $\phi_n(z+1)-\phi_n(z)=nz^{n-1}$.

3.(i) es obtenida derivando tantas veces como sea necesario la identidad precedente y dando a z el valor cero. (ii), (iii), (iv), (v) y (vi) son las consecuencias inmediatas de 2.a.

4.a. Se aplica la pregunta 1 al polinomio ϕ_{2n} de grado 2n y se íntegra entre 0 y 1. Se tiene

$$\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\Big[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\Big]$$

$$= -(2n)!\big(f(z)-f(a)\big)+(z-a)^{2n+1}\int_0^1\phi_{2n}(t)f\Big(a+(z-a)t\Big)dt$$

tomando en cuenta el hecho que $\phi_{2n}^{(2n)}=(2n)!$

Se obtiene la igualdad pedida sustituyendo en las derivadas iteradas de ϕ_{2n} las expresiones determinadas en la pregunta 3.

4.b. Se aplica la pregunta precedente reemplazando f por una primitiva de F y z por ω. Se tiene

$$0=\int_a^{a+\omega}F(t)dt-\frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a))+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\Big[F^{(2m-1)}(a+\omega)-F^{(2m-1)}(a)\Big] \\ -\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt.$$

Cuando se suman las igualdades obtenidas reemplazando a sucesivamente por sí mismo, $a+\omega,\dots,a+(r-1)\omega$, se obtiene el resultado pedido, ciertos términos se simplifican dos a dos.

B 1. Se tiene para todo $x>0$ fijo

$$u_k(x)=\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)+x\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}+O(\frac{1}{k^2})=O(\frac{1}{k^2})$$

Entonces la serie $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ converge.

2. $\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n} u_k(x+1)$

$$\begin{aligned}
&= \ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1).
\end{aligned}$$

Cuando n tiende a $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tiende a cero ; se obtiene entonces pasando al límite la igualdad deseada.

3. Para todo $k\geqslant 1$ entero, $u_k(1)=0$, por lo tanto $G(1)=0$ y se prueba fácilmente por recurrencia usando la pregunta precedente, que para todo entero estrictamente positivo n, $G(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, igualdad de la cual se deduce inmediatamente, el resultado pedido.

4. Inmediata

5. Es una aplicación directa de la pregunta A.4.b.

$$T_{p,n}(x,y)=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2p)}(m+t)dt=-\frac{1}{(2p)!}\int_0^n\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt.$$

6. El integrando en la expresión de $T_{p,n}(x,y)$ es mayorado en valor absoluto por el producto de la cota superior de la función continua ϕ_{2p} en el segmento $[0,1]$ y del valor absoluto de $f^{(2p)}$. Se prueba fácilmente por recurrencia que $f^{(m)}(t)=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m}-\frac{1}{(x+t)^m}\right)=O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (cuando $t\to+\infty$). Entonces la integral $\int_0^{+\infty}\phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ es absolutamente convergente, lo que prueba que $T_{p,n}(x,y)$ admite un límite finito cuando n tiende a $+\infty$.

7. De acuerdo a las preguntas 4 y 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right]+\ln y-\ln x\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\right\}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\Bigg\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n)\\
&\quad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big)\\
&\quad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\Big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\Big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n)=(y-x)\ln n+y-x+o(1)$, cuando $n\to+\infty$. Se obtiene por lo tanto después de simplificaciones $G(y)-G(x)=g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, lo que faltaba demostrar.

8. Según la pregunta 5 y la expresión de las derivadas sucesivas de f dada en la pregunta 6, $T_{p,n}(x,y)$ es mayorada en valor absoluto por el producto de una constante y de la integral $\displaystyle\int_0^n \left|\frac{1}{(y+t)^{2p}} - \frac{1}{(x+t)^{2p}}\right| dt$. $|R_p(x,y)|$ es mayorada de la misma manera reemplazando la cota final de integración n por $+\infty$.
El argumento del valor absoluto gardant un signo constante, la integral mayorante es igual a

$$\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}} - \frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$$

y se obtiene así el estimado deseado.

9. Se tiene $g(m) = m\ln m - m - \frac{1}{2}\ln m + o(1)$ y $G(m) = -\ln(m-1)! = -\ln m! + \ln m$, para m entero, por lo tanto el resultado pedido se sigue inmediatamente, de la fórmula de Stirling $m! \sim \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m}$.

10. El resultado pedido es obtenido a partir de la igualdad de la pregunta 7 pasando al límite. Se hace tender x hacia $+\infty$ para valores enteras y se tiene en cuenta el estimado obtenido en la pregunta 8.

11. Calculando los primeros términos del desarrollo limitado de la pregunta A.2.a, se tiene $b_1 = 1/6$, $b_2 = -1/30$, $b_3 = 1/42$. De las preguntas 3 y 10, resulta que

$$\ln(m!) = -G(m) + \ln m = m\ln m - m + \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12}\frac{1}{m} - \frac{1}{360}\frac{1}{m^3} + \frac{1}{1260}\frac{1}{m^5} + O\left(\frac{1}{m^7}\right).$$

Solución del ejercicio 2361 ▲004019

$e^{1/3}\left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right)$.

Solución del ejercicio 2362 ▲005426

1. Si $x \in]0,\pi[$, $\operatorname{sen} x > 0$, de manera que la función propuesta está bien definida en un vecindario despuntado de $\frac{\pi}{2}$ (es decir un vecindario de $\frac{\pi}{2}$ al cual se le ha quitado el punto $\frac{\pi}{2}$) y además $(\operatorname{sen} x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)/(2x-\pi)}$. Cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x$ tiende a 1 y entonces

$$\ln(\operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x - 1 = -\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 = -\frac{(2x-\pi)^2}{8}.$$

Entonces, $\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{2x-\pi} \sim -\frac{2x-\pi}{8} \to 0$ y en fin $(\operatorname{sen} x)^{1/(2x-\pi)} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)/(2x-\pi)} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{1/(2x-\pi)} = 1.}$$

2. Si $x \in]0,\pi[\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$, $|\tan x| > 0$, de manera que la función propuesta esté bien definida en un vecindario despuntado de $\frac{\pi}{2}$ y además $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln(|\tan x|)}$. Cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$,

$$\ln|\tan x| = \ln|\operatorname{sen} x| - \ln|\cos x| \sim -\ln|\cos x|,$$

luego $\cos x \ln|\tan x| \sim -\cos x \ln|\cos x| \to 0$ (pues, cuando u tiende a 0, $u\ln u \to 0$).
Así, $|\tan x|^{\cos x} = e^{\cos x \ln|\tan x|} \to e^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x} = 1.}$$

3. Cuando n tiende a $+\infty$, $\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6n+1} \to \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 1$ (y estamos en presencia de una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$). Cuando n tiende a $+\infty$,

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{3n+1} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6n+1} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{72n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$n\ln\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6n+1}\right) = n\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} + o(1),$$

y entonces

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3n+1} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{\sqrt{3}\pi/24}.}$$

4. Cuando x tiende a 0, $\ln(\cos x) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ y $\ln|x|\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}\ln|x| \to 0$. Así, $(\cos x)^{\ln|x|} \to \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|} = 1.}$$

5. Cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}$ tiende a $+\infty$. Se define $h = x - \frac{\pi}{2}$ y $\varepsilon = \operatorname{sgn}(h)$, de manera que

$$(\cos x)\mathrm{e}^{1/(1-\operatorname{sen}x)} = -\varepsilon|\operatorname{sen}h|\mathrm{e}^{1/(1-\cos h)} = -\varepsilon\mathrm{e}^{\ln|\operatorname{sen}h| + \frac{1}{1-\cos h}}.$$

Por tanto, cuando h tiende a 0,

$$\ln|\operatorname{sen}h| + \frac{1}{1-\cos h} = \frac{(1-\cos h)\ln|\operatorname{sen}h| + 1}{1-\cos h} = \frac{(-\frac{h^2}{2} + o(h^2))(\ln|h| + o(\ln|h|)) + 1}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} = \frac{1+o(1)}{\frac{h^2}{2} + o(h^2)} \sim \frac{2}{h^2},$$

y entonces, cuando h tiende a 0, $\ln|\operatorname{sen}h| + \frac{1}{1-\cos h} \sim \frac{2}{h^2} \to +\infty$. Así,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \cos(x)\mathrm{e}^{1/(1-\operatorname{sen}x)} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}} \cos(x)\mathrm{e}^{1/(1-\operatorname{sen}x)} = -\infty.}$$

6. Para $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = (2\cos x - 1)(\cos x - 1)$ y entonces

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}.$$

Para $x \notin \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(2\cos x - 1)(\cos x - 1)} = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1},$$

y entonces, $\displaystyle\lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3.$

$$\boxed{\lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} = -3.}$$

7. Cuando x tiende a 0,

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x} = \frac{1 + x + o(x)}{1 + x + o(x)} = (1 + x + o(x)(1 - x + o(x)) = 1 + o(x).$$

Cuando x tiende a 0,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} \ln\left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x}\right) = \frac{\ln(1 + o(x))}{x + o(x)} = \frac{o(x)}{x + o(x)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \to 0.$$

Así,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{th} x}\right)^{1/\operatorname{sen} x} = 1.}$$

8. Cuando x tiende a e para valores inferiores, $\ln(x)$ tiende a 1 y entonces

$$\ln(\ln x) \sim \ln x - 1 = \ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right) \sim \frac{x}{\mathrm{e}} - 1 = -\frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - x),$$

luego,

$$\ln(\mathrm{e} - x)\ln(\ln x) \sim -\frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - x)\ln(\mathrm{e} - x) \to 0,$$

y entonces $(\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)} = \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}-x)\ln(\ln x)} \to 1.$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to \mathrm{e} \\ x < \mathrm{e}}} (\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)} = 1.}$$

9. Cuando x tiende a 1 para valores superiores, $x\ln x \to 0$, y se tiene

$$x^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x \sim 1 \times (x - 1) = x - 1.$$

Así, $\sqrt{x^2 - 1}$ tiende a 0 y

$$\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1}) \sim -\sqrt{x^2 - 1} = -\sqrt{(x-1)(x+1)} \sim -\sqrt{2(x-1)}.$$

Finalmente, cuando x tiende a 1 para valores superiores,

$$\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})} \sim \frac{x - 1}{-\sqrt{2(x-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x - 1} \to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}=0.}$$

10. Cuando x tiende a $+\infty$,

$$\ln(\operatorname{ch}x-1)\sim\ln(\operatorname{ch}x)\sim\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{2}\right)=x-\ln 2\sim x,$$

y entonces

$$\frac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1}\sim\frac{x\times x}{x^2}=1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(\operatorname{ch}x-1)}{x^2+1}=1.}$$

11. Cuando x tiende a 0 para valores superiores,

$$\ln(x-x^2)+x-\ln x=x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim-\frac{x^2}{2}.$$

entonces,

$$(\operatorname{sen}x)^x=\mathrm{e}^{x\ln(\operatorname{sen}x)}=\mathrm{e}^{x\ln(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}=\mathrm{e}^{x\ln x}\mathrm{e}^{x\ln(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}=x^x\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right),$$

y

$$x^{\operatorname{sen}x}=\mathrm{e}^{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\ln x}=\mathrm{e}^{x\ln x}\mathrm{e}^{-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)}=x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right).$$

Así,

$$(\operatorname{sen}x)^x-x^{\operatorname{sen}x}=x^x\left(1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-x^x\left(1-\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right)=x^x\left(\frac{x^3\ln x}{6}+o(x^3\ln x)\right)\sim\frac{x^3\ln x}{6},$$

y finalmente

$$\frac{(\operatorname{sen}x)^x-x^{\operatorname{sen}x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}\sim\frac{x^3\ln x/6}{-x^2/2}=-\frac{x\ln x}{3}\to 0.$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(\operatorname{sen}x)^x-x^{\operatorname{sen}x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}=0.}$$

12. Cuando x tiende a $+\infty$,

$$\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

luego

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

y

$$x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)=\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\to 0.$$

Entonces, $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x=\exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)\to\mathrm{e}^0=1.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1.}$$

13. Cuando x tiende a $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arcsen} x + \frac{\pi}{4}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\operatorname{arcsen} x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\operatorname{arcsen} x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{\operatorname{arcsen} x - \frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$\to \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\operatorname{arcsen})'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1/\sqrt{2}}\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2 - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1} = \frac{\pi}{4}.}$$

14. Cuando x tiende a $+\infty$,

$$x\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right) = x\ln\left(\cos\frac{1}{x} - \tan a \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = x\ln\left(1-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(-\frac{\tan a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= -\tan a + o(1),$$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = \mathrm{e}^{-\tan a}$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right)^x = \mathrm{e}^{-\tan a}.}$$

Solución del ejercicio 2363 ▲005427

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+(x^2+x^3)+(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3+o(x^7) = 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7)$.

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+o(x^7).}$$

2. $\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)\right)^{-1} = 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^7)$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+x^4\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right)+x^6\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)+o(x^7) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+o(x^7).}$$

3. **Observaciones.**

(a) Para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, se tiene $0 < \frac{x}{\tan x} < 1$ y por lo tanto, la función $x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{\tan x}\right)$ se define en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ (que es un vecindario sin centro de 0).

(b) Cuando x tiende a 0, $\frac{x}{\tan x} \to 1$ y entonces $\arccos\left(\frac{x}{\tan x}\right) = o(1)$ (desarrollo limitado de orden 0).

(c) La función $x \mapsto \arccos x$ no es derivable en 1 y por lo tanto, no admite en 1 un desarrollo limitado de orden mayor o igual a 1 (por lo que a priori, es un mal inicio).

(d) La función propuesta es par y, si admite en 0 un desarrollo limitado de orden 3, su parte regular contiene solo exponentes pares.

• Buscar un equivalente simple de $\arccos x$ en 1 por la izquierda. Cuando x tiende a 1 para valores inferiores, $\arccos x \to 0$ y entonces,

$$\arccos x \sim \operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

• Determinar un equivalente simple de $\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ en 0. De acuerdo con lo anterior,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) \sim \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} \sim \sqrt{\frac{x^3/3}{x}} = \frac{|x|}{\sqrt{3}}.$$

Así, la función $x \mapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)$ no es derivable en 0 (pero es derivable por la derecha y la izquierda) y por lo tanto, no admite un desarrollo limitado de orden mayor o igual a 1 (pero eventualmente admite desarrollos limitados a la izquierda y a la derecha para las que ya no se cumple la observación inicial sobre la paridad de los exponentes).

• Determinar un equivalente simple de $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}$, cuando x tiende a 0 para valores mayores.

$$\begin{aligned}
\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} &\sim \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{x}{\tan x}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = g(x)
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}} &= \left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{-1}\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{45} + o(x^5)\right)^{1/2} = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{15} + o(x^2)\right)^{1/2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3),
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\sqrt{\frac{\tan x - x}{\tan x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{30\sqrt{3}} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^3}{15\sqrt{3}} + o(x^3).$$

luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) &= \left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^{-1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\\ &= \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x^3}{18\sqrt{3}}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3),\end{aligned}$$

y finalmente,

$$g(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{15\sqrt{3}}+o(x^3)\right)-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2x^3}{9\sqrt{3}}+o(x^3)\right)=\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3)\sim\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}.$$

Así, cuando x tiende a 0 para valores mayores,

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)-\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{4x^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).$$

f es par, se deduce que

$$\boxed{\arccos\left(\sqrt{\frac{x}{\tan x}}\right)\underset{x\to 0}{=}\frac{|x|}{\sqrt{3}}+\frac{4|x|^3}{45\sqrt{3}}+o(x^3).}$$

(Esto no es un desarrollo limitado).

4. La función $x\mapsto\tan x$ es tres veces derivable en $\frac{\pi}{4}$ y por lo tanto, admite en $\frac{\pi}{4}$ un desarrollo limitado de orden 3, es decir su desarrollo de TAYLOR-YOUNG. $\tan\frac{\pi}{4}=1$, luego $(\tan)'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\frac{\pi}{4}=2$. Así, $(\tan)''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$ y $(\tan)''(\frac{\pi}{4})=4$. En fin,

$$(\tan)^{(3)}(x)=2(1+\tan^2 x)^2+4\tan^2 x(1+\tan^2 x),$$

y $(\tan)^{(3)}(\frac{\pi}{4})=16$. Finalmente,

$$\boxed{\tan x\underset{x\to\pi/4}{=}1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).}$$

5. $\frac{1}{x^2}\ln(\operatorname{ch}x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)$,
y entonces

$$(\operatorname{ch}x)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}=e^{1/2}e^{-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}=\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).$$

$$\boxed{(\operatorname{ch}x)^{1/x^2}=\underset{x\to 0}{=}\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{12}x^2+o(x^2).}$$

6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)=\tan x\times\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ y un equivalente de $\tan^2 x(\cos(x^2)-1)$ en 0 es $-\frac{x^6}{2}$. Por lo tanto, se escribe $\tan x$ de orden 2. Igualmente, un equivalente de $\tan^3 x$ es x^3 y se escribe así $\cos(x^2)-1$ de orden 5.

$$\tan^3 x(\cos(x^2)-1)\underset{x\to 0}{=}(x+o(x^2))^3\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)=(x^3+o(x^4))\left(-\frac{x^4}{2}+o(x^5)\right)=-\frac{x^7}{2}+o(x^8).$$

$$\boxed{\tan^3 x(\cos(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^7}{2}+o(x^8).}$$

7. Se define $h=x-1$ o aún $x=1+h$, de manera que x tiende a 1 si y solo si h tiende a 0.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{x^2} &= \ln(2+h)(1+h)^{-2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\ln 2+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)\left(1-2h+\frac{(-2)(-3)}{2}h^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3+o(h^3)\right) \\
&= \left(\ln 2+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)\right)(1-2h+3h^2-4h^3+o(h^3)) \\
&= \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)h+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)h^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)h^3+o(h^3).
\end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} \ln 2+\left(\frac{1}{2}-2\ln 2\right)(x-1)+\left(3\ln 2-\frac{9}{8}\right)(x-1)^2+\left(-4\ln 2+\frac{43}{24}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

8. Para x real, se escribe $f(x)=\arctan(\cos x)$. f es derivable en $\mathbb{R}$, y para x real, $f'(x)=-\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$. Así,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)^{-1} \\
&= -\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)(2-x^2+o(x^3))^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Entonces, f' admite un desarrollo limitado de orden 4 en 0 y se sabe que f admite en 0 un desarrollo limitado de orden 5 obtenido por integración.

$$\arctan(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(\cos 0)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)=\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).$$

$$\boxed{\arctan(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{24}+o(x^5).}$$

9. Para $x>-1$, se escribe $f(x)=\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$. f es derivable en $]-1,+\infty[$ y para $x>-1$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{(2x+3)\sqrt{(1+x)(2+x)}} \\
&= \frac{1}{2\times 3\times\sqrt{2}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-1}(1+x)^{-1/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{2x}{3}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(1-\frac{x}{4}+o(x)\right) \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x+o(x)\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(1-\frac{17x}{12}+o(x)\right).
\end{aligned}$$

Así, f' admite por lo tanto en 0 un desarrollo limitado de orden 1 y se sabe entonces que f admite en 0 un desarrollo limitado de orden 2 obtenido por integración.

$$\boxed{\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \underset{x\to 0}{=} \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}x-\frac{17}{144\sqrt{2}}x^2+o(x^2).}$$

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-x^2)^2+\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}(-x^2)^3+o(x^7)$
$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o(x^7).$

Entonces, $\operatorname{arcsen} x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^8)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{arcsen}^2 x} &= (\operatorname{arcsen} x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}+o(x^7)\right)^{-2}\\
&= \frac{1}{x^2}\left(1-2\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+\frac{5x^6}{112}\right)+3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}\right)^2-4\left(\frac{x^2}{6}\right)^3+o(x^7)\right)\\
&= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(-\frac{5}{56}+\frac{3}{40}-\frac{1}{54}\right)x^4+o(x^5)\\
&= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{31x^4}{945}+o(x^5).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{arcsen}^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+\frac{31x^4}{945}+o(x^5).}$$

11. Para x real, se escribe $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, admite primitivas en $\mathbb{R}$.
Sea F la primitiva de f sobre $\mathbb{R}$ que se anula en 0, entonces para x real, sea $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.
g se define en $\mathbb{R}$ y, para x real $g(x)=F(x^2)-F(x)$. g es derivable en $\mathbb{R}$ y, para todo real x,

$$g'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=2xf(x^2)-f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Luego,

$$g'(x) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(1-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{8}x^8+o(x^9)\right)=-1+2x+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{8}x^8-x^9+o(x^9).$$

Así g' admite un desarrollo limitado de orden 9 en 0 y se sabe que g admite un desarrollo limitado de orden 10 en 0 obtenido por integración. Teniendo en cuenta de $g(0)=0$, se tiene

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2+\frac{x^5}{10}-\frac{x^9}{24}-\frac{x^{10}}{10}+o(x^{10}).}$$

12. $$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(\mathrm{e}^x-\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)=\ln(\mathrm{e}^x)+\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!}+o(x^{100})\right)\right)\\
&= x+\ln\left(1-(1+o(1))\left(\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)\right)=x+\ln\left(1-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100})\right)\\
&= x-\frac{x^{100}}{(100)!}+o(x^{100}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^{100}}{(100)!} + o(x^{100}).}$$

13. Se define $h = x - \pi$ o aún $x = \pi + h$ de manera que x tiende a π si y solo si h tiende a 0.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)} &= \sqrt[3]{4(\pi^3+(\pi+h)^3)} = \sqrt[3]{8\pi^3+12\pi^2h+12\pi h^2+4h^3}\\
&\underset{h\to 0}{=} 2\pi\left(1+\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)^{1/3}\\
&= 2\pi\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}+\frac{h^3}{2\pi^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{3h}{2\pi}+\frac{3h^2}{2\pi^2}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{3h}{2\pi}\right)^3+o(h^3)\right)\\
&= 2\pi+h+h^2\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\right)+h^3\left(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{12\pi^2}\right)+o(h^3)\\
&= 2\pi+h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) &= \tan\left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}+o(h^3)\right)\\
&= \left(h+\frac{h^2}{2\pi}-\frac{h^3}{4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}h^3+o(h^3) = h+\frac{h^2}{2\pi}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4\pi^2}\right)h^3+o(h^3).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\tan(\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}) \underset{x\to\pi}{=} (x-1)+\tfrac{1}{2\pi}(x-1)^2+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4\pi^2}\right)(x-1)^3+o((x-1)^3).}$$

Solución del ejercicio 2364 ▲005428

Porque $a>0$, $b>0$ y que para todo real x, $\frac{a^x+b^x}{2}>0$, f se define en $\mathbb{R}^*$, y para

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\exp\left(\tfrac{1}{x}\ln\left(\tfrac{a^x+b^x}{2}\right)\right).$$

Estudio en 0.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^{x\ln a}+e^{x\ln b}}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b\right)+x^2\left(\frac{1}{4}\ln^2 a+\frac{1}{4}\ln^2 b\right)+o(x^2)\right)\\
&= \ln\left(1+x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}+o(x^2)\right)\\
&= x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{\ln^2 a+\ln^2 b}{4}-\frac{1}{2}(x\ln\sqrt{ab})^2+o(x^2)\\
&= x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{1}{8}(\ln^2 a-2\ln a\ln b+\ln^2 b)x^2+o(x^2)\\
&= x\ln\left(\sqrt{ab}\right)+x^2\frac{1}{8}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)+o(x^2).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}=\exp(\ln(\sqrt{ab})+\frac{1}{8}\ln^2\frac{a}{b}x+o(x))=\sqrt{ab}(1+\frac{1}{8}x\ln^2\frac{a}{b}+o(x)).$$

Así, f se extiende por continuidad en 0 poniendo $f(0)=\sqrt{ab}$. La extensión obtenida es derivable en 0 y $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}(>0)$.

Estudio en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}(a^x+b^x)\right)&=\frac{1}{x}\left(\ln(b^x)-\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)\right)=\frac{1}{x}(x\ln b+o(x))\quad(\text{pues } 0<\frac{a}{b}<1)\\&=\ln b+o(1).\end{aligned}$$

y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b(=\max\{a,b\})$.

Estudio en $-\infty$. Para todo real x,

$$f(-x)=\left(\frac{a^{-x}+b^{-x}}{2}\right)^{-1/x}=\left(\frac{a^x+b^x}{2a^xb^x}\right)^{-1/x}=\frac{ab}{f(x)},$$

y por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{X\to+\infty}f(-X)=\lim_{X\to+\infty}\frac{ab}{f(X)}=\frac{ab}{b}=a\quad(=\min\{a,b\}).$$

Derivada y variaciones. f es derivable en $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ en virtud de teoremas generales (y también en 0 según el estudio hecho anteriormente), y para $x\neq0$ (ya que $f>0$ sobre $\mathbb{R}^*$),

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f)'(x)=\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+\frac{1}{x}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

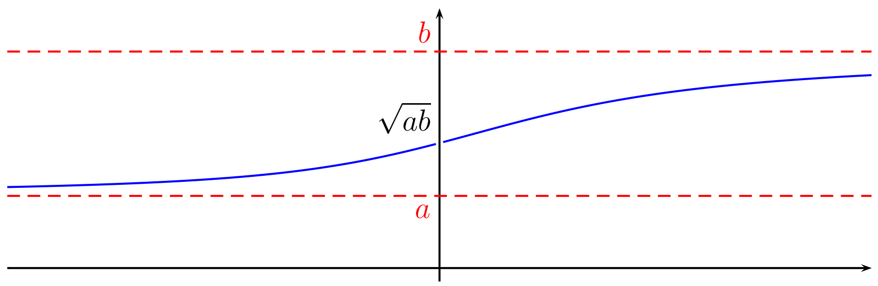
f' tiene el mismo signo que $(\ln f)'$, que tiene el mismo signo que la función g definida en $\mathbb{R}$ por

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)+x\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}.$$

g es derivable en $\mathbb{R}$ y, para x real,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}+x\frac{(a^x\ln^2a+b^x\ln^2b)(a^x+b^x)-(a^x\ln a+b^x\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\&=x\frac{(ab)^x(\ln a-\ln b)^2}{(a^x+b^x)^2}.\end{aligned}$$

g' es, por lo tanto estrictamente negativa en $]-\infty,0[$ y estrictamente positivo en $]0,+\infty[$. Así, g es estrictamente decreciente en $]-\infty,0]$ y estrictamente creciente en $[0,+\infty[$. g' por lo tanto, admite un mínimo global estricto en 0 y desde $g(0)=0$, se deduce que g es estrictamente positiva en $\mathbb{R}^*$. Igualmente, f' es estrictamente positiva en $\mathbb{R}^*$. Como resultado del estudio en 0, se ha demostrado que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que f' es estrictamente positiva en $\mathbb{R}$. f es, por lo tanto estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. El **gráfico de** f tiene el siguiente aspecto :



Se puede notar que las desigualdades $\lim\limits_{x\to-\infty} f < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim\limits_{x\to+\infty} f$ proporcionan :

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Solución del ejercicio 2365 ▲005429

Cuando x tiende a $+\infty$,

$$\sqrt{x^2-3} = x\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^{1/2} = x\left(1-\frac{3}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = x-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

y,

$$\sqrt[3]{8x^3+7x^2+1} = 2x\left(1+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} = 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{49}{576x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x+\frac{7}{12}-\frac{49}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Así,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{7}{12}-\frac{383}{288x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La curva representativa de f admite por lo tanto en $+\infty$ una recta asíntota de ecuación $y=-x-\frac{7}{12}$. Además, el signo de $f(x)-\left(-x-\frac{7}{12}\right)$ es, en un vecindario de $+\infty$, el signo de $-\frac{383}{288x}$. Entonces la curva representativa de f está debajo de la recta de ecuación $y=-x-\frac{7}{12}$ en un vecindario de $+\infty$.

Solución del ejercicio 2366 ▲005430

f es de clase C^∞ en su dominio $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en tanto que fracción racional y en particular admite un desarrollo limitado de todo orden en 0. Para todo natural n, se tiene

$$f(x) \underset{x\to0}{=} x+x^3+\cdots+x^{2n+1}+o(x^{2n+1}),$$

Por unicidad de los coeficientes de un desarrollo limitado y según la fórmula de TAYLOR-YOUNG, se obtiene

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(2n)}(0)=0 \text{ y } f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!.}$$

entonces, para $x\notin\{-1,1\}$, y n entero natural dado,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

Solución del ejercicio 2367 ▲005431

1. $\sqrt{x^2+3x+5}-x+1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -x-x=-2x$, y,

$$\sqrt{x^2+3x+5}-x+1 = \frac{(x^2+3x+5)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x+2x}{x+x} = \frac{5}{2}.$$

2. $3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x$ y $3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$. Así, cuando x tiende a 1, $3x^2-6x$ tiende a $-3\neq 0$ y entonces, $3x^2-6x \underset{x\to 1}{\sim} -3$. En fin, $3x^2-6x = 3x(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2)$.

$$\boxed{3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -6x, \qquad 3x^2-6x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2, \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 0}{\sim} -3, \qquad 3x^2-6x \underset{x\to 2}{\sim} 6(x-2).}$$

3. $(x-x^2)\ln(\operatorname{sen}x) \underset{x\to 0}{=} (x-x^2)\ln x + (x-x^2)\ln\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = x\ln x - x^2\ln x + o(x^2\ln x)$, entonces,

$$\operatorname{sen}x\ln(x-x^2) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(\ln x+\ln(1-x)) = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(\ln x - x + o(x)) = x\ln x + o(x^2\ln x).$$

Así,

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\operatorname{sen}x} &= e^{x\ln x}(e^{-x^2\ln x+o(x^2\ln x)}-e^{o(x^2\ln x)}) = e^{x\ln x}(1-x^2\ln x-1+o(x^2\ln x))\\ &= (1+o(1))(-x^2\ln x+o(x^2\ln x)) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.\end{aligned}$$

$$\boxed{(\operatorname{sen}x)^{x-x^2}-(x-x^2)^{\operatorname{sen}x} \underset{x\to 0}{\sim} -x^2\ln x.}$$

4. $\operatorname{th}x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{=} = (1-e^{-2x})(1-e^{-2x}+o(e^{-2x})) = 1-2e^{-2x}+o(e^{-2x})$, y entonces $\operatorname{th}x\ln x = (1-2e^{-2x}+o(e^{-2x}))\ln x = \ln x + o(1)$. Así,

$$x^{\operatorname{th}x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\ln x} = x.$$

5. **Intento de orden 3.**
$\tan(\operatorname{sen}x) \underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{3}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, y, $\operatorname{sen}(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \operatorname{sen}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}(x)^3+o(x^3) = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.
Entonces, $\tan(\operatorname{sen}x)-\operatorname{sen}(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$. El orden 3 es insuficiente para obtener un equivalente.
Intento de orden 5.

$$\begin{aligned}\tan(\operatorname{sen}x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right) = \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\frac{2}{15}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+x^5\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \operatorname{sen}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right) = \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+\frac{1}{120}(x)^5+o(x^5)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5) = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+o(x^5).\end{aligned}$$

Entonces, $\tan(\operatorname{sen}x)-\operatorname{sen}(\tan x) \underset{x\to 0}{=} o(x^5)$. El orden 5 es insuficiente para obtener un equivalente. El contacto entre las curvas que representan las funciones $x\mapsto \operatorname{sen}(\tan x)$ y $x\mapsto \tan(\operatorname{sen}x)$ es muy fuerte. **Intento de orden 7.**

$$\begin{aligned}
\tan(\operatorname{sen} x) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)\\
&= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right)+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{3}\left(3\times\frac{1}{120}+3\times\frac{1}{36}\right)+\frac{2}{15}\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(-\frac{1}{5040}+\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{17}{315}\right)x^7+o(x^7),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\tan x) &\underset{x\to 0}{=} \operatorname{sen}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17}{x^7}315+o(x^7)\right)\\
&= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^5-\frac{1}{5040}(x)^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{6}\left(3\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{120}\times\frac{5}{3}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7)\\
&= x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\left(\frac{17}{315}-\frac{1}{15}-\frac{1}{18}+\frac{1}{72}-\frac{1}{5040}\right)x^7+o(x^7).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\tan(\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen}(\tan x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}-\frac{1}{72}\right)x^7+o(x^7)=\frac{x^7}{30}+o(x^7),$$

y entonces

$$\boxed{\tan(\operatorname{sen} x)-\operatorname{sen}(\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^7}{30}.}$$

Solución del ejercicio 2368 ▲005432

Para $n\geqslant 5$, se tiene

$$u_n = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)}.$$

entonces,

$$0\leqslant n^3\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)}\leqslant n^3(n-4)\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

Así, $\sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ e igualmente $\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Así

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).}$$

Solución del ejercicio 2369 ▲005433

1. $$\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)^{-1}-1\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+x^3\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right.$$
$$\left.+x^4\left(-\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{24}\right)-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+o(x^4)\right)$$
$$=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).$$
$$\boxed{\frac{1}{x(e^x-1)}-\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{x^2}{720}+o(x^2).}$$

2. $$x\ln(x+1)-(x+1)\ln x = x\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-(x+1)\ln x$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} -\ln x+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
$$=-\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$
$$\boxed{x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln x+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).}$$

Solución del ejercicio 2370 ▲005434

1. $f_n(a)=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(a-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$
   Reemplazando a por b o $a+b$, se obtiene
$$f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{=} e^{a+b}\left(1-\frac{(a+b)^2}{2n}\right)-e^a\left(1-\frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1-\frac{b^2}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=e^{a+b}\frac{-(a+b)^2+a^2+b^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{ab\,e^{a+b}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   Entonces, si $ab\neq 0$, $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{ab\,e^{a+b}}{n}$.
   Si $ab=0$, es claro que $f_n(a+b)-f_n(a)f_n(b)=0$.

2. $e^{-a}f_n(a) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-a+\left(a-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\left(-\frac{a^2}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,
   y entonces
$$e^{-a}f_n(a)-1+\frac{a^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2}.$$

Solución del ejercicio 2371 ▲005437

Para n entero natural dado, se escribe $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

• Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in I_n$, se escribe $f(x) = \tan x - x$. f es derivable en I_n y para x en I_n, $f'(x) = \tan^2 x$. Así, f es derivable en I_n y f' es estrictamente positiva en $I_n \setminus \{n\pi\}$. Entonces f es estrictamente creciente en I_n.

• Sea $n \in \mathbb{N}$. f es continua y estrictamente creciente en I_n y por lo tanto, realiza una biyección de I_n sobre $f(I_n) = \mathbb{R}$. En particular, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! x_n \in I_n / f(x_n) = 0$ (o incluso tal que $\tan x_n = x_n$).

• Se tiene $x_0 = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ y entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$. En particular,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).}$$

• Se define entonces $y_n = x_n - n\pi$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Además, $\tan(y_n) = \tan(x_n) = n\pi + y_n$ y entonces, ya que $y_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\pi}{2} > y_n = \arctan(y_n + n\pi) \geqslant \arctan(n\pi).$$

Porque $\arctan(n\pi)$ tiende a $\frac{\pi}{2}$, se tiene $y_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ o aún

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).}$$

• Se define ahora $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. De acuerdo con lo anterior, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ y por otro lado $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Luego, $\tan\left(z_n + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n$ y entonces $-\operatorname{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Porque z_n tiende a 0, se deduce que

$$-\frac{1}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\operatorname{cotan}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi,$$

o aún $z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Así,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

• Se define en fin $t_n = z_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. Se sabe que $t_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ y que

$$-\operatorname{cotan}\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = -\operatorname{cotan}(z_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + z_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\tfrac{1}{n}).$$

Así,

$$-\tan\left(t_n - \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

luego,

$$\frac{1}{n\pi} - t_n = \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

y entonces $t_n = \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalmente,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2n^2\pi}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Solución del ejercicio 2372 ▲005438

1. Para $x>0$, se escribe $f(x)=x+\ln x$. f es continua en $]0,+\infty[$, estrictamente creciente en $]0,+\infty[$ como la suma de dos funciones continuas y estrictamente crecientes en $]0,+\infty[$. f realiza así una biyección de $]0,+\infty[$ sobre $f(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$. En particular,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{R},\ \exists! x_k\in]0,+\infty[/\ f(x_k)=k.}$$

2. $f\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2}<k$, para k suficientemente grande (pues $k-(\frac{k}{2}+\ln\frac{k}{2})=\frac{k}{2}-\ln\frac{k}{2}\underset{k\to+\infty}{\to}+\infty$ por los teoremas de crecimientos comparados). Entonces, para k suficientemente grande, $f\left(\frac{k}{2}\right)<f(x_k)$. Porque f es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$, se deduce que $x_k>\frac{k}{2}$, para k suficientemente grande y por lo tanto, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k=+\infty$. Pero entonces, $k=x_k+\ln x_k\sim x_k$ y entonces, cuando k tiende a $+\infty$,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k+o(k).}$$

Se define $y_k=x_k-k$. Se tiene $y_k=o(k)$ y además $y_k+\ln(y_k+k)=0$ que se escribe :

$$y_k=-\ln(k+y_k)=-\ln(k+o(k))=-\ln k+\ln(1+o(1))=-\ln k+o(1).$$

Así,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k-\ln k+o(1).}$$

Se define $z_k=y_k+\ln k=x_k-k+\ln k$. Entonces, $z_k=o(1)$ y $-\ln k+z_k=-\ln(k-\ln k+z_k)$. Así,

$$z_k=\ln k-\ln(k-\ln k+o(1))=-\ln\left(1-\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right)=\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Finalmente,

$$\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{=} k-\ln k+\frac{\ln k}{k}+o\left(\frac{\ln k}{k}\right).}$$

Solución del ejercicio 2373 ▲005439

1. $x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\underset{x\to0}{=}O(x^3)$ y, en particular $x^3\operatorname{sen}\frac{1}{x}\underset{x\to0}{=}o(x^2)$. Entonces, considerando el hecho $f(0)=1$,

$$f(x)\underset{x\to0}{=}1+x+x^2+o(x^2).$$

f admite en 0 un desarrollo limitado de orden 2.

2. $f(x)\underset{x\to0}{=}1+x+o(x)$. Entonces, f admite en 0 un desarrollo limitado de orden 1. Se deduce que f es continua y derivable en 0, con $f(0)=f'(0)=1$. f es por otro lado derivable en $\mathbb{R}^*$ en virtud de teoremas generales (y por lo tanto, en $\mathbb{R}$) y para $x\neq0$, $f'(x)=1+2x+3x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$.

3. f' se define en $\mathbb{R}$, pero no tiene límite en 0. f' por lo tanto, ni siquiera admite un desarrollo limitado de orden 0 en 0.

Solución del ejercicio 2374 ▲005440

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4)$, y entonces

$$\arcsen x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5).$$

Luego,

$$\frac{1}{\arcsen x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right) = \frac{1}{x}-\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}+o(x^3),$$

y por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsen x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6}+\frac{17x^3}{360}+o(x^3).}$$

La función f propuesta se extiende, por lo tanto, por continuidad a 0 poniendo $f(0)=0$. La extensión es derivable en 0 y $f'(0)=\frac{1}{6}$. La curva representativa de f admite en el origen una tangente de ecuación $y=\frac{x}{6}$. El signo de la diferencia $f(x)-\frac{x}{6}$ es, en un vecindario de 0, el signo de $\frac{17x^3}{360}$. La curva representativa de f por lo tanto admite en el origen una tangente de inflexión de ecuación $y=\frac{x}{6}$.

Solución del ejercicio 2375 ▲005441

1. $\arccos x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$ (desarrollo limitado de orden 0). Pero la función $x\mapsto \arccos x$ no es derivable en 1 y por lo tanto, no admite en 1 un desarrollo limitado de orden 1.
   2. Porque $\arccos x \underset{x\to 1^-}{=} o(1)$,

$$\arccos x \underset{x\to 1^-}{\sim} \operatorname{sen}(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1+x)(1-x)} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

$$\boxed{\arccos x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}.}$$

Solución del ejercicio 2376 ▲005442

1. Cuando x tiende a 0,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k+2\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right)+o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+3+(-1)^k}{4}x^k+o(x^n).$$

2. También se tiene,

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^p\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x^{2q}\right) + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p+2q=k} 1\right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Por unicidad de los coeficientes de un desarrollo limitado, por lo tanto se tiene

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.}$$

(a_k es el número de formas de pagar k euros en monedas de 1 y 2 euros).

Solución del ejercicio 2377 ▲006888

---

1. $\cos x \cdot \exp x$ (de orden 3). El dl de $\cos x$ de orden 3 es

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3.$$

El dl de $\exp x$ de orden 3 es

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3.$$

Por convención todas las funciones $\varepsilon_i(x)$ verifican $\varepsilon_i(x) \to 0$, cuando $x \to 0$.
Se multiplican estas dos expresiones

$$\begin{aligned}
\cos x \times \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&= 1 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \quad \text{se desarrolla la fila superior} \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&\quad + \varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)
\end{aligned}$$

Se va a desarrollar cada uno de estos productos, por ejemplo para el segundo producto :

$$-\frac{1}{2!}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3.$$

Pero estamos buscando un dl del orden 3 por lo que todo término en x^4, x^5 o más entra en $\varepsilon_3(x)x^3$, incluido $x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3$ que es de la forma $\varepsilon(x)x^3$. Entonces

$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3.$$

Para el tercer producto se tiene

$$\varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = \varepsilon_1(x)x^3 + x\varepsilon_1(x)x^3 + \cdots = \varepsilon_4(x)x^3.$$

Se llega a :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_1(x)x^3 \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3 \\
&\quad + \varepsilon_4(x)x^3 \qquad \text{solo queda es agrupar los términos :} \\
&= 1 + x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2})x^3 + \varepsilon_5(x)x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3
\end{aligned}$$

Así el dl de $\cos x \cdot \exp x$ en 0 de orden 3 es :

$$\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3.$$

2. $(\ln(1+x))^2$ (de orden 4). Se trata justo de multiplicar el dl de $\ln(1+x)$ por sí mismo. De hecho si se reflexiona un poc,o se percibe que un dl de orden 3 es suficiente (porque el término constante es cero) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

$\varepsilon_5(x) \to 0$, cuando $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x) \times \ln(1+x) \\
&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) - \frac{1}{2}x^2 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{3}x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) + \varepsilon(x)x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon(x)x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon_1(x)x^4 + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 + \varepsilon_3(x)x^4 \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \varepsilon_4(x)x^4
\end{aligned}$$

3. $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ (de orden 6). Para el dl de $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ se comienza haciendo un dl del numerador. Primeramente :

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9$$

por lo tanto

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9.$$

No queda más que dividir por x^3 :

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + \varepsilon(x)x^6$$

Se observa que se comienza calculando un dl del numerador de orden 9, para obtener luego de la división, un dl de orden 6.

4. $\exp\big(\operatorname{sen}(x)\big)$ (de orden 4).

   Se sabe $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ y $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4)$. Se denota ahora toda función $\varepsilon(x)x^n$ (donde $\varepsilon(x) \to 0$, cuando $x \to 0$) por $o(x^n)$. Esto evita las múltiples expresiones $\varepsilon_i(x)x^n$. Se sustituye $u = \operatorname{sen}(x)$, es necesario entonces calcular u, u^2, u^3 y u^4 :

$$u = \operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \qquad u^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$
$$u^3 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^3 = x^3 + o(x^4) \qquad u^4 = x^4 + o(x^4) \quad \text{y} \quad o(u^4) = o(x^4).$$

   Para obtener :

$$\begin{aligned}\exp(\operatorname{sen}(x)) &= 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2!}\big(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\big) + \frac{1}{3!}\big(x^3 + o(x^4)\big) + \frac{1}{4!}\big(x^4 + o(x^4)\big) + o(x^4)\\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

5. $\operatorname{sen}^6(x)$ (de orden 9).

   Se sabe $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$. Si se quiere calcular un dl de $\operatorname{sen}^2(x)$ de orden 5 se escribe :

$$\operatorname{sen}^2(x) = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) = x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).$$

   En efecto, todos los otros términos están en $o(x^5)$. El principio es el mismo para $\operatorname{sen}^6(x)$:

$$\operatorname{sen}^6(x) = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^6 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \cdots$$

   Cuando se desarrolla este producto comenzando por los términos de menor grados se obtiene

$$\operatorname{sen}^6(x) = x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot (-\frac{1}{3!}x^3) + o(x^9) = x^6 - x^8 + o(x^9)$$

6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ (de orden 6). El dl de $\cos x$ de orden 6 es

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

   El dl de $\ln(1+u)$ de orden 6 es $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6)$. Se define $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$ de manera que

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

   Solo queda desarrollar el u^k, que no es tan difícil si los cálculos están bien hechos y se descartan las potencias demasiado grandes. En primer lugar :

$$\begin{aligned}u^2 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)^2 = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + o(x^6)\\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2!}x^2\right)\left(\frac{1}{4!}x^4\right) + o(x^6) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6),\end{aligned}$$

luego :

$$u^3 = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)^3 = \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^3 + o(x^6) = -\frac{1}{8}x^6 + o(x^6).$$

De hecho, cuando se desarrolla u^3 el término $(x^2)^6$ es el único término cuyo exponente es $\leqslant 6$. Finalmente, los otros términos u^4, u^5, u^6 son todos de $o(x^6)$. Y de hecho desarrollar $\ln(1+u)$ de orden 3 es suficiente.

Solo queda reunir :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\
&= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6 + o(x^6)\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

7. $\dfrac{1}{\cos x}$ de orden 4.

   El dl de $\cos x$ de orden 4 es

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

   El dl de $\frac{1}{1+u}$ de orden 2 (que será suficiente aquí) es $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Se establece $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ y se tiene $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\
&= 1 - \big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\big) + \big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\big)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

8. $\tan x$ (de orden 5 (o 7, para los más valientes)). Para aquellos que desean solamente un dl de orden 5 de $\tan x = \operatorname{sen} x \times \frac{1}{\cos x}$, entonces es necesario multiplicar el dl de $\operatorname{sen} x$ de orden 5 por el dl de $\frac{1}{\cos x}$ de orden 4 (ver pregunta precedente). Si se quiere un dl de $\tan x$ de orden 7 es necesario primero rehacer el dl de $\frac{1}{\cos x}$, pero esta vez al orden 6 :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6).$$

   El dl de orden 7 de $\operatorname{sen} x$ es :

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7).$$

   Como $\tan x = \operatorname{sen} x \times \frac{1}{\cos x}$, solo queda multiplicar los dos dl para obtener luego de los cálculos :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7).$$

9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (de orden 3).

Si se piensa en escribir $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\right)$, entonces son solo cálculos usando el dl de orden 3 de $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ y $\exp x$. Se encuentra

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

10. $\operatorname{arcsen}\left(\ln(1+x^2)\right)$ (de orden 6). En primer lugar, $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$. Y $\operatorname{arcsen} u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Entonces poniendo $u = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ se tiene :

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsen}\left(\ln(1+x^2)\right) &= \operatorname{arcsen}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) \\
&= \operatorname{arcsen} u = u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right)^3 + o(x^6) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Solución del **ejercicio 2378** ▲001247

---

1. Se tiene

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \quad \text{y} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

Se ve que de hecho un dl de orden 2 suficiente :

$$e^{x^2} - \cos x = \left(1 + x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Así $\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$ (donde $o(1)$ denota una función que tiende a 0) y entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

2. Se sabe que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Los dl son distintos desde el término de grado 2 así un dl de orden 2 es suficiente :

$$\ln(1+x) - \operatorname{sen} x = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

por lo tanto

$$\frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x} = -\frac{x}{2} + o(x)$$

y así

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

3. Sabiendo
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
y
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$
entonces
$$\begin{aligned}\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6} + o(1).\end{aligned}$$
Así
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Solución del ejercicio 2379 ▲001248

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1. \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1} = 0.$$

Solución del ejercicio 2380 ▲001249

Comenzar en $x = 0$, el dl de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ de orden 2 es
$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$
Por identificación con $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ esto lleva entonces a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ (y $f''(0) = 1$). La ecuación de la tangente es, por lo tanto $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, por lo tanto $y = x$. La posición con respecto a la tangente corresponde al estudio del signo de $f(x) - y(x)$, donde $y(x)$ es la ecuación de la tangente.
$$f(x) - y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ - \ x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$
Así para x suficientemente cerca de 0, $f(x) - y(x)$ es del signo de $\frac{1}{2}x^2$ y por lo tanto, es positivo. Entonces en un vecindario de 0 la curva de f está por encima de la tangente en 0.
El mismo estudio en $x = 1$. Se trata pues de hacer el dl de $f(x)$ en $x = 1$. Se define $x = 1 + h$ (de manera que $h = x - 1$ está cerca de 0) :
$$\begin{aligned}f(x) = \ln(1+x+x^2) &= \ln\left(1 + (1+h) + (1+h)^2\right) = \ln\left(3 + 3h + h^2\right) \\ &= \ln\left(3\left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right)\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \left(h + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2}{2} + o\left(\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2\right) \\ &= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2) = \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2) \\ &= \ln 3 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2).\end{aligned}$$

La tangente en $x=1$ es de ecuación $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ y por lo tanto, es dado por el dl de orden 1 : es $y=(x-1)+\ln 3$. Y la diferencia $f(x)-\big(\ln 3+(x-1)\big)=-\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ es negativo para x cerca de 1. Entonces, en un vecindario de 1, la gráfica de f está debajo de la tangente en $x=1$.

Solución del ejercicio 2393 ▲001262

1. La función g se define en x salvo si $\operatorname{sen}(x)=0$ o $x=0$. Su dominio de definición es, por lo tanto $\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
2. Se puede extender g en una función continua en 0 si y solo si admite un límite. Es derivable en este punto si y solo si admite un desarrollo limitado de orden 1. Sin embargo, como el enunciado pregunta por la posición de la gráfica de g, con respecto en su tangente en 0, calcular directamente el desarrollo limitado de orden 2 de g en 0. El desarrollo limitado en 0 de orden 5 de $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+x^5\varepsilon_1(x)$. Por lo tanto $\operatorname{sen} x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+x^5\varepsilon_2(x)$. Entonces $\operatorname{sen}^3 x = x^3-\dfrac{x^5}{2}+\dfrac{13x^7}{120}+x^7\varepsilon_3(x)$ y $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}=\dfrac{1}{x^3}(1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9x^4}{40}+x^4\varepsilon_4(x))$. Se deduce que :
$$\frac{\arctan x}{(\operatorname{sen} x)^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^3}(x+\frac{x^3}{6}+\frac{31x^5}{120}+x^5\varepsilon_5(x))-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{6}+\frac{31x^2}{120}+x^2\varepsilon_5(x).$$
Así podemos extender g en una función continua en 0 poniendo $g(0)=\dfrac{1}{6}$. La función obtenida es derivable en 0 y su derivada es nula. La tangente en 0 a su gráfica es la recta de ecuación $y=\dfrac{1}{6}$. Finalmente, la gráfica de g está por encima de esta recta en un vecindario de 0.

Solución del ejercicio 2396 ▲001265

1. (a) El primer límite no es una forma indeterminada, en efecto,
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$
por lo tanto
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x=+\infty$$
(b) Cuando $x\to-\infty$ la situación es muy diferente porque
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$
por lo tanto $\sqrt{x^2+3x+2}+x$ es una forma indeterminada !
Calculemos un desarrollo limitado de orden 1 en $-\infty$ prestando mucha atención al signo (porque por ejemplo $|x|=-x$) :
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+2}+x &= |x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\\ &=|x|\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+o(\frac{1}{x})\ -1)\right)\\ &=|x|\left(\frac{1}{2}\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x})\right)=-\frac{3}{2}+o(1),\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x=-\frac{3}{2}.$$

2. Se utiliza que

$$\begin{aligned}(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(\arctan x)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\big(x+o(x)\big)\right) \qquad \text{pues } \arctan x = x+o(x).\end{aligned}$$

Pero cuando $x\to 0^+$ se sabe que $\ln(x+o(x))\to-\infty$, $x^2\to 0$, por lo tanto :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+o(x))}{x^2}=-\infty.$$

Combinado con la exponencial encontramos :

$$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}=0$$

3. Efectuar el dl de orden 2 : como

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$

entonces

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}}=1+x-x^2+o(x^2).$$

$$\operatorname{sen} x = x+o(x^2) \quad \text{y} \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2).$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} &= \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \quad \text{luego de la factorización por } x^2\\ &= -2+o(1),\end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=-2$$

Solución del ejercicio 2402 ▲004024

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=0 \Rightarrow L=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}a_k.$

Solución del ejercicio 2403 ▲004025

$v_p=\left(\frac{2^{1+1/p}-1}{1+1/p}\right)^p$, $w_n=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$, $v=w=\frac{4}{e}$.

Solución del ejercicio 2404 ▲004026

$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \to \frac{f'(0)}{2}$, cuando $n \to \infty$. $\left(\text{Utilizar } |f(x) - xf'(0)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f''(t)| \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant 1\right)$

Solución del ejercicio 2405 ▲004027

1. $y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}$.
2. $y = -\frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360}$.
3. $y = -\frac{x}{6} - \frac{17x^3}{360}$.
4. $y = e^3(1 - 4x + 16x^2)$.
5. $y = -1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}$.
6. $y = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128}\right)$.

Solución del ejercicio 2406 ▲004028

$h \leqslant k \leqslant g \leqslant f$.

Solución del ejercicio 2407 ▲004029

1. $y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x}$.
2. $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x}$.
3. $y = 2x - \frac{4}{3x}$.
4. $y = \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3x^2}$.
5. $y = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi/4 - 1}{x}$.
6. $y = \frac{\pi x}{2} + \pi - 1 + \frac{5\pi/4 - 2}{x}$.
7. $y = x + \frac{1}{2} - \frac{9}{8x}$.

Solución del ejercicio 2408 ▲004037

1. Denotemos I_n el intervalo $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Entonces en cada I_n la función definida por $f(x) = \tan x - x$ es una función continua y derivable. Además, $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$. La derivada es estrictamente positiva excepto en un punto donde es nula, por lo que la función f es estrictamente creciente en I_n. El límite a la izquierda es $-\infty$ y el límite a la derecha es $+\infty$. Por el teorema de valores intermedios existe un único $x_n \in I_n$ tal que $f(x_n) = 0$, es decir $\tan x_n = x_n$.
2. $x \mapsto \arctan x$ es la biyección recíproca de la restricción de la tangente $\tan :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\to]-\infty, +\infty[$. En estos intervalos se tiene $\tan x = y \iff x = \arctan y$. Pero si $y \notin]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ es necesario primero volver al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Así $x_n \in I_n$, por lo tanto $x_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Ahora $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$. Entonces $\arctan x_n = \arctan\left(\tan(x_n - n\pi)\right) = x_n - n\pi$. Así
$$x_n = \arctan x_n + n\pi.$$
El error clásico es pensar que $\arctan(\tan x) = x$, lo cual solo es cierto para $x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$!
3. Como $x_n \in I_n$, entonces $x_n \to +\infty$, cuando $n \to +\infty$. Se sabe por otro lado que para $x > 0$ se tiene $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Así $\arctan x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n}$
Cuando n tiende a $+\infty$, entonces $\frac{1}{x_n} \to 0$, por lo tanto $\arctan \frac{1}{x_n} \to 0$. Así
$$x_n = n\pi + \arctan x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

4. Se va utilizar el dl obtenido anteriormente para obtener un dl de orden más grande :

$$x_n = n\pi + \arctan x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}$$
$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} + o(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{pues } \arctan u = u + o(u^2) \text{ en } u = 0$$
$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} + o(\frac{1}{n^2}) = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi}(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) + o(\frac{1}{n^2})$$
$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Así en $+\infty$ se tiene el desarrollo :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Solución del ejercicio 2409 ▲004038

1. $f_n'(x) = 0 \iff \cotan x = nx$.
2. 0.
3. $x_n \tan x_n = \frac{1}{n}$.
4. $\ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right) \to -\frac{1}{e} \Rightarrow y_n \sim \frac{1}{\sqrt{n e}}$.

Solución del ejercicio 2410 ▲004039

1.
2. (a)
   (b) $a \sim e^{-b} \Rightarrow a \ln b \to 0 \Rightarrow b^a \to 1$.

Solución del ejercicio 2411 ▲004040

Existencia y unicidad de x_n por estudio de f sobre $[3,+\infty[$ (para $x \leqslant 3$ no se puede tener $0 < f(x) < 1$). Se tiene fácilmente $x_n \to +\infty$, cuando $n \to \infty$. $\ln(x_n - 2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln(x_n) \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x_n}\right) = -\frac{\ln(x_n)}{n} \Rightarrow x_n \ln(x_n) \sim 2n \Rightarrow x_n \sim \frac{2n}{\ln n}$.

Solución del ejercicio 2412 ▲004041

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Solución del ejercicio 2413 ▲004042

Existencia y unicidad de x_n por estudio de la función $x \mapsto e^x + x$ sobre $\mathbb{R}^+$. Se tiene claramente $x_n \to +\infty$ (cuando $n \to \infty$) y $n = e^{x_n} + x_n$, de donde :

$$\ln n = \ln(e^{x_n} + x_n) = x_n + \ln(1 + x_n e^{-x_n}) = x_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2}e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}).$$

Se deduce que $x_n \sim \ln n$. Escribir $x_n = \ln n + y_n$:

$$0 = y_n + x_n e^{-x_n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}),$$

de donde $y_n \to 0$ (cuando $n \to \infty$) y $y_n \sim -x_n e^{-x_n} \sim -\frac{\ln n}{n} e^{-y_n} \sim -\frac{\ln n}{n}$. Escribir ahora $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\ln n}{n} + z_n + (\ln n + y_n)\frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2} e^{-2x_n} + o(x_n^2 e^{-2x_n}) \\
&= z_n + \frac{(\ln n)(-y_n + o(y_n))}{n} + y_n \frac{e^{-y_n}}{n} - \frac{x_n^2}{2n^2} e^{-2y_n} + o\left(\frac{x_n^2 e^{-2y_n}}{n^2}\right) \\
&= z_n + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

de donde $z_n \sim -\frac{\ln^2 n}{2n^2}$ y finalmente, $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Solución del ejercicio 2414 ▲004043

1.
2.

$$\begin{aligned}
n x_n^n (x_n - 1) = x_n^n + \frac{1}{2} \Rightarrow f_{n+1}(x_n) = \frac{n+1}{n}\left(x_n^{n+1} + \frac{x_n}{2}\right) - x_n^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{x_n^{n+1}}{n} + \frac{(n+1)x_n - n}{2n} > 0 \\
\Rightarrow x_{n+1} < x_n.
\end{aligned}$$

Entonces la sucesión (x_n) es decreciente y acotada inferiormente por 1, converge a $\ell \geqslant 1$. $0 \leqslant x_n - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n x_n^n} \to 0$ (cuando $n \to \infty$) por lo tanto $\ell = 1$. Sea $y_n = n(x_n - 1) = 1 + \frac{1}{2x_n^n}$. Se tiene $f(y_n) = \frac{\ln(2(y_n - 1))}{y_n} = -\frac{\ln x_n}{x_n - 1} = -g(x_n)$ y f, g son estrictamente crecientes en $[1, +\infty[$, entonces las consecuencias (x_n) y (y_n) varían en el sentido contrario. Se deduce que la sucesión (y_n) decrece, por lo tanto admite un límite $\lambda \geqslant 1$, sea $x_n = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Entonces $x_n^n \to e^{\lambda}$ (cuando $n \to \infty$) de donde $\lambda = 1 + \frac{1}{2e^{\lambda}}$.

Solución del ejercicio 2415 ▲004044

Se trata, por supuesto, de calcular un desarrollo limitado, el primer término de esta expansión da el equivalente buscado.

1. El dl a la orden 3 en 0 es

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} = -\frac{11x^3}{3} + o(x^3)$$

por lo tanto

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \sim -\frac{11x^3}{3}.$$

2. Igualmente
$$(\cos x)^{\operatorname{sen} x} - (\cos x)^{\tan x} \sim \frac{x^5}{4}.$$

3. Se define $h = x - \sqrt{3}$, entonces
$$\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{h^2}{8\sqrt{3}} + o(h^2)$$
por lo tanto
$$\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} \sim -\frac{(x-\sqrt{3})^2}{8\sqrt{3}}.$$

4. En $+\infty$
$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = \frac{1}{12x} + o(\frac{1}{x})$$
por lo tanto
$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} \sim \frac{1}{12x}.$$

5. Es necesario distinguir los casos $x > 0$ y $x < 0$, para encontrar :
$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \sim |x|.$$

Solución del **ejercicio 2416** ▲004045

El dl de $\cos x$ en 0 de orden 6 es :
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculemos la de $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:
$$\begin{aligned}\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2) \times \frac{1}{1+bx^2} \\ &= (1+ax^2) \times \big(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\big) \qquad \text{pues } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \\ &= \cdots \qquad \text{se desarrolla} \\ &= 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

Denotemos $\Delta(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$, entonces
$$\Delta(x) = \big(-\frac{1}{2} - (a-b)\big)x^2 + \big(\frac{1}{24} + b(a-b)\big)x^4 + \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6).$$

Para que esta diferencia sea lo más pequeña posible (cuando x está cerca de 0) es necesario anular el mayor número posible de coeficientes de bajo grado. Por lo tanto, se quiere tener
$$-\frac{1}{2} - (a-b) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{24} + b(a-b) = 0.$$

sustituyendo la igualdad de la izquierda por la de la derecha, se tiene :

$$a = -\frac{5}{12} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{12}.$$

Se obtiene entonces

$$\Delta(x) = \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Con nuestra elección de a, b se ha obtenido una muy buena aproximación de $\cos x$. Por ejemplo, cuando se evalúa $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ (con $a = -\frac{5}{12}$ y $b = \frac{1}{12}$) en $x = 0.1$ se encuentra :

$$0.9950041631\ldots$$

mientras que

$$\cos(0.1) = 0.9950041652\ldots$$

y encontramos aquí $\Delta(0.1) \simeq 2 \times 10^{-9}$.

Solución del ejercicio 2417 ▲004046

$a = -7/60$, $b = 1/20$, $\Delta \sim 11x^7/50400$.

Solución del ejercicio 2419 ▲004048

1. $(3a\alpha(\alpha - a) + 2(b\alpha - a\beta))X^7$.
2. $-x^7/30 + o_{x\to 0}(x^7)$.

Solución del ejercicio 2422 ▲004051

$\sim x$, para k impar, y $= 1 + x\ln(x) + o_{x\to 0}(x\ln x) \sim 1$ si k es par $\geqslant 2$.

Solución del ejercicio 2425 ▲004030

1.
2. $e\left(1 - \frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln^2 2}{2!x^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\ln^n 2}{n!x^n}\right) + o(x^{-n})$.

Solución del ejercicio 2427 ▲004032

$f^{-1}(y) = \frac{y}{a_1} - \frac{a_2 y^2}{a_1^3} + o(y^2)$.

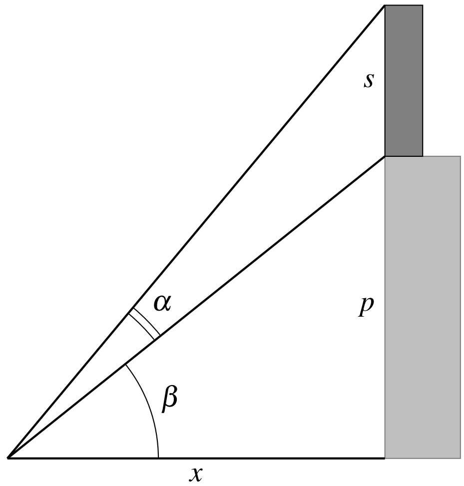
Solución del ejercicio 2428 ▲004033

$(1-e^x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k e^{kx} = \sum_{p=0}^{n+2} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^p\right) \frac{x^p}{p!} + o(x^{n+2})$, $(1-e^x)^n = (-x)^n \left(1 + \frac{nx}{2} + \frac{n(3n+1)}{24}x^2 + o(x^2)\right)$.

Solución del ejercicio 2436 ▲004045

---

1. Se denota x la distancia del observador al pie de la estatua. Se denota α el ángulo de visión de la estatua solo, y β el ángulo de visión del pedestal solo.



Se tienen las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p+s}{x} \qquad \text{y} \qquad \tan\beta = \frac{p}{x}$$

Se deducen las dos identidades :

$$\alpha+\beta = \arctan\left(\frac{p+s}{x}\right) \qquad \text{y} \qquad \beta = \arctan\left(\frac{p}{x}\right)$$

a partir de las cuales se obtiene $\alpha = \alpha(x) = \arctan\left(\frac{p+s}{x}\right) - \arctan\left(\frac{p}{x}\right)$. Estudiar esta función sobre $]0,+\infty[$: es derivable y

$$\alpha'(x) = \frac{-\frac{s+p}{x^2}}{1+\left(\frac{s+p}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{p}{x^2}}{1+\left(\frac{p}{x}\right)^2} = \frac{s}{(x^2+p^2)(x^2+(s+p)^2)}\big(p(p+s)-x^2\big).$$

Así α' no se anula en $]0,+\infty[$ que en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$. Por consideraciones físicas, en el límite en 0 y en $+\infty$, el ángulo α es nulo, entonces en x_0 se obtiene un ángulo α máximo. Así la distancia óptima de visión es $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.

2. Para calcular el ángulo máximo α_0 correspondiente, se puede calcular $\alpha_0 = \alpha(x_0)$ a partir de la definición de la función $\alpha(x)$. Para obtener una fórmula más simple se utiliza la siguiente fórmula trigonométrica : si a, b y $a-b$ están en el rango de definición de la función tan, entonces $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, que da aquí

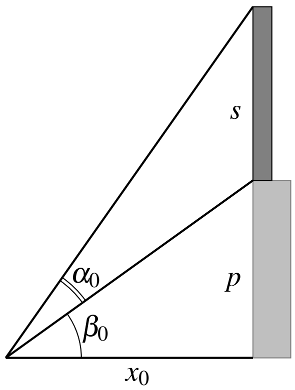
$$\tan\alpha_0 = \tan\big((\alpha_0+\beta_0)-\beta_0\big) = \frac{\frac{p+s}{x_0} - \frac{p}{x_0}}{1+\frac{p+s}{x_0}\cdot\frac{p}{x_0}} = \frac{s}{2x_0} = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$$

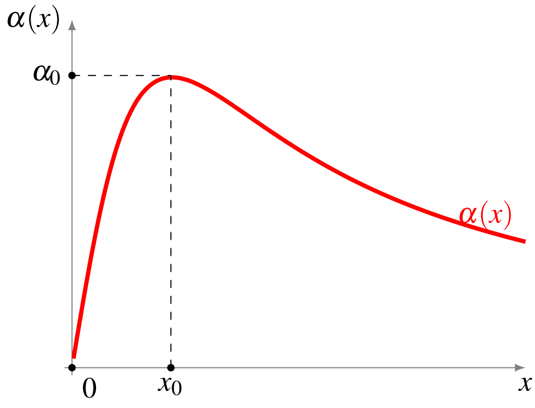
Como $\alpha_0 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, se deduce que $\alpha_0 = \arctan\frac{s}{2x_0} = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

3. Para la estatua de la libertad, se tiene la altura de la estatua $s = 46$ metros y la altura del pedestal $p = 47$ metros. Se encuentra por lo tanto

$$x_0 = \sqrt{p(p+s)} \simeq 65{,}40 \text{ metros}, \qquad \alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}} \simeq 19^\circ.$$

He aquí las representaciones de la estatua y de la función $\alpha(x)$, para estos valores de s y p.





Solución del ejercicio 2437 ▲000746

1. Sea $f(a) = \operatorname{arcsen} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sobre $]0,1[$ y $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$, por lo tanto $f'(a) \leqslant 0$. Así f es estrictamente decreciente y $f(0) = 0$, por lo tanto $f(a) < 0$, para todo $a \in]0,1[$.
2. Si $g(a) = \arctan a - \frac{a}{1+a^2}$, entonces $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Entonces g es estrictamente creciente y $g(0) = 0$, por lo tanto g es estrictamente positiva en $]0,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2438 ▲000747

1. $\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$, por lo tanto $\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Con $y = \arccos x$, se tiene $\operatorname{sen}(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Por lo tanto $\arccos x \in [0,\pi]$ y $\operatorname{sen}(\arccos x)$ es positivo y finalmente $\operatorname{sen}(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$. De la misma manera se encuentra $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Por lo tanto $\operatorname{arcsen} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ es positivo y finalmente $\cos(\operatorname{arcsen} x) = +\sqrt{1-x^2}$.
   Estas dos igualdades deben conocerse o encontrarse muy rápidamente :
   $$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\operatorname{arcsen} x).$$
   En fin, ya que $\cos(2y) = \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y$, se obtiene con $y = \operatorname{arcsen} x$,
   $$\cos(2 \operatorname{arcsen} x) = (\sqrt{1-x^2})^2 - x^2 = 1 - 2x^2.$$
2. Comenzar por calcular $\operatorname{sen}(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$. Se utiliza la identidad $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, con $y = \arctan x$, lo que da $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ y $\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Queda por determinar los signos de $\cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $\operatorname{sen}(\arctan x) = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ Por lo tanto $y = \arctan x$, por lo tanto $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ y y tiene el mismo signo que x : así $\cos y > 0$, y $\operatorname{sen} y$ tiene el mismo signo que y y así como x. Finalmente, se tiene $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $\operatorname{sen}(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Solo queda linealizar $\operatorname{sen}(3y)$:
   $$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3y) &= \operatorname{sen}(2y+y) = \cos(2y)\operatorname{sen}(y) + \cos(y)\operatorname{sen}(2y)\\ &= (2\cos^2 y - 1)\operatorname{sen} y + 2\operatorname{sen} y \cos^2 y\\ &= 4\operatorname{sen} y \cos^2 y - \operatorname{sen} y\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3\arctan x) &= \operatorname{sen}(3y) = 4\operatorname{sen} y\cos^2 y - \operatorname{sen} y \\ &= 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Observación : el método general para obtener la fórmula de linealización de $\operatorname{sen}(3y)$ es usar los números complejos y la fórmula de Moivre. Desarrollar

$$\cos(3y) + i\operatorname{sen}(3y) = (\cos y + i\operatorname{sen} y)^3 = \cos^3 y + 3i\cos^2 y\operatorname{sen} y + \cdots$$

luego se identifica las partes imaginarias para tener $\operatorname{sen}(3y)$, o las partes reales para tener $\cos(3y)$.

Solución del ejercicio 2440 ▲000749

1. Se verifica primero que $2\arccos\frac{3}{4} \in [0,\pi]$ (si no, la ecuación no tendría solución). En efecto, por definición, la función arccos es decreciente en $[-1,1]$, con valores en $[0,\pi]$, así porque $\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4} \leqslant 1$ se tiene $\frac{\pi}{3} \geqslant \cos\left(\frac{3}{4}\right) \geqslant 0$. Ya que por definición $\arccos x \in [0,\pi]$, se obtiene tomando el coseno :

$$\arccos x = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \iff x = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right).$$

Aplicando la fórmula $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, se llega así a una solución única $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

2. Verificar primero que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen}\frac{2}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{2}$. En efecto, la función arcsen es estrictamente creciente y $0 < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, lo que da $0 < \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{5}\right) < \frac{\pi}{6} < \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$, de ahí el encuadramiento $0 + \frac{\pi}{6} < \operatorname{arcsen}\frac{2}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$. Ya que por definición se también $\operatorname{arcsen} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene tomando el seno :

$$\begin{aligned}&\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}\frac{2}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{3}{5} \\ &\iff x = \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{2}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right) \\ &\iff x = \frac{3}{5}\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

La última equivalencia viene de la fórmula de $\operatorname{sen}(a+b) = \cos a\operatorname{sen} b + \cos b\operatorname{sen} a$ y de identidad $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen} u\right) = u$. Utilizando la fórmula $\cos\left(\operatorname{arcsen} x\right) = \sqrt{1-x^2}$, se obtiene una solución única : $x = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} + \frac{2}{5}\frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{21}+8}{25}$.

3. Se supone primero que x es solución. Se observa primero que x es necesariamente positivo, ya que $\arctan x$ tiene el mismo signo que x. Entonces, tomando la tangente de los dos miembros, se obtiene $\tan\left(\arctan(2x) + \arctan(x)\right) = 1$.

Utilizando la fórmula dando la tangente de una suma : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, se obtiene $\frac{2x+x}{1-2x\cdot x} = 1$, y finalmente $2x^2 + 3x - 1 = 0$ que admite una única solución positiva $x_0 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. Así, *si* la ecuación original admite una solución, es necesariamente x_0. Por tanto, poniendo $f(x) =$

$\arctan(2x) + \arctan(x)$, la función f es continua en $\mathbb{R}$. Como $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\pi$ y $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\pi$, Se sabe por el teorema de los valores intermedios que f toma el valor $\frac{\pi}{4}$ al menos una vez (y de hecho solo una vez, ya que f es estrictamente creciente como la suma de dos funciones estrictamente crecientes). Así la ecuación inicial admite una solución, que es x_0.

Solución del ejercicio 2443 ▲000752

1. Sea f la función definida en $[-1,1]$ por $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$: f es continua en el intervalo $[-1,1]$, y derivable en $]-1,1[$. Para todo $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Así f es constante en $]-1,1[$, por lo tanto en $[-1,1]$ (porque es continua en los extremos). Por lo tanto $f(0) = \operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ y para todo $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Sea $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Esta función está definida en $]-\infty,0[$ y en $]0,+\infty[$ (pero no en 0). Se tiene
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0,$$
por lo tanto g es constante en cada uno de sus intervalos de definición : $g(x) = c_1$ sobre $]-\infty,0[$ y $g(x) = c_2$ sobre $]0,+\infty[$. Sabiendo $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, se calcula $g(1)$ y $g(-1)$ se obtiene $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ y $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 2448 ▲003914

$\operatorname{arcsen} x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Solución del ejercicio 2449 ▲003915

$\arctan a + \arctan b \equiv \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \pmod{\pi}$.

Solución del ejercicio 2450 ▲003916

$x = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$.

Solución del ejercicio 2451 ▲003917

$\cos 4x = -\operatorname{sen} x \Rightarrow x \equiv \frac{3\pi}{10} \pmod{\frac{2\pi}{5}}$ o $x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{2\pi}{3}}$. Así $x = \frac{3\pi}{10}$.

Solución del ejercicio 2452 ▲003918

1. $x > -1 \Rightarrow = \frac{\pi}{4} - \arctan x$, $\quad x < -1 \Rightarrow = -\frac{3\pi}{4} - \arctan x$.
2. $= \frac{1}{2} \arccos x$.
3. $-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow = \operatorname{arcsen} x + \frac{3\pi}{4}$, $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1 \Rightarrow = \operatorname{arcsen} x - \frac{\pi}{4}$.
4. $= \frac{\pi}{4}$.

5. $f(x)=0$, para $x\in]-\infty,0[$;
   $f(x)=\pi$, para $x\in]0,1[$;
   $f(x)=0$, para $x\in]1,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2453 ▲003919

$D=\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}-x^2-x\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$.

Solución del ejercicio 2454 ▲003920

$\cos(3\arctan x)=\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. $\qquad \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Solución del ejercicio 2455 ▲003921

$f(x)=0$, para $x\in]0,\pi/2[$; $f(x)=2x-\pi$, para $x\in]\pi/2,\pi[$; $f(x)=3\pi-2x$, para $x\in]\pi,3\pi/2[$; $f(x)=0$, para $x\in]3\pi/2,2[$.

Solución del ejercicio 2456 ▲003922

$f(x)=-8\arctan x-2\pi$, para $x\in]-\infty,-1[$, solución $-\sqrt{3}$;
$f(x)=-4\arctan x$, para $x\in]-1,0[$, solución $-1/\sqrt{3}$;
$f(x)=4\arctan x$, para $x\in]0,1[$, solución $1/\sqrt{3}$;
$f(x)=2\pi$, para $x\in]1,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2457 ▲003923

$f(x)=x+\pi/4$, para $x\in]-\pi,-\pi/2[$;
$f(x)=-\pi/4$, para $x\in]-\pi/2,\pi/2[$;
$f(x)=x-3\pi/4$, para $x\in]\pi/2,\pi[$.

Solución del ejercicio 2458 ▲003924

$=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Solución del ejercicio 2459 ▲003925

1. $x=\frac{1}{6}$.
2. $x=\pm 1\sqrt{2}$.
3. $x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
4. $x^3-3x^2-12x+10=0\Rightarrow x=5,\ -1\pm\sqrt{3}$. Solo la solución $x=5$ sirve.

Solución del ejercicio 2462 ▲003928

$\operatorname{sen}(2g(x)) = \operatorname{sen}(f(x))$. $f(x) = -\pi - 2g(x)$, para $x \in]-\infty, \operatorname{sen} a - \cos a[$;
$f(x) = 2g(x)$, para $x \in]\operatorname{sen} a - \cos a, \operatorname{sen} a + \cos a[$;
$f(x) = \pi - 2g(x)$, para $x \in]\operatorname{sen} a + \cos a, +\infty[$.

Solución del ejercicio 2466 ▲005084

$\operatorname{arcsen} x$ existe si y solo si x está en $[-1,1]$. Entonces, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$ existe si y solo si x está en $[-1,1]$ y para x en $[-1,1]$, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$.

1. $\operatorname{arcsen}((\operatorname{sen} x)$ existe para todo real x, pero solo vale x si x está en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   • Si existe un entero relativo k tal que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ y entonces
   $$\operatorname{arcsen}((\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}((\operatorname{sen}(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$
   Además, se tiene $k \leqslant \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ y entonces $k = E\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)$.

   • Si existe un entero relativo k tal que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ y entonces
   $$\operatorname{arcsen}((\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}((\operatorname{sen}(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$
   Además, $k \leqslant \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ y entonces $k = E\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)$.

2. $\arccos x$ existe si y solo si x está en $[-1,1]$. Entonces, $\cos(\arccos x)$ existe si y solo si x está en $[-1,1]$ y para x en $[-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.

3. $\arccos(\cos x)$ existe para todo real x, pero solo vale x si x está en $[0,\pi]$.

   • Si existe un entero relativo k tal que $2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi$, entonces $\arccos(\cos x) = x - 2k\pi$, con $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$.

   • Si existe un entero relativo k tal que $-\pi + 2k\pi \leqslant x < 2k\pi$, entonces $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$, con $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

4. Para todo real x, $\tan(\arctan x) = x$.

5. $\arctan(\tan x)$ existe si y solo si x no está en $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ y para estos x, existe un entero relativo k tal que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. En este caso, $\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$, con $k = E\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 2467 ▲005085

1. **1era solución**. Se define $f(x) = \arccos x + \operatorname{arcsen} x$, para x en $[-1,1]$. f está definida y es continua en $[-1,1]$, derivable en $]-1,1[$. Además, para x en $]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
   Entonces f es constante en $[-1,1]$ y para x en $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.
   $$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \arccos x + \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}.}$$

2a solución. Existe un único real θ en $[0,\pi]$ tal que $x=\cos\theta$, a saber $\theta=\arccos x$. Pero entonces,

$$\arccos x+\operatorname{arcsen} x=\theta+\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$$

(pues $\frac{\pi}{2}-\theta$ está en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

2. **1era solución**. Para x real no nulo, se escribe $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$. f es impar. f es derivable en $\mathbb{R}^*$ y para todo real x no nulo, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$. f es, por lo tanto constante en $]-\infty,0[$ y en $]0,+\infty[$ (pero no necesariamente en $\mathbb{R}^*$). Entonces, para $x>0$, $f(x)=f(1)=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$, y como f es impar, para $x<0$, $f(x)=-f(-x)=-\frac{\pi}{2}$. Así,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}\ \text{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2}\ \text{si } x<0\end{array}\right\}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x).}$$

2a solución Para x real estrictamente positivo dado, existe un único real θ en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $x=\tan\theta$ a saber $\theta=\arctan x$. Pero entonces,

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\theta+\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)=\theta+\arctan\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$$

(pues θ y $\frac{\pi}{2}-\theta$ son elementos de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

3. $\cos^2(\arctan a)=\dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan a)}=\dfrac{1}{1+a^2}$. Además, $\arctan a$ está en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ y entonces $\cos(\arctan a)>0$. Se deduce que para todo real a, $\cos(\arctan a)=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, luego

$$\operatorname{sen}(\arctan a)=\cos(\arctan a)\tan(\arctan a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\ \cos(\arctan a)=\frac{1}{1+a^2}\ \text{y}\ \operatorname{sen}(\arctan a)=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4. De acuerdo a 3),

$$\cos(\arctan a+\arctan b)=\cos(\arctan a)\cos(\arctan b)-\operatorname{sen}(\arctan a)\operatorname{sen}(\arctan b)=\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

lo que demuestra, ya que $ab\neq 1$, que $\cos(\arctan a+\arctan b)\neq 0$ y así como $\tan(\arctan a+\arctan b)$ existe. Se tiene inmediatamente,,

$$\tan(\arctan a+\arctan b)=\frac{a+b}{1-ab}.$$

Ahora, $\arctan a+\arctan b$ está en $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

1er caso. Si $ab<1$, entonces $\cos(\arctan a+\arctan b)>0$ y entonces $\arctan a+\arctan b$ está en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. En este caso, $\arctan a+\arctan b=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2o caso. Si $ab>1$, entonces $\cos(\arctan a+\arctan b)<0$ y entonces $\arctan a+\arctan b$ está en $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Si además $a>0$, $\arctan a+\arctan b>-\frac{\pi}{2}$ y entonces $\arctan a+\arctan b$ está en $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. En este caso, $\arctan a+\arctan b-\pi$ está en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y tiene la misma tangente que $\arctan\frac{a+b}{1-ab}$. Entonces, $\arctan a+\arctan b=\arctan\frac{a+b}{1-ab}+\pi$. Si $a<0$, se encuentra lo mismo $\arctan a+\arctan b=\arctan\frac{a+b}{1-ab}-\pi$.

En resumen,

$$\boxed{\arctan a+\arctan b=\begin{cases}\arctan\frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab<1\\ \arctan\frac{a+b}{1-ab}+\pi & \text{si } ab>1 \text{ y } a>0\\ \arctan\frac{a+b}{1-ab}-\pi & \text{si } ab>1 \text{ y } a<0.\end{cases}}$$

Solución del ejercicio 2468 ▲005087

Para x real, se establece $f(x)=\int_0^{\operatorname{sen}^2 x}\arcsen\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$.

La función $t\mapsto\arcsen\sqrt{t}$ es continua en $[0,1]$. Entonces, la función $y\mapsto\int_0^y\arcsen\sqrt{t}\,dt$ está definida y es derivable en $[0,1]$. Además, $x\mapsto\operatorname{sen}^2 x$ está definida y es derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $[0,1]$. Finalmente, la función $x\mapsto\int_0^{\operatorname{sen}^2 x}\arcsen\sqrt{t}\,dt$ está definida y es derivable en $\mathbb{R}$. Igualmente, la función $t\mapsto\arccos\sqrt{t}$ es continua en $[0,1]$. Entonces, la función $y\mapsto\int_0^y\arccos\sqrt{t}\,dt$ está definida y es derivable en $[0,1]$. Además, la función $x\mapsto\cos^2 x$ está definida y es derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $[0,1]$. Finalmente, la función $x\mapsto\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$ está definida y es derivable en $\mathbb{R}$. Entonces, f está definida y es derivable en $\mathbb{R}$ y, para todo real x,

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\operatorname{sen}x\cos x\arcsen((\sqrt{\operatorname{sen}^2 x})-2\operatorname{sen}x\cos x\arccos(\sqrt{\cos^2 x})\\&=2\operatorname{sen}x\cos x\,(\arcsen((|\operatorname{sen}x|)-\arccos(|\cos x|)).\end{aligned}$$

Se nota entonces que f es π-periódica y par. Para x elemento de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x(x-x)=0$. f es, por lo tanto constante en $[0,\frac{\pi}{2}]$ y para x elemento de $[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{1/2}\arcsen\sqrt{t}\,dt+\int_0^{1/2}\arccos\sqrt{t}dt=\int_0^{1/2}\frac{\pi}{2}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

Pero entonces, por paridad y π-periodicidad,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{\operatorname{sen}^2 x}\arcsen\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}.}$$

Solución del ejercicio 2469 ▲005088

1. **1a solución.** Para todo real x, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$ y entonces $-1<\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1$. Así f_1 está definida y es derivable en $\mathbb{R}$, impar, y para todo real x,

$$f_1'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}x\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{1+x^2}=\arctan'(x).$$

Así existe una constante real C tal que para todo real x, $f_1(x)=\arctan x+C$. $x=0$ proporciona $C=0$ y entonces,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\arctan x.}$$

2a solución. Para x real dado, se escribe $\theta=\arctan x$. θ está en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y $x=\tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta=\cos\theta\tan\theta\ (\text{pues }\cos\theta>0)\\&=\operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\text{arcsen}((\operatorname{sen}\theta)=\theta\ (\text{pues }\theta\text{ está en }\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[)\\&=\arctan x.\end{aligned}$$

2. **1a solución.** Para todo real x, $-1<-1+\frac{2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\leqslant -1+2=1$ (con igualdad si y solo si $x=0$). f_2 es, por lo tanto definida y continua en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}^*$. Para todo real x no nulo,

$$f_2'(x)=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

donde ε es el signo de x. Así existe una constante real C tal que para todo real positivo x, $f_2(x)=2\arctan x+C$ (incluido $x=0$ ya que f es continua en 0).
$x=0$ proporciona $C=0$ y entonces, para todo real positivo x, $f_2(x)=2\arctan x$. Por paridad,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=2\arctan|x|.}$$

2a solución. Sea $x\in\mathbb{R}$, luego $\theta=\arctan x$. θ está en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y $x=\tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos(2\theta).$$

Entonces

$$f_2(x)=\arccos(\cos(2\theta))=\begin{cases}2\theta & \text{si } \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta & \text{si } \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right]\end{cases}=\begin{cases}2\arctan x & \text{si } x\geqslant 0\\ -2\arctan x & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}=2\arctan|x|.$$

3. La función $x\mapsto\text{arcsen}\sqrt{1-x^2}$ está definida y es continua en $[-1,1]$, derivable en $[-1,1]\setminus\{0\}$ porque para x elemento de $[-1,1]$, $1-x^2$ es elemento de $[0,1]$ y vale 1 si y solo si x vale 0. $\frac{1-x}{1+x}$ es definida y positiva si y solo si x está en $]-1,1]$, y nulo si y solo si $x=1$. f_3 es, por lo tanto definida y continua en $]-1,1]$, derivable en $]-1,0[\cup]0,1[$. Para x en $]-1,0[\cup]0,1[$, se denota ε el signo de x y se tiene :

$$f_3'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}-\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x está en $]0,1[$, $f_3'(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(-\frac{1}{2}\text{arcsen})'(x)$. Entonces, existe un real C tal que, para todo x de $[0,1]$ (por continuidad) $f_3(x)=-\frac{1}{2}\text{arcsen}\,x+C$. $x=1$ proporciona $C=\frac{\pi}{4}$. Entonces,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x = \frac{1}{2}\arccos x.}$$

Si x está en $]-1,0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2}\arcsin)'(x)$. Entonces existe un real C' tal que, para todo x de $]-1,0]$ (por continuidad) $f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + C'$. $x = 0$ proporciona $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Entonces,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\arcsin x + \frac{\pi}{4}.}$$

4. f_4 es derivable en $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ y para x elemento de $\mathscr{D}$, se tiene :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 es, por lo tanto constante en cada uno de los tres intervalos $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ y $]0,+\infty[$. Para $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Para $-1<x<0$, $f(x) = \lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} f(t) = \arctan\frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \arctan 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Para $x<-1$, $f(x) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ y entonces

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 2470 ▲005089

$0 \leqslant \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$ y

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Como $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} \in [0,\frac{\pi}{2}[$, por lo tanto se tiene $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{7}{9}$. Igualmente, $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} \in [0,\frac{\pi}{2}[$ y

$$\tan\left(\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

y entonces $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalmente,

$$\boxed{\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Solución del ejercicio 2471 ▲005090

(Se va a encontrar el resultado del ejercicio 2467 en un caso particular)

Sean a y b dos reales positivos. Entonces, $\arctan a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y entonces, $\arctan a - \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Además,

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a)\tan(\arctan b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

y por lo tanto, ya que $\arctan a - \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0,\ \arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Sea entonces k un entero natural no nulo. $\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$ (ya que $k-1$ y $k+1$ son positivos). Así, si n es un entero natural dado no nulo,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \arctan k - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k \\ &= \arctan(n+1) + \arctan n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

El límite de u_n por lo tanto vale $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3\pi}{4}.}$$

Solución del ejercicio 2472 ▲005092

1. f está definida y es derivable en $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
2. Para x elemento de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} + (x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x\arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

   Además, para x no nulo : $f'(x) = 2xg(x)$, donde $g(x) = \arctan\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.
3. Para x elemento de $\mathscr{D} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

   Ahora,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1 = 2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} > 0.$$

   Entonces, g es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$, sobre $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ y en $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tiende a 0. Entonces g es estrictamente positiva en $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Cuando x tiende a $\frac{1}{2}$ para valores inferiores,

g tiende a $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}<0$ y cuando x tiende a 0 para valores superiores, $g(x)$ tiende a $+\infty$. Entonces g se anula una vez y solo una vez en el intervalo $]0,\frac{1}{2}[$ en cierto real x_0 de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. g es además estrictamente negativa en $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$ y estrictamente positivo en $]0,x_0[$. Cuando x tiende a $-\infty$, $g(x)$ tiende a 0. Entonces g es estrictamente negativa en $]-\infty,0[$. En fin, ya que $f'(x)=2xg(x)$, para $x\neq 0$, se tiene los siguientes resultados : sobre $]-\infty,0[$, $f'>0$, sobre $]0,x_0[$, $f'>0$, sobre $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sobre $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. Como $f'(0)=1>0$, por lo tanto se tiene : sobre $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sobre $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$ y en $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. f es estrictamente creciente en $]-\infty,x_0]$ y en $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ y es estrictamente decreciente en $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.

Solución del ejercicio 2473 ▲005095

1. Para todo real x de $[-1,1]$, $\operatorname{sen}(2\arcsen x)=2\operatorname{sen}(\arcsen x)\cos(\arcsen x)=2x\sqrt{1-x^2}$.
2. Para todo real x de $[-1,1]$, $\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$.
3. Para todo real x de $[-1,1]$, $\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\arccos x)=\frac{1}{2}(1-\cos(\arccos x))=\frac{1-x}{2}$.
4. Sea $x\in\mathbb{R}$.
$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|=\max\{x,-x\}.$$
Entonces, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ y $\sqrt{x^2+1}-x>0$. La expresión propuesta existe para todo real x. Además,
$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0.$$
5. La expresión propuesta se establece en $\mathbb{R}^*$ e impar. Sea entonces $x>0$.
$$\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\ln\left(\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2})\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right)=\ln x$$
Por ser impar, si $x<0$, $\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=-\ln(-x)$.
En resumen, denotando ε el signo de x,
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\varepsilon\ln|x|.}$$
6. La expresión propuesta existe si y solo si $2x^2-1\in[1,+\infty[$ o aún $x^2\in[1,+\infty[$ o finalmente $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Esta expresión es par. Sea así $x\in[1,+\infty[$.
$$\operatorname{argch}(2x^2-1)=\ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})=\ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)$$
$$=2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=2\operatorname{argch}x$$
Por paridad, se deduce que
$$\boxed{\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\ \operatorname{argch}(2x^2-1)=2\operatorname{argch}|x|.}$$

7. Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \text{ existe} \Leftrightarrow \operatorname{ch}x+1 \neq 0 \text{ y } \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0 \text{ y } \sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} \in]-1,1[$$
$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \in [0,1[.$$

Pero, por un lado, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} \geqslant 0$ y por otro lado, $\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1} = \frac{\operatorname{ch}x+1-2}{\operatorname{ch}x+1} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}x+1} < 1$. Por lo tanto, la expresión propuesta existe para todo número real x y es par. Luego, para x real positivo, se tiene

$$\frac{1+\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}x+1}-\sqrt{\operatorname{ch}x-1}} = \frac{(\sqrt{\operatorname{ch}x+1}+\sqrt{\operatorname{ch}x-1})^2}{(\operatorname{ch}x+1)-(\operatorname{ch}x-1)} = \frac{2\operatorname{ch}x+2\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{2}$$
$$= \operatorname{ch}x + \sqrt{\operatorname{sh}^2x} = \operatorname{ch}x + |\operatorname{sh}x| = \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x = e^x.$$

Así, x es siempre positivo,

$$\operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}.$$

Por paridad, se tiene entonces

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right) = \frac{|x|}{2}.}$$

(Observación. Para 5), 6) y 7), también podemos derivar cada expresión)

8. Para $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Solución del ejercicio 2474 ▲005096

1. $\operatorname{ch}x = 2 \Leftrightarrow x = \pm\operatorname{argch}2 = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$. Las soluciones son $\ln(2+\sqrt{3})$ y $-\ln(2+\sqrt{3})$ (o aún $\ln(2-\sqrt{3})$, pues $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).
2. Una solución está necesariamente en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Sea así $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\arcsin((2x) = \arcsin x + \arcsin((x\sqrt{2}) &\Rightarrow \operatorname{sen}(\arcsin((2x)) = \operatorname{sen}(\arcsin x + \arcsin((x\sqrt{2}))\\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} = 2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ o } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}.\end{aligned}$$

Recíprocamente, para cada uno de estos tres números x, la única implicación escrita es una equivalencia si x está en $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (que es el caso porque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) y $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen}((x\sqrt{2})$ está en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Pero,

$$0 \leqslant \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{32}} + \operatorname{arcsen}((\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{32}} + \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

y entonces $\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{32}} + \operatorname{arcsen}((\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Igualmente, por paridad, $\operatorname{arcsen}((-\sqrt{\frac{7}{32}}) + \operatorname{arcsen}((-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2},0]$ que completa la resolución.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

3. Sea $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{arcsen} x$ existe si y solo si $x \in [-1,1]$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsen}((2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } (2x^2-1)^2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1].\end{aligned}$$

Para $x \in [-1,1]$, $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}((x)) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)\cos(\operatorname{arcsen} x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}((2x\sqrt{1-x^2}))$, y además, $\operatorname{arcsen}((2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Así,

$$\begin{aligned}x \text{ solución} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } 2\operatorname{arcsen}((x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ y } \operatorname{arcsen}((x) \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}].\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = [-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}].}$$

Solución del ejercicio 2475 ▲005315

Es necesario notar que los números $x_k = \cot an^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ no son necesariamente dos a dos distintos.

1er caso. Si n es par, se escribe $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{p-1}\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=p}^{2p-1}\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p}) + \sum_{k=0}^{p-1}\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{(2p-1-k)\pi}{2p}).\end{aligned}$$

Por tanto, $\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{(2p-1-k)\pi}{2p}) = \operatorname{cotan}^2(\pi - \frac{\pi}{4p} - \frac{k\pi}{2p}) = \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})$ y entonces $S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1}\operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{4p}+\frac{k\pi}{2p})$. Pero esta vez,

$$0 \leqslant k \leqslant p-1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p} \leqslant \frac{\pi}{4p} + \frac{(p-1)\pi}{2p} = \frac{(2p-1)\pi}{4p} < \frac{2p\pi}{4p} = \frac{\pi}{2}.$$

Y como, la función $x \mapsto \operatorname{cotan}^2 x$ es estrictamente decreciente en $]0, \frac{\pi}{2}[$, los x_k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, son dos a dos distintos. Para $0 \leqslant k \leqslant p-1$, se escribe $y_k = \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p})$.

$$\begin{aligned}
y_k = i\frac{e^{(2k+1)i\pi/4p}+1}{e^{(2k+1)i\pi/4p}-1} &\Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p}(y-k-i) = y_k + i \\
&\Rightarrow (y_k+i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi}(y_k-i)^{2p} = (-1)^{2k+1}(y_k-i)^{2p} = -(y_k-i)^{2p} \\
&\Rightarrow (y_k+i)^{2p} + (y_k-i)^{2p} = 0 \Rightarrow 2(y_k^{2p} - C_{2p}^2 y_k^{2p-2} + \cdots + (-1)^p) = 0 \\
&\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2 x_k^{p-1} + \cdots + (-1)^p = 0.
\end{aligned}$$

Los p números dos a dos distintos x_k son raíces de la ecuación de grado p : $z^p - C_{2p}^2 z^{p-1} + \cdots + (-1)^p = 0$ que es de grado p. Se deduce que

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{p-1} x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2o caso. Si n es impar, se escribe $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}) + \operatorname{cotan}^2\frac{\pi}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}) \\
&= 2\sum_{k=0}^{p-1} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1})
\end{aligned}$$

El mismo proceso conduce entonces a $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$.
En todos los casos,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cotan}^2(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) = n(n-1).$$

Solución del ejercicio 2476 ▲005852

Se define $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ y en fin $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Para $x \in D$, se escribe $f(x) = \tan x - x$. La función f es derivable en D y para $x \in D$, $f'(x) = \tan^2 x$. La función f es estrictamente creciente en cada I_n y por lo tanto, se anula a lo sumo una vez en cada I_n. $f(0) = 0$ y entonces f se anula exactamente una vez en I_0 en $x_0 = 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, f es continua en I_n y además $f\left(\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$. Por el teorema del valor intermedio, f se anula al menos una vez en I_n y por lo tanto, exactamente una vez en I_n. La ecuación $\tan x = x$ admite entonces en cada intervalo I_n, $n \in \mathbb{N}$, una y una sola solución denotada x_n. Además, $\forall n \geqslant 1$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ y entonces $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Para $n \geqslant 1$, $n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$ y entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, luego $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$ e incluso

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).$$

luego, ya que $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ y que $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$, $x_n - n\pi = \arctan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$. Entonces

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Se define $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Entonces de acuerdo a lo anterior, $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ y $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Además, la igualdad $\tan(x_n) = x_n$ proporciona $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ o aún

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n = -\operatorname{cotan}(y_n).$$

Porque $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, se obtiene $n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$ o aún $y_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Entonces

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Se define $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. De acuerdo con lo anterior, $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\dfrac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + z_n}$ y también $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Se deduce que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalmente,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Solución del ejercicio 2477 ▲005853

1a solución. Sea $z \in \mathbb{C}$. Se define $z = x + iy$, donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $1 + \frac{r}{n} = r_n e^{i\theta}$, donde $r_n \geqslant 0$ y $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ de manera que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, e^{in\theta_n}.$$

porque $1 + \frac{z}{n}$ tiende a 1, cuando n tiende a $+\infty$, para n lo suficientemente grande se tiene $r_n > 0$ y $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pero entonces por n bastante grande

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \quad \text{y} \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Ahora, $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(x + o(1))$ y entonces r_n^n tiende a e^x, cuando n tiende a $+\infty$. Luego $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{y}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} y + o(1)$ y entonces $n\theta_n$ tiende a y, cuando n tiende a $+\infty$. Finalmente, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, e^{en\theta_n}$ tiende a $e^x \times e^{iy} = e^z$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2a solución. El resultado se conoce cuando z es real. Sea $z \in \mathbb{C}$. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k.$$

Ahora, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{k}}\right)\geqslant 0$. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|^n}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}\mathrm{e}^{|z|}-\mathrm{e}^{|z|}=0.$$

Se deduce que $\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y como $\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$ tiende a e^z, cuando n tiende a $+\infty$, sucede lo mismo con $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Solución del ejercicio 2478 ▲006973

Se define $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$, para todo $x>0$. La función f es derivable, y

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{-\frac{2}{2x^3}}{1+\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}-\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\\
&=\frac{-4x}{4x^4+1}-\frac{1}{(1+x)^2+x^2}+\frac{1}{x^2+(x-1)^2}\\
&=\frac{-4x}{4x^4+1}+\frac{-\left(x^2+(x-1)^2\right)+\left((1+x)^2+x^2\right)}{\left((1+x)^2+x^2\right)\left(x^2+(x-1)^2\right)}\\
&=0
\end{aligned}$$

Así f es una función constante. Por lo tanto $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\arctan 0-\arctan 1+\arctan 1=0$. Entonces la constante vale 0, de donde la igualdad buscada. Entonces :

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\quad\text{(por identidad comprobada)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right)-\sum_{k'=0}^{n-1}\arctan\left(\frac{k'}{k'+1}\right)\quad\text{(poniendo } k'=k-1\text{)}\\
&=\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)-\arctan\left(\frac{0}{0+1}\right)\quad\text{(las sumas se simplifican)}\\
&=\arctan\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\quad\left(\text{pues }\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Así $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 2479 ▲006974

1. Si $x>0$, entonces $\frac{y}{x}$ está bien definida y $\arctan\frac{y}{x}$ también. Como $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$, se tiene $\frac{y}{x}=\tan\theta$. Ya que por hipótesis $\theta\in]-\pi,\pi]$ y que se ha asumido $x>0$, entonces $\cos\theta>0$. Esto implica $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Entonces $\theta=\arctan(\tan\theta)=\arctan\frac{y}{x}$. (¡Cuidado! Es importante tener $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, para considerar la identidad $\arctan(\tan\theta)=\theta$.)
2. Si $\theta\in]-\pi,\pi[$, entonces $\frac{\theta}{2}\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, por lo tanto $\frac{\theta}{2}=\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$. Así
$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{1+\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2},$$
de donde $\frac{\theta}{2}=\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)$.
3. Se observa que $z=x+iy$, se supone no nulo, es un número real negativo si y solo si ($x=r\cos\theta<0$ y $y=r\operatorname{sen}\theta=0$), es decir $\theta=\pi$. En consecuencia, decir que z no es real negativo o cero significa que $\theta\in]-\pi,\pi[$. Se tiene entonces $x+\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ (si no, se tiene $\sqrt{x^2+y^2}=-x$ y entonces $y=0$ y $x\leqslant 0$) y
$$\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta+r}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$
Por la pregunta precedente :
$$\theta=2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)=2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Solución del ejercicio 2481 ▲000758

1. Si f existe entonces para $x=1$ se tiene $f(\operatorname{ch}1)=\mathrm{e}$ y para $x=-1$ se tiene $f(\operatorname{ch}-1)=f(\operatorname{ch}1)=1/\mathrm{e}$. Una función no puede tomar dos valores diferentes en el mismo punto (aquí $t=\operatorname{ch}1$).
2. Denotemos $X=\mathrm{e}^x$, la ecuación se convierte en
$$f(X)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{1}{2}(X+\frac{1}{X}).$$
Como la función exponencial es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]0,+\infty[$, entonces la única manera de definir f sobre $]0,+\infty[$ es por la fórmula $f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$.
3. Como e^x es siempre no nulo, entonces f puede tomar cualquier valor en 0. $f(0)=c\in\mathbb{R}$ y $f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$, para $t>0$. Hay un número infinito de soluciones. Pero ninguna de estas soluciones es continua, pues el límite de $f(t)$, cuando $t>0$ y $t\to 0$ es $+\infty$.

Solución del ejercicio 2482 ▲000759

1. Por la fórmula binomial de Newton se tiene $\operatorname{ch}^3x=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}\right)$. E igualmente $\operatorname{sh}^3x=\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-3x}\right)$.
Entonces $\mathrm{e}^{-x}(\operatorname{ch}^3x-\operatorname{sh}^3x)=\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-x}(6\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-3x})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}$ que tiende a $\frac{3}{4}$, cuando x tiende a $+\infty$.

2. $x-\ln(\operatorname{ch}x)=x-\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})=x-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2=x-\ln(e^x(1+e^{-2x}))+\ln 2=x-x+\ln(1+e^{-2x})+\ln 2=\ln(1+e^{-2x})+\ln 2$. Cuando $x\to+\infty$, $\ln(1+e^{-2x})\to 0$, por lo tanto $x-\ln(\operatorname{ch}x)\to\ln 2$.

Solución del ejercicio 2487 ▲000764

1. (a) Se observa primero que, por construcción, $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, t está, por lo tanto en el dominio de definición de la función tan. Tomado la tangente de la igualdad $t=\arctan(\operatorname{sh}x)$ se obtiene directamente $\tan t=\tan\big(\arctan(\operatorname{sh}x)\big)=\operatorname{sh}x$.

   (b) Luego, $\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+\tan^2\big(\arctan(\operatorname{sh}x)\big)=1+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}^2 x$. Pero la función ch solo toma valores positivos, y $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, por lo tanto $\cos t>0$. Así $\frac{1}{\cos t}=\operatorname{ch}x$.

   (c) En fin, $\operatorname{sen}t=\tan t\cdot\cos t=\operatorname{sh}x\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}x}=\operatorname{th}x$.

2. Porque $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, se tiene $0<\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, por lo tanto $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ está bien definida y es estrictamente positiva. Así $y=\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ está bien definida. Luego :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}&=\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}(2u)=2\cos u\operatorname{sen}u$ y $\cos(2u)=\cos^2 u-\operatorname{sen}^2 u$. En fin, ya que $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}t$ y $\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$, se tiene $\operatorname{sh}y=\frac{\operatorname{sen}t}{\cos t}=\tan t=\operatorname{sh}x$. Porque la función sh es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se deduce que $y=x$. : $x=y=\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Solución del ejercicio 2496 ▲000773

1. Sea $f(x)=\ln(1+x)-x+x^2/2$, entonces $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$. Así f es estrictamente creciente en $[0,+\infty[$ y como $f(0)=0$, $f(x)>f(0)=0$, para $x>0$. Esto da la desigualdad deseada.
2. Del mismo modo con $g(x)=e^x-x-1$, $g'(x)=e^x-1$. Sobre $[0,+\infty[$ $g'(x)\geqslant 0$ y g es creciente en $]-\infty,0]$, $g'(x)\leqslant 0$ y g es decreciente. Como $g(0)=0$, entonces para todo $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant 0$.

Solución del ejercicio 2499 ▲000776

$$x^y=y^x\Leftrightarrow e^{y\ln x}=e^{x\ln y}\Leftrightarrow y\ln x=x\ln y\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}.$$

(la función exponencial es biyectiva). Estudiar la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ sobre $[1,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

por lo tanto f es creciente en $[1,e]$ y decreciente en $[e,+\infty[$. Entonces, para $z\in]0,f(e)[=]0,1/e[$, la ecuación $f(x)=z$ tiene exactamente dos soluciones, una en $]1,e[$ y uno en $]e,+\infty[$. Volver a la ecuación $x^y=y^x$ equivalente a $f(x)=f(y)$. Tomemos y un entero, se distinguen tres casos : $y=1$, $y=2$ y $y\geqslant 3$.

Si $y=1$, entonces $f(y)=z=0$ y se tiene que resolver $f(x)=0$ y asís $x=1$.
Si $y=2$, entonces se tiene que resolver la ecuación $f(x)=\frac{\ln 2}{2}\in]0,1/\mathrm{e}[$. Entonces de acuerdo al estudio precedente, existen dos soluciones una en $]0,\mathrm{e}[$ que es $x=2(!)$ y una en $]\mathrm{e},+\infty[$ que es 4; en efecto, $\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$. Se tiene para el momento las soluciones correspondientes a $2^2=2^2$ y $2^4=4^2$.
Si $y\geqslant 3$, entonces $y>\mathrm{e}$, entonces hay una solución x de la ecuación $f(x)=f(y)$ en $]\mathrm{e},+\infty[$ que es $x=y$, y una solución x en el intervalo $]1,\mathrm{e}[$. Pero como x es un entero entonces $x=2$ (es el único entero que pertenece a $]1,\mathrm{e}[$) es un caso que ya hemos estudiado que conduce a $4^2=2^4$.
Conclusión : los pares de enteros que satisfacen la ecuación $x^y=y^x$ son los pares $(x,y=x)$ y los pares $(2,4)$ y $(4,2)$.

Solución del ejercicio 2501 ▲005086

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{y} & \mathrm{ch}(a-b)=\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b-\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b, \\ \mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b & \text{y} & \mathrm{sh}(a-b)=\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b-\mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a \\ \mathrm{th}(a+b)=\frac{\mathrm{th}\,a+\mathrm{th}\,b}{1+\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b} & \text{y} & \mathrm{th}(a-b)=\frac{\mathrm{th}\,a-\mathrm{th}\,b}{1-\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}. \end{array}}$$

Dos demostraciones :

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b=\frac{1}{4}((\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b+\mathrm{e}^{-b})+(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^{-b}))=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a+b}+\mathrm{e}^{-a-b})=\mathrm{ch}(a+b).$$

$$\mathrm{th}(a+b)=\frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)}=\frac{\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a}{\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b+\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b}=\frac{\mathrm{th}\,a+\mathrm{th}\,b}{1+\mathrm{th}\,a\,\mathrm{th}\,b}$$

luego de dividir el numerador y el denominador por el número no nulo $\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b$. Aplicando a $a=b=x$, se obtiene :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(2x)=\mathrm{ch}^2x+sh^2x=2ch^2x-1=2sh^2x+1,\ \mathrm{sh}(2x)=2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x\ \text{ y }\ \mathrm{th}(2x)=\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2x}.}$$

Sumando entre ellas las fórmulas de adición, se obtienen las fórmulas de linealización :

$$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)),\ \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b)-\mathrm{ch}(a-b))\ \text{ y }\ \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b)+\mathrm{sh}(a-b)),$$

y, en particular

$$\mathrm{ch}^2x=\frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}\ \text{ y }\ \mathrm{sh}^2x=\frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}.$$

Solución del ejercicio 2502 ▲005091

• Para todo real x, $\mathrm{ch}\,x>0$, entonces f se define, continua y derivable en $\mathbb{R}$. Para todo real x,

$$f'(x)=\mathrm{sh}\,x\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}-1=\mathrm{th}\,x-1<0.$$

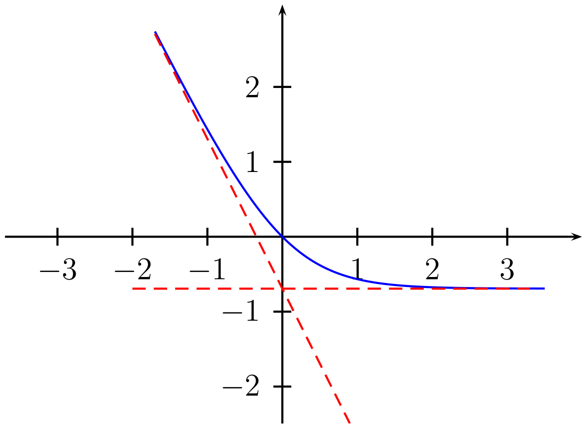
f es, por lo tanto estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.
• Estudio en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{ch}\,x=+\infty$ y entonces $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Encontrar una eventual recta asíntota.

$$f(x)=\ln\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-x=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-\ln 2-x=\ln(\mathrm{e}^{-x})-x-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e}^{2x})=-2x-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e}^{2x}).$$

Entonces, $f(x)-(-2x-\ln 2)=\ln(1+e^{2x})$. Por tanto, por un lado $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{2x})=0$ y la recta (D) de ecuación $y=-2x-\ln 2$ es asíntota a la curva representativa de f en $-\infty$ y por otro lado, para todo real x, $\ln(1+e^{2x})>0$ y la curva representativa de f está estrictamente por encima de (D) sobre $\mathbb{R}$.
• Estudio en $+\infty$.

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^x)-x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})=-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})$$

y f tiende a $-\ln 2$, cuando x tiende a $+\infty$.
• Gráfico.



Solución del ejercicio 2503 ▲005093

Sea x un real.

$$S=\sum_{k=1}^{100}\operatorname{sh}(2+kx)=\frac{1}{2}\left(e^2\sum_{k=1}^{100}e^{kx}-e^{-2}\sum_{k=1}^{100}e^{-kx}\right).$$

Si $x=0$, entonces directamente $S=100\operatorname{sh}2\neq 0$. Si $x\neq 0$, entonces $e^x\neq 1$ y $e^{-x}\neq 1$. En este caso,

$$S=\frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x}-e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x}+e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right),$$

luego de multiplicar el numerador y el denominador de la segunda fracción por e^x. Para $x\neq 0$, por lo tanto se tiene :

$$\begin{aligned}S=0&\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x})+e^{-2}(1-e^{-100x})=0\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x})+e^{-2-100x}(e^{100x}-1)=0\\&\Leftrightarrow(1-e^{100x})(e^{x+2}-e^{-100x-2})=0\Leftrightarrow e^{x+2}=e^{-100x-2}\text{ (pues }x\neq 0)\\&\Leftrightarrow x+2=-100x-2\Leftrightarrow x=-\frac{4}{101}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Solución del ejercicio 2504 ▲005094

Sea ha visto en 2501 que para todo real x, $\operatorname{th}(2x)=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$ que se escribe para x no nulo : $\dfrac{1+\operatorname{th}^2x}{\operatorname{th}x}=\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ o aún $\operatorname{th}x+\dfrac{1}{\operatorname{th}x}=\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ o finalmente

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

Sean n un entero natural no nulo y x un real no nulo. De acuerdo con lo anterior,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Así, para $x > 0$, $\operatorname{th}(2^{n+1}x)$ tiende a 1, cuando n tiende a infinito. Así, u_n tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$ si $x > 0$ y hacia $-\infty$, cuando n tiende a $+\infty$ si $x < 0$.

Solución del ejercicio 2505 ▲006975

Por definición de funciones ch y sh, se tiene

$$\begin{aligned}
2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x) &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2}\\
&= 1 + e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Y utilizando las dos relaciones $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ y $\ln(e^x) = x$ se calcula :

$$\begin{aligned}
x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2 &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln 2\\
&= x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 - \ln 2\\
&= x - \ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right)\\
&= x - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-2x})\\
&= x - x - \ln(1 + e^{-2x})\\
&= -\ln(1 + e^{-2x}),
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2} = -\frac{1 + e^{-2x}}{\ln(1 + e^{-2x})}.$$

Es una expresión de la forma $-\frac{u}{\ln u}$, con $u = 1 + e^{-2x}$:

— si $x \to +\infty$, entonces $u \to 1^+$, $\frac{1}{\ln u} \to +\infty$, por lo tanto $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$;

— si $x \to -\infty$, entonces $u \to +\infty$ así que de acuerdo a las relaciones de crecimientos comparadas, $-\frac{u}{\ln u} \to -\infty$.

Solución del ejercicio 2506 ▲006976

Porque $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ y $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, las expresiones $C_n + S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kx}$ y $C_n - S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$ son sumas de términos de sucesiones geométricas, de razón respectivamente e^x y e^{-x}.

Si $x = 0$, se tiene directamente $C_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

Se supone $x \neq 0$, entonces $\mathrm{e}^x \neq 1$ y

$$\begin{aligned}
C_n + S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x \frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1-\mathrm{e}^x} \\
&= \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{\frac{nx}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{nx}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{nx}{2}})}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}})} = \mathrm{e}^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{nx}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{nx}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Igualmente $C_n - S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx}$; por lo tanto, es la misma fórmula que la anterior, reemplazando x por $-x$. Así :

$$C_n - S_n = \mathrm{e}^{-\frac{(n+1)x}{2}} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}},$$

utilizando $C_n = \dfrac{(C_n+S_n)+(C_n-S_n)}{2}$ y $S_n = \dfrac{(C_n+S_n)-(C_n-S_n)}{2}$, se recupera así

$$C_n = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{(n+1)x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{ch}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}},$$

$$S_n = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(n+1)x}{2}} - \mathrm{e}^{-(n+1)\frac{x}{2}}}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}.$$

Solución del ejercicio 2507 ▲006977

$$\begin{aligned}
(S)\ \begin{cases} \operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}(y) = 2a \\ \operatorname{sh}(x)+\operatorname{sh}(y) = 2b \end{cases} &\iff \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y} = 4a \\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y} = 4b \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y = 2a+2b \\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y} = 4b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y = 2a+2b \\ -\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y} = 2b-2a \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y = 2(a+b) \\ \frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^y} = 2(a-b), \end{cases}
\end{aligned}$$

lo que da, poniendo $X = \mathrm{e}^x$ y $Y = \mathrm{e}^y$:

$$\begin{aligned}
(S) \iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{1}{X}+\frac{1}{Y} = 2(a-b) \end{cases} &\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{X+Y}{XY} = 2(a-b) \end{cases} \\
\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ \frac{2(a+b)}{XY} = 2(a-b). \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a \neq b$ ya que por hipótesis, $a^2-b^2 = 1$. Así,

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} X+Y = 2(a+b) \\ XY = \frac{a+b}{a-b} \end{cases} \\
&\iff X \text{ y } Y \text{ son las soluciones de } z^2-2(a+b)z+\frac{a+b}{a-b} = 0.
\end{aligned}$$

Observación : Se recuerda que si X,Y verifican el sistema $\begin{cases} X+Y=S \\ XY=P, \end{cases}$ entonces X y Y son las soluciones de la ecuación $z^2-Sz+P=0$.
Por lo tanto el discriminante del trinomio $z^2-2(a+b)z+\frac{a+b}{a-b}=0$ vale

$$\Delta=4(a+b)^2-4\frac{a+b}{a-b}=4(a+b)\left(a+b-\frac{1}{a-b}\right)=\frac{4(a+b)(a^2-b^2-1)}{a-b}=0$$

Hay una raíz doble que vale $\frac{2(a+b)}{2}$, así $X=Y=a+b$ y entonces :

$$(S)\iff \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^y=a+b$$

Se verifica que $a+b\geqslant 0$ (pues $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$) y $a+b\neq 0$ (pues $a^2-b^2=1$).
Conclusión : el sistema (S) admite una única solución, dada por $\big(x=\ln(a+b), y=\ln(a+b)\big)$.

Solución del ejercicio 2508 ▲006978

1. (a) Se sabe que $\mathrm{ch}^2 u=1+\mathrm{sh}^2 u$. Como además la función ch tiene valores positivos, $\mathrm{ch}\,u=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}$ y entonces $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}\,x)}=\sqrt{1+x^2}$.
   (b) Entonces
   $$\mathrm{th}(\mathrm{argsh}\,x)=\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\,x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   (c) Y $\mathrm{sh}(2\,\mathrm{argsh}\,x)=2\,\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}\,x)\,\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}\,x)=2x\sqrt{1+x^2}$.
2. Se puede, como para la pregunta anterior, aplicar las fórmulas trigonométricas hiperbólicas. Para cambiar, se van a utilizar las expresiones explícitas de las funciones hiperbólicas recíprocas. Se supone $x\geqslant 1$, para que $\mathrm{argch}\,x$ esté bien definida, entonces se tiene la fórmula (a saber) :
   $$\mathrm{argch}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$
   Así :
   $$\begin{aligned}\mathrm{sh}(\mathrm{argch}\,x)&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{argch}\,x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{argch}\,x}}{2}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}\\ &=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}\\ &=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\left(x^2-(x^2-1)\right)}\\ &=\sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$
   Además, $\mathrm{th}(\mathrm{argch}\,x)=\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}\,x)}{\mathrm{ch}(\mathrm{argch}\,x)}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
   En fin, si $u=\mathrm{argch}\,x$: $\mathrm{ch}(3u)=\mathrm{ch}(2u+u)=\mathrm{ch}(2u)\,\mathrm{ch}\,u+\mathrm{sh}(2u)\,\mathrm{sh}\,u$, donde
   $$\begin{cases}\mathrm{ch}(2u)=\mathrm{ch}^2 u+\mathrm{sh}^2 u=x^2+(x^2-1)=2x^2-1\\ \mathrm{sh}(2u)=2\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u=2x\sqrt{x^2-1}.\end{cases}$$
   Así $\mathrm{ch}(3\,\mathrm{argch}\,x)=(2x^2-1)x+2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}=x(4x^2-3)$.

Solución del ejercicio 2509 ▲006979

La función argch se define en $[1,+\infty[$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1 &\iff \frac{x^2+1}{x}\geqslant 2\\ &\iff \frac{x^2+1-2x}{x}\geqslant 0\\ &\iff \frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0\\ &\iff x>0\end{aligned}$$

por lo tanto f se define en $]0,+\infty[$.

Sea $x>0$, entonces $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 1$ y se sabe que $\operatorname{argch} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. Así $\sqrt{y^2-1}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}-1}=\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}=\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|$, se obtiene

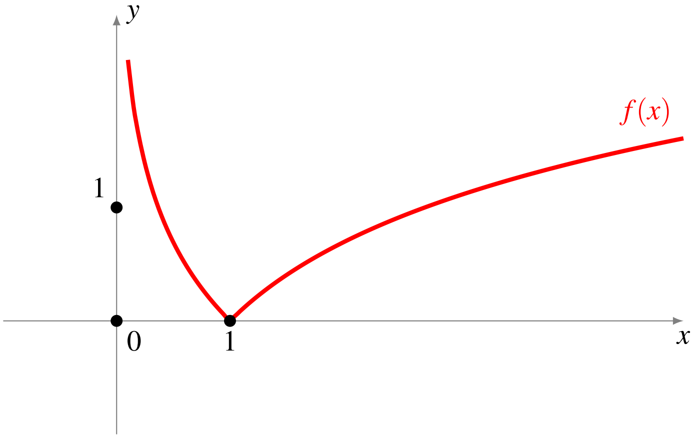
$$f(x)=\operatorname{argch} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|\right).$$

Se ha asumido $x>0$, por lo tanto, es suficiente distinguir los casos $x\geqslant 1$ y $0<x\leqslant 1$.

— Si $x\geqslant 1$, $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{x^2-1}{2x}\right)=\ln x$.

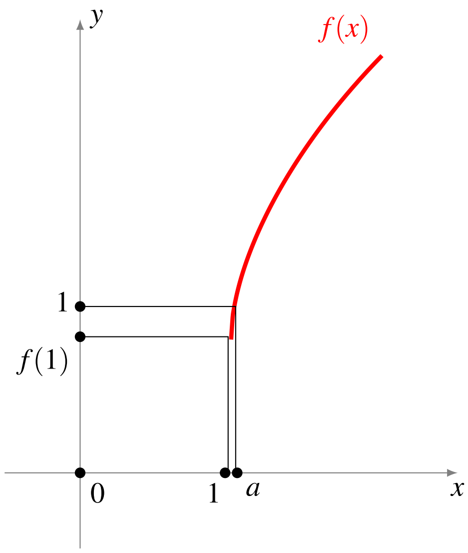
— Si $0<x\leqslant 1$, $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}+\frac{1-x^2}{2x}\right)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$.

Porque $\ln x$ es positivo si $x\geqslant 1$ y negativo si $x\leqslant 1$, en ambos casos se obtiene $f(x)=|\ln x|$.



Solución del ejercicio 2510 ▲006980

Sea $f(x)=\operatorname{argsh} x+\operatorname{argch} x$. La función f está bien definida, continua, y estrictamente creciente, sobre $[1,+\infty[$ (como la suma de dos funciones continuas estrictamente crecientes).



Además, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, por lo tanto f alcanzado exactamente una vez todo valor del intervalo $[f(1),+\infty[$. Como (por la fórmula logarítmica) $f(1) = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2}) < \ln(\mathrm{e}) = 1$, se tiene $1 \in [f(1),+\infty[$. Por el teorema de valores intermedios la ecuación $f(x) = 1$ admite una única solución, que se denota a.

Determinar la solución :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} 1 &= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) \\
&= \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argch} a) + \operatorname{sh}(\operatorname{argch} a)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} a) \\
&= a^2 + \sqrt{a^2-1}\sqrt{a^2+1} = a^2 + \sqrt{a^4-1},
\end{aligned}$$

por lo tanto $\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh} 1 - a^2$. Al elevar al cuadrado y simplificando, se obtiene $a^2 = \frac{1+\operatorname{sh}^2 1}{2\operatorname{sh} 1} = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}$. Como se busca a positivo (y que $\operatorname{ch} 1 > 0$), se deduce que $a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}$. Este valor es la única solución posible de la ecuación $f(x) = 1$, es normalmente verificar que es adecuado, porque solo se razona por implicación (y no por equivalencia). Pero ya se sabe que la ecuación admite una solución única : es necesariamente

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}} = 1{,}0065\ldots.$$

Solución del ejercicio 2537 ▲002081

1. Se encuentra $\int_0^4 f(t)\,dt = +7$. Es necesario primero dibujar la gráfica de esta función. Luego el valor de una integral no depende del valor de la función en un punto, es decir aquí los valores en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ no tiene influencia en la integral. Luego se vuelve a la definición de $\int_0^4 f(t)\,dt$: para la división de $[0,4]$ definida por $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$, encontrar el valor de la integral (aquí se alcanzan el sup y el inf y son iguales para esta subdivisión y toda subdivisión más fina).
   Otra forma de hacerlo es considerar que f es una función escalonada («olvidando» los accidentes en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$) cuya integral sabemos calcular.

2. Es lo mismo para $\int_0^x f(t)\,dt$, pero en lugar de llegar a 4 se detiene en x, se encuentra

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3-2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4x-9 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

3. Los únicos puntos a discutir para la continuidad son los puntos $x=1$ y $x=2$, pero los límites derecho e izquierdo de F son iguales en estos puntos por lo que F es continua. Sin embargo, F no es derivable en $x=1$ (las derivadas derecha e izquierda son distintas), F tampoco es derivable en $x=2$.

Solución del ejercicio 2538 ▲002082

¡Las funciones son continuas y, por lo tanto integrables !

1. Usando las sumas de Riemann, se sabe que $\int_0^1 f(x)dx$ es el límite (cuando $n \to +\infty$) de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Denotar $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Entonces $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. Se ha usado que la suma de enteros de 0 a $n-1$ vale $\frac{n(n-1)}{2}$. Entonces S_n tiende a $\frac{1}{2}$. Entonces $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$.

2. El mismo trabajo : $\int_1^2 g(x)dx$ es el límite de

$$S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}).$$

Separando la suma en tres se obtiene :

$$S'_n = \frac{1}{n}(n+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Entonces en el límite se encuentra $S'_n \to 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Entonces $\int_1^2 g(x)dx = 7/3$.

Observación : se ha usado que la suma de los cuadrados de enteros de 0 a $n-1$ es $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

3. Lo mismo para $\int_0^x h(t)dt$ que es el límite de $S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}})^k$. Esta última suma es la suma de una sucesión geométrica (si $x \neq 0$), por lo tanto $S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} = (1-\mathrm{e}^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}$ que tiende a $\mathrm{e}^x - 1$. Para obtener este último límite se nota que poniendo $u = \frac{x}{n}$ se tiene $\frac{\frac{x}{n}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} = -1/\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}$ que tiende a -1, cuando $u \to 0$ (que es equivalente a $n \to +\infty$).

Solución del ejercicio 2539 ▲002083

---

1. Primero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{it}\,dt$. Por el teorema de Riemann-Darboux este es el límite de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_k).$$

Para $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ (en realidad se obtiene una suma de Riemann) :

$$S_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n}})^k,$$

lo que es una suma geométrica de suma $S_n = (1-i)\dfrac{\frac{\pi}{2n}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}}$. El límite de esta tasa de crecimiento es $1+i$ (poniendo $u = \frac{\pi}{2n}$ y notando que $\frac{\mathrm{e}^{iu}-1}{u} \to i$, cuando $u \to 0$). Entonces $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{it}\,dt = 1+i$. Pero $\mathrm{e}^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, por lo tanto $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\,dt = 1+i$. Por identificación de partes reales e imaginarias se encuentra : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 1$ y $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\,dt = 1$.

2. Se quiere $x_k = aq^k$ que da bien $x_0 = a$, pero se necesita también $x_n = b$, por lo tanto $aq^n = b$ y $q^n = \frac{b}{a}$, o sea $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$. Se busca el límite de $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot g(x_k)$. No es demasiado difícil demostrar que $S'_n = n(q-1)$. Para encontrar el límite cuando $n \to +\infty$ es más difícil porque q depende de n : $S'_n = n(q-1) = n((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} - 1) = n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}} - 1)$. Definiendo $u = \frac{1}{n}$ y notando que se tiene una tasa de incremento calculamos : $S'_n = \frac{1}{u}(\mathrm{e}^{u\ln\frac{b}{a}} - 1) \to \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$. Así $\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$.

3. Usando sumas geométricas y tasas de crecimiento encontramos

$$\int_a^b \alpha^t\,dt = \frac{\mathrm{e}^{\alpha b} - \mathrm{e}^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Solución del ejercicio 2540 ▲002084

---

1. Sí.
2. No.
3. No.
4. No.

Solución del ejercicio 2541 ▲002085

---

1. Escribir la continuidad de f en x_0, con $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$: existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Con nuestra elección de ε esto da para $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. Para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ se cortan en tres trozos por linealidad de la integral :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Como f es positiva entonces por positividad de la integral $\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geqslant 0$ y $\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geqslant 0$. Para el término del medio, se tiene $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$, por lo tanto $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = 2\delta \frac{f(x_0)}{2}$ (¡para la última ecuación solo se calcula la integral de una función constante !). El resumen de todo esto es que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Así, para una función continua y positiva f, si es estrictamente positiva en un punto entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Por contraposición para una función continua y positiva si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces f es idénticamente nula.

2. Sea f es siempre positiva, ya sea todo el tiempo negativa, ya sea cambia (al menos una vez) de signo. En el primer caso f es idénticamente nula para la primera pregunta, en el segundo caso es parecido (aplicando la primera pregunta a $-f$). Para el tercer caso, el teorema del valor intermedio afirma que existe c tal que $f(c) = 0$.
3. Se define $g(x) = f(x) - x$. Entonces $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \big(f(x) - x\big)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} = 0$. Entonces por la pregunta precedente, g es continua, existe $d \in [0,1]$ tal que $g(d) = 0$, que es equivalente a $f(d) = d$.

Solución del ejercicio 2542 ▲002086

Denotemos $I = \int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n} dt$. Como $f(t) \leqslant m$, para todo $t \in [a,b]$, entonces $I \leqslant 1$. Esto implica que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Se fija $\alpha > 0$ (tan pequeño como se quiera). Como f es continua y m es su cota superior en $[a,b]$, entonces existe un intervalo $[x,y]$, $(x < y)$, en el cual $f(t) \geqslant m - \alpha$. Como f es positiva entonces

$$I \geqslant \int_x^y \frac{f(t)^n}{m^n} dt \geqslant \int_x^y \frac{(m-\alpha)^n}{m^n} = (y-x)\left(\frac{m-\alpha}{m}\right)^n.$$

Entonces $I^{\frac{1}{n}} \geqslant (y-x)^{\frac{1}{n}} \frac{m-\alpha}{m}$. Cuando $n \to +\infty$ se tiene $(y-x)^{\frac{1}{n}} \to 1$, entonces en el límite se tiene $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{m-\alpha}{m}$. Como α es cualquiera, se puede elegir tan cerca de 0 de manera que $\frac{m-\alpha}{m}$ está tan cerca de 1 como se quiera. Entonces $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$. En conclusión se encuentra que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} = 1$ que era la igualdad deseada.

Solución del ejercicio 2543 ▲002087

Sea $\alpha > 0$ fijado. Sea $0 < x_0 < 1$ tal que, para todo $x \in [0,x_0]$, $f(x) \leqslant 1 - \alpha$. Este x_0 existe porque f es estrictamente creciente y $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Se separa la integral en dos :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^n(t)dt &= \int_0^{x_0} f^n(t)dt + \int_{x_0}^1 f^n(t)dt \leqslant \int_0^{x_0} (1-\alpha)^n dt + \int_{x_0}^1 1^n dt \\ &\leqslant x_0(1-\alpha)^n + (1-x_0) \leqslant (1-\alpha)^n + (1-x_0), \qquad \text{pues } x_0 \leqslant 1.\end{aligned}$$

Sea ahora dado un $\varepsilon > 0$, se escoge $\alpha > 0$ tal que $1 - x_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (notando que si $\alpha \to 0$, entonces $x_0(\alpha) \to 1$), luego existe n lo suficientemente grande tal que $(1-\alpha)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Así para todo $\varepsilon > 0$ existe n lo suficientemente grande tal que $\int_0^1 f^n(t)dt \leqslant \varepsilon$. Así $\int_0^1 f^n(t)dt \to 0$.

Solución del ejercicio 2544 ▲002091

1. Cierto.
2. Cierto.
3. Falso ! Cuidado con los valores negativos por ejemplo para $f(x) = x$, entonces F es decreciente en $]-\infty,0]$ y creciendo en $[0,+\infty[$.
4. Falso. Cuidado con los valores negativos por ejemplo para $f(x) = x^2$, entonces F es negativa en $]-\infty,0]$ y positivo sobre $[0,+\infty[$.
5. Cierto.
6. Falso. Hacer el cálculo con la función $f(x) = 1+\operatorname{sen}(x)$ por ejemplo.
7. Cierto.

Solución del ejercicio 2545 ▲002092

1. Comenzar simplemente con la función
$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt.$$
De hecho H es la composición de la función $x \mapsto v(x)$, con la función $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:
$$H = G \circ v.$$
La función v es derivable y la función G también (es una primitiva) entonces la composición $H = G \circ v$ es derivable, además $H'(x) = v'(x) \cdot G'(v(x))$. En la práctica como $G'(x) = f(x)$ esto da $H'(x) = v'(x)f(v(x))$.
Observación : No es necesario conocer esta fórmula pero es importante saber rehacer este pequeño razonamiento. Se demuestra del mismo que la función $x \to \int_{u(x)}^a f(t)dt$ es derivable de derivada $-u'(x)f(u(x))$.
Volviendo a nuestra función $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^a f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$, es la suma de dos funciones derivables por lo que es derivable de derivada :
$$F'(x) = v(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
2. Se aplica esto a $u(x) = x$ y $v(x) = 2x$ se obtiene :
$$G'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2+(2x)^4} - \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

Solución del ejercicio 2546 ▲002093

1. F se define en $]0,1[\cup]1,+\infty[$. F es continua y derivable en $]0,1[$ y en $]1,+\infty[$. Para ver esto, es suficiente escribir $F(x)=\int_x^a \frac{dt}{\ln t}+\int_a^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. La primera de estas funciones es continua y derivable (es una primitiva), la segunda es la composición de $x\mapsto x^2$, con $x\mapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ y por lo tanto, es también continua y derivable. Se puede mismo calcular la derivada.
2. Denotemos $f(t)=\frac{1}{\ln t}$ y $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$. Se está en $]1,+\infty[$, evidentemente $g(t)\leqslant f(t)$, pero se tiene también que para $\varepsilon>0$ fijo existe $x>1$ tal que para todo $t\in[1,x^2]$ se tiene $\frac{1}{t}\leqslant 1+\varepsilon$, por lo tanto en $]1,x^2]$ se tiene $f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$. Por integración de la desigualdad $g(t)\leqslant f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$ sobre $[x,x^2]$ se obtiene para x bastante cerca de 1 :

$$H(x)\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)H(x).$$

Todo lo que queda es calcular $H(x)$. De hecho $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$ es la derivada de la función $h(t)=\ln(\ln t)$. Entonces

$$\begin{aligned}H(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}&=[\ln(\ln t)]_x^{x^2}=\ln(\ln(x^2))-\ln(\ln x)\\&=\ln(2\ln x)-\ln(\ln x)=\ln\frac{2\ln x}{\ln x}\\&=\ln 2.\end{aligned}$$

Se obtiene entonces, para $\varepsilon>0$ fijo y $x>1$ bastante cerca de 1, el encuadramiento

$$\ln 2\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)\ln 2.$$

Entonces el límite de $F(x)$, cuando $x\to 1^+$ es $\ln 2$.

Solución del ejercicio 2553 ▲004222

1.
2.
3. $\frac{1}{2}f(0)$.

Solución del ejercicio 2557 ▲004226

DL de $1-\cos u\Rightarrow \lim=\frac{1}{2}\ln(b/a)$.

Solución del ejercicio 2559 ▲004232

$$a_{n+1}=\begin{cases}b_n & \text{si } b_n<-1\\ -(b_n-1)^2/4 & \text{si } -1\leqslant b_n\leqslant 1\\ 0 & \text{si } b_n>1,\end{cases}$$
$$b_{n+1}=\begin{cases}0 & \text{si } a_n<-1\\ (a_n+1)^2/4 & \text{si } -1\leqslant a_n\leqslant 1\\ a_n & \text{si } a_n>1.\end{cases}$$

Así $a_{n+1}=f(a_{n-1})$, $b_{n+1}=g(b_{n-1})$. Punto fijo : $a_n\to\sqrt{8}-3$, $b_n\to 3-\sqrt{8}$.

Solución del ejercicio 2561 ▲004235

$\frac{\pi^2}{4}$.

Solución del ejercicio 2562 ▲004236

$u = \pi - t \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\operatorname{sen} t}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2} \pi/2\, \frac{1}{1+\cos t}\,dt = \pi.$

Solución del ejercicio 2564 ▲005444

f es continua en el segmento $[a,b]$ y por lo tanto, admite un máximo M en este segmento. Porque f es estrictamente positiva en $[a,b]$, este máximo es estrictamente positivo. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}$. Por crecimiento de la integral, se tiene

$$u_n \leqslant \left(\int_a^b M^n\,dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(pues $\forall x \in [a,b]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \forall x \in [a,b]$, $(f(x))^n \leqslant M^n$ por crecimiento de la función $t \mapsto t^n$ sobre $[0,+\infty[$). Por otra parte, por continuidad de f en x_0 tal que $f(x_0) = M$, para $\varepsilon \in]0,2M[$ dado, $\exists[\alpha,\beta] \subset [a,b]/\ \alpha < \beta$ y $\forall x \in [\alpha,\beta]$, $f(x) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$.
Para n elemento de $\mathbb{N}^*$, se tiene entonces

$$u_n \geqslant \left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta (M-\frac{\varepsilon}{2})^n\,dx\right)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}.$$

En resumen,

$$\forall \varepsilon \in]0,2M[,\ \exists(\alpha,\beta) \in [a,b]^2/\ \alpha < \beta \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} \leqslant u_n \leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

Pero, $\lim_{n\to+\infty} M(b-a)^{1/n} = M$ y $\lim_{n\to+\infty} (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} = (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}$. Por consiguiente, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_1$, $M(b-a)^{1/n} < M+\varepsilon$ y $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_2$, $(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n} > M-\varepsilon$.
Sea $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$. Para $n \geqslant n_0$, se tiene $M-\varepsilon < u_n < M+\varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - M| < \varepsilon),$$

y de modo que $\lim_{n\to+\infty} u_n = M$. Más generalmente, si g continua en $[a,b]$, g admite un mínimo m_1 y un máximo M_1 en este intervalo, ambos estrictamente positivos, ya que g es estrictamente positiva. Para n en $\mathbb{N}^*$, se tiene

$$m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} \leqslant M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right),$$

y según el caso de estudio $g = 1$, se tiene $\lim_{n\to+\infty} m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n} = M$, el teorema del límite por encuadramiento permite afirmar que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = M$. Se ha demostrado que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n} = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}.$$

Solución del ejercicio 2565 ▲005449

1. Sean m un real estrictamente positivo y, para $t \in \mathbb{R}$, $f_m(t) = \mathrm{e}^{mt}$. f_m es de hecho un elemento de E y además,

$$\begin{aligned}\varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2}(\mathrm{e}^{mb} - \mathrm{e}^{ma})(\mathrm{e}^{-ma} - \mathrm{e}^{-mb}) \\ &= \frac{1}{m^2}\mathrm{e}^{m(a+b)/2}(\mathrm{e}^{m(b-a)/2} + \mathrm{e}^{-m(b-a)/2})\mathrm{e}^{-m(a+b)/2}(\mathrm{e}^{m(b-a)/2} + \mathrm{e}^{-m(b-a)/2}) \\ &= \frac{4\,\mathrm{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}.\end{aligned}$$

Esta expresión tiende a $+\infty$, cuando m tiende a $+\infty$ y $\varphi(E)$ no es mayorado.

2. Sea f continua y estrictamente positiva en $[a,b]$. La desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ demuestra que :

$$\varphi(f) = \int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2\, dt \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\, dt\right)^2 = (b-a)^2,$$

con igualdad si y solo si la familia de funciones $(\sqrt{f(t)}, \frac{1}{\sqrt{f(t)}})$ es ld o aún si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a,b],\ \sqrt{f(t)} = \lambda\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ o finalmente si y solo si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a,b],\ f(t) = \lambda$, es decir que f es una constante estrictamente positiva. Todo esto demuestra que $\varphi(E)$ admite un mínimo igual a $(b-a)^2$ y obtenido para toda función f que es una constante estrictamente positiva.

Solución del ejercicio 2566 ▲005917

1. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Porque f es Riemann-integrable en $[a,b]$, existe una sub-división $\sigma_1 = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que $\overline{S}_f^{\sigma_1} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Porque g es Riemann-integrable en $[a,b]$, existe una sub-división $\sigma_2 = \{b_0 = a < b_1 < \cdots < b_p = b\}$ de $[a,b]$ tal que $\overline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_g^{\sigma_2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Se denota $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{q-1} < c_q = b\}$ la sub-división de $[a,b]$ obtenida al ordenar el conjunto $\{a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n\}$ en orden ascendente, luego identificando los puntos que aparecen varias veces (se obtiene una subdivisión de $[a,b]$ en q intervalos con $max\{n,p\} \leqslant q \leqslant n+p$). Porque $\sigma_1 \cup \sigma_2$ es una subdivisión *más fina* que σ_1, se tiene :

$$\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} \quad \text{y} \quad \underline{S}_f^{\sigma_1} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{26}$$

Igualmente,

$$\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_g^{\sigma_2} \quad \text{y} \quad \underline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{27}$$

Además, en un intervalo $]c_{k-1}, c_k[$ dado, se tiene :

$$\sup\{f(x)+g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} \leqslant \sup\{f(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} + \sup\{g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\}.$$

Igualmente :

$$\inf\{f(x)+g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} \geqslant \inf\{f(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} + \inf\{g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\}.$$

Se deduce que :
$$\overline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g} \leqslant \overline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f} + \overline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{g}, \tag{28}$$
y
$$\underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f} + \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{g} \leqslant \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g}. \tag{29}$$
usando las desigualdades (43), (42), (28) y (29), se tiene entonces :
$$\overline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g} \leqslant \overline{S}^{\sigma_1}_{f} + \overline{S}^{\sigma_2}_{g} \leqslant \underline{S}^{\sigma_1}_{f} + \underline{S}^{\sigma_2}_{g} + \varepsilon \leqslant \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g} + \varepsilon.$$
Por el teorema indicado en la introducción, se deduce que $f+g$ es Riemann-integrable en $[a,b]$. Además, de la desigualdad
$$\underline{S}^{\sigma_1}_{f} + \underline{S}^{\sigma_2}_{g} \leqslant \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g},$$
se tiene que
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}^{\sigma_1}_{f} + \underline{S}^{\sigma_2}_{g}\right) \leqslant \sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g}.$$
Por lo tanto
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}\left(\underline{S}^{\sigma_1}_{f} + \underline{S}^{\sigma_2}_{g}\right) = \sup_{\sigma_1}\underline{S}^{\sigma_1}_{f} + \sup_{\sigma_2}\underline{S}^{\sigma_2}_{g} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
y
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g} = \sup_{\sigma}\underline{S}^{\sigma}_{f+g} = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$
Así
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$
Igualmente, la desigualdad
$$\overline{S}^{\sigma_1\cup\sigma_2}_{f+g} \leqslant \overline{S}^{\sigma_1}_{f} + \overline{S}^{\sigma_2}_{g}$$
implica $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

En conclusión, $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

2. · Para $\lambda = 0$ no existe nada que probar.
   · Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y $\lambda > 0$, entonces para todo subdivisión $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, se tiene :
$$\inf\{\lambda f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \inf\{f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \sup\{f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\}.$$
   En consecuencia, $\underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \underline{S}^{\sigma}_{f}$ y $\overline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \overline{S}^{\sigma}_{f}$. Se deduce que
$$\sup_{\sigma}\underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \sup_{\sigma}\underline{S}^{\sigma}_{f} = \lambda\int_a^b f(x)\,dx = \lambda \inf_{\sigma}\overline{S}^{\sigma}_{f} = \inf_{\sigma}\overline{S}^{\sigma}_{\lambda f}.$$
   En conclusión, λf es Riemann-integrable y $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.
   · Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y $\lambda < 0$, entonces para todo subdivisión $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, se tiene :
$$\inf\{\lambda f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \sup\{f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \inf\{f(x), x\in]a_{k-1},a_k[\}.$$

En consecuencia, $\underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \overline{S}^{\sigma}_{f}$ y $\overline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \underline{S}^{\sigma}_{f}$. Se deduce que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \inf_{\sigma} \overline{S}^{\sigma}_{f} = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda \sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f} = \inf_{\sigma} \overline{S}^{\sigma}_{\lambda f}.$$

En conclusión, λf es Riemann-integrable y $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

3. Sean f y g dos funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ tales que, para todo $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Sea $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ una subdivisión de $[a,b]$. Entonces

$$\inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} \leqslant \inf\{g(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

Resulta que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f} \leqslant \sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f},$$

es decir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

4. Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Riemann integrables, que converge uniformemente a f sobre $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe $N > 0$ tal que $\forall\, i > N$, $\sup\limits_{[a,b]} |f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$. En particular, $f_i(t) - \varepsilon < f(t) < f_i(t) + \varepsilon$. Para tal i, se deduce que para toda subdivisión $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$, se tiene

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i + \varepsilon \quad \text{y} \quad \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \geqslant \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \varepsilon$$

En particular :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i + 2\varepsilon.$$

Se deduce que :

$$\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} \leqslant \overline{S}^{\sigma}_{f_i} - \underline{S}^{\sigma}_{f_i} + 2\varepsilon(b-a).$$

Como f_i es Riemann-integrable, según el teorema de la introducción, existe una sub-división σ de $[a,b]$ tal que $\overline{S}^{\sigma}_{f_i} - \underline{S}^{\sigma}_{f_i} \leqslant \varepsilon$. Se tiene que

$$\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} \leqslant \varepsilon\,(1 + 2(b-a)),$$

lo que implica f es Riemann-integrable.

Solución del ejercicio 2567 ▲005918

Sea f una función creciente $[a,b]$. Para demostrar que f es Riemann-integrable, es suficiente encontrar, para todo $\varepsilon > 0$ dado, una subdivisión de $[a,b]$ tal que $\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} < \varepsilon$. Sea $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la sub-división regular de $[a,b]$, a no $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Se tiene

$$\inf_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_{k-1}) \quad \text{y} \quad \sup_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_k).$$

Así :

$$\begin{aligned}\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\,(f(a_k)-f(a_{k-1}))\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}(f(a_k)-f(a_{k-1}))\\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b)-f(a))\,.\end{aligned}$$

Para n bastante grande, la sub-división regular de $[a,b]$ satisface $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. Por otra parte, si g es decreciente, $f=-g$ es creciente, por lo tanto g es Riemann-integrable por el ejercicio anterior (pregunta 2.) con $\lambda=-1$.

Solución del ejercicio 2568 ▲005919

Una función f continua en $[a,b]$ es uniformemente continua en $[a,b]$. En particular, para todo $\varepsilon>0$, existe $n>0$ tal que

$$|x-y| < \left(\frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Sea $\sigma=\{a_0=a<\cdots<a_n=b\}$ la sub-división regular de $[a,b]$, a no $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Se tiene :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant 2\varepsilon.$$

Se tiene entonces :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon = (b-a)2\varepsilon,$$

lo que nos permite concluir gracias al teorema de la introducción que f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

Solución del ejercicio 2569 ▲005920

1. Se considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

   Para toda subdivisión σ de $[a,b]$, se tiene :

$$\overline{S}_f^\sigma = 1 \ \text{ y } \ \underline{S}_f^\sigma = 0.$$

   Se deduce que $1=\sup_\sigma \overline{S}_f^\sigma \neq \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma = 0$, lo que implica f no es Riemann-integrable en $[0,1]$.

2. Se considera la función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por :

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{si} \quad x=\frac{p}{q} \ \text{ con } \ p \ \text{ y } \ q \ \text{ primos entre sí}\\ 0 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ o } x=0.\end{cases}$$

   Para toda subdivisión σ de $[a,b]$, se tiene :

$$\underline{S}_g^\sigma = 0.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ dado, la función g que toma de los valores superiores a $\frac{\varepsilon}{b-a}$ en un número finito de puntos solamente (los puntos $\frac{k}{q}$, con $\frac{1}{q} > \frac{\varepsilon}{b-a}$, lo que equivale a $q < \frac{b-a}{\varepsilon}$). Denotemos x_i, $i = 1,\dots,p$ estos puntos en orden (estrictamente) creciente. Sobre $[0,1] \setminus \{x_1,\dots,x_p\}$ la función g toma de los valores $\leqslant \varepsilon$ y $\geqslant 0$. Así con la sub-división $\sigma = \{x_1,\dots,x_p\}$ se obtiene :

$$0 \leqslant \overline{S}_g^\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Se concluye que g es Riemann-integrable en $[0,1]$.

Solución del ejercicio 2570 ▲005921

cf André Gramain, *Intégration*, p. 7, Hermann (1998).

Solución del ejercicio 2571 ▲005922

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ por : $f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$. Para todo $x \in]0,1]$, se tiene $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-nx} = 0$. Se deduce que la sucesión de funciones f_n converge puntualmente (o *simplemente*) a la función idénticamente nula $f \equiv 0$. Se tiene $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, pero

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-n},$$

y $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ no converge uniformemente hacia f sobre $]0,1]$, porque para todo $\varepsilon > 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene :

$$\sup_{]0,-\frac{1}{n}\log\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)[} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Solución del ejercicio 2572 ▲005923

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann. Denotemos $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 1,\dots,n$ los puntos de una sub-división regular de $[a,b]$.

Sea $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$ y $a_k = a + \frac{2k+1}{2n}$, para $k = 1,\dots,n$. Se considera la sub-división $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_k < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$. Esta subdivisión es casi regular, solo el primer intervalo y el último tienen de las longitudes diferentes. Para $k = 1,\dots,n-1$, x_k es el punto medio de $]a_k,a_{k+1}[$. Se denota $m_k = \inf\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}$ y $M_k = \sup\{f(x), x \in]a_{k-1},a_k[\}$. Entonces, para $k = 1,\dots,n-1$ se tiene $m_k \leqslant f(x_k) \leqslant M_k$. Pero es necesario también tener en cuenta que $f(x_n) = f(b)$ y el primero y último intervalo. De donde para la minoración :

$$\underline{S}_f^\sigma = (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

Esto da

$$\underline{S}_f^\sigma - (m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Cuando n tiende a $+\infty$ se encuentra que $\underline{S}_f^\sigma \to \int_a^b f$ y $(m_0+m_n+2f(b))\frac{b-a}{2n} \to 0$ y esto da la desigualdad :

$$\int_a^b f \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

La suma $\overline{S}_f^\sigma$ conduce de manera similar a la desigualdad inversa, de donde :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Se tiene :

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} = -\log(\cos 1) \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} \qquad c)\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = -2\ln 2+1.$$

Solución del ejercicio 2573 ▲005924

---

1. $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_a^b f(a+b-x)(a+b-x)'dx = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt,$

   donde $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi(x) = a+b-x$ es una función de clase C^1.

2. a) $\displaystyle I := \int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\,\mathrm{sen}(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}dx - I$

   $\displaystyle I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt =$
   $\displaystyle\frac{\pi^2}{4},$

   donde $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = \cos x$ es una función de clase C^1.

   b) $\displaystyle J := \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\right)dx$

   $\displaystyle = \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - J,$

   de donde el valor de la integral es $J = \frac{\pi}{8}\log 2$.

Solución del ejercicio 2580 ▲002100

---

1. Sea

$$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Poniendo $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ se escribe la suma de Riemann correspondiente a $\int_0^1 f(x)dx$. Esta integral se calcula fácilmente :

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

La suma de Riemann u_n converge a $\int_0^1 f(x)dx$ y se ha demostrado que (u_n) converge a $\frac{\pi}{4}$.

2. Sea $v_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, se denota

$$w_n=\ln v_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

Definiendo $g(x)=\ln(1+x^2)$ se reconoce la suma de Riemann correspondiente a $I=\int_0^1 g(x)dx$. Calculando esta integral :

$$I=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{por integración por partes}$$
$$=\ln 2-2\int_0^1 1-\frac{1}{1+x^2}dx=\ln 2-2\left[x-\arctan x\right]_0^1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.$$

Se ha demostrado que $w_n=\ln v_n$ converge a $I=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$, por lo tanto $v_n=\exp w_n$ converge a $\exp(\ln 2-2+\frac{\pi}{2})=2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Balance (v_n) tiene por límite a $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

Solución del ejercicio 2581 ▲004228

1.
2. $\ln k$.
3. $\frac{\pi}{8}$.
4. $\frac{4}{e}$.
5. $\frac{1}{3}\int_0^{3\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
6. $\frac{4}{3}n\sqrt{n}$.
7. $\frac{4}{\pi}$.

Solución del ejercicio 2584 ▲004231

1.
2. $\exp\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solución del ejercicio 2586 ▲005446

1. Para $n \geqslant 1$,
$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2 \operatorname{sen}\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$
donde $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\pi x)$. u_n es, por lo tanto una suma de RIEMANN a paso constante asociado a la función continua f sobre $[0,1]$. Cuando n tiende a $+\infty$, el paso $\frac{1}{n}$ tiende a 0 y se sabe que u_n tiende a
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\operatorname{sen}(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx)\\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}) = \frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

2. Es posible que se quiera escribir :
$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k)-\ln k)\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{k}).$$
La sucesión de números a, $\frac{a}{2},\dots,\frac{a}{n}$ « es una subdivisión (con paso no constante) de $[0,a]$ » pero desafortunadamente su paso $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ no tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. No se tiene el mismo tipo de problemas tratados.
Observación . (exo clásico) Sea v una sucesión estrictamente positiva tal que la sucesión $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tiende a un real positivo ℓ, entonces la sucesión $(\sqrt[n]{v_n})$ todavía tiende a ℓ. Pongamos $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$, luego $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1,$$
y por lo tanto, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Una vez más, no es una suma de RIEMANN. Se busca establecer un encuadramiento bastante amplio : para $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$
Sumando estas desigualdades, se tiene
$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$
y entonces ((primer término + último término)$\times$número de términos/2),
$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$
y finalmente, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n+1}{2n}$. Por tanto, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ y $\frac{3n+1}{2n}$ tienden ambos a $\frac{3}{2}$ y u_n tiende a $\frac{3}{2}$.

4. En primer lugar,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),$$

donde $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $x\in[0,1[$. u_n es, por lo tanto efectivamente una suma de RIEMANN a paso constante asociado a la función f, pero desafortunadamente, esta función no es continua en $[0,1]$, o incluso prolongable por la continuidad en 1. Sin embargo, se consigue aprovechar el hecho de que f es creciente en $[0,1[$. Porque f es creciente en $[0,1[$, para $1\leqslant k\leqslant n-2$, se tiene $\frac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\leqslant\displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, y para $1\leqslant k\leqslant n-1$, $\frac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\geqslant\displaystyle\int_{(k-1)/n}^{k/n}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\operatorname{arcsen}((1-\frac{1}{n}),$$

y

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\\&=\operatorname{arcsen}((1-\frac{1}{n})-\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}.\end{aligned}$$

Cuando n tiende a $+\infty$, los dos miembros de este encuadre tienden a $\operatorname{arcsen}1=\frac{\pi}{2}$, y entonces u_n tiende a $\frac{\pi}{2}$.

5. Para $1\leqslant k\leqslant n$, $\sqrt{k}-1\leqslant E(\sqrt{k})\leqslant\sqrt{k}$, y sumando,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Cuando n tiende a $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tiende a 0 y la suma de RIEMANN $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ tiende a $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{2}$. Entonces, u_n tiende a $\frac{3}{2}$.

6. $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tiende a $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{8x^3+1}\,dx=\left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1=\frac{\ln 3}{12}$.

7. $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2(k+n)+1}=\frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2+\dfrac{2k+1}{n}}$ tiende a $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^2\frac{1}{2+x}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)=\ln 2$.

8. Sea $f(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}$ si $x>0$ y 0 si $x=0$. f es continua en $[0,1]$ (teoremas de crecimiento comparado). Entonces, $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$ tiende a $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Para $x\in[0,1]$, se escribe $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$. Porque f es continua en $[0,1]$, F lo es y

$$\int_0^1 f(x)\,dx=F(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left[\mathrm{e}^{-1/t}\right]_x^1=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1/x})=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Entonces, u_n tiende a $\frac{1}{\mathrm{e}}$, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 2587 ▲005447

Se supone f de clase C^2 sobre $[0,1]$. Sea F una primitiva de f sobre $[0,1]$. Sea n un entero natural no nulo.

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})).$$

f es de clase C^2 en el segmento $[0,1]$. Así, $F^{(3)} = f''$ está definida y acotada en este segmento. Denotando M_2 la cota superior de $|f''|$ sobre $[0,1]$, la desigualdad de TAYLOR-LAGRANGE de orden 3 aplicada a F en el segmento $[0,1]$ proporciona

$$\left|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

y por lo tanto,

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}.$$

Así,
$$\sum_{k=0}^{n-1}[F(\tfrac{k+1}{n}) - F(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{n}F'(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{2n^2}F''(\tfrac{k}{n})] = O(\tfrac{1}{n^2}),$$

o aún
$$\sum_{k=0}^{n-1}[F(\tfrac{k+1}{n}) - F(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{n}F'(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{2n^2}F''(\tfrac{k}{n})] = o(\tfrac{1}{n}),$$

o finalmente,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n}) + o(\frac{1}{n}).$$

Ahora,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}).$$

Por tanto, la función f' es continua en el segmento $[0,1]$. Así, la suma de RIEMANN $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})$ tiende a $\int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0)$ y entonces

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n}(f(1) - f(0) + o(1)) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Finalmente,

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n}) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Solución del ejercicio 2588 ▲000805

$$S = \frac{\pi}{(1-\lambda^2)^{3/2}}.$$

Solución del ejercicio 2589 ▲000806

$L = \frac{3\pi a}{2}, \quad A_1 = \frac{5\pi - 9\sqrt{3}}{32} a^2, \quad A_2 = \frac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32} a^2.$

Solución del ejercicio 2590 ▲000807

$A = 4\pi^2 Rr, \quad V = 2\pi^2 Rr^2.$

Solución del ejercicio 2591 ▲000808

$L = 8R, \quad A = 3\pi R^2, \quad V_1 = 5\pi^2 R^3, \quad V_2 = 6\pi^3 R^3, \quad A_1 = \frac{64\pi R^2}{3}, \quad A_2 = 16\pi^2 R^2.$

Solución del ejercicio 2592 ▲000809

$L = 8(n+1)r = 8\frac{n+1}{n}R, \quad A = \pi(n+1)(n+2)r^2 = \pi\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}R^2, \quad S = \frac{128\pi R^2}{5}, \quad V = \frac{64\pi R^3}{3}.$

Solución del ejercicio 2593 ▲000810

$L = 4R\big(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\big).$

Solución del ejercicio 2594 ▲002098

$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}R^2.$

Solución del ejercicio 2595 ▲002099

La curva de ecuación $y = x^2/2$ es una parábola, la curva de ecuación $y = \frac{1}{1+x^2}$ es una curva de campana. Dibujar los dos gráficos. Estas dos curvas delimitan una región cuya área vamos a calcular.
En primer lugar, estas dos curvas se cortan en los puntos de abscisas $x = +1$ y $x = -1$: esto se puede ver en el gráfico y luego se verifica resolviendo la ecuación $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$. Se van a calcular dos áreas :

— El área $\mathscr{A}_1$ de la región bajo la parábola, sobre el eje de abscisas y entre las rectas de ecuación $(x = -1)$ y $(x = +1)$. Entonces

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}.$$

— El área $\mathscr{A}_2$ de la región bajo la campana, sobre el eje de abscisas y entre las rectas de ecuación $(x = -1)$ y $(x = +1)$. Entonces

$$\mathscr{A}_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}.$$

— El área $\mathscr{A}$ por debajo de la campana y por encima de la parábola ahora vale

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Solución del ejercicio 2600 ▲006863

Calculemos solo una cuarta parte del área : la parte del cuadrante $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Para este cuadrante los puntos de la elipse tienen una abscisa x que verifica $0 \leqslant x \leqslant a$. Y la relación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ da $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Se debe así calcular el área bajo la curva de ecuación $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, sobre el eje de abscisas y entre las rectas de ecuación $(x = 0)$ y $(x = a)$ (¡hacer un dibujo !).

Esta área, por lo tanto vale : $\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$. Se calcula esta integral mediante el cambio de variable $x = a\cos u$ que da $dx = -a\operatorname{sen} u\,du$. La variable x variando de $x = 0$ a $x = a$, entonces la nueva variable u varía de $u = \frac{\pi}{2}$ (para lo cual se tiene $a\cos\frac{\pi}{2} = 0$) a $u = 0$ (para lo cual se tiene $a\cos 0 = a$). En otras palabras, la función $u \mapsto a\cos u$ es una biyección de $[\frac{\pi}{2}, 0]$ hacia $[0, a]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 u}(-a\operatorname{sen} u\,du) \quad \text{poniendo } x = a\cos u \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\operatorname{sen} u(-a\operatorname{sen} u\,du) = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 u\,du \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2u)}{2}\,du = ab\left[\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.
\end{aligned}$$

El área de un cuarto de elipse es, por lo tanto $\frac{\pi ab}{4}$.
Conclusión : el área de una elipse es πab, donde a y b son las longitudes de los semi-ejes. Si $a = b = r$ se encuentra que el área de un disco de radio r es πr^2.

Solución del ejercicio 2612 ▲005470

1. Se define $t = \frac{1}{x}$ y entonces $x = \frac{1}{t}$ y $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$. Se obtiene
$$I = \int_{1/a}^a \frac{\ln x}{x^2 + 1}\,dx = -\int_a^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2} + 1}\frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{1/a}^a \frac{\ln t}{t^2 + 1}\,dt = -I,$$
y por lo tanto, $I = 0$.
2. (p y q son números naturales)
$\cos(px)\cos(qx) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$ y entonces, Primer caso. Si $p \neq q$,
$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{p+q} + \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{p-q}\right]_0^\pi = 0.$$
Segundo caso. Si $p = q \neq 0$,
$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos(2px))\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$$
Tercer caso. Si $p = q = 0$. $\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \int_0^\pi dx = \pi$. El procedimiento es idéntico para los otros dos y se encuentra $\int_0^\pi \operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}(qx)\,dx = 0$ si $p \neq q$ y $\frac{\pi}{2}$ si $p = q \neq 0$, luego se tiene que la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen}(px)\cos(qx)\,dx = 0$, para todo escogencias de p y q.

3. La curva de ecuación $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ o aún $\begin{cases} x^2+y^2-(a+b)x+ab=0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ es el semicírculo de diámetro $[a,b]$. Así, si $a \leqslant b$, $I=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi(b-a)^2}{8}$ y si $a>b$, $I=-\frac{\pi(b-a)^2}{8}$.
4. La integral propuesta es la suma de cuatro integrales. Cada uno de ellos es la suma de las áreas de dos triángulos. Así, $I=\frac{1}{2}((1^2+3^2)+(2^2+2^2)+(3^2+1^2)+4^2)=22$.
5. Se define $u=\frac{1}{x}$. Se obtiene

$$I=\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx=\int_{2}^{1/2}(1+u^2)\arctan u\frac{-du}{u^2}=\int_{1/2}^{2}(1+\frac{1}{u^2})(\frac{\pi}{2}-\arctan u)\,du$$
$$=\frac{\pi}{2}((2-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-2))-I).$$

Así, $I=\frac{3\pi}{2}-I$ y entonces $I=\frac{3\pi}{4}$.

6. $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\,dx+\int_{0}^{1}\sqrt{1+x(1-x)}\,dx=I_1+I_2$. Para I_1, $1+x(x-1)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ y se escribe $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh} t$ y entonces $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt$.

$$I_1=\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch} t\,dt=\frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\operatorname{ch}^2 t\,dt=\frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\,dt$$
$$=\frac{3}{16}(\frac{1}{2}(e^{-2\ln(\sqrt{3})}-e^{2\ln(2-\sqrt{3})})-\frac{1}{2}(e^{2\ln(\sqrt{3})}-e^{-2\ln(2-\sqrt{3})})+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})))$$
$$=\frac{3}{16}(\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2)-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2})-2\ln(2\sqrt{3}-3))$$
$$=\frac{3}{16}(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2))-2\ln(2\sqrt{3}-3))$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3).$$

Para I_2, $1+x(1-x)=-x^2+x+1=-(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2$ y se escribe $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t$ y entonces $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt$.

$$I_2=\int_{-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,dt=\frac{3}{4}\int_{-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos^2 t\,dt=\frac{3}{8}\int_{-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}(1+\cos(2t))\,dt$$
$$=\frac{3}{8}(2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}+2\left[\operatorname{sen} t\cos t\right]_0^{\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{3}{4}\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{3}{4}\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{10}...$$

7. $I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\operatorname{sen}(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\,-du=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos^2 u}\,du-\int_{0}^{\pi}\frac{u\operatorname{sen} u}{1+\cos^2 u}\,du$
$$=-\pi\left[\arctan(\cos u)\right]_0^{\pi}-I=\frac{\pi^2}{2}-I,$$
y por lo tanto, $I=\frac{\pi^2}{4}$.

8. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe $I_n = \int_1^x \ln^n t\, dt$.

$$I_{n+1} = \left[t\ln^{n+1} t\right]_1^x - (n+1)\int_1^x t\ln^n t\frac{1}{t}\, dt = x\ln^{n+1} x - (n+1)I_n.$$

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{I_n}{n!} = \frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, y además, $I_1 = x\ln x - x + 1$. Sea $n \geqslant 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\Big(\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k+1}}{(k+1)!}\Big) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{I_k}{k!} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{I_k}{k!} = -I_1 - (-1)^n\frac{I_n}{n!},$$

Así,

$$I_n = (-1)^n n!\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} - x\ln x + x - 1\Big) = (-1)^n n!\Big(1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x(\ln x)^k}{k!}\Big).$$

Solución del ejercicio 2613 ▲006865

1. $\int(\cos x)^{1234}\operatorname{sen} x\, dx$ usando el cambio de variable $u = \cos x$, se tiene $x = \arccos u$ y $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y
$$\int(\cos x)^{1234}\operatorname{sen} x\, dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235}u^{1235} + c = -\frac{1}{1235}(\cos x)^{1235} + c$$
Esta primitiva se establece en $\mathbb{R}$.
2. $\int \frac{1}{x\ln x}\, dx$ planteando el cambio de variable $u = \ln x$ se tiene $x = \exp u$ y $du = \frac{dx}{x}$ se escribe :
$$\int \frac{1}{x\ln x}\, dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$$
Esta primitiva se establece en $]0,1[$ o en $]1,+\infty[$ (la constante puede ser diferente para cada uno de los intervalos).
3. $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx$
Sea el cambio de variable $u = \exp x$. Entonces $x = \ln u$ y $du = \exp x\, dx$ este que se escribe aún $dx = \frac{du}{u}$.
$$\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1}du = \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c.$$
Esta primitiva se define en $\mathbb{R}$.
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$
El propósito del cambio de variable es llegar a algo conocido. Aquí se tiene una fracción con una raíz cuadrada en el denominador y debajo de la raíz un polinomio de grado 2. Lo que sabemos integrar es
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \operatorname{arcsen} u + c,$$

porque conocemos la derivada de la función $\operatorname{arcsen}(t)$ es $\operatorname{arcsen}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Por tanto, intentaremos volver a ello. Escribiendo lo que existe bajo de la raíz, $4x-x^2$ en la forma $1-t^2$: $4x-x^2 = 4-(x-2)^2 = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right)$. Entonces es natural probar el cambio de variable $u = \frac{1}{2}x-1$ por el cual $4x-x^2 = 4(1-u^2)$ y $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}}2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + c = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+c$$

La función $\operatorname{arcsen} u$ está definida y es derivable para $u \in]-1,1[$, entonces esta primitiva se establece en $x \in]0,4[$.

Solución del ejercicio 2617 ▲000818

1. Por integración por partes, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
2. $I_0 = \pi/2$ y $I_1 = 1$ y $I_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$,
$$I_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
3. Observando el integrando.
4. Según la pregunta anterior, $0 < I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, por lo tanto
$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$
en consecuencia $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
5. $(2p-1)I_{2p-1}I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\frac{\pi}{2}$, $\quad 2pI_{2p}I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{\pi}{2}$, o sea $nI_nI_{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2}$, lo que se puede también demostrar por recurrencia.
6. Como $\frac{\pi}{2(n+1)}I_nI_{n+1} \sim I_n^2$ se deduce que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solución del ejercicio 2622 ▲006864

1. $\int x^2 \ln x\, dx$

   Se considera la integración por partes con $u = \ln x$ y $v' = x^2$. Se tiene por lo tanto $u' = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{x^3}{3}$. Entonces
$$\int \ln x \times x^2\, dx = \int uv' = [uv] - \int u'v = \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x}\times\frac{x^3}{3}dx$$
$$= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

2. $\int x \arctan x\, dx$

Se considera la integración por partes con $u = \arctan x$ y $v' = x$. Se tiene por lo tanto $u' = \frac{1}{1+x^2}$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \arctan x \times x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v = \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\,dx \\ &= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c\end{aligned}$$

3. $\int \ln x\,dx$, luego $\int (\ln x)^2\,dx$

   Para la primitiva $\int \ln x\,dx$, veamos la integración por partes con $u = \ln x$ y $v' = 1$. Entonces $u' = \frac{1}{x}$ y $v = x$.

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v = [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x\,dx \\ &= [\ln x \times x] - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

   Para la primitiva $\int (\ln x)^2\,dx$ sea la integración por partes definida por $u = (\ln x)^2$ y $v' = 1$. Así $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ y $v = x$.

$$\int (\ln x)^2\,dx = \int uv' = [uv] - \int u'v = \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c.$$

   Para obtener la última línea se ha usado la primitiva calculada anteriormente.

4. Denotemos $I = \int \cos x \exp x\,dx$. Se observa la integración por partes con $u = \exp x$ y $v' = \cos x$. Entonces $u' = \exp x$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$I = \int \cos x \exp x\,dx = \left[\operatorname{sen} x \exp x\right] - \int \operatorname{sen} x \exp x\,dx.$$

   Si se denota $J = \int \operatorname{sen} x \exp x\,dx$, se tiene

$$I = \left[\operatorname{sen} x \exp x\right] - J \tag{30}$$

   Para calcular J se hace una segunda integración por partes con $u = \exp x$ y $v' = \operatorname{sen} x$. Lo que da

$$J = \int \operatorname{sen} x \exp x\,dx = \left[-\cos x \exp x\right] - \int -\cos x \exp x\,dx = \left[-\cos x \exp x\right] + I$$

   Se tiene así una segunda ecuación :

$$J = \left[-\cos x \exp x\right] + I \tag{31}$$

   Saliendo de la ecuación (30) en la que se reemplaza J por la fórmula obtenida en la ecuación (31).

$$I = \left[\operatorname{sen} x \exp x\right] - J = \left[\operatorname{sen} x \exp x\right] - \left[-\cos x \exp x\right] - I,$$

de donde
$$2I = \left[\operatorname{sen} x \exp x\right] + \left[\cos x \exp x\right].$$
Esto nos permite calcular la integral :
$$I = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\exp x + c.$$

Solución del ejercicio 2625 ▲002090

a- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + c$ sobre $\mathbb{R}$.

b- $\displaystyle\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8}x + c$ sobre $\mathbb{R}$.

c- $\displaystyle\int \cos^{2003} x \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$ sobre $\mathbb{R}$.

d- $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ sobre $]k\pi,(k+1)\pi[$ (cambio de variable $u = \cos x$ o $u = \tan\frac{x}{2}$).

e- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ sobre $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$ o $u = \tan\frac{x}{2}$).

f- $\displaystyle\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x + 3\tan x}dx = -\frac{1}{5}\ln(2-\operatorname{sen} x) + \frac{7}{10}\ln|1+2\operatorname{sen} x| + c$ sobre $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}[2\pi], -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ (cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$).

g- $\displaystyle\int \frac{1}{7+\tan x}dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x + 7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$ sobre $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7)+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}$ (cambio de variable $u = \tan x$).

h- $\displaystyle\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x+\cos x}dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + c$ sobre $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ (cambio de variable $u = \tan(x/2)$).

Solución del ejercicio 2626 ▲002096

1. (a) $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n+1} x \cdot \operatorname{sen} x dx.$

   Poniendo $u(x) = \operatorname{sen}^{n+1} x$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$ e integrando por partes se tiene
   $$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[-\cos x \operatorname{sen}^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \operatorname{sen}^n x dx = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^n x dx \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$
   Entonces $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Conclusión
   $$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.$$

   (b) Así se tiene una fórmula de recurrencia para I_n que se expresa en términos de I_{n-2} que a su vez se expresa en términos de I_{n-4}, etc. Se lleva así a la integral de I_0 (si n es par) o bien de I_1 (si n es impar). Un pequeño cálculo da $I_0 = \frac{\pi}{2}$ y $I_1 = 1$. Por recurrencia se tiene así para n par :
   $$I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\frac{\pi}{2},$$

y para n impar :

$$I_n = \frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n}.$$

(c) Para calcular $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx$ vamos a reducirla a una integral de Wallis. Con el cambio de variable $x=\cos u$, se demuestra fácilmente que :

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 u\right)^n(-\operatorname{sen} u\,du) \qquad \text{con } x=\cos u$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} u\,du = 2I_{2n+1}.$$

2. (a) Sobre $[0,\frac{\pi}{2}]$ la función seno es positiva entonces I_n es positiva. Además, en este mismo intervalo $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, por lo tanto $(\operatorname{sen} x)^{n+1} \leqslant (\operatorname{sen} x)^n$. Esto implica

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{n+1} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^n dx = I_n.$$

(b) Como (I_n) es decreciente entonces $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, dividiendo todo por $I_n > 0$ se obtiene $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Pero se tiene calculado $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ que tiende a 1, cuando n tiende a infinito. Entonces $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tiende a $+1$, por lo tanto $I_n \sim I_{n+1}$.

3. (a) Calcular $I_n \cdot I_{n+1}$. Se supone por ejemplo que n es par, luego por las fórmulas obtenidas previamente :

$$I_n \times I_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\frac{\pi}{2} \times \frac{2\cdot 4\cdots n}{1\cdot 3\cdots(n+1)} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n+1}.$$

Si n es impar se obtiene la misma fracción. Se deduce que para todo n : $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

(b) Ahora

$$I_n^2 = I_n \cdot I_n \sim I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n},$$

por lo tanto

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(c) $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = I_{2n}\cdot(2n+1)\cdot\dfrac{2}{\pi} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}\cdot(2n+1)\cdot\dfrac{2}{\pi} \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}.$

Solución del ejercicio 2628 ▲005475

1. $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ y $I_1 = \int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$. Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4}(\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx = \int_0^{\pi/4}\tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(I_{2k-2}+I_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k-2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_{2k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_{2k} = I_0 - (-1)^n I_{2n}.$$

Así, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$. Igualmente, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$ y entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

2. Sean $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leqslant I_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x \, dx + \int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x \, dx \leqslant \frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, $0 < \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < 1$ y entonces $\lim_{n \to +\infty} \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) = 0$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \tan^n(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Para $n \geqslant n_0$, se tiene entonces $0 \leqslant I_n < \varepsilon$. Así, I_n tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Inmediatamente, se deduce que u_n tiende a $\ln 2$ y v_n tiende a $\frac{\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 2629 ▲000824

Resultados válidos en cada intervalo del dominio de definición.

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ es un elemento simple. Primitivas : $\frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ es un elemento simple. Primitivas : $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$. Primitivas : $\frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{4}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$. Primitivas : $4 \ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ es un elemento simple. Primitivas : $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2} = \frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})} + \frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2} + \frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   Primitivas : $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)} + \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left| \frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}} \right| + k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ es un elemento simple.
   Primitivas : $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)} + \frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)} + \frac{2}{27} \arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ es un elemento simple. Primitivas : $\frac{3}{2} \ln(t^2-2t+10) + \frac{4}{3} \arctan(\frac{t-1}{3}) + k$.
9. $\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} - \frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. Primitivas : $\frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}) + k$.

10. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2} = x-2+\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Primitivas : $\dfrac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\dfrac{1}{x+1}+k$.

11. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2} = \dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{4(x-2)}+\dfrac{3}{2(x-2)^2}$. Primitivas : $\dfrac{1}{4}\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln|x-2|-\dfrac{3}{2(x-2)}+k$.

12. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \dfrac{1}{2}(x^3-x^2+3)-\dfrac{3}{2x}$. Primitivas : $\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3}{2}\ln|x|+k$.

13. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \dfrac{1}{4^3(x+1)}+\dfrac{1-x}{4^3(x^2+3)}+\dfrac{1-x}{4^2(x^2+3)^2}-\dfrac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
Primitivas : $-\dfrac{x+3}{4^2(x^2+3)^2}-\dfrac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)}-\dfrac{1}{2^7}\ln(x^2+3)-\dfrac{1}{3\sqrt{3}2^6}\arctan(\dfrac{x}{\sqrt{3}})+\dfrac{1}{4^3}\ln|x+1|+k$.

14. $\dfrac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2-2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+4}{x^2+1}+\dfrac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
Primitivas : $\dfrac{x^3}{3}-2x-\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\arctan x-\dfrac{6x+1}{2(x^2+1)}+k$.

15. $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+1}$.
Primitivas : $-\dfrac{1/2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}+3\ln|x-1|-\arctan x+k$.

Solución del ejercicio 2630 ▲000825

---

1. $\dfrac{1}{x^2+2}$ es un elemento simple. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Descomposición : $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{x+1}-\dfrac{1/2}{x-1}$. Integral : $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{1-x^2} = \ln 3$.
3. No es necesario descomponer la fracción racional, pues $2x+1$ es la derivada de
$$x^2+x-3! \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \ln 3.$$
4. Por supuesto, se puede descomponer la fracción racional en elementos simples :
$$\frac{x}{x^4+16} = \frac{\sqrt{2}/8}{x^2-2x\sqrt{2}+4}-\frac{\sqrt{2}/8}{x^2+2x\sqrt{2}+4},$$
pero es de hecho más fácil de hacer el cambio de variable $x^2=u$. Entonces
$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{u^2+16} = \frac{\pi}{32}.$$
5. La descomposición de $\frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}$ es $x+18+\frac{163}{x-4}+\frac{507}{(x-4)^2}+\frac{565}{(x-4)^3}$; las primitivas son $\frac{x^2}{2}+18x-\dfrac{1014x-3491}{2(x-4)^2}+163\ln|x-4|+C$.
En fin, $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^4+6x^3-5x^2+3x-7}{(x-4)^3}\,dx = \frac{5565}{32}-326\ln 2$.

6. Descomposición : $\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}$.

   Primitivas : $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$, de donde $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^3-7x+6} = \frac{1}{10}\ln(27/4)$.

7. Descomposición : $\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} = 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Las primitivas son : $x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

   Integral : $\int_{-1}^{1}\frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}dx = 6+\frac{7\ln 3-3\ln 7}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.

8. Descomposición : $\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

   Primitivas : $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$, de donde $\int_{2}^{3}\frac{4x^2}{x^4-1}dx = \ln\frac{3}{2}+2\arctan\frac{1}{7}$.

9. La descomposición es $\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2} = 1+\frac{4/3}{(x-1)^2}+\frac{11/9}{x-1}-\frac{11/9}{x+2}$.

   Se busca entonces $\int_{-1}^{0}\frac{x^3+2x+1}{x^3-3x+2}dx = \frac{5}{3}-\frac{22}{9}\ln 2$.

10. La descomposición de $\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}$ es $\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^2+2}-\frac{6}{(x^2+2)^2}-\frac{12x-16}{(x^2+2)^3}$; las primitivas son $-\frac{1}{x^3}+\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

    Finalmente, $\int_{1}^{2}\frac{2x^8+5x^6-12x^5+30x^4+36x^2+24}{x^4(x^2+2)^3}dx = \frac{37}{72}+2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

11. Descomposición de fracciones racionales : $\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4} = \frac{2x+3}{x^2+1}-\frac{2x+5}{x^2+4}$.

    Primitivas : $\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+4}\right| + 3\arctan x - \frac{5}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$.

    Entonces $\int_{0}^{a}\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}dx = \ln\left|\frac{a^2+1}{a^2+4}\right| + 3\arctan a - \frac{5}{2}\arctan\frac{a}{2} + 2\ln 2$.

    Finalmente, $\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\frac{-2x^2+6x+7}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}+2\ln 2$.

12. Para factorizar el denominador, pensar en hacer $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$; se encuentra entonces $\frac{1}{x^4+1} = \frac{(x\sqrt{2}+2)/4}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{(x\sqrt{2}-2)/4}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Las primitivas se escriben

    $$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big)+C$$

    lo que da $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{33+20\sqrt{2}}{17}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi-\arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

Solución del ejercicio 2633 ▲002097

---

1. Para $x>0$ se tiene $\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, por lo tanto

   $$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

   Entonces $I_n \to 0$, cuando $n\to+\infty$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

3. Sea $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Por la pregunta anterior se tiene $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$. Pero, por otro lado, esta suma es telescópica, lo que lleva a $S_n = I_0 \pm I_n$. Entonces el límite de S_n y por lo tanto, de $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (cuando $n \to +\infty$) es I_0, pues $I_n \to 0$. Un pequeño cálculo demuestra que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Entonces, la suma alterna de los inversos de los enteros converge a $\ln 2$.

Solución del ejercicio 2637 ▲002089

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = \frac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \operatorname{sen} x|) + c$ sobre $\mathbb{R}$.

$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \operatorname{sen} x|) + c$ sobre $\mathbb{R}$ (calculando la suma y la diferencia).

Solución del ejercicio 2638 ▲002095

1. Denotemos $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$. El cambio de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ transformar todo fracción racional de senos y cosenos en una fracción racional en t (que se sabe resolver !). Usando $t = \tan \frac{x}{2}$ se tiene $x = \arctan \frac{t}{2}$ así como las siguientes fórmulas :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Aquí, solo se tiene que reemplazar $\operatorname{sen} x$. Como x varía de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$, entonces $t = \tan \frac{x}{2}$ varía de $t = 0$ a $t = 1$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt = \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1.$$

2. Denotemos $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} dx$. Así

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

Solución del ejercicio 2643 ▲000832

1. Cambio de variable $u = \operatorname{sen}^2 x$ (o primero $u = \operatorname{sen} x$) ; $e^{\operatorname{sen}^2 x} + C$.

2. Dos métodos : cambio de variable $u = \operatorname{sen} t$ (o $u = \sinh t$), o linealización.
$\frac{1}{15}(15 \operatorname{sen} t - 10 \operatorname{sen}^3 t + 3 \operatorname{sen}^5 t) + C$ o $\frac{1}{80} \operatorname{sen} 5t + \frac{5}{48} \operatorname{sen} 3t + \frac{5}{8} \operatorname{sen} t + C$;
$\sinh t + \frac{1}{3} \sinh^3 t + C$ o $\frac{1}{12} \sinh 3t + \frac{3}{4} \sinh t + C$;
$\frac{1}{32}(\operatorname{sen} 4t + 8 \operatorname{sen} 2t + 12t) + C$; $\frac{1}{32}(\sinh 4t - 8 \sinh 2t + 12t) + C$.

3. Integraciones por partes : $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$.
4. Integración por partes : $x\ln x - x + C$; $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C$; $x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}+C$.
5. Integraciones por partes : $\frac{1}{2}(\sinh t \operatorname{sen} t - \cosh t\cos t)+C$.
6. Cambio de variable $t=\tan\frac{x}{2}$; $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ en cada intervalo...
7. Cambio de variable $x=a\operatorname{sen}u$; $\frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.
8. Cambio de variable $u=e^x$; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2)+C$.
9. Integraciones por partes : $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\operatorname{sen}bx)+C$; $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx+a\operatorname{sen}bx)+C$.
10. Cambio de variable $t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}}-2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$.
11. Cambio de variable $t=\arcsen x$; $\frac{1}{2}(\arcsen x - x\sqrt{1-x^2})+C$.
12. Cambios de variables $u=\tan\frac{x}{2}$, $t=1+u$; $\arctan(\tan\frac{x}{2}+1)+C$ en cada intervalo... Pero, de hecho, ¿no estábamos buscando una primitiva *en* $\mathbb{R}$?
13. Cambio de variable $x^3=u^2$; $\frac{2}{3}\arcsen\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}+C$.
14. Multiplicar y dividir por $\cosh x-\sinh x$, o cambiar a e^x ; $\frac{x}{2}+\frac{\sinh 2x}{4}-\frac{\cosh 2x}{4}+C$ o $\frac{x}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}+C$.

Solución del ejercicio 2651 ▲002088

---

a- $\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$ sobre $\mathbb{R}$ (integración por partes)

b- $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$ sobre $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

c- $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln|\ln x|+c$ sobre $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (cambio de variable : $u=\ln x$)

d- $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}(x-2)(x+1)^{\frac{1}{2}}+c$ sobre $]-1,+\infty[$ (cambio de variable : $u=\sqrt{x+1}$ o integración por partes)

e- $\int \arcsen x dx = x\arcsen x+\sqrt{1-x^2}+c$ sobre $]-1,1[$ (integración por partes)

f- $\int \frac{1}{3+\exp(-x)}dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x+1)+c$ sobre $\mathbb{R}$ (cambio de variable : $u=\exp x$)

g- $\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)+c$ sobre $]0,4[$ (cambio de variable : $u=\frac{1}{2}x-1$)

h- $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \arcsen(\ln x)+c$ sobre $\left]\frac{1}{e},e\right[$ (cambio de variable : $u=\ln x$)

i- $\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}}dx = x-2\ln\left(1+\sqrt{\exp x+1}\right)+c$ sobre $\mathbb{R}$ (cambio de variable : $u=\sqrt{\exp x+1}$)

j- $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+c$ sobre $\mathbb{R}$

k- $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{6}{5}\ln|x-4|+c$ sobre $\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$ (descomposición en elementos simples)

l- $\int \cos x\exp x dx = \frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x)\exp x+c$ sobre $\mathbb{R}$ (dos integraciones por partes)

Solución del ejercicio 2652 ▲002094

---

a- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{32}$ (cambio de variables o integración por partes).
b- $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx = \frac{3\pi}{4}$ (cambio de variables $u = \frac{1}{x}$ y $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$).
c- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx = 1$ (integración por partes).
d- $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2\, dx = \pi^2 + 4$ (2 integraciones por partes).
e- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (cambio de variables o integración por partes).
f- $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cambio de variables $u = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$).
g- $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$ (integración por partes).
h- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ (cambio de variables $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$).
i- $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx = 3\ln 2 - 1$ (descomposición en elementos simples).

Solución del ejercicio 2659 ▲005450

Para t real, se escribe $g(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ después, para x real, $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$. Porque g es definida y continua en $\mathbb{R}$, G se define en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 y $G' = g$ (G es la primitiva de g sobre $\mathbb{R}$ que se anula en 1). Más precisamente, g es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ y entonces G es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$. Finalmente, f es definida y de clase C^∞ sobre $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

Estudio en 1.

Para $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{G(x)}{x-1} = \frac{G(1)+G'(1)(x-1)+\frac{G''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{x-1} = g(1)+g'(1)(x-1)+o((x-1)).$$

Entonces, f admite en 1 un desarrollo limitado de orden 1. Así, f se extiende por continuidad en 1 poniendo $f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, luego la extensión es derivable en 1 y $f'(1) = \frac{1}{2}g'(1)$. Por tanto, para todo real x, $g'(x) = 2x\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x2.(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}) = 2x\frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ y $g'(1) = 0$. Entonces, $f'(1) = 0$.

Derivada. Variaciones

Para $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{G'(x)(x-1)-G(x)}{(x-1)^2}$. $f'(x)$ es del signo de $h(x) = G'(x)(x-1)-G(x)$ cuya deriva es $h'(x) = G''(x)(x-1)+G'(x)-G'(x) = (x-1)g'(x)$. h' es del signo de $2x(1-x^8)(x-1)$ o incluso el signo de $-2x(1+x)$. h es, por lo tanto decreciente en $]-\infty,-1]$ y en $[0,+\infty[$ y creciendo en $[-1,0]$. Ahora, cuando x tiende a $+\infty$ (o $-\infty$), $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ y entonces $G'(x)(x-1)$ tiende a 0. Luego, para $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\, dt = 1-\frac{1}{x} \leqslant 1,$$

y G es acotada en un vecindario de $+\infty$ (o de $-\infty$). Como G es creciente en $\mathbb{R}$, G tiene un límite real en $+\infty$ y en $-\infty$. Este límite es estrictamente positivo en $+\infty$ y estrictamente negativa en $-\infty$. Así, h tiene un límite estrictamente positivo en $-\infty$ y un límite estrictamente negativo en $+\infty$. Sobre $[0,+\infty[$, h es decreciente y se anula en 1. Entonces, h es positiva en $[0,1]$ y negativo en $[1,+\infty[$. Luego,

$$h(-1)=\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt-\sqrt{2}=2\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt-\sqrt{2}<2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt-\sqrt{2}=0,$$

y $h(-1)<0$. h se anula así, una vez y una sola vez $]-\infty,-1[$ en cierto real α y una y solo una vez en $]-1,0[$ en cierto real β. Además, h es estrictamente positiva en $]-\infty,\alpha[$, estrictamente negativo en $]\alpha,\beta[$, estrictamente positiva sobre $]\beta,1[$ y estrictamente negativa en $]1,+\infty[$. f es estrictamente creciente en $]-\infty,\alpha]$, estrictamente decreciente en $[\alpha,\beta]$, estrictamente creciente en $[\beta,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$.

Estudio en infinito.

En $+\infty$ o $-\infty$, G tiene un límite real y por lo tanto, f tiende a 0.

Solución del ejercicio 2660 ▲005451

---

1. La función $t\mapsto e^{t^2}$ es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$. Entonces, la función $x\mapsto\int_0^x e^{t^2}\,dt$ es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ y es lo mismo con f. La función $t\mapsto e^{t^2}$ es par y por lo tanto, la función $x\mapsto\int_0^x e^{t^2}\,dt$ es impar. Como la función $x\mapsto e^{-x^2}$ es par, f es impar.
2. Para x real, $f'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+e^{-x^2}e^{x^2}=-2xf(x)+1$.
3. Para $x\geqslant 1$, una integración por partes proporciona :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt=\int_1^x\frac{1}{2t}.2te^{t^2}\,dt=\left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt=\frac{e^{x^2}}{2x}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}|1-2xf(x)|&=\left|1-2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right|\\&\leqslant xe^{-x^2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt+exe^{-x^2}+2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Los dos últimos términos tienden a 0, cuando x tiende a $+\infty$. Queda aún el primero. Para $x\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}0\leqslant xe^{-x^2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt&=xe^{-x^2}\int_1^{x-1}\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt+xe^{-x^2}\int_{x-1}^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt\\&\leqslant x(x-1)e^{-x^2}\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2}+xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x\frac{1}{t^2}\,dt\\&=x(x-1)e^{-2x+1}+x\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=x(x-1)e^{-2x+1}+\frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Esta última expresión tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$. Se deduce que $xe^{-x^2}\int_1^x\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$. Finalmente, $1-2xf(x)$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$, o aún, $f(x)\sim\frac{1}{2x}$.

4. Para $x>0$, $g(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x))=\frac{e^{x^2}}{2x}-\int_0^x e^{t^2}\,dt$, entonces

$$g'(x)=e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{2x^2}-e^{x^2}=-\frac{e^{x^2}}{2x^2}<0.$$

g es, por lo tanto estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$ y entonces, g se anula como máximo una vez $]0,+\infty[$. Luego, $f'(1)=1-2f(1)=1-2e^{-1}\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Por tanto, el método de los rectángulos proporciona $\int_0^1 e^{t^2}\,dt=1{,}44...>1{,}35...=\frac{e}{2}$, y entonces $f'(1)<0$, luego $g(1)<0$. En fin, como en 0^+, $g(x)\sim\frac{1}{2x}f'(0)=\frac{1}{2x}$, $g(0^+)=+\infty$. Así, g se anula exactamente una vez en $]0,+\infty[$ en cierto real x_0 de $]0,1[$.

5. g es estrictamente positiva en $]0,x_0[$ y estrictamente negativa en $]x_0,+\infty[$. Es lo mismo con f'. f es estrictamente creciente en $[0,x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2661 ▲005465

1. f es continua en $\mathbb{R}^*$ en tanto que cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}^*$ cuyo denominador no se anula en $\mathbb{R}^*$. Por otra parte, cuando t tiende a 0, $f(t)\sim\frac{t^2}{t}=t$ y $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} f(t)=0=f(0)$. Así, f es continua en 0 y por lo tanto, en $\mathbb{R}$.

2. f es continua en $\mathbb{R}$ y entonces F es definida y de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$. Además, $F'=f$ es positiva en $[0,+\infty[$, de manera que F es creciente en $[0,+\infty[$. Se deduce que F admite en $+\infty$ un límite en $]-\infty,+\infty]$. Verificar entonces que F es mayorada en $\mathbb{R}$. Se constata que $t^2\cdot\frac{t^2}{e^t-1}$ tiende a 0, cuando t tiende a $+\infty$, de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados. Así, existe un real A tal que para $t\geqslant A$, $0\leqslant t^2\cdot\frac{t^2}{e^t-1}\leqslant 1$ o aún $0\leqslant f(t)\leqslant\frac{1}{t^2}$. Para $x\geqslant A$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^A f(t)\,dt+\int_A^x\frac{t^2}{e^t-1}\,dt\leqslant\int_0^A f(t)\,dt+\int_A^x\frac{1}{t^2}\,dt\\&=\int_0^A f(t)\,dt+\frac{1}{A}-\frac{1}{x}\leqslant\int_0^A f(t)\,dt+\frac{1}{A}.\end{aligned}$$

F es creciente y acotada superiormente y por lo tanto, tiene un límite real ℓ, cuando n tiende a $+\infty$. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Para $t\in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}f(t)&=t^2e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}}=t^2e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-t})^k+\frac{(e^{-t})^n}{1-e^{-t}}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}t^2e^{-(k+1)t}+\frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt}=\sum_{k=1}^{n}t^2e^{-kt}+f_n(t)\ (*),\end{aligned}$$

donde $f_n(t)=\frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}e^{-nt}$, para $t>0$. Además, haciendo $f_n(0)=0$, por un lado, f_n es continua en $[0,+\infty[$ y por otro lado, la igualdad $(*)$ es aún cierto cuando $t=0$. Integrando, se obtiene

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ F(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^2e^{-kt}\,dt+\int_0^x f_n(t)\,dt\ (**).$$

Sean entonces $k \in \mathbb{N}^*$ y $x \in [0,+\infty[$. Dos integraciones por partes proporcionan :

$$\int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-kt}\, dt = \left[-\frac{1}{k}t^2\mathrm{e}^{-kt}\right]_0^x + \frac{2}{k}\int_0^x t\mathrm{e}^{-kt}\, dt = -\frac{1}{k}x^2\mathrm{e}^{-kx} + \frac{2}{k}\left(\left[-\frac{1}{k}t\mathrm{e}^{-kt}\right]_0^x + \frac{1}{k}\int_0^x \mathrm{e}^{-kt}\, dt\right)$$
$$= -\frac{1}{k}x^2\mathrm{e}^{-kx} - \frac{2}{k^2}x\mathrm{e}^{-kx} - \frac{2}{k^3}\mathrm{e}^{-kx} + \frac{2}{k^3}.$$

Porque $k > 0$, cuando x tiende a $+\infty$, se obtiene $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-kt}\, dt = \frac{2}{k^3}$. Se hace entonces tender x hacia $+\infty$ en $(**)$ y se obtiene

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell - 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\, dt\ (***).$$

Verificar en fin que $\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\, dt\right) = 0$. La función $t \mapsto \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$ es continua en $]0,+\infty[$, se extiende por continuidad en 0 y tiene un límite real en $+\infty$. Se deduce que esta función está acotada en $]0,+\infty[$. Sea M un mayorante de esta función en $]0,+\infty[$. Para $x \in [0,+\infty[$ y $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene entonces

$$0 \leqslant \int_0^x f_n(t)\, dt \leqslant M\int_0^x \mathrm{e}^{-nt}\, dt = \frac{M}{n}(1-\mathrm{e}^{-nx}).$$

A $n \in \mathbb{N}^*$ fijado, se pasa al límite cuando n tiende a $+\infty$ y se obtiene

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\, dt \leqslant \frac{M}{n},$$

luego se pasa al límite cuando n tiende a $+\infty$ y se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\, dt\right) = 0.$$

Pasando al límite cuando x tiende a $+\infty$, luego cuando n tiende a $+\infty$ en $(***)$, se obtiene finalmente

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}.$$

Solución del ejercicio 2662 ▲005466

1. I es uno de los dos intervalos $]-\infty,-1[$ o $]-1,+\infty[$. f es continua en I y por lo tanto, admite primitivas en I.

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+j} + \frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

donde $a = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{3(-j)^2} = \frac{j}{3}$. Así,

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{j}{X+j} + \frac{j^2}{X+j^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} + \frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right).$$

Pero entonces,

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})$$
$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. I es uno de los dos intervalos $]-\infty,-1[$ o $]1,+\infty[$. Sobre I, $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$.
3. $X^3-X^2-X+1 = X^2(X-1)-(X-1) = (X^2-1)(X-1) = (X-1)^2(X+1)$. Entonces, la descomposición en elementos simples de $f = \frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ es de la forma $aX^2+bX+c+\frac{d_1}{X-1}+\frac{d_2}{(X-1)^2}+\frac{e}{X+1}$. Determinación de a, b y c. La división euclidiana de X^5 por X^3-X^2-X+1 se escribe $X^5 = (X^2+X+2)(X^3-X^2-X+1)+2X^2+X-2$. Se tiene entonces $a=1$, $b=1$ y $c=2$. $e = \lim_{x\to-1}(x+1)f(x) = \frac{(-1)^5}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4}$. Luego, $d_2 = \lim_{x\to1}(x-1)^2f(x) = \frac{1^5}{1+1} = \frac{1}{2}$. En fin, $x=0$ proporciona $0 = c-d_1+d_2+e$ y entonces, $d_1 = -2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$. Finalmente,

$$\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1} = X^2+X+2-\frac{9}{4}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

y entonces, I designando uno de los tres intervalos $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ o $]1,+\infty[$, se tiene en I

$$\int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.$$

4. Sobre $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^5}\,dx$$
$$= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^5}\,dx$$
$$= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{((\frac{\sqrt{3}}{2}u)^2+\frac{3}{4})^5}\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \text{ (usando } x+\frac{1}{2} = \frac{u\sqrt{3}}{2})$$
$$= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4} + \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du.$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe entonces $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Una integración por partes proporciona

$$I_n = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

y entonces, $I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n\right)$. Pero entonces,

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8}I_4=\frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6}I_3\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4}I_2\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}I_1\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan u+C.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$u^2+1=(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1=\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}(x^2+x+1).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int\frac{1}{(u^2+1)^5}\,du &= \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\left(\frac{1}{8}\frac{3^4}{4^4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{8.6}\frac{3^3}{4^3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^3}+\frac{7.5}{8.6.4}\frac{3^2}{4^2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{(x^2+x+1)^2}\right.\\
&\left.\quad+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\frac{3}{4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})}{x^2+x+1}+\frac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right).\\
&= \frac{1}{8}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{36}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}+\frac{35}{108}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{35}{54}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\\
&\quad+\frac{70\sqrt{3}}{81}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,
\end{aligned}$$

(todavía queda por reducir al mismo denominador).

5. Se define $u=x^2$ y entonces $du=2xdx$

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int\frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u(u+1)^2}=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2})\,du\\
&= \frac{1}{2}(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1})+C=\frac{1}{2}(\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})+C.
\end{aligned}$$

6. $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx=\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx+\int\frac{x}{x^6+1}\,dx$. Luego, poniendo $u=x^3$ y entonces $du=3x^2\,dx$,

$$\int\frac{x^2}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2+1}\,du=\frac{1}{3}\arctan u+C=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C,$$

y usando $u=x^2$ y $du=2x\,dx$,

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^3+1}\,du=\frac{1}{6}\ln\frac{(u-1)^2}{u^2-u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C\text{ (ver 1))}\\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+C.$$

7. $\frac{1}{X^4+1}=\sum_{k=0}^{3}\frac{\lambda_k}{X-z_k}$, donde $z_k=\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$. Además, $\lambda_k=\frac{1}{4z_k^3}=\frac{z_k}{4z_k^4}=-\frac{z_k}{4}$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1}&=-\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{X-\mathrm{e}^{i\pi/4}}+\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{X-\mathrm{e}^{-i\pi/4}}+\frac{-\mathrm{e}^{i\pi/4}}{X+\mathrm{e}^{i\pi/4}}+\frac{-\mathrm{e}^{-i\pi/4}}{X+\mathrm{e}^{-i\pi/4}}\right)\\&=-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}-\frac{\sqrt{2}X+2}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right).\end{aligned}$$

Pero,

$$\frac{\sqrt{2}X-2}{X^2-\sqrt{2}X+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}-\frac{1}{(X-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2},$$

y por lo tanto,

$$\int\frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)-\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C,$$

e igualmente,

$$\int\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$$

Finalmente,

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1))+C.$$

8. Una integración por partes proporciona

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4+1}\,dx&=\frac{x}{x^4+1}+\int\frac{4x^4}{(x^4+1)^2}\,dx=\frac{x}{x^4+1}+4\int\frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2}\,dx\\&=\frac{x}{x^4+1}+4\int\frac{1}{x^4+1}\,dx-4\int\frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx\end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\int\frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx=\frac{1}{4}(\frac{x}{x^4+1}+3\int\frac{1}{x^4+1}\,dx)=...$$

9. Se define $R=\frac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1=\frac{X^{12}-1}{X^4-1}&=\frac{\prod_{k=0}^{11}(X-\mathrm{e}^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}\\&=(X-\mathrm{e}^{i\pi/6})(X-\mathrm{e}^{-i\pi/6})(X+\mathrm{e}^{i\pi/6})(X+\mathrm{e}^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

R es real y par. Entonces,

$$R=\frac{a}{X-j}+\frac{\overline{a}}{X-j^2}-\frac{a}{X+j}-\frac{\overline{a}}{X+j^2}+\frac{b}{X-\mathrm{e}^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-\mathrm{e}^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+\mathrm{e}^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+\mathrm{e}^{-i\pi/6}}.$$

$a = \frac{1}{8j^7+4j^3} = \frac{1}{4(2j+1)} = \frac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)} = \frac{-1-2j}{12}$ y entonces,

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} = \frac{1}{12}(\frac{-1-2j}{X-j} + \frac{-1-2j^2}{X-j^2}) = \frac{1}{4}\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2},$$

y por paridad,

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\overline{a}}{X+j^2} = \frac{1}{4}(\frac{1}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}).$$

luego, $b = \frac{1}{8e^{7i\pi/6}+4e^{3i\pi/6}} = \frac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)} = \frac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)} = \frac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12} = \frac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12} = \frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$, y entonces,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{12}(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}}) = \frac{1}{12}\frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1}$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Por paridad,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} - \frac{b}{X+e^{i\pi/6}} - \frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + C.$$

10. Usando $u = x^2$ y $du = 2x\,dx$, se obtiene $\int \frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u^2+1)^3}$.

Para $n \geqslant 1$, se escribe $I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$. Una integración por partes proporciona :

$$I_n = \frac{u}{(u^2+1)^n} + \int \frac{u\cdot(-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}),$$

y por lo tanto, $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{2n}(\frac{u}{(u^2+1)^n} + (2n-1)I_n)$. Se deduce que

$$I_3 = \frac{1}{4}(\frac{u}{(u^2+1)^2} + 3I_2) = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan u + C,$$

y finalmente que

$$\int \frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx = \frac{1}{16}(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2} + \frac{3}{x^4+1} + 3\arctan(x^2)) + C.$$

11.

$$\begin{aligned}(X+1)^7-X^7-1 &= 7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X\\ &= 7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)\\ &= 7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{7}{(X+1)^7-X^7-1} = \frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2} = \frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c_1}{X-j}+\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}.$$

$a = \lim_{x\to 0} xR(x) = 1$, $b = \lim_{x\to -1}(x+1)R(x) = -1$, y

$c_2 = \lim_{x\to j}(x-j)^2R(x) = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = -\frac{1}{j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{3}$. Luego,

$$\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}\right) = \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2},$$

y

$$\begin{aligned}R-\left(\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}\right) &= \frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2}-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2}\\ &= \frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.\end{aligned}$$

Luego, $c_2 = \frac{-2j^2-2j+3}{3j(j+1)(j-j^2)} = -\frac{5}{j-j^2} = \frac{5(j-j^2)}{(j-j^2)(j^2-j)} = \frac{5(j-j^2)}{3}$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1} &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{5(j-j^2)}{X-j}+\frac{5(j^2-j)}{X-j^2}+\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{X^2+X+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{(X+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx &= \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2}\right)\right)+C\\ &= \frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2663 ▲005467

1. Se define $t = \tan\frac{x}{2}$ y entonces $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int 2\frac{1}{1-t^2}\,dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C\\ &= \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.\end{aligned}$$

o bien

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C...$$

o bien, poniendo $u = x + \frac{\pi}{2}$, (ver 2))

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos(u-\frac{\pi}{2})}\,du = \int \frac{1}{\operatorname{sen} u}\,du = \ln|\tan\frac{u}{2}| + C = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C.$$

Luego, poniendo $t = \mathrm{e}^x$ y entonces $dx = \frac{dt}{t}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\arctan(\mathrm{e}^x) + C,$$

o bien

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1}\,dx = \arctan(\operatorname{sh} x) + C.$$

2. Usando $t = \tan\frac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$ y $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln|\operatorname{sh} x| + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x-\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-\operatorname{sen} x| + C.$
5. $\displaystyle\frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 x}+\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2+3\tan^2 x}d(\tan x)$, y poniendo $u = \tan x$,

$$\int \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2+3u^2}\,du = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}u) + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x) + C.$$

6. Se define $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$ y $J = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$. Entonces, $I + J = \displaystyle\int dx = x + C$ y $I - J = \displaystyle\int \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = \ln|\cos x + \operatorname{sen} x| + C$. Sumando estas dos igualdades, se obtiene :

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \operatorname{sen} x|) + C.$$

o bien, poniendo $u = x - \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}\,dx = \int \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos u}\,du = \frac{1}{2}\int (1 - \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u})\,du \\ &= \frac{1}{2}(u + \ln|\cos u|) + C \\ &= \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4} + \ln|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \operatorname{sen} x)|) + C = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \operatorname{sen} x|) + C. \end{aligned}$$

7. $\dfrac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(3x)}\,dx=\dfrac{4\cos^3x-3\cos x}{4\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x}=\dfrac{1}{4}\dfrac{4\cos^3x-3\cos x}{\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2x)}=\frac{1}{4}(\frac{4\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{3}{\operatorname{sen}x\cos x})=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$.
Por consiguiente,

$$\int\frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(3x)}\,dx=\ln|\operatorname{sen}x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C.$$

8. $\cos^4x+\operatorname{sen}^4x=(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)^2-2\operatorname{sen}^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(2x)$, y entonces

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos^4x+\operatorname{sen}^4x}\,dx&=\int\frac{1}{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(2x)}\,dx=\int\frac{1}{2-\operatorname{sen}^2u}\,du\ (\text{usando } u=2x)\\&=\int\frac{1}{1+\cos^2u}\,du=\int\frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\frac{dv}{1+v^2}\ (\text{usando } v=\tan u)\\&=\int\frac{dv}{v^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4x+\cos^4x+1}\,dx&=\frac{2\operatorname{sen}^2x}{1-2\operatorname{sen}^2x\cos^2x+1}\cos x\,dx=\frac{2\operatorname{sen}^2x}{2-2\operatorname{sen}^2x(1-\operatorname{sen}^2x)}\cos x\,dx\\&=\frac{u^2}{u^4-u^2+1}\,du\ (\text{en posant } u=\operatorname{sen}x).\end{aligned}$$

Ahora, $u^4-u^2+1=\frac{u^6+1}{u^2+1}=(u-e^{i\pi/6})(u-e^{-i\pi/6})(u+e^{i\pi/6})(u+e^{-i\pi/6})$, y entonces,

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1}=\frac{a}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{a}}{u-e^{-i\pi/6}}-\frac{a}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{a}}{u+e^{-i\pi/6}},$$

o $a=\dfrac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})}=\dfrac{(e^{i\pi/6})^2}{i.2e^{i\pi/6}.\sqrt{3}}=\dfrac{-ie^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}}$, y entonces

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{u^4-u^2+1}&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{-ie^{i\pi/6}}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{ie^{-i\pi/6}}{u-e^{-i\pi/6}}+\frac{ie^{i\pi/6}}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{ie^{-i\pi/6}}{u+e^{-i\pi/6}})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2+\sqrt{3}u+1})\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1})+\frac{1}{4}(\frac{1}{(u+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{(u-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2})\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4x+\cos^4x+1}\,dx=&\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}^2x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x+1}{\operatorname{sen}^2x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x+1}\right|\\&+\frac{1}{2}(\arctan(2\operatorname{sen}x-\sqrt{3})+\arctan(2\operatorname{sen}x+\sqrt{3})+C.\end{aligned}$$

10. Usando $u=\operatorname{sen}x$, se obtiene

$$\frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}(3x)}\,dx=\frac{\operatorname{sen}x}{1+3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x}\frac{1}{\cos^2x}\cos x\,dx=\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}\,du$$

Por tanto, $1+3u-4u^3=(u+1)(-4u^2-4u-1)=-(u-1)(2u+1)^2$ y entonces, $(1+3u-4u^3)(1-u^2)=(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2$ y entonces,

$$\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}=\frac{a}{u+1}+\frac{b_1}{u-1}+\frac{b_2}{(u-1)^2}+\frac{c_1}{2u+1}+\frac{c_2}{(2u+1)^2}.$$

$a=\lim_{u\to -1}(u+1)f(u)=\frac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2}=-\frac{1}{4}$, $b_2=\frac{1}{(1+1)(2+1)^2}=\frac{1}{18}$ y $c_2=\frac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2}=-\frac{4}{9}$. Luego, $u=0$ proporciona $0=a-b_1+b_2+c_1+c_2$ o aún $c_1-b_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{4}{9}=\frac{23}{36}$. Por otra parte, multiplicando por u, luego haciendo tender u hacia $+\infty$, se obtiene $0=a+b_1+c_1$ y entonces $b_1+c_1=\frac{1}{4}$ y entonces, $c_1=\frac{4}{9}$ y $b_1=-\frac{7}{36}$. Finalmente,

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2}=-\frac{1}{4(u+1)}-\frac{7}{36(u-1)}+\frac{1}{18(u-1)^2}+\frac{4}{9(2u+1)}-\frac{4}{9(2u+1)^2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int\frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}(3x)}\,dx&=-\tfrac{1}{4}\ln(\operatorname{sen}x+1)-\tfrac{7}{36}\ln(1-\operatorname{sen}x)-\tfrac{1}{18(\operatorname{sen}x-1)}\\&\quad+\tfrac{2}{9}\ln|2\operatorname{sen}x+1|+\tfrac{2}{9}\tfrac{1}{2\operatorname{sen}x+1}+C\end{aligned}$$

11. (ver 6))

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x+2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx&=\int\frac{\frac{1}{2}((\operatorname{sen}x+\cos x)-(\operatorname{sen}x-\cos x))+((\operatorname{sen}x+\cos x)+(\operatorname{sen}x-\cos x)}{\operatorname{sen}x-\cos x}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}+\frac{1}{2}\int dx\\&=\frac{3}{2}\ln|\operatorname{sen}x-\cos x|+\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos(3x)}\,dx&=\int\frac{\operatorname{sen}x}{4\cos^3x-3\cos x}\,dx=\int\frac{1}{3u-4u^3}\,du\ (\text{en posant } u=\cos x)\\&=\int(\frac{1}{3u}-\frac{1}{3(2u-\sqrt{3})}-\frac{1}{3(2u+\sqrt{3})})\,du\\&=\frac{1}{3}(\ln|\cos x|-\frac{1}{2}\ln|2\cos x-\sqrt{3}|-\frac{1}{2}\ln|2\cos x+\sqrt{3}|)+C.\end{aligned}$$

13. En todos los casos, se establece $t=\tan x$ y entonces $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\operatorname{sen}^2x}\,dx=\int\frac{1}{\alpha+\beta\tan^2x}\frac{dx}{\cos^2x}=\int\frac{dt}{\alpha+\beta t^2}.$$

Si $\beta=0$ y $\alpha\neq 0$, $\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\operatorname{sen}^2x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\tan x+C$. Si $\beta\neq 0$ y $\alpha\beta>0$,

$$\int\frac{1}{\alpha\cos^2x+\beta\operatorname{sen}^2x}\,dx=\frac{1}{\beta}\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x)+C.$$

Si $\beta \neq 0$ y $\alpha\beta < 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\,\mathrm{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}})^2}\,dt = \frac{\mathrm{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\tan x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right| + C.$$

14.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}\,x\,dx\\ &= \int \frac{u^2+1}{u+1}\,du \text{ (usando } u = \mathrm{sh}\,x)\\ &= \int (u-1+\frac{2}{u+1})\,du = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{2} - \mathrm{sh}\,x + 2\ln|1+\mathrm{sh}\,x| + C.\end{aligned}$$

15. Se puede escribir $u = \mathrm{e}^x$, pero hay una forma mejor.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\mathrm{ch}\,x - 1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{(\mathrm{ch}\,x-1)(\mathrm{ch}\,x+1)}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx = \mathrm{sgn}(x)\int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx\\ &= 2\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1} + C.\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\,dx &= \int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x(\mathrm{ch}\,x+1)}\,\mathrm{sh}\,x\,dx\\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du \text{ (en posant } u = \mathrm{ch}\,x)\\ &= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\,du = \ln\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1} + C.\end{aligned}$$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}^5 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{(\mathrm{ch}^2 x - 1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(u^2-1)^3}\,du$ (poniendo $u = \mathrm{ch}\,x$).

18.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\mathrm{ch}\,x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{ch}\,x}{1-\mathrm{ch}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx - \int \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx\\ &= \coth x + \frac{1}{\mathrm{sh}\,x} + C.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2664 ▲005468

1.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx = \mathrm{argsh}\frac{x+1}{2} + C\\ &= \ln(\frac{x+1}{2} + \sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1}) + C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int (x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx\\ &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx\\ &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx,\end{aligned}$$

y entonces,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C.$$

(También se puede escribir $x+1 = 2\,\mathrm{sh}\,u$).

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}((x-1)+C.$

3. Se define $u = x^6$, luego $v = \sqrt{1+u}$ (o directamente $u = \sqrt{1+x^6}$) y se obtiene :

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\,x^5dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1}2v\,dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{3}(v+\int \frac{1}{v^2-1}\,dv) = \frac{1}{3}(v+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|)+C\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^6}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|)+C\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx)\\ &= \frac{1}{2}(\int \frac{u}{u^2-1}2u\,du + \int \frac{v}{1-v^2}2v\,dv) \text{ (usando } u=\sqrt{1+x} \text{ y } v=\sqrt{1-x})\\ &= \int (1+\frac{1}{u^2-1})\,du + \int (-1+\frac{1}{1-v^2}\,dv\\ &= u - v + \frac{1}{2}(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|) + C\\ &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|) + C.\end{aligned}$$

5. Se define $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ y entonces $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$, luego $dx = \frac{2u(-2)}{(u^2-1)^2}\,du$. Sobre $]1,+\infty[$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\,du\\ &= 2\frac{u}{u^2-1} - 2\int \frac{u^2-1}{}du\\ &= \frac{2u}{u^2-1} + 2\ln\left||\frac{1+u}{1-u}\right| + C\\ &= 2\sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C\end{aligned}$$

6. Se denota ε el signo de x. $\sqrt{x^4-x^2+1} = \varepsilon x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1} = \varepsilon x\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}$ después, $\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{x^2} = (x-\frac{1}{x})'$. Se define así $u = x-\frac{1}{x}$ y se obtiene

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx = \varepsilon\int \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+1}}\cdot\frac{x^2+1}{x}\frac{1}{x}\,dx = \varepsilon\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \varepsilon\,\mathrm{argsh}(x-\frac{1}{x})+C$$
$$= \varepsilon\ln(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x})+C.$$

7. Sobre $]0,1]$, se escribe ya $u=\sqrt{x}$ y entonces, $x=u^2$, $dx = 2u\,du$.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx = \int\sqrt{\frac{1-u}{u}}2u\,du = 2\int\sqrt{u(1-u)}\,du = 2\int\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(u-\frac{1}{2})^2}\,du.$$

Después, se establece $u-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}v$ y entonces $du = \frac{1}{2}\cos v\,dv$. Se denota que $x\in]0,1]\Rightarrow u\in\,]0,1]\Rightarrow v = \arcsin((2u-1)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\cos v\geqslant 0$.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx = 2\int\sqrt{\frac{1}{4}(1-\operatorname{sen}^2 v)}\frac{1}{2}\cos v\,dv = \frac{1}{2}\int\cos^2 v\,dv = \frac{1}{4}\int(1+\cos(2v))\,dv$$
$$= \frac{1}{4}(v+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2v))+C = \frac{1}{4}(v+\operatorname{sen}v\cos v)+C$$
$$= \frac{1}{4}(\operatorname{arcsen}((2\sqrt{x}-1)+(2\sqrt{x}-1)\sqrt{1-(2\sqrt{x}-1)^2})+C$$
$$\frac{1}{4}(\operatorname{arcsen}((2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x})+C$$

8. Se define $x=\mathrm{sh}\,t$, luego $u=\mathrm{e}^t$.

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int\frac{1}{1+\mathrm{ch}\,t}\mathrm{ch}\,t\,dt = \int\frac{\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{2}(u+\frac{1}{u})}\frac{du}{u} = \int\frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)}\,du =$$
$$\int(\frac{1}{u}-\frac{2}{(u+1)^2})\,du = \ln|u|+\frac{2}{u+1}+C.$$

Ahora, $t = \mathrm{argsh}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ y entonces, $u = x+\sqrt{x^2+1}$. Finalmente,

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{2}{x+\sqrt{x^2+1}}+C.$$

9. Se define $u=\frac{1}{x}$, luego $v=\sqrt[3]{u^3+1}=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$ y entonces $v^3=u^3+1$, luego $v^2\,dv=u^2\,du$.

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx &= \int\frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{u})^3+1}}{\frac{1}{u^2}}\,\frac{-du}{u^2}=-\int\frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u}\,du=-\int\frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u^3}u^2\,du\\
&=-\int\frac{v}{v^3-1}v^2\,dv=\int(-1-\frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)})\,dv\\
&=\int(-1-\frac{1}{3}\frac{1}{v-1}+\frac{1}{3}\frac{v+2}{v^2+v+1})\,dv\\
&=-v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\int\frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dv\\
&=-v-\frac{1}{3}\ln|v-1|+\frac{1}{6}\ln(v^2+v+1)+\sqrt{3}\arctan(\frac{2v+1}{\sqrt{3}})+C...
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2665 ▲005469

---

1. $\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}\,dx=\ln|\ln x|+C.$
2. $\displaystyle\int\operatorname{arcsen}x\,dx=x\operatorname{arcsen}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C.$
3. $\displaystyle\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$
4. $\displaystyle\int\arccos x\,dx=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$
5. $\displaystyle\int\operatorname{argsh}x\,dx=x\operatorname{argsh}x-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=x\operatorname{argsh}x-\sqrt{1+x^2}+C.$
6. $\displaystyle\int\operatorname{argch}x\,dx=x\operatorname{argch}x-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=x\operatorname{argch}x-\sqrt{x^2-1}+C.$
7. $\displaystyle\int\operatorname{argth}x\,dx=x\operatorname{argth}x-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx=x\operatorname{argth}x+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$ (se está en $]-1,1[$).
8. $\displaystyle\int\ln(1+x^2)\,dx=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$
9.
$$\begin{aligned}
\int e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx &= xe^{\operatorname{Arccos}x}+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx\\
&=xe^{\operatorname{Arccos}x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos}x}+\int\sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx
\end{aligned}$$

   y entonces, $\displaystyle\int e^{\operatorname{Arccos}x}\,dx=\frac{1}{2}(xe^{\operatorname{Arccos}x}-\sqrt{1-x^2}e^{\operatorname{Arccos}x})+C.$
10.
$$\begin{aligned}
\int\cos x\ln(1+\cos x)\,dx &= \operatorname{sen}x\ln(1+\cos x)-\int\operatorname{sen}x\frac{-\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\,dx=\operatorname{sen}x\ln(1+\cos x)-\int\frac{\cos^2x-1}{\cos x+1}\,dx\\
&=\operatorname{sen}x\ln(1+\cos x)-\int(\cos x-1)\,dx=\operatorname{sen}x\ln(1+\cos x)-\operatorname{sen}x+x+C.
\end{aligned}$$

11. $\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$. En la última integral, se establece $u=\sqrt{x}$ y entonces $x=u^2$ después, $dx=2u\,du$. Se obtiene $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du$. Pero,

$$\begin{aligned}
\frac{2u^2}{u^4+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}+\frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}u-1)+\arctan(\sqrt{2}u+1))+C,$$

y por lo tanto,

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right)-\sqrt{2}(\arctan(\sqrt{2x}-1)+\arctan(\sqrt{2x}+1))+C.$$

12. $\frac{x}{(x+1)^2}e^x = \frac{1}{x+1}e^x - \frac{1}{(x+1)^2}e^x = \left(\frac{1}{x+1}e^x\right)'$ y entonces $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1}+C$.

13. $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\,dx = \int e^{x\ln x - x}\,d(x\ln x - x) = e^{x\ln x-x}+C = \left(\frac{x}{e}\right)^x\,dx$.

14. $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C$.

15.

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx &= \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right)+C\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x)+i\,\mathrm{sen}(\alpha x))+C\\
&= \frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\,\mathrm{sen}(\alpha x))}{a^2+\alpha^2}+C
\end{aligned}$$

16. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$ y entonces $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\mathrm{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))+C$.

17. Usando $u=x^n$ y entonces $du = nx^{n-1}dx$, se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du,$$

luego poniendo $v=\sqrt{u+1}$ y entonces $u=v^2-1$ y $du=2vdv$, se obtiene

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,du = \int \frac{v}{v^2-1}\,2vdv = 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv = 2v+\ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right|+C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\,dx = \frac{1}{n}\left(2\sqrt{x^n+1}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|\right)+C.$$

18. $\int x^2 e^x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{Im}(\int x^2 e^{(1+i)x}\, dx)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{(1+i)x}\, dx &= x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int x e^{(1+i)x}\, dx = x^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int e^{(1+i)x}\, dx) \\ &= x^2 \frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + ixe^{(1+i)x} - i\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + C \\ &= e^x(\frac{1}{2}x^2(1-i)(\cos x + i\operatorname{sen} x) + ix(\cos x + i\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}(1+i)(\cos x + i\operatorname{sen} x) + C.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int x^2 e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\frac{x^2}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x) - x\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)) + C.$$

Solución del ejercicio 2666 ▲005471

Si $c \neq d$, las primitivas consideradas son racionales si y solo si existe A y B tales que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} A+B=1 \\ -2(Ad+Bc) = -(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} B = 1-A \\ A(d-c)+c = \frac{1}{2}(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} A = \frac{a+b-2c}{2(d-c)} \\ B = \frac{2d-a-b}{2(d-c)} \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{2(d-c)}d^2 + \frac{2d-a-b}{2(d-c)}c^2 = ab \\ &\Leftrightarrow d^2(a+b-2c) + c^2(2d-a-b) = 2ab(d-c) \Leftrightarrow (a+b)(d^2-c^2) - 2cd(d-c) = 2ab(d-c) \\ &\Leftrightarrow 2cd + (a+b)(c+d) = 2ab \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab-cd).\end{aligned}$$

Si $c = d$, existen tres números A, B y C tales que $(x-a)(x-b) = A(x-c)^2 + B(x-c) + C$ y por lo tanto, tales que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-c)^3} + \frac{C}{(x-c)^4}.$$

En este caso, las primitivas son racionales. Finalmente, las primitivas consideradas son racionales si y solo si $c = d$ o ($c \neq d$ y $(a+b)(c+d) = 2(ab-cd)$).

Solución del ejercicio 2667 ▲006866

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\, dx$

   Para calcular esta integral se descompone la fracción $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$ en elementos simples, el denominador no es irreducible. Se sabe que esta fracción racional se descompone con de los denominadores de grado 1 y de constantes en los numeradores :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-4}.$$

Solo queda calcular α y β usando su método favorito :

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{\frac{6}{5}}{x-4}$$

Cada una de estas fracciones es del tipo $\frac{1}{u}$ que se integra en $\ln|u|$, de donde :

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$$

Esta primitiva se define en $\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$

2. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

El denominador $u = x^2+x+1$ es irreducible, por lo tanto, la fracción ya está descompuesta en elementos simples. Se hace aparecer artificialmente una fracción del tipo $\frac{u'}{u}$ que se integrará usando el logaritmo :

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Cada una de estas fracciones se integra, la primera es del tipo $\frac{u'}{u}$ de la cual una primitiva es $\ln|u|$, la segunda es del tipo $\frac{1}{1+v^2}$ de la cual una primitiva es $\arctan v$. En detalle esto da :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - 2\int \frac{1}{1+v^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dv \quad \text{poniendo } v = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right] - \sqrt{3}\left[\arctan v\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c.
\end{aligned}$$

Esta primitiva se establece en $\mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^8 x\cos^3 x\,dx$

Cuando se tiene una función que se expresa como un polinomio (o una fracción racional), se puede probar uno de los cambios de variable $u=\cos x$, $u=\operatorname{sen} x$ o $u=\tan x$. Ya sea se prueban los tres, ya sea que se apliquen las reglas de Bioche. Aquí, si se cambia x en $\pi - x$, entonces $\operatorname{sen}^8 x\cos^3 x\,dx$ se convierte en $\operatorname{sen}^8(\pi-x)\cos^3(\pi-x)\,d(\pi-x) = \operatorname{sen}^8 x(-\cos^3 x)(-dx) = \operatorname{sen}^8 x\cos^3 x\,dx$. Entonces el cambio de variable adecuado es $u=\operatorname{sen} x$. Pongamos $u=\operatorname{sen} x$, $du=\cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^8 x\cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^8 x\cos^2 x(\cos x\,dx) = \int \operatorname{sen}^8 x(1-\operatorname{sen}^2 x)(\cos x\,dx) \\
&= \int u^8(1-u^2)du = \int u^8\,du - \int u^{10}\,du \\
&= \left[\frac{1}{9}u^9\right] - \left[\frac{1}{11}u^{11}\right] = \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + c
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$

Como $\frac{1}{\operatorname{sen}(-x)}(-dx) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$ La regla de Bioche indica el cambio de variable $u = \cos x$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}(-\operatorname{sen} x\,dx) = \int \frac{-1}{1-\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x\,dx) = -\int \frac{1}{1-u^2}\,du.$$

Se descompone esta fracción en elementos simples : $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du = -\frac{1}{2}\big[\ln|1+u|\big] - \frac{1}{2}\big[\ln|1-u|\big]\\ &= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1-\cos x| + c\end{aligned}$$

Esta primitiva se define en todo intervalo del tipo $]k\pi,(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. Se puede reescribir bajo diferentes formas :

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Otro cambio de variable posible es $t = \tan\frac{x}{2}$.

5. $\displaystyle\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x + 3\tan x}\,dx$

La regla de Bioche indica el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x+3\tan x}\,dx &= \int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x+3\tan x}\frac{1}{\cos x}(\cos x\,dx) = \int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x+3\operatorname{sen} x}(\cos x\,dx)\\ &= \int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2-2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x}(\cos x\,dx) = \int \frac{3-u}{2-2u^2+3u}\,du\end{aligned}$$

Se considera la fracción que se reduce a elementos simples :

$$\frac{3-u}{2-2u^2+3u} = \frac{u-3}{(u-2)(2u+1)} = \frac{\alpha}{u-2} + \frac{\beta}{2u+1}$$

Se encuentra $\alpha = -\frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{7}{5}$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\operatorname{sen} x}{2\cos x+3\tan x}\,dx &= \int \frac{\alpha\,du}{u-2} + \int \frac{\beta\,du}{2u+1} = \alpha\ln|u-2| + \beta\ln|2u+1| + c\\ &= -\frac{1}{5}\ln|2-\operatorname{sen} x| + \frac{7}{5}\ln|1+2\operatorname{sen} x| + c.\end{aligned}$$

Esta primitiva se define para x verificando $1+2\operatorname{sen} x > 0$, por lo tanto en cada uno de los intervalos del tipo $\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 2668 ▲006867

---

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} x\,dx$. Por integración por partes con $u = x$, $v' = \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} x\,dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\\ &= \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \big[\operatorname{sen} x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-0+1-0 = 1.\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$. Se define el cambio de variable $u = e^x$, con $x = \ln u$ y $du = e^x\,dx$. La variable x varía de $x = 0$ a $x = 1$, entonces la variable $u = e^x$ varía de $u = 1$ a $u = e$.

$$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}.$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. Se define el cambio de variable $x = \tan t$, entonces se tiene $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ y se sabe también que $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Como x varía de $x = 0$ a $x = 1$, entonces t debe variar de $t = \arctan 0 = 0$ a $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$. Comenzar por descomponer la fracción en elementos simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2},$$

donde se ha encontrado $\alpha = 3$ y $\beta = -2$. La primera es una integral del tipo $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$ y la segunda $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}dx = 3\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - 2\Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - 0 + 1 - 2 = 3\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

5. Denotemos $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$. Se define el cambio de variable $u = \frac{1}{x}$ y se tiene $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$. Entonces x variando de $x = \frac{1}{2}$ a $x = 2$, u varía de $u = 2$ a $u = \frac{1}{2}$ (el orden es importante !).

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx = \int_2^{\frac{1}{2}} (1+u^2)\arctan\frac{1}{u}\left(-\frac{du}{u^2}\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\frac{1}{u}\,du = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan u\right)du \quad \text{pues} \quad \arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)du - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan u\,du = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^2 - I = \frac{3\pi}{2} - I.\end{aligned}$$

Conclusión : $I = \frac{3\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 2669 ▲001280

---

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ es convergente (vale $\sqrt{\pi}$).
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} x^x dx$ es divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}(x^{-1})}{\ln(1+x)} dx$ es divergente.
4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(2+\sqrt{3})$.
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx = 1/12\pi$.
6. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2$.
7. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sinh(x)} dx = -\ln \operatorname{th}(1/2)$.

Solución del ejercicio 2680 ▲001291

Respuestas : $\frac{\pi}{2} - \ln 2, \pi, \dfrac{1}{(n-1)^2}$.

Solución del ejercicio 2706 ▲004275

$f(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$, para $-1 < x < 1$.

Solución del ejercicio 2707 ▲004276

$\frac{\pi^2}{4}$.

Solución del ejercicio 2708 ▲004277

$2nI_n - (2n+2)I_{n+1} = 0 \Rightarrow I_n = -\frac{\pi}{4n}$.

Solución del ejercicio 2709 ▲004278

$I_n + I_{n+2} = \frac{2I_{n+1}}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow I_n = \frac{\pi}{\cos\alpha}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^n$.

Solución del ejercicio 2710 ▲004279

$I_n = \pi\sqrt{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{3}{4k}\right)$.

Solución del ejercicio 2711 ▲004280

Descomponer en elementos simples e integrar. Se obtiene $I_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}\ln k$.

Solución del ejercicio 2712 ▲004281

1.
2.
3. $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \frac{n\pi}{2}$.
   $A_n - B_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, para $n \geqslant 1$.

4. $J = \frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 2716 ▲004285

$1-\gamma$.

Solución del ejercicio 2717 ▲004286

1. Integraciones sucesivas por partes dan,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t^k}{k!}\left(\ln t - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt + \left(\ln k - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

   Sea $I_k = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{t^k}{k!}\ln(t/k)\,dt$. Se establece $t = ku$:

$$\begin{aligned}I_k &= \frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^k \ln u\,du = \frac{k^{k+1}}{k!}\int_0^{+\infty} d\left(\frac{(u\mathrm{e}^{-u})^{k-1}}{k-1}\right)\frac{u^2\mathrm{e}^{-u}\ln u}{1-u} \\ &= -\frac{k^{k+1}}{k!(k-1)}\int_0^{+\infty} (u\mathrm{e}^{-u})^{k-1} d\left(\frac{u^2\mathrm{e}^{-u}\ln u}{1-u}\right).\end{aligned}$$

   Como $0 \leqslant u\mathrm{e}^{-u} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, queda $\sqrt{k}$ en el denominador multiplicado por alguna constante acotada.

2.
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,dt &= \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\left(-\ln x - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left((\mathrm{e}^{-x}-1)\ln x - \int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right) = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = (t = -\ln(1-u)) = \int_{1-\mathrm{e}^{-x}}^1 \frac{-du}{\ln(1-u)}$.

Solución del ejercicio 2719 ▲004288

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 2721 ▲004290

1. Suponiendo f positiva decreciente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \leqslant tg(t) \leqslant tf(0) + \int_0^{+\infty} f$.

2. $\int_{Pt}^{Qt} f(u)\,du - \sum_{n=P}^{Q-1} t f(nt) = \int_{Pt}^{Qt} (f(u) - f(t[u/t]))\,du = \int_{Pt}^{Qt} t(1-\{u/t\})f'(u)\,du \to 0$, cuando $P,Q \to \infty$. Entonces la serie de término general $tf(nt)$ es de Cauchy ; converge.

   Se tiene entonces $\int_0^{+\infty} f - tg(t) = \int_0^{+\infty} t(1-\{u/t\})f'(u)\,du \to 0$, cuando $t \to 0^+$.
3. $\int_0^{+\infty} 2f - 2tg(t) = \int_0^{+\infty} tf'(u)\,du + \int_0^{+\infty} t(1-2\{u/t\})f'(u)\,du = tf(0) - \int_0^{+\infty} t^2\{u/t\}(1-\{u/t\})f''(u)\,du$.

Solución del ejercicio 2724 ▲004293

$0 \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \to 0$ (cuando $x \to +\infty$).

$\int_1^x t(f(t)-f(t+1))\,dt = \int_1^2 tf(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt - \int_x^{x+1} (t-1)f(t)\,dt \to \int_1^2 tf(t)\,dt + \int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ (cuando $x \to +\infty$).

Solución del ejercicio 2726 ▲004295

1. $\int_x^y \frac{f(at)}{t}\,dt = \int_{ax}^{ay} \frac{f(t)}{t}\,dt \Rightarrow \int_x^y \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = \int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_y^{ay} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

   Se obtiene $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(t)}{t}\,dt = (L-\ell)\ln a$.
2. $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt = \ln 2$.

Solución del ejercicio 2727 ▲004296

1.
2. $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Solución del ejercicio 2728 ▲004297

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_{a-1}^{a+1} \frac{u-(a-1)}{2} f(u)\,du + \int_{a+1}^{b-1} f(u)\,du + \int_{b-1}^{b+1} \frac{b+1-u}{2} f(u)\,du.$$
$$= \varphi(a+1) - \tfrac{1}{2}\int_{a-1}^{a+1} \varphi(u)\,du + \int_{a+1}^{b-1} f(u)\,du + \frac{1}{2}\int_{b-1}^{b+1} \varphi(u)\,du - \varphi(b-1),$$
donde φ es una primitiva de f.

Solución del ejercicio 2729 ▲004298

Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$: $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt$.

Solución del ejercicio 2732 ▲004301

1.
2. e^{-x}/x.

3. $-\ln x$.

Solución del ejercicio 2733 ▲004302

1.
2. $I_n = \sqrt{n} K_{2n+1}$, $J_n = \sqrt{n} K_{2n-1}$.
3. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución del ejercicio 2734 ▲004303

$I_n = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}$.

Solución del ejercicio 2735 ▲004304

Integral trivialmente convergente. Cortar en $\int_0^1$ y $\int_1^{+\infty}$, cambiar x en $\frac{1}{x}$ en una de las integrales, agrupar y escribir $u = x - \frac{1}{x}$. Se obtiene $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución del ejercicio 2736 ▲004305

La integral converge por partes.

Solución del ejercicio 2737 ▲004306

$$\int^x \cos(P(t))\, dt = \left[\frac{\operatorname{sen}(P(t))}{P'(t)}\right]^x - \int^x \operatorname{sen}(P(t)) \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{P'(t)}\right) dt.$$

Solución del ejercicio 2738 ▲004307

$I = J$ por el cambio $u \mapsto 1/u$.
$I + J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 2741 ▲004310

$$\begin{aligned}\int_0^X \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt\, dx &= \left[x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt\right]_{x=0}^X + \int_0^X \operatorname{sen} x\, dx = X \int_X^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt + 1 - \cos X \\ &= X\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{t=X}^{+\infty} - X \int_X^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt + 1 - \cos X = -X\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\right]_{t=X}^{+\infty} - X \int_X^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen} t}{t^3}\, dt + 1 \\ &\to 1 \text{ cuando } X \to +\infty\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2742 ▲004311

$2|ff''| \leqslant f^2 + f''^2$, por lo tanto ff'' es integrable. Se deduce que f'^2 admite un límite finito en $+\infty$, y este límite es nulo, de lo contrario f^2 no es integrable (si $f'(x) \to \ell$, cuando $x \to +\infty$, entonces $f(x)/x \to \ell$). Así f' es acotada en $\mathbb{R}^+$, f es lipschitziana y, por lo tanto, uniformemente continua. Además,

$$\int_0^X f'^2(t)\,dt = f(X)f'(X) - f(0)f'(0) - \int_0^X f(t)f''(t)\,dt,$$

por lo tanto $f(X)f'(X)$ admite en $+\infty$ un límite finito o $+\infty$, y el caso $f(X)f'(X) = \frac{1}{2}(f^2)'(X) \to +\infty$, cuando $X \to +\infty$ contradice la integrabilidad de f^2, entonces este caso es imposible, lo que prueba que f'^2 es integrable en $\mathbb{R}^+$. En fin, ff' es integrable (producto de dos funciones cuadrado integrables) por lo tanto f^2 admite un límite finito en $+\infty$ y este límite es cero por integrabilidad de f^2.

Solución del ejercicio 2743 ▲004312

Se define $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| dt = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t+n\pi}\,dt$. Al encuadrar el denominador se tiene $u_n \sim \frac{2}{n\pi}$, de donde $u_0 + \cdots + u_n \sim \frac{2\ln n}{\pi}$ y, por encuadramiento de nuevo, la integral detenida en x es equivalente a $\frac{2\ln x}{\pi}$.

Solución del ejercicio 2744 ▲005713

1. Para $x \geqslant 0$, $x^2+4x+1 \geqslant 0$ y por lo tanto, la función $f:\ x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ es continua en $[0,+\infty[$. Cuando x tiende a $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim 32x$. Como la función $x \mapsto \frac{3}{2x}$ es positiva y no integrable en un vecindario de $+\infty$, f no es integrable en $[0;+\infty[$.
2. Para $x \geqslant 1$, $1+\frac{1}{x}$ es definida y estrictamente positiva. Entonces la función $f:\ x \mapsto \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ es definida y continua en $[1,+\infty[$. Cuando x tiende a $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, luego $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2x}$. Porque la función $x \mapsto \frac{e}{2x}$ es positiva y no integrable en un vecindario de $+\infty$, f no es integrable en $[1,+\infty[$.
3. La función $f:\ x \mapsto \frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^x}$ es continua y positiva en $]0,+\infty[$.

   • En 0, $\frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^x} \sim \ln x$ y entonces $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Como $\frac{1}{2} < 1$, la función $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ es integrable en un vecindario de 0 y lo mismo ocurre con la función f.

   • En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Como $2 > 1$, la función $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ es integrable en un vecindario de $+\infty$ y lo mismo ocurre con la función f. Finalmente, f es integrable en $]0,+\infty[$.
4. La función $x \mapsto \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ es continua y estrictamente positiva en $[0,+\infty[$. Entonces la función $f:\ x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ es continua en $[0,+\infty[$.

   En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\ln x + \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right) = \frac{1}{3}\ln x + \ln\left(\frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3}\ln x - \ln 3 + O\left(\frac{1}{x}\right)$. Así, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x - \ln 3\sqrt{x} + o(1)$. Pero entonces $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x - \ln 3\sqrt{x} + 2\ln x + o(1)\right)$ y entonces $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. Finalmente, $f(x)$ es despreciable delante $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ y f es integrable en $[0,+\infty[$.
5. La función $f:\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}}$ es continua en $[1,+\infty[$.

Cuando x tiende a $+\infty$, $x^2f(x)=\exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right)=\exp(-x+o(x))$ y entonces $x^2f(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0$. $f(x)$ es así despreciable en comparación con $\frac{1}{x^2}$ en un vecindario de $+\infty$ y entonces f es integrable en $[1,+\infty[$.

6. La función $f:\ x\mapsto x^{-\ln x}$ es continua en $]0,+\infty[$.
   • Cuando x tiende a 0, $x^{-\ln x}=\mathrm{e}^{-\ln^2 x}\to 0$. La función f se extiende por continuidad en 0 y es en particular integrable en un vecindario de 0.
   • Cuando x tiende a $+\infty$, $x^2f(x)=\exp\left(-\ln^2 x+2\ln x\right)\to 0$. Entonces f es despreciable delante $\frac{1}{x^2}$, cuando x tiende a $+\infty$ y f es integrable en un vecindario de $+\infty$. Finalmente, f es integrable en $]0,+\infty[$.
7. La función $f:\ x\mapsto\dfrac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x^{5/3}}$ es continua en $]0,+\infty[$.
   • Cuando x tiende a 0, $f(x)\sim\dfrac{5x-3x}{x^5/3}=\dfrac{2}{x^{2/3}}>0$. Porque $\frac{2}{3}<1$, la función $x\mapsto\dfrac{2}{x^{2/3}}$ es positiva e integrable en un vecindario de 0 y lo mismo ocurre con la función f.
   • En $+\infty$, $|f(x)|\leqslant\dfrac{2}{x^{5/3}}$ y desde $\frac{5}{3}>1$, la función f es integrable en un vecindario de $+\infty$. Finalmente, f es integrable en $]0,+\infty[$.
8. La función $f:\ x\mapsto\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ es continua en $]0,1[\cup]1,+\infty[$. • En 0, $f(x)\sim-\ln x=o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Entonces f es integrable en un vecindario de 0 a la derecha. • En 1, $f(x)\sim\dfrac{\ln x}{2(x-1)}\sim\frac{1}{2}$. La función f se extiende por continuidad en 1 y es en particular integrable en un vecindario de 1 a la izquierda o a la derecha. • En $+\infty$, $x^{3/2}f(x)\sim\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=o(1)$. Entonces $f(x)$ es despreciable delante $\dfrac{1}{x^{3/2}}$, cuando x tiende a $+\infty$ y por lo tanto, integrable en un vecindario de $+\infty$. Finalmente, f es integrable en $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
9. La función$f:\ x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{|x|}}$ es continua en $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ y par. Por lo tanto, es suficiente estudiar la integrabilidad de f sobre $]0,+\infty[$. f es positiva y equivalente en 0 a la derecha a $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ y despreciable frente a $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados. f es, por lo tanto integrable en $]0,+\infty[$, luego por paridad en $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Se deduce que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$ existe en $\mathbb{R}$ y vale por paridad $\displaystyle 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$.
10. La función$f:\ x\mapsto\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ es continua y positiva en $]-1,1[$, par y equivalente en un vecindario de 1 a la derecha a $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f es, por lo tanto integrable en $]-1,1[$.
11. La función$f:\ x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ es continua y positiva en $]0,1[$, equivalente al vecindario de 0 a la derecha a $\dfrac{1}{x^{2/3}}$ y en un vecindario de 1 a la izquierda a $\dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f es, por lo tanto integrable en $]0,1[$.
12. La función$f:\ x\mapsto\dfrac{1}{\arccos(1-x)}$ es continua y positiva en $]0,1]$. En 0, $\arccos(1-x)=o(1)$. Entonces $\arccos(1-x)\sim\operatorname{sen}\left(\arccos(1-x)\right)=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}\sim\sqrt{2}\sqrt{x}$. Entonces $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ y f es integrable en $]0,1[$.

Solución del ejercicio 2745 ▲005714

1. Para todo par de reales (a,b), la función $f:\ x\mapsto \frac{1}{x^a\ln^b x}$ es continua y positiva en $[2,+\infty[$. Estudiar la integrabilidad de f en un vecindario de $+\infty$.
1er caso. Si $a>1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\frac{1}{x^{(a-1)/2}\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$, pues $\frac{a-1}{2}>0$ y de acuerdo con un teorema de crecimiento comparado. Entonces $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Como $\frac{a+1}{2}>1$, la función $x\mapsto\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ es integrable en un vecindario de $+\infty$ y es lo mismo con f. En este caso, f es integrable en $[2,+\infty[$.
2o caso. Si $a<1$, $x^{(a+1)/2}f(x)=\frac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$, pues $\frac{1-a}{2}>0$ y de acuerdo con un teorema de crecimiento comparado. Entonces $f(x)$ es preponderante ante $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Como $\frac{a+1}{2}<1$, la función $x\mapsto\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ no es integrable en un vecindario de $+\infty$ y es lo mismo con f. En este caso, f no es integrable en $[2,+\infty[$.
3o caso. Si $a=1$. Para $X>2$ fijado, poniendo $t=\ln x$ y entonces $dt=\frac{dx}{x}$ se obtiene
$$\int_2^X\frac{1}{x\ln^b}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln X}\frac{dt}{t^b}.$$
porque $\ln X$ tiende a $+\infty$, cuando X tiende a $+\infty$ y que las funciones consideradas son positivas, f es integrable en $[2,+\infty[$ si y solo si $b>1$.
En resumen,
$$\boxed{\text{la función } x\mapsto\frac{1}{x^a\ln^b x} \text{ es integrable en } [2,+\infty[\text{ si y solo si } a>1 \text{ o } (a=1 \text{ y } b>1).}$$
(En particular, la función $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ no es integrable en un vecindario de $+\infty$ aunque despreciable frente a $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).

2. Para todo real a, la función $f:\ x\mapsto(\tan x)^a$ es continua y estrictamente positiva en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Además, para todo real x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, se tiene $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{f(x)}$.
• **Estudio en 0 a la derecha.** $f(x)\underset{x\to0}{\sim}x^a$. Entonces f es integrable en un vecindario de 0 a la derecha si y solo si $a>-1$.
• **Estudio en $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.** $f(x)=\frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-a}$. Entonces f es integrable en un vecindario de $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda si y solo si $a<1$.
En resumen, f es integrable en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ si y solo si $-1<a<1$.

3. Para $x\geqslant1$, $1+\frac{1}{x}$ es definida y estrictamente positiva. Así para todo par (a,b) real, la función $f:\ x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}$ es continua en $[1,+\infty[$. En $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Entonces
$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}(1-a)+\frac{1-b}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
• Si $a\neq1$, f tiene un límite real no nulo en $+\infty$ y por lo tanto, no es integrable en $[1,+\infty[$.
• Si $a=1$ y $b\neq1$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1-b}{x}$. En particular, f tiene signo constante en un vecindario de $+\infty$ y no es integrable en $[1,+\infty[$.

• Si $a=b=1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ y en este caso, f es integrable en $[1,+\infty[$.

En resumen, f es integrable en $[1,+\infty[$ si y solo si $a=b=1$.

4. Para todo par (a,b) real, la función $f:\ x\mapsto \dfrac{1}{x^a(1+x^b)}$ es continua y positiva en $]0,+\infty[$.

• Estudio en 0.

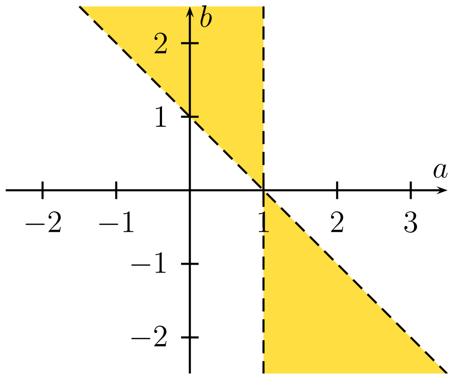
-Si $b>0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, y entonces f es integrable en un vecindario de 0 si y solo si $a<1$, -si $b=0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, y entonces f es integrable en un vecindario de 0 si y solo si $a<1$, -si $b<0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, y entonces f es integrable en un vecindario de 0 si y solo si $a+b<1$.

• Estudio en $+\infty$.

-Si $b>0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, y entonces f es integrable en un vecindario de $+\infty$ si y solo si $a+b>1$, -si $b=0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, y entonces f es integrable en un vecindario de $+\infty$ si y solo si $a>1$, -si $b<0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, y entonces f es integrable en un vecindario de $+\infty$ si y solo si $a>1$.

En resumen, f es integrable en $]0,+\infty[$ si y solo si $((b\geqslant 0$ y $a<1)$ o $(b<0$ y $a+b<1))$ y $((b>0$ y $a+b>1)$ o $(b\leqslant 0$ y $a>1))$ lo que equivale a $(b>0$ y $a+b>1$ y $a<1)$ o $(b<0$ y $a>1$ y $a+b<1)$.

Representar gráficamente el conjunto de soluciones. La zona de solución es la zona coloreada.



Solución del ejercicio 2746 ▲005715

1. Sean ε y X dos reales tales que $0<\varepsilon<X$. Ambos funcionan $x\mapsto 1-\cos x$ y $x\mapsto \frac{1}{x}$ son de clase C^1 en el segmento $[\varepsilon,X]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_\varepsilon^X \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_1^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1-\cos X}{X} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La función $x\mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ es continua en $]0,+\infty[$, es extensible por continuidad en 0, pues $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ y por lo tanto, integrable en un vecindario de 0, es dominada por $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ y por lo tanto, integrable en un vecindario de $+\infty$. La función $x\mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ es, por lo tanto integrable en $]0,+\infty[$ y $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ tiene un límite real cuando ε tiende a 0 y X tiende a $+\infty$.

• $\left|\frac{1-\cos X}{X}\right| \leqslant \frac{1}{X}$ y entonces $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1-\cos X}{X}=0$.

• $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ y entonces $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon} \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} = 0$. Se deduce que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ es una integral convergente y además

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sen}^2(u)}{4u^2}\, 2du = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(u)}{u^2}\, du.$$

$$\boxed{\text{La integral } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \text{ converge y además } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx.}$$

2. La función $f:\ x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x^a}$ es continua en $]0,+\infty[$.

   • Sobre $]0,1[$, la función f es de signo constante y la existencia de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)\, dx$ equivalente a la integrabilidad de la función f sobre $]0,1]$. Porque f es equivalente en 0 a $\frac{1}{x^{a-1}}$, la integral impropia $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge en 0 si y solo si $a > 0$. Ahora Se supone $a > 0$.

   • Sea $X > 1$. Ambos funcionan $x \mapsto -\cos x$ y $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ son de clase C^1 en el segmento $[1,X]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_1^X \frac{\operatorname{sen} x}{x^a}\, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx.$$

   Ahora, $\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{a+1}}$ y desde $a+1 > 1$, la función $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ es integrable en un vecindario de $+\infty$. Se deduce que la función $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx$ tiene un límite real cuando X tiende a $+\infty$. Como, por otro lado, la función $X \mapsto -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ tiene un límite real cuando X tiende a $+\infty$, se ha demostrado que la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge en $+\infty$. Finalmente,

$$\boxed{\text{la integral } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^a}\, dx \text{ converge si y solo si } a > 0.}$$

3. Sea X un real estrictamente positivo. El cambio de variable $t = x^2$ seguido de una integración por partes proporciona :

$$\int_1^X e^{ix^2}\, dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\, dt\right).$$

   Ahora, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$, pues $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. Por otra parte, la función $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ es integrable en $[1,+\infty[$, pues $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Así, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$ es una integral convergente y como por otro lado la función $x \mapsto e^{ix^2}$ es continua en $[0,+\infty[$, se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la integral } \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx \text{ converge.}}$$

   Se deduce además que las integrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ y $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ son integrales convergentes (integrales de FRESNEL).

4. La función $f:\ x\mapsto x^3\operatorname{sen}(x^8)$ es continua en $[0,+\infty[$. Sea $X>0$. El cambio de variable $t=x^4$ proporciona

$$\int_0^X x^3\operatorname{sen}(x^8)dx=\frac{1}{4}\int_0^{X^4}\operatorname{sen}(t^2)\,dt=\frac{1}{4}\operatorname{Im}\left(\int_0^{X^4}\mathrm{e}^{it^2}\,dt\right).$$

De acuerdo a 3), $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{it^2}\,dt$ es una integral convergente y por lo tanto, $\int_0^{+\infty}x^3\operatorname{sen}(x^8)\,dx$ converge.

5. La función $f:\ x\mapsto\cos(\mathrm{e}^x)$ es continua en $[0,+\infty[$. Sea $X>0$. El cambio de variable $t=\mathrm{e}^x$ proporciona

$$\int_0^X\cos(\mathrm{e}^x)\,dx=\int_1^{\mathrm{e}^X}\frac{\cos t}{t}\,dt.$$

Demostrar la convergencia en $+\infty$ de esta integral por una integración por partes análoga a la de la cuestión 1). La integral impropia $\int_0^{+\infty}\cos(\mathrm{e}^x)\,dx$ converge.

6. Para todo real $x\geqslant 0$, $1+x^3\operatorname{sen}^2 x\geqslant 1>0$ y por lo tanto, la función $f:\ x\mapsto\frac{1}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}$ es continua en $[0,+\infty[$.

La función f es positiva, la convergencia de la integral propuesta es equivalente a la integrabilidad de la función f sobre $[0,+\infty[$, integrabilidad en sí misma equivalente a la convergencia de la serie numérica de término general $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Se tiene $u_n\geqslant 0$ y por otro lado

$$\begin{aligned}
u_n&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(u+n\pi)^3\operatorname{sen}^2 u}\,du\\
&\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^3\pi^3\operatorname{sen}^2}\,du=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+n^3\pi^3\operatorname{sen}^2 u}\,du\\
&\leqslant 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+n^3\pi^3\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}\,du\ \text{(por la concavidad de la función seno en } [0,\pi])\\
&=2\times\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{(n\pi)^{3/2}}\frac{1}{1+v^2}\,dv\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+v^2}\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Entonces, para $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ y la serie de término general u_n converge. Se deduce que la función $f:\ x\mapsto\frac{1}{1+x^3\operatorname{sen}^2 x}$ es integrable en $[0,+\infty[$.

Solución del ejercicio 2747 ▲005716

Existencia y cálculo de :

1) (** I) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ 2) (muy largo) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$

3) (** I) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ 4) (***) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ 6) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ 8) (***) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (** I) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$ 10) (I muy largo) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (cálculo para $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\,dx$ 12) (*** I) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Solución del ejercicio 2748 ▲005717

La función $f:\ x\mapsto \ln(\operatorname{sen}x)$ es continua en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Además, cuando x tiende a 0, $\ln(\operatorname{sen}x)\sim\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Así, f es integrable sur$\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Sean $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\operatorname{sen}x)\,dx$ y $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$. El cambio de variable $x=\frac{\pi}{2}-t$ proporciona J existe y $J=I$. Así,

$$2I=I+J=\int_0^{\pi/2}\ln(\operatorname{sen}x\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\operatorname{sen}(2x))\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\operatorname{sen}u)\,du$$
$$=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\operatorname{sen}u)\,du\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{0}\ln(\operatorname{sen}(\pi-t))\,(-dt)\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+I.$$

Así, $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\operatorname{sen}x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

2. Para $n\geqslant 2$, se escribe $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Para $1\leqslant k\leqslant n-1$, se tiene $0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ y entonces $P_n>0$. Por otra parte, $\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ y $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}=1$. Se deduce que

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

luego

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\frac{\mathrm{e}^{ik\pi/(2n)}-\mathrm{e}^{-ik\pi/(2n)}}{2i}=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-\mathrm{e}^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n)}\right)$$
$$=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(\mathrm{e}^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n)}\right)=\frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n)}\right).$$

Ahora, el polinomio Q unitario de grado $2n-1$ cuyas raíces son las $2n-1$ raíces $2n$-ésimas de la unidad distintas de 1 es

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1}=1+X+X^2+\cdots+X^{2n-1}$$

y entonces $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalmente,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n = \sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Para $0 \leqslant k \leqslant n$, se escribe entonces $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ de manera que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \frac{\pi}{2}$ es una subdivisión de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a paso constante igual a $\frac{\pi}{2n}$. Porque la función $x \mapsto \ln(\operatorname{sen} x)$ es continua y creciente en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, se tiene $\frac{\pi}{2n} \ln(\operatorname{sen}(x_k)) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$, entonces sumando estas desigualdades, se obtiene

$$\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) \leqslant \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$$

Igualmente, para $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx \leqslant \frac{\pi}{2n} \ln(\operatorname{sen}(x_{k+1}))$ y sumando

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx \leqslant \frac{\pi}{2n} \ln(P_n).$$

Finalmente, $\forall n \geqslant 2$, $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) + \int_0^{\pi/(2n)} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx \leqslant I \leqslant \frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$. Pero $\ln(P_n) = \ln n - (n-1)\ln 2$ y entonces $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$ tiende a $-\frac{\pi \ln 2}{2}$, cuando n tiende a $+\infty$ y como por otro lado, $\int_0^{\pi/(2n)} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ (ya que la función $x :\mapsto \ln(\operatorname{sen} x)$ es integrable en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$), se ha vuelto a demostrar que $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Solución del ejercicio 2749 ▲005718

La función $f:\ t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ es continua y positiva en $]0,1[$, despreciable frente a $\frac{1}{\sqrt{t}}$, cuando t tiende a 0 y prolongable por continuidad en 1. La función f es, por lo tanto integrable en $]0;1[$.

1a solución. (a mano, sin utilizar un teorema de integración término a término) Para $t \in]0,1[$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1} = \frac{-\ln t}{1-t} = -\sum_{k=0}^{n} t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}.$$

Para $t \in]0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, se escribe $f_n(t) = -t^n \ln t$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Cada función f_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, es continua en $]0,1]$ y despreciable en 0 delante $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Entonces cada función f_k es integrable en $]0,1]$ y por lo tanto, en $]0,1[$. Pero entonces, lo mismo ocurre con la función $t \mapsto \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} = \frac{\ln t}{t-1} + \sum_{k=0}^{n} t^k \ln t$ y

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\, dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}\, dt\ .$$

• La función $g:\ t \mapsto \frac{t \ln t}{t-1}$ es continua en $]0,1[$ y prolongable por continuidad en 0 y en 1. Esta función es acotada en particular en $]0,1[$. Sea M un mayorante de la función $|g|$ sobre $]0,1[$. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}\, dt \right| \leqslant \int_0^1 t^n |g(t)|\, dt \leqslant M \int_0^1 t^n\, dt = \frac{M}{n+1}.$$

Así, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}\, dt = 0$. Se deduce que la serie de término general $-\int_0^1 t^k \ln t\, dt$ converge y que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^k \ln t)\,dt.$$

• Sea $\varepsilon \in]0,1[$. Para $k \in \mathbb{N}$, una integración por partes proporciona

$$\int_\varepsilon^1 (-t^k \ln t)\,dt = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_\varepsilon^1 + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Cuando ε tiende a 0, se obtiene $\displaystyle\int_\varepsilon^1 (-t^k \ln t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalmente,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2a solución. (Utilización de un teorema de integración término a término) Cada función f_n es continua e integrable en $]0,1[$ y la serie de funciones de términos generales f_n converge simplemente a la función f sobre $]0,1[$ y además, la función f es continua en $]0,1[$. Finalmente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

De un teorema de integración término a término, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Solución del ejercicio 2750 ▲005719

La función $f:\ t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ es continua en $]0,1[$, prolongable por continuidad en 0 y 1 y por lo tanto, es integrable en $]0,1[$. Sea $x \in]0,1[$. Cada una de las dos funciones $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ y $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ se extiende por continuidad en 0 y por lo tanto, es integrable en $]0,x]$ y se puede escribir

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

En la primera integral, se establece $u = t^2$ y se obtiene $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u}\,du$ y entonces

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt.$$

Se nota entonces que, ya que $x \in]0,1[$, $x^2 < x$. Para $t \in [x^2, x]$, se tiene $t\ln t < 0$ y entonces $\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{\ln}t$, luego por crecimiento de la integral, $\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{x}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t\ln t}\,dt$ y entonces

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dtx \leqslant x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Ahora, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln x| = \ln 2$ y se ha demostrado que, para todo real x de $]0,1[$,

$$x^2\ln 2 \leqslant \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt \leqslant x\ln 2.$$

Cuando x tiende a 1, se obtiene

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2.}$$

Solución del ejercicio 2751 ▲005720

1. La función $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ es continua, positiva e integrable en $[0,+\infty[$. Además, cuando t tiende $+\infty$,
$$\mathrm{e}^{-t^2} \sim \left(1+\tfrac{1}{t^2}\right) = \tfrac{d}{dt}\left(-\tfrac{1}{2t}\mathrm{e}^{-t^2}\right).$$
A partir de un teorema de suma de relaciones de comparación, cuando x tiende a $+\infty$,
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \sim \int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}\mathrm{e}^{-t^2}\right)'\,dt = \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2},$$
y entonces
$$\boxed{\mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

2. Para $a>0$ fijo, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se puede demostrar integrando por partes (ver ejercicio 2746)) luego
$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx &= -\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx + O(1)\\ &\underset{a\to0}{=} -\int_1^a \frac{1}{x}\,dx + \int_1^a \frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1) \underset{a\to0}{=} -\ln a + \int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx + O(1).\end{aligned}$$
Ahora, $\frac{1-\cos x}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$ y, en particular, $\frac{1-\cos x}{x}$ tiende a 0, cuando x tiende a 0. Así, la función $x\mapsto \frac{1-\cos x}{x}$ es continua en $]0,1]$ y se extiende por continuidad en 0. Por lo tanto, esta función es integrable en $]0,1]$ y, en particular, $\displaystyle\int_1^a \frac{1-\cos x}{x}\,dx$ tiene un límite real cuando a tiende a 0. Se deduce que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\ln a + O(1)$ y finalmente
$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{\sim} -\ln a.}$$

3. Sea $a>0$.
$$\left|\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx - \frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a^4}$$
Entonces, $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ o aún
$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

Solución del ejercicio 2752 ▲005721

• **Dominio de definición.** Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x<0$, la función $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ no está definida en $[x,0[\subset[x,x^2]$ y $f(x)$ no está definido.
Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Entonces la función $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ es continua en $[x^2,x]$. En este caso, $f(x)$ existe y además es estrictamente positiva porque $\ln t<0$, para todo t de $]0,1[$.
Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$, entonces la función $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ es continua en $[x,x^2]$. En este caso también, $f(x)$ existe y es estrictamente positiva. En fin, $f(0)$ y $f(1)$ no tiene sentido.

$$\boxed{f \text{ se define en } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ y estrictamente positivo en } D.}$$

• **diferenciabilidad.** Sea I uno de los dos intervalos $]0,1[$ o $]1,+\infty[$. La función $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ es continua en I. Sea F una primitiva de esta función en I. Si $x\in]0,1[$, se tiene $[x^2,x]\subset]0,1[$ y entonces $f(x)=F(x^2)-F(x)$. Igualmente, si $x\in]1,+\infty[$. Se deduce que f es de clase C^1 sobre D. Además, para $x\in D$,

$$f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variaciones.** f' es estrictamente positiva en $]0,1[\cup]1,+\infty[$ y entonces f es estrictamente creciente en $]0,1[$ y en $]1,+\infty[$ (pero no necesariamente en D).
• **Estudio en** 0. Sea $x\in]0,1[$. Se tiene $0<x^2<x<1$ y además la función $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ es decreciente en $[x^2,x]\subset]0,1[$ como el inverso de una función estrictamente negativa y estrictamente creciente en $]0,1[$. Entonces, $\frac{x-x^2}{\ln x}\leqslant\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt\leqslant\frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$, luego

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^2-x}{2\ln x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2-x}{\ln x}.$$

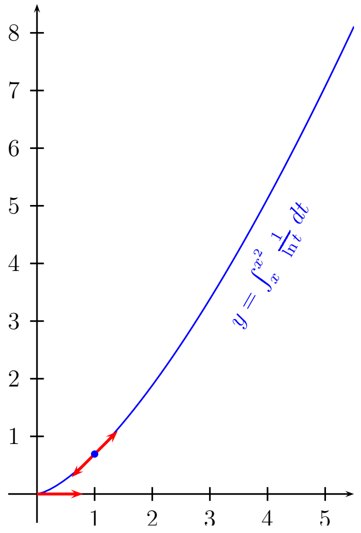
Se deduce que $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ y se puede extender f por continuidad en 0 poniendo $f(0)=0$ (se denota todavía f la extensión). Cuando x tiende a 0 para valores superiores, $f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$ tiende a 0. Así, - f es continua en $[0,1[$, - f es de clase C^1 sobre $]0,1[$, - f' tiene un límite real cuando x tiende a 0 a saber 0. De acuerdo a un teorema clásico de análisis, f es de clase C^1 sobre $[0,1[$ y $f'(0)=0$.
• **Estudio en 1.** Sea ha visto en el ejercicio 2750 que $\lim_{x\to1}f(x)=\ln2$ (el límite a la derecha 1 es tratado de la misma manera). Se extiende f por continuidad en 1 poniendo $f(1)=\ln2$ (se denota todavía f la extensión obtenida). Luego cuando x tiende a 1, $f'(x)$ tiende a 1. Entonces f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^+$ y $f'(1)=1$. En particular, f es continua en $\mathbb{R}^+$ y de acuerdo con lo anterior f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.
• **Estudio en** $+\infty$. Para $x>1$, $f(x)\geqslant x^2-x\ln x$. Entonces $f(x)$ y $\frac{f(x)}{x}$ tienden a $+\infty$, cuando x tiende a $+\infty$. La curva representativa de f admite en $+\infty$ una rama parabólica de dirección (Oy).

• **Convexidad.** Para $x\in D$, $f''(x)=\dfrac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$. En 1, poniendo $x=1+h$, donde h tiende a 0, se obtiene

$$f''(1+h)=\frac{(1+h)\ln(1+h)-h}{(1+h)\ln^2(1+h)}=\frac{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-h}{h^2+o(h^2)}=\frac12+o(1).$$

f es, por lo tanto de clase C^2 sobre $]0,+\infty[$ y $f''(1)=\frac12$. Para $x\neq1$, $f''(x)$ es del signo de $g(x)=\ln x-1+\frac1x$ cuya deriva es $g'(x)=\frac1x-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. La función g es estrictamente decreciente en $]0,1]$ y estrictamente creciente en $[1,+\infty[$. Entonces, para $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. Se deduce que para todo $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) > 0$ y así como f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^+$.

• **Gráfico.**



Solución del ejercicio 2753 ▲005722

La función $f : x \mapsto \frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ es continua a trozos en $[1,+\infty[$ y por lo tanto, localmente integrable en $[1,+\infty[$. Sean X un real elemento de $[2,+\infty[$ y $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx.$$

Por tanto, $\left|\int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx\right| \leqslant \frac{X-n}{n} \leqslant \frac{1}{E(X)}$. Esta última expresión tiende a 0 cuando el real X tiende a $+\infty$ y entonces $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = 0$. Por otra parte, la sucesión $\left((-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ tiene un signo alternado y su valor absoluto tiende a 0 en forma decreciente. La serie de término general $(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $k \geqslant 1$, converge en virtud del criterio especial de series alternadas o incluso, cuando el real X tiende a $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ tiene un límite real. Lo mismo ocurre con $\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$ y la integral $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$ converge. Además

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Cálculo. Porque la serie converge, se tiene $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(1\times 3\times\cdots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times 4\times\cdots\times(2n))^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).$$

$$\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2 \times (2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} (\sqrt{2\pi n})^4} \times (2n) = \frac{2}{\pi}.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Solución del ejercicio 2754 ▲005723

1. Porque f es continua, positiva y decreciente en $[1,+\infty[$, para $x \geqslant 2$ se tiene
$$0 \leqslant xf(x) = 2\left(x-\frac{x}{2}\right)f(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\, dt = 2\left(\int x/2^{+\infty} f(t)\, dt - \int_x^{+\infty} f(t)\, dt\right)$$
Esta última expresión tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$, pues f es integrable en $[1,+\infty[$. Entonces si f es continua, positiva, decreciente e integrable en $[1,+\infty[$, entonces $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. La función $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ es continua y positiva en $[1,+\infty[$. Sea $X \geqslant 1$.
$$\begin{aligned}\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\, dx &= \int_1^X xf(x)\, dx - \int_2^{X+1}(x-1)f(x)\, dx\\ &= \int_1^X xf(x)\, dx - \int_2^{X+1} xf(x)\, dx + \int_2^{X+1} f(x)\, dx\\ &= \int_1^2 xf(x)\, dx - \int_X^{X+1} xf(x)\, dx + \int_2^{X+1} f(x)\, dx.\end{aligned}$$
Ahora $0 \leqslant \int_X^{X+1} xf(x)\, dx \leqslant (X+1-X)(X+1)f(X) \leqslant 2Xf(X)$. De acuerdo a 1), esta última expresión tiende a 0, cuando X tiende a $+\infty$. Entonces, cuando X tiende a $+\infty$, $\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\, dx$ tiende a $\int_1^2 xf(x)\, dx + \int_2^{+\infty} f(x)\, dx$. Porque la función $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ es continua y positiva en $[1,+\infty[$, se sabe que $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ es integrable en $[1,+\infty[$ si y solo si la función $X \mapsto \int_1^X x(f(x)-f(x+1))\, dx$ tiene un límite real cuando X tiende a $+\infty$. Entonces la función $x \mapsto x(f(x)-f(x+1))$ es integrable en $[1,+\infty[$ y
$$\boxed{\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))\, dx = \int_1^2 xf(x)\, dx + \int_2^{+\infty} f(x)\, dx.}$$

Solución del ejercicio 2755 ▲005724

1. Porque f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^+$, para $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\, dt = f(x)-f(0)$. Entonces la integral $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ converge en $+\infty$ si y solo si f tiene un límite real ℓ, cuando x tiende a $+\infty$. Si además la

integral $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, se excluye tener $\ell \neq 0$ y recíprocamente si $\ell = 0$, entonces $\int_0^x f'(t)\,dt$ tiende a $-f(0)$, cuando x tiende a $+\infty$. Entonces la integral $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge si y solo si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. (a) Sea $x \geqslant 0$. Según la fórmula de TAYLOR-LAGRANGE, existe un real $\theta_x \in]x, x+1[$

$$f(x+1) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \tfrac{1}{2}f''(\theta_x).$$

lo que se escribe aún $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Cuando x tiende a $+\infty$, $f(x+1) - f(x)$ tiende a 0 y por otro lado, θ_x tiende a $+\infty$. Así, si f y f'' tienen un límite real cuando x tiende a $+\infty$, f' a igualmente un límite real y además $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} f''(x)$. Luego, porque para $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$ y $\int_0^x f''(t)\,dt = f'(x) - f'(0)$, las integrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ y $\int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$ convergente y según 1), $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ ($= \lim_{x\to+\infty} f''(x)$).

(b) Sea $F:\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. F es de clase C^3 sobre $\mathbb{R}^+$. Además, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ tiende a $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ y $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$ tiende a $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$. Entonces F y F'' tienen límites reales en $+\infty$. De acuerdo con a), $f = F'$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 2756 ▲005725

La desigualdad $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$ demuestra que la función ff'' es integrable en $\mathbb{R}$, luego para X y Y tales que $X \leqslant Y$, una integración por partes proporciona

$$\int_X^Y f'^2(x)\,dx = \big[f(x)f'(x)\big]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\,dx.$$

Porque la función f'^2 es positiva, la integrabilidad de f'^2 sobre $\mathbb{R}$ equivale a la existencia de un límite real cuando X tiende a $+\infty$ y Y tiende a $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x)\,dx$ y dado que la función ff'' es integrable en $\mathbb{R}$, la existencia de este límite es equivalente, según la igualdad anterior, a la existencia de un límite real en $+\infty$ y $-\infty$, para la función ff'.

Si f'^2 no es integrable en $\mathbb{R}^+$, entonces $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ y entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particular, para x suficientemente grande, $f(x)f'(x) \geqslant 1$, luego por integración $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant x$ contradiciendo la integrabilidad de la función f^2 sobre $\mathbb{R}$. Entonces la función f'^2 es integrable en $\mathbb{R}^+$ y la función ff' tiene un límite real cuando x tiende a $+\infty$.

Así mismo la función f'^2 es integrable en $\mathbb{R}^-$ y la función ff' tiene un límite real cuando x tiende a $-\infty$.

Si este límite es un real no nulo ℓ, se supone por ejemplo $\ell > 0$. Para x suficientemente grande, se tiene $f(x)f'(x) \geqslant \ell$, luego por integración $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geqslant \ell x$ contradiciendo de nuevo la integrabilidad de la función f^2. Entonces la función ff' tiende a 0 en $+\infty$ e igualmente en $-\infty$.

Finalmente, la función f'^2 es integrable en $\mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$. Después de la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ, se tiene

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)^2.$$

Dado que las funciones f y f'' son continuas en $\mathbb{R}$, se tiene la igualdad si y solo si la familia (f, f'') es ld. Así necesariamente, o bien f es del tipo $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω real no nulo, que es integrable en $\mathbb{R}$ si y solo si $A = B = 0$, o bien f es afín y nula aún una vez, o bien f es del tipo $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x)$ y nula aún otra vez.
Entonces, se tiene igualdad si y solo si f es nula.

Solución del ejercicio 2757 ▲005925

1. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}\, t|}{t}\, dt.$$
Para $n \geqslant 0$, se tiene $\frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{t}$, por lo tanto
$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\,\mathrm{sen}\, t|\, dt \;\leqslant\; \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\,\mathrm{sen}\, t|}{t}\, dt.$$
Por lo tanto $|\,\mathrm{sen}\, t| = (-1)^n \,\mathrm{sen}\, t$ sobre $[n\pi, (n+1)\pi]$. Así
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\,\mathrm{sen}\, t|\, dt = (-1)^n \left[-\cos t\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$
Resulta que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leqslant u_n$ y
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\,\mathrm{sen}\, t|}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$
es divergente.
2. *Segunda fórmula de la media.*
Según el enunciado, F es una primitiva de f y es positiva y decreciente. Porque la función g admite primitivas, la función $G(y) := \int_a^y g(x)\, dx$ es la primitiva de g se anula en a. De acuerdo con el teorema de valores intermediarios, para demostrar que existe $y \in [a, b]$ tal que :
$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(a) \int_a^y g(x)\, dx,$$
es suficiente demostrar que
$$F(a) \min_{y\in[a,b]} G(y) \;\leqslant\; \int_a^b F(x)g(x)\, dx \leqslant F(a) \max_{y\in[a,b]} G(y).$$
Por integración por partes, se obtiene :
$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\, dx.$$
con $F(a)G(a) = 0$. Como f es negativa en $[a, b]$, se tiene :
$$\min_{y\in[a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx \leqslant -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \leqslant \max_{y\in[a,b]} G(y) \int_a^b -f(x)\, dx,$$
$$\Leftrightarrow \min_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a) - F(b)) \;\leqslant\; -\int_a^b f(x)G(x)\, dx \leqslant \max_{y\in[a,b]} G(y)\,(F(a) - F(b)).$$

Se deduce que el encuadramiento siguiente :

$$\begin{aligned} F(b)\left(G(b)-\min_{y\in[a,b]}G(y)\right)+F(a)\min_{y\in[a,b]}G(y) &\leqslant \int_a^b F(x)g(x)\,dx \\ &\leqslant F(b)\left(G(b)-\max_{y\in[a,b]}G(y))\right)+F(a)\max_{y\in[a,b]}G(y). \end{aligned}$$

Las desigualdades $G(b)-\min_{y\in[a,b]}G(y)\geqslant 0$ y $G(b)-\max_{y\in[a,b]}G(y)\leqslant 0$ y la positividad de F permiten concluir.

3. De acuerdo con el criterio por Cauchy (ver la proposición de ls observaciones), para demostrar que $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es convergente, es suficiente demostrar que $\int_x^{x'}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ tiende a 0, cuando x y x' tienden a $+\infty$. Según la fórmula de la media aplicada a $F(t)=\frac{1}{t}$ y $g(t)=\operatorname{sen} t$, se tiene :

$$\int_x^{x'}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt=\frac{1}{x}\int_x^{y}\operatorname{sen} t\,dt$$

para cierto $y\in[x,x']$. Se deduce que

$$\left|\int_x^{x'}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right|=\frac{1}{x}|\cos y-\cos x|\leqslant\frac{2}{x}.$$

Así $\lim_{x,x'\to+\infty}\int_x^{x'}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt=0$ y $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es convergente.

4. (a) Se define para $t>0$, $U(t)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t}$. Se tiene $u(t)=U'(t)=-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t+1)<0$. Así U es positiva y decreciente sobre $]0,+\infty[$. De acuerdo a la segunda fórmula de la media, para $0<x\leqslant y$, se tiene :

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right|=\left|\int_x^y U(t)\operatorname{sen} t\,dt\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'}\operatorname{sen} t\,dt\right|,$$

para cierto $y'\in[x,y]$. Se deduce que

$$\left|\int_x^y f(t,\lambda)\,dt\right|\leqslant\frac{2\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}.$$

(b) Se observa que, para todo $x>0$, la función $t\mapsto f(t,\lambda)$ es continua en $[0,x]$, por lo tanto Riemann integrable en este intervalo. De acuerdo con el criterio por Cauchy y la pregunta 4.a), las integrales generalizadas $\int_0^{+\infty}f(t,\lambda)\,dt$ son convergentes. Sea $F(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(t,\lambda)\,dt$. Para demostrar que las integrales generalizadas $\int_0^{+\infty}f(t,\lambda)\,dt$ convergente uniformemente en $\lambda\geqslant 0$, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon>0$, existe $x_0>0$ tal que para todo $x>x_0$ y para todo $\lambda\geqslant 0$,

$$\left|F(\lambda)-\int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right|\leqslant\varepsilon.$$

Por tanto, de acuerdo a la pregunta 4.a),

$$\left|F(\lambda)-\int_0^x f(t,\lambda)\,dt\right|\leqslant\frac{2\mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\leqslant\frac{2\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}{x_0}\leqslant\frac{2}{x_0}.$$

Así para $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, se tiene la desigualdad deseada, y es independiente del valor de λ.

Pongamos $F_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^n f(t,\lambda)\,dt$. De acuerdo con lo anterior,

$$\sup_{\lambda\in[0,+\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leqslant \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformemente a F sobre $[0,+\infty[$. Como las funciones F_n son continuas, se deduce que F es continua. También se puede volver a la definición de continuidad : para demostrar que la función $\lambda \mapsto F(\lambda)$ es continua en un punto $\lambda_0 \in [0,+\infty[$, es necesario demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un vecindario de λ_0 tal que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$, para todo λ en este vecindario. Sea $\varepsilon > 0$ fijado, y se escribe $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. Se tiene :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\; dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\; dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)\,dt\right| + \left|\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\; dt\right| + \frac{2}{3}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Para concluir, es suficiente encontrar un vecindario de λ_0 tal que $\left|\displaystyle\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)\; dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo λ en este vecindario. La existencia de un tal vecindario es garantizada por la continuidad de la función $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^{x_\varepsilon} f(t,\lambda)\,dt$, dada por el teorema de continuidad de una integral dependiendo de un parámetro (ver los recordatorios). Se puede igualmente determinar la existencia de este vecindario a mano de la manera siguiente :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0))\; dt\right| &\leqslant \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)|\; dt \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right| \int_0^{x_\varepsilon} \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right|\,dt, \\
&\leqslant x_\varepsilon \sup_{t\in[0,x_\varepsilon]} \left|\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right|,
\end{aligned}$$

donde se tiene utilizar la desigualdad $|\operatorname{sen} t| \leqslant |t|$. Se tiene :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right| &= \left|\mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}}\right)\right| \\
&\leqslant 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|t}{2}\right) \leqslant 2\sinh\left(\frac{|\lambda-\lambda_0|x_\varepsilon}{2}\right),
\end{aligned}$$

porque la función sinh es creciente. Así el vecindario de λ_0 determinado por $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3}\operatorname{argsinh}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right)$ sirve.

(c) Para $x \in [0,+\infty[$ y $\lambda \in]0,+\infty[$, se pone

$$\tilde{F}(x,\lambda) = \int_0^x f(t,\lambda)\,dt.$$

De acuerdo con el teorema de derivabilidad de una integral dependiendo de un parámetro (ver los recordatorios), la función $\tilde{F}$ es derivable con respecto a la segunda variable y su derivada parcial es :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\lambda)\,dt.$$

Cuando $x \to +\infty$, $\tilde{F}(x,\lambda)$ tiende a $F(\lambda)$. Según la pregunta 4.$b)$ esta convergencia es uniforme para $\lambda \geqslant 0$. Por otra parte, cuando x tiende a $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ tiende a $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\operatorname{sen} t\,dt$. Se puede demostrar como en la pregunta 4.$b)$ que esta convergencia es uniforme para $\lambda > 0$ (cuidado es necesario excluir $\lambda = 0$ aquí). Resulta que $\lim_{h\to 0} \frac{F(\lambda+h)-F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (escribir el argumento ! Se puede utilizar el último teorema de los recordatorios, o demostrarlo a pie...).

(d) Sea $x > 0$. Se tiene :

$$\begin{aligned}
-\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\operatorname{sen} t\,dt &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\operatorname{sen} t\right]_0^x - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\cos t\,dt \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}\operatorname{sen} x + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda^2}\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda^2}\operatorname{sen} t\,dt \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}\operatorname{sen} x + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda^2}\operatorname{sen} t\,dt.
\end{aligned}$$

Así

$$-\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}\operatorname{sen} x + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2}\cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Se deduce que

$$F'(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}.$$

(e) De la pregunta precedente, se deduce que

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C,$$

donde C es una constante real. Demostrar que $F(\lambda)$ tiende a 0, cuando λ tiende a $+\infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y $x > \frac{4}{\varepsilon}$. Se tiene :

$$\begin{aligned}
|F(\lambda)| &= \left|\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\,dt + \left|\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

donde se utiliza que $|\operatorname{sen} t| \leqslant t$ y la pregunta 4.$b)$. Así

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. Se deduce que para $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, es decir $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$. Entonces $C = \lim_{\lambda\to+\infty} \arctan\lambda = \frac{\pi}{2}$. Así

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Solución del **ejercicio 2767** ▲004238

$I_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

Solución del **ejercicio 2768** ▲004239

Cortar en intervalos de $k\pi/n$. Se obtiene $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, para todo $n \geqslant 1$.

Solución del **ejercicio 2769** ▲004240

f es par, π-periódica. $f'(x) = 0$, para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = f(\pi/4) = \frac{\pi}{4}$.

Solución del **ejercicio 2770** ▲004244

Comparación entre $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}$ y su aproximación de los trapecios. Cortar e integrar dos veces por partes, $u_n \to \frac{3}{8}$, cuando $n \to \infty$.

Solución del **ejercicio 2772** ▲004247

$I = \left[f'(t)(1+\cos t)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f''(t)(1+\cos t)\,dt \geqslant 0$.

Solución del **ejercicio 2776** ▲004251

1. fórmula de Taylor-integral.
2.

Solución del **ejercicio 2779** ▲004254

$H' = f(2F - f^2) = fK$ y $K' = 2f(1-f')$, por lo tanto H es creciente y positiva.

Solución del **ejercicio 2784** ▲004259

1.
2. Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y $G = F^{-1}$. Entonces $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ G(\frac{k}{n}) \to \int_a^b f^2(t)\,dt \Big/ \int_a^b f(t)\,dt$, cuando $n \to \infty$.

Solución del **ejercicio 2785** ▲004260

Se tiene $f = e^g$, con g de clase $\mathscr{C}^1$ por el Teorema de rodamiento de donde $I(f) = \frac{g(2\pi)-g(0)}{2i\pi} \in \mathbb{Z}$.

Solución del **ejercicio 2786** ▲004261

1. Existe siempre una única función g de clase $\mathscr{C}^2$ tal que $g'' = f$, $g(a) = g'(a) = 0 : g(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt$ (Taylor-integral).
2. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $f_1 : x \mapsto f(x) - \lambda - \mu x$ verifica $\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b x f_1(x)\,dx = 0$. Se encuentra

$$\begin{cases} (b-a)\lambda + (b^2-a^2)/2\mu & = -\int_a^b f(x)\,dx \\ (b^2-a^2)/2\lambda + (b^3-a^3)/3\mu & = -\int_a^b x f(x)\,dx \end{cases}$$

y este sistema por para determinante $(b-a)^4/12 \neq 0$, por lo tanto λ, μ existen y son únicos.

Sea $g_1 \in F$ tal que $g_1'' = f_1 : \int_a^b g_1''(x)g''(x)\,dx = 0$, para todo $g \in F$, en particular para $g = g_1$, por lo tanto $g_1'' = f_1 = 0$ y $f(x) = \lambda + \mu x$.

Solución del ejercicio 2787 ▲004262

Sea $g = f - a$. Se tiene $0 \leqslant g \leqslant b-a$ y $\int_0^1 g = -a$, de donde $\int_0^1 g^2 \leqslant (b-a)\int_0^1 g = -a(b-a)$ y $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 g^2 + 2a\int_0^1 g + a^2 \leqslant -ab$.

Solución del ejercicio 2788 ▲005445

1. f es continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, es acotada en este segmento. Sea M un mayorante de $|f|$ sobre $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \leqslant M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1},$$

y como $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, se ha demostrado que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como f es de clase C^1 sobre $[0,1]$, se puede realizar una integración por partes que proporciona

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt.$$

Porque f' es continua en $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = 0$ o aún $-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = o(\frac{1}{n})$.

Por otra parte, ya que $f(1) \neq 0$, $\frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$ o aún $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Finalmente, $u_n = \frac{f(1)}{n} + o(\frac{1}{n})$, o aún

$$u_n \sim \frac{f(1)}{n}.$$

2. Porque f es de clase C^1 sobre $[0,1]$ y que $f(1) = 0$, una integración por partes proporciona $u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt$. Porque f' es de clase C^1 sobre $[0,1]$ y que $f'(1) \neq 0$, el 1) aplicada a f' proporciona

$$u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt \sim -\frac{1}{n}\frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Por ejemplo, $\int_0^1 t^n \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{1}{n}$ y $\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,dt \sim \frac{\pi}{2n^2}$

Solución del ejercicio 2789 ▲005448

1. Porque f es de clase C^1 sobre $[a,b]$, se puede realizar una integración por partes que proporcione $\lambda > 0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\lambda}(-[\cos(\lambda t)f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt)\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt).$$

Esta última expresión tiende a 0, cuando λ tiende a $+\infty$, y entonces $\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt$ tiende a 0, cuando λ tiende a $+\infty$.

2. Si f simplemente se supone que es continua por pedazos, no se puede realizar una integración por partes. El resultado es claro si $f = 1$, porque para $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b \operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| = \cdots \leqslant \frac{2}{\lambda}$. El resultado se extiende a funciones constantes por linealidad de la integral, luego a funciones constantes por partes por aditividad con respecto al intervalo de integración, es decir a las funciones escalonadas. Sea entonces f una función continua a trozos en $[a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$. Se sabe que existe una función escalonada g sobre $[a,b]$ tal que $\forall x \in [a,b],\ |f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Para $\lambda > 0$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt + \int_a^b g(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| \\
&\leqslant (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b g(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right|.
\end{aligned}$$

Ahora, quedando establecido el resultado para las funciones escalonadas,

$$\exists A > 0/\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Para $\lambda > A$, se tiene entonces $\left|\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0/\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda > A \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt\right| < \varepsilon),$$

y de modo que $\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)\,dt$ tiende a 0, cuando λ tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 2790 ▲005452

Para $t \in [0,1]$, $f^2(t) = \left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 \leqslant (\int_0^t f'^2(u)\,du)(\int_0^1 1\,du)$ $\quad$ (CAUCHY − SCHWARZ)

$$= t\int_0^t f'^2(u)\,du \leqslant t\int_0^1 f'^2(u)\,du,$$

y entonces, por crecimiento de la integral,

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^1 t(\int_0^1 f'^2(u)\,du)\,dt = (\int_0^1 f'^2(u)\,du)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(u)\,du.$$

Solución del ejercicio 2791 ▲005454

Porque f es continua y estrictamente creciente en $[0,a]$, f realiza una biyección de $[0,a]$ sobre $f([0,a]) = [0, f(a)]$. Sea $x \in [0,a]$. Para $y \in [0, f(a)]$, se escribe $g(y) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy$. Porque f es continua en $[0,a]$, se sabe que f^{-1} es continua en $[0, f(a)]$ y por lo tanto, la función $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ es definida y de clase C^1 sobre $[0, f(a)]$. Entonces g es de clase C^1 sobre $[0, f(a)]$ y para $y \in [0, f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$. Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0,a]$, $g'(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) > x \Leftrightarrow y > f(x)$. Así, g' es estrictamente negativa en $[0, f(x)[$ y estrictamente positiva en $]f(x), f(a)]$, y g es estrictamente decreciente en $[0, f(x)]$ y estrictamente creciente en $[f(x), f(a)]$. g admite en $y = f(x)$ un mínimo global igual a $g(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x)$. Denotemos $h(x)$ esta expresión. f es continua en $[0,a]$. Entonces, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ es de clase C^1 sobre $[0,a]$. Luego f es de clase C^1 sobre $[0,a]$, con valores en $[0, f(a)]$ y $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ es de clase C^1 sobre $[0, f(a)]$ (ya que f^{-1} es continua en $[0, f(a)]$). Se deduce que $x \mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ es de clase C^1 sobre $[0,a]$. Lo mismo ocurre con h y para $x \in [0,a]$,

$$h'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

h es, por lo tanto constante en $[0,a]$ y para $x \in [0,a]$, $h(x) = h(0) = 0$. Se ha demostrado que

$$\forall (x,y) \in [0,a] \times [0, f(a)],\ \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy \geqslant \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) = 0.$$

Solución del ejercicio 2792 ▲005455

Sea, para $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. g es continua en $[0,1]$ y

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g es de signo constante, g es además continua en $[0,1]$ y de integral nula en $[0,1]$, se sabe que g es nula. Si no, g cambiar el signo en $[0,1]$ y el teorema de valores intermedios demuestra que g se anula al menos una vez. En todos los casos, g se anula al menos una vez en $[0,1]$ o aún, f admite al menos un punto fijo en $[0,1]$.

Solución del ejercicio 2793 ▲005456

Por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right) &= \left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2\,dt\right)\left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2\,dt\right)\\ &\geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\,dt\right)^2 \geqslant \left(\int_0^1 1\,dt\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 2794 ▲005461

f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, admite primitivas en $\mathbb{R}$. Sea F una primitiva dada de f sobre $\mathbb{R}$. Denotemos $(*)$ la relación :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y).$$

Para $x = y = 0$, se obtiene $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Luego $x = 0$ proporciona $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(y) - F(-y) = 0$. F es, por lo tanto necesariamente par y su derivada f es necesariamente impar. La función nula es una solución del problema. Sea f una posible solución no nula. Entonces existe un real y_0 tal que $f(y_0) \neq 0$. Para todo real x, se tiene entonces

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\, dt = \frac{1}{f(y_0)} (F(x+y_0) - F(x-y_0)).$$

f es continua en $\mathbb{R}$ y entonces F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$. Es lo mismo para función $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0))$ y por lo tanto, de f. Pero entonces, F es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$ y entonces f lo es también (f en realidad, es de clase C^∞ por recurrencia).

Derivando $(*)$ con y fijo, se obtiene $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ $(**)$, pero derivando a x fijado, se obtiene también $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$ $(***)$. Re-derivando $(**)$ con y fijo, se obtiene $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ y derivando $(***)$ con x fijo, se obtiene $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$. Pero entonces,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

y, en particular,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

Se ha demostrado que si f es la solución del problema, existe un real λ tal que f es solución de la ecuación diferencial $y'' - \lambda y = 0$ (E).

- si $\lambda > 0$, poniendo $k = \sqrt{\lambda}$, (E) se escribe $y'' - k^2 y = 0$. Las soluciones de (E) son las funciones de la forma $x \mapsto A\operatorname{sh}(kx) + B\operatorname{ch}(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ y las soluciones impares de (E) son las funciones de la forma $x \mapsto A\operatorname{sh}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, sea k un real estrictamente positivo. Para $A \in \mathbb{R}^*$ (se sabe que la función nula es una solución) y $x \in \mathbb{R}$, se escribe $f(x) = A\operatorname{sh}(kx)$. Entonces

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{A}{k}(\operatorname{ch}(k(x+y)) - \operatorname{ch}(k(x-y)))\frac{2A}{k}\operatorname{sh}(kx)\operatorname{sh}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

  f es solución si y solo si $\frac{2}{kA} = 1$ o aún $A = \frac{2}{k}$.
- si $\lambda < 0$, poniendo $k = \sqrt{-\lambda}$, (E) se escribe $y'' + k^2 y = 0$. Las soluciones de (E) son las funciones de la forma $x \mapsto A\operatorname{sen}(kx) + B\cos(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ y las soluciones impares de (E) son las funciones de la forma $x \mapsto A\operatorname{sen}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, sea k un real estrictamente positivo. Para $A \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}$, se escribe $f(x) = A\operatorname{sen}(kx)$. Entonces

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{A}{k}(\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k}\operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

  f es solución si y solo si $\frac{2}{kA} = 1$ o aún $A = \frac{2}{k}$.
- si $\lambda = 0$, (E) se escribe $y'' = 0$. Las soluciones de (E) son las funciones afines y las soluciones impares de (E) son las funciones de la forma $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si $f(x) = Ax$

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A} f(x)f(y),$$

  y f es una solución si y solo si $A = 2$.

Las soluciones son la función nula, la función $x \mapsto 2x$, las funciones $x \mapsto \frac{2}{k}\,\text{sen}(kx)$, $k > 0$ y las funciones $x \mapsto \frac{2}{k}\,\text{sh}(kx)$, $k > 0$.

Solución del ejercicio 2795 ▲005462

Sea F una primitiva de f sobre $[a,b]$. F es de clase C^2 en el segmento $[a,b]$ y la desigualdad de TAYLOR-LAGRANGE permite escribir

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|F''(x)|,\ x \in [a,b]\}.$$

Pero $F'(a) = f(a) = 0$ y $F'' = f'$. Entonces,

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Igualmente, ya que $F'(b) = f(b) = 0$,

$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(b)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Pero entonces,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = |F(b)-F(a)| \leqslant |F(b)-F(\frac{a+b}{2})| + |F(\frac{a+b}{2})-F(a)| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Solución del ejercicio 2796 ▲005463

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\,dt = 0 \\ \Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (función continua positiva de integral nula)} \\ \Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant 0$, entonces $\int_0^1 -f(t)\,dt \geqslant 0$ y de acuerdo a lo anterior, f es solución si y solo si $-f = |-f|$ o aún $f \leqslant 0$.
En resumen, f es solución si y solo si f es de signo constante en $[0,1]$.

Solución del ejercicio 2804 ▲003427

Son iguales.

Solución del ejercicio 2806 ▲003438

Ambos miembros son n-lineales alternados. Se verifica en la base del determinante.

Solución del ejercicio 2807 ▲005635

1a solución.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1}\dots b_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+2+\dots+n+\sigma(1)+\dots+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{2(1+2+\dots+n)} a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} = \det A.\end{aligned}$$

2a solución. Se multiplican las rectas numéricas 2, 4,... de B por -1, luego las columnas números 2, 4,... de la matriz obtenida por -1. Se obtiene la matriz A que se deduce así de la matriz B multiplicando filas o columnas por un número par de -1 (porque existen tantas filas pares como columnas pares). Así, $\det(B) = \det(A)$.

Solución del ejercicio 2808 ▲005636

Sean $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ y $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Sea $\varphi : \begin{array}{l}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p \to \mathbb{K}\\ (C_1,\dots,C_p) \mapsto \det\begin{pmatrix} X & D\\ 0 & C\end{pmatrix}\end{array}$, donde $X = (C_1,\dots,C_p) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

• φ es lineal con respecto a cada una de las columnas $C_1,\dots,C_p$.
• Si existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tal que $i \neq j$ y $C_i = C_j$, entonces $\varphi(C_1,\dots,C_p) = 0$. Así, φ es una forma p-lineal alternada en el espacio $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ que es de dimensión p. Entonces se sabe que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\varphi = \lambda\ \det_{\mathscr{B}_0}$ (donde $\det_{\mathscr{B}_0}$ denota la forma determinante en la base canónica de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) o aún existe $\lambda \in \mathbb{K}$ independiente de $(C_1,\dots,C_p)$ tal que $\forall (C_1,\dots,C_p) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$, $f(C_1,\dots,C_p) = \lambda\ \det_{\mathscr{B}_0}(C_1,\dots,C_p)$ o finalmente existe $\lambda \in \mathbb{K}$ independiente de X tal que $\forall X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} X & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \lambda\ \det(X)$. Para $X = I_p$, se obtiene $\lambda = \det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$ y entonces

$$\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & C\end{pmatrix}.$$

Igualmente, la aplicación $Y \mapsto \det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ es una forma q-lineal alternada de los filas de Y y por lo tanto, existe $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $\forall Y \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & Y\end{pmatrix} = \mu\ \det(Y)$, luego $Y = I_q$ proporciona $\mu = \det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$ y entonces

$$\begin{gathered}\forall B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), \forall C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K}), \forall D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\\ \det\begin{pmatrix} B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C)\times\det\begin{pmatrix} I_p & D\\ 0 & I_q\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C),\end{gathered}$$

(suponiendo adquirido el valor de un determinante triangular que se puede obtener volviendo a la definición de un determinante e independientemente de todo cálculo por bloques).

$$\boxed{\forall (B,C,D) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_q(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix} B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C).}$$

Solución del ejercicio 2838 ▲001143

Comenzar con un poco de trabajo preparatorio : el cálculo del determinante de tamaño $(n-1)\times(n-1)$:

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc} x & & & & & & & \\ -1 & x & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & x \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right|$$

donde el bloque superior izquierdo es de tamaño $k\times k$. Desarrollar, comenzando con la primera línea, luego otra vez por la primera fila,... para encontrar que

$$\Gamma_k = x^k \times (-1)^{n-1-k}$$

Otro método : se encuentra el mismo resultado usando los determinantes por bloques :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right| = \det A \times \det C$$

¡Volver al ejercicio !
Contrariamente a la práctica usual, se desarrolla la columna con la menor cantidad de 0. Desarrollando con respecto a la última columna se obtiene :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_0 \begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & -1 & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^n a_1 - \begin{vmatrix} x & & & & \\ & -1 & x & & \\ & & -1 & x & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-3}a_{n-2} \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times \Gamma_k \quad + \quad (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1})\Gamma_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times x^k \times (-1)^{n-1-k} \quad + \quad (x+a_{n-1})x^{n-1}$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Solución del ejercicio 2840 ▲001145

---

1. Desarrollando con respecto a la primera columna encontramos la siguiente relación :
$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 3 \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$
Denotemos δ este último determinante (cuya matriz es de tamaño $n-1 \times n-1$). Se calcula desarrollando con respecto a la primera línea
$$\delta = (-1)^{n-2}(n-1)\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$
Entonces
$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2.$$
2. Probar la fórmula
$$\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$
por inducción para $n \geqslant 2$.
— **Inicio.** Para $n = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, entonces la fórmula es verdadera.
— **Herencia.** Se supone que la fórmula es verdadera para el rango $n-1$, es decir $\Delta_{n-1} = a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2$. Calcular Δ_n :
$$\begin{aligned} \Delta_n &= a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{por la primera pregunta} \\ &= a\Big(a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2\Big) - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{por la hipótesis de inducción} \\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - a^{n-2}(n-1)^2 = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2. \end{aligned}$$
Por lo tanto, la fórmula es verdadera en el rango n.
— **Conclusión.** Por el principio de inducción la fórmula es verdadera para todo entero $n \geqslant 2$.

Solución del ejercicio 2848 ▲002453

Denotemos V_n el determinante a calcular y $C_1, \ldots, C_n$ las columnas de la matriz correspondiente. Se van a realizar las operaciones siguientes sobre las columnas en iniciando en la última columna. C_n es reemplazado por $C_n - t_n C_{n-1}$, luego C_{n-1} es reemplazado por $C_{n-1} - t_n C_{n-2}$,... hasta C_2 que es reemplazado por $C_2 - t_n C_1$. Se obtiene por lo tanto
$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_1 - t_n & t_1^2 - t_1 t_n & \cdots & t_1^{n-1} - t_1^{n-2} t_n \\ 1 & t_2 - t_n & t_2^2 - t_2 t_n & \cdots & t_2^{n-1} - t_2^{n-2} t_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla con respecto a la última fila y se escribe $t_i^k - t_i^{k-1} t_n = t_i^{k-1}(t_i - t_n)$, para obtener :

$$V_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} t_1 - t_n & t_1(t_1 - t_n) & \cdots & t_1^{n-2}(t_1 - t_n) \\ t_2 - t_n & t_2(t_2 - t_n) & \cdots & t_2^{n-2}(t_2 - t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} - t_n & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Se utiliza la linealidad del determinante con respecto a cada una de las filas : se factoriza la primera fila por $t_1 - t_n$; la segunda por $t_2 - t_n$, ... Se obtiene

$$V_n = (-1)^{n-1}(t_1 - t_n)(t_2 - t_n) \cdots (t_{n-1} - t_n) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & \cdots & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Entonces

$$V_n = V_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j).$$

Si ahora se supone la fórmula conocida para V_{n-1}, es decir $V_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (t_j - t_i)$.

Entonces se tiene por inducción que

$$V_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = V_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i).$$

Solución del ejercicio 2854 ▲002578

Sean a, b, c de reales verificando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y P la matriz real 3×3 siguiente :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculemos el determinante de P.

$$\det P = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0.$$

2. Determinar los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ y $\operatorname{Im} P$.

$$\ker P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

se tiene

$$(x, y, z) \in \ker P \iff \begin{cases} a(ax + by + cz) = 0 \\ b(ax + by + cz) = 0 \\ c(ax + by + cz) = 0 \end{cases}$$

Por tanto, a, b y c no son simultáneamente nulas porque $a^2+b^2+c^2=1$, así

$$\ker P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ ax+by+cz=0\},$$

es el plano vectorial de ecuación $ax+by+cz=0$. La imagen de P es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generada por los vectores columna de la matriz P. Sabiendo que $\dim\ker P + \dim \operatorname{Im} P = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, se sabe que la dimensión de la imagen de P es igual a 1, es decir que la imagen es una recta vectorial. En efecto, los vectores columna de P son los vectores

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad a\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

el subespacio $\operatorname{Im} P$, es, por lo tanto la recta vectorial generada por el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

3. Sea $Q = I - P$, calcular P^2, PQ, QP y Q^2.

$$P^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3 \\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3 \\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2) \\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) \\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = P.$$

Car $a^2+b^2+c^2=1$. Si $Q = I-P$, se tiene

$$PQ = P(I-P) = PI - P^2 = P - P = 0, \qquad QP = (I-P)P = IP - P^2 = P - P = 0,$$

y

$$Q^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - IP - PI + P^2 = I - P - P + P = I - P = Q.$$

4. Caractericemos geométricamente P y Q. Se ha visto que el núcleo de P es igual al plano vectorial de ecuación $ax+by+cz=0$ y que su imagen era la recta vectorial generada por el vector (a,b,c). Por otro lado, se tiene $P^2 = P$, igualdad que caracteriza los proyectores, el endomorfismo de matriz P es, por lo tanto la proyección sobre $\operatorname{Im} P$ siguiendo la dirección $\ker P$. Sea $X \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$QX = 0 \iff IX - PX = 0 \iff PX = X \iff X \in \operatorname{Im} P,$$

así $\ker Q = \operatorname{Im} P$. Por otra parte,

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\dim \operatorname{Im} Q = 2$ y los vectores columna de Q verifican la ecuación $ax+by+cz=0$, así $\operatorname{Im} Q = \ker P$. La igualdad $Q^2 = Q$ prueba que Q es igualmente un proyector, es la proyección sobre $\operatorname{Im} Q$ dirigida por $\ker Q$.

Solución del ejercicio 2855 ▲002582

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculemos el determinante de A y determinar para qué valores de a la matriz es invertible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

   La matriz A es invertible si y solo si su determinante es no nulo, es decir si y solo si $1 + a^3 \neq 0$, lo que equivale a $a \neq -1$, pues $a \in \mathbb{R}$.

2. Calculemos A^{-1}, cuando A es invertible, es decir $a \neq -1$. Para esto se determina la comatriz $\tilde{A}$ de A. Se tiene

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

   se nota que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ y se tiene $A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1-a^3)I_3$, de donde

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 2856 ▲002753

1. El área $\mathscr{A}$ del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ es el valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, por lo tanto $\mathscr{A} = |ad - bc|$. Aquí se encuentra $\mathscr{A} = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$, donde abs designa la función de valor absoluto.

2. El volumen del paralelepípedo construido sobre tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores. Aquí

$$\mathscr{V} = \operatorname{abs}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{abs}\left(+1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = 4,$$

   donde se ha desarrollado con respecto a la primera línea.

3. Si un paralelepípedo se construye sobre tres vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyos coeficientes son enteros, entonces el volumen corresponde al determinante de una matriz con coeficientes enteros. Por lo tanto, es un entero.

Solución del ejercicio 2864 ▲003451

Notación : $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \text{ o } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si no.} \end{cases}$

1. $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.
2. $(a+b+c)^3$
3. $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$
4. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.
5. $-(a^3-b^3)^2$.
6. $\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$, donde $\alpha \neq \beta$ son las raíces de $X^2-aX+bc=0$.
   $(n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ si $\alpha=\beta$.
7. $a^{n-3}(a-b)\big(a^2+ab-2(n-2)b^2\big)$.
8. 1.
9. $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)$.
10. 0
11. $\varepsilon_n\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.
12. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Solución del ejercicio 2865 ▲003452

1. $-x(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)$.
2. $(x-a_1)\cdots(x-a_n)(x+a_1+\cdots+a_n)$.
3. $z(y-z)(x-y)\cdots(a-b)$.
4. $\dfrac{V(a,b,c)V(x,y,z)}{(a+x)\cdots(c+z)}$.

Solución del ejercicio 2866 ▲003453

3. $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

Solución del ejercicio 2867 ▲003454

1. Desarrollar.
2. (a) $\begin{cases} D(a-b,0,c-b)=(a-b)^n \\ D(a-c,b-c,0)=(a-c)^n \end{cases} \Rightarrow D(a,b,c)=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$.
   (b) $\det((a-b)I+bU)=(a-b)^n+nb(a-b)^{n-1}$.

Solución del ejercicio 2870 ▲003457

1. $M^2=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & n & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2=\varepsilon_{n-1}n^n$.
2.
3. $n^{n/2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}(n-1)(3n+2)\right)$.

Con la notación : $\varepsilon_n=\begin{cases} 1 & \text{si } n\equiv 0 \text{ o } 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si no.} \end{cases}$

Solución del ejercicio 2871 ▲003458

Polinomios de Chebyshev $\Rightarrow D=2^{(n-1)(n-2)/2}V(\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n)$.

Solución del ejercicio 2872 ▲003459

$$M=(x_i^{j-1})\times(C_k^{i-1}y_j^{k-i+1})\Rightarrow \det M=\begin{cases}0 & \text{si } k<n-1\\ \varepsilon_n C_{n-1}^0 C_{n-1}^1\cdots C_{n-1}^{n-1}V(x_1,\dots,x_n)V(y_1,\dots,y_n) & \text{si } k=n-1.\end{cases}$$

Con la notación : $\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{si } n\equiv 0 \text{ o } 1 \pmod 4\\ -1 & \text{si no.}\end{cases}$

Solución del ejercicio 2873 ▲003460

$A=\left(\frac{i^{j-1}}{(j-1)!}\right)\times\left(P^{(i-1)}(j)\right)\Rightarrow \det A=\varepsilon_n\left(a_{n-1}(n-1)!\right)^n$. Con la notación : $\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{si } n\equiv 0 \text{ o } 1 \pmod 4\\ -1 & \text{si no.}\end{cases}$

Solución del ejercicio 2874 ▲005362

Sea $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Denotemos Δ el determinante del enunciado.

Para x real, se establece $D(x)=\begin{vmatrix}-2x & x+b & x+c\\ b+x & -2b & b+c\\ c+x & c+b & -2c\end{vmatrix}$ (de manera que $\Delta=D(a)$). D es un polinomio de grado menor o igual que 2. El coeficiente de x^2 vale

$$-(-2c)+(b+c)+(b+c)-(-2b)=4(b+c).$$

Luego,

$$D(-b)=\begin{vmatrix}2b & 0 & -b+c\\ 0 & -2b & b+c\\ c-b & c+b & -2c\end{vmatrix}=2b(4bc-(b+c)^2)+2b(c-b)^2=0,$$

y por simetría de los roles de b y c, $D(-c)=0$. De lo anterior, se deduce que si $b\neq c$, $D(x)=4(b+c)(x+b)(x+c)$ (mismo si $b+c=0$ porque entonces D es un polinomio de grado menor o igual que 1 admitiendo al menos dos raíces distintas y por lo tanto, es el polinomio cero). Así, si $b\neq c$ (o por simetría de roles, si $a\neq b$ o $a\neq c$), se tiene : $\Delta=4(b+c)(a+b)(a+c)$. Solo un caso no ha sido estudiado todavía, a saber, el caso en el que $a=b=c$. En este caso,

$$D(a)=\begin{vmatrix}-2a & 2a & 2a\\ 2a & -2a & 2a\\ 2a & 2a & -2a\end{vmatrix}=8a^3\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=32a^3=4(a+a)(a+a)(a+a),$$

que demuestra la identidad propuesta en todos los casos (también se puede concluir señalando que, para a y b fijos, la función Δ es una función continua de c y se obtiene el valor de Δ, para $c=b$ haciendo tender c hacia b en la expresión de Δ ya conocido por $c\neq b$).

$$\boxed{\Delta=4(a+b)(a+c)(b+c).}$$

Solución del ejercicio 2875 ▲005363

Sea $P=\begin{vmatrix}X & a & b & c\\ a & X & c & b\\ b & c & X & a\\ c & b & a & X\end{vmatrix}$. P es un polinomio unitario de grado 4. Reemplazando C_1 por $C_1+C_2+C_3+C_4$ y por linealidad con respecto a la primera columna, se ve que P es divisible por $(X+a+b+c)$. Pero también,

reemplazando C_1 por $C_1-C_2-C_3+C_4$ o $C_1-C_2+C_3-C_4$ o $C_1+C_2-C_3-C_4$, se ve que P es divisible por $(X-a-b+c)$ o $(X-a+b-c)$ o $(X+a-b-c)$.
1er caso. Si los cuatro números $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ y $a+b-c$ son dos a dos distintos, P es unitario de grado 4 y divisible por los factores de cuatro grados 1 precedentes, es estos dos a dos primos entre sí. En este caso, $P=(X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c)$.
2o caso. Al menos dos de los cuatro números $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ y $a+b-c$ son iguales. Se denota entonces que $-a-b-c=a+b-c \Leftrightarrow b=-a$ y que $-a+b+c=a-b+c \Leftrightarrow a=b$. Por simetría de los roles, dos de cuatro números $-a-b-c$, $-a+b+c$, $a-b+c$ y $a+b-c$ son iguales si y solo si dos de los tres números $|a|$, $|b|$ o $|c|$ son iguales. Se concluye en este caso que la expresión de P previamente encontrada es aún válida por continuidad con respecto a a, b o c.

$$\boxed{P=(X+a+b+c)(X+a+b-c)(X+a-b+c)(X-a+b+c).}$$

Solución del ejercicio 2876 ▲005364

1. Para $n\geqslant 2$, se escribe $\Delta_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. En primer lugar, aparecen muchos 1.
Por esto, se realiza las transformaciones $C_1\leftarrow C_1-C_2$, luego $C_2\leftarrow C_2-C_3$, luego $\dots C_{n-1}=C_{n-1}-C_n$. Se obtiene
$$\Delta_n=\det(C_1-C_2,C_2-C_3,\dots,C_{n-1}-C_n,C_n)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$
Se hace entonces aparecer un determinante triangular constatando que $\det(L_1,L_2,\dots,L_n)=\det(L_1,L_2+L_1,\dots,L_{n-1}+L_1,L_n+L_1)$. Se obtiene
$$\Delta_n=\begin{vmatrix} -1 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}=(1-n)(-2)^{n-2}.$$
$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ \Delta_n=(1-n)(-2)^{n-2}.}$$

2. $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{sen}(a_i+a_j)=\mathrm{sen}\,a_i\cos a_j+\cos a_i\,\mathrm{sen}\,a_j$ y así si $C=\begin{pmatrix}\cos a_1\\ \cos a_2\\ \vdots\\ \cos a_n\end{pmatrix}$ y $S=\begin{pmatrix}\mathrm{sen}\,a_1\\ \mathrm{sen}\,a_2\\ \vdots\\ \mathrm{sen}\,a_n\end{pmatrix}$,
se tiene $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $C_j=\cos a_jS+\mathrm{sen}\,a_jC$. En particular, $\mathrm{vect}(C_1,\dots,C_n)\subset\mathrm{vect}(C,S)$ y el rango de la matriz propuesta es menor o igual a 2. Entonces,

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \det(\operatorname{sen}(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n=2$, $\det(\operatorname{sen}(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant 2} = \operatorname{sen}(2a_1)\operatorname{sen}(2a_2) - \operatorname{sen}^2(a_1+a_2)$.

3. El ejercicio solo tiene sentido si el formato n es par. Se define $n=2p$, donde p es un entero natural no nulo.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(para } 1\leqslant j\leqslant p,\ C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j})$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \text{(por linealidad con respecto a las columnas } C_1,\ C_2, \ldots,\ C_p)$$

$$= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{(para } p+1\leqslant i\leqslant 2p,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).$$

y $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2-b^2)^p$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{2p} = (a^2-b^2)^p.}$$

4. La primera columna se resta de la suma de todas las demás y el resultado es

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5. Para $1\leqslant i\leqslant p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, \ldots, C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, \ldots, C_{n+i-1}^{p-1}).$$

Se reemplaza así en este orden L_p por $L_p - L_{p-1}$, luego L_{p-1} por $L_{p-1} - L_{p-2}$ luego ... L_2 por $L_2 - L_1$, para obtener, con notaciones obvias

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Así, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \cdots = \det(A_1) = 1$.

6. Desarrollando a lo largo de la última fila, se obtiene :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

donde $\Delta_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array}\right| = (-1)^k X^k$ y entonces

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ D_n = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right).}$$

Solución del ejercicio 2877 ▲005365

Si dos de los b_j son iguales, $\det(A)$ es nulo porque dos de sus columnas son iguales. Se supone ahora que los b_j son dos a dos distintos. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n números complejos tales que $\lambda_n \neq 0$. Se tiene

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n} \det(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j) = \det B,$$

donde la última columna de B es de la forma $(R(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, con $R = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X + b_j}$. Se toma $R = \frac{(X - a_1) \cdots (X - a_{n-1})}{(X + b_1) \cdots (X + b_n)}$.

R así definida es irreducible (pues $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i \neq -b_j$). Los polos de R son simples y la parte entera de R es nula. La descomposición en elementos simples de R tiene la forma esperada. Para esta elección de R, ya que $R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$, se obtiene expandiendo a lo largo de la última columna

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

con $$\lambda_n = \lim_{z \to -b_n} (z + bn) R(z) = \frac{(-b_n - a_1) \cdots (-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1) \cdots (-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n) \cdots (a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1) \cdots (b_n - b_{n-1})}.$$

Entonces $$\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \cdots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \cdots (a_n + b_n)..(a_2 + b_n)(a_1 + b_n)} \Delta_{n-1}.$$

Reiterando y teniendo en cuenta que $\Delta_1 = 1$, obtenemos

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1, \dots, a_n) \mathrm{Van}(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}.}$$

En el caso particular en que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$, denotando H_n el determinante (de HILBERT) a calcular : $H_n = \dfrac{\mathrm{Van}(1,2,\ldots,n)^2}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)}$. Pero,

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}k!}{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^2},$$

y por otra parte,

$$\mathrm{Van}(1,2,\ldots,n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}k!.$$

Así,

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ H_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}k!\right)^3}{n!^2\times\prod_{k=1}^{2n}k!}.}$$

Solución del **ejercicio 2878** ▲005366

Se procede por inducción en $n\geqslant 1$.

• Para $n=1$, es claro.

• Sea $n\geqslant 1$. Se supone que todo determinante Δ_n de tamaño n y del tipo del enunciado sea divisible por 2^{n-1}. Sea Δ_{n+1} un determinante de tamaño $n+1$, del tipo del enunciado. Si todos los coeficientes $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} son iguales a 1, ya que $n+1\geqslant 2$, Δ_{n+1} tiene dos columnas iguales y por lo tanto, es nulo. En este caso, Δ_{n+1} es de hecho divisible por 2^n. Si no, vamos a cambiar poco a poco -1 en 1. Sea (i,j) un par de índices como $a_{i,j}=-1$ y Δ'_{n+1} el determinante cuyos coeficientes son todos iguales a los de Δ_{n+1} excepto el coeficiente fila i y columna j que es igual a 1.

$$\Delta_{n+1}-\Delta'_{n+1} = \det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n)-\det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n) = \det(C_1,\ldots,C_j-C'_j,\ldots,C_n),$$

donde $C_j - C'_j = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ -2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (-2 en línea i). Desarrollando este último determinante según su j-ésima columna, se obtiene :

$$\Delta_{n+1}-\Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

donde Δ_n es un determinante de tamaño n y del tipo del enunciado. Por hipótesis de recurrencia, Δ_n es divisible por 2^{n-1} y entonces $\Delta_{n+1}-\Delta'_{n+1}$ es divisible por 2^n. Así, cambiando el -1 en 1 unos después de los otros, se obtiene

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Este último determinante es nulo, el resultado es demostrado por recurrencia.

Solución del ejercicio 2879 ▲005369

1a solución.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\cdots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n} \text{ (pues } 1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\cdots+n+\sigma(n) = 2(1+2+\cdots+n)\in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A\end{aligned}$$

2a solución. Se multiplica por -1 las rectas 2, 4, 6,... luego las columnas 2, 4, 6,... Se obtiene $\det B = (-1)^{2p}\det A = \det A$ (donde p es el número de filas o columnas con un número par).

Solución del ejercicio 2880 ▲005371

• Sea $(k,l)\in [\![1,n]\!]^2$. El coeficiente fila k, columna l de P^2 es

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Por tanto, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2\in n\mathbb{Z}$. Pero, $0\leqslant k+l-2\leqslant 2n-2 < 2n$ y entonces, $k+l-2\in n\mathbb{Z}\Leftrightarrow k+l-2\in\{0,n\}\Leftrightarrow k+l=2$ o $k+l=n+2$. En este caso, $\alpha_{k,l}=n$. Si no,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Así, $P^2 = n\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$.

• Sea $(k,l)\in [\![1,n]\!]^2$. El coeficiente fila k, columna l de $P\overline{P}$ es

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Por tanto, $\omega^{k-l} = 1\Leftrightarrow k-l\in n\mathbb{Z}$. Pero, $-n < -(n-1)\leqslant k-l\leqslant n-1 < n$ y entonces $k-l\in n\mathbb{Z}\Leftrightarrow k=l$. En este caso, $\beta_{k,l}=n$. Si no, $\beta_{k,l}=0$. Así, $P\overline{P} = nI_n$ (lo que demuestra que $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$). Calculemos en fin PA. Primero es necesario escribir correctamente los coeficientes de A. El coeficiente fila k, columna l de A puede ser escrito a_{l-k+1} si se adopta la convención conveniente $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$ y más generalmente para todo entero relativo k, $a_{n+k}=a_k$. Con esta convención de escritura, el coeficiente línea k, columna l de PA vale

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^{l} \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Después se reordena esta suma para que comience por a_1.

$$\begin{aligned}\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{v=l-n+1}^{0}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} \text{ (en posant } w=v+n)\\ &= \sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v + \sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w)}a_w\\ &= \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v = \omega^{(k-1)(l-1)}\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\end{aligned}$$

(el punto clave del cálculo anterior es que las sucesiones (a_k) y (ω^k) tienen el mismo periodo n, lo que se traduce por $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)}a_v$). Para k elemento de $[\![1,n]\!]$, se escribe entonces $S_k = \sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$. Se ha demostrado que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$.
Por linealidad con respecto a cada columna, se tiene entonces

$$\det(PA) = \det(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\times\det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leqslant k,l\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\times\det P.$$

Entonces $(\det P)(\det A) = \left(\prod_{k=1}^{n}S_k\right)\det P$ y finalmente, ya que $\det P\neq 0$,

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).}$$

Por ejemplo, para $n=3$, $\det A = (a_1+a_2+a_3)(a_1+ja_2+j^2a_3)(a_1+j^2a_2+ja_3)$.

Solución del ejercicio 2881 ▲005372

Siempre se tiene $A\times{}^t\mathrm{com}A = (\det A)I_n$ y entonces

$$(\det A)(\det(\mathrm{com}A)) = (\det A)(\det({}^t\mathrm{com}A)) = \det(\det A\, I_n) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A\neq 0$, se obtiene $\det(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-1}$.
• Si $\det A = 0$, entonces $A^t\mathrm{com}A = 0$ y $\mathrm{com}A$ no es invertible porque si no, $A=0$, luego $\mathrm{com}A = 0$, lo que es absurdo. Entonces, $\det(\mathrm{com}A) = 0$. Así, en todos los casos,

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\mathrm{com}A) = (\det A)^{n-1}.}$$

• Si $\mathrm{rg}A = n$, entonces $\mathrm{com}A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (pues $\det(\mathrm{com}A)\neq 0$) y $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = n$.
• Si $\mathrm{rg}A\leqslant n-2$, entonces todos los menores de tamaño $n-1$ son nulos y $\mathrm{com}A = 0$. En este caso, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) = 0$.
• Si $\mathrm{rg}A = n-1$, existe un menor de tamaño $n-1$ no nulo y $\mathrm{com}A\neq 0$. En este caso, $1\leqslant\mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leqslant n-1$. Más precisamente,

$$\begin{aligned}A^t\mathrm{com}A = 0 &\Rightarrow \mathrm{com}A^tA = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}({}^tA)\subset\ker(\mathrm{com}A)\\ &\Rightarrow \dim(\ker(\mathrm{com}A))\geqslant\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}A)\leqslant 1,\end{aligned}$$

y finalmente si $\operatorname{rg} A = n-1$, $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = 1$.

Solución del ejercicio 2882 ▲005373

$$(\det A)' = \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(k),k}\dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^{n} \det(C_1,\dots,C'_k,\dots,C_n)$$

Aplicaciones.

1. Sea $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$. Δ_n es un polinomio cuya derivada es, de acuerdo a lo anterior, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$, donde δ_k es el determinante deducido de Δ_n reemplazando su k-ésima columna por el k-ésimo vector de la base canónica de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Desarrollando δ_k, con respecto a su k-ésima columna, se obtiene $\delta_k = \Delta_{n-1}$ y entonces $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$. Luego, se tiene $\Delta_1 = X+1$, luego $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X, \dots$ Demostrar por recurrencia que para $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$.
   Es cierto para $n = 1$ después, si para $n \geqslant 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$, entonces $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ y, por integración, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Pero, ya que $n \geqslant 1$, se tiene $n+1 \geqslant 2$ y $\Delta_{n+1}(0)$ es un determinante con al menos dos columnas idénticas. Así, $\Delta_{n+1}(0) = 0$, lo que demuestra que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$. El resultado es demostrado por inducción.
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n = x^n + nx^{n-1}.}$$
2. Sea $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$. $\Delta_n = \det(a_1e_1 + xC, \dots, a_ne_n + xC)$, donde e_k es el k-ésimo vector de la base canónica de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ y C es la columna cuyos componentes son iguales a 1. Por linealidad con respecto a cada columna, Δ_n es suma de 2^n determinantes, pero desde que C aparece dos veces, el determinante correspondiente es cero. Entonces, $\Delta_n = \det(a_1e_1,\dots,a_ne_n) + \sum \det(a_1e_1,\dots,xC,\dots,a_ne_n)$. Esto demuestra que Δ_n es un polinomio de grado menor o igual que 1. La fórmula de TAYLOR proporciona entonces : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta'_n(0)$. Inmediatamente,, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^{n} a_k = \sigma_n$, luego $\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1e_1,\dots,C,\dots,a_ne_n) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k} a_i = \sigma_{n-1}$. Entonces, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Solución del ejercicio 2883 ▲005374

1. Para el primer determinante, se resta la primera columna de cada una de las otras y se tiene un determinante triangular inferior cuyo valor es $(-1)^{n-1}$. Para el segundo, se suma a la primera columna la suma de todas las demás, luego se escribe $(n-1)$ en factores de la primera columna y encontramos el primer determinante. Por lo tanto, el segundo determinante es $(-1)^{n-1}(n-1)$.
2. Para (i,j) elemento de $[\![1,n]\!]^2$, $(i+j-1)^2 = j^2+2(i-1)j+(i-1)^2$. Entonces,

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ C_j = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n}+2j(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n}+((i-1)^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Las columnas de la matriz son, por lo tanto elementos de $\mathrm{vect}((1)_{1\leqslant i\leqslant n},(i-1)_{1\leqslant i\leqslant n},((i-1)2)_{1\leqslant i\leqslant n})$ que es de dimensión menor o igual que 3 y la matriz propuesta tiene rango menor o igual a 3. Entonces, si $n\geqslant 4$, $\Delta_n = 0$.

Entonces queda por calcular $\Delta_1 = 1$, luego $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7$, luego $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225 - 256)-4(100-144)+9(64-81) = -31+176-153 = -8$.

3.

$$\Delta_n = \det(C_1,\ldots,C_n) = \det(C_1+\cdots+C_n,C_2,\ldots,C_n) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix},$$

por linealidad con respecto a la primera columna. Después, a las líneas números $2,\ldots,n$, se resta la primera fila para obtener :

$$\Delta_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

4. Por n linealidad, D_n es suma de 2^n determinantes. Pero en esta suma, un determinante es nulo en cuanto contiene al menos dos columnas de x. Así, poniendo $\Delta_n = \det(C_1+xC,\ldots,C_n+xC)$, donde $C_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $C = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$, se obtiene :

$$\Delta_n = \det(C_1,\ldots,C_n)+\sum_{k=1}^{n}\det(C_1,\ldots,C_{k-1},xC,C_{k+1},\ldots,C_n),$$

lo que demuestra que Δ_n es un polinomio de grado menor o igual que 1. Se define $\Delta_n = AX+B$ y $P = \prod_{k=1}^{n}(a_k-X)$. Cuando $x=-b$ o $x=-c$, el determinante propuesto es triangular y se calcula por lo tanto inmediatamente. Entonces :

1er caso. Si $b \neq c$. $\Delta_n(-b) = P(b)$ y $\Delta_n(-c) = P(c)$ proporciona el sistema $\begin{cases} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{cases}$ y entonces $A = -\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ y $B = \dfrac{cP(b) - bP(c)}{c - b}$. Así,

$$\boxed{\text{si } b \neq c,\ \Delta_n = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}x + \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} \text{ donde } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).}$$

2o caso. Si $b = c$, la expresión obtenida fijando x y b es claramente una función continua de c porque es polinomial en c. Entonces se obtiene el valor de Δ_n, cuando $b = c$ haciendo tender c hacia b en la ya conocida expresión de Δ_n, para $b \neq c$. Ahora, cuando b tiende a c, $-\dfrac{P(c) - P(b)}{c - b}$ tiende a $-P'(b)$ y

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c - b)P(c)}{c - b},$$

tiende hacia $-bP'(b) + P(b)$.

$$\boxed{\text{si } b = c,\ \Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ donde } P = \prod_{k=1}^{n}(a_k - X).}$$

5. $\Delta_2 = 3$ y $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Después, para $n \geqslant 4$, se obtiene al expandir a lo largo de la primera columna :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

De donde, para $n \geqslant 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ y la sucesión $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n \geqslant 3}$ es constante. Así, para $n \geqslant 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ y así la sucesión $(\Delta_n)_{n \geqslant 2}$ es aritmética de razón 1. Se deduce que, para $n \geqslant 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2) \times 1 = n + 1$ (también se puede resolver la ecuación característica de la recurrencia doble).

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = n + 1.}$$

Solución del ejercicio 2884 ▲005376

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0$ y el sistema es de CRAMER en x_1, x_2 y x_4. Se observa así como el sistema es homogéneo de rango 3 y así como el conjunto de soluciones F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ de dimensión $5 - 3 = 2$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es $F = \{(3x_3+3x_5, -x_3-2x_5, x_3, 0, x_5),\ (x_3,x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(e_1,e_2)$, donde $e_1 = (3,-1,1,0,0)$ y $e_2 = (3,-2,0,0,1)$ y, ya que $\dim F = 2$, una base de F es (e_1,e_2).

Solución del ejercicio 2885 ▲005637

Sea n un entero natural no nulo. Se denota $L_0, L_1, \dots, L_n$ las rectas del determinante $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$
En la recta número n del determinante $\text{Van}(x_0,\dots,x_n)$, se agrega una combinación lineal de las rectas anteriores del tipo $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i L_i$. El valor del determinante no ha cambiado, pero su última recta se escribe ahora $(P(x_0),\dots,P(x_n))$, donde P es un polinomio unitario de grado n. Se escoge entonces para P (la elección de los λ_i equivale a la elección de P) el polinomio $P = \prod_{i=0}^{n-1}(X-x_i)$ (que es unitario de grado n). La última recta se escribe así $(0,\dots,0,P(x_{n+1}))$ y desarrollando este determinante a lo largo de esta última línea, se obtiene la relación de recurrencia :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{Vanq}(x_0,\dots,x_n) = P(x_n)\text{Vanq}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)\text{Vanq}(x_0,\dots,x_{n-1}).$$

considerando el hecho $\text{Vanq}(x_0) = 1$, entonces se obtiene por inducción

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n,\ \text{Vanq}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i).}$$

En particular, $\text{Vanq}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} \neq 0$ si y solo si los x_i son dos a dos distintos.

Solución del ejercicio 2886 ▲005638

Si dos de los a_i son iguales o dos de b_j son iguales, C_n es nulo porque C_n tiene ya sea dos filas o dos columnas idénticas. Se supone ahora que el a_i son dos a dos distintos, al igual que los b_j (y siempre que las sumas a_i+b_j son todos no nulos). Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se denota $L_1,\dots,L_{n+1}$ las rectas de C_{n+1}. Se efectúa en C_{n+1} la transformación $L_{n+1} \leftarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i$, con $\lambda_{n+1} \neq 0$. Se obtiene $C_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} D_{n+1}$, donde D_{n+1} es el determinante obtenido reemplazando la última línea de C_{n+1} por la fila $(R(b_1),\dots,R(b_{n+1}))$, con $R = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{X+a_i}$. Se toma $R = \frac{(X-b_1)\cdots(X-b_n)}{(X+a_1)\cdots(X+a_{n+1})}$.
• Porque los $-a_i$ son distintos de b_j, R es irreducible.
• Porque los a_i son dos a dos distintos, los polos de R son simples.
• Porque $\text{grad}((X-b_1)\cdots(X-b_n)) < \text{grad}((X+a_1)\cdots(X+a_{n+1}))$, la parte entera de R es nula. R admite así efectivamente una descomposición en elementos simples de la forma $R = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{X+a_i}$, donde $\lambda_{n+1} \neq 0$.
Con esta elección de los λ_i, la última fila de D_{n+1} se escribe $(0,\dots,0,R(b_{n+1}))$ y en desarrollando D_{n+1} siguiendo su última fila, se obtiene la relación de recurrencia :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} R(b_{n+1}) C_n.$$

Calculemos λ_{n+1}. Porque $-a_{n+1}$ es un polo simple de R,

$$\lambda_{n+1} = \lim_{x\to -a_{n+1}} (x+a_{n+1})R(x) = \frac{(-a_{n+1}-b_1)\cdots(-a_{n+1}-b_n)}{(-a_{n+1}+a_1)\cdots(-a_{n+1}+a_n)} = \frac{(a_{n+1}+b_1)\cdots(a_{n+1}+b_n)}{(a_{n+1}-a_1)\cdots(a_{n+1}-a_n)}.$$

Se deduce que

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}}R(b_{n+1}) = \frac{(a_{n+1}-a_1)\cdots(a_{n+1}-a_n)}{(a_{n+1}+b_1)\cdots(a_{n+1}+b_n)}\frac{(b_{n+1}-b_1)\cdots(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}+a_1)\cdots(b_{n+1}+a_n)}$$

luego la relación de recurrencia

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\prod_{i=1}^{n}(b_{n+1}-b_i)}{\prod_{i=n+1 \text{ o } j=n+1}(a_i+b_j)}C_n.$$

considerando el hecho $C_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, se obtiene por inducción

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\operatorname{Vanq}(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\operatorname{Vanq}(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

(incluso en casos especiales analizados al inicio del ejercicio). Cálculo del determinante de HILBERT. Se está en el caso especial donde $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$. En primer lugar,

$$\operatorname{Vanq}(1,\ldots,n) = \prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right) = \prod_{j=2}^{n}(j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1}i!.$$

Después $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n)!}{i!} =$ y entonces

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n}i!\right)^4}{n!^2\prod_{i=1}^{2n}i!}.}$$

Solución del ejercicio 2887 ▲005640

Se denotan $C_1,\ldots,C_n$ las columnas del determinante del enunciado, entonces ponemos $C = (\cos(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ y $S = (\operatorname{sen}(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$. Para todo $j \in [\![1,n]\!]$, $Cj = \operatorname{sen}(a_j)C + \cos(a_j)S$. Así, las columnas de la matriz propuesta están en $\operatorname{vect}(C,S)$ que es un espacio de dimensión a lo sumo dos y por lo tanto,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 3,\ \det\left(\operatorname{sen}(a_i+a_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n = 2$, se tiene $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(2a_1) & \operatorname{sen}(a_1+a_2) \\ \operatorname{sen}(a_1+a_2) & \operatorname{sen}(2a_2) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(2a_1)\operatorname{sen}(2a_2) - \operatorname{sen}^2(a_1+a_2).$

Solución del ejercicio 2888 ▲005641

Sean los vectores columna $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ y $U = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = A + b_jU$. Las columnas de la matriz propuesta se encuentran en un espacio de dimensión a lo sumo dos y por lo tanto,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 3,\ \det\left(a_i+b_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n=2$, se tiene $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1) = a_1b_2+a_2b_1-a_1b_1-a_2b_2 = (a_2-a_1)(b_1-b_2)$.

Solución del ejercicio 2889 ▲005642

Para todo $j \in [\![1,n]\!]$,

$$C_j = ((a+i+j)^2)_{1\leqslant i\leqslant n} = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2(a+j)(i)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Las columnas de la matriz propuesta se encuentran en un espacio de dimensión a lo sumo tres y por lo tanto,

$$\boxed{\text{si } n\geqslant 4,\ \det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

El cálculo es fácil para $n\in\{1,2,3\}$.

Solución del ejercicio 2890 ▲005643

$\dfrac{x_j-x_i}{j-i}$ es ya un racional estrictamente positivo. Pongamos $P_i=1$ si $i=1$, y si $i\geqslant 2$, $P_i = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-(i-2))}{(i-1)!}$. porque, para $i\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{grad}(P_i)=i-1$, se sabe que la familia $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es una base de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. Además, para $i\geqslant 2$, $P_i - \dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ es de grado $i-2$ y por lo tanto, es una combinación lineal de P_1, $P_2,\ldots,P_{i-2}$ o aún, para $2\leqslant i\leqslant n$, la fila i del determinante $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ es suma de la fila $\left(\dfrac{x_j^{i-1}}{(i-1)!}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ y de una combinación lineal de las rectas que la preceden. Comenzando desde la última fila y subiendo a la segunda, se resta la combinación lineal correspondiente de las filas anteriores sin cambiar el valor del determinante. Se obtiene por linealidad con respecto a cada recta

$$\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!}\mathrm{Vanq}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i} = \det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{N}^*.}$$

Solución del ejercicio 2891 ▲005644

El coeficiente fila j, columna k, $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$, de la matriz A vale a_{k-j}, con la convención : si $-(n-1)\leqslant$

$u \leqslant -1$, $a_u = a_{n+u}$. El coeficiente línea j, columna k, $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, de la matriz $A\Omega$ vale

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{n} a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)} &= \sum_{v=-(j-1)}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} + \sum_{v=0}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} \\
&= \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \text{ (pues } a_{v+n} = a_v \text{ y } \omega^n = 1) \\
&= \sum_{u=n-j+1}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \\
&= \omega^{(j-1)(k-1)} \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.
\end{aligned}$$

Para $k \in [\![1,n]\!]$, se escribe $S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}$. El coeficiente fila j, columna k de $A\Omega$ por lo tanto vale $\omega^{(j-1)(k-1)}S_k$. Pasando al determinante, se deduce que :

$$\det(A\Omega) = \det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}S_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)\det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k es en factor de la columna k) o aún $(\det A)(\det\Omega) = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)(\det\Omega)$. En fin, Ω es la matriz de VANDERMONDE de raíces n-ésima de la unidad y es, por lo tanto invertible ya que estos son dos a dos distintos. Así $\det\Omega \neq 0$ y luego de la simplificación se tiene

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} S_k, \text{ donde } S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.}$$

Por ejemplo, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = S_1S_2S_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$, donde $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Se proporcionará un cálculo mucho más simple en el apartado de « Reducción ».

Solución del ejercicio 2892 ▲005645

1. $d = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$ es derivable en $\mathbb{R}$ como una combinación lineal de productos de funciones derivables en $\mathbb{R}$ y además

$$\begin{aligned}
d' &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n})' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(1),1}\cdots a'_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a'_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(C_1,\dots,C_i',\dots,C_n) \text{ (donde } C_1,\dots,C_n \text{ son las columnas de la matriz).}
\end{aligned}$$

2. **1a solución.** De acuerdo con lo anterior, la función d_n es derivable en $\mathbb{R}$ y para $n \geqslant 2$ y x real, se tiene

$$d_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x+1 & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix} \text{(la columna particular es la columna } i\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_{n-1}(x) \text{ (desarrollando el } i\text{-ésimo determinante con respecto a su } i\text{-ésima columna)}$$

$$= nd_{n-1}(x).$$

En resumen, $\forall n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = nd_{n-1}(x)$. Por otra parte $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_1(x) = x+1$ y $\forall n \geqslant 2$, $d_n(0) = 0$ (determinante que tiene dos columnas idénticas). Demostrar entonces por inducción que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

• Es cierto para $n = 1$.

• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^n + nx^{n-1}$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}$,

$$d_{n+1}(x) = d_{n+1}(0) + \int_0^x d_{n+1}'(t)\,dt = (n+1)\int_0^x d_n(t\,dt) = x^{n+1} + (n+1)x^n.$$

Se ha demostrado que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = x^n + nx^{n-1}.}$$

2a solución. d_n es claramente un polinomio de grado n unitario. Para $n \geqslant 2$, ya que $dn(0) = 0$ y que $d_n' = nd_{n-1}$, 0 es raíz de $d_n, d_n', \ldots, d_n^{(n-2)}$ y es, por lo tanto raíz de orden $n-1$ al menos de d_n. En fin, $d_n(-n) = 0$ porque la suma de las columnas del determinante obtenido es cero. Finalmente, $\forall n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^{n-1}(x+n)$, lo que es aún cierto para $n = 1$.

Se puede obtener una variante con conocimiento sobre la reducción.

Solución del ejercicio 2893 ▲005646

Se efectúa en la matriz $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ las transformaciones : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$ (donde $i^2 = -1$) sin modificar el valor del determinante. Se obtiene $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix}$. Luego realizando las transformaciones : $\forall j \in [\![n+1,2n]\!]$, $L_j \leftarrow L_j - iL_{j-n}$, tenemos

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{pmatrix} = \det(A+iB) \times \det(A-iB).$$

Como las matrices A y B son reales, $\det(A-iB) = \overline{\det(A+iB)}$ y entonces

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A+iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Solución del ejercicio 2894 ▲005647

Si D es invertible, un cálculo de bloque proporciona

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ CD-DC & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ (pues } C \text{ y } D \text{ conmutan)}$$

y por lo tanto, ya que

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\times\det D\times\det D^{-1} \\ &= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y que $\det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$, se tiene $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$ (si C y D conmutan). Si D no es invertible, $\det(D-xI)$ es un polinomio en x de grado n y por lo tanto, solo se anula un número finito de veces. Así, la matriz $D-xI$ es invertible excepto quizás por un número finito de valores de x. Por otra parte, para todo valor de x, las matrices C y $D-xI$ conmutan y de lo anterior, para todos los valores de x excepto tal vez por un número finito, se tiene

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A(D-xI)-BC).$$

Estas dos expresiones son nuevamente polinomios en x que por lo tanto coinciden en una infinidad de valores de x y por lo tanto, son iguales. Estos dos polinomios toman en particular el mismo valor en 0 y se ha demostrado que

$$\text{si } C \text{ y } D \text{ conmutan, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC).$$

Solución del ejercicio 2895 ▲005649

Desarrollando a lo largo de la última columna, se obtiene

$$\det(A-xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n - x \end{vmatrix} = (-x)^n(a_n-x) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k\Delta_k$$

donde $\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \ldots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \cdots & \times & -x & \times & \cdots & \ldots & \times \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-x)^k 1^{n-k} = (-x)^k$ (determinante por bloques)

Finalmente,

$$\det(A - xI_n) = (-x)^n(a_n - x) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k+1} a_k (-x)^k = (-1)^{n+1}\left(x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).$$

Solución del **ejercicio 2896** ▲005650

1. Sin modificar el valor de $\det A$, se realiza las transformaciones : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2n+1-j}$. Se obtiene entonces por linealidad del determinante con respecto a cada una de las n primeras columnas
$$\det A = (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$
Luego se realiza las transformaciones : $\forall i \in [\![n+1,2n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_{2n+1-i}$ y por la linealidad del determinante con respecto al n últimas líneas, se obtiene
$$\det A = (a+b)^n(a-b)^n = (a^2-b^2)^n.$$
2. Este determinante tiene dos columnas iguales y por lo tanto, es nulo.
3. Se resta la primera columna de todas las demás y se tiene un determinante triangular : $D_n = (-1)^{n-1}$. Para el segundo determinante, sumamos las últimas $n-1$ columnas a la primera y luego ponemos $n-1$ en factor de la primera columna y se recae sobre el determinante precedente. Se obtiene : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.
4. Se agregan las $n-1$ últimas columnas a la primera luego se escribe $a+(n-1)b$ como factor de la primera columna. Se obtiene
$$D_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \ldots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

Luego se resta la primera fila de todas las demás y se tiene

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.}$$

Solución del ejercicio 2897 ▲006885

---

1. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$. Entonces $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7\times 4 - 11\times(-8) = 116$.
2. Se van a ver diferentes métodos para calcular los determinantes.
   Primer método. *Regla de Sarrus.*
   Para la matriz 3×3 existe una fórmula que puede calcular directamente el determinante.
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$
   Entonces
   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1\times 4\times 21 + 0\times 15\times 5 + 3\times 6\times 6 - 5\times 4\times 6 - 6\times 15\times 1 - 3\times 0\times 21 = -18.$$
   ¡Cuidado ! La regla de Sarrus solo se aplica a matrices 3×3.
3. **Segundo método.** *Se lleva a una matriz diagonal o triangular.*
   Si en una matriz se cambia una línea L_i en $L_i - \lambda L_j$, entonces el determinante es aún el mismo. Lo mismo con las columnas.
   $$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1\times 4\times(-\tfrac{3}{2}) = -6.$$
   Se ha utilizado el hecho que el determinante de una matriz diagonal (o triangular) es el producto de los coeficientes de la diagonal.
4. **Tercer método.** *Desarrollo con respecto a una línea o una columna.* Se va a desarrollar con respecto a la segunda columna.
   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-0)\times\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3)\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3\times 7 - 1\times 7 = 14.$$

A menudo comenzamos simplificando la matriz mostrando un máximo de 0 para las operaciones elementales en filas y columnas. Luego expandimos eligiendo la fila o la columna que tiene más 0.

5. Se hacen aparecer 0 en la primera columna luego se desarrolla con respecto a esta columna.

$$\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el determinante 3×3 se hecho aparecer de los 0 en la primera columna, luego se desarrolla.

$$-\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96.$$

Así $\Delta = 96$.

6. La matriz ya tiene muchos 0's pero se pueden mostrar más en la última columna, y luego expandir con respecto a la última columna. columna, y luego expandir con respecto a la última columna

$$\Delta' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla este último determinante con respecto a la primera columna :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

7. Siempre el mismo método, se hacen aparecer los 0's en la primera columna, luego expandimos con respecto a esta columna.

$$\Delta'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla con respecto a la segunda columna :

$$\Delta'' = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12.$$

Solución del ejercicio 2898 ▲006886

1. Por la regla de Sarrus :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

2. Se desarrolla con respecto a la segunda fila que contiene solo un coeficiente no nulo y se calcula el determinante 3×3 por la regla de Sarrus :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

3.

$$\Delta_3 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla con respecto a la primera columna :

$$\Delta_3 = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

4. El determinante es lineal con respecto a cada una de sus filas y también cada una de sus columnas. Por ejemplo, los coeficientes de la primera fila son todos múltiplos de 5, por lo tanto

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Se hace lo mismo con la tercera línea :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Y en fin los coeficientes la primera columna son los múltiplos de 2 y aquellos de la tercera columna son los múltiplos de 7, por lo tanto :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 2 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Los coeficientes son más razonables ! Se hace $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ y $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, para obtener :

$$\Delta_4 = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times 56 = 7840.$$

5.
$$\Delta_5 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Se hacen entonces las operaciones siguientes sobre las columnas : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ y $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$, para obtener una última fila que sea fácil de expandir :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc - 4a^2).$$

6. Se hace primeramente las operaciones $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ y $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ y se desarrolla con respecto a la primera línea :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}.$$

El primero determinante a calcular se desarrolla con respecto a la segunda columna y el segundo determinante con respecto a la primera columna :

$$\Delta_6 = (-2) \times a \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times b \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2.$$

7. Intercambiando filas y columnas para reducir a una matriz diagonal por bloques. Recordar que cuando se intercambian dos filas (o dos columnas) entonces el determinante cambia de signo. Recogeremos los ceros. Se comienza intercambiando las columnas C_1 y C_3 : $C_1 \leftrightarrow C_3$:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Luego intercambiamos las filas L_1 y L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$\Delta_7 = + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

La matriz tiene la forma de una matriz diagonal por bloques y su determinante es el producto de los determinantes.

$$\Delta_7 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31) \times (-6) = 186.$$

Solución del ejercicio 2899 ▲006887

1. Se retira la primera columna a todas las otras columnas

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2-a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla con respecto a la última fila :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1}a_1 \begin{vmatrix} a_2-a_1 & & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_2-a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_1(a_2-a_1)^{n-1}.$$

Donde se reconoce el determinante de una matriz triangular superior. Entonces

$$\Delta_1 = a_1(a_1-a_2)^{n-1}.$$

2. Se va a transformar la matriz correspondiente en una matriz triangular superior, se comienza reemplazando la fila L_2 por $L_2 - L_1$ (solo se denotan los coeficientes no nulos) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & -1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Después se reemplaza la recta L_3 por $L_3 - L_2$ (cuidado se trata de la nueva línea L_2) y se continua así sucesivamente hasta $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ (n es el tamaño de la matriz subyacente) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & (-1)^n \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cuidado con el último reemplazo $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ ligeramente diferente y que conduce al determinante de una matriz triangular : :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & (-1)^n \\ & & & & 0 & 1-(-1)^n \end{vmatrix} = 1-(-1)^n.$$

En conclusión $\Delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

3. Se retira la columna C_1 en las otras columnas C_i, para hacer aparecer los 0's :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & & \cdots & -b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}.$$

Se reemplaza luego L_1 por $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$ (o lo que es lo mismo : hacer las operaciones $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, luego $L_1 \leftarrow L_1 + L_3, \ldots$ cada una de estas operaciones hace aparecer un 0 en la primera fila) para obtener una matriz triangular inferior :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} na+b & 0 & & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}.$$

Solución del ejercicio 2900 ▲001163

---

1. Se observa que como el sistema es homogéneo (es decir, los coeficientes del segundo miembro son nulos) entonces $(0,0,0)$ es una solución del sistema. Ver si hay otras. Pretendemos no ver que la segunda línea implica $x = y$ y que el sistema es realmente muy simple de resolver. Aplicaremos el pivote gaussiano realizando las siguientes operaciones en las líneas $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ y $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Se hace ahora $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$, para obtener :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 7z = 0. \end{cases}$$

Partiendo de la última línea se encuentra $z = 0$, luego en remontando $y = 0$, luego $x = 0$. Conclusión, la única solución de este sistema es $(0,0,0)$.

2. Se aplica el pivote de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ y $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ -y - z = -2. \end{cases}$$

Después $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$, para obtener un sistema equivalente que es triangular por lo tanto fácil a resolver :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0. \end{cases}$$

No olvidar verificar que es una solución del sistema inicial.

3. Se hacen las operaciones $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ y $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$, para obtener :

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ \ \ x + 2y + \ \ z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - \ \ y + 2z = a \\ \qquad 5y - 7z = 3b + a \\ \qquad 7y + \ \ z = 3c - a. \end{cases}$$

Luego se hace $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, lo que da un sistema triangular :

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ \ 2z = a \\ \qquad 5y - \ \ 7z = 3b + a \\ \qquad\qquad 54z = 5(3c - a) - 7(3b + a). \end{cases}$$

Empezando por el final se deduce : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$, luego yendo hacia atrás da

$$\begin{cases} x = \frac{1}{18}(8a + 5b - c) \\ y = \frac{1}{18}(-2a + b + 7c) \\ z = \frac{1}{18}(-4a - 7b + 5c). \end{cases}$$

Solución del ejercicio 2903 ▲001166

(S_1) : solución única si $m^2 \neq 4$, imposible si no. (S_2) : solución única si $m^2 \neq 1/2$, infinito si no.

Solución del ejercicio 2904 ▲001167

(S_1) : $a = b$ o $b = c$ o $c = a$.
(S_2) : $2abc + bc + ca + ab = 1$.

Solución del ejercicio 2905 ▲001168

(S_1) : solución única cualquiera que sea b_1, b_2, b_3, b_4.
(S_2) : soluciones si $b_2 = b_1 + b_3$.
(S_3) : soluciones si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ y $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(S_4) : soluciones si $b_2 = -2b_1$ y $b_3 = -b_1$ y $b_4 = 3b_1$.

Solución del ejercicio 2906 ▲001169

1. Se comienza simplificando el sistema realizando las siguientes operaciones en las filas : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x \qquad\qquad - \quad \lambda t \quad = a - d \\ \qquad \lambda y \qquad - \quad \lambda t \quad = b - d \\ \qquad\qquad \lambda z - \quad \lambda t \quad = c - d \\ x + \ \ y + \ \ z + (1 + \lambda)t = d \end{cases}$$

2. Tratar el caso especial $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces el sistema tiene soluciones solo si $a = b = c = d$. Las soluciones son entonces los (x, y, z, t) que verifica $x + y + z + t = d$. (Es un espacio de dimensión 3 en $\mathbb{R}^4$.)

3. Si $\lambda \neq 0$, entonces podemos hacer la siguiente operación en la última recta : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$, para obtener :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x \quad - \quad \lambda t = a-d \\ \quad \lambda y \quad - \quad \lambda t = b-d \\ \quad \quad \lambda z - \quad \lambda t = c-d \\ \quad \quad \quad (\lambda+4)t = d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4. Caso particular $\lambda = -4$. La última fila se convierte $0 = a+b+c+d$. Entonces si $a+b+c+d \neq 0$, entonces no existe solución. Si $\lambda = -4$ y $a+b+c+d = 0$, existe infinidad de soluciones :

$$\left\{ \left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Caso general : $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -4$. Se calcula primero $t = \frac{1}{\lambda+4}\left(d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ y reemplazando por el valor de t obtenido se deducen los valores para $x = t + \frac{1}{\lambda}(a-d), y = t + \frac{1}{\lambda}(b-d), z = t + \frac{1}{\lambda}(c-d)$. Entonces existe una solución única :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)} \right).$$

Solución del ejercicio 2907 ▲001170

Sin solución si $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$ ($\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$). Si $\lambda = 1$, no solución si $a+1 \neq 0$, infinidad de soluciones si no. Si $\lambda = -2$, solución única.

Solución del ejercicio 2915 ▲001178

Se comienza simplificando el sistema :

— se coloca la recta L_3 en primera posición para el pivote de Gauss ;

— se reordenan las variables en orden : y, t, x, z, para aprovechar las filas ya simples.

$$\begin{cases} y + \ t + \ x + \ z = 0 \\ 3y + 3t \qquad + \ z = 0 \\ -y - \ t + 2x + \ z = 0 \\ \qquad \qquad 3x + 2z = 0. \end{cases}$$

Se comienza el pivote de Gauss con la operación $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ y $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, para obtener :

$$\begin{cases} y + t + \ x + \ z = 0 \\ \qquad -3x - 2z = 0 \\ \qquad \ 3x + 2z = 0 \\ \qquad \ 3x + 2z = 0. \end{cases}$$

Los 3 últimas líneas son idénticas, se vuelve por lo tanto a un sistema con 2 ecuaciones y 4 incógnitas :

$$\begin{cases} y + t + \ x + \ z = 0 \\ \qquad \ 3x + 2z = 0. \end{cases}$$

Se elige x y y como parámetros, entonces $z = -\frac{3}{2}x$ y $t = -x-y-z = \frac{1}{2}x - y$. Las soluciones del sistema son, por lo tanto los

$$\left\{\left(x, y, z = -\tfrac{3}{2}x, t = \tfrac{1}{2}x - y\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solución del ejercicio 2934 ▲002478

S_1 : si $a \neq 0$, el sistema es equivalente a $y = -1 - 2\cosh a\, x$ y $z = x + 2\cosh a$,
si $a = 0$, es equivalente a $x + y + z = 1$.

S_2 : Se puede restar cada fila la fila anterior, luego 2 veces la precedente, etc… Se obtiene así un sistema triangular de Cramer y luego de muchos cálculos la solución $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$. Aquí tenemos una solución más astuta.

Sea $P(X) = x_1X + x_2X^2 + \cdots + x_nX^n$ y T el operador $Q(x) \mapsto XQ'(X)$. El sistema puede ser escrito $P(1) = 1$, $(TP)(1) = 0$, $(T^2P)(1) = 0, \ldots,$ $(T^{n-1}P)(1) = 0$. Se deduce que $P'(1) = P''(1) = \cdots = P^{(n-1)}(1) = 0$, por lo tanto P es de la forma $P(X) = 1 + \lambda(1-X)^n$, y $\lambda = -1$ porque el término constante de P es nulo. Así $x_k = (-1)^{k+1}C_n^k$.

Solución del ejercicio 2944 ▲002768

1. (a) **Por sustitución.** La primera ecuación también se escribe $y = 1 - 2x$. Se reemplaza ahora y en la segunda ecuación

$$3x + 7y = -2 \implies 3x + 7(1-2x) = -2 \implies 11x = 9 \implies x = \frac{9}{11}.$$

Se deduce que y : $y = 1 - 2x = 1 - 2\frac{9}{11} = -\frac{7}{11}$. La solución de este sistema es, por lo tanto el par $(\frac{9}{11}, -\frac{7}{11})$. ¡No olvidar comprobar que la solución funciona !

(b) **Por el pivote de Gauss.** Se guarda la recta L_1 y se reemplaza la línea L_2 por $2L_2 - 3L_1$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 11y = -7. \end{cases}$$

Se obtiene un sistema triangular : se deduce que $y = -\frac{7}{11}$ y entonces la primera línea permite obtener $x = \frac{9}{11}$.

(c) **Por las matrices.** En término matricial el sistema se escribe

$$AX = Y \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se encuentra la solución del sistema invirtiendo la matriz :

$$X = A^{-1}Y.$$

La inversa de una matriz 2×2 se calcule así

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{entonces} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Es necesario claramente que, el determinante $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ sea diferente de 0. Aquí se encuentra

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(d) **Por fórmulas de Cramer.** Las fórmulas de Cramer para un sistema de dos ecuaciones son las siguientes si el determinante verifica $ad - bc \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \implies x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Lo que da aquí :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9}{11} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

2. (a) En primer lugar, vemos si existe una solución única, es el caso si y solo si el determinante es no nulo. Para el primer sistema el determinante es $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, entonces hay una solución única si y solo si $a \neq \pm 1$. Claramente todos los métodos conducen al mismo resultado ! Por ejemplo, por sustitución, escribiendo la primera recta $y = 2 - ax$, la segunda fila se convierte $(a^2+1)x + 2a(2-ax) = 1$. Se deduce que si $a \neq \pm 1$, entonces $x = \frac{4a-1}{a^2-1}$, luego $y = \frac{-2a^2+a-2}{a^2-1}$.

Tratar ahora los casos especiales. Si $a = 1$, entonces el sistema se convierte : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$

Pero no podemos tener al mismo tiempo $x + y = 2$ y $x + y = \frac{1}{2}$. Entonces no hay solución. Si $a = -1$, entonces el sistema se convierte : $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ y no existe solución.

(b) Aquí el determinante es $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$, entonces encontramos la solución única (x, y). Por ejemplo, con la fórmula de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ y } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a = 0$ no hay solución.

Solución del ejercicio 2946 ▲003408

Sistema de Cramer si y solo si $m \neq 0, \pm 2$; compatible si y solo si $m \neq 2$.

Solución del ejercicio 2947 ▲003409

Sistema de Cramer si y solo si $m \neq 0, \pm 1, \pm i$; compatible si y solo si $m \neq 0, \pm i$.

Solución del ejercicio 2948 ▲003410

Sistema de Cramer si y solo si $m \neq 1, \pm 2i$; compatible si y solo si $m \neq 1$.

Solución del ejercicio 2949 ▲003411

Si $m \neq 0, -2$, entonces el sistema de Cramer ; si no, sistema incompatible.

Solución del ejercicio 2950 ▲003412

Sistema de Cramer si y solo si a,b,c son distintos. Si no, hay soluciones si $d \in \{a,b,c\}$.

Solución del ejercicio 2951 ▲003413

Sistema compatible si y solo si $3a+2b+2c+d=0$.

Solución del ejercicio 2952 ▲003414

Sistema de Cramer.

Solución del ejercicio 2953 ▲003415

Sistema de Cramer si y solo si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son distintos. Si no, hay soluciones si y solo si los correspondientes segundos miembros son iguales.

Solución del ejercicio 2954 ▲003416

CN de existencia de solución : $p+q+r=0$. Es una CNS si la lista (a,b,c) tiene a lo sumo un cero.

Solución del ejercicio 2955 ▲003417

1. Para evitar tener que dividir por a se reordenan las filas y luego se aplica el método de pivote :
$$\begin{cases} x + by + az = 1 & L_1 \\ x + aby + z = b & L_2 \\ ax + by + z = 1 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + by + az = 1 & L_1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b(1-a)y + (1-a^2)z = 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{cases}$$
Se hace entonces $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, para obtener un sistema triangular equivalente al sistema inicial :
$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(a-1)y + (1-a)z = b-1 \\ (2-a-a^2)z = b-a. \end{cases}$$
2. Se va ahora discutir de la existencia de soluciones.
Observar primeramente que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$.
Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, entonces $2-a-a^2 \neq 0$, por lo tanto $z = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. Se ha entonces encontrado el valor de z. La segunda línea del sistema triangular es $b(a-1)y+(1-a)z = b-1$ se sabe $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$, entonces, usando el valor de z obtenida, se encuentra el valor $y = \frac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Después con la primera línea se deduce que también $x = 1-by-az$.
Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ y $b \neq 0$, entonces existe una única solución (x,y,z).
3. Hay que ocuparse ahora de los casos particulares.
   (a) Si $a = 1$, entonces el sistema triangular se convierte en :
$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b-1 \\ 0 = b-1. \end{cases}$$

Si $b \neq 1$ no hay solución. Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces el no queda más que la ecuación $x + y + z = 1$. Se escoge por ejemplo y, z como parámetros, el conjunto de soluciones es

$$\{(1 - y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Si $a = -2$, entonces el sistema triangular se convierte en :

$$\begin{cases} x + \quad by \quad - 2z = 1 \\ \quad -3by + 3z = b - 1 \\ \qquad\qquad 0 = b + 2. \end{cases}$$

Entonces si $b \neq -2$ no hay solución. Si $a = -2$ y $b = -2$, entonces el sistema es

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = \quad 1 \\ \quad 2y + \ z = -1 \end{cases}$$

Si se escoge y como parámetro entonces hay una infinidad de soluciones

$$\{(-1 - 2y, y, -1 - 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Finalmente, si $b = 0$, entonces la segunda y tercera fila del sistema triangular son : $(1 - a)z = -1$ y $(2 - a - a^2)z = -a$. Entonces $z = \frac{-1}{1-a} = \frac{-a}{2-a-a^2}$ (el subcaso $b = 0$ y $a = 1$ no tiene solución). En todos los casos no hay solución.

(d) Conclusión :
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ y $b \neq 0$, es un sistema de Cramer : admite una solución única.
- Si $a = 1$ y $b \neq 1$ no hay solución (el sistema no es compatible).
- Si $a = 1$ y $b = 1$ hay una infinidad de soluciones (que forman un plano en $\mathbb{R}^3$).
- Si $a = -2$ y $b \neq -2$ no hay solución.
- Si $a = -2$ y $b = -2$ hay una infinidad de soluciones (que forman una recta en $\mathbb{R}^3$).
- Si $b = 0$ no hay solución.

Solución del ejercicio 2956 ▲003418

Descomposición en elementos simples de $F = \frac{x}{X+a} + \frac{y}{X+2a} + \frac{z}{X+3a}$, con $F(1) = F(2) = F(3) = 1$, entonces una solución única si $a \neq 0$.

Solución del ejercicio 2962 ▲003424

Denotemos $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio de grado $\leqslant 3$.

1. Primero, se calcula la integral :

$$\int_2^4 P(x)\,dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx\right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

2. Por otra parte

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = \alpha\big(8a + 4b + 2c + d\big) + \beta\big(27a + 9b + 3c + d\big) + \gamma\big(64a + 16b + 4c + d\big).$$

Entonces

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d.$$

3. Para tener igualdad $\int_2^4 P(x)\,dx = \alpha P(2)+\beta P(3)+\gamma P(4)$ cualesquiera que sean los coeficientes a,b,c,d es necesario y suficiente que

$$(8\alpha+27\beta+64\gamma)a+(4\alpha+9\beta+16\gamma)b+(2\alpha+3\beta+4\gamma)c+(\alpha+\beta+\gamma)d = 60a+\frac{56}{3}b+6c+2d$$

lo que equivale a

$$\begin{cases} \alpha + \quad \beta + \quad \gamma = 2 \\ 2\alpha + \ 3\beta + \ 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + \ 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

De manera sorprendente este sistema de 3 incógnitas y 4 las ecuaciones tienen una solución única :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Solución del ejercicio 2963 ▲003425

2.
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -4 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{-2}3^{6} \\ y = 2^{-3}3^{12} \\ z = 2^{2}3^{-7}. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 2964 ▲003431

Si $\mathrm{rg}(A)=n$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=n$. Si $\mathrm{rg}(A)=n-1$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=1$. Si $\mathrm{rg}(A)\leqslant n-2$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=0$.

Solución del ejercicio 2966 ▲003461

1. 3.
2. 4.
3. 2.
4. 3.

Solución del ejercicio 2968 ▲003463

$\mathrm{rg}=3$ si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -25$.
$\lambda = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}=2 : 11L_1 = 5L_2 + 9L_3$.
$\lambda = -25 \Rightarrow \mathrm{rg}=2 : L_1 + 2L_2 + 9L_3 = 0$.

Solución del ejercicio 2969 ▲003464

$\mathrm{rg}=3$ si $a \neq \frac{1}{3}$ o $b \neq -3$, $\mathrm{rg}=2$ si no.

Solución del ejercicio 2970 ▲003465

$\mathrm{rg}ABC \leqslant 2 \Rightarrow x = 13$. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 2971 ▲003466

Las columnas de A engendran los $n-p$ últimos vectores de la base canónica.

Solución del ejercicio 2972 ▲003467

Intercambio de rectas i y j.

Solución del ejercicio 2975 ▲003470

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 & \dots & y_n\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}(A)=\begin{cases}2 & \text{si } (x_i) \text{ y } (y_j) \text{ no son constantes}\\ 1 \text{ o } 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1^2 & \dots & y_n^2\\ 2y_1 & \dots & 2y_n\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}(B)=\begin{cases}3 & \text{si } \mathrm{card}\,(x_i)\geqslant 3 \text{ y } \mathrm{card}\,(y_j)\geqslant 3\\ 2 & \text{si } \min\big(\mathrm{card}\,(x_i),\mathrm{card}\,(y_j)\big)=2\\ 1 \text{ o } 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

Solución del ejercicio 2977 ▲003472

4. $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 2979 ▲003474

$M=\mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix}e^{i\theta}\\ \vdots\\ e^{ni\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \dots e^{(n-1)i\theta}\end{pmatrix}\right]\Rightarrow \mathrm{rg}\,M\leqslant 2$. El primer minero 2×2 vale $-\mathrm{sen}^2\,\theta\Rightarrow \mathrm{rg}\,M=2$ si $\theta\not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Sinon, $\mathrm{rg}\,M=1$.

Solución del ejercicio 2981 ▲003476

E es un sev y un ideal izquierdo de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Es isomorfo a $\mathscr{L}(H,\mathbb{R}^n)$, donde H es un suplemento de $\mathrm{Im}A$ en $\mathbb{R}^n$. $\dim E=n(n-\mathrm{rg}(A))$.

Solución del ejercicio 2984 ▲003479

2 o 0.

Solución del ejercicio 2988 ▲003483

1.
2. B admite r filas independientes de índices $i_1,\dots,i_r$ y C admite r columnas independientes de índices $j_1,\dots,j_r$. Sean B' y C' las submatrices cuadradas asociadas en B y C. Entonces la sub-matriz de A de índices $i_1,\dots,i_r$, para las líneas y $j_1,\dots,j_r$, para las columnas es $B'C'$, de rango r. Entonces $\mathrm{rg}(A)\geqslant r$ y la desigualdad inversa es bien conocida.

3. Sean $i_1,\ldots,i_r$ r índices tales que las filas asociadas en A son linealmente independientes, y $B \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la sub-matriz correspondiente. Por construcción, $\mathrm{rg}(B)=r$. cada línea de A es una combinación lineal de las líneas de B, existe $C \in \mathscr{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ tal que $A = BC$. Y se tiene $r =$n° filas$(C) \geqslant \mathrm{rg}(C) \geqslant \mathrm{rg}(A) = r$.
4.
5. En esta pregunta se entiende que B,C no son forzosamente las matrices construidas en **2**. Denotemos $\mathrm{vect}(X)$ el espacio vectorial generado por las columnas de una matriz X. De $A = BC = {}^tC^tB$ se tiene $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$ y $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}({}^tC)$, y todos estos espacios tienen dimensión r, entonces son iguales. Se deduce que existe una matriz $P \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ tal que $B = {}^tCP$, de donde $CB = C^tCP$. $\mathrm{rg}(C^tC) = \mathrm{rg}(C) = r$ y P es invertible, entonces $\mathrm{rg}(CB) = r$.

Solución del ejercicio 2990 ▲005367

$\Delta = \det M = \mathrm{Vanq}(1,2,\ldots,n) \neq 0$ y el sistema es CRAMER. Las fórmulas de CRAMER proporcionan entonces para $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, donde

$$\Delta_k = \mathrm{Vanq}(1,\ldots,k-1,0,k+1,\ldots,n) = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & (k-1)^2 & (k+1)^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(Desarrollando con respecto a la k-ésima columna). Por linealidad con respecto a cada columna, se tiene entonces

$$\begin{aligned}\Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n \times \mathrm{Vanq}(1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n) \\ &= (-1)^{k+1}\frac{n!}{k}\frac{\mathrm{Vanq}(1,2,\ldots,n)}{(k-(k-1))\cdots(k-1)((k+1)-k)\cdots(n-k)} = (-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\Delta,\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = (-1)^{k+1}C_n^k.}$$

Solución del ejercicio 2991 ▲005375

m es un parámetro real.

1. $\det S = 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$. El sistema es de CRAMER si y solo si $m \in \{1,6\}$. Si $m \notin \{1,6\}$, las fórmulas de CRAMER proporcionan entonces :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1},$$

$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1},$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}.$$

Si $m \in \{1,6\}$, $\det S = 0$. Un determinante principal es $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Se pueden elegir las dos primeras ecuaciones como ecuaciones principales y x y z como incógnitas principales. El sistema de las dos primeras ecuaciones es equivalente a

$$\begin{cases} x = \dfrac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \dfrac{14-(2m+3)y}{5}. \end{cases}$$

La última ecuación proporciona así una condición necesaria y suficiente de compatibilidad (los términos desaparecen automáticamente para $m \in \{1,6\}$ y por lo tanto, no hay necesidad de calcularlos).

$$\begin{aligned} 7x+2y+(m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \\ &\Leftrightarrow 21+14(m-5)-35 = 0 \Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, el sistema no tiene solución y si $m = 6$, el conjunto de soluciones es $\{(\frac{3}{5}, y, -\frac{y}{5}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

2. $\det S = 2(-8m-4+2)-(4m+1)+5(2m+2m+1) = 0$. El sistema nunca es de CRAMER. Un determinante principal es $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Se pueden elegir las dos primeras ecuaciones como ecuaciones principales y x y z como incógnitas principales. El sistema de las dos primeras ecuaciones es equivalente a

$$\begin{cases} x = \dfrac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \dfrac{-3m+8+(5m+2)y}{3}. \end{cases}$$

La última ecuación proporciona así una condición necesaria y suficiente de compatibilidad.

$$\begin{aligned} 5x-y+4z = 3m-2 &\Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m-2 \\ &\Leftrightarrow 5(6m-4)+4(-3m+8)-3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Si $m \neq -2$, el sistema no tiene solución.
Si $m = -2$, el conjunto de soluciones es $\{(\frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3}),\ y \in \mathbb{R}\}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2+2m = -2m(m-1)$.

El sistema es de CRAMER en x, y y z si y solo si $m \in \{0,1\}$.
Si $m \notin \{0,1\}$, las fórmulas de CRAMER proporcionan :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t+1 \\ y &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m)+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t+1 \\ z &= \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t+(-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t+1. \end{aligned}$$

En este caso, el conjunto de soluciones es $\{(-t+1, \frac{m+1}{m-1}t+1, -\frac{m+1}{m-1}t+1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Si $m=0$, el sistema se escribe

$$\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+z=2 \\ y+t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x \\ t=-1-y. \end{cases}$$

En este caso, el conjunto de soluciones es $\{(x,y,2-x,1-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
Si $m=1$, el sistema se escribe

$$\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ x+y+z-t=3 \\ x-y-z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ x=1 \\ z=2-y. \end{cases}$$

En este caso, el conjunto solución es $\{(1,y,2-y,0),\ z\in\mathbb{R}\}$.

4. $\det(S)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(m+6)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix}=(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$=(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ zm1 & -1 & -m \end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-m(m+6)\begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix}=m(m-2)(m-4)(m+6).$$

El sistema es de CRAMER si y solo si $m\notin\{0,2,4,-6\}$. En este caso :

$$\begin{aligned} m(m-2)(m-4)(m+6)x &= \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -[-3(5m-6)-(m-6)(-m^2+5m-3)] \\ &= -m^3+11m^2-18m=-m(m-2)(m-9). \end{aligned}$$

y $x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)y = \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3)$$
$$= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2)$$

y $y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6)$$
$$= -2m^3+7m^2-6m = -m(2m-3)(m-2),$$

y $z = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}$.

$$m(m-2)(m-4)(m+6)t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3)$$
$$= m^4-m^3-17m^2+30m = m(m-2)(m^2+m-15),$$

y $t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}$.

Si $m=0$, el sistema se escribe

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1\\ 2x+y+3t=1\\ 3x+z+2t=0\\ 3y+2z+t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=\ (E_1+E_2)\\ 2x+y+3t=1\\ x+y+z+t=0(E_3+E_4)\\ 3y+2z+t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-x-y-z\\ -x-2y-3z=1\\ -x+2y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=x-2y\\ -x-2y-3(x-2y)=1\\ t=-x-y-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+\frac{1}{4}\ z=-x-\frac{1}{2}\\ t=-x+\frac{1}{4}\end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones : $\{(x,x+\frac{1}{4},-x-\frac{1}{4};-x+\frac{1}{2}),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Si $m=2$, se obtiene por conjunto de soluciones : $\{(x,-x-\frac{5}{8},x+\frac{1}{2};-x-\frac{1}{8}),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Si $m=4$ o $m=-6$, se ve al resolver que el sistema es incompatible.

5. $\begin{vmatrix} m & 1 & 1\\ -1 & -1 & m\\ 1 & -1 & -m\end{vmatrix} = m(2m)+(-m+1)+(m+1)=2(m^2+1)\neq 0$ (m designando un parámetro real). El sistema formado por las ecuaciones 1, 2 y 4 es, por lo tanto de CRAMER. Las fórmulas de CRAMER proporcionan entonces :

$$x=\frac{2m^2-m-1}{m^2+1},\ y=3-m \text{ y } z=\frac{3m-1}{m^2+1}.$$

La tercera ecuación proporciona una condición necesaria y suficiente para la compatibilidad :

$$\begin{aligned} -m\frac{2m^2-m-1}{m^2+1}+3-m+m\frac{3m-1}{m^2+1}=-m&\\ \Leftrightarrow -m(2m^2-m-1)+(3-m)(m^2+1)+m(3m-1)&=-m(m^2+1)\\ \Leftrightarrow -2m^3+7m^2+3=0.& \end{aligned}$$

El sistema es compatible si y solo si m es una de las tres raíces de la ecuación $-2X^3+7X^2+3=0$.

6. $\det S=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=\frac{\text{Vanq}(a,b,c)}{abc}$.
Si a, b y c son dos a dos distintos, el sistema es de CRAMER. Se obtiene :

$$x=\frac{abc}{mbc}\frac{\text{Vanq}(m,b,c)}{\text{Vanq}(a,b,c)}=\frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

después, por simetría de los roles, $y=\frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$ y $z=\frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$.
Si $a=b\neq c$ (o $a=c\neq b$ o $b=c\neq a$), el sistema se escribe :

$$\begin{cases} x+y=1-z\\ ax+ay+cz=m\\ \frac{1}{a}x+\frac{1}{a}y+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z\\ a(1-z)+cz=m\\ \frac{1}{a}(1-z)+\frac{1}{c}z=\frac{1}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-z\\ z=\frac{m-a}{c-a}\\ (\frac{1}{c}-\frac{1}{a})\frac{m-a}{c-a}=\frac{1}{m}-\frac{1}{a}.\end{cases}$$

El sistema es compatible si y solo si $(m-a)(m-c)=0$ o aún ($m=a$ o $m=c$). En este caso, el conjunto de soluciones es : $\{(x,\frac{m-c}{a-c}-x;\frac{m-a}{c-a}),\ x\in\mathbb{R}\}$.
Si $a=b=c$, el sistema se escribe : $x+y+z=1=\frac{m}{a}=\frac{a}{m}$. El sistema es compatible si y solo si $m=a=b=c$ y en este caso el conjunto de soluciones es : $\{(x,y,1-x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.

7.

$$\det S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-(b+c)^2 & (a+c)^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-(a+c)^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ 0 & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2(b-c) & b-a-c & a+b-c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2(c^2(-c(b-a-c)+(b-c)(a+c-b))+(a+b-c)(bc(a+c-b)+b^2c))$$

$$= 2(a+b+c)^2(c^2b(a-b+c)+(a+b-c)bc(a+c))$$

$$= 2bc(a+b+c)^2(a^2+ab+ac) = 2abc(a+b+c)^3.$$

Si $abc(a+b+c) \neq 0$, el sistema es de CRAMER y se obtiene luego del cálculo :

$$x = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\ y = \frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} \text{ y } z = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si $a = 0$ (o $b = 0$ o $c = 0$), el sistema se escribe :

$$\begin{cases} (b+c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ c^2(y+z) = 1 \\ b^2(y+z) = 1. \end{cases}$$

Así, Si (($a = 0$ y $b^2 \neq c^2$) o ($b = 0$ y $a^2 \neq c^2$) o ($c = 0$ y $a^2 \neq b^2$)), el sistema no tiene solución. Si $a = 0$ y $b = c \neq 0$, el conjunto de soluciones es $\{(0, y, -\frac{y}{b^2}),\ y \in \mathbb{R}\}$ (resultados análogos para los casos ($b = 0$ y $a = c \neq 0$) y ($c = 0$ y $a = b \neq 0$)).
Si $a = b = c = 0$, no hay solución.
Si $a = 0$ y $c = -b \neq 0$, el conjunto de soluciones es $\{(x, y - \frac{y}{b^2}),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ (resultados análogos para ($b = 0$ y $c = -a \neq 0$) y ($c = 0$ y $b = -a \neq 0$).
Si $abc \neq 0$ y $a+b+c = 0$, el sistema es equivalente a la ecuación $a^2x + b^2y + c^2z = 1$. El conjunto de soluciones es $\{(x, y, \frac{1-a^2x-b^2y}{c^2}),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

8.

$$\det S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)((a-b)(a-c)+(b-c)^2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$= (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$$

Si $\det S \neq 0$, las fórmulas de CRAMER proporcionan :

$$x \det S = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2-bc)+q(c^2-ab)+r(b^2-ac).$$

9. Sea $P = X^3 - X - 1$. P y $P' = 3X^2 - 1$ no tiene raíces comunes en $\mathbb{C}$, pues $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ no son raíces de P y por lo tanto, las raíces de P son simples o aún, a, b y c son dos a dos distintos. Así, $\det S = \mathrm{Vanq}(a,b,c) \neq 0$ y el sistema es CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -2(c^2-b^2)+3(c-b) = (c-b)(3-2(b+c)) = (c-b)(3+2a),$$

(pues $a+b+c=0$) y $x = \frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & c \\ a^2 & 3 & c^2 \end{vmatrix} = 2(c^2-a^2)-3(c-a) = (c-a)(2(a+c)-3) = -(c-a)(3+2b),$$

y $y = -\frac{3+2b}{(b-a)(c-a)}$.

$$(b-a)(c-a)(c-b)z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \\ a^2 & b^2 & 3 \end{vmatrix} = -2(b^2-a^2)+3(b-a) = (b-a)(3+2c),$$

y $z = \frac{3+2c}{(c-a)(c-b)}$ (difícil ir más lejos).

Solución del ejercicio 2992 ▲005378

Sea D_n el determinante del sistema para $n \geqslant 3$. Desarrollando este determinante siguiente su primera columna, se obtiene la relación de recurrencia :

$$\forall n \geqslant 5,\ D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

lo que proporciona fácilmente por recurrencia, considerando el hecho $D_3 = D_4 = -1$:

$$\forall k \geqslant 1,\ D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ y } D_{3k+2} = 0.$$

Para n elemento de $3\mathbb{N}^* \cup (1+3\mathbb{N}^*)$, el sistema es de CRAMER y homogéneo y por lo tanto, admite una y solo una solución, a saber, la solución nula. Para $n = 3k+2$, ya que $D_n = 0$, pero que el menor de tamaño $n-1$ constituido de las $n-1$ primeras filas y columnas es D_{n-1} y por lo tanto, no es nulo, el sistema es homogéneo de rango $n-1$ y el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión 1. Se encuentra fácilmente $\mathscr{S} = \{\lambda(1,-1,0,1,-1,0,\dots,1,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solución del ejercicio 2993 ▲005381

Sea $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $F = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X+b_k}$. La fracción racional F se escribe, después de reducción al mismo denominador :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ donde } Q = \prod_{k=1}^{n}(X+b_k) \text{ y } P \text{ es un polinomio de grado menor o igual que } n-1.$$

Ahora,

$$(x_1,\dots,x_n) \text{ solución de } (S) \Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\},\ F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \{1,\dots,n\},\ (Q-P)(a_k) = 0.$$

Así, ya que los a_k son dos a dos distintos, $Q-P$ es divisible por $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. Pero, Q es unitario de grado n y P es de grado menor o igual que $n-1$, y entonces $Q-P$ es unitario de grado n, lo que demuestra que $Q-P=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ o aún que $P=\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$.

Recíprocamente, si $F=\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$, entonces $\forall k\in\{1,\ldots,n\}$, $F(a_k)=1$.

En resumen, $(x_1,\ldots,x_n)$ es solución de (S) :

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X+b_k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)} \Leftrightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ x_i=\lim_{x\to -b_i}(x+b_i)\frac{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)-\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x+b_k)}$$

$$\Leftrightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ x_i=\frac{\prod_{k=1}^{n}(b_i+a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(b_k-b_i)}$$

Solución del ejercicio 2994 ▲005639

El determinante del sistema es $\Delta=\mathrm{Vanq}(1,\ldots,n)\neq 0$. El sistema propuesto es, por lo tanto un sistema de CRAMER. Las fórmulas de CRAMER dan : $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ donde

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & j-1 & 0 & j+1 & & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & (j-1)^{n-1} & 0 & (j+1)^{n-1} & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j+1}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & (j-1)^{n-1} & (j+1)^{n-1} & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}\text{(desarrollando según la } j\text{-ésima columna)}$$

$$=(-1)^{j+1}1\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & j-1 & j+1 & & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & (j-1)^{n-2} & (j+1)^{n-2} & \cdots & n^{n-2}\end{vmatrix}\text{(por } n-\text{linealidad)}$$

$$= (-1)^{j+1}\frac{n!}{j}\mathrm{Vanq}(1,\dots,(j-1),(j+1),\dots,n) = (-1)^{j+1}\frac{n!}{j}\frac{\mathrm{Vanq}(1,\dots,n)}{(j-1)\cdots(j-(j-1))((j+1)-j)\cdots(n-j)}$$
$$= (-1)^{j+1}\frac{n!}{j!(n-j)!}\mathrm{Vanq}(1,\dots,n) = (-1)^{j+1}\binom{n}{j}\mathrm{Vanq}(1,\dots,n).$$

Finalmente,

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j = (-1)^{j+1}\binom{n}{j}.}$$

Solución del ejercicio 2995 ▲007026

Para los tres primeros sistemas, se eliminan los denominadores multiplicando, y los términos de grado dos se simplifican lo que conduce a sistemas lineales. Los conjuntos de soluciones son :

$$\{(4,8)\};\quad \{(7,26)\};\quad \{(19,32)\}.$$

Para los tres siguientes, se realizan cambios simples de variable del tipo $X = \frac{1}{x}$, lo que conduce a sistemas lineales. Es necesario verificar la compatibilidad con el dominio de resolución de las ecuaciones, llegado el caso. El segundo sistema conduce de hecho a un sistema lineal auxiliar que tiene una solución única de la cual una componente es nula, lo que no es adecuado. El tercer sistema conduce a un sistema lineal que tiene una infinidad de soluciones. El conjunto solución del sistema inicial es entonces una hipérbola privada de un punto. Más precisamente, conjuntos de soluciones son :

$$\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{7}\right)\right\};\quad \varnothing;\quad \left\{\left(t,\frac{3t}{2t-1}\right), t \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2}\right\}\right\}.$$

Para los dos sistemas restantes, también hacemos cambios de variable : $X = \frac{1}{4(x-2)}$ y $Y = \frac{1}{15(y-1)}$, para el primero, y $X = \frac{1}{x-y}$, $Y = \frac{1}{x+y}$ para el último, lo que conduce a resolver un segundo sistema lineal para concluir. Los conjuntos de soluciones son :

$$\left\{\left(\frac{17}{8},\frac{16}{5}\right)\right\};\quad \left\{\left(\frac{4}{15},\frac{1}{15}\right)\right\}.$$

Solución del ejercicio 2996 ▲007027

17 y 12.

Solución del ejercicio 2997 ▲007028

Si a y b son las medidas de los otros dos lados, se obtiene por Pitágoras $a^2+b^2 = 13^2 = 169$, y $ab = 60$. Se deduce que $(a+b)^2 = 289 = 17^2$ y $(a-b)^2 = 49 = 7^2$, y de donde se deriva un sistema lineal. Las soluciones son 12 y 5.

Solución del ejercicio 2999 ▲007030

Las verdaderas soluciones son $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución del ejercicio 3000 ▲007031

Se encuentra una única solución $\left(\frac{3}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solución del ejercicio 3002 ▲007033

Si n es impar, el sistema tiene una solución única. Si n es par, entonces el sistema tiene solución si y solo si, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Este ejercicio también se puede resolver considerando las simetrías centrales cuyos centros tienen como afijos los a_k, y la composición de todas estas isometrías. Si n es impar, esta composición es una simetría central. Si no, es una traslación.

Solución del ejercicio 3003 ▲007034

Tomar el logaritmo de las ecuaciones y luego cambiar las variables. Solución única : $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

Solución del ejercicio 3004 ▲001151

1. En el caso $n = 2$, $n = 4$ las siguientes matrices son adecuadas : $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J' = \begin{pmatrix} J & (0) \\ (0) & J \end{pmatrix}$.
2. Se supone que tal morfismo existe. Sea J su matriz para una base fija. Entonces $J^2 = -I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n. En términos de determinante se tiene : $\det(J^2) = \det I_n$, que se escribe $(\det J)^2 = (-1)^n$. Entonces n es par pues $(\det J)^2$ es positivo.

Solución del ejercicio 3006 ▲003443

$27a^4 = 256b^3$.

Solución del ejercicio 3010 ▲003447

ctr.ej. : $A = \mathbb{Z}$, $P(0) = 0$ y $P(2) = 1$.

Solución del ejercicio 3011 ▲003448

Se sitúa en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y se considera $J = (\delta_{i,i+1 \bmod p})$. Se tiene $J^p = I$ y $A = a_0J^0 + \cdots a_{p-1}J^{p-1}$, por lo tanto $A^p = (a_0^p + \cdots + a_{p-1}^p)I$ (pues se está en característica p). Se deduce $\det(A) = \det(A)^p = (a_0^p + \cdots + a_{p-1}^p)^p = a_0 + \cdots + a_{p-1}$. Otro método en permaneciendo en $\mathbb{Z}$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{p,\sigma(p)} = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \ldots a_{\sigma(p)-p \bmod p}.$$

Denotemos $x(\sigma) = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)-1 \bmod p} \ldots a_{\sigma(p)-p \bmod p}$ y c el ciclo $(1, 2, \ldots, p)$. Entonces $x(\sigma) = x(c^{-k} \circ \sigma \circ c^k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. El número de permutaciones distintas que se obtienen para σ fijo variando k es igual a 1 si σ y c conmutan, y a p si no, de acuerdo a la relación : $\operatorname{card}(\text{órbita}) \times \operatorname{card}(\text{estabilizador}) = \operatorname{card}(\langle c \rangle) = p$. Además, c y σ conmutan si y solo si $\sigma \in \langle c \rangle$ (fácil), de donde $\det(A) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon(c^k) a_k^p \equiv a_0 + \cdots + a_{p-1} \bmod p$.

Solución del ejercicio 3012 ▲003449

$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$. Sea $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Entonces los términos asociados a σ y σ^{-1} son iguales pues M es simétrica, por lo tanto la suma de estos dos términos es par. Sea $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma = \sigma^{-1}$. Entonces como n es impar, existe $i \in [\![1,n]\!]$ tal que $\sigma(i) = i$ y el término asociada a σ es par.

Solución del ejercicio 3014 ▲005377

Si z_k es el afijo complejo de M_k y a_k es el afijo complejo de A_k, el problema propuesto equivale al sistema :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ y } z_n + z_1 = 2a_n.$$

El determinante de este sistema vale :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1 \cdot 1^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot 1^{n-1} \text{ (desarrollando a lo largo de la primera columna)} \\ &= 1 + (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Si n es impar, $\det S = 2 \neq 0$ y el sistema admite una y solo una solución. Se obtiene $z_2 = 2a_1 - z_1$, $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \ldots, z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \cdots + 2a_2 - 2a_1 + z_1$ y enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \cdots + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

y por lo tanto, $z_1 = a_1 - a_2 + \cdots - a_{n-1} + a_n$, luego $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{n-1} - a_n$, luego $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_n, \ldots$ luego $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.
Si n es par, $\det S = 0$, pero el menor formado de las $n-1$ primeras líneas y $n-1$ últimas columnas no es nulo. Entonces, el sistema es de rango $n-1$, los $n-1$ primeras ecuaciones y $n-1$ últimas incógnitas se pueden elegir para las ecuaciones e incógnitas principales.
Se resuelven los $n-1$ primeras ecuaciones que constituyen un sistema de CRAMER en $z_2, \ldots, z_n$. Se obtiene

$$z_2 = 2a_1 - z1,\ z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \ldots,\ z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \cdots - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

la última ecuación proporciona entonces una condición necesaria y suficiente de compatibilidad :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \cdots - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 \cdots = a_2 + a_4 + \cdots$$

Esta última condición resulta geométricamente del hecho que los sistemas de puntos $(A_1, A_3, \ldots)$ y $(A_2, A_4, \ldots)$ tienen el mismo isobaricentro.
En resumen, si n es par y si los sistemas de puntos $(A_1, A_3, ...)$ y $(A_2, A_4, \ldots)$ no tienen el mismo isobaricentro, el problema no tiene solución.
Si n es par y si los sistemas de puntos $(A_1, A_3, \ldots)$ y $(A_2, A_4, \ldots)$ tienen el mismo isobaricentro, el problema tiene una infinidad de soluciones : M_1 es un punto cualquiera, luego se construyen las simetrías sucesivas con respecto a los puntos $A_1, A_2, \ldots$

Solución del ejercicio 3019 ▲001157

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 0$, pero $\det B = a^2$ es no nulo si $a \neq 0$.

Solución del ejercicio 3028 ▲003429

1.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\quad |\lambda| > \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 3030 ▲003434

3. Se completa por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{base} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución del ejercicio 3031 ▲003435

Desarrollar el producto. Un solo coeficiente no nulo por línea y columna, o una línea nula.

Solución del ejercicio 3032 ▲003436

1.
2. Si $d_{ab} \neq 0$, tomar $\begin{cases} \vec{c} = -\frac{d_{bc}}{d_{ab}} \vec{a} + \frac{d_{ac}}{d_{ab}} \vec{b} \\ \vec{d} = \frac{d_{db}}{d_{ab}} \vec{a} + \frac{d_{ad}}{d_{ab}} \vec{b}. \end{cases}$

Solución del ejercicio 3033 ▲003437

Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ es una base, descomponer $\vec{d}$. Si $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$, se obtiene $\vec{0} = \vec{0}$.

Solución del ejercicio 3036 ▲003441

2. (b) $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$. Calcular el mcd de una línea mediante operaciones elementales usando de Bézout. Este mcd vale 1 si no $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$.

Solución del ejercicio 3037 ▲003442

$(\det A)^n$.

Solución del ejercicio 3038 ▲005368

Reemplazando las columnas $C_1, \ldots, C_n$ por respectivamente $C_1 + iC_{n+1}, \ldots, C_n + iC_{2n}$, se obtiene :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{pmatrix},$$

luego reemplazando las filas $L_{n+1}, \ldots, L_{2n}$ de la nueva matriz por respectivamente $L_{n+1} - iL_1, \ldots, L_{2n} - iL_n$, se obtiene :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Solución del ejercicio 3039 ▲005370

Se supone $n \geqslant 2$. La matriz nula es solución del problema. Sea A un elemento de $M_n(\mathbb{C})$ tal que $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A+B) = \det A + \det B$. En particular, $2\det A = \det(2A) = 2^n \det A$ y entonces $\det A = 0$, pues $n \geqslant 2$. Así, $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $A \neq 0$, existe cierta columna C_j que no es nula. Porque la columna $-C_j$ no es nula, se puede completar la familia libre $(-C_j)$ en una base $(C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matriz B cuyas columnas son precisamente $C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n$ es entonces invertible de modo que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Pero, $A+B$ tiene una columna nula y así $\det(A+B) = 0 \neq \det A + \det B$. Así, solo la matriz nula puede ser una solución al problema.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ (\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A+M) = \det(A) + \det(M)) \Leftrightarrow A = 0.}$$

Solución del ejercicio 3040 ▲005379

(1) $\Rightarrow$ (2). Demostrar por inducción sobre $n \geqslant 1$ que : $(\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n/\ (\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0) \Rightarrow ((f_1, \dots, f_n)$ ld). Para $n = 1$,

$$(\forall a_1 \in E/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant 1} = 0) \Rightarrow (\forall a_1/\ f_1(a_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ ld.}$$

Sea $n \geqslant 2$. Se supone que $(\forall (a_1, \dots, a_{n-1}) \in E^{n-1}/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} = 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_{n-1})$ ld.
Sean $f_1, \dots, f_n$, n funciones tales que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0$.
Si $(f_1, \dots, f_{n-1})$ es ld entonces $(f_1, \dots, f_n)$ es ld en tanto que es una familia conteniendo una familia ld.
Si $(f_1, \dots, f_{n-1})$ es libre, por hipótesis de recurrencia, existe $a_1, \dots, a_{n-1}$ $n-1$ elementos de E tales que $\det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \neq 0$. Pero, por hipótesis, se tiene :

$$\forall x \in E,\ \det(f_i(a_1), \dots, f_i(a_{n-1}), f_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n} = 0.$$

Desarrollando este determinante siguiente su última columna, se obtiene una igualdad del tipo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0$, donde los λ_i son independientes de x o aún una igualdad del tipo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$, con $\lambda_n = \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \neq 0$, lo que demuestra nuevamente que $(f_1, \dots, f_n)$ es ld.
(2) $\Rightarrow$ (1). Se supone que $\exists (a_1, \dots, a_n) \in E^n/\ \det(f_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0)$. Demostrar que $(f_1, \dots, f_n)$ es libre.
Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En particular : $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(a_j) = 0$. Las n igualdades anteriores proporcionan un sistema de ecuaciones lineales en los λ_i a n incógnitas, n ecuaciones, con determinante no nulo y homogéneo o incluso un sistema de CRAMER homogéneo que sabemos que tiene por solución única $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Se ha demostrado que $(f_1, \dots, f_n)$ es libre.

Solución del ejercicio 3041 ▲005380

Sea A_n la matriz del enunciado.
Desarrollando $\det A_n$ siguiendo su primera columna y luego expandiendo el determinante de tamaño $n-1$ obtenido siguiendo su primera fila, se obtiene $\det A_n = -\det A_{n-2}$, para $n \geqslant 3$.
Así, para $p \geqslant 1$, $\det A_{2p} = (-1)^{p-1} \det A_2 = (-1)^p \neq 0$ y para $p \geqslant 1$, A_{2p} es invertible.
También se tiene, para $p \geqslant 1$, $\det A_{2p+1} = (-1)^{p-1} \det A_3 = 0$ y, para $p \geqslant 1$, A_{2p+1} no es invertible. Finalmente, A_n es invertible si y solo si n es par.
De ahora en adelante, se establece $n = 2p$ ($p \geqslant 1$).

Para $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ y $Y=(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vectores columnas dadas, se tiene :

$$AX=Y\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=y_1\\ \forall i\in\{2,\dots,2p-1\},\ x_{i-1}+x_{i+1}=y_i\\ x_{2p-1}=y_{2p}.\end{cases}$$

Este sistema se resuelve en $x_2=y_1$ después, por recurrencia, para $k\leqslant p$, $x_{2k}=y_{2k-1}-y_{2k-3}+\dots+(-1)^{k-1}y_1$ y también $x_{2p-1}=y_{2p}$, después, por recurrencia, para $k\leqslant p$, $x_{2k-1}=y_{2k}-y_{2k+2}+\dots+(-1)^{p-k}y_{2p}$. De ahí la inversa de A, cuando $n=8$ por ejemplo :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&-1&0&1&0&-1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&-1&0&1\\-1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1\\1&0&-1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\-1&0&1&0&-1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3042 ▲005614

Siempre se tiene $A^t(\mathrm{com}A)=(\det A)I_n$. Pasando al determinante y dado que una matriz tiene el mismo determinante que su traspuesta, se obtiene

$$(\det A)(\det(\mathrm{com}A))=(\det A)^n.$$

• Si $\det A$ no es nulo, se deduce que $\det(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-1}$.
• Si $\det A$ es nulo, se tiene $A^t(\mathrm{com}A)=0$ y entonces ${}^t\mathrm{com}A$ es ya sea nula, sea divisor de cero, y por lo tanto, en todos los casos no invertible. Lo mismo se aplica a $\mathrm{com}A$ y entonces $\det(\mathrm{com}A)=0=(\det A)^{n-1}$. Finalmente,

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_(\mathbb{R}),\ \det(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-1}.}$$

Solución del ejercicio 3043 ▲005615

• Si A es de rango n, es decir invertible, la igualdad $(\mathrm{com}A)\times\frac{1}{\det A}{}^tA=I_n$ demuestra que $\mathrm{com}A$ es invertible y por lo tanto, de rango n. En lo que sigue, el vínculo entre el rango de una matriz y la nulidad de los distintos menores queda fuera del programa. Se supone ahora $\mathrm{rg}(A)\leqslant n-1$.
• Si $\mathrm{rg}A\leqslant n-2$. Demostrar que todos los menores de tamaño $n-1$ extraídos de A son nulos.
Sean $j_1,\dots,j_{n-1}$, $n-1$ números de columnas dos a dos distintos, luego $A'\in\mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ cuyas columnas son $C_{j_1},\dots,C_{j_{n-1}}$. Porque A es de rango a lo sumo $n-2$, la familia de columnas de A' es ld y por lo tanto, A' es de rango a lo sumo $n-2$. Lo mismo es cierto para la matriz ${}^tA'\in\mathscr{M}_{n-1,n}(\mathbb{K})$ y por lo tanto, toda matriz A'' obtenida al eliminar una de las columnas de A' es cuadrada, de tamaño $n-1$, no invertible. Su determinante es así nulo.
Así, todo determinante obtenido al eliminar una fila y una columna de $\det(A)$ es nulo o aún todos los menores de tamaño $n-1$ extraídos de A son nulos. Finalmente, si $\mathrm{rg}A\leqslant n-2$, $\mathrm{com}A=0$.
• Queda por estudiar el caso en que $\mathrm{rg}A=n-1$ y entonces $\dim\ker A=1$.

La igualdad $\det A = 0$ impone $A^t(\text{com}A) = 0$. Pero entonces $\text{Im}({}^t(\text{com}A)) \subset \ker A$ y, en particular $\text{rg}(\text{com}A) = \text{rg}({}^t(\text{com}A)) \leqslant \dim(\ker A) = 1$. Así, si $\text{rg}(A) = n-1$, entonces $\text{rg}(\text{com}A) \in \{0,1\}$.
Demostrar que al menos uno de los menores de tamaño $n-1$ extraídos de A es no nulo, lo que demuestra que $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.
Porque $\text{rg}A = n-1$, existe $n-1$ columnas $C_{j_1},\dots,C_{j_{n-1}}$ de A constituyendo una familia libre. La matriz $A' \in \mathscr{M}_{n,n-1}(\mathbb{K})$ constituida por estas columnas es de rango $n-1$. Lo mismo ocurre con su transpuesta. Pero entonces, existe $n-1$ columnas de ${}^tA'$ linealmente independientes. La matriz A'' constituida de estos $n-1$ columnas es cuadrada de tamaño $n-1$ y de rango $n-1$. A'' es, por lo tanto invertible y también lo es ${}^tA''$. El determinante de ${}^tA''$ es un menor de tamaño $n-1$ extraído de A y no nulo.
En resumen,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}(\text{com}A) = \begin{cases} n \text{ si } \text{rg}(A) = n \\ 1 \text{ si } \text{rg}(A) = n-1 \\ 0 \text{ si } \text{rg}(A) \leqslant n-2. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 3044 ▲005616

Si $\text{rg}M \leqslant n-1$, la igualdad $M = \text{com}M$ implica $M^tM = M^t(\text{com}M) = (\det M)I_n = 0$ y entonces $M = 0$. En efecto,

$$M^tM = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXM^tMX = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tMX\right\|^2 = 0$$
$$\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tMX = 0 \Rightarrow {}^tM = 0 \Rightarrow M = 0.$$

En resumen, si M es solución, $M = 0$ o M es invertible.
En el segundo caso, de acuerdo al ejercicio 3042, se debe tener $\det M = (\det M)^{n-1}$ y entonces, ya que $\det M \neq 0$, $\det M \in \{-1,1\}$ (e incluso $\det M = 1$ si n es impar) pues $\det M$ es real.
• Si $\det M = -1$, se debe tener $M^tM = -I_n$, pero esto es imposible porque el coeficiente fila 1, columna 1, de la matriz M^tM vale $m_{1,1}^2 + \dots + m_{1,n}^2 \neq -1$.
• Queda el caso en que $\det M = 1$, la igualdad $M = \text{com}M$ implica $M^tM = I_n$, es decir M es ortogonal positiva.
Recíprocamente, si M es ortogonal positiva, ${}^tM = M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^t(\text{com}M) = {}^t\text{com}M$ y entonces $M = \text{com}M$.
Finalmente,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Solución del ejercicio 3045 ▲005648

$A = 0$ sirve.
Recíprocamente, se tiene primero $\det(A+A) = \det A + \det A$ o aún $(2^n - 2)\det A = 0$ y, ya que $n \geqslant 2$, $\det A = 0$. Entonces,

$$A \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ y } A \text{ verifica} : \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = \det M.$$

Se supone $A \neq 0$, entonces existe una columna $C_j \neq 0$.
La columna $-C_j$ no es nula y por el teorema de la base incompleta, se puede construir una matriz M invertible, donde la j-ésima columna es $-C_j$. Porque M es invertible, $\det M \neq 0$ y desde la j-ésima columna de la matriz $A+M$ es nula, $\det(A+M) = 0$. Para esta matriz M, se tiene $\det(A+M) \neq \det A + \det M$ y A no es una solución al problema. Finalmente,

$$\boxed{(\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A+M) = (\det A + \det M) \Rightarrow A = 0.}$$

Solución del ejercicio 3060 ▲001611

1. Sea $(v,w) \in \text{Com}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $u(\lambda v + \mu w) = \lambda uv + \mu uw = \lambda vu + \mu wu = (\lambda v + \mu w)u$. Entonces Com es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}(E,E)$.
2. Sea $x \in E_\lambda$. $u(v(x)) = uv(x) = vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, por lo tanto $v(x) \in E_\lambda$.
3. Cada valor propio tiene multiplicidad 1 por lo que cada espacio propio es de dimensión 1. Así, si $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$, $E_\lambda = \mathbb{R}x$. Como $v(x) \in E_\lambda$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, v(x) = \alpha x$. Entonces x es un vector propio de v.
4. Sea $(e_1,\ldots,e_n)$ una base de vectores propios de u. Esto es también una base de vectores propios para todo elemento de Com. Todo elemento de Com por lo tanto, está representado por una matriz diagonal en $(e_1,\ldots,e_n)$. Recíprocamente, todo endomorfismo representado en esta base por una matriz diagonal conmuta con u. Entonces
$$\text{Com} = \{v \in \mathscr{L}(E,E), \exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n, M_{v/(e_1,\ldots,e_n)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\}$$
Se deduce que Com es de dimensión n.
5. $u\,u^i = u(u\cdots u) = (u\cdots u)u = u^i\,u$. Entonces $\forall i \in \{0,\ldots,n-1\}, u^i \in \text{Com}$. Así $\text{vect}(\text{Id},u,\ldots,u^{n-1}) \subset$ Com.
6. Sea $x_k \in E_{\lambda_k} \setminus \{0\}$, $u^i(x) = \lambda_k^i x$, entonces $(\sum \alpha_i u^i)x = \sum \alpha_i u^i(x) = (\sum \alpha_i \lambda_k^i)x = 0$ y $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\sum \alpha_i \lambda_k^i = 0$.
7. El determinante del sistema $(*)$ es no nulo. Es por lo tanto un sistema de Cramer : solo existe una solución, $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. La familia $(\text{Id},u,\ldots,u^{n-1})$ es, por lo tanto, libre.
8. Se tiene $\dim \text{vect}(\text{Id},u,\ldots,u^{n-1}) = n = \dim \text{Com}$ y $\text{vect}(\text{Id},u,\ldots,u^{n-1}) \subset \text{Com}$, por lo tanto el sev $\text{vect}(\text{Id},u,\ldots,u^{n-1}) = \text{Com}$

Solución del ejercicio 3069 ▲002479

Se tiene una sucesión recurrente de tres términos que conecta los componentes v_i del vector propio. Se calcula el término general de la sucesión resolviendo el polinomio característico. Las dos constantes se identifican escribiendo que $v_0 = v_{n+1} = 0$. Se encuentran $n+1$ valores propios distintos :
$$\lambda_k = b + 2c\left(\frac{a}{c}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \quad \text{para} \quad k = 1,\ldots,n,$$
con el vector propio v^k asociado, de componentes
$$v_j^k = \left(\frac{a}{c}\right)^{j/2} \text{sen}\left(\frac{2kj\pi}{n+1}\right), \quad \text{para} \quad j = 1,\ldots,n.$$

Solución del ejercicio 3070 ▲002570

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se supone que A es invertible y que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A.

1. *Demostrar que* $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$ es valor propio de A, entonces $\ker A \neq \{0\}$, por lo tanto A no es inyectiva y su matriz no puede ser invertible. En consecuencia, $\lambda \neq 0$.
2. *Demostrar que si* $\overrightarrow{x}$ *es un vector propio de A, para el valor propio* λ*, entonces es un vector propio de* A^{-1} *de valor propio* λ^{-1} . Como A es invertible, se tiene $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} \iff A^{-1}(A\overrightarrow{x}) = A^{-1}(\lambda\overrightarrow{x}) \iff \overrightarrow{x} = \lambda A^{-1}\overrightarrow{x}$, de donde $A^{-1}\overrightarrow{x} = \lambda^{-1}\overrightarrow{x}$. Lo que prueba que $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A^{-1} de valor propio λ^{-1}.

Solución del ejercicio 3071 ▲002571

Sea f un endomorfismo de E verificando $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. *Demostrar que los únicos valores propios posibles de* f *son* 1 *y* -1. Si λ es un valor propio de f, existe un vector no nulo $\overrightarrow{x} \in E$ tal que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$. Se tiene entonces
$$f^2(\overrightarrow{x}) = f(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda^2\overrightarrow{x}.$$
Pero, $f^2 = \mathrm{mathrmId}_E$, entonces si $\overrightarrow{x}$ es un vector propio asociado al valor propio λ se tiene
$$\overrightarrow{x} = f^2(\overrightarrow{x}) = \lambda^2\overrightarrow{x},$$
de donde $\lambda^2 = 1$, es decir (en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. lo que prueba que los únicos valores propios posibles de f son 1 y -1.
2. *Verificar que para todo* $\overrightarrow{x} \in E$*, se tiene*
$$f(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) = -(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) \text{ y } f(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) = (\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})).$$
Sea $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene
$$f(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) = f(\overrightarrow{x}) - f^2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = -(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x}))$$
y
$$f(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) = f(\overrightarrow{x}) + f^2(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}.$$
Deducir que f *siempre admite un valor propio.*
Se supone que 1 no es valor propio de f, entonces, $\overrightarrow{x} = f(\overrightarrow{x}) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Por tanto, para todo $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene $f(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) = f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}$, por lo tanto para todo $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene $f(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, es decir $f(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x}$. Lo que prueba que -1 es valor propio de f. Incluso se tiene en este caso $f = -\mathrm{mathrmId}_\mathrm{E}$.
Si -1 no es valor propio de f, se demuestra por un razonamiento análogo que para todo $\overrightarrow{x} \in E$ se tiene $f(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Lo que prueba que 1 es valor propio de f, y en este caso $f = \mathrm{Id}_E$.
3. *Demostrar que si* 1 *y* -1 *son valores propios, entonces* E *es la suma directa de los subespacios propios correspondientes.*
Se supone ahora que 1 y -1 son valores propios de f. Entonces son los únicos y se tiene, para todo $\overrightarrow{x} \in E$,
$$\overrightarrow{x} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})).$$
Y, cualquiera que sea $\overrightarrow{x} \in E$, $f(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})) = -(\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x}))$ y $f(\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})) = (\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x}))$, es decir $\overrightarrow{x} + f(\overrightarrow{x})$ está en el subespacio propio asociado al valor propio 1 y $\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})$ está en el subespacio propio asociado al valor propio -1. Además, se sabe que los subespacios propios están en suma directa (se puede verificar también desde su intersección es el conjunto de vectores $\overrightarrow{x}$ tales que $\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$, por lo tanto reducido al vector nulo). En consecuencia E es de hecho la suma directa de los subespacios propios correspondientes a los valores propios 1 y -1.

4. *Traducir el caso geométricamente $n = 2$.*

   Recordar que si solo existe un valor propio, f es la identidad o su opuesto. En el caso donde 1 y -1 son valores propios, sus subespacios propios son rectas vectoriales. Sea u un vector propio tal que $f(u) = u$ y v un vector propio tal que $f(v) = -v$, entonces si $w = au + bv$, $f(w) = au - bv$.

Solución del ejercicio 3072 ▲002579

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y u un endomorfismo de E. Se supone u nilpotente, es decir que existe un entero estrictamente positivo n tal que $u^n = 0$.

1. Demostrar que u no es invertible. Se tiene : $0 = \det u^n = (\det u)^n$, de donde $\det u = 0$, lo que prueba que u no es invertible.
2. Determinar los valores propios de u y los subespacios propios asociados. Sea λ un valor propio de u, entonces existe un vector $x \in E$ no nulo tal que $u(x) = \lambda x$. Por tanto, $u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x$. Pero, $u^n(x) = 0$ y $x \neq 0$, de donde $\lambda^n = 0$ y entonces $\lambda = 0$. El único valor propio posible de u es, por lo tanto 0 y es un valor propio porque, como u no es invertible, el núcleo de u no se reduce a $\{0\}$. El endomorfismo u admite, entonces 0 como único valor propio, el subespacio propio asociado es $\ker u$.

Solución del ejercicio 3073 ▲002580

Sea M la matriz de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar los valores propios de M y sus subespacios propios. Los valores propios de M son los reales λ tales que $\det(M - \lambda I) = 0$.

   $$\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-9) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

   Los valores propios de M son, por lo tanto $2, -2, 3$ y -3. Denotemos E_2, E_{-2}, E_3 y E_{-3} los subespacios propios asociados.

   $$\begin{aligned} E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\right\} \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

   $$\begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x. \end{cases}$$

Así, E_2 es la recta vectorial generada por el vector $u_1 = (1,2,-2,-3)$.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\right\} \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x. \end{cases}$$

Así, E_{-2} es la recta vectorial generada por el vector $u_2 = (1,-2,-2,3)$.

$$\begin{aligned} E_{3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\right\} \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x. \end{cases}$$

Así, E_3 es la recta vectorial generada por el vector $u_3 = (1,3,-7,-7)$.

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\} \text{ por lo tanto} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x. \end{cases}$$

Así, E_{-3} es la recta vectorial generada por el vector $u_4 = (1,-3,-7,7)$.

2. Demostrar que M es diagonalizable. La matriz M admite cuatro valores propios distintos, lo que prueba que los cuatro vectores propios correspondientes son linealmente independientes. En efecto, los vectores u_1, u_2, u_3 y u_4 determinados en 1) forman una base de $\mathbb{R}^4$. El endomorfismo cuya matriz es M en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es representado por una matriz diagonal en la base (u_1, u_2, u_3, u_4) ya que $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2$, $Mu_3 = 3u_3$ y $Mu_4 = -3u_4$.
3. Determinar una base de vectores propios y P la matriz de pasaje. En las preguntas anteriores se ha determinado una base de vectores propios. Esta es la base (u_1, u_2, u_3, u_4) y la matriz de pasaje es la matriz
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$
4. Se tiene $D = P^{-1}MP$, para $k \in \mathbb{N}$ expresar M^k en función de D^k, luego se calcula M^k. Se tiene
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ por lo tanto } D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Pero, $M = PDP^{-1}$, de donde, para $k \in \mathbb{N}$, $M^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$. Para calcular M^k, es necesario por lo tanto determinar la matriz P^{-1} que expresa las coordenadas de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ en la base (u_1, u_2, u_3, u_4). Se resuelve el sistema, y se tiene :

$$\begin{aligned} u_1 &= i+2j-2k-3l \\ u_2 &= i-2j-2k+3l \\ u_3 &= i+3j-7k-7t \\ u_4 &= i-3j-7k+7l \end{aligned} \iff \begin{cases} i = \frac{1}{10}(7u_1+7u_2-2u_3-2u_4) \\ j = \frac{1}{10}(7u_1-7u_2-3u_3+3u_4) \\ k = \frac{1}{10}(u_1+u_2-u_3-u_4) \\ l = \frac{1}{10}(3u_1-3u_2-2u_3+2u_4) \end{cases}$$

de donde

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y

$$M^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & -7 \\ -3 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3074 ▲002594

Sea A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Se determina y se factoriza el polinomio característico de A.*

   Sea P_A el polinomio característico de A, se tiene

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-6X+8)$$
$$= (4-X)(X-4)(X-2) = (2-X)(4-X)^2.$$

2. *Demostrar que A es diagonalizable y determinar una matriz D diagonal y una matriz P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.*

   El polinomio P_A admite dos raíces, entonces la matriz A admite dos valores propios, $\lambda_1 = 2$, valor propio simple y $\lambda_2 = 4$, valor propio doble. Determinar los subespacios propios asociados. Denotemos $E_1 = \{\overrightarrow{V} = (x,y,z)/A\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{V}\}$, luego se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x+4y+2z = 2y \\ -x+3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x. \end{cases}$$

El subespacio propio E_1 asociada al valor propio 2 es una recta vectorial, cuyo vector director es $\overrightarrow{e}_1 = (1,-2,1)$. Denotemos $E_2 = \{\overrightarrow{V} = (x,y,z)/A\overrightarrow{V} = 4\overrightarrow{V}\}$, luego se resuelve el sistema

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x.$$

El subespacio propio E_2 asociada al valor propio 4 es el plano vectorial, de ecuación $z = -x$, donde una base es dada, por ejemplo por los vectores $\overrightarrow{e}_2 = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{e}_3 = (1,0,-1)$. Se observa que se puede leer directamente en la matriz A, el hecho de que el vector $\overrightarrow{e}_2$ es vector propio asociado al valor propio 4.

Las dimensiones de los subespacios propios son iguales a las multiplicidades de los valores propios correspondientes, en consecuencia, el espacio $\mathbb{R}^3$ admite una base de vectores propios y la matriz A es diagonalizable.

Denotemos P la matriz de pasaje, se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, si D es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

se tiene la relación

$$A = PDP^{-1}.$$

3. *Se da una justificación, pero sin cálculos, el polinomio minimal de A.*

   La matriz A es diagonalizable, entonces su polinomio minimal tiene solo raíces simples, además, las raíces del polinomio minimal son exactamente los valores propios de A y el polinomio minimal es un polinomio unitario que divide al polinomio característico. Se tiene entonces

$$Q_A(X) = (X-2)(X-4).$$

4. *Se calcula A^n, para $n \in \mathbb{N}$.*

   Sea ha visto, en la pregunta 2), que $A = PDP^{-1}$, por lo tanto se tiene, para $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$, por lo que

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

   se tiene que calcular P^{-1}. Se sabe que $P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\tilde{P}$, de donde

$$\det P = -2,\ \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces

$$A^n = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2\cdot 4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3075 ▲002595

Sea A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Se calcula el polinomio característico y se determinan los valores propios de A.*
   el polinomio característico $P_A(X)$ es igual a
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1.$$
   Calculemos sus raíces, el discriminante reducido de este polinomio cuadrático es igual a $\Delta' = (-1)^2 - (-1) = 2$, así son las raíces
   $$\lambda_1 = 1+\sqrt{2} \text{ y } \lambda_2 = 1-\sqrt{2},$$
   este son los valores propios de A.
2. Se denota $\lambda_1 > \lambda_2$ valores propios de A, E_1 y E_2 los subespacios propios asociados. *Se determina una base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2})$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{\varepsilon_1} \in E_1$, $\overrightarrow{\varepsilon_2} \in E_2$, los dos vectores que tienen coordenadas de la forma* $(1, y)$.
   Se busca $\overrightarrow{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_1 = (1+\sqrt{2})\overrightarrow{\varepsilon}_1$, se calcula por lo tanto y tal que
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$
   lo que equivale a
   $$\begin{cases} 1+y = 1+\sqrt{2} \\ 2+y = (1+\sqrt{2})y \end{cases}$$
   de donde $y = \sqrt{2}$ y $\overrightarrow{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Se busca $\overrightarrow{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot \overrightarrow{\varepsilon}_2 = (1-\sqrt{2})\overrightarrow{\varepsilon}_2$, se calcula por lo tanto y tal que
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1-\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$
   lo que equivale a
   $$\begin{cases} 1+y = 1-\sqrt{2} \\ 2+y = (1-\sqrt{2})y \end{cases}$$
   de donde $y = -\sqrt{2}$ y $\overrightarrow{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. Sea $\overrightarrow{x}$ un vector de $\mathbb{R}^2$, se denota (α,β) sus coordenadas en la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})$. *Demostrar que, para $n\in\mathbb{N}$, se tiene*
$$A^n\overrightarrow{x}=\alpha\lambda_1^n\overrightarrow{\varepsilon_1}+\beta\lambda_2^n\overrightarrow{\varepsilon_2}.$$
Se tiene $\overrightarrow{x}=\alpha\overrightarrow{\varepsilon}_1+\beta\overrightarrow{\varepsilon}_2$, de donde, por linealidad $A\overrightarrow{x}=\alpha A\overrightarrow{\varepsilon}_1+\beta A\overrightarrow{\varepsilon}_2$ y $A^n\overrightarrow{x}=\alpha A^n\overrightarrow{\varepsilon}_1+\beta A^n\overrightarrow{\varepsilon}_2$. Por tanto, se demuestra, por inducción en n, que $A^n\overrightarrow{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\overrightarrow{\varepsilon}_1$ e igualmente $A^n\overrightarrow{\varepsilon}_2=\lambda_2^n\overrightarrow{\varepsilon}_2$.
Para $n=1$, esta es la definición de vectores propios.
Sea n fijo, tal que $A^n\overrightarrow{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\overrightarrow{\varepsilon}_1$, se tiene entonces $A^{n+1}\overrightarrow{\varepsilon}_1=A.A^n\overrightarrow{\varepsilon}_1=\lambda_1^nA\overrightarrow{\varepsilon}_1=\lambda_1^{n+1}\overrightarrow{\varepsilon}_1$. Así, para todo $n\in\mathbb{N}$, se tiene $A^n\overrightarrow{\varepsilon}_1=\lambda_1^n\overrightarrow{\varepsilon}_1$, e igualmente, $A^n\overrightarrow{\varepsilon}_2=\lambda_2^n\overrightarrow{\varepsilon}_2$, de donde el resultado.

4. Denotemos $A^n\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. *Se expresa a_n y b_n en función de α, β, λ_1 y λ_2 y se deduce que, si $\alpha\neq 0$, la sucesión $\frac{b_n}{a_n}$ tiende a $\sqrt{2}$, cuando n tiende a $+\infty$.*
De acuerdo a la pregunta precedente y los vectores $\overrightarrow{\varepsilon}_1$ y $\overrightarrow{\varepsilon}_2$ obtenidos en 2) se tiene
$$A^n\overrightarrow{x}=\alpha\lambda_1^n\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}+\beta\lambda_2^n\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$$
de donde
$$\begin{cases}a_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n\\ b_n=\sqrt{2}(\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n)\end{cases}$$
Se supone $\alpha\neq 0$, para n bastante grande, se tiene
$$\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n},$$
por lo tanto,
$$|\lambda_1|=|1+\sqrt{2}|>1\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\lambda_1^n=+\infty,$$
y
$$|\lambda_2|=|1-\sqrt{2}|<1\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\lambda_2^n=0.$$
De ahí la equivalencia
$$\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n-\beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n}\sim\sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n}{\alpha\lambda_1^n}=\sqrt{2}.$$
Se tiene así
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sqrt{2}.$$

5. *Se explica, sin cálculo, ¿cómo obtener, a partir de las preguntas anteriores, una aproximación de $\sqrt{2}$ por una sucesión de números racionales.*
La matriz A es con coeficientes enteros, también, para todo $n\in\mathbb{N}$, la matriz A^n es con coeficientes enteros. Si se elige un vector $\overrightarrow{x}$, con coordenadas enteras en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, entonces las coordenadas a_n y b_n del vector $A^n\overrightarrow{x}$ son enteros y nos proporcionan una sucesión $\dfrac{b_n}{a_n}$ de números racionales que tiende a $\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 3076 ▲002596

Sea $P(X)$ un polinomio de $\mathbb{C}[X]$, sea A una matriz de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Se denota B la matriz : $B=P(A)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Demostrar que si $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A de valor propio λ, entonces $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de B de valor propio $P(\lambda)$.*

   Sea $\overrightarrow{x} \neq 0$ tal que $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, se denota $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, se tiene

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d,$$

   donde I_n denota la matriz unitaria. Por tanto, para $k \in \mathbb{N}$, se tiene $A^k\overrightarrow{x} = \lambda^k\overrightarrow{x}$, de donde

$$B\overrightarrow{x} = P(A)\overrightarrow{x} = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \overrightarrow{x} = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right)\overrightarrow{x} = P(\lambda)\overrightarrow{x},$$

   lo que prueba que $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de la matriz $B = P(A)$, para el valor propio $P(\lambda)$.

2. El propósito de esta pregunta es demostrar que los valores propios de B son todos de la forma $P(\lambda)$, con λ valor propio de A. Sea $\mu \in \mathbb{C}$, se descompone el polinomio $P(X) - \mu$ como producto de factores de grado 1 :

$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_r).$$

   (a) *Demostrar que* $\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n)\cdots\det(A - \alpha_r I_n)$. Dada la descomposición del polinomio $P(X) - \mu$, se tiene

$$P(A) - \mu I_n = aI_n(A - \alpha_1 I_n)\cdots(A - \alpha_r I_n)$$

   de donde

$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n)\cdots\det(A - \alpha_r I_n)$$

   Porque el determinante es una forma multilineal (de donde, el a^n) y el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes.

   (b) *Se deduce que si μ es valor propio de B, entonces existe un valor propio λ de A tal que $\mu = P(\lambda)$.* Si μ es un valor propio de B, entonces, por definición, $\det(B - \mu I_n) = 0$, así, teniendo en cuenta la pregunta anterior, existe un α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, tal que $\det(A - \alpha_i I_n) = 0$, es decir que uno de los α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, es valor propio de A. Por tanto, para $1 \leqslant i \leqslant r$, $P(\alpha_i) - \mu = 0$, entonces si μ es un valor propio de B, se tiene $\mu = P(\alpha_i)$, donde α_i es un valor propio de A.

3. Se denota S_A el conjunto de valores propios de A. *Demostrar que*

$$S_B = \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}.$$

   Sea λ un valor propio de A, se ha demostrado en 1) que $P(\lambda)$ es un valor propio de B, así $\{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\} \subset S_B$. Recíprocamente, si μ es un valor propio de B, entonces, de acuerdo a 2), existe un valor propio λ de A tal que $\mu = P(\lambda)$, así se tiene $S_B \subset \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}$, por lo tanto, la igualdad de los dos conjuntos.

4. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ valores propios de A y sea $Q(X)$ el polinomio

$$Q(X) = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_r),$$

   se denota C la matriz $C = Q(A)$.

   (a) *Demostrar que* $S_C = \{0\}$. Según la pregunta anterior, se tiene $S_C = \{Q(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}$. Por tanto, por definición del polinomio $Q(X)$, se tiene $Q(\lambda) = 0$, para todo valor propio λ de A, así, $S_C = \{0\}$.

(b) *Se deduce que el polinomio característico de C es $(-1)^n X^n$ y que $C^n = 0$.*
Los valores propios de C son las raíces de su polinomio característico, por lo que C admite un valor propio único : 0, así $P_C(X) = (-1)^n X^n$. Por otro lado, por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene $P_C(C) = 0$, así $(-1)^n C^n = 0$, por lo tanto $C^n = 0$.

Solución del ejercicio 3085 ▲003379

2. $D^{-1} = BC^{-1}A + I_p$.

Solución del ejercicio 3086 ▲003499

1. 0 y las raíces de $6\lambda^2 - 6n\lambda - n(n-1)(2n-1) = 0$.
2. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha, \quad -\operatorname{sen}\alpha, \quad -\operatorname{sen}2\alpha$.

Solución del ejercicio 3087 ▲003500

1. $\operatorname{rg}(A) = 2 \Rightarrow 0$ es valor propio de orden al menos $n-2$. $E_0 = \{a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} = x_n = 0\}$.
vp $\lambda \neq 0 : \lambda^2 - a_n\lambda - (a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2) = 0$. Hay dos raíces distintas, $E_\lambda = \operatorname{vect}((a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda))$.
2. A es diagonal. vp = 0 y a_n.

Solución del ejercicio 3088 ▲003501

1. $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.
2. $-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Solución del ejercicio 3089 ▲003502

Sea $P_n(x)$ el polinomio característico de x y $Q_n(x)$ la de la matriz obtenida de a partir A reemplazando el primero 1 por 2. Se tiene las relaciones de recurrencia :

$$P_n(x) = (1-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x), \qquad Q_n(x) = (2-x)Q_{n-1}(x) - Q_{n-2}(x).$$

De donde para $x \notin \{0,4\}$:

$$P_n(x) = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha^{2n})}{\alpha^n(1+\alpha)}, \qquad \text{con } x = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

Los valores propios de A otro que 0 y 4 son los reales $x_k = 2(1-\cos(k\pi/n))$, con $0 < k < n$ y 0 es también valor propio (suma de las columnas nulas) por lo que no hay otros.

Solución del ejercicio 3090 ▲003506

$\lambda = 0 : E_0 = \{\overrightarrow{x} \text{ tal que } x_1 + \cdots + x_q + x_{n-q+1} + \cdots + x_n = 0\}$,
$\lambda = 2\min(p,q) : E_\lambda = \operatorname{vect}((\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}))$.

Solución del ejercicio 3094 ▲003512

$u(X^k) = -kX^k + (k-2n)X^{k+1} \Rightarrow$ la matriz de u es triangular inferior. $\text{Spec}(u) = \{0, -1, \ldots, -2n\}$.
$\lambda = -k$: Resolver la ecuación diferencial $\Rightarrow P = cX^k(X-1)^{2n-k}$.

Solución del ejercicio 3095 ▲003513

$\alpha^3 : (X-\beta)(X-\gamma), \quad \beta^3 : (X-\alpha)(X-\gamma), \quad \gamma^3 : (X-\alpha)(X-\beta)$.

Solución del ejercicio 3096 ▲003514

$\lambda = 1 \quad : P = Q\big((X-1)^2\big)$.
$\lambda = -1 : P = (X-1)Q\big((X-1)^2\big)$.

Solución del ejercicio 3097 ▲003515

$\lambda = 1 : P = aX + b$.

Solución del ejercicio 3098 ▲003516

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & \ldots & -a^n \\ & 2 & -2a & & (0) \\ & & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & -na \\ (0) & & & & n+1 \end{pmatrix}.$$

$\ker f = \{\text{polinomios constantes}\}$, $\text{Im} f = \{\text{polinomios divisibles por } X-a\}$.
Valores propios : $0, 2, 3, \ldots, n+1$. Para $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $E_k = \text{vect}\big((X-a)^{k-1}\big)$.

Solución del ejercicio 3099 ▲005655

Sea $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$\begin{aligned} AP - (X^4 - X)P = (X-1)P &= aX^4 + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (d-c)X - d \\ &= a(X^4 - X) + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d, \end{aligned}$$

y entonces $AP = (X^4 - X)(P + a) + (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d$ y entonces $f(P) = (b-a)X^3 + (c-b)X^2 + (a+d-c)X - d$. Así, f es un endomorfismo de E y la matriz de f en la base canónica $(1, X, X^2, X^3)$ de E es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -1-X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+1)(-(X+1)^3+1) = X(X+1)(X^2+3X+3).$$

A admite cuatro valores propios simples en $\mathbb{C}$, dos reales 0 y -1 y dos no reales $-1+j$ y $-1+j^2$. χ_f no se divide en $\mathbb{R}$ y entonces f no es diagonalizable.
• Sea $P \in E$. $P \in \ker f \Leftrightarrow b-a = c-b = a+d-c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ y $d = 0$. $\ker f = \text{vect}(X^3+X^2+X)$.
• Sea $P \in E$. $P \in \ker(f+\text{Id}) \Leftrightarrow b = c = a+d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ y $d = -a$. $\ker(f+\text{Id}) = \text{vect}(X^3-1)$.
• $\text{rg}(f) = 3$ e inmediatamente, $\text{Im} f = \text{vect}(X-1, X^2-X, X^3-X^2)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se puede continuar :
$P \in \ker(f+(1-j)\text{Id}) \Leftrightarrow b-ja = c-jb = a+d-jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja$, $c = j^2a$ y $d = 0$. Entonces $\ker(f+(1-j)\text{Id}) = \text{vect}(X^3+jX^2+j^2X)$ y conjugando $\ker(f+(1-j^2)\text{Id}) = \text{vect}(X^3+j^2X^2+jX)$.
Observación. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ y se ha encontrado por base de vectores propios los cuatro polinomios de LAGRANGE $X^3-1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$, luego $X^3+X^2+X = X(X-j)(X-j^2)$, luego $X^3+jX^2+j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ y en fin $X^3+j^2X^2+jX = X(X-1)(X-j)$. Es una generalidad. Podemos demostrar que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ y si B a $n+1$ raíces dos a dos distintas en $\mathbb{C}$, entonces f es diagonalizable y una base de vectores propios es proporcionada por los polinomios de LAGRANGE asociados a las raíces de B y esto para un polinomio A cualquiera.

Solución del ejercicio 3100 ▲005660

1er caso. Se supone $\alpha = \beta = 0$ y entonces $uv = vu$. Porque E es un $\mathbb{C}$-espacio de dimensión finita no nula, u admite al menos un valor propio que denotamos λ. El subespacio propio E_λ correspondiente no se reduce a $\{0\}$, es estable por u y por otro lado estable por v, pues u y v conmutan. Se denota u' y v' las restricciones de u y v en el subespacio E_λ. u' y v' son endomorfismos de E_λ. De nuevo, E_λ es un $\mathbb{C}$-espacio de dimensión finita no nula y por lo tanto, v' admite al menos un vector propio x_0. Por construcción, x_0 es un vector propio común a u y v.
2o caso. Se supone por ejemplo $\alpha \neq 0$.

$$uv - vu = \alpha u + \mu v \Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v$$
$$\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ y } g = \frac{1}{\alpha} v.$$

Se va a buscar un vector propio común a u y v en el núcleo de f.
Demostrar primeramente que $\ker f$ no es nulo (se puede demostrar que f en realidad, es nilpotente (ejercicio 3395) pero se puede demostrar directamente una propiedad un poco menos fuerte).
Si f es invertible, la igualdad $fg - gf = f$ proporciona $(g+\text{Id}) \circ f = f \circ g$ y entonces $g + \text{Id} = f \circ g \circ f^{-1}$. Así, g y $g+\text{Id}$ tienen el mismo polinomio característico o de nuevo, si λ es valor propio de g, entonces $\lambda+1$ es aún el valor propio de g. Pero entonces $\lambda+2$, $\lambda+3, \dots$ también son valores propios de g y g tiene una infinidad de valores propios distintos dos a dos. Esto se excluye y por lo tanto, $\ker f$ no se reduce a $\{0\}$.
Ahora, si x es un vector de $\ker f$, se tiene $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ y $g(x)$ está en $\ker f$. Entonces g deja $\ker f$ estable y su restricción a $\ker f$ es un endomorfismo de $\ker f$ que admite al menos un valor propio y por lo tanto, al menos un vector propio. Este vector es de hecho un vector propio común a f y g. Finalmente, si x es el vector propio común de f y g, entonces x es un vector propio de $v = \frac{1}{\alpha} g$ y de $u = \frac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x es un vector propio común a u y v.

Solución del ejercicio 3101 ▲005674

1. Sea $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sea F una primitiva de f sobre $\mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^*$, se tiene $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$. F es continua en $\mathbb{R}$, por lo tanto $\varphi(f)$ es continua en $\mathbb{R}^*$. Además, F es derivable en 0 :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$
Finalmente, $\varphi(f)$ es continua en $\mathbb{R}$. Así, φ es una aplicación de E en E. La linealidad de φ es claro y finalmente
$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})).}$$

2. Si f está en $\ker(\varphi)$, entonces $f(0)=0$ y para todo x no nulo, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. Por derivación se tiene $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$, lo que es aún cierto para $x=0$ y entonces $f=0$. Finalmente, $\ker(\varphi) = \{0\}$ y φ es inyectiva. φ no es sobreyectiva porque para toda $f \in E$, $\varphi(f)$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^*$. Pero entonces por ejemplo, la aplicación $g:\ x \mapsto |x-1|$ está en E, pero no está en $\mathrm{Im}(\varphi)$.
$$\boxed{\varphi \text{ es inyectiva y no sobreyectiva.}}$$

3. Se busca $\lambda \in \mathbb{R}$ y f continua en $\mathbb{R}$ y no cero tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. Según la pregunta anterior, 0 no es valor propio de φ y por lo tanto, necesariamente $\lambda \neq 0$. Para $x=0$, necesariamente $f(0) = \lambda f(0)$ y por lo tanto, o bien $\lambda = 1$ o bien $f(0) = 0$. Se debe tener para todo $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt$. f es necesariamente derivable en $\mathbb{R}^*$. Para todo $x \in \mathbb{R}^*$, se tiene $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$ y por derivación, se obtiene por $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) = \lambda(xf'(x)+f(x)).$$
Sea I uno de los dos intervalos $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$.
$$\begin{aligned}\forall x\in I,\ f(x)=\lambda(xf'(x)+f(x)) &\Rightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}f(x)=0\\ &\Rightarrow \forall x\in I,\ \mathrm{e}^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}\mathrm{e}^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f(x)=0\\ &\Rightarrow \forall x\in I,\ \left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f\right)'(x)=0\\ &\Rightarrow \exists K\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ |x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f(x)=K\\ &\Rightarrow \exists K\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.\end{aligned}$$
1er caso. Si $\lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, entonces $\frac{1-\lambda}{\lambda} < 0$ y entonces $\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = +\infty$. La función $x \mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ por lo tanto no puede ser la restricción a I de una función continua en $\mathbb{R}$ solo en el caso $K=0$. Esto proporciona $f_{|]-\infty,0[} = 0$, $f_{|]0,+\infty[} = 0$ y $f(0) = 0$ por continuidad en 0. Entonces f es necesariamente nula y λ no es valor propio de φ en este caso.

2o caso. Si $\lambda = 1$, las restricciones de f a $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$ son constantes y por lo tanto, por continuidad de f en 0, f es constante en $\mathbb{R}$. Recíprocamente, funciones constantes f verifican $\varphi(f) = f$. Así, 1 es valor propio de f y el subespacio propio asociado consta de las funciones constantes.

3r caso. Si $\lambda \in]0,1[$, necesariamente $\exists (K_1,K_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

f así definida es de hecho continua en $\mathbb{R}$. Calculemos entonces $\varphi(f)$. $(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$, luego si $x > 0$,

$$(\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x K_1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\, dt = \frac{\lambda K_1}{x} x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

e igualmente si $x < 0$. En fin, $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$. Finalmente, $\varphi(f) = \lambda f$. λ es, por lo tanto el valor propio de φ ($K_1 = K_2 = 1$ proporciona una función no nula) y el subespacio propio asociado a λ es de dimensión 2. Una base de este subespacio es (f_1, f_2), donde $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Finalmente,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1].}$$

Solución del ejercicio 3125 ▲001635

$\chi_A = (-1-X)(2-X)^2$. Entonces A es diagonalizable si y solo si $\dim\ker(A-2I) = 2$. Por lo tanto $\mathrm{rg}(A-2I) = 2$, por lo tanto $\dim\ker(A-2I) = 1$, por lo tanto A no es diagonalizable. Sin embargo, χ_A se divide en $\mathbb{R}$, por lo tanto A es triangularizable en $\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A+I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z = 0 \\ -x+4y-z = 0 \\ -2x-y-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 0, \end{cases}$

por lo tanto $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Igualmente, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A-2I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4z = 0 \\ -x+y-z = 0 \\ -2x-y-5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases}$, por lo tanto $\ker(A+I) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Se sabe que $\ker((A-2I)^2)$ es de dimensión 2, y que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A-2I) \subset \ker((A-2I)^2)$. Se busca por lo tanto un segundo vector en $\ker((A-2I)^2)$, linealmente independiente de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sirve. Además : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entonces poniendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, se obtiene $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3126 ▲001636

Se tiene $A^3 = A$, por lo tanto $P = X^3 - X = (X-1)(X+1)X$ es un polinomio anulador de A. Se trata de un polinomio dividido con raíces simples, por lo que A es diagonalizable. Los valores propios de A son raíces de P, por lo tanto $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, -1\}$. Se tiene $\mathrm{rg} A = 2$, por lo tanto 0 es valor propio de la multiplicidad 2. La Resolución del sistema $(A+I)X = 0$ demuestra que $\ker(A+I) = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, por lo tanto -1 es valor propio de multiplicidad 1, por lo tanto 1 es necesariamente el valor propio de la multiplicidad 1 : se deduce que $\chi_A = X^2(X-1)(X+1)$.

Solución del ejercicio 3131 ▲001641

1. A es triangular inferior por lo que sus valores son sus coeficientes diagonales : 1, 2 y 3. A tiene tres valores propios distintos por lo que A es diagonalizable.
2. $\chi_B = -(X-1)(X+1)^2$. $B+I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $\mathrm{rg}(B+I) = 2$, $\dim(\ker B+I) = 1 < 2$ y B no es diagonalizable. $\chi_B(B) = 0$, por lo tanto $B(B^2+B-I) = I$, o sea $B^{-1} = B^2+B-I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3132 ▲001642

1. ${}^tA = A$, por lo tanto A es diagonalizable en una base ortonormada.
2. Por ejemplo : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y ${}^tQ = Q^{-1}$.

Solución del ejercicio 3162 ▲001672

$\mathrm{tr}\, a = \mathrm{tr}\, A = -1$, $\det a = \det A = -6$

$$P_a(X) = X^2 - \mathrm{tr}\, X + \det a = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3).$$

Así el espectro es $\{2, -3\}$, es de tamaño 2 como el espacio es de dimensión 2. Por el curso, a es diagonalizable y los espacios propios de dimensión 1. El espacio propio asociado al valor propio 2 es el conjunto de los (x, y) tales que $7x - 10y = 2x$ o $x = 2y$. Se puede tomar $\overrightarrow{f}_1 = (2, 1)$, para la base de este espacio propio. El espacio propio asociado al valor propio -3 es el conjunto de los (x, y) tales que $7x - 10y = -3x$ o $x = y$. Se puede tomar $\overrightarrow{f}_2 = (1, 1)$, para la base de este espacio propio. Entonces si $f = (\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2)$ se tiene

$$P = [\mathrm{Id}_E]_f^e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = [\mathrm{Id}_E]_e^f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = [a]_f^f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$D^{50}=[a^{50}]_f^f=\begin{bmatrix}2^{50} & 0\\ 0 & (-3)^{50}\end{bmatrix},\ A^{50}=[a^{50}]_e^e=PD^{50}P^{-1}=\begin{bmatrix}2\cdot 2^{50}-(-3)^{50} & -2\cdot 2^{50}+2\cdot(-3)^{50}\\ 2^{50}-(-3)^{50} & -2^{50}+2\cdot(-3)^{50}\end{bmatrix}$$

Así $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]_f^f=L=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{2n}}[a^{2n}]_e^e=PLP^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

Solución del ejercicio 3163 ▲001673

Si $x=(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in F$, es claro que $x=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_{ij}F_{ij}$. Entonces es una familia generatriz. Es independiente, porque si $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_{ij}F_{ij}$ es la matriz nula, esto implica que $x_{ij}=0$, para todo i y j. Es por lo tanto una base de F. Ella es de tamaño n^2, por lo tanto F es de dimensión n^2. Luego, si $D=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ y si $X=(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, entonces el coeficiente (i,j) de la matriz $\Phi(X)=\alpha XD+\beta DX$ es $(\alpha d_j+\beta d_i)x_{ij}$. Entonces $\Phi(F_{ij})=(\alpha d_j+\beta d_i)F_{ij}$, lo que quiere decir que F_{ij} es un vector propio de Φ, para el valor propio $\alpha d_j+\beta d_i$. El espacio F admite entonces una base de vectores propios de Φ. Por el curso, esto implica que Φ es diagonalizable. Si se representa en la base de vectores propios, el determinante de Φ es, por lo tanto el producto de los elementos diagonales, es decir $\det\Phi=\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(\alpha d_j+\beta d_i)$. Más generalmente $\det(\Phi-\lambda\operatorname{Id}_F)=\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(\alpha d_j+\beta d_i-\lambda)$.

Solución del ejercicio 3164 ▲001674

Denotar $D_n=\det B$. Entonces $D_1=2\cos\theta=\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ y $D_2=4\cos^2\theta-1=\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta}$. Si $n>2$, desarrollar D_n, con respecto a la última fila, comenzando de nuevo con uno de los determinantes de orden $n-1$ obtenidos. Se obtiene $D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}$. Hacer la hipótesis de recurrencia que $D_k=\frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, para $k<n$. Sea ha visto que esto es cierto para $k=1$ y 2. Entonces por identidades trigonométricas clásicas $D_n=\frac{2\cos\theta\operatorname{sen}n\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, y la recurrencia se amplía. Porque $\operatorname{sen}x=0\Leftrightarrow$ existe un entero relativo k tal que $x=k\pi$, entonces $D_n=0$ si y solo si existe $k=1,2,\dots,n$ tal que $\theta=\frac{k\pi}{n+1}$ otros valores de k son excluidos porque $0<\theta<\pi$. Por definición de P_A se tiene $P_A(-2\cos\theta)=D_n=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ que se anula para los n números distintos $-2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1,2,\dots,n$ que son necesariamente todos los valores propios de A. Los valores propios de $2I_n+A$ son, por lo tanto $2-2\cos\frac{k\pi}{n+1}=4\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n+2}>0$. El espectro de $2I_n-A$ es el mismo.

Solución del ejercicio 3167 ▲002563

Sea M la matriz real 3×3 siguiente :

$$M=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

1. *Determinar los valores propios de M.*
   Estas son las raíces del polinomio característico

$$P_M(X)=\begin{vmatrix}-X & 2 & -1\\ 3 & -2-X & 0\\ -2 & 2 & 1-X\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}3 & -2-X\\ -2 & 2\end{vmatrix}+(1-X)\begin{vmatrix}-X & 2\\ 3 & -2-2X\end{vmatrix}\tag{32}$$

$$=(1-X)(X^2+2X-8)\tag{33}$$

$$=(1-X)(X+4)(X-2).\tag{34}$$

La matriz M por lo tanto admite tres valores propios distintos que son : $1, 2$, y -4.

2. *Demostrar que M es diagonalizable.*

   Se viene de ver M, matriz real 3×3, admite tres valores propios reales distintos, esto prueba que M es diagonalizable.

3. *Determinar una base de vectores propios y P la matriz de pasaje.*

   Los tres subespacios propios distintos son de dimensión 1, es suficiente determinar un vector propio para cada uno de los valores propios. $\lambda = 1$: El vector $\overrightarrow{u}$ de coordenadas (x, y, z) es un vector propio para el valor propio 1 si y solo si

$$\begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z. \end{cases}$$

   El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$, es la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{e_1}$ de coordenadas $(1, 1, 1)$.

   $\lambda = 2$: El vector $\overrightarrow{u}$ de coordenadas (x, y, z) es un vector propio para el valor propio 2 si y solo si

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

   El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{e_2}$ de coordenadas $(4, 3, -2)$. $\lambda = -4$: El vector $\overrightarrow{u}$ de coordenadas (x, y, z) es un vector propio para el valor propio -4 si y solo si

$$\begin{cases} -4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3x = 0. \end{cases}$$

   El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = -4$ es la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{e_3}$ de coordenadas $(2, -3, 2)$. Los vectores $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ y $\overrightarrow{e_3}$ forman una base de E compuesto de vectores propios, la matriz de pasaje P es igual a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *Expresando M^k en función de D^k, luego se calcula M^k.*

   Se tiene

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

   para $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix},$$

   y $M^k = PD^kP^{-1}$. Calculemos así la matriz P^{-1} : se tiene $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(\mathrm{comP})^t$. Por tanto

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -30,$$

y

$$\mathrm{com}P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

de donde

$$P^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces

$$M^k = PD^kP^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -5.2^{k+2} - 10(-4)^k & -12+12(-4)^k & -18+5.2^{k+2}-2(-4)^k \\ -15.2^k - 15(-4)^k & -12-18(-4)^k & -18+5.2^{k+1}+3(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10(-4)^k & -12+12(-4)^k & -18-5.2^{k+1}-2(-4)^k \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3168 ▲002566

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que A es diagonalizable y encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
Comenzar por calcular el polinomio característico de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X).$$

Las raíces del polinomio característico son los reales 1, con la multiplicidad 2, y 2, con la multiplicidad 1. Determinar los subespacios propios asociados : Sea E_1 el subespacio propio asociado al valor propio doble 1. $E_1 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, A.V = V\}$,

$$V \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0.$$

E_1 es, por lo tanto un plano vectorial, cuyos vectores $e_1 = (1,1,0)$ y $e_2 = (0,1,1)$ forman una base. Sea E_2 el subespacio propio asociado al valor propio simple 2. $E_2 = \{V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, A.V = 2V\}$,

$$V \in E_2 \iff \begin{cases} x = 2x \\ y = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \iff x = 0, y = 0.$$

E_2 es, por lo tanto una recta vectorial, cuyo vector $e_3 = (0,0,1)$ es una base. Las dimensiones de los subespacios propios son iguales a la multiplicidad de los valores propios correspondientes, la matriz A es, por lo tanto diagonalizable. En la base (e_1, e_2, e_3) el endomorfismo representado por A (en la base canónica) tiene por matriz.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz de pasaje

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica $P^{-1}AP = D$.

Solución del ejercicio 3169 ▲002567

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factorizar el polinomio característico de A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (1-X) = (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(X^2-2X+2)$$

se factoriza ahora el polinomio $X^2 - 2X + 2$, el discriminante reducido $\Delta' = 1 - 2 = -1$, este polinomio por lo tanto no admite raíces reales, si no dos raíces complejas conjugadas que son : $1+i$ y $1-i$. Se tiene $P_A(X) = (1-X)(1-i-X)(1+i-X)$. La matriz A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ porque su polinomio característico no tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$, es diagonalizable en $\mathbb{C}$ porque es una matriz 3×3 que admite tres valores propios distintos.

Solución del ejercicio 3170 ▲002568

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Demostrar que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. El polinomio característico $P_A(X)$ es igual a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

determinar sus raíces : calculemos el discriminante :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-c^2) = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 = a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 = (a-d)^2 + 4c^2 \geqslant 0.$$

Se tiene $\Delta = 0 \iff a-d = 0$ y $c = 0$, pero, si $c = 0$, la matriz A es ya diagonal. Si no $\Delta > 0$ y el polinomio característico admite dos raíces reales distintas, lo que prueba que la matriz siempre es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 3174 ▲002575

Se supone que una población x de conejos y una población y de lobos se rigen por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

1. Se diagonaliza la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Por esto se determinan sus propios valores :
$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3).$$
Así, la matriz A admite dos valores propios distintos, que son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Es diagonalizable. Determinar una base de vectores propios :
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff x = y,$$
de ahí el vector propio $u_1 = (1,1)$ asociada al valor propio $\lambda_1 = 2$.
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff x = 2y,$$
de ahí el vector propio $u_2 = (2,1)$ asociada al valor propio $\lambda_2 = 3$. En la base (u_1,u_2), la matriz se escribe
$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Se tiene $A = PA'P^{-1}$, donde
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Expresar el sistema (S) y sus soluciones en una base de vectores propios de A. En la base (u_1,u_2), el sistema (S) se convierte en
$$(S') \quad \begin{cases} X' = 2X \\ Y' = 3Y. \end{cases}$$
Sus soluciones son las funciones
$$\begin{cases} X(t) = X(0)\mathrm{e}^{2t} \\ Y(t) = Y(0)\mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$$
3. Para representar gráficamente las trayectorias de (S) en el sistema de referencia (Oxy), primero se traza el sistema de referencia (O,u_1,u_2) en el sistema de referencia $(0xy)$, después, se trazan las curvas
$$Y = \frac{Y(0)}{X(0)}X^{3/2},$$
en el sistema de referencia (O,u_1,u_2) (o OXY).
4. Se ve en el dibujo que si $Y(0)$ es estrictamente positivo, entonces la población de conejos, $x(t)$ tiende a $+\infty$, cuando t tiende a $+\infty$. Si $Y(0)$ es estrictamente negativo, entonces la población de conejos se extingue en la medida en que $x(t)$ en este caso tiende a $-\infty$.

Solución del ejercicio 3175 ▲002576

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculemos los valores propios de A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3.$$

La matriz A admite un valor propio triple que es $\lambda = 1$, no puede ser diagonalizable, de lo contrario su subespacio propio sería de dimensión 3 por lo que, $A \neq I$.

2. Calculemos $(A-I)^2$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que $A^n = nA + (1-n)I$ utilizando la fórmula binomial de Newton.

$$A^n = (A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{n-k} = C_n^0 I^n + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Porque, para $k \geqslant 2$, se tiene $(A-I)^k = 0$.

3. *Sean* $P(X) = (X-1)^2$ *y* $Q \in \mathbb{R}[X]$. Expresar el resto de la división euclidiana de Q por P en función de $Q(1)$ y $Q'(1)$, donde Q' es el polinomio derivado de Q. Existe de polinomios S y R, con $d^\circ R < d^\circ P$ o $R = 0$, tales que

$$Q(X) = S(X)(X-1)^2 + R(X).$$

Denotemos $R(X) = aX + b$ ($R(X)$ es de grado 1, pues P es de grado 2) y derivando, se obtiene

$$Q'(X) = S'(X)(X-1)^2 + 2(X-1)S(X) + a,$$

por lo tanto se tiene $Q(1) = R(1) = a + b$ y $Q'(1) = a$, es decir $a = Q'(1)$ y $b = Q(1) - Q'(1)$, de donde

$$R(X) = Q'(1)X + (Q(1) - Q'(1)).$$

Según la pregunta 2), se observa que $P(A) = 0$, escogiendo el polinomio $Q(X) = X^n$ se tiene $Q(1) = 1$ y $Q'(1) = n$, por lo tanto

$$Q(A) = A^n = R(A) = Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))I = nA + (1-n)I.$$

4. (a) Demostrar que la imagen de $\mathbb{R}^3$ por el endomorfismo $(A-I)$ es un subespacio vectorial de dimensión 1.

$$\forall (X,Y,Z) \in \operatorname{Im}(A-I), \exists\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (x+y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lo que prueba que $\operatorname{Im}(A-I)$ es la recta vectorial generada por el vector $\varepsilon_2 = (2,-1,1)$.

(b) Determinar un vector ε_3 tal que $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Se establece $\varepsilon_3 = (x, y, z)$,

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = x + 2 \\ -x + z = y - 1 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x + y - z) = 2 \\ -1(x + y - z) = -1 \\ (x + y - z) = +1 \end{cases} \iff x + y - z = 1.$$

Se toma, por ejemplo $\varepsilon_3 = (1, 0, 0)$. Determinar un vector propio ε_1 de u no colineal con ε_2.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \iff x + y - z = 0.$$

Se puede tomar el vector $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$ que no es colineal a ε_2.

(c) Escribir la matriz de u en la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, así como las matrices de paso. Se tiene $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ y $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ por lo tanto, la matriz de u en la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de pasaje P es igual a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Para encontrar A^n, se escribe $A' = I + N$, donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $N^2 = 0$. Por otro lado, se tiene $A = PA'P^{-1}$, de donde

$$\begin{aligned} A^n &= PA'^n P^{-1} = P(I + N)^n P^{-1} = P(I + nN)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= nA + (1-n)I. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3176 ▲002577

Sean M y A dos matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $MA = AM$. Se supone que M admite n valores propios distintos.

1. *Sea x un vector propio de M de valor propio λ.*

   Demostrar que $MAx = \lambda Ax$. Se tiene $Mx = \lambda x$, por lo tanto $AMx = A\lambda x = \lambda Ax$. Pero, $AM = MA$, por lo tanto $MAx = AMx = \lambda Ax$. Esto prueba que el vector Ax es un vector propio de M, para el valor propio λ, y como los valores propios de M se supone que son distintos, los subespacios propios son de dimensión 1, por lo tanto Ax es colineal a x. Así, existe un real μ tal que $Ax = \mu x$, por lo tanto x es un vector propio de A.

2. Se denotan ahora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios de M y $\mu_1, \dots, \mu_n$ los de A.

   (a) Demostrar la siguiente igualdad :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

   Se trata del determinante de Vandermonde. Denotar el $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La demostración se hace por inducción sobre n. Para $n = 2$, es evidente. Se supone el resultado verdadero para $n-1$. En $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, restar a cada columna λ_1 veces la precedente (comenzando con la última columna). Se obtiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

   Se factoriza entonces cada fila por $(\lambda_i - \lambda_1)$ y se obtiene

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

   pues $V(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$ por hipótesis de recurrencia. Este determinante es el determinante del siguiente sistema,

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ \quad\vdots \\ \mu_n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1}. \end{cases}$$

   por lo que $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ ya que los λ_i se supone que son distintos, es, por lo tanto un sistema de Cramer, admite por lo tanto una solución única $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Sean M' y A' las siguientes matrices diagonales* :

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Demostrar que existen números reales $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tales que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k.$$

Dadas las matrices A' y M' la existencia de reales tales que

$$A' = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M'^k$$

es equivalente a la existencia de una solución para el sistema anterior, de ahí el resultado. Se deduce que existen reales $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tales que

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

La matriz M admite n vectores propios linealmente independientes que también son vectores propios de la matriz A. Por lo tanto, existe la misma matriz de pasaje P tal que $M = PM'P^{-1}$ y $A = PA'P^{-1}$, y se tiene la igualdad

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k.$$

Solución del ejercicio 3177 ▲002581

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar el polinomio característico de A. Se tiene

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} -3-X & -2 & -2 \\ 2 & 1-X & 2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3-X & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 4-X \\ 3 & 1+X & 2-X \end{vmatrix} = -(1+X) \begin{vmatrix} -3-X & -2 \\ 5 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)[(X-4)(X+3)+10] = -(1+X)(X^2-X-2) \\ &= -(1+X)^2(X-2). \end{aligned}$$

2. Demostrar que los valores propios de A son -1 y 2 y determinar los subespacios propios asociados. Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico, estos son entonces reales -1 y 2. Los subespacios propios asociados son los conjuntos

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A + I_3)$$

y

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A - 2I_3)..$$

Se tiene

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = -x \\ 2x + y + 2z = -y \\ 3x + 3y + 2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

El subespacio característico E_{-1} asociada al valor propio -1 es, por lo tanto el plano vectorial de ecuación $x + y + z = 0$, es de dimensión 2, igual a la multiplicidad de la raíz -1. Se tiene

$$(x,y,z) \in E_2 \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 2x \\ 2x + y + 2z = 2y \\ 3x + 3y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 0, \end{cases}$$

que equivale a $y = -x$ y $2z = -3x$. El subespacio característico E_2 asociada al valor propio 2 es, por lo tanto la recta vectorial generada por el vector $(2,-2,-3)$, es de dimensión 1, igual a la multiplicidad de la raíz 2.

3. Demostrar que A es diagonalizable y dar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de u es diagonal. La pregunta anterior y los resultados obtenidos sobre las dimensiones de los subespacios propios permiten afirmar que la matriz A es diagonalizable. Una base en $\mathbb{R}^3$ obtenida a partir de bases de subespacios propios es una base de vectores propios en la que la matriz de u es diagonal. Por ejemplo, en la base formada por los vectores $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$ y $u_3 = (2,-2,-3)$, la matriz de u es la matriz D que se escribe

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. La matriz buscada P es la matriz de pasaje que expresa la base de los vectores propios (u_1,u_2,u_3) en la base canónica. Así esta es la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $P^{-1}AP = D$.

Solución del ejercicio 3178 ▲002583

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Explicar sin cálculo por qué la matriz A no es diagonalizable. Se observa que el polinomio característico de A es igual a $(1-X)^4$. Así la matriz A ¿admite un valor propio único : $\lambda = 1$, si es diagonalizable, existe una matriz P invertible tal que $A = PI_4P^{-1}$, entonces $A = I_4$, sin embargo, este no es el caso, por lo tanto la matriz A no es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3179 ▲002584

Sea A una matriz 2×2, con coeficientes reales. Se supone que en cada columna de A la suma de los coeficientes es igual a 1.

1. Sean (x_1, x_2), (y_1, y_2) dos vectores de $\mathbb{R}^2$, se supone que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
demostrar que entonces
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
Teniendo en cuenta las hipótesis, la matriz A es de la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$
donde a y b son reales. Se tiene entonces
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 = y_2 \end{cases}$$
este que implica $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.
2. Demostrar que el vector $\varepsilon = (1, -1)$ es un vector propio de A. Si $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, entonces $y_1 + y_2 = 0$, por lo tanto $y_2 = -y_1$ y $A\varepsilon = y_1\varepsilon$, lo que prueba que ε es un vector propio. También se puede ver de la siguiente manera
$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$
Se denota $\lambda = (a-b)$ su propio valor.
3. Demostrar que si v es un vector propio de A no colineal con ε, entonces el valor propio asociado con v es igual a 1. Sea $v = (x_1, x_2)$ un vector propio de A no colineal con ε, se denota μ su propio valor, se tiene $Av = \mu v$, y, de acuerdo a la pregunta 1), se tiene
$$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2),$$
lo que implica $\mu = 1$, pues v se supone no colineal a ε, por lo tanto $x_1 + x_2 \neq 0$.
4. Sea $e_1 = (1, 0)$. Demostrar que la matriz, en la base (e_1, ε), del endomorfismo asociado con A es de la forma
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Para esto se escribe Ae_1 y $A\varepsilon$ en la base (e_1, ε). Se tiene por un lado $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$ y, por otra parte,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz en la base (e_1, ε)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = a-1$ y $\lambda = a-b$. Se deduce que si $\lambda \neq 1$, entonces A es diagonalizable en $\mathbb{R}$. El polinomio característico de A es igual a $(1-X)(\lambda - X)$, así, si $\lambda \neq 1$, admite dos raíces distintas lo que prueba que A es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3180 ▲002586

I

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matriz siguiente

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Primera parte :

1. *Factorizar el polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ como producto de factores de primer grado.*
   Se tiene

$$\begin{aligned} P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ -1 & 1 & \alpha - X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)[(-2-X)(\alpha - X) + \alpha + 1] \\ &= -(X+1)[X^2 + (2-\alpha)X + 1 - \alpha]. \end{aligned}$$

   Factorizar el polinomio $X^2 + (2-\alpha)X + 1 - \alpha$, su discriminante es igual a

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

   Se tiene entonces $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, lo que nos da las dos raíces

$$\lambda_1 = \frac{\alpha - 2 - \alpha}{2} = -1 \text{ y } \lambda_2 = \frac{\alpha - 2 + \alpha}{2} = \alpha - 1.$$

   El polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ se factoriza así como

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X - \alpha + 1).$$

2. *Determinar según el valor del parámetro α los valores propios distintos de A_α y su multiplicidad.*
   Los valores propios de A_α son las raíces del polinomio característico P_{A_α}, así, - si $\alpha = 0$, la matriz A_α admite un valor propio triple $\lambda = -1$, - si $\alpha \neq 0$, la matriz A_α admite dos valores propios distintos $\lambda_1 = -1$ valor propio doble y $\lambda_2 = \alpha - 1$, valor propio simple.

3. *Determinar los valores de α, para los cuales la matriz A_α es diagonalizable.*

   Es claro que en el caso $\alpha = 0$, la matriz no es diagonalizable, en verdad si fuera, existe una matriz invertible P tal que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, lo que no es el caso.

   Si $\alpha \neq 0$, la matriz A_α es diagonalizable si el subespacio propio asociado al valor propio -1 es de dimensión 2. Determinar este subespacio propio.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\},$$

   así,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x + (\alpha+1)z = -x \\ x - 2y = -y \\ -x + y + \alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

   Es necesario distinguir los casos $\alpha = -1$ y $\alpha \neq -1$.

   – Si $\alpha = -1$, el subespacio E_{-1} es el plano vectorial de ecuación $x = y$, en este caso la matriz A_α es diagonalizable.

   – Si $\alpha \neq -1$, el subespacio E_{-1} es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$, en este caso la matriz A_α no es diagonalizable.

4. *Determinar según el valor de α el polinomio minimal de A_α.*

   Denotemos Q_A el polinomio minimal de A_α. Se sabe que la matriz A_α es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si y solo si su polinomio minimal tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$ y estas son simples. Por tanto, se viene de demostrar que A_α es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si y solo $\alpha = -1$, por lo tanto se tiene :

   – Si $\alpha = -1$, A_α es diagonalizable, por lo tanto $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.

   – Si $\alpha \neq -1$, A_α no es diagonalizable, por lo tanto $Q_A(X) = P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$.

Segunda parte :

Se supone ahora que $\alpha = 0$, se denota $A = A_0$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz A. Se tiene entonces

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

1. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.*

   La matriz A admite un valor propio único $\lambda = -1$ de multiplicidad 3, el subespacio propio asociado es el espacio $E_{-1} = \ker(A+I)$, y se tiene

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x + z = -x \\ x - 2y = -y \\ -x + y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y, \end{cases}$$

   el subespacio E_{-1} es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$. El subespacio característico de A, asociada con el único valor propio $\lambda = -1$, es el subespacio $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, por lo que, dado el teorema de Hamilton-Cayley, se sabe que $P_A(A) = 0$, así, la matriz $(A+I)^3$ es la matriz nula, lo que implica $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, entonces es el espacio entero.

2. *Demostrar que f admite un plano estable.*

   La matriz de f no es diagonalizable, pero dado que su polinomio característico se factoriza sobre $\mathbb{R}$, es trigonalizable, lo que prueba que admite un plano estable, el plano generado por los dos primeros vectores de una base de trigonalización.

   Por otro lado, se tiene $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, el subespacio $\ker(A+I)^2$ es claramente estable por A porque para todo $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en efecto

   $$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

   Demostrar que este subespacio es un plano. Se tiene

   $$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   por lo tanto $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z=0\}$, es un plano vectorial.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es*

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Se buscan los vectores e_1, e_2, e_3 tales que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ y $Ae_3 = e_2 - e_3$. El vector e_1 pertenece a $E_1 = \ker(A+I)$, se elige $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tal que (e_1, e_2) sea una base de $\ker(A+I)^2$. Se observa que si se busca $e_2 = (x,y,z)$ tal que $Ae_2 = e_1 - e_2$, se obtiene el sistema

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1, \end{cases}$$

   lo que da un vector de $\ker(A+I)^2$. Así, los vectores $e_1 = (1,1,0)$ y $e_2 = (1,0,1)$ sirven. Todavía se tiene que encontrar un vector e_3 tal que $Ae_3 = e_2 - e_3$, es decir

   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

   El vector $e_3 = (0,0,1)$ sirve. Se obtiene entonces la matriz P siguiente que es invertible y verifica $A = PBP^{-1}$,

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Descomposición de Dunford de B*

   Se tiene

   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y es claro que ambas matrices conmutan porque una es igual a $-I$. Por tanto, existe un único par de matrices D y N, D diagonalizable y N nilpotente, tales que $B = D+N$ y $DN = ND$. Así esta es la descomposición de Dunford, $B = D+N$, con

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Para $t \in \mathbb{R}$, calcular* $\exp(tB)$ *y expresar* $\exp(tA)$*, con ayuda de P y* $\exp(tB)$.
   Se observa todo primeramente que $N^2 = 0$, por lo tanto para todo $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^2 = 0$ y la exponencial es igual a $\exp(tN) = I+tN$, por otro lado $ND = DN$, y para todo $t \in \mathbb{R}$, las matrices tN y tD conmutan igualmente, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, por lo tanto se tiene

   $$\exp(tB) = \exp(tD+tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(-tN) = \mathrm{e}^{-t}(I+tN).$$

   De donde

   $$\exp(tB) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Para determinar la exponencial de la matriz tA, se escribe

   $$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

6. *Soluciones de sistemas diferenciales $Y' = BY$ y $X' = AX$.*
   La solución general del sistema $Y' = BY$ se escribe

   $$S(t) = \exp(tB)v,$$

   donde $v = (a,b,c)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$. La solución $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ se escribe así

   $$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} a+bt \\ b+ct \\ c \end{pmatrix}.$$

   Para obtener la solución del sistema $X' = AX$, se escribe

   $$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X),$$

   así, denotando $Y = P^{-1}X$ o aún $X = PY$, las soluciones de sistema $X' = AX$ son los $PS(t)$, donde P es la matriz que verifica $A = PBP^{-1}$ y S una solución de sistema $Y' = BY$. La solución general del sistema $X' = AX$ se escribe así

   $$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}(a+bt) \\ \mathrm{e}^{-t}(b+ct) \\ \mathrm{e}^{-t}c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} a+b+(c+b)t \\ a+bt \\ b+c+ct \end{pmatrix},$$

   donde $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

II

Sean K un cuerpo, $N \in M_n(K)$ una matriz nilpotente y A una matriz tal que $AN = NA$.

1. *Determinar los valores propios de N.*

   La matriz N es nilpotente, existe un entero natural m tal que $N^n = 0$, por lo tanto se tiene $\det N^m = (\det N)^m = 0$, por que $\det N = 0$, endomorfismo de matriz N no es biyectiva, lo que prueba que 0 es valor propio de N, es el único, de hecho, si λ es otro valor propio y $x \neq 0$ un vector propio asociado a λ se tiene
$$Nx = \lambda x \Rightarrow N^m x = \lambda^m x,$$
   de donde $\lambda^m x = 0$, pero $x \neq 0$, por lo tanto $\lambda = 0$. Así la matriz N admite un valor propio único $\lambda = 0$ de multiplicidad n.

2. *Demostrar que N es trigonalizable.*

   El polinomio característico de N admite una única raíz $0 \in K$, todas sus raíces están por lo tanto en K, lo que prueba que la matriz N es trigonalizable. Es semejante a una matriz triangular que tiene solo 0's en la diagonal.

3. *Demostrar que* $\det(I+N) = 1$.

   En vista de lo anterior, la matriz $N+I$ es una matriz triangular que tiene solo 1's en la diagonal, pero el determinante de una matriz triangular es el producto de sus términos diagonales, así se tiene $\det(N+I) = 1$.

4. *Se supone A invertible. Demostrar que las matrices AN y NA^{-1} son nilpotentes.*

   Como las matrices A y N conmutan, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene $(AN)^k = A^k N^k$, por lo tanto para $k = m$, $(AN)^m = A^m N^m = A \cdot 0 = 0$, lo que prueba que AN es nilpotente. Igualmente $NA^{-1} = A^{-1}N$ y NA^{-1} es nilpotente. *Se deduce que*
$$\det(A+N) = \det A.$$
   La igualdad $AN = NA$ implica $N = ANA^{-1}$ así, se tiene
$$\det(N+A) = \det(ANA^{-1}+A) = \det(A(NA^{-1}+I)) = \det A \det(NA^{-1}+I) = \det A.$$

5. *Se supone A no invertible. Expresando $(A+N)^k$, para $k \in \mathbb{N}$, demostrar que* $\det(A+N) = 0$.

   Como las matrices A y N conmutan, se puede usar la fórmula binomial de Newton para calcular las potencias de $A+N$. Sea m tal que $N^m = 0$ y, para todo $k < m$, $N^k \neq 0$ se tiene entonces
$$(A+N)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = A \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k}.$$
   Así
$$\det((A+N)^m) = \det A \cdot \det \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k} = 0,$$
   pues $\det A = 0$. Por lo tanto, $\det((A+N)^m) = (\det(A+N))^m$ y se tiene $\det(A+N) = 0$.

Solución del ejercicio 3181 ▲002587

Sea $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, se debe demostrar que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

El polinomio característico $P_A(X)$ es igual a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

determinar sus raíces : calculemos el discriminante :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - c^2) = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4c^2 = a^2 + d^2 - 2ad + 4c^2 = (a-d)^2 + 4c^2 \geqslant 0.$$

Se tiene $\Delta = 0 \iff a - d = 0$ y $c = 0$, pero, si $c = 0$, la matriz A es ya diagonal. Si no $\Delta > 0$ y el polinomio característico admite dos raíces reales distintas, lo que prueba que la matriz siempre es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 3182 ▲002591

Sea $a \in \mathbb{R}$, se denota A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

Se define una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, al dar u_0 y u_1 y la siguiente relación de recurrencia, para $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. *¿Para qué valores de a la matriz A es diagonalizable ?*
   Calculemos el polinomio característico $P_A(X)$:
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = -X(1+a-X) + a = X^2 - (1+a)X + a.$$
   La matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si el polinomio P_A admite dos raíces distintas en $\mathbb{R}$. En efecto, si P_A admite una raíz doble r y A diagonalizable, entonces el endomorfismo de la matriz A es igual a $r\mathrm{Id}_E$, lo que no es el caso. Calculemos, por lo tanto, el discriminante del polinomio característico.
   $$\Delta = (1+a)^2 - 4a = 1 + a^2 + 2a - 4a = 1 + a^2 - 2a = (1-a)^2.$$
   Así la matriz A es diagonalizable para todo $a \neq 1$.
2. *Cuando A es diagonalizable, calcular A^n, para $n \in \mathbb{N}$.* Cuando A es diagonalizable, existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$, así para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $A^n = PD^nP^{-1}$. Determinar las matrices P y D. Para esto se calculan los dos valores propios de A, estas son las raíces del polinomio P_A, por lo tanto se tiene
   $$\lambda_1 = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ y } \lambda_2 = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$
   Determinar ahora los vectores propios asociados a los valores propios 1 y a. Se buscan los vectores $\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_2}$ tales que $A\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$ y $A\overrightarrow{e_2} = a\overrightarrow{e_2}$.
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x$$
   y
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = ax$$
   así se puede elegir $\overrightarrow{e}_1 = (1,1)$ y $\overrightarrow{e}_2 = (1,a)$. Se tiene entonces
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   De donde, para todo $n \in \mathbb{N}$,
   $$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. *Se supone A diagonalizable. Se denota U_n el vector $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, expresar U_{n+1} en función de U_n y de A, luego U_n en función de U_0 y de A.*
Se tiene, por definición, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$, así,
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n.$$
Se tiene entonces $U_1 = AU_0$, demostremos por inducción en n, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
Es cierto para $n = 0$, $U_0 = A^0 U_0 = IU_0 = U_0$ y para $n = 1$.
Sea n fijo por lo que se supone $U_n = A^n U_0$, se tiene entonces $U^{n+1} = AU_n = A \cdot A^n U_0 = A^{n+1} U_0$, el resultado es, por lo tanto cierto para todo entero natural n.
La matriz A se supone que es diagonalizable, se tiene, para $n \in \mathbb{N}$,
$$U_n = A^n U_0 = PD^n P^{-1} U_0 = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$
así se puede expresar para $n \in \mathbb{N}$, el término general de la sucesión u_n en función de los primeros términos u_0 y u_1, se tiene
$$u_n = \frac{1}{a-1} \left((a - a^n) u_0 + (a^n - 1) u_1 \right).$$

Solución del ejercicio 3183 ▲002592

Sea A la matriz de $M_3(\mathbb{R})$ siguiente :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *¿La matriz A es diagonalizable ?*
Calcular su polinomio característico
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2 - 4X + 4) = (2-X)^3.$$
La matriz A admite un valor propio único 2, si es diagonalizable, sería semejante a la matriz $2 \cdot I_3$, por lo tanto es igual a $2I_3$, lo que no es el caso, por lo tanto, no es diagonalizable.
2. *Calculemos $(A - 2I_3)^2$, luego $(A - 2I_3)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.* Se tiene
$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
así, $(A - 2I_3)^0 = I$, $(A - 2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y, para todo $n \geqslant 2$, se tiene $(A - 2I_3)^n = 0$.
Se deduce A^n.

Denotemos $B = A - 2I_3$, se tiene $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$, con $B^n = 0$, para $n \geqslant 2$. Por otro lado, las matrices B y $2I_3$ conmutan, así

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

donde los C_n^k son los coeficientes del binomio de Newton :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Por tanto, para $k \geqslant 2$, se tiene $B^k = 0$, de donde para $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} = 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A - 2I_3) = 2^n (1-n) I_3 + 2^{n-1} nA. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3184 ▲002593

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Demostrar que* 1 *y* 2 *son valores propios de* f. Para ese demostremos que $\det(A - I) = 0$ y $\det(A - 2I) = 0$. Se tiene

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 26 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Y

$$\det(A-2I) = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Así, los reales 1 y 2 son de hecho valores propios de la matriz A.

2. *Determinar los vectores propios de* f *asociados a los valores propios* 1 *y* 2. Sea $\overrightarrow{e} = (x, y, z, t)$ tal que $A\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}$, luego se resuelve el sistema

$$\begin{cases} -9x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + 2y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 9z - 2t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 26x + 7y + 9z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = 5y \\ t = 0, \end{cases}$$

este sistema representa una recta vectorial generada, por ejemplo, por el vector $\overrightarrow{e} = (-2, 1, 5, 0)$. Sea $\overrightarrow{u} = (x, y, z, t)$ tal que $A\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}$, se resuelve

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + y + 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -2x \\ 3z = -8x \\ t = 0, \end{cases}$$

este sistema representa una recta vectorial generada, por ejemplo, por el vector $\overrightarrow{u}=(3,-2,-8,0)$.

3. *Se considera el vector $\overrightarrow{u}$ precedente y se determinan dos vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tales que*

$$f(\overrightarrow{v})=2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u} \text{ y } f(\overrightarrow{w})=2\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.$$

Para determinar el vector $\overrightarrow{v}=(x,y,z,t)$, se resuelve el sistema

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=3 \\ 6x+y+2z-t=-2 \\ 26x+7y+8z-2t=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-3 \\ 6x+y+2z=-2 \\ t=0, \end{cases}$$

el vector $\overrightarrow{v}=(0,0,-1,0)$ sirve. Para determinar el vector $\overrightarrow{w}=(x,y,z,t)$, se resuelve el sistema

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=0 \\ 6x+y+2z-t=0 \\ 26x+7y+8z-2t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-1 \\ 6x+y+2z=-1 \\ t=-1 \end{cases},$$

el vector $\overrightarrow{w}=(1/2,0,-2,-1)$ sirve.

4. *Los vectores $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son los previamente definidos. Demostrar que $(\overrightarrow{e},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y dar la matriz de f en esta base.*

La matriz M de vectores $\overrightarrow{e},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ en la base canónica es de rango 4 porque su determinante no es nulo, en efecto,

$$\det M=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1.$$

Dadas las definiciones de los vectores $\overrightarrow{e},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$, la matriz B del endomorfismo f en la base $(\overrightarrow{e},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ se escribe

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *¿La matriz A es diagonalizable ?*

Según la pregunta anterior, valores propios de f son 1, valor propio simple, y 2 de multiplicidad 3. Se ha visto en b) que el subespacio propio asociado al valor propio 2 es de dimensión $1\neq 3$, así, la matriz A no es diagonalizable.

Solución del **ejercicio 3185** ▲002599

Sea $m\in\mathbb{R}$, y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Factorizar el polinomio característico de A y demostrar que los valores propios de A son -1 y 1.* (1,5 puntos)

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-X-1)\begin{vmatrix} 1+m-X & m \\ -m & 1-m-X \end{vmatrix} = -(1+X)\left((1-X)^2 - m^2 + m^2\right) = -(1+X)(1-X)^2.$$

Así, los valores propios de la matriz A son -1, valor propio simple, y 1, valor propio doble.

2. *¿Para qué valores de m es diagonalizable la matriz?* (1,5 puntos)

La matriz A es diagonalizable si y solo si el subespacio propio asociado al valor propio 1 es de dimensión 2. Determinar por lo tanto este subespacio propio $E_1 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\}$.

$$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (1+m)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2mx + 2my = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ m(x+y) = 0. \end{cases}$$

Así, el espacio E_1 es de dimensión 2 si y solo si $m = 0$, este es entonces el plano de ecuación $y+z=0$, si no es una recta, intersección de los dos planos $y+z=0$ y $x+y=0$. *Determinar según los valores de m el polinomio minimal de A.* (1 punto)

Si $m = 0$, la matriz A es diagonalizable, su polinomio minimal solo tiene raíces simples, es igual a

$$Q(X) = (X-1)(X+1).$$

Si $m \neq 0$, la matriz A no es diagonalizable, su polinomio minimal no puede tener solo raíces simples, por lo tanto es igual a

$$Q(X) = (X-1)^2(X+1).$$

Solución del ejercicio 3186 ▲002600

1. *Pongamos un ejemplo de una matriz en $M_2(\mathbb{R})$, diagonalizable en $\mathbb{C}$, pero no diagonalizable en $\mathbb{R}$.* (2 puntos)

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es igual a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$$

El polinomio característico de A admite dos raíces complejas conjugadas distintas i y $-i$ es, por lo tanto diagonalizable en $\mathbb{C}$, pero no lo es en $\mathbb{R}$.

2. *Pongamos un ejemplo de una matriz en $M_2(\mathbb{R})$ no diagonalizable, ni en $\mathbb{C}$, ni en $\mathbb{R}$.* (2 puntos)

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es igual a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$

El polinomio característico de A admite una raíz doble 1, la matriz A admite el valor propio único 1, por lo que, no es igual a la identidad, en consecuencia, no es diagonalizable, ni en $\mathbb{C}$, ni en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 3187 ▲002601

Sea A la matriz siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Diagonalizar la matriz A.* (2 puntos)

   Su polinomio característico es igual a

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

   La matriz A admite dos valores propios distintos, es, por lo tanto diagonalizable. *Determinar una base de vector propio de A.* Sea $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \iff x = y \text{ y } A\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \iff x = -y.$$

   Denotemos $\overrightarrow{u}_1 = (1,1)$ y $\overrightarrow{u}_2 = (-1,1)$, el vector $\overrightarrow{u}_1$ es un vector propio asociado al valor propio 1 y el vector $\overrightarrow{u}_2$ es un vector propio asociado al valor propio -1, son linealmente independientes, por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^2$. Así, se tiene $A = PDP^{-1}$, donde

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Expresar las soluciones del sistema diferencial $X' = AX$ en una base de vectores propios y graficar sus trayectorias.* (3 puntos)

   Sea Y tal que $PY = X$, se tiene entonces

   $$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$

   Las soluciones de sistemas diferenciales $X' = AX$ en la base de vectores propios $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ son las soluciones del sistema $Y' = DY$. Si $Y = (x,y)$, se tiene $x'(t) = x(t)$ y $y'(t) = -y(t)$, así, las soluciones del sistema son $x(t) = ae^t$ y $y(t) = be^{-t}$, donde a y b son constantes reales arbitrarias. Las trayectorias, expresadas en la base de vectores propios $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$, son, por lo tanto las curvas de ecuación $y = c/x$, con $c \in \mathbb{R}$, estas son ramas de hipérbolas.

Solución del ejercicio 3188 ▲002603

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. *Calculemos el determinante de A y determinar para qué valores de a la matriz es invertible.*

   Desarrollar el determinante con respecto a la primera columna, se obtiene

   $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

   La matriz A es invertible si y solo si su determinante es no nulo.

   $$\det A \neq 0 \iff 1 + a^3 \neq 0 \iff a \neq -1.$$

2. *Calculemos A^{-1}, cuando A es invertible.*

Se supone $a \neq -1$, se tiene $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t\tilde{A}$, donde $\tilde{A}$ es la comatriz de A y ${}^t\tilde{A}$ la transposición de $\tilde{A}$. Se tiene

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -a^2 & a \\ -a^2 & a & -1 \\ a & -1 & -a^2 \end{pmatrix} = {}^t\tilde{A}.$$

De donde $A^{-1} = \dfrac{1}{1+a^3}\begin{pmatrix} 1 & a^2 & -a \\ a^2 & -a & 1 \\ -a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3189 ▲002604

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en base canónica es la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Determinar la naturaleza geométrica de este endomorfismo.*

   Denotemos $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz A es la matriz de rotación del eje $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ de ángulo θ. Se puede añadir que los vectores colineales a $\overrightarrow{k}$ son fijos. Un vector de coordenadas (x,y,z) se envía al vector $(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, z)$, su componente en el plano generado por $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$ sometido a la rotación del plano de ángulo θ.

2. *Demostrar que, para todo $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, la matriz A admite un valor propio real único y determinar el subespacio propio asociado*. Calculemos el polinomio característico de la matriz A.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} \cos\theta - X & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = [(\cos\theta - X)^2 + \operatorname{sen}^2\theta](1-X)$$
$$= (1-X)(X^2 - 2X\cos\theta + 1.$$

   Encontrar las raíces del polinomio $X^2 - 2X\cos\theta + 1$, para esto se calcula el discriminante reducido

$$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\operatorname{sen}^2\theta < 0.$$

   En efecto, si $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, entonces $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ y el polinomio P_A solo admite una raíz real $\lambda = 1$. Su subespacio propio asociado tiene dimensión 1, es el eje $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ de la rotación.

   Caso donde $\theta \in \pi\mathbb{Z}$

   Se distinguen los casos $\theta = n\pi$, con n par o impar :

   – Si $\theta = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es la matriz identidad.

   – Si $\theta = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, entonces $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de la simetría ortogonal con respecto al eje $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$. Admite dos valores propios, el valor propio 1 cuyo subespacio propio es el eje $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$ y el valor propio -1 cuyo subespacio propio es el plano $\mathbb{R}\overrightarrow{i} + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$.

Solución del ejercicio 3190 ▲002605

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Determinar y factorizar el polinomio característico de A.*
   Por operaciones sobre las columnas, luego sobre las filas, se tiene
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & -2 \\ 2 & -X & 2 \\ 3 & 3 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 3 & 2+X & 1-X \end{vmatrix},$$
   de donde
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 2 & -X-2 & 2 \\ 5 & 0 & 3-X \end{vmatrix}$$
   y, desarrollando con respecto a la segunda columna
   $$P_A(X) = -(X+2)[(-4-X)(3-X)+10] = -(X+2)(X^2+X-2) = -(X+2)^2(X-1).$$

2. *Demostrar que los valores propios de A son 1 y -2 y determinar los subespacios propios asociados.*
   Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico, es decir 1, valor propio simple y, -2, valor propio doble. Denotemos E_1 el subespacio propio asociado al valor propio 1,
   $$E_1 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z),\ A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\}.$$
   Así
   $$\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} -5x-2y-2z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ 3x+2z=0. \end{cases}$$
   El subespacio propio E_1 es, por lo tanto una recta vectorial cuyo vector director viene dado, por ejemplo, por $\overrightarrow{e}_1 = (-2,2,3)$. Denotemos E_{-2} el subespacio propio asociado al valor propio -2,
   $$E_{-2} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z),\ A\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{u}\}.$$
   Así
   $$\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -2x-2y-2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0.$$
   El subespacio propio E_{-2} es, por lo tanto el plano vectorial de ecuación $x+y+z=0$, donde una base es dada, por ejemplo, por $\overrightarrow{e}_2 = (1,-1,0)$ y $\overrightarrow{e}_3 = (1,0,-1)$.

3. *Demostrar que A es diagonalizable y dar una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de u es diagonal.*
   Los subespacios propios asociados a los valores propios son de dimensión la multiplicidad del valor propio correspondiente, lo que prueba que la matriz A es diagonalizable. En la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$la matriz del endomorfismo asociado con A es diagonal, se escribe
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. *Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.*
   La matriz de cambio de base que expresa la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ de vectores propios, encontrados arriba, en la base canónica es la matriz P buscada

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

   es invertible y se tiene $P^{-1}AP = D$. (El cálculo de P^{-1} no se solicita, ni es necesario).

Solución del ejercicio 3191 ▲002606

Sea u el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculemos los valores propios de A y ver si el endomorfismo u es diagonalizable.*
   Operando sobre las columnas y las rectas del determinante, se obtiene

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1-X & -X \end{vmatrix},$$

   de donde

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2 & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$$

   y, desarrollando con respecto a la segunda columna

$$P_A(X) = (1-X)[(3-X)(-1-X)+4] = (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.$$

   Así, la matriz A admite 1 como valor propio triple. No es, por lo tanto diagonalizable, si no debe ser igual a $I = I_3$, la matriz identidad.
2. *Calculemos $(A-I)^2$ y demostrar que $A^n = nA + (1-n)I$.*
   Se calcula primeramente la matriz $A - I$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   luego la matriz $(A-I)^2$,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   es por lo tanto la matriz nula. Dar dos métodos para demostrar que $A^n = nA + (1-n)I$.

Primer método : Usando el binomio de Newton. Se escribe $A^n = (A-I+I)^n$, por lo que, las matrices $A-I$ e I conmutan y se tiene

$$(A-I+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A-I)^k I^{(n-k)} = C_n^0 I + C_n^1 (A-I) = I + n(A-I) = nA + (1-n)I.$$

Segundo método : Por recurrencia sobre n. El resultado es cierto para $n=0$ y $n=1$. Se fija n, arbitrariamente para el cual se supone que $A^n = nA+(1-n)I$, se tiene entonces

$$A^{n+1} = A(nA+(1-n)I) = nA^2 + (1-n)A,$$

sabiendo que $(A-I)^2 = 0$, se deduce que $A^2 = 2A-I$ y así

$$A^{n+1} = n(2A-I)+(1-n)A = (n+1)A - nI = (n+1)A + (1-(n+1))I.$$

La igualdad es, por lo tanto verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución del ejercicio 3192 ▲002607

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociado.

1. *Determinar los valores propios de A.*

   Calculemos las raíces del polinomio característico $P_A(X)$:

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X).$$

   Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, valor propio simple y $\lambda_2 = 2$, valor propio doble.

2. *Determinar, sin cálculos, de vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tales que $f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u}$ y $f(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.*

   Si se denota $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, la base en la que se expresa la matriz A del endomorfismo f, se observa que

   $$f(\overrightarrow{e}_2) = 2\overrightarrow{e}_2 \quad \text{y} \quad f(\overrightarrow{e}_3) = \overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3.$$

   Así, los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_2$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e}_3$ responden a la pregunta.

3. *Sea $\overrightarrow{e}$ tal que $f(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{e}$. Demostrar que $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y escribir la matriz de f en esta base.*

   Se denota $\overrightarrow{e} = (x,y,z)$, entonces

   $$f(\overrightarrow{e}) = \overrightarrow{e} \iff \begin{cases} x = x \\ -x+2y+z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

   El vector $\overrightarrow{e} = (1,1,0)$ sirve. Los vectores $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, por lo tanto forman una base de $\mathbb{R}^3$. La matriz de f en esta base se escribe

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *¿La matriz A es diagonalizable ?*
El subespacio propio asociado al valor propio 2 es el conjunto de vectores (x,y,z) tales que

$$\begin{cases} x = 2x \\ -x+2y+z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Es una recta vectorial, por lo tanto, su dimensión no es igual a la multiplicidad del valor propio 2 como la raíz del polinomio característico, la matriz A no es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3193 ▲002608

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ *asociado.*

1. *Determinar y factorizar el polinomio característico de A.*
Se denota $P_A(X)$ el polinomio característico, se tiene

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 \\ -1 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (-1-X)^2(1-X).$$

La matriz A admite dos valores propios, 1, valor propio simple, y -1, valor propio doble.

2. *Determinar los subespacios propios y los subespacios característicos de A.*
El valor propio 1 es simple, el subespacio propio asociado es igual al subespacio característico, es el conjunto

$$E_1 = N_1 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\}.$$

Se tiene

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x = x \\ x-y = y \\ -x+2y-z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0. \end{cases}$$

El espacio E_1 es una recta vectorial con un vector director $\overrightarrow{e}_1$ es dado, por ejemplo, por $\overrightarrow{e}_1 = (2,1,0)$. El subespacio propio asociado al valor propio -1 es definido por

$$E_{-1} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}\}.$$

Se tiene

$$\overrightarrow{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} x = -x \\ x-y = -y \\ -x+2y-z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

El espacio E_{-1} es una recta vectorial con un vector director $\overrightarrow{e}_2$ dado, por ejemplo, por $\overrightarrow{e}_2 = (0,0,1)$. La dimensión de E_{-1} no es igual a la multiplicidad de la raíz, la matriz no es diagonalizable. Determinar el subespacio característico asociado al valor propio -1. Para esto calculamos la matriz $(A+I)^2$.

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_{-1} = \ker(A+I)^2 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}.$$

El subespacio característico N_{-1} es el plano vectorial generado por los vectores $e_2 = (0,0,1)$ y $e_3 = (0,1,0)$.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y encontrar una matriz P invertible tal que $AP = PB$ (o $A = PBP^{-1}$).

Se consideran los vectores $\overrightarrow{e}_1 = (2,1,0)$ y $\overrightarrow{e}_2 = (0,0,1)$ y se busca un vector $\overrightarrow{e} \in N_{-1}$ tal que $f(\overrightarrow{e}) = 2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}$. Denotemos $\overrightarrow{e} = (0,y,z)$,

$$f(\overrightarrow{e}) = 2\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e} \iff y = 1,$$

el vector $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}_3 = (0,1,0)$ sirve, se puede ver directamente en la segunda columna de la matriz A. Así, en la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, con $\overrightarrow{e}_1 = (2,1,0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0,0,1)$ y $\overrightarrow{e}_3 = (0,1,0)$, la matriz de f se escribe

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz P buscada es la matriz de pasaje que expresa la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ en la base canónica $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $AP = PB$ o $A = PBP^{-1}$. Se puede calcular P^{-1}, es la matriz que expresa los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ y $\overrightarrow{k}$ en la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Escribir la descomposición de Dunford de B.*

Se tiene

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$$

Es claro que la matriz D es diagonalizable porque es diagonal, se verifica fácilmente que $N^2 = 0$, es decir que la matriz N es nilpotente y las dos matrices conmutan, $DN = ND$. Así la descomposición $B = D + N$ es de hecho la descomposición de Dunford de la matriz B.

5. *Para $t \in \mathbb{R}$, calcular* $\exp(tB)$. Se utiliza la descomposición de Dunford de la matriz tB, $tB = tD + tN$, por lo tanto se tiene

$$\exp(tB) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \cdot \exp(tN),$$

pues las matrices conmutan ; por otro lado, como D es diagonal, se tiene

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

y como $N^2 = 0$, se tiene

$$\exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De donde

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

6. *Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $y' = By$ y $x' = Ax$, donde x y y denotan las funciones reales con valores en $\mathbb{R}^3$.*

   Las soluciones del sistema diferencial $y'(t) = B \cdot y(t)$ son las funciones $y(t) = \exp(tB) \cdot V$, donde V es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix},$$

   $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Para encontrar las soluciones del sistema diferencial $x'(t) = A \cdot x(t)$, se utiliza el siguiente hecho

$$P \cdot y \quad \text{es solución de} \quad x' = A \cdot x \iff y \quad \text{es solución de} \quad y' = (P^{-1}AP) \cdot y = B \cdot y.$$

   Así, las soluciones de sistema $x' = A \cdot x$ se escriben

$$x(t) = P \cdot \exp(tB) \cdot V,$$

   donde V es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Se observa que no es útil para calcular la matriz P^{-1}, es decir

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ae^t \\ ae^t + ce^{-t} \\ be^{-t} + 2cte^{-t} \end{pmatrix},$$

   $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 3194 ▲002609

Sea $a \in \mathbb{R}$ y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *¿Para qué valores de a la matriz A es diagonalizable ?*

Determinar el polinomio característico de la matriz A.

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & a-X & 0 \\ 0 & a-2 & 2-X \end{vmatrix} = -X(a-X)(2-X).$$

Ce polinomio admite tres raíces $0, a$ y 2. Así, si $a \notin \{0,2\}$ la matriz es diagonalizable. Examinar los casos $a = 0$ y $a = 2$. Si $a = 0$, el valor propio 0 es valor propio doble, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El subespacio propio al valor propio asociado 0 es igual a $\ker A = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z),\ A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\}$,

$$\overrightarrow{u} \in \ker A \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0.$$

El subespacio propio al valor propio asociado, el valor propio doble 0 es una recta vectorial, la recta generada por $(1,0,0)$, la matriz no es así diagonalizable. Si $a = 2$, el valor propio 2 es doble, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El subespacio propio al valor propio asociado 2 es igual a $E_2 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z),\ A\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}\}$,

$$\overrightarrow{u} \in E_2 \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff y = 2x.$$

El subespacio propio asociado al valor propio doble 2 es un plano vectorial, el plano de ecuación $y = 2x$, la matriz es, por lo tanto diagonalizable. Así la matriz A es diagonalizable si y solo si $a \neq 0$.

Cuando A es diagonalizable, determinar una base de vectores propios de A.

Se tiene $a \neq 0$ y se distinguen los casos $a \neq 2$ y $a = 2$.

Si $a \neq 2$, los subespacios propios asociados a los valores propios 0 y 2 son legibles en la matriz, se tiene

$$E_0 = \ker A = \mathbb{R} \cdot (1,0,0) \quad \text{y} \quad E_2 = \mathbb{R} \cdot (0,0,1),$$

Se determinan $E_a = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z),\ A\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u}\}$.

$$\overrightarrow{u} \in E_a \iff \begin{cases} y = ax \\ ay = ay \\ (a-2)y + 2z = az \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ (a-2)y = (a-2)z \end{cases} \iff \begin{cases} y = ax \\ y = z. \end{cases}$$

Es la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{e} = (1,a,a)$. Así, una base de vectores propios es dada por los vectores $(1,0,0), (0,0,1)$ y $(1,a,a)$.

Si $a = 2$, se ha visto que el subespacio propio asociado al valor propio doble 2 es el plano de ecuación $y = 2x$. Así, una base de vectores propios es dada por los vectores $(1,0,0), (0,0,1)$ y $(1,2,0)$.

2. *Sea E el espacio vectorial de las soluciones del sistema $x' = Ax$, donde x es una función de la variable real t, con valores en $\mathbb{R}^3$.*

(a) *Cuando A es diagonalizable, dar una base de E en función de los vectores propios y los valores propios de A y escribir la solución general del sistema.*
Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de A y $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ y $\overrightarrow{e}_3$ los vectores propios asociados, se sabe que una base del espacio de solución del sistema diferencial $x' = Ax$ es dada por

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\overrightarrow{e}_1,\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\overrightarrow{e}_2,\ \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\overrightarrow{e}_3.$$

Así, si $a \neq 2$ esta base está dada por

$$(1,0,0),\ \mathrm{e}^{2t}(0,0,1),\ \mathrm{e}^{at}(1,a,a)$$

y si $a = 2$, es dada por

$$(1,0,0),\ \mathrm{e}^{2t}(0,0,1),\ \mathrm{e}^{2t}(1,2,0).$$

(b) *Cuando A no es diagonalizable, integrar directamente el sistema $X' = AX$.*
Cuando A no es diagonalizable, $a = 0$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema $X' = AX$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \\ z' = -2y + 2z. \end{cases}$$

Si $y' = 0$, entonces $y(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Así, si $x' = \alpha$, $x(t) = \alpha t + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ y la tercera ecuación se convierte en

$$z' = 2z - 2\alpha$$

y su solución se escribe $z(t) = \gamma \mathrm{e}^{2t} + \alpha$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Por tanto, la solución general del sistema

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \alpha \\ \gamma \mathrm{e}^{2t} + \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3. *Sea E_0 el conjunto de elementos s de E tales que $\lim_{t \to +\infty} s(t) = \overrightarrow{0}$. Demostrar que E_0 es un subespacio vectorial de E.*
Para demostrar que E_0 es un subespacio vectorial de E, es suficiente demostrar que $0_E \in E_0$ y que E_0 es estable por combinación lineal.
La función nula está claramente en E_0, por otro lado, si s_1 y s_2 están en E_0 y si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) = \overrightarrow{0},$$

que prueba que $a_1 s_1 + a_2 s_2 \in E_0$.
Determinar su dimensión en función de a.
Se tiene, en todos los casos, una base del espacio de solución, entonces escribiendo la solución general, se observan luego las soluciones de E que están en E_0.

1er caso : $a \neq 2$ y $a \neq 0$, la solución general se escribe

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,\mathrm{e}^{2t}) + \gamma(\mathrm{e}^{at}, a\mathrm{e}^{at}, a\mathrm{e}^{at}),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Así, si $a > 0$, $s(t) \in E_0 \iff s = \overrightarrow{0}$, $\dim E_0 = 0$, y si $a < 0$, $s(t) \in E_0 \iff \alpha = \beta = 0$, $\dim E_0 = 1$.
2o caso : $a = 2$, la solución general se escribe

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,\mathrm{e}^{2t}) + \gamma(\mathrm{e}^{2t}, 2\mathrm{e}^{2t}, 0),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Así, $s(t) \in E_0 \iff s = \overrightarrow{0}$, $\dim E_0 = 0$.
3r caso : $a = 0$, la solución general se escribe

$$s(t) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,\mathrm{e}^{2t}) + \gamma(t,1,1),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Así, $s(t) \in E_0 \iff s = \overrightarrow{0}$, $\dim E_0 = 0$.

4. *Sea F el conjunto de elementos s de E acotados en $[0,+\infty[$. Demostrar que F es un subespacio vectorial de E.*
   Para demostrar que F es un subespacio vectorial de E, es suficiente demostrar que $0_E \in F$ y que F es estable por combinación lineal. La función nula está claramente en F, por otro lado, si s_1 y s_2 están en E_0 y si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, la función $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ es acotada en $[0,+\infty[$, así en F.
   Determinar su dimensión en función de a.
   Como en el caso anterior, siguiendo la forma de la solución general, se tiene si $a \geqslant 0$, las únicas soluciones limitadas en $[0,+\infty[$ son de la forma $s(t) = \alpha(1,0,0)$, $\alpha \in R$, así $\dim F = 1$.
   Si $a < 0$, las únicas soluciones limitadas en $[0,+\infty[$ son de la forma $s(t) = \alpha(1,0,0) + \gamma(\mathrm{e}^{at}, a\mathrm{e}^{at}, a\mathrm{e}^{at})$, $(\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\dim F = 2$.

Solución del ejercicio 3195 ▲002610

I

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matriz siguiente

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. *Factorizar el polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ como producto de factores de primer grado.*
   Se tiene

$$P_{A_\alpha}(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix}$$
$$= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] = -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].$$

   Factorizar el polinomio $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, su discriminante es igual a

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

   Se tiene entonces $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, lo que nos da las dos raíces

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \ \text{ y } \ \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

   el polinomio característico $P_{A_\alpha}(X)$ se factoriza así en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

2. *Determinar según el valor del parámetro α los valores propios distintos de A_α y su multiplicidad.*
   Los valores propios de A_α son las raíces del polinomio característico P_{A_α}, así, - si $\alpha = 0$, la matriz A_α admite un valor propio triple $\lambda = -1$, - si $\alpha \neq 0$, la matriz A_α admite dos valores propios distintos $\lambda_1 = -1$ valor propio doble y $\lambda_2 = \alpha - 1$, valor propio simple.
3. *Determinar los valores de α, para los cuales la matriz A_α es diagonalizable.*
   Es claro que en el caso $\alpha = 0$, la matriz no es diagonalizable, en verdad si fuera, existe una matriz invertible P tal que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, lo que no es el caso. Si $\alpha \neq 0$, la matriz A_α es diagonalizable si el subespacio propio asociado al valor propio -1 es de dimensión 2. Determinar este subespacio propio.
   $$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$
   así,
   $$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x + (\alpha+1)z = -x \\ x - 2y = -y \\ -x + y + \alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$
   Es necesario distinguir los casos $\alpha = -1$ y $\alpha \neq -1$.
   - Si $\alpha = -1$, el subespacio E_{-1} es el plano vectorial de ecuación $x = y$, en este caso la matriz A_α es diagonalizable.
   - Si $\alpha \neq -1$, el subespacio E_{-1} es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$, en este caso la matriz A_α no es diagonalizable.
4. *Determinar según el valor de α el polinomio minimal de A_α.*
   Denotemos Q_A el polinomio minimal de A_α. Se sabe que la matriz A_α es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si y solo si su polinomio minimal tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$ y estos son simples. Por tanto, equivale a demostrar que A_α es diagonalizable en $\mathbb{R}$ si y solo $\alpha = -1$, por lo tanto se tiene :
   - Si $\alpha = -1$, A_α es diagonalizable, por lo tanto $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
   - Si $\alpha \neq -1$, se debe distinguir los casos $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$, en efecto :
     - si $\alpha \neq 0$, A_α no es diagonalizable por lo que las raíces de Q_A no son ambas simples, y P_A admite dos raíces distintas, por lo tanto
   $$Q_A(X) = -P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1).$$
     - si $\alpha = 0$, se tiene $P_A(X) = -(X+1)^3$ y A_0 no es diagonalizable, por lo tanto, el polinomio minimal puede ser igual a $(X+1)^2$ o a $(X+1)^3$, por lo que
   $$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$
   entonces el polinomio minimal Q_A es igual a $(X+1)^3$.

II

Se supone ahora que $\alpha = 0$, se denota $A = A_0$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz A. Se tiene entonces
$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
y $P_A(X) = -(X+1)^3$.

1. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.*

   La matriz A admite un valor propio único $\lambda = -1$ de multiplicidad 3, el subespacio propio asociado es el espacio $E_{-1} = \ker(A+I)$, y se tiene

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y, \end{cases}$$

   el subespacio E_{-1} es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$. El subespacio característico de A, asociada con el único valor propio $\lambda = -1$, es el subespacio $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, por lo que, dado el teorema de Hamilton-Cayley, se sabe que $P_A(A) = 0$, así, la matriz $(A+I)^3$ es la matriz nula, lo que implica $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, entonces es el espacio entero.

2. *Demostrar que el subespacio vectorial* $\ker(A+I)^2$ *es un plano estable de f.*

   Se tiene $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, el subespacio $\ker(A+I)^2$ es claramente estable por A, porque para todo $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$. En efecto

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

   Demostrar que este subespacio es un plano. Se tiene

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   por lo tanto $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, es un plano vectorial.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.

   Se buscan los vectores e_1, e_2, e_3 tales que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ y $Ae_3 = e_2 - e_3$. El vector e_1 pertenece a $E_1 = \ker(A+I)$, y $\ker(A+I)$ es la recta de ecuaciones : $\{z = 0, x-y = 0\}$; se elige $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tal que (e_1, e_2) sea una base de $\ker(A+I)^2$. Se observa que si se busca $e_2 = (x,y,z)$ tal que $Ae_2 = e_1 - e_2$, se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1, \end{cases}$$

   lo que da un vector de $\ker(A+I)^2$. Así, los vectores $e_1 = (1,1,0)$ y $e_2 = (1,0,1)$ sirven. Todavía se tiene que encontrar un vector e_3 tal que $Ae_3 = e_2 - e_3$, es decir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y. \end{cases}$$

   El vector $e_3 = (0,0,1)$ sirve. Se obtiene entonces la matriz P siguiente que es invertible y verifica $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Descomposición de Dunford de B*

   Se tiene
$$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   y es claro que ambas matrices conmutan porque una es igual a $-I$. Por tanto, existe un único par de matrices D y N, D diagonalizable y N nilpotente, tales que $B=D+N$ y $DN=ND$. Pero si
$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\ \text{y}\ N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
   Se tiene
$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   y $N^3=0$. La descomposición $B=D+N$ es, por lo tanto la descomposición de Dunford de la matriz B.

5. *Para $t\in\mathbb{R}$, calcular $\exp(tB)$ y expresar $\exp(tA)$, con ayuda de P y $\exp(tB)$.*

   Se tiene $N^3=0$, por lo tanto para todo $t\in\mathbb{R}$, $(tN)^3=0$ y la exponencial es igual a
$$\exp(tN)=I+tN+(t^2/2)N^2,$$
   por otro lado $ND=DN$, por lo tanto para todo $t\in\mathbb{R}$, las matrices tN y tD conmutan igualmente, $(tN)(tD)=(tD)(tN)$, por lo tanto se tiene
$$\exp(tB)=\exp(tD+tN)=\exp(tD)\exp(tN)=\exp(-tI)\exp(tN)=\mathrm{e}^{-t}I\left(I+tN+\frac{t^2}{2}N^2\right)$$
   De donde
$$\exp(tB)=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
   Para determinar la exponencial de la matriz tA, se escribe
$$\exp(tA)=\exp(t(PBP^{-1}))=\exp(P(tA)P^{-1})=P\exp(tB)P^{-1}.$$

6. *Soluciones de sistemas diferenciales $Y'=BY$ y $X'=AX$.*

   La solución general del sistema $Y'=BY$ se escribe
$$S(t)=\exp(tB)v$$
   donde $v=(a,b,c)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$. La solución $S:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3$ se escribe así
$$S(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}a+bt+c\frac{t^2}{2}\\b+ct\\c\end{pmatrix}.$$

Para obtener la solución del sistema $X' = AX$, se escribe

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

así, denotando $Y = P^{-1}X$ o aún $X = PY$, las soluciones de sistema $X' = AX$ son los $PS(t)$, donde P es la matriz que verifica $A = PBP^{-1}$ y S una solución de sistema $Y' = BY$. La solución general del sistema $X' = AX$ se escribe así

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}(a+bt+c\frac{t^2}{2}) \\ \mathrm{e}^{-t}(b+ct) \\ \mathrm{e}^{-t}c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} (a+b)+(c+b)t+c\frac{t^2}{2} \\ a+bt+c\frac{t^2}{2} \\ (b+c)+ct \end{pmatrix},$$

donde $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

III

Se supone, en esta parte, que $\alpha = -1$, se denota $A = A_{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Verificar que la matriz A es diagonalizable.*

   Se ha visto en la parte $I)3)$ que cuando $\alpha = -1$, la matriz es diagonalizable, en efecto. En este caso, ella admite dos valores propios : -1, valor propio doble y -2, valor propio simple. El subespacio propio asociado al valor propio -1 es el plano de ecuación $x = y$.

2. *Diagonalizar la matriz A.*

   Para esto se determina una base de vectores propios. El plano $x = y$ es generado por los vectores $u(1,1,0)$ y $v(0,0,1)$, se busca determinar un vector director de la recta E_{-2} :

$$E_{-2} = \ker(A_\alpha + 2I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \right\}$$

   así,

$$(x,y,z) \in E_{-2} \iff \begin{cases} -x = -2x \\ x - 2y = -2y \\ -x + y - z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z. \end{cases}$$

   El subespacio propio E_{-2} es la recta vectorial generada por el vector $w(0,1,-1)$. Así, en la base (u,v,w) la matriz es diagonal y se escribe

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

   se tiene $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *Dar las soluciones del sistema diferencial $X' = A.X$.*

   Si se denota $X = PY$, las soluciones de sistema $X' = AX$ son los $PS(t)$, donde S una solución de sistema $Y' = DY$. Así, la solución general del sistema $X' = A \cdot X$ se escribe

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{-t} \\ b\mathrm{e}^{-t} \\ c\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{-t} \\ a\mathrm{e}^{-t} + b\mathrm{e}^{-t} \\ b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix},$$

   donde $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

IV

Se supone, en esta parte, que $\alpha = 1$, se denota $A = A_1$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.*

   La matriz A admite dos valores propios : -1, valor propio doble y 0, valor propio simple. El subespacio propio E_{-1}, asociada al valor propio -1, es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$. Determinar el subespacio E_0 :

$$E_0 = \ker(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   así,

$$(x,y,z) \in E_0 \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ x = 2y. \end{cases}$$

   El subespacio propio E_0 es la recta vectorial generada por $(2,1,1)$. El subespacio característico asociado al valor propio 0 es el subespacio propio E_0. Determinar el subespacio característico asociado al valor propio doble -1 es el espacio vectorial $\ker(A+I)^2$. Se tiene

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Así, $\ker(A+I)^2$ es el plano vectorial de ecuación $-x + y + 2z = 0$, generado por los vectores $(1,1,0) \in E_{-1}$ y $(2,0,1)$.

2. *Trigonalizar la matriz A.*

   En la base (u,v,w), donde $u(2,1,1)$, $v(1,1,0)$ y $w(2,0,1)$ la matriz es triangular, existe λ tal que $A.w = \lambda v - w$.

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Así $A = PTP^{-1}$, donde

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3196 ▲002611

Sea A una matriz 2×2, con coeficientes reales.

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Se supone $a+c=b+d=1$ y $a-b\neq 1$.

1. Sean (x_1,x_2), (y_1,y_2) dos vectores de $\mathbb{R}^2$, tales que
$$A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$
Demostrar que $y_1+y_2=x_1+x_2$.
Se tiene
$$A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+bx_2\\ cx_1+dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$
de donde $y_1+y_2=ax_1+bx_2+cx_1+dx_2=(a+c)x_1+(b+d)x_2=x_1+x_2$.
2. *Sea el vector $\overrightarrow{x}=(1,-1)$, verificar que $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A, y encontrar su valor propio.*
$$A\cdot\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b\\ c-d\end{pmatrix},$$
por lo que $c-d=(1-a)-(1-b)=-(a-b)$, pues $a+b=c+d=1$. Así,
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b\\ -(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}.$$
Así, el vector $\overrightarrow{x}$ es un vector propio de A, para el valor propio $a-b$.
3. *Determinar el polinomio característico de A y calcular sus raíces.*
En primer lugar, dada la hipótesis $a+b=c+d=1$, se escribe
$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}.$$
De donde
$$P_A(X)=\begin{vmatrix} a-X & b\\ 1-a & 1-b-X\end{vmatrix}=(a-X)(1-b-X)-b(1-a)=X^2-(a-b+1)X+(a-b).$$
Se sabe, según la pregunta anterior que $a-b$ es raíz de este polinomio, por lo que, el producto de las raíces es igual a $a-b$ y la suma a $a-b+1$, así la segunda raíz es igual a 1.
4. *Determinar un vector propio, $\overrightarrow{y}$, de A no colineal con $\overrightarrow{x}$ y expresar la matriz del endomorfismo definido por A en la base $(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$.*
Un vector propio no colineal en $\overrightarrow{x}$ es vector propio para el valor propio 1. Así, si se denota $\overrightarrow{y}=(y_1,y_2)$, se tiene
$$A\overrightarrow{y}=\overrightarrow{y}\iff\begin{pmatrix} a & b\\ 1-a & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$
lo que equivale a
$$\begin{cases} ay_1+by_2=y_1\\ (1-a)y_1+(1-b)y_2=y_2\end{cases}\iff (a-1)y_1+by_2=0.$$
El vector $\overrightarrow{y}=(b,1-a)$ es un vector propio de A, para el valor propio 1.

Solución del ejercicio 3197 ▲002612

Sea E un espacio vectorial de dimensión 3. Se denota $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ una base de E, si $\overrightarrow{u}$ es un vector de E se denota (x,y,z) sus coordenadas en la base $\mathscr{B}$. Sea f una aplicación lineal de E en sí mismo, definida por

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x+2z \\ 4x-2y+4z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. *Escribir la matriz A de f en la base $\mathscr{B}$.*
   Se tiene $f(\overrightarrow{e}_1) = (-1,2,4)$, $f(\overrightarrow{e}_2) = (1,0,-2)$ y $f(\overrightarrow{e}_3) = (-1,2,4)$. Por lo tanto, la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Determinar los subespacios* $\ker f$ *y* $\operatorname{Im} f$*.*
   El subespacio vectorial $\operatorname{Im} f$ es generado por los vectores $f(\overrightarrow{e}_1)$, $f(\overrightarrow{e}_2)$ y $f(\overrightarrow{e}_3) = f(\overrightarrow{e}_1)$, es, por lo tanto el plano vectorial generado por los vectores $f(\overrightarrow{e}_1) = (-1,2,4)$ y $f(\overrightarrow{e}_2) = (1,0,-2)$ que son claramente linealmente independientes. Para el núcleo, se tiene $\ker f = \{\overrightarrow{u} \in E,\ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}$, así,
   $$\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x+y-z = 0 \\ 2(x+z) = 0 \\ 4x-2y+4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$
   Es por lo tanto la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$.

3. Sean $\overrightarrow{u}_1 = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,2,0)$ y $\overrightarrow{u}_3 = (0,1,1)$. *Demostrar que* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ *es una base de* E.
   Por esto verificar que el determinante de sus coordenadas es no nulo,
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0.$$
   Así, los tres vectores $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ son linealmente independientes, por lo tanto forman una base de E, pues E es de dimensión 3.

4. *Calcular $f(\overrightarrow{u}_1)$, $f(\overrightarrow{u}_2)$ y $f(\overrightarrow{u}_3)$ y determinar la matriz B de f en la base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$.*
   Se tiene $f(\overrightarrow{u}_1) = \overrightarrow{0}$, $f(\overrightarrow{u}_2) = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{u}_2$. $f(\overrightarrow{u}_3) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{u}_3$.
   Así la matriz B de f en la base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ se escribe
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Determinar los valores propios de f y, para cada, un vector propio.*
Según la pregunta precedente, valores propios de f son $0, 1$ y 2, y los vectores propios son $\overrightarrow{u}_1$, para el valor propio 0, $\overrightarrow{u}_2$, para el valor propio 1 y $\overrightarrow{u}_3$, para el valor propio 2.

Solución del ejercicio 3198 ▲002613

Sea E un espacio vectorial de dimensión n. Se busca encontrar una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n. Se denota f el endomorfismo de E de matriz A en la base canónica.

1. *Demostrar que la existencia de tal matriz implica la paridad de n.*
Se supone que existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I_n$, se tiene entonces
$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$
lo que implica n par, porque un cuadrado siempre es positivo.
2. Se supone ahora que $n = 4$.
(a) *Demostrar que para todo $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} \neq 0$, los vectores $\overrightarrow{x}$ y $f(\overrightarrow{x})$ son linealmente independientes.*
Sea $\overrightarrow{x} \in E$, se supone $\overrightarrow{x} \neq 0$, se supone que existen números reales a, b tales que $a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$, se tiene entonces
$$a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow f(a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow af(\overrightarrow{x}) - b\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0},$$
pues $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Por lo tanto,
$$\begin{cases} a\overrightarrow{x} + bf(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \\ af(\overrightarrow{x}) - b\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0},$$
lo que implica $a^2 + b^2 = 0$, pues $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, y, por lo tanto $a = b = 0$. Esto prueba que los vectores $\overrightarrow{x}$ y $f(\overrightarrow{x})$ son linealmente independientes.
(b) Sea $\overrightarrow{x}_1 \neq 0$, se denota F el subespacio vectorial de E generado por los vectores $\overrightarrow{x}_1$ y $f(\overrightarrow{x}_1)$.
i. *Demostrar que F es estable por f.*
Sea $\overrightarrow{x} \in F$, existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{x}_1 + bf(\overrightarrow{x}_1)$, de donde
$$f(\overrightarrow{x}) = f(a\overrightarrow{x}_1 + bf(\overrightarrow{x}_1)) = af(\overrightarrow{x}_1) + bf^2(\overrightarrow{x}) = af(\overrightarrow{x}_1) - b\overrightarrow{x}_1 \in F.$$
De ahí la estabilidad de F por f.
ii. Sea $\overrightarrow{x}_2 \in E$, se supone que $\overrightarrow{x}_2 \notin F$. *Demostrar que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{x}_1, f(\overrightarrow{x}_1), \overrightarrow{x}_2, f(\overrightarrow{x}_2))$ es una base de E.* La dimensión de E es igual a 4, es suficiente demostrar que los vectores son linealmente independientes. Se supone que existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tal que
$$a_1\overrightarrow{x}_1 + b_1 f(\overrightarrow{x}_1) + a_2\overrightarrow{x}_2 + b_2 f(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{0},$$
se tiene entonces,
$$a_2\overrightarrow{x}_2 + b_2 f(\overrightarrow{x}_2) \in F,$$
y, como F es estable por f,
$$f(a_2\overrightarrow{x}_2 + b_2 f(\overrightarrow{x}_2)) = a_2 f(\overrightarrow{x}_2) - b_2\overrightarrow{x}_2 \in F.$$

Lo que implica
$$(a_2^2+b_2^2)\overrightarrow{x}_2 \in F, \quad \text{de donde} \quad a_2^2+b_2^2=0,$$
porque se supone $\overrightarrow{x}_2 \notin F$. Se tiene entonces $a_2 = b_2 = 0$ y, en consecuencia, $a_1\overrightarrow{x}_1 + b_1 f(\overrightarrow{x}_1) = 0$, por lo que los vectores $\overrightarrow{x}_1$ y $f(\overrightarrow{x}_1)$ son linealmente independientes, lo que implica $a_1 = b_1 = 0$. De ahí la independencia de los vectores $\overrightarrow{x}_1, f(\overrightarrow{x}_1), \overrightarrow{x}_2, f(\overrightarrow{x}_2)$.

(c) *Escribir la matriz A de f en la base $\mathscr{B}$.*
Se calculan las imágenes de los vectores de la base $\mathscr{B}$. Se tiene $f(\overrightarrow{x}_1) = f(\overrightarrow{x}_1)$, $f(f(\overrightarrow{x}_1)) = -\overrightarrow{x}_1$, $f(\overrightarrow{x}_2) = f(\overrightarrow{x}_2)$, $f(f(\overrightarrow{x}_2)) = -\overrightarrow{x}_2$. Por lo tanto, la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) *Calculemos* $\det f$ *y* $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - f)$*, para* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se tiene, desarrollando en bloques,
$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$
Igualmente,
$$\det(\lambda \operatorname{Id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2.$$

(e) *¿El endomorfismo f admite valores propios reales?*
Los valores propios reales de f son los reales λ que anulan $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - f)$, estos son entonces los reales λ tales que $\lambda^2+1=0$. Así, f no admite valores propios reales.

Solución del ejercicio 3199 ▲002614

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y A la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Dar los valores de a y de b, para los cuales la descomposición de Dunford de A es*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Se denota $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta descomposición de $A = D+N$ es su descomposición de Dunford si y solo si N es nilpotente (es claro que D es diagonal) y si $ND = DN$. Se

verifica que N es nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así la matriz N es de hecho nilpotente cualesquiera que sean los valores de a y b. Determinar para qué valores de a y b las matrices conmutan.

$$N \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$D \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $ND = DN$ si y solo si $b = 2b$, es decir si $b = 0$. El parámetro a puede tomar cualquier valor.

2. Se supone en lo que sigue $b = 1$ y $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determinar los espacios propios y los subespacios característicos de A.*

Se comienza por determinar valores propios de A, que es inmediato porque A es de forma triangular. Por lo tanto, admite dos valores propios, 1 valor propio doble y 2 valor propio simple. Denotemos E_1 y E_2 los subespacios propios de A.

$$E_1 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\}.$$

Se tiene

$$\overrightarrow{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

El espacio E_1 es, por lo tanto la recta vectorial generada por el vector $(1,0,0)$, este subespacio propio asociado al valor propio doble 1 es de dimensión 1, la matriz no es diagonalizable.

$$E_2 = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, A\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{u}\}.$$

Se tiene

$$\overrightarrow{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay = 2x \\ y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = ay \\ y = z. \end{cases}$$

El espacio E_2 es, por lo tanto la recta vectorial generada por el vector $(a,1,1)$. El valor propio 2 es simple, el subespacio característico N_2 asociada es igual al espacio E_2. Determinar el subespacio característico N_1 asociada al valor propio 1. Se tiene
$N_1 = \ker(A-I)^2$. Calculemos la matriz $(A-I)^2$.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el núcleo de $(A-I)^2$ es el plano generado por los vectores $\overrightarrow{e}_1 = (1,0,0)$ y $\overrightarrow{e}_2 = (0,1,0)$.

(b) *Determinar D diagonalizable y N nilpotente tales que D conmuta con N y*

$$A = D + N.$$

Denotemos $\overrightarrow{e}_3 = (a, 1, 1)$, en la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, la matriz asociada con el endomorfismo representado por A se escribe

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Por construcción, esta es la descomposición de Dunford de B y se tiene $A = PBP^{-1}$, con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

las matrices $D = P\Delta P^{-1}$ y $N = PMP^{-1}$ verifican, N nilpotente, D diagonalizable y $ND = DN$. Calculemos los

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Así

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea el siguiente sistema diferencial :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_3(t). \end{cases}$$

Determinar las soluciones de $\mathscr{E}$.par Se observa que, si se denota $X = (x_1, x_2, x_3)$, el sistema $\mathscr{E}$ se escribe $X' = AX$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que corresponde a la matriz A precedente con $a = 2$ y $b = 1$. La solución general del sistema se escribe

$$X(t) = \exp(tA)V$$

donde $V = (a, b, c)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

Por otro lado $X = PY$ es solución de $X' = AX \iff Y$ es solución de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{B}Y$. La solución general del sistema $Y' = BY$ se escribe $Y = \exp(tB)V$, donde $V \in \mathbb{R}^3$. Calculemos entonces la exponencial de la matriz tB, para $t \in \mathbb{R}$. Sea ha visto en la pregunta anterior que $B = \Delta + M$, con $\Delta M = M\Delta$, así

$$\begin{aligned}\exp(tB) &= \exp(t\Delta)\cdot\exp(tM)\\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\cdot(I+tM), \quad \text{pues } M^2 = 0\\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La solución general del sistema $\mathscr{E}$ se escribe así $X = P\exp(tB)\cdot V$, donde $V = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Es decir

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t}\\ 0 & e^t & e^{2t}\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix},$$

donde aún

$$\begin{cases} x_1(t) = (a+2bt)e^t + 2ce^{2t}\\ x_2(t) = be^t + ce^{2t}\\ x_3(t) = ce^{2t}.\end{cases}$$

Solución del ejercicio 3200 ▲002615

Preguntas preliminares :

(a) Sean E un espacio vectorial real de dimensión n y u un endomorfismo de E. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio. Sea λ un valor propio de u y $\overrightarrow{x}$ un vector propio asociado a λ.
Demostrar que $\overrightarrow{x}$ es vector propio del endomorfismo $P(u)$, para el valor propio $P(\lambda)$.
Se tiene $u(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$, y, por inducción en n, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\overrightarrow{x}) = \lambda^n\overrightarrow{x}$. Denotemos $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, el endomorfismo $P(u)$ verifica

$$\begin{aligned}P(u)(\overrightarrow{x}) &= (a_0\,\mathrm{Id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_du^d)(\overrightarrow{x})\\ &= a_0\overrightarrow{x} + a_1\lambda\overrightarrow{x} + a_2\lambda^2\overrightarrow{x} + \cdots + a_d\lambda^d\overrightarrow{x}\\ &= P(\lambda)\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

lo que prueba que el vector $\overrightarrow{x}$ es vector propio del endomorfismo $P(u)$, para el valor propio $P(\lambda)$.

(b) Teorema de Hamilton-Cayley. Sean E un espacio vectorial real de dimensión n y u un endomorfismo de E. Sea P el polinomio característico de u, entonces $P(u) = 0$ (el cero es el del conjunto de endomorfismos de E)
Versión matricial : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz y P_A su polinomio característico, entonces $P_A(A) = 0$ (el cero es el de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -9 & 1 & 9\\ 9 & 0 & -8\end{pmatrix}.$$

1. *Determinar los valores propios de A.*

   Para esto se calcula su polinomio característico :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -9 & 1-X & 9 \\ 9 & 0 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(-8-X).$$

   La matriz A admite dos valores propios, 1 valor propio doble y -8 valor propio simple.

   Determinar una base de vector propio de A.

   Sea $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ un vector propio asociado al valor propio 1, se tiene

$$A \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x = x \\ -9x+y+9z = y \\ 9x-8z = z \end{cases} \iff x = z.$$

   Así, el subespacio propio asociado al valor propio 1 es un plano vectorial cuyos vectores $\overrightarrow{e}_1 = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{e}_2 = (1,0,1)$ forman una base. Sea $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ un vector propio asociado al valor propio -8, se tiene

$$A \cdot \overrightarrow{u} = -8\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x = -8x \\ -9x+y+9z = -8y \\ 9x-8z = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y. \end{cases}$$

   Así, el subespacio propio asociado al valor propio -8 es una recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{e}_3 = (0,1,-1)$. Los vectores $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ arriba forman una base de E compuesta por vectores propios de A.

   Diagonalizar A.

   En esta base, la matriz se escribe $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ y se tiene $A = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Se busca encontrar una matriz B tal que $B^3 = A$.

   (a) *Demostrar que si λ es un valor propio de B, entonces λ^3 es un valor propio de A.*

   Se considera el polinomio $P(X) = X^3$, se aplica la pregunta preliminar a). Si λ es un valor propio de B, entonces $P(\lambda) = \lambda^3$ es un valor propio de $A = P(B) = B^3$.

   (b) *Determinar los valores propios de B y su multiplicidad.*

   Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de B (existen siempre en $\mathbb{C}$) y $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ los vectores propios asociados, entonces estos vectores también son vectores propios de A, para los valores propios $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sabiendo que los valores propios de A son 1,1 y -8, se tiene $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ y $\lambda_3^3 = -8$. Así los valores propios de B son 1 de multiplicidad 2 y -2 de multiplicidad 1.

   (c) *Escribir el polinomio característico de B.*

   Teniendo en cuenta la pregunta precedente, se tiene

$$P_B(X) = (1-X)^2(-2-X).$$

   (d) *Determinar B tal que $B^3 = A$.*

   Se tiene $P_B(X) = (1-X)^2(-2-X) = -X^3 + 3X - 2$, por lo que, por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene $P_B(B) = 0$, es decir $-B^3 + 3B - 2I = 0$, en consecuencia

$$A = B^3 = 3B - 2I.$$

Así, $B = 1/3(A+2I)$, de donde,

$$B = 1/3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3201 ▲003496

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
3. $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3202 ▲003497

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -5 & 12 & 12 \\ -3 & 9-\sqrt{57} & 9+\sqrt{57} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3-\sqrt{57}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3+\sqrt{57}}{2} \end{pmatrix}$.
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
3. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
4. $P = \begin{pmatrix} -7 & 5+3\sqrt{5} & 5-3\sqrt{5} \\ 11 & -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 2 & 5+5\sqrt{5} & 5-5\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$
5. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
6. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
8. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
9. $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. $P=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Solución del **ejercicio 3203** ▲003498

1. $P=\begin{pmatrix}-1&-1&1&-1\\-1&1&3&3\\1&1&3&-3\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$
2. $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$
3. $P=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$
4. $P=\begin{pmatrix}1&0&30&18\\0&0&15&-99\\0&0&21&99\\0&1&-11&11\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-16\end{pmatrix}$
5. $P=\begin{pmatrix}1&0&7&-8\\3&1&12&9\\0&0&1&0\\0&0&1&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.
6. 1 es valor propio cuádruple, no diagonalizable.
7. 0 es valor propio cuádruple, no diagonalizable.
8. 0 es v.p. doble, $\operatorname{rg} A=2$. Otros vp : $\frac{-3\pm3\sqrt{13}}{2}$, diagonalizable.

Solución del **ejercicio 3204** ▲003503

n par : $P=\begin{pmatrix}1&&&&&1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&1&1&&\\&&1&-1&&\\&\iddots&&&\ddots&\\1&&&&&-1\end{pmatrix}$,
$D=\operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$.

n impar : $P=\begin{pmatrix}1&&&&&&1\\&\ddots&&&&\iddots&\\&&1&&1&&\\&&&1&&&\\&&1&&-1&&\\&\iddots&&&&\ddots&\\1&&&&&&-1\end{pmatrix}$,
$D=\operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$.

Solución del ejercicio 3205 ▲003504

$P = \left(\omega^{(i-1)(1-j)}\right)$, $D = \text{diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$, con $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

Solución del ejercicio 3206 ▲003505

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \text{diag}\,(a+b+c+e, a-b-c+e, -a+b-c+e, -a-b+c+e).$$

Solución del ejercicio 3208 ▲003510

1. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & (0) \\ & 2 & 2 & \ddots & \\ & & 6 & \ddots & -n(n-1) \\ & & & \ddots & n \\ (0) & & & & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3209 ▲003517

Diagonalizable si y solo si $\text{tr}(A) \neq 0$ o $A = 0$.

Solución del ejercicio 3210 ▲005654

Sea P un elemento de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n+1$ y además, si a es el coeficiente de X^{2n} en P, el coeficiente de X^{2n+1} en $f(P)$ es $2na - 2na = 0$. Entonces $f(P)$ es un elemento de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linealidad de f es claro, f es de hecho un endomorfismo de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Se busca ahora P polinomio no nulo y λ real tales que $f(P) = \lambda P$, lo que equivale a

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX + \lambda}{X^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+\lambda}{X-1} - \frac{-2n+\lambda}{X+1}\right).$$

Identificando con la clásica descomposición en elementos simples de $\frac{P'}{P}$ (a saber, si $P = K(X - z_1)^{\alpha_1} \cdots (X - z_k)^{\alpha_k}$, con $K \neq 0$ y los z_i dos a dos distintos, entonces $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{X - z_i}$), se ve que necesariamente P solo puede admitir raíces en $\mathbb{C}$ a -1 y 1 y por otro lado que P es de grado $\frac{1}{2}(2n + \lambda + 2n - \lambda) = 2n$. P es, por lo tanto necesariamente de la forma

$$P = aP_k, \text{ con } a \in \mathbb{R}^* \text{ y } P_k = (X-1)^k (X+1)^{2n-k}, \text{ con } k \in [\![0, 2n]\!].$$

Recíprocamente, cada P_k es no nulo y verifica

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{k}{X-1} + \frac{2n-k}{X+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n + (2k-2n)}{X-1} + \frac{2n - (2k-2n)}{X+1}\right).$$

Entonces, para cada $k \in [\![0, 2n]\!]$, P_k es un vector propio de f asociada al valor propio $\lambda_k = 2(k-n)$. Así, f admite $2n+1$ valores propios, necesariamente simple porque $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X] = 2n+1)$. f es, por lo tanto diagonalizable y los espacios propios de f son las rectas $\text{vect}(P_k)$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

Solución del ejercicio 3211 ▲005663

$\det M = \det \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $(\forall k \in [\![1,n]\!], L_k \leftarrow L_k - L_{n+k})$ y entonces $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M = (-3)^n(\det A)^2.}$$

La idea del estudio de M que lo sigue proviene del estudio de la matriz de tamaño 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una rápida diagonalización conduce a $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea entonces P la matriz de tamaño $2n$ definida por bloques para $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$. Un cálculo por blocs demuestra que P es invertible y que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ ya que

$P^{-1}MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

Se establece $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Dado que las matrices M y N son semejantes, M y N tienen el mismo polinomio característico y además M es diagonalizable si y solo si N lo es.

Se buscan los vectores propios Z de N bajo la forma $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, donde X y Y son vectores de columna de tamaño n. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$NZ = \lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX = \lambda X \text{ y } 3AY = \lambda Y.$$

Así

$$Z \text{ es un vector propio de } N \text{ asociada a } \lambda \Leftrightarrow (X \neq 0 \text{ o } Y \neq 0) \text{ y } (X \in \ker(A+\lambda I) \text{ y } Y \in \ker\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Una discusión según λ sigue :

1er caso. Si $-\lambda$ y $\frac{\lambda}{3}$ no son valores propios de A, entonces λ no es valor propio de M.

2o caso. Si $-\lambda$ está en SpA y $\frac{\lambda}{3}$ no lo está, entonces λ es valor propio de M. El subespacio propio asociado es el conjunto de los $P\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$, donde X recorre $\ker(A+\lambda I)$. La dimensión de E_λ es entonces $\dim(\ker(A+\lambda I)$.

3o caso. Si $-\lambda$ no está en SpA y $\frac{\lambda}{3}$ y es, entonces λ es valor propio de M. El subespacio propio asociado es el conjunto de los $P\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$, donde Y recorre $\ker\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimensión de E_λ es entonces $\dim\left(\ker\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4o caso. Si $-\lambda$ está en SpA y $\frac{\lambda}{3}$ también, entonces λ es valor propio de M. El subespacio propio asociado es el conjunto de los $P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X+2Y \\ X+Y \end{pmatrix}$, donde X recorre $\ker(A+\lambda I)$ y Y recorre $\ker\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimensión de E_λ es entonces $\dim(\ker(A+\lambda I)) + \dim\left(\ker\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

En todos los casos, $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A)) + \dim(E_{\lambda/3}(A))$ (y, en particular $\dim(\ker M) = 2\dim(\ker A)$). Como las aplicaciones $\lambda \mapsto -\lambda$ y $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{3}$ son las biyecciones de $\mathbb{C}$ en sí mismo,

$$\begin{aligned} A \text{ es diagonalizable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\ &\Leftrightarrow M \text{ es diagonalizable.} \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3212 ▲005667

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ de matriz A en la base canónica $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ y entonces $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = e_i$. Así f es una simetría distinta de la identidad y en particular $\mathrm{Sp}A = \{-1,1\}$ y f es diagonalizable. Se deduce que A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 3213 ▲005673

A es de tamaño 2 y entonces, ya sea tiene dos valores propios distintos y en este caso es diagonalizable en $\mathbb{C}$, o ya sea un valor propio doble λ no nulo porque $\mathrm{tr}A = 2\lambda \neq 0$. En este último caso, A^2 es diagonalizable y por lo tanto, es semejante a $\mathrm{diag}(\lambda^2,\lambda^2) = \lambda^2 I$. Así, $A^2 = \lambda^2 I$ y A anula el polinomio $X^2-\lambda^2 = (X-\lambda)(X+\lambda)$ que se divide en $\mathbb{R}$, con raíces simples. En este caso también, A es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3214 ▲005675

Encontrar un polinomio dividido con raíces simples anulando f. El polinomio $P = X(X-\lambda)(X-\mu) = X^3-(\lambda+\mu)X^2+\lambda\mu X$ es anulador de f. En efecto,

$$\begin{aligned} P(f) &= f^3-(\lambda+\mu)f^2+\lambda\mu f = (\lambda^3-(\lambda+\mu)\lambda^2+(\lambda\mu)\lambda)u+(\mu^3-(\lambda+\mu)\mu^2+(\lambda\mu)\mu)v \\ &= P(\lambda)u+P(\mu)v = 0. \end{aligned}$$

• Si λ y μ son distintos y no nulos, P es un polinomio dividido con raíces simples que anulan de f y entonces f es diagonalizable.
• Si $\lambda = \mu = 0$, entonces $f = 0$ y entonces f es diagonalizable.
• Si por ejemplo $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$, $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$ y el polinomio $P = X(X-\lambda)$ se divide en raíces simples y el anulador de f. En este caso también f es diagonalizable.
• Finalmente, si $\lambda = \mu \neq 0$, $f^2 = \lambda^2(u+v) = \lambda f$ y de nuevo $P = X(X-\lambda)$ se divide en raíces simples y el anulador de f. En todos los casos, f es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3215 ▲005682

(Si los a_k son reales, la matriz A es simétrica real y los repetidores saben que la matriz A es diagonalizable.) Si todos los a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, son nulos la matriz A es diagonalizable porque es diagonal. Se supone ahora que al menos uno de los a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, es no nulo. En este caso, $\mathrm{rg}A = 2$. 0 es valor propio de orden $n-2$ al menos. Sean λ y μ los dos últimos valores propios. Se tiene

$$\lambda+\mu = \mathrm{tr}A = a_n \text{ y } \lambda^2+\mu^2 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ y μ son soluciones del sistema $\begin{cases} \lambda+\mu=a_n \\ \lambda^2+\mu^2=2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2+a_n^2 \end{cases}$ equivalente al sistema $\begin{cases} \lambda+\mu=a_n \\ \lambda^2+\mu^2=-\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{cases}$ (S).

Se tienen entonces las situaciones siguientes :

• Si λ y μ son distintos y no nulos, A es diagonalizable porque el orden de multiplicidad de cada valor propio es igual a la dimensión del subespacio propio correspondiente.

• Si λ o μ es nulo, A no es diagonalizable porque el orden de multiplicidad del valor propio 0 es diferente de $n-2$, la dimensión del núcleo de A.

• Si $\lambda=\mu\neq 0$, A es diagonalizable si y solo si $\mathrm{rg}(A-\lambda I)=n-2$, pero se puede notar que si λ no es nulo, se tiene siempre $\mathrm{rg}(A-\lambda I)=n-1$, considerando la matriz extraída formada por las $n-1$ primeras filas y columnas.

En resumen, la matriz A es diagonalizable si y solo si el sistema (S) admite dos soluciones distintas y distintas de cero. Pero λ y μ son soluciones del sistema (S) si y solo si λ y μ son las raíces de la ecuación $(E) : X^2-a_nX-\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2=0$. Así, A es diagonalizable si y solo si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2=0$ y $\Delta=a_n^2+4\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\neq 0$.

Solución del ejercicio 3217 ▲003525

---

3. $P=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3218 ▲003526

---

1. 1 si $C\neq 0$, 0 si $C=0$.
2. $\dim(E_0)\geqslant n-1 \Rightarrow X^{n-1}$ divide $\chi_M \Rightarrow \chi_M=(-1)^n(X^n-(a_1^2+\cdots+a_n^2)X^{n-1})$.
3. Sí.

Solución del ejercicio 3219 ▲003527

$\mathrm{rg}A=1$, por lo tanto $\dim\ker A=n-1$ y 0 es valor propio de orden al menos $n-1$. La suma de los valores propios es $\mathrm{tr}A=n$, por lo que el último valor propio es n y el subespacio propio asociado es de dimensión 1. Entonces A es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3220 ▲003528

---

1. La función $f_n : x\mapsto \frac{P_n(x)}{x^n}$ crece estrictamente de $-\infty$ a 1, cuando x varía de 0 a $+\infty$.
2. $\chi_A(x)=(-1)^n\left(x^n-\sum_{k=1}^{n} kx^{n-k}\right)$.

Solución del ejercicio 3221 ▲003529

Sea $M=(x_iy_j)$: M es de rango menor o igual a 1, por lo tanto 0 es valor propio de M ordenar al menos $n-1$. Como $\mathrm{tr}(M)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$, el polinomio característico de M es $\chi_M(x)=(-x)^{n-1}(x_1y_1+\cdots+x_ny_n-x)$, y el determinante pedido es $\Delta_n=\chi_M(-1)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n+1$.

Solución del ejercicio 3222 ▲003530

1. $\det(M+(t))$ es una función afín de t.
2. $|\lambda+a| = k|\lambda+b|$ y $\lambda = x+iy \Rightarrow (1-k^2)(x^2+y^2)+\cdots = 0$, ecuación de un círculo si $|a| \neq |b|$.

Solución del ejercicio 3223 ▲003531

1. $a_1\ldots a_n + b_1a_2\ldots a_n + a_1b_2a_3\ldots a_n + \cdots + a_1\ldots a_{n-1}b_n$.
2.
3. $\dfrac{\chi_A(t)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i-t)} = 1+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i-t}$ cambia de signo entre dos a_i sucesivos y en uno de los intervalos $]-\infty, a_1[$ o $]a_n,+\infty[$, por lo tanto χ_A admite n raíces distintas.
4. Sí. Se supone por ejemplo $a_1 = \cdots = a_p < a_{p+1} < \cdots < a_n$: La cuestión precedente escribe en evidencia $n-p$ raíces simples de χ_A entre los a_i y $\pm\infty$, y a_1 es también raíz de orden $p-1$ de χ_A. Pero los p primeras filas de $A-a_1I$ son iguales, por lo tanto $\mathrm{rg}(A-a_1I) \leqslant n-p+1$ y $\dim(\ker(A-a_1I)) \geqslant p-1$ de ahí la diagonalizabilidad. El caso en que existen varios grupos de a_i iguales, se trata igual.

Solución del ejercicio 3224 ▲003532

$\chi_B(X) = \dfrac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A(1/X), \quad \chi_C(X^2) = \chi_A(X)\chi_A(-X)$.

Solución del ejercicio 3227 ▲003535

$(a) \Leftrightarrow (b)$: teorema del rango. $\underline{(c)} \Leftrightarrow \underline{(d)}$: inmediata. $(c) \Rightarrow (b)$: si $AX = XB$, entonces para todo polinomio P se tiene $P(A)X = XP(B)$. $\overline{(c)} \Rightarrow \overline{(b)}$: tomar U vector propio de A, V vector propio de ${}^tB$ asociados al mismo valor propio y $X = U^tV$.

Solución del ejercicio 3230 ▲003538

Suma de valores propios $= n$.

Solución del ejercicio 3232 ▲003540

Sea $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. De hecho, se tiene que probar que para toda matriz $A \in \mathscr{M}_n(K)$ se tiene $\mathrm{tr}(A^p) = \mathrm{tr}(A)$. Se observa que no necesariamente se tiene $A^p = A$ en $\mathscr{M}_n(K)$, es falso, entre otros, si A es nilpotente de índice 2. Sea X un indeterminado en K. Se tiene en el anillo $\mathscr{M}_n(K[X])$: $(A-XI_n)^p = A^p - X^pI_n$, de donde, tomando los determinantes : $\chi_{A^p}(X^p) = \chi_A(X)^p = \chi_A(X^p)$ e igualamos los coeficientes de $X^{(n-1)p}$.

Solución del ejercicio 3233 ▲005656

Si $p = q$, el resultado es conocido : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Se supone por ejemplo $p < q$. Se vuelve al caso de las matrices cuadradas completando. Sean $A' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix}$ y $B' = \begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix}$. A' y B' son matrices cuadradas de tamaño q y $A'B'$ y $B'A'$ tienen el mismo polinomio característico. Un cálculo por blocs da $B'A' = BA$

y $A'B' = \begin{pmatrix} A \\ 0_{q-p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0_{q,q-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p} \end{pmatrix}$. Entonces $\chi_{BA} = (-X)^{q-p}\chi_{AB}$ o aún, con una escritura más simétrica, $(-X)^p\chi_{BA} = (-X)^q\chi_{AB}$, lo que es cierto en todos los casos.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}), (-X)^p\chi_{BA} = (-X)^q\chi_{AB}.}$$

Solución del ejercicio 3234 ▲005657

Si u es invertible,

$$\det(u+v) = \det u \Leftrightarrow \det u \times \det(\mathrm{Id}+u^{-1}v) = \det u \Leftrightarrow \det(\mathrm{Id}+u^{-1}v) = 1.$$

u y v conmutan y por lo tanto, u^{-1} y v igualmente porque $uv = vu \Rightarrow u^{-1}uvu^{-1} = u^{-1}vuu^{-1} \Rightarrow vu^{-1} = u^{-1}v$. Pero entonces, ya que v es nilpotente, el endomorfismo $w = u^{-1}v$, lo es igualmente, porque $(u^{-1}v)^p = u^{-p}v^p$).
Queda pues por calcular $\det(\mathrm{Id}+w)$, donde w es un endomorfismo nilpotente. Se observa que $\det(\mathrm{Id}+w) = \chi_w(-1)$. Se sabe que 0 es el único valor propio de un endomorfismo nilpotente y, por lo tanto $\chi_w = (-X)^n$, luego

$$\det(\mathrm{Id}+w) = \chi_w(-1) = (-(-1))^n = 1.$$

El resultado queda así probado en el caso en que u es invertible. Si u no es invertible, $u+x\mathrm{Id}$ es invertible excepto para un número finito de valores de x y conmuta siempre con v. Entonces, para todo x excepto tal vez por un número finito, $\det(u+x\mathrm{Id}+v) = \det(u+x\mathrm{Id})$. Estos dos polinomios coinciden en una infinidad de valores de x y por lo tanto, son iguales. En particular, toman el mismo valor en 0 que proporciona $\det(u+v) = \det u$.

Solución del ejercicio 3235 ▲005666

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A es antisimétrica si y solo si ${}^tA = -A$. En este caso

$$\chi_A = \det(A-XI) = \det({}^t(A-XI)) = \det(-A-XI) = (-1)^n\det(A+XI) = (-1)^n\chi_A(-X).$$

Así, χ_A tiene la paridad de n.

Solución del ejercicio 3236 ▲005678

Sea $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la familia de valores propios de A. Se tiene entonces $\chi_A = (\lambda_1 - X)\cdots(\lambda_n - X)$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(B) \text{ invertible} &\Leftrightarrow (B-\lambda_1 I)\cdots(B-\lambda_n I) \text{ invertible} \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ B-\lambda_k I \text{ invertible} \\
&\qquad (\text{pues } \det((B-\lambda_1 I)\cdots(B-\lambda_n I)) = \det(B-\lambda_1 I)\times\cdots\times\det(B-\lambda_n I)) \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k \text{ no es valor propio de } B \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Sp}A \cap \mathrm{Sp}B = \varnothing.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3237 ▲005679

Si P y χ_f son primos entre sí, de acuerdo con teorema de BÉZOUT, existen dos polinomios U y V tales que $UP + V\chi_f = 1$. Tomado el valor en f y desde que $\chi_f(f) = 0$, se obtiene $P(f)\circ U(f) = U(f)\circ P(f) = \mathrm{Id}$.

$P(f)$ es, por lo tanto un automorfismo de E. Recíprocamente, si P y χ_f no son primos entre sí, P y χ_f tienen una raíz común λ en $\mathbb{C}$. Sea A es la matriz de f en una base de datos dada (si $\mathbb{K}$ no es $\mathbb{C}$ el uso de la matriz es indispensable). Se tiene $P(A) = (A-\lambda I)Q(A)$, para algún polinomio Q. La matriz $A-\lambda I$ no es invertible porque λ es valor propio de A y entonces $P(A)$ no es invertible ($\det(P(A)) = \det(A-\lambda I)\det Q(A) = 0$).

Solución del ejercicio 3252 ▲003612

1. Valores propios : $1, j, j^2$. sev estables : $\{\overrightarrow{0}\}$, $\text{vect}\{\overrightarrow{e}_3\}$, $\text{vect}\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ y $\mathbb{R}^3$.
2. $\left.\begin{array}{l} AB = BA \quad \Rightarrow \phi_B(\overrightarrow{e}_3) = \lambda\overrightarrow{e}_3 \\ {}^tA^tB = {}^tB^tA \Rightarrow \phi_{^tB}(\overrightarrow{e}_3) = \lambda\overrightarrow{e}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a+\mu & a & 0 \\ -3a & -2a+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3254 ▲003614

Sea $\varphi(x,y,z) = x+2y+3z$. f conserva el nivel de la superficie $\varphi = 1$, entonces por linealidad $f\circ\varphi = \varphi$ y φ es un vector propio de ${}^tf$.

Solución del ejercicio 3257 ▲003617

Si χ_u es irreducible, para $x \neq 0$ el polinomio minimal de x en u es igual a χ_u por lo tanto, el subespacio cíclico generado por x es igual a E y no existe un subespacio estable no trivial.
Si solo $\{0\}$ y E son estables, sea $x \neq 0$. El subespacio cíclico generado por x es igual a E, por lo que el anulador minimal de u en x es igual a χ_u. Sea P un divisor no trivial de χ_u y $y = P(u)(x)$: el anulador minimal de u en y es χ_u/P, absurdo.

Solución del ejercicio 3258 ▲003618

Sea F un hiperplano de E, $\langle e\rangle$ un suplementario estable y H un suplemento de $\langle e\rangle$ estable. Si K es un sev de H, entonces K admite un suplementario K' en E estable y $H\cap K'$ es un sev de H estable, en suma directa con K. $K' \not\subset H$, pues $K \subset H$ y $K\oplus K' = E$, por lo tanto $K'+H = E$ y $\dim(H\cap K') = \dim(H)+\dim(K') - \dim(E) = \dim(H) - \dim(K)$ sea $K\oplus(H\cap K') = H$. $f_{|H}$ verifica la misma propiedad que f y se obtiene por recurrencia que f es diagonalizable.
Recíprocamente, sea f diagonalizable, F un sev de E y $(e_1,\dots,e_n)$ una base propia para f. Demostrar que F admite un suplementario estable por inducción en $\operatorname{codim}(F)$: si $F = E$, entonces $\{0\}$ sirve y si $F \neq E$, entonces existe i tal que $e_i \notin F$, de donde $F\oplus\langle e_i\rangle$ es un sobre-espacio estricto de F, admitiendo un suplementario G estable, de donde $G\oplus\langle e_i\rangle$ es suplementario a F estable.

Solución del ejercicio 3259 ▲003619

$\operatorname{Spec}(f) = \{0,1,2\}$, por lo tanto f es diagonalizable y cada subespacio propio tiene dimensión 1. Como la restricción de un diagonalizable tiene un subespacio estable es aún diagonalizable, subespacios estables por f son las ocho sub-sumas de $E_0\oplus E_1\oplus E_2$.

Solución del ejercicio 3260 ▲005683

1. $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-2X) - (2-X) + (2-X) = -X(X-1)(X-2)$. Se está

en el caso de una matriz diagonalizable con 3 valores propios simples.

Búsqueda de rectas estables. En cada uno de los casos, las rectas estables son las rectas generadas por vectores propios. Inmediatamente, se obtienen los 3 rectas estables : $E_0 = \text{vect}(e1)$, donde $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \text{vect}(e_2)$, donde $e_2 = (1,-1,-1)$ y $E_2 = \text{vect}(e_3)$, donde $e_3 = (0,1,1)$.

Búsqueda de planos estables. Sea P un plano estable por f. La restricción de f a P es un endomorfismo de P y se sabe también que el polinomio característico de $f_{|P}$ divide el de f. $f_{|P}$ es diagonalizable porque f lo es, porque se dispone un polinomio dividido con raíces simples anulando f y entonces $f_{|P}$. Se deduce que P es generado por dos vectores propios independientes de $f_{|P}$ que son aún vectores propios de f. Se obtienen tres planos estables : $P_1 = \text{vect}(e_2,e_3)$, $P_2 = \text{vect}(e_1,e_3)$ y $P_3 = \text{vect}(e_1,e_2)$.

2. $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-5X+4)-(-2X+2)+(X-1) =$
$(1-X)((X-2)(X-4)-2-1) = (1-X)(X^2+6X-5) = -(X-1)^2(X-5)$.
Después E_1 es el plano de ecuación $x+2y+z=0$ y $E_5 = \text{vect}((1,1,1))$. Todavía se está en el caso diagonalizable pero con un valor propio doble. Las rectas estables son $E_5 = \text{vect}((1,1,1))$ y cualquier línea contenida en E_1. Tal recta es generada por un vector de la forma $(x,y,-x-2y)$, con $(x,y) \neq (0,0)$.
Búsqueda de planos estables. Sea P un plano estable por f. f es diagonalizable y así $f_{|P}$ es un endomorfismo diagonalizable de P. Así, P es generado por dos vectores propios independientes de f. Se encuentra el plano propio de f de ecuación $x+2y+z=0$ y los planos generados por $(1,1,1)$ y vector cualquiera no nulo del plano de ecuación $x+2y+z=0$. La ecuación general de dicho plano es $(-a-3b)x+(2a+2b)y+(b-a)z=0$, donde $(a,b)\neq(0,0)$.

3. $\chi_A = \begin{vmatrix} 6-X & -6 & 5 \\ -4 & -1-X & 10 \\ 7 & -6 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2-3X+56)+4(6X+6)+7(5X-55) =$
$-X^3+9X^2-15X-25 = -(X+1)(X^2-10X+25) = -(X+1)(X-5)^2$.
$E_{-1} = \text{vect}(10,15,4)$ y $E_5 = \text{vect}((1,1,1))$.
Se está en el caso donde A admite un valor propio simple y doble pero no es diagonalizable. Las rectas estables por f son las dos rectas propias.
Búsqueda de planos estables. Sea P un plano estable por f. El polinomio característico de $f_{|P}$ es unitario y divide al de f. Por lo tanto, este polinomio característico es $(X-1)(X-5)$ sea $(X-5)^2$. En el primer caso, $f_{|P}$ es diagonalizable y P es necesariamente el plano $\text{vect}((10,15,4))+\text{vect}((1,1,1))$, es decir el plano de ecuación $11x-6y-5z=0$. En el segundo caso, $\chi_{f_{|P}} = (X-5)^2$ y 5 es el único valor propio de $f_{|P}$. El teorema de CAYLEY-HAMILTON demuestra que $(f_{|P}-5\,\text{Id})^2 = 0$ y entonces P está contenido en $\ker(f-5\,\text{Id})^2$. $\ker(f-5\,\text{Id})^2$ es el plano de ecuación $x=z$ que es por supuesto estable por f, pues $(f-5\,\text{Id})^2$ conmuta con f.

Solución del ejercicio 3261 ▲005686

F es estable por f y entonces $f_{|F}$ es un endomorfismo de F. f es diagonalizable y por lo tanto, existe un polinomio P, divido de raíces simples, tal que $P(f)=0$. Pero entonces $P(f_{|F})=0$ y se ha encontrado un polinomio dividido con raíces simples anulador de $f_{|F}$. Entonces $f_{|F}$ es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3268 ▲003578

---

1. 1 es valor propio doble, $d_1 = 1$.
2. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\0 & 0 & -4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
5. $X = \begin{pmatrix}(6\alpha t+\gamma)e^t+2\beta\\(6\alpha t+\gamma+3\alpha)e^t+\beta\\(6\alpha t+\gamma-\alpha)e^t+2\beta\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3271 ▲003622

0 es valor propio, colocarse en un hiperplano estable y recorrer.

Solución del ejercicio 3272 ▲003623

No. Tomar $\mathrm{mat}(u_n) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\0 & 1/n\end{smallmatrix}\right)$.

Solución del ejercicio 3273 ▲003624

Trigonalizar fuertemente M.

Solución del ejercicio 3274 ▲005677

Demostrar el resultado por inducción sobre $n = \dim E \geqslant 1$.
• Si $n = 1$, es claro.
• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que dos endomorfismos de un $\mathbb{C}$-espacio de dimensión n que conmutan son simultáneamente trigonalizables.
Sean f y g dos endomorfismos de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $n+1$ tales que $fg = gf$. f y g tienen al menos un vector propio en común. En efecto, f admite al menos un valor propio λ. Sea E_λ el subespacio propio de f asociada a λ. g conmuta con f y por lo tanto, deja estable E_λ. La restricción de g a E_λ es un endomorfismo de E_λ que es de dimensión finita no nula. Esta restricción admite así un valor propio y por lo tanto, un vector propio. Este vector es un vector propio común a f y g.
Se comienza a construir una base de trigonalización simultánea de f y g. Sea x un vector propio común a f y g. Se completa la familia libre (x) en una base $\mathscr{B} = (x, \dots)$ de E. En la base $\mathscr{B}$, las matrices M y N de f y g se escriben respectivamente $M = \begin{pmatrix}\lambda & \times\\0 & M_1\end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix}\mu & \times\\0 & N_1\end{pmatrix}$, donde M_1 y N_1 son de tamaño n. Un cálculo por blocs demuestra que M_1 y N_1 conmutan o aún si f_1 y g_1 son los endomorfismos de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 y N_1 en la base canónica de $\mathbb{C}^n$, f_1 y g_1 conmutan. Por hipótesis de recurrencia, f_1 y g_1 son simultáneamente trigonalizables. Entonces existe una matriz invertible de tamaño n P_1 y dos matrices triangulares superiores de tamaño n T_1 y T_1' tales que $P_1^{-1}M_1P_1 = T_1$ y $P_1^{-1}N_1P_1 = T_1'$.
Sea $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & P_1\end{pmatrix}$. P es invertible de tamaño $n+1$, pues $\det P = \det P_1 \neq 0$ y un cálculo de bloque demuestra que $P^{-1}MP$ y $P^{-1}NP$ son triangulares superiores. P es, por lo tanto la matriz de pasaje de la base $\mathscr{B}$, con una base de trigonalización simultánea de f y g.

Solución del ejercicio 3282 ▲002589

Se considera la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

1. *Factorizar el polinomio característico de A.*

   Se tiene

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix}$$
   $$= (1-X)(X^2-2X) + (1-X) = (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.$$

   El polinomio característico de A admite un valor propio triple $\lambda = 1$.

2. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.*

   La matriz A admite un valor propio único $\lambda = 1$ de multiplicidad 3, el subespacio propio asociado es el espacio $E_1 = \ker(A-I)$, y se tiene

   $$(x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} x-y = x \\ x-z = y \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z, \end{cases}$$

   el subespacio E_1 es la recta vectorial generada por el vector $(1,0,1)$. El subespacio característico de A, asociada con el único valor propio $\lambda = 1$, es el subespacio $N_1 = \ker(A-I)^3$, por lo que, dado el teorema de Hamilton-Cayley, se sabe que $P_A(A) = 0$, así, la matriz $(A-I)^3$ es la matriz nula, lo que implica $N_1 = \mathbb{R}^3$, entonces es el espacio entero.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f se escribe*

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Se buscan los vectores e_1, e_2, e_3 tales que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ y $Ae_3 = e_2 + e_3$. El vector e_1 pertenece a $E_1 = \ker(A-I)$, y $\ker(A-I)$ es la recta de ecuaciones : $\{y = 0, x = z\}$. Se determina $e_2 = (x,y,z)$ tal que $Ae_2 = e_1 + e_2$, se obtiene el sistema

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = 1+x \\ x-z = y \\ -x+2z = 1+z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x-z = -1. \end{cases}$$

   Así, los vectores $e_1 = (1,0,1)$ y $e_2 = (-1,-1,0)$ sirven. Todavía se tiene que encontrar un vector e_3 tal que $Ae_3 = e_2 + e_3$, es decir

   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x-y = x-1 \\ x-z = y-1 \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = z. \end{cases}$$

   El vector $e_3 = (0,1,0)$ sirve. Se obtiene entonces la matriz P siguiente que es invertible y verifica $A = PBP^{-1}$,

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Descomposición de Dunford de B*

   Se tiene
$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   y es claro que ambas matrices conmutan porque una es igual a I. Por tanto, existe un único par de matrices D y N, D diagonalizable y N nilpotente, tales que $B=D+N$ y $DN=ND$. Pero si
$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
   Se tiene
$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   y $N^3=0$. La descomposición $B=D+N$ es, por lo tanto la descomposición de Dunford de la matriz B.

Solución del ejercicio 3283 ▲002602

Sea A la matriz
$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&3&-1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$$
y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociada.

1. *Factorizar el polinomio característico de A.* (1 punto)

   Se tiene
$$P_A(X)=\begin{vmatrix}3-X&2&4\\-1&3-X&-1\\-2&-1&-3-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-X&2&4\\0&3-X&-1\\1+X&-1&-3-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-X&2&4\\0&3-X&-1\\0&1&1-X\end{vmatrix}$$
$$=(-1-X)(X^2-4X+4)=-(X+1)(X-2)^2.$$
   Los valores propios de la matriz A son $\lambda_1=-1$, valor propio simple y $\lambda_2=2$, valor propio doble.

2. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.* (2 puntos)

   El subespacio propio asociado al valor propio -1 es el subespacio vectorial E_{-1} definido por
$$E_{-1}=\{\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3,\ A\overrightarrow{u}=-u\}.$$
   Sea $\overrightarrow{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$\overrightarrow{u}\in E_{-1}\iff\begin{cases}4x+2y+4z=0\\-x+4y-z=0\\-2x-y-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+y+2z=0\\x-4y+z=0.\end{cases}$$
   El espacio E_{-1} es una recta vectorial cuyo vector director viene dado por
$$\overrightarrow{u}_1=(1,0,-1).$$

El subespacio propio asociado al valor propio 2 es el subespacio vectorial E_2 definido por

$$E_2 = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3,\, A\overrightarrow{u} = 2u\}.$$

Sea $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ -x+y-z=0 \\ -2x-y-5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

El espacio E_2 es una recta vectorial cuyo vector director viene dado por

$$\overrightarrow{u}_2 = (2,1,-1).$$

el subespacio E_2 es de dimensión 1, la matriz A no es diagonalizable. El subespacio característico N_{-1} asociada al valor propio -1 es igual al subespacio propio E_{-1}. El subespacio característico N_2 asociada al valor propio 2 es igual a

$$N_2 = \ker(A-2I)^2.$$

Determinarlo

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

De donde $\ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3,\ x+2z=0\}$, es el plano vectorial de ecuación $x+2z=0$.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es* (1 punto)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores $\overrightarrow{u}_1$ y $\overrightarrow{u}_2$, vectores propios asociados a los valores propios -1 y 2 sirven para los dos primeros vectores de la base buscada, luego se busca un vector $\overrightarrow{u}_3 \in \ker(A-2I)^2$ tal que $A\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_2 + 2\overrightarrow{u}_3$, se denota $\overrightarrow{u}_3 = (-2z,y,z)$, se determinan y y z tales que

$$\begin{pmatrix} 2y-2z \\ 3y+z \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

se obtiene $y+z=1$, el vector $\overrightarrow{u}_3 = (0,1,0)$ sirve. *Encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.* (1 punto)

La matriz de pasaje P que expresa la base $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ responde la pregunta,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. *Escribir la descomposición de Dunford de B.* (1 punto)

   Se tiene
$$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N},$$
   la matriz D es diagonal, la matriz N es nilpotente, $N^2=0$, y $ND=DN$, es, por lo tanto la descomposición de Dunford de la matriz B.

5. *Calculemos* $\exp B$. (1 punto)

   Teniendo en cuenta la pregunta precedente, se tiene $B=N+D$, con $DN=ND$, así $\exp B=\exp D\exp N$, por lo que
$$\exp D=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1}&0&0\\0&\mathrm{e}^2&0\\0&0&\mathrm{e}^2\end{pmatrix}\ \text{ y }\ \exp N=I+N=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
   De donde
$$\exp B=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1}&0&0\\0&\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2\\0&0&\mathrm{e}^2\end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3286 ▲003583

Se vuelve a $\lambda=0$ reemplazando f por $f-\lambda\,\mathrm{Id}$. $\mathrm{Im}\,f$ es de dimensión 1 estable por f, por lo tanto $f_{|\mathrm{Im}\,f}$ es una homotecia, es la aplicación nula vista $\mathrm{Spec}(f)$. Se deduce $\mathrm{Im}\,f\subset\ker f$. Sea $e_2\in\mathrm{Im}\,f\setminus\{0\}$, e_3 un antecedente de e_2 por f y $e_1\in\ker f$ independiente de e_2. Entonces $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ sirve.

Solución del ejercicio 3287 ▲005670

Se define $\chi_f=\prod_{k=1}^{p}(\lambda_k-X)^{\alpha_k}$, donde $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ son los valores propios dos a dos distintos de f. Sea $E'_k=\ker(f-\lambda_k\,\mathrm{Id})^{\alpha_k}$ el subespacio característico de f asociada al valor propio λ_k, $1\leqslant k\leqslant p$. Por el teorema de descomposición del núcleo, $E=E'_1\oplus\ldots\oplus E'_p$. Además, si f_k es la restricción de f a E'_k, entonces f_k es un endomorfismo de E'_k (pues f y $(f-\lambda_k\,\mathrm{Id})^{\alpha_k}$ conmutan). Se observa que $(f_k-\lambda_k)^{\alpha_k}=0$ y entonces λ_k es el único valor propio de f_k porque todo valor propio de f_k es raíz del polinomio anulador $(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$.

Existencia de d y n. Se define d por las restricciones d_k en la E'_k, $1\leqslant k\leqslant p$: d_k es la homotecia de la razón λ_k. Luego se define n por $n=f-d$.

d es diagonalizable porque toda base de E adaptada a la descomposición $E=E'_1\oplus\ldots\oplus E'_p$ es una base de vectores propios de d. Además, $f=d+n$.

Sea n_k la restricción de n a E'_k. Se tiene $n_k=f_k-\lambda_k\,\mathrm{Id}_{E'_k}$ y por definición de E'_k, $n_k^{\alpha_k}=0$. Pero entonces, si se establece $\alpha=\max\{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$, se tiene $n_k^{\alpha}=0$, para todo k de $\{1,\dots,p\}$ y entonces $n^{\alpha}=0$. Así, n es nilpotente. En fin, para todo $k\in[\![1,p]\!]$, n_k conmuta con d_k, pues d_k es una homotecia y por lo tanto, $nd=dn$.

Unicidad de d y n. Se supone que $f=d+n$, con d diagonalizable, n nilpotente y $nd=dn$. d conmuta con n y así con f, pues $df=d^2+dn=d^2+nd=fd$. Pero entonces, $n=f-d$ conmuta igualmente con f. d y n deja así estables los subespacios característicos E'_k, $1\leqslant k\leqslant p$ de f. Para $k\in[\![1,p]\!]$, se denota d_k y n_k las restricciones de d y n a E'_k.

Sean $k\in[\![1,p]\!]$, luego μ un valor propio de d_k. Según el ejercicio 3234,
$$\det(f_k-\mu\,\mathrm{Id})=\det(d_k-\mu\,\mathrm{Id}+n)=\det(d_k-\mu\,\mathrm{Id})=0,$$

ya que $d_k - \mu\,\mathrm{Id}$ no es invertible. Se deduce que $f_k - \mu\,\mathrm{Id}$ no es invertible y por lo tanto, que μ es valor propio de f_k. Porque λ_k es el único valor propio de f_k, se tiene $\mu = \lambda_k$. Así, λ_k es el único valor propio de d_k y como d_k es diagonalizable (ver el ejercicio 3261), se tiene necesariamente $d_k = \lambda_k \mathrm{Id}_{E'_k}$, luego $n_k = f_k - \lambda_k \mathrm{Id}_{E'_k}$. Esto demuestra la unicidad de d y n.

Solución del ejercicio 3295 ▲001710

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (2-X)(\omega - X)(\bar\omega - X)$y A es diagonalizable en $\mathbb{C}$. $\ker(A-2I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A-\omega I) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\omega)x + y = 0 \\ (1-\omega)y + z = 0 \\ (1-\omega)z + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\omega-1)x \\ z = (\omega-1)^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \omega^2 x \\ z = \omega^4 x \end{cases}$, $\ker(A-\omega I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix}$.

Se deduce que $\ker(A-\bar\omega I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \bar\omega^2 \\ \bar\omega^4 \end{pmatrix}$

Así poniendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \bar\omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \bar\omega^4 \end{pmatrix}$ se obtiene $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar\omega \end{pmatrix}$. Se deduce que las soluciones son sucesiones de la forma

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar\omega^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{o sea :} \quad \begin{cases} x_n = a + b\ \omega^n + c\ \bar\omega^n \\ y_n = a + b\ \omega^{n+2} + c\ \bar\omega^{n+2} \\ z_n = a + b\ \omega^{n+4} + c\ \bar\omega^{n+4}, \end{cases}$$

donde a, b, c son tres complejos. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} a+b+c = 2 \\ a + b\omega^2 + c\bar\omega^2 = 1 \\ a + b\omega^4 + c\bar\omega^4 = 1 \end{cases}$$

se obtiene la solución particular buscada : es la solución asociada a $a = 4/3, b = c = 1/3$.

$\begin{cases} x_n = 4/3 + 2/3\cos(n\pi/3) \\ y_n = 4/3 + 2/3\cos((n+2)\pi/3) \\ z_n = 4/3 + 2/3\cos((n+4)\pi/3). \end{cases}$

Solución del ejercicio 3297 ▲001712

1. $A^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)\,\mathrm{Id}$. Así $\det A * \det {}^tA = (\det A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ y entonces $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
2. En la expresión $\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma)\alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{4\sigma(4)}$, donde los coeficientes de A se denotan α_{ij}, el único término en a^4 se obtiene por $\sigma = \mathrm{Id}$, sea $\varepsilon(\sigma) = +1$. Se deduce que $\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Para obtener el polinomio característico de A, se reemplaza a por $a - X$ en A, y se calcula el determinante. Se tiene entonces $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
3. $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \chi_A(\lambda) > 0$, pues $(b,c,d) \neq (0,0,0)$, entonces A no tiene valor propio real, por lo tanto A no es ni diagonalizable ni triangularizable en $\mathbb{R}$.

4. $A(i\sqrt{3},1,1,1) = (1-i\sqrt{3}(i\sqrt{3},1,1,1))$ y $A(-1,i\sqrt{3},-1,1) = (1-i\sqrt{3}(-1,i\sqrt{3},-1,1))$. Para el segundo valor propio, que es el conjugado de $1-i\sqrt{3}$, se utiliza los vectores conjugados. Así, poniendo $P = \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & -1 & -i\sqrt{3} & -1 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 & -i\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2\bar{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\bar{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega \end{pmatrix} = D$.

5. Sea $X_n = (u_n, v_n, w_n, h_n)$. Se tiene $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$, de donde $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$. Por lo tanto $A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$. Se deduce que $X_n = \begin{pmatrix} 2^n\bar{\omega}^n i\sqrt{3} & -2^n\bar{\omega}^n & -2^n\omega^n i\sqrt{3} & -2^n\omega^n \\ 2^n\bar{\omega}^n & 2^n\bar{\omega}^n i\sqrt{3} & 2^n\omega^n & -2^n\omega^n i\sqrt{3} \\ 2^n\bar{\omega}^n & -2^n\bar{\omega}^n & 2^n\omega^n & -2^n\omega^n \\ 2^n\bar{\omega}^n & 2^n\bar{\omega}^n & 2^n\omega^n & 2^n\omega^n \end{pmatrix}$. Se define $Y_0 = P^{-1}X_0$. Al resolver el sistema $PX_0 = Y_0$, se obtiene $Y_0 = (1/2i\sqrt{3}, 0, -1/2i\sqrt{3}, 0)$, y finalmente :

$$X_n = 1/2i\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2^n(\bar{\omega}^n + \omega^n)i\sqrt{3} \\ 2^n(\bar{\omega}^n - \omega^n) \\ 2^n(\bar{\omega}^n - \omega^n) \\ 2^n(\bar{\omega}^n - \omega^n) \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 3314 ▲002590

La sucesión de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,13,\dots$ es la sucesión $(F_n)_{n\geqslant 0}$ definida por la relación de recurrencia $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para $n \geqslant 1$, con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

1. *Determinar una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que, para todo $n \geqslant 1$,*

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$. Denotemos, para $n \geqslant 1$, X_n el vector $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ y A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar, por inducción en n que para todo $n \geqslant 1$, se tiene $X_n = A^n X_0$, es claramente cierto para $n = 1$, Se supone que esto es cierto para un n arreglado arbitrariamente, se tiene entonces

$$X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0,$$

de donde el resultado.

2. *Demostrar que A admite dos valores propios reales distintos que denotamos λ_1 y λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$.*

Se tiene

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1.$$

el discriminante $\Delta = 5 > 0$, el polinomio característico admite dos raíces distintas

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. *Encontrar los vectores propios ε_1 y ε_2 asociados a los valores propios λ_1 y λ_2, bajo la forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Se define $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ y calcular α tal que $A\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$, es decir

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$$

lo que equivale a

$$\begin{cases}\alpha+1 = \lambda_1\alpha\\ \alpha = \lambda_1\end{cases} \iff \alpha = \lambda_1$$

pues $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$, por lo tanto se tiene $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}$ y, de mismo, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$

4. *Determinar las coordenadas del vector* $\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix}$ *en la base* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$*, se les denota* x_1 *y* x_2*.*

   Se busca x_1 y x_2 tales que

$$\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 = x_1\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix},$$

   x_1 y x_2 son por tanto soluciones del sistema

$$\begin{cases}x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 1\\ x_1 + x_2 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x_1(\lambda_1-\lambda_2) = 1\\ x_2 = -x_1\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 = \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}\\ x_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

5. *Demostrar que* $\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1\varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2\varepsilon_2$*.*

   Los vectores ε_1 y ε_2 son vectores propios de A, se tiene $A\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$ y $A\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$, entonces por recurrencia, se tiene, para todo $n \geqslant 1$, $A^n\varepsilon_1 = \lambda_1^n\varepsilon_1$ y $A^n\varepsilon_2 = \lambda_2^n\varepsilon_2$. Así,

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}F_1\\F_0\end{pmatrix} = A^n(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2) = x_1A^n\varepsilon_1 + x_2A^n\varepsilon_2 = \lambda_1^n x_1\varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2\varepsilon_2.$$

   Se deduce que

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

   Se ha demostrado que $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}$ y $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$, por lo tanto se tiene,

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\F_n\end{pmatrix} = \lambda_1^n\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2^n\left(\frac{-1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix},$$

   de ahí el resultado

$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

6. *Dar un equivalente de* F_n*, cuando* n *tiende a* $+\infty$*.*

   Se observa que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$ así, cuando n tiende a infinito, λ_1^n tiende a 0 y λ_2^n tiende a $+\infty$. Se tiene entonces

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{F_n}{\lambda_2^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1 = 1.$$

   Lo que prueba que $\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_2-\lambda_1}$ es un equivalente de F_n, cuando n tiende a $+\infty$.

Solución del ejercicio 3315 ▲002597

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ asociado.

1. *Factorizar el polinomio característico de A.* El polinomio característico de A es el polinomio

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} &= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(X^2-X+1)-1 \\ &= -X^3+3X^2-3X+1 = (1-X)^3. \end{aligned}$$

2. *Determinar los subespacios propios y característicos de A.*
La matriz A admite un valor propio único $\lambda = 1$, como $A \neq I$, no es diagonalizable. Su subespacio característico es igual a $\ker(A-I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. En efecto, por el teorema de Hamilton-Cayley, se tiene $P_A(A) = 0$, es decir $(A-I_3)^3 = 0$. Su subespacio propio es igual a $\ker(A-I_3)$.

$$\ker(A-I_3) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 / \, A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x = z = -y\}.$$

Es la recta vectorial generada por el vector $\overrightarrow{u}_1 = (1,-1,1)$.

3. *Demostrar que existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f es*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y encontrar una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$.
El vector $\overrightarrow{u}_1$ verifica $A\overrightarrow{u}_1 = u_1$, se busca un vector $\overrightarrow{u}_2 = (x,y,z)$ tal que $A\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$.

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se obtiene por lo tanto $z-x = z+y = -1$, el vector $\overrightarrow{u}_2 = (1,-1,0)$ sirve. Se busca entonces un vector $\overrightarrow{u}_3 = (x,y,z)$ tal que $A\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3$.

$$A\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3 \iff \begin{pmatrix} 2x-z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix},$$

se obtiene entonces $x+y=x-z=1$. El vector $\overrightarrow{u}_3=(1,0,0)$ sirve. Así, en la base $(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_3)$ la matriz de f es igual a B. La matriz P buscado es

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \pm1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene bien $A=PBP^{-1}$ y $B=P^{-1}AP$.

4. *Escribir la descomposición de Dunford de B.* Se tiene

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=I_3+N.$$

Si $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^3=0$. La matriz I_3 es diagonal, la matriz N es nilpotente, las matrices I_3 y N conmutan, es, por lo tanto la descomposición de Dunford de B.

5. *Para $t\in\mathbb{R}$, calcular* $\exp(tB)$.
Se tiene, para $t\in\mathbb{R}$, $tB=tI_3+tN$, así $\exp(tB)=\exp(tI_3+tN)=(\exp tI_3)(\exp tN)$ porque las matrices tI_3 y tN conmutan. Por otro lado, $\exp tI_3=\mathrm{e}^tI_3$ y $\exp tN=I+tN+\frac{t^2}{2}N^2$. Se tiene entonces

$$\exp(tB)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Dar las soluciones de los sistemas diferenciales $Y'=BY$ y $X'=AX$.*
Integrar el sistema $Y'=BY$, su solución general se escribe

$$Y(t)=(\exp(tB))Y_0,$$

donde Y_0 es un vector de $\mathbb{R}^3$. Se integra entonces el sistema $X'=AX$. Se observa que si PY es solución de $X'=AX$, se tiene

$$(PY)'=A(PY)\iff PY'=APY\iff Y'=P^{-1}APY\iff Y'=BY$$

así Y es solución de $Y'=BY$, la solución general del sistema $X'=AX$ se escribe así

$$\begin{aligned} X(t)=P(\exp(tB))Y_0 &= \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}Y_0 \\ &= \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 & t+1 & t^2/2+t+1 \\ -1 & -t-1 & -t^2/2-t \\ 1 & t & t^2/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $Y_0=(a,b,c)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$. O aún

$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^t(a+b(t+1)+c(t^2/2+t+1)) \\ y(t)=\mathrm{e}^t(-a-b(t+1)-c(t^2/2+t)) \\ z(t)=\mathrm{e}^t(a+bt+ct^2/2) \end{cases}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(t+1) \\ -\mathrm{e}^t(t+1) \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(t^2/2+t+1) \\ -\mathrm{e}^t(t^2/2+t) \\ \mathrm{e}^t t^2/2 \end{pmatrix},$$

con $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 3316 ▲002598

---

1. Se denota $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dar sin calcular los valores propios de A y una base de vectores propios.
La matriz A es diagonal en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene $A\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}_1, A\overrightarrow{e}_2 = 2\overrightarrow{e}_2$ y $A\overrightarrow{e}_3 = 3\overrightarrow{e}_3$. Los valores propios de A son los reales 1, 2 y 3 y los subespacios propios asociados son las rectas vectoriales generadas respectivamente por $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ y $\overrightarrow{e}_3$.

2. Se busca determinar, si existe, las matrices B tales que $\exp B = A$.

(a) *Demostrar que si $A = \exp B$, entonces $AB = BA$.*
Se supone que existe B tal que $A = \exp B$. Se tiene entonces, por definición,

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k, \text{ de donde } AB = BA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1}$$

(b) *Se deduce que la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ es una base de vectores propios de B.*
Se tiene $(BA)\overrightarrow{e}_1 = B(A\overrightarrow{e}_1) = B\overrightarrow{e}_1$, pero $BA = AB$, por lo tanto se tiene $B\overrightarrow{e}_1 = (AB)\overrightarrow{e}_1 = A(B\overrightarrow{e}_1)$. Lo que prueba que $B\overrightarrow{e}_1$ es un vector propio de A asociada al valor propio 1, por lo tanto es colineal a $\overrightarrow{e}_1$, así, $\overrightarrow{e}_1$ es de hecho un vector propio de B. Igualmente, $BA\overrightarrow{e}_2 = 2B\overrightarrow{e}_2 = AB\overrightarrow{e}_2$, por lo tanto $B\overrightarrow{e}_2$ es colineal a $\overrightarrow{e}_2$ y $\overrightarrow{e}_2$ es un vector propio de B. Y también, $BA\overrightarrow{e}_3 = 3B\overrightarrow{e}_3 = AB\overrightarrow{e}_3$, de donde $B\overrightarrow{e}_3$ colineal con $\overrightarrow{e}_3$ y $\overrightarrow{e}_3$ vector propio de B.

(c) *Determinar las matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ tales que $\exp B = A$.*
Los vectores $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ son vectores propios de B, la matriz B es diagonal en la base canónica, entonces existen reales λ_1, λ_2 y λ_3 tales que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ así } \exp B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

lo que implica $\mathrm{e}^{\lambda_1} = 1$, $\mathrm{e}^{\lambda_2} = 2$ y $\mathrm{e}^{\lambda_3} = 3$ y entonces $\lambda_1 = \ln 1 = 0$, $\lambda_2 = \ln 2$ y $\lambda_3 = \ln 3$ de ahí la existencia de una única matriz B tal que $\exp B = A$, es la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}.$$

3. Sea la matriz C,

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Demostrar que no existe matriz $D\in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C=\exp D$.

Cualquiera que sea la matriz D, la matriz $\exp D$ es invertible con inversa $\exp(-D)$, por lo que, es claro que la matriz C no es invertible, su determinante es nulo, así, no existe matriz D tal que $C=\exp D$.

4. *Calculemos el polinomio característico y el polinomio minimal de C.*

Sea $P_C(X)$ el polinomio característico de C, se tiene

$$P_C(X)=\begin{vmatrix}-X&1&0\\0&-X&1\\0&0&-X\end{vmatrix}=-X\begin{vmatrix}-X&1\\0&-X\end{vmatrix}=-X^3.$$

El polinomio minimal Q_C de C es unitario, divide su polinomio característico P_C y se anula en C, por lo que $C^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$, pero $C^3=0$, de donde $Q_C(X)=X^3$.

5. Se supone que existe una matriz $E\in M_3(\mathbb{R})$ tal que $E^2=C$. Denotemos $Q_E(X)$ su polinomio minimal y $Q_C(X)$ el polinomio minimal de C.

(a) *Demostrar que $Q_E(X)$ divide $Q_C(X^2)$.*

Se tiene $Q_C(C)=Q_C(E^2)=0$, así el polinomio $S(X)=Q_C(X^2)$ se anula en E, lo que prueba que $Q_E(X)$, polinomio minimal de E, divide $Q_C(X^2)$.

(b) *Se deduce que $E^3=0$ y que $C^2=0$.*

El polinomio minimal de E divide $Q_C(X^2)=-X^6$, pero su grado es menor o igual que 3, además, se supone $E^2=C$, por lo tanto $E^2\neq 0$ así, se tiene $Q_E(X)=X^3$ y $E^3=0$, por lo que, $E^3=0$ implica $E^4=0$ y, como $E^4=C^2$, se tiene $C^2=0$.

(c) *De lo anterior se deduce que no existe matriz E tal que $E^2=C$.*

Si tal matriz existe, entonces vimos que verifica $E^3=0$, así se tiene $E^4=0$, por lo que $E^4=C^2\neq 0$, de ahí la conclusión.

6. Sean F y G de matrices de $M_3(\mathbb{R})$ tales que $F=\exp G$. *Demostrar que para todo $n\in\mathbb{N}^*$, existe una matriz H tal que $H^n=F$.*

Sea $F=\exp G$ y $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $H=\exp\frac{1}{n}G$, se tiene

$$H^n=\left(\exp\frac{1}{n}G\right)^n=\exp\frac{n}{n}G=\exp G=F.$$

Solución del ejercicio 3317 ▲003585

1. $A^{2k}=I$, $A^{2k+1}=A$.

Solución del ejercicio 3318 ▲003586

3. $\alpha_n=-\frac{1}{3}+\frac{2^n}{4}+\frac{(-2)^n}{12}$, $\beta_n=\frac{2^n-(-2)^n}{4}$, $\gamma_n=\frac{4}{3}-\frac{2^n}{2}+\frac{(-2)^n}{6}$.

Solución del ejercicio 3319 ▲003587

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
$2u_n = (6 - 6\cdot 2^n + 2\cdot 3^n)u_0 + (-5 + 8\cdot 2^n - 3\cdot 3^n)u_1 + (1 - 2\cdot 2^n + 3^n)u_2$.

Solución del ejercicio 3320 ▲003588

1. El polinomio minimal de f es de grado mayor o igual a n y no tiene divisores no triviales. Entonces $\dim E = 1$ y f es una homotecia si $K = \mathbb{C}$. Si $K = \mathbb{R}$ también se puede tener $\dim E = 2$ y f no tiene valores propios reales.

Solución del ejercicio 3321 ▲003589

1. Diagonalizar ${}^tM \Rightarrow y_n - \frac{3}{2}x_n = \text{cte}$.
2. $y_n - x_n = 2^n(y_0 - x_0)$, entonces si $y_0 \neq x_0$, entonces $M_n \to \infty$ si no la sucesión es constante.
3. $\frac{3}{2}$ si $y_0 \neq x_0$.

Solución del ejercicio 3323 ▲003591

2. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ b-a & a+b \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o la inversa.

Solución del ejercicio 3324 ▲003592

$M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1/5 & \pm 2 & 0 \\ 7/30 & \pm 1/3 & \pm 1 \end{pmatrix}$ o $M = \pm\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 & 0 \\ 1/2 & \mp 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3325 ▲003593

$A = PDP^{-1}$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se toma $B = PMP^{-1}$, con $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 3326 ▲003594

3 valores propios distintos, M es diagonalizable y su conmutante es el conjunto de polinomios en M : $aI + bM + cM^2$, $a, b, c \in K$.

Solución del ejercicio 3327 ▲003595

1. Por semejanza, se reduce a los casos : $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ o $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $C(A) = \mathbb{C}[A]$ o $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $C(A) = \mathbb{C}[A]$.

2. Si A es diagonalizable con valores propios λ_i, con las multiplicidades n_i, entonces $\dim(C(A)) = \sum n_i^2 \geqslant n$. En el caso general, sea (A_k) una sucesión de matrices diagonalizables convergiendo hacia A y $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ una sucesión de n-tuples de matrices conmutando con A_k tales que $(C_k^1, \dots, C_k^n)$ es una familia ortonormal para cualquier producto escalar elegido sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Por compacidad existe una sub-sucesión convergente, por lo tanto n matrices C_∞^i formando una familia ortonormal y conmutando con A, de donde $\dim(C(A)) \geqslant n$.

Solución del ejercicio 3328 ▲003596

Sea $d_n(i,j)$ el número de caminos de longitud n yendo desde arriba i en el vértice j. j admite tres vecindarios k_1, k_2, k_3 y se tiene : $d_n(i,j) = d_{n-1}(i,k_1) + d_{n-1}(i,k_2) + d_{n-1}(i,k_3)$. Se numeran los vértices de 0 a 7 de manera que los vecinos del vértice i son los vértices $i+1 \bmod 8$, $i+2 \bmod 8$ y $i+4 \bmod 8$. El vector $d_n = (d_n(0,0), \dots, d_n(0,7))$ verifica la relación de recurrencia $d_n = Ad_{n-1}$, donde A es la matrice siguiente ($\cdot$ designa 0) :

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} B+I_4 & 0 \\ 0 & B-I_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

con

$$B = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}.$$

Igualmente,

$$B \pm I_4 = \begin{pmatrix} C \pm I_2 & I_2 \\ I_2 & C \pm I_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C \pm I_2 + I_2 & 0 \\ 0 & C \pm I_2 - I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

y enfin,

$$C \pm I_2 \pm I_2 = \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 & I_1 \\ I_1 & \pm I_1 \pm I_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \pm I_1 \pm I_1 + I_1 & 0 \\ 0 & \pm I_1 \pm I_1 - I_1 \end{pmatrix} R^{-1}.$$

Entonces A es diagonalizable con valores propios $-3, -1, 1, 3$ y se puede ciertamente completar los cálculos para obtener $d_n = A^n d_0$.

Solución del ejercicio 3329 ▲005651

1a solución. $A = 2J - I_3$, donde $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene $J^2 = 3J$ y más generalmente $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1}J$.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Dado que las matrices $2J$ y $-I$ conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON permite escribir

$$A^n = (2J - I)^n = (-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J$$

$$= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3}((6-1)^n - (-1)^n) J$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix},$$

que es verdadero cuando $n = 0$.
Sea de nuevo $n \in \mathbb{N}^*$.

$$((-1)^n I + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)J) \times ((-1)^{-n} I + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n})J)$$
$$= I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J^2$$
$$= I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J = I,$$

y entonces

$$A^{-n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{-n}+2(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} \\ 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}+2(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} \\ 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}-(-1)^{-n} & 5^{-n}+2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix}}.$$

2a solución. Porque $\mathrm{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\ker(A+I)) = 2$ y -1 es valor propio de A de orden al menos 2. El tercer valor propio λ es proporcionado por la traza : $\lambda - 1 - 1 = 3$ y entonces $\lambda = 5$. Así, $\chi_A = -(X+1)^2(X-5)$. Además, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x+y+z = 0$ y entonces $E_{-1} = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, donde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Igualmente, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y = z$ y $E_5 = \mathrm{vect}(e_3)$, donde $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se define $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \mathrm{diag}(-1,-1,5)$ y se tiene $A = PDP^{-1}$.

Cálculo de P^{-1}. Sea (i,j,k) la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{cases}$$

y por lo tanto, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sea entonces $n \in \mathbb{Z}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n & 5^n-(-1)^n \\ 5^n-(-1)^n & 5^n-(-1)^n & 5^n+2(-1)^n \end{pmatrix},$$

y se encuentra el resultado obtenido anteriormente, el cálculo se ha realizado directamente con n entero relativo.

3a solución. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. La división euclidiana de X^n por χ_A proporciona tres reales a_n, b_n y c_n y un polinomio Q tales que $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$. Tomando los valores de los miembros en 5, luego el valor de los dos miembros así como sus derivadas en -1, se obtiene

$$\begin{cases} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n). \end{cases}$$

El teorema de CAYLEY-HAMILTON proporciona entonces

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I\right) \\ &= \frac{1}{36}\left((5^n + (6n-1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right. \\ &\qquad \left. + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se encuentra de nuevo el mismo resultado pero para $n \in \mathbb{N}^*$ únicamente.

Solución del ejercicio 3330 ▲005652

Sea $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$, entonces $AX = X^3 = XA$ y entonces X y A conmutan.

A admite tres valores propios reales y simples a saber 1, 3 y 4. Entonces A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y los subespacios propios de A son las rectas. X conmuta con A y por lo tanto, deja estables las tres rectas propias de A.

Así una base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de A es igualmente una base de vectores propios de X o aún, si P es una matriz real invertible tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal D_0, entonces para la misma matriz P, $P^{-1}XP$ es una matriz diagonal D. Además

$$x^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \mathrm{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

que proporciona ocho soluciones, dos a dos opuestas.

Se puede tomar $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De ahí las soluciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

donde $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

Solución del ejercicio 3331 ▲005653

1. $\chi_A = -(2+X)((3-X)(-1-X)+4) = -(X+2)(X^2-2X+1) = -(X+2)(X-1)^2$. A diagonalizable $\Rightarrow \dim(\ker(A-I)) = 2 \Rightarrow \operatorname{rg}(A-I) = 1$, lo que no es. Entonces A no es diagonalizable. Además, $E_{-2} = \operatorname{vect}(e_1)$, donde $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_1 = \operatorname{vect}(e_2)$, donde $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
2. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$ y entonces $\ker(A-I)^2$ es el plano de ecuación $4x+4y-z=0$.
3. Se denota f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es A. El teorema de Cayley-Hamilton y el teorema de descomposición del núcleo nos permiten afirmar
$$\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \ker(A+2I) \oplus \ker(A-I)^2.$$
Además, cada uno de los subespacios $\ker(A+2I)$ y $\ker(A-I)^2$ es estable por f, la matriz de f en toda base adaptada para esta descomposición es diagonal par bloques. En fin, $\ker(A-I)$ es una recta vectorial contenida en el plano $\ker(A-I)^2$ y escogiendo una base de $\ker(A-I)^2$ de la cual uno de los dos vectores está en $\ker(A-I)$, la matriz de f tendrá la forma deseada.
Se tiene ha escogido $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, luego se toma $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se denota $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. P es invertible con inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ya se puede decir que $P^{-1}AP$ es de la forma $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Más precisamente
$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$
y por lo tanto, $Ae_3 = e_2 + e_3$, luego
$$\boxed{A = PTP^{-1}, \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $T = D+N$, donde $D = \mathrm{diag}(-2,1,1)$ y $N = E_{2,3}$. Se tiene $ND = DN$ y $N^2 = 0$. Dado que las matrices D y N conmutan, la fórmula del binomio de NEWTON permite escribir

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nD^{n-1}N = \mathrm{diag}((-2)^n,1,1) + n\mathrm{diag}((-2)^{n-1},1,1)E_{2,3} \\ &= \mathrm{diag}((-2)^n,1,1) + nE_{2,3} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Después

$$\begin{aligned} A^n = PT^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n + 4 & -4(-2)^n - 4n + 4 & (-2)^n \end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 3332 ▲005664

$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & -X \end{vmatrix}$. Sea $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \cdots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \cdots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.

f es un polinomio en x. Por n linealidad del determinante, $f(x)$ es suma de 2^n determinantes de los cuales $2^n-(n+1)$ son nulos porque contienen dos columnas de x. Los determinantes restantes contienen como máximo una columna de x y, por lo tanto, son de grado menor o igual que 1 en x. f es, por lo tanto una función afín. Entonces existen dos números A y B tales que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = Ax+B$. Las igualdades $f(-a) = (-X-a)^n$ y $f(-b) = (-X-b)^n$ proporcionan $\begin{cases} -aA+B = (-X-a)^n \\ -bA+B = (-X-b)^n \end{cases}$ y como $a \neq b$, las fórmulas de CRAMER proporcionan

$$\chi_A = f(0) = B = \frac{1}{b-a}(b(-X-a)^n - a(-X-b)^n).$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valor propio de } A \Rightarrow \mathrm{ch}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left|\frac{\lambda+a}{\lambda+b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Sean M el punto del plano de afijo λ, A el punto del plano de afijo $-a$ y B el punto del plano de afijo $-b$, luego $k = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}$. k es un real estrictamente positivo y distinto de 1. Por lo tanto, se puede escribir $I = \mathrm{bar}(A(1),B(-k))$ y $J = \mathrm{bar}(A(1),B(k))$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valor propio de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI} \cdot (1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Rightarrow M \text{ está en el círculo de diámetro } [I,J] \text{ (círculos de APOLONIO (de Perga)).} \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3333 ▲005665

1. Las hipótesis proporcionan $AU = U$, donde $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y entonces 1 es valor propio de A.

2. (a) Sean λ un valor propio de A y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vector propio asociado.

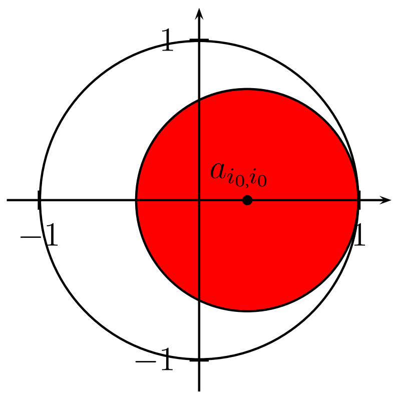
$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \max\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \max\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

Se escoge entonces para i un índice i_0 tal que $|x_{i_0}| = \max\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Porque X es no nulo, se tiene $|x_{i_0}| > 0$. Se obtiene

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ y entonces } |\lambda| \leqslant 1 \text{ ya que } |x_{i_0}| > 0.$$

(b) Más precisamente,

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| &= \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j \right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \\ &\leqslant \left(\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| = (1 - a_{i_0,i_0})|x_{i_0}| \end{aligned}$$



y entonces $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$, lo que significa que los valores propios de A pertenecen al disco de centro a_{i_0,i_0} y de radio $1 - a_{i_0,i_0}$. Este disco es tangente internamente al círculo de centro $(1,0)$ y de radio 1 en el punto $(1,0)$.

Solución del ejercicio 3334 ▲005668

1. $J^n = I$. J anula el polinomio $X^n - 1$ que tiene raíces simples en $\mathbb{C}$ y entonces J es diagonalizable en $\mathbb{C}$.
   Los valores propios de J deben elegirse entre las raíces n-ésimas de 1 en $\mathbb{C}$. Se define $\omega = e^{2i\pi/n}$. Verificar que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k es valor propio de J.
   Sean $k \in [\![0,n-1]\!]$ y $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un elemento de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \quad\vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{cases}$$

y entonces

$$JX=\omega^kX\Leftrightarrow X\in\operatorname{vect}(U_k)\text{ donde }U_k=\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ (\omega^k)^2\\ \vdots\\ (\omega^k)^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Entonces $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, ω^k es valor propio de J. Los valores propios de J son las n raíces n-ésimasde 1. Estos valores propios son todos simples. El subespacio propio asociado con ω^k, $0\leqslant k\leqslant n-1$, es la recta vectorial $D_k=\operatorname{vect}(U_k)$.

Sea P la matriz de VANDERMONDE de raíces n-ésimas de la unidad, es decir $P=(\omega^{(j-1)(k-1)})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$, luego $D=\operatorname{diag}(1,\omega,\dots,\omega^{n-1})$, entonces hemos visto que $P^{-1}=\frac{1}{n}\overline{P}$ (ejercicio 3235) y se tiene

$$\boxed{J=PDP^{-1},\text{ con }D=\operatorname{diag}(\omega^j)_{1\leqslant j\leqslant n},\ P=\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}\text{ y }P^{-1}=\frac{1}{n}\overline{P},\text{ con }\omega=e^{2i\pi/n}.}$$

Observación. El solo conocimiento de D es suficiente para 2).

2. Sea A la matriz del enunciado.

$$A=a_0I+a_1J+a_2J^2+\dots+a_{n-1}J^{n-1}=Q(J),\text{ donde }Q=a_0+a_1X+\dots+a_{n-1}X^{n-1}.$$

De acuerdo a 1), $A=P\times Q(D)\times P^{-1}$ y entonces A es semejante a la matriz $\operatorname{diag}(Q(1),Q(\omega),\dots,Q(\omega^{n-1}))$. Así, A tiene el mismo determinante que la matriz $\operatorname{diag}(Q(1),Q(\omega),\dots,Q(\omega^{n-1}))$. De ahí el valor del determinante circulante del enunciado :

$$\boxed{\begin{vmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}\\ a_{n-1}&a_0&a_1&\cdots&a_{n-2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ a_2&a_3&\ddots&a_0&a_1\\ a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_0\end{vmatrix}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n}a_j\right).}$$

Solución del ejercicio 3335 ▲005669

---

1. Sea $\sigma\in S_n$.

$$\det(P_\sigma)=\sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')p_{\sigma'(1),1}\cdots p_{\sigma'(n),n}=\sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\cdots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)}=\varepsilon(\sigma),$$

pues $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\cdots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)}\neq 0\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sigma'(i)=\sigma(i)\Leftrightarrow\sigma'=\sigma$.

$$\boxed{\forall\sigma\in S_n,\ \det(P_\sigma)=\varepsilon(\sigma).}$$

2. (a) Sea $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$. Sea $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. El coeficiente fila i, columna j, de la matriz $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}.$$

En esta suma, si $k\neq\sigma'(j)$, el término correspondiente es nulo y cuando $k=\sigma'(j)$, el término correspondiente vale $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalmente, el coeficiente línea i, columna j, de la matriz $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ vale $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ que es aún el coeficiente fila i, columna j, de la matriz $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

$$\boxed{\forall(\sigma,\sigma')\in S_n^2,\ P_\sigma\times P_{\sigma'}=P_{\sigma\circ\sigma'}.}$$

(b) Demostrar que G es un subgrupo del grupo $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$. G contiene $I_n=P_{\mathrm{Id}}$ y por otro lado, G está contenido en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de acuerdo a 1).

$$\boxed{(G,\times)\text{ es un subgrupo de }(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times).}$$

3. El coeficiente fila i, columna j, de la matriz AP_σ vale

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)}=a_{i,\sigma(j)}.$$

Así, si $C_1,\dots,C_n$ designan las columnas de la matriz A, la matriz AP_σ es la matriz cuyas columnas son $C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si }A=(C_1\dots C_n),\ AP_\sigma=(C_{\sigma(1)}\dots C_{\sigma(n)}).}$$

4. Comenzar por encontrar el polinomio característico de un ciclo c de longitud ℓ ($1\leqslant\ell\leqslant n$). Sea f_c el endomorfismo de $E=\mathbb{R}^n$ de matriz P_c en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Existe una base de E en la que la matriz de f_c es $\begin{pmatrix}J_\ell&0_{\ell,n-\ell}\\0_{n-\ell,\ell}&I_{n-\ell}\end{pmatrix}$, donde la matriz J_ℓ es la matriz del ejercicio 3334. El polinomio característico χ_{P_c} de P_c es, por lo tanto $(-1)^n(X-1)^{n-\ell}(X^\ell-1)$ (ver ejercicio 3334).
Sea ahora $\sigma\in S_n$. Se denota f_σ el endomorfismo de $E=\mathbb{R}^n$ de matriz P_σ en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. σ se descompone de forma única hasta el orden de los factores en el producto de ciclos con soportes disjuntos, estos ciclos conmutan de dos en dos.
Se define así $\sigma=c_1\circ\dots\circ c_p$, $p\geqslant1$, donde los c_i, $1\leqslant i\leqslant p$, son ciclos con soportes disjuntos, y se denota ℓ_i la longitud del ciclo c_i, $1\leqslant i\leqslant p$. Existe una base de E en la que la matriz de f_σ es $\begin{pmatrix}J_{\ell_1}&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&J_{\ell_p}&0\\0&\cdots&0&I_k\end{pmatrix}$, donde $k=n-\ell_1-\dots-\ell_p$ es el número de puntos fijos de σ. El polinomio característico buscado es, por lo tanto $\chi_{P_\sigma}=(-1)^n(X^{\ell_1}-1)\cdots(X^{\ell_p}-1)(X-1)^{n-\ell_1-\dots-\ell_p}$.
Inmediatamente, se deducen los valores propios de P_σ.

Solución del ejercicio 3336 ▲005671

Se busca una matriz A de tamaño 4 cuyo polinomio característico es $X^4-3X^3+X^2-1$. La matriz compañera $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}$ sirve (ver el ejercicio 2895) y el teorema de CAYLEY-HAMILTON demuestra que $A^4-3A^3+A^2-I_4=0$.

Solución del ejercicio 3337 ▲005672

Sea A la matriz del enunciado. $\det A$ es el producto de los valores propios de A.
• Si $b=0$, $\det A=a^n$.

• Si $b \neq 0$, $\text{rg}(A-(a-b)I) = 1$ o aún $\dim(\ker(A-(a-b)I)) = n-1$. Así, $a-b$ es valor propio de orden $n-1$ al menos. Se obtiene el valor propio faltante λ por la traza de A : $(n-1)(a-b)+\lambda = na$ y entonces $\lambda = a+(n-1)b$. Finalmente, $\det A = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ lo cual es aún cierto cuando $b = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).}$$

Solución del ejercicio 3338 ▲005676

Pongamos $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se tiene $N^2 = E_{1,3}$ y $N^3 = 0$. Si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ es una matriz cuadrada que satisface $X^2 = N$, entonces $X^6 = 0$. Entonces X es nilpotente y, ya que X es de tamaño 3, se sabe que $X^3 = 0$. Pero entonces $N^2 = X^4 = 0$, lo que no es. La ecuación propuesta no tiene solución.

Solución del ejercicio 3339 ▲005680

$\text{rg}(M_{a,b}-I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si uno de los dos números a o b es nulo y el otro no lo es y 3 si a y b no son nulos. Entonces $M_{0,0}$ no es semejante a ninguna de las otras tres matrices y de manera semejante para $M_{1,1}$. Queda por ver si las matrices $M_{1,0}$ y $M_{0,1}$ son semejantes.
$(M_{1,0}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ y $(M_{0,1}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{3,4})^2 = 0$. Entonces las matrices $M_{1,0}$ y $M_{0,1}$ no son semejantes.

Solución del ejercicio 3340 ▲005684

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A es de rango 1 y por lo tanto, admite dos valores propios iguales a 0. $\text{tr}A = 0$ y por lo que el tercer valor propio es aún 0. Entonces $\chi_A = -X^3$. A es nilpotente y el cálculo da $A^2 = 0$. Así, si X es una matriz tal que $X^2 = A$, entonces X es nilpotente y, por lo tanto $X^3 = 0$.
Reducción de A. $A^2 = 0$. Entonces $\text{Im}A \subset \ker A$. Sea e_3 un vector que no está en $\ker A$, luego $e_2 = Ae_3$. (e_2) es una base de $\text{Im}A$ que se completa en (e_1,e_2) base en $\ker A$.
(e_1,e_2,e_3) es una base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ porque si $ae_1+be_2+ce_3 = 0$, entonces $A(ae_1+be_2+ce_3) = 0$, es decir $ce_2 = 0$ y entonces $c = 0$. Después $a = b = 0$ porque la familia (e_1,e_2) es libre.
Si P es la matriz de pasaje de la base canónica de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ en la base (e_1,e_2,e_3), entonces $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se ve que puede tomar $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.
Si $X^2 = A$, X conmuta con A y entonces X deja estable $\text{Im}A$ y $\ker A$. Se deduce que Xe_2 es colineal a e_2 y Xe_1 está en $\text{vect}(e_1,e_2)$. Entonces $P^{-1}XP$ es de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. Además, X es nilpotente de polinomio característico $(a-\lambda)(c-\lambda)(f-\lambda)$. Por lo tanto, necesariamente se tiene $a = c = f = 0$. $P^{-1}XP$ es de la

forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En fin, $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$.

Las matrices X las soluciones son las matrices de la forma $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, donde a es no nulo y b cualquiera.

Se encuentra $P^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$, luego

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7a & 0 & \frac{3}{a} - 7b \\ -14 & 0 & -\frac{1}{a} - 14b \\ -7a & 0 & -7b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2a - \frac{3}{7a} + b & a - \frac{9}{7a} + 3b & \frac{3}{a} - 7b \\ -4a + \frac{1}{7a} + 2b1 & 2a + \frac{3}{7a} + 6b & -\frac{1}{a} - 14b \\ -2a + b & a + 3b & -7b \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 3341 ▲005685

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 2 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-5X+4) - (-2+2X) = (1-X)(X^2 - 5X + 4 + 2) = -(X-1)(X-2)(X-3)$.

A tiene valores propios reales y simples. A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y los subespacios propios son rectas.

Si M es una matriz que conmuta con A, M deja estables estas rectas y por lo tanto, si P es una matriz invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, entonces la matriz $P^{-1}MP$ es diagonal. Recíprocamente, tal matriz conmuta con A.

$$C(A) = \{P\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}.$$

Se encuentra $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & (-a+c)/2 \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$. Se puede comprobar que $C(A) = \mathrm{vect}(I, A, A^2)$.

Solución del ejercicio 3347 ▲001579

Sea u un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita, entonces el polinomio característico de u es también un polinomio anulador de u.

Prueba si χ_u se divide en raíces simples : u es entonces diagonalizable y por lo tanto, existe una base B en la que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Entonces $Mat_B(\chi_u(u)) = \begin{pmatrix} \chi_u(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \chi_u(\lambda_n) \end{pmatrix}$. Y como $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ se tiene $\chi_u(\lambda_i) = 0$, se deduce que $\chi_u(u) = 0$.

Solución del ejercicio 3365 ▲002569

Sea A la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^2 y verificar que $A^2 = A + 2I_3$. Se tiene

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

Se tiene entonces $A^2 - A = 2I_3$, es decir $A(A - I_3) = 2I_3$, o aún $A \cdot \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Lo que prueba que A es invertible y que su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

Solución del ejercicio 3366 ▲002588

Sea N una matriz nilpotente, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $N^q = 0$. Demostrar que la matriz $I - N$ es invertible y expresar su inversa en función de N.

Se observa que $(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{q-1}) = I - N^q = I$. Así, la matriz $I - N$ es invertible, y su inversa es $(I-N)^{-1} = I+N+N^2+\cdots+N^{q-1}$.

Solución del ejercicio 3367 ▲003518

1. $(-1)^n(X^n - a_nX^{n-1} - \cdots - a_1)$.
2. Estudio de $x \mapsto (x^n - a_nx^{n-1} - \cdots - a_1)/x^n$.
3. Desigualdad triangular.
4. Expresión general de A^k.

Solución del ejercicio 3368 ▲003541

$a = b$ o a, b no nulos.

Solución del ejercicio 3371 ▲003544

1.
2. $(A - xI)({}^tA - xI) = (x^2 - 2x + 4)I$, $\chi_A(x) = x^2 - 2x + 4$.
3. ${}^tA = 2I - A$, por lo tanto $(A - xI)((2-x)I - A) = (x^2 - 2x + 4)I$. Tomando por x una de las raíces del polinomio $x^2 - 2x + 4$, se obtiene un polinomio dividido con raíces simples anulando A.

Solución del ejercicio 3373 ▲003546

A es diagonalizable porque $A^2 = I$. $e^A = (\operatorname{ch} 1)I + (\operatorname{sh} 1)A$.

Solución del ejercicio 3374 ▲003547

Si $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, entonces $u^2 = 0$, por lo tanto 0 es el único valor propio de u y $u \neq 0$, por lo tanto u no es diagonalizable.
Si $\operatorname{Im} u \not\subset \ker u$, entonces $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{\overrightarrow{0}\}$ y entonces $\operatorname{Im} u + \ker u = E$. Por lo tanto $\operatorname{Im} u$ y $\ker u$ son subespacios propios de u, por lo tanto u es diagonalizable.

Solución del ejercicio 3376 ▲003549

1. Polinomio anulador simple.
2. No, ctr.ej. $= B$ nilpotente.

Solución del ejercicio 3377 ▲003550

$\operatorname{spec}(p) \subset \{-1, 0, 1\}$. p es diagonalizable si y solo si anula un polinomio dividido con raíces simples.

Solución del ejercicio 3378 ▲003551

A es $\mathbb{C}$-diagonalizable y valores propios son $\alpha > 0$ y $\beta, \overline{\beta}$, con la misma multiplicidad.

Solución del ejercicio 3380 ▲003553

A es diagonalizable y tiene n valores propios distintos, si no existe un polinomio anulador de grado menor o igual a $n-1$. Estas raíces son las n raíces n-ésimas de 1 y su suma es nula.

Solución del ejercicio 3381 ▲003554

A es $\mathbb{C}$-diagonalizable (polinomio anulador con raíces simples) $\Rightarrow \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = n$. Las dimensiones se conservan en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 3383 ▲003556

Sea P un polinomio tal que $P(\lambda) = 1$ y $P(\mu) = 0$, para todos los demás valores propios, μ, de f. Entonces $p_\lambda = P(f)$.

Solución del ejercicio 3384 ▲003557

3. $\operatorname{Spec}(u_k) \subset \{i, -i\}$ de acuerdo a la relación $u_k^2 = -\operatorname{Id}_E$. Si el espectro se reduce a un elemento, entonces u_k es escalar porque es diagonalizable, pero esto es incompatible con la relación de anticonmutación entre u_k y u_ℓ. Así $\operatorname{Spec}(u_k) = \{i, -i\}$.
4. u_ℓ, con $\ell \neq k$ intercambia los subespacios propios de u_k, entonces tienen la misma dimensión $n/2$.

Solución del ejercicio 3387 ▲003560

1. Cálculo Maple : $h = \begin{pmatrix} c+4 & b & a \\ 0 & c+2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $v = ku$.
2. (a)

   (b)

   (c) $u^k \circ h - h \circ u^k = -2ku^k$, $P(u) \circ h - h \circ P(u) = -2u \circ P'(u)$.

   (d) Si $P(u) = 0$, entonces $u \circ P'(u) = 0$, por lo tanto P (polinomio minimal) divide XP', lo que implica $P(X) = X^k$ por cierto k.

Solución del ejercicio 3390 ▲003563

Ningún polinomio constante es adecuado. Si P es no constante y α es una raíz de P, entonces considerando $A = \alpha I_n$ se obtiene una primera condición necesaria : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P tiene otra raíz β, entonces tomando $A = \mathrm{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ se obtiene una segunda condición necesaria : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Así los polinomios P buscados tienen la siguiente propiedad : $\mathrm{grad}(P) \geqslant 1$ *y existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que todas las raíces de P son congruentes a u/n módulo* 1. Esta condición es claramente suficiente.

Solución del ejercicio 3391 ▲003564

Se escribe $C = PJQ$, donde P, Q son invertibles y J es la matriz canónica de rango r. Entonces $(P^{-1}AP)J = J(QBQ^{-1})$, por lo tanto $P^{-1}AP$ y QBQ^{-1} son triangulares por bloques con el mismo bloque diagonal $r \times r$, lo que prueba que χ_A y χ_B tienen un factor de grado r en común.

Solución del ejercicio 3392 ▲003565

El polinomio se escribe $(X^2+1)(X^2+X+1)$. Entonces no tiene una raíz real. Pero todo elemento de $M_5(\mathbb{R})$ tiene al menos un valor propio y este valor propio también debe ser la raíz del polinomio minimal. En consecuencia $x^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ no puede ser el polinomio minimal de una matriz de $M_5(\mathbb{R})$.

Solución del ejercicio 3393 ▲003566

1. Que es un isomorfismo (y recíprocamente).
2. Sea $Q(X) = P(X)/X$. Se tiene $u \circ Q(u) = 0$ y X, Q son primos entre sí, de donde $E = \ker u \oplus \ker Q(u)$ y $\mathrm{Im}\, u \subset \ker Q(u)$. Se concluye con el teorema del rango.
3. Mismo método.

Solución del ejercicio 3394 ▲005658

• Si A es nilpotente, para todo $k \in [\![1,n]\!]$, A^k es nilpotente y, por lo tanto 0 es el único valor propio en $\mathbb{C}$ de A^k. Así, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

• Recíprocamente, se supone que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ y demostrar entonces que todos los valores propios de A en $\mathbb{C}$ son nulas. Esto demuestra que el polinomio característico de A es $(-X)^n$ y así como A es nilpotente por el teorema de CAYLEY-HAMILTON.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los n valores propios (distintas o coincidentes) de A en $\mathbb{C}$. Para $k \in [\![1,n]\!]$, se establece $S_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$. Se trata de demostrar que : $(\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_j = 0)$.

1a solución. Los S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, son todos nulos y por combinaciones lineales de estas igualdades, se deduce que para todo polinomio P de grado menor o igual que n y se anula en 0, se tiene $P(\lambda_k) = 0$ (1). Se trata entonces de elegir el polinomio P.
Sea $i \in [\![1,n]\!]$. Sean $\mu_1, \dots, \mu_p$ los valores propios dos a dos distintos de A ($1 \leqslant p \leqslant n$). Se toma $P = X \prod_{j \neq i} (X - \mu_j)$ si $p \geqslant 2$ y $P = X$ si $p = 1$. P es un polinomio de grado menor o igual que n y se anula en 0.
La igualdad $P(\lambda_i) = 0$ proporciona $\lambda_i = 0$, lo que faltaba demostrar.
2a solución. Para los que saben que las sumas de NEWTON S_k están ligadas a las funciones elementales en los λ_i $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ por las fórmulas de NEWTON :

$$\forall k \leqslant n,\, S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Así, si todos los S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, son nulos entonces inmediatamente, todos los σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, son nulos y por lo tanto, el λ_i son nulos, porque todas las raíces de la ecuación $x^n = 0$.

Solución del ejercicio 3395 ▲005659

Sea $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f^k g - f g^k &= f^k g - f^{k-1} g f + f^{k-1} g f - f^{k-2} g f^2 + f^{k-2} g f^2 - \cdots - f g f^{k-1} + f g f^{k-1} - g f^k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (f^{k-i} g f^i - f^{k-i-1} g f^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}(fg - gf) f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} f f^i \\ &= k f^k. \end{aligned}$$

Así,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ entonces } \forall k \in \mathbb{N},\, f^k g - g f^k = k f^k \quad (*).}$$

1a solución. Sea $\varphi : \begin{array}{ll} \mathscr{L}(E) & \to \mathscr{L}(E) \\ h & \mapsto hg - gh \end{array}$. φ es un endomorfismo de $\mathscr{L}(E)$ y $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = k f^k$. Si, para $k \in \mathbb{N}^*$ dado, f^k no es nulo, f^k es valor propio de φ asociada al valor propio k. Así, si ninguno de los f^k es nulo, φ admite una infinidad de valores propios distintos dos a dos. Esto es imposible porque $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$. Entonces, f es nilpotente.
2a solución. La igualdad $(*)$ puede ser escrito $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, $(**)$, cuando P es un polinomio de la forma X^k, $k \in \mathbb{N}$. Por linealidad, las igualdades $(**)$ son verdaderas para todo polinomio P. En particular, la igualdad $(**)$ es cierta cuando P es Q_f el polinomio minimal de f y

$$fQ'_f(f) = Q_f(f)g - gQ_f(f) = 0.$$

El polinomio XQ'_f es, por lo tanto un polinomio anulador de f y se deduce que el polinomio Q_f divide el polinomio XQ'_f. Más precisamente, si $p \in \mathbb{N}^*$ es el grado de Q_f, los polinomios pQ_f teniendo los mismos grados y los mismos coeficientes dominantes, se deduce que $pQ_f = XQ'_f$ o aún que

$$\frac{Q'_f}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Por identificación con la descomposición en elementos simples usuales de $\frac{Q'_f}{Q_f}$, se deduce que $Q_f = X^p$. En particular, $f^p = 0$ y aún f es nilpotente.

Solución del ejercicio 3399 ▲001702

---

1. $u\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i u(u^i(x_0))=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_{i+1}$. Entonces $\forall x\in F,\ u(x)\in F$.
2. Si tiene un rango k, x_{k+1} es una combinación lineal de los x_i, para $i\leqslant k: x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}a_i x_i$. Se deduce que $x_{k+2}=\sum_{i=0}^{k}a_i x_{i+1}$, y así como $x_{k+2}\in \operatorname{vect}(x_1,\dots,x_{k+1})\subset \operatorname{vect}(x_0,\dots,x_k)$, y por recurrencia, finalmente se obtiene que $\forall\, p>k, x_p\in\operatorname{vect}(x_0,\dots,x_k)$. Se deduce que el rango de la familia $\{x_0,\dots,x_m\}$, es estrictamente creciente con m, luego eventualmente constante a partir de cierto rango. Como E es de dimensión finita n, se deduce que este rango es constante a partir de un rango $k\leqslant n$: la familia $(x_0,\dots,x_k)$ es entonces libre, y x_{k+1} es una combinación lineal de $(x_0,\dots,x_k)$.
3. $x_{k+1}-\sum_{i=0}^{k}a_i x_i=u^{k+1}(x_0)-\sum_{i=0}^{k}a_i u^i(x_0)=0$, por lo tanto $P_0(u)(x_0)=0$.
4. Si $x\in F$, entonces $x=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i u^i(x_0)$. Usando $P=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i X^i$, se tiene $x=P(u)(x_0)$.
5. Sea $P=QP_0+R$ la división euclidiana de P por P_0, entonces $\operatorname{grad}(R)<\operatorname{grad}(P_0)=k+1$. Denotemos $R=\sum_{i=0}^{k}r_iX^i$. Se tiene $x=P(u)(x_0)=Q(u)P_0(u)(x_0)+R(u)(x_0)=R(u)(x_0)$
6. La familia $(x_0,\dots,x_k)$ es, por lo tanto libre y generatriz en F : es una base.
7. La matriz de $u_{|F}$ en esta base es la matriz compañera asociada al polinomio P_0, y $\chi_{u_{|F}}=P_0$.
8. Se elige un vector $y\in E\setminus F$, y se repite el mismo proceso con este vector, y así seguimos hasta haber obtenido una base de todo el espacio. La matriz de u en la base final es entonces del tipo solicitado.

Solución del ejercicio 3401 ▲003520

$\operatorname{spec}(T)=]-1,1]$.

Solución del ejercicio 3402 ▲003521

2. $0<\lambda\leqslant 1: f(x)=Cx^{1/\lambda-1}$.

Solución del ejercicio 3403 ▲003522

$1/k,\ k\geqslant 1$.

Solución del ejercicio 3404 ▲003523

$\lambda=\dfrac{1}{(\pi/2+k\pi)^2}: u(x)=C\operatorname{sen}(\pi/2+k\pi)x$.

Solución del ejercicio 3406 ▲003580

1. $A\sim\operatorname{diag}(1,\alpha,\alpha^{-1})$, donde α es una raíz primitiva 7ª de 1,
   $A\sim\operatorname{diag}(\alpha,\alpha^{10},\alpha^{-11})$, donde α es una raíz primitiva 37ª de 1.
2. No hay solución.
3. $\operatorname{vp}=0$ o 1.

Solución del ejercicio 3407 ▲003584

Sea f un endomorfismo de un ev E teniendo A por matriz. Se debe encontrar $g \in \mathrm{GL}(E)$ tal que $f \circ g = 2g \circ f$.
Construcción de g por inducción en $n = \dim E$.
$n \leqslant 1$: se tiene $f = 0$, por lo tanto $g = \mathrm{Id}_E$ sirve.
$0, \ldots, n-1 \Rightarrow n$: f no es sobreyectiva por lo que la hipótesis de inducción se aplica a $f_{|\mathrm{Im}(f)}$. Sea $g_1 \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im}(f))$ tal que $f(g_1(x)) = 2g_1(f(x))$, para todo $x \in \mathrm{Im}(f)$. Sea $E = H \oplus I \oplus K \oplus L$, con $H = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$, $H \oplus I = \mathrm{Im}(f)$ y $H \oplus K = \ker(f)$. La restricción de f a $I \oplus L$ induce un isomorfismo en $\mathrm{Im}(f)$, se denota φ el isomorfismo recíproco. Sea $g \in \mathscr{L}(E)$ definida por :

$$g(h+i+k+\ell) = g_1(h+i) + k + 2\varphi(g_1(f(\ell))).$$

Se verifica fácilmente que $f \circ g = 2g \circ f$ y queda por probar que g es inyectiva. Si $x = h+i+k+\ell \in \ker g$, entonces $g(f(x)) = g_1(f(i+\ell)) = 0$, por lo tanto $i+\ell \in \ker f = H \oplus K$ sea $i = \ell = 0$. Queda $g_1(h)+k = 0$, lo que implica $h = k = 0$, pues $g_1(h) \in \mathrm{Im} f = H \oplus I$.
Observación : La demostración pasa a todo cuerpo de característica diferente de 2.

Solución del ejercicio 3408 ▲003597

1.
2. Por recurrencia para $P = X^k$, luego por linealidad.
3. $A = 0$.

Solución del ejercicio 3409 ▲003598

Inspirarse en el caso $n = 1$. Sea $P = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, por lo tanto A también.

Solución del ejercicio 3410 ▲003599

$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda Y \\ Y \end{pmatrix} \text{ tal que } AY = \lambda^2 Y \right\}.$

Solución del ejercicio 3412 ▲003601

Cálculo del polinomio característico de B por operaciones de bloque. Se obtiene

$$\chi_B(x) = \det(x^2 I - 2xA - A^2) = (-1)^n \chi_A\Big(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\Big)\chi_A\Big(\frac{x}{1-\sqrt{2}}\Big)$$

por lo tanto

$$\mathrm{Spec}(B) = \{(1+\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\} \cup \{(1-\sqrt{2})\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

Solución del ejercicio 3413 ▲003602

Tomado $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ se encuentra $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & 0 & 0 \\ ab-b^2 & a^2-ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+ab & b^2+ab \\ 0 & 0 & b^2+ab & a^2+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$.

Tomado $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene $P_1^{-1}M_1P_1 = \begin{pmatrix} (a-b)^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$ y $P_1^{-1}M_2P_1 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.
Así, $\mathrm{Spec}A = \{(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b)\}$, así el conjunto buscado es la bola unidad abierta para $\| \|_1$.

Solución del ejercicio 3416 ▲003605

Si $P(0) \neq 0$, entonces f es biyectiva. Si $P(0) = 0$, entonces $f^2 \circ \text{cualq} = -P'(0)f \Rightarrow \ker f^2 = \ker f$.

Solución del ejercicio 3418 ▲003607

Sea μ el polinomio minimal de u y $\mathscr{D}$ el conjunto de divisores unitarios de μ. Para $P \in K[X]$ y $d = P \wedge \mu$ se tiene fácilmente $\ker(P(u)) = \ker(d(u))$ y $\mathrm{Im}(P(u)) = \mathrm{Im}(d(u))$. Esto demuestra que $\mathscr{K}$ y $\mathscr{I}$ son finitos. Además, si $d \in \mathscr{D}$, entonces el anulador minimal de $u_{|\mathrm{Im}(d(u))}$ es μ/d, entonces la aplicación $d \mapsto \mathrm{Im}(d(u))$ es inyectiva en $\mathscr{D}$ y $\mathrm{card}(\mathscr{I}) = \mathrm{card}(\mathscr{D})$. Igualmente, el anulador minimal de $u_{|\ker(d(u))}$ es d, pues $\ker(d(u)) \supset \mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))$ y d es el anulador minimal de $u_{|\mathrm{Im}(\frac{\mu}{d}(u))}$, entonces la aplicación $d \mapsto \ker(d(u))$ es inyectiva en $\mathscr{D}$ y $\mathrm{card}(\mathscr{K}) = \mathrm{card}(\mathscr{D})$.

Solución del ejercicio 3419 ▲003608

Aplicando el teorema del rango a $f_{|\ker f^2}$, se tiene : $\dim(\ker f^2) = \dim(\ker f) + \dim(f(\ker f^2))$, y $f(\ker f^2) \subset \ker f$, por lo tanto $f(\ker f^2) = \ker f$. Sea $G_i = \ker g^i$. Demostrar que $g(G_{i+1}) = G_i$, para todo $i \in [\![0,k]\!]$: si $x \in G_{i+1}$, entonces $g^i(g(x)) = g^{i+1}(x) = 0$, por lo tanto $g(x) \in G_i$. Recíprocamente, si $y \in G_i$, entonces $y \in G_k = f(G_{2k})$, por lo tanto y tiene un antecedente x por f, este antecedente pertenece a G_{i+k}, y $y = g(g^{k-1}(x)) \in g(G_{i+1})$. Se deduce, con el teorema de rango aplicado a $g_{|G_{i+1}}$, que $\dim(G_{i+1}) = \dim(G_i) + \dim(\ker g)$, para todo $i \in [\![0,k]\!]$, de donde $d = \dim(G_k) = \dim(G_0) + k\dim(\ker g) = k\dim(\ker g)$.

Solución del ejercicio 3420 ▲005661

1. • E contiene I_2 y está incluido en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   • Si A y B están en E, entonces AB es con coeficientes enteros y $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Entonces AB está en E.
   • Si A está en E, $\det(A^{-1}) = 1$ y, en particular $A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A)$ es con coeficientes enteros. Se deduce que A^{-1} está en E. Finalmente,

   $$\boxed{E \text{ es un subgrupo de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).}$$

2. Sea A un elemento de E tal que existe un entero natural no nulo p tal que $A^p = I_2$. A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ porque anula el polinomio con raíces simples $X^p - 1$. A admite dos valores propios distintos o coincidentes que son raíces p-ésimas de 1 en $\mathbb{C}$ y desde A es real, se obtienen los siguientes casos :
   1er caso. Si $\mathrm{Sp}A = (1,1)$, ya que A es diagonalizable, A es semejante a I_2 y consecuentemente $A = I_2$. En este caso, $A^{12} = I_2$.
   2o caso. Si $\mathrm{Sp}A = (-1,-1)$, $A = -I_2$ y $A^{12} = I_2$.

3r caso. Si $\mathrm{Sp}A = (1,-1)$, entonces A es semejante a $\mathrm{diag}(1,-1)$ y entonces $A^2 = I_2$, luego aún otra vez $A^{12} = I_2$.
4o caso. Si $\mathrm{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. En este caso $\mathrm{tr}A = 2\cos\theta$ es un entero que impone $2\cos\theta \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Los casos $\cos\theta = 1$ y $\cos\theta = -1$ ya han sido estudiados.
• Si $\cos\theta = 0$, $\mathrm{Sp}A = (i,-i)$ y A es semejante a $\mathrm{diag}(i,-i)$. Entonces $A^4 = I_2$, luego $A^{12} = I_2$.
• Si $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{Sp}A = (j, j^2)$ o $\mathrm{Sp}A = (-j,-j^2)$. En el primer caso, $A^3 = I_2$ y en el segundo $A^6 = I_2$.
En todos los casos $A^{12} = I_2$.

Solución del ejercicio 3421 ▲005662

Demostrar el resultado por inducción sobre $n \in \mathbb{N}^*$ la forma de A.
• Esto es claro para $n = 1$.
• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que toda matriz de tamaño n y de traza nula sea semejante a una matriz diagonal nula. Sean A una matriz cuadrada de tamaño $n+1$ y de traza nula, entonces f el endomorfismo de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matriz A en la base canónica $(e_1,\dots,e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Si f es una homotecia de razón denotada k, entonces $0 = \mathrm{tr}(f) = k(n+1)$ y entonces $k = 0$, luego $f = 0$, luego $A = 0$. En este caso, A es efectivamente semejante a una matriz diagonal cero.
Si no f no es una homotecia y sabemos que existe un vector u de E tal que la familia $(u, f(u))$ es libre (ver ejercicio 1266). Se completa la familia libre $(u, f(u))$ en una base de E. El coeficiente fila 1, columna 1, de la matriz de f en esta base es nulo. Más precisamente, A es semejante a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$. Luego $\mathrm{tr}A' = \mathrm{tr}A = 0$ y por hipótesis de inducción, A' es semejante a una matriz A_1 de diagonal nula o aún existe A_1 matriz cuadrada de tamaño n y diagonal nula y $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $Q^{-1}A'Q = A_1$. Pero entonces, si se establece $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P es invertible porque $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ y un cálculo de bloque demuestra que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ ya que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ \times & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & A_1 & & \\ \vdots & & & & \\ \times & & & & \end{pmatrix}$$ es de diagonal nula.

Solución del ejercicio 3422 ▲005681

Sea B la matriz del enunciado. $\text{rg} B = 1$ y si A existe, necesariamente $\text{rg} A = n-1$ (ejercicio 3043).
Una matriz de rango 1 admite la escritura general U^tV, donde U y V son vectores de columna no nulos. Aquí $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Si A existe, A debe ya verificar $A^ttB = {}^tBA = 0$ o aún $AV^tU = 0$ (1) y $V^tUA = 0$ (2). Multiplicando los dos lados de la igualdad (1) por U a la derecha luego simplificando por el real no nulo ${}^tUU = \|U\|_2^2$, se obtiene $AV = 0$. Esto demuestra que la primera columna de A es nula (las últimas $n-1$ deben entonces formar una familia libre).
Igualmente, multiplicando los dos miembros de la igualdad (2) por ${}^tV$ a la izquierda, se obtiene ${}^tUA = 0$ y por lo tanto, las columnas de la matriz A son ortogonales a U (para el producto escalar usual) que francamente nos invita a considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \cdots & \ldots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que sirve.

Solución del ejercicio 3423 ▲005687

Sea $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$. P tiene raíces simples en $\mathbb{C}$ y anulador de A. Entonces A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y sus valores propios se eligen en $\{0, j, j^2\}$. El polinomio característico de A es de la forma $(-1)^n X^\alpha (X-j)^\beta (X-j^2)^\gamma$, con $\alpha+\beta+\gamma = n$. Además, A es real y se sabe que j y $j^2 = \overline{j}$ tienen el mismo orden de multiplicidad o aún $\gamma = \beta$.
Porque A es diagonalizable, el orden de multiplicidad de cada valor propio es igual a la dimensión del subespacio propio correspondiente y por lo tanto,

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\ker A) = n - \alpha = 2\beta.$$

Se ha demostrado que $\text{rg} A$ es un entero par.

Solución del ejercicio 3426 ▲002564

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), se llama *proyector* un endomorfismo p de E verificando $p \circ p = p$. Sea p un proyector.

1. *Demostrar que* $\text{Id}_E - p$ *es un proyector y calcular* $p \circ (\text{Id}_E - p)$ *y* $(\text{Id}_E - p) \circ p$.
   Se tiene $(\text{Id}_E - p) \circ (\text{Id}_E - p) = \text{Id}_E - p - p + p^2 = \text{Id}_E - p$, pues $p^2 = p$, lo que prueba que $\text{Id}_E - p$ es un proyector. Por en otro lugar, se tiene
   $$p \circ (\text{Id}_E - p) = p - p^2 = p - p = 0 = (\text{Id}_E - p) \circ p$$
   por lo tanto para todo $\overrightarrow{x} \in E$, se tiene $p(\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})) = \overrightarrow{0}$.
2. *Demostrar que para todo* $\overrightarrow{x} \in \text{Im}\, p$*, se tiene* $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$.
   Sea $\overrightarrow{x} \in \text{Im}\, p$, existe $\overrightarrow{y} \in E$ tal que $\overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{y})$, por lo tanto se tiene $p(\overrightarrow{x}) = p^2(\overrightarrow{y}) = p(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}$.
3. *Se deduce que* $\text{Im}\, p$ *y* $\ker p$ *son suplementarios.*
   Sea $\overrightarrow{x} \in E$, se puede escribir $\overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$, se considera $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$, se tiene $p(\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})) = 0$, lo que prueba que $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) \in \ker p$. Así todo elemento de E se escribe como la suma de un elemento de $\text{Im}\, p$, $p(\overrightarrow{x})$, y de un elemento de $\ker p$, $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$, todavía se tiene que demostrar que la suma es directa.

Sea $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$, se tiene, por un lado $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ de acuerdo a la pregunta 2), pues $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p$ y, por otra parte $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$, pues $\overrightarrow{x} \in \ker p$, de donde $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Se tiene entonces

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p.$$

(Sabiendo que $\dim E = \dim \ker p + \dim \operatorname{Im} p$, es suficiente demostrar que $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \overrightarrow{0}$, aquí se tiene explícitamente la descomposición.)

4. *Demostrar que el rango de p es igual a la traza de p.*
Denotemos n la dimensión de E y considerar una base de E de la forma

$$(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_k, \overrightarrow{e}_{k+1}, \dots, \overrightarrow{e}_n)$$

donde $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_k)$ es una base de $\operatorname{Im} p$ y $(\overrightarrow{e}_{k+1}, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ una base de $\ker p$. En tal base, la matriz de p se escribe

$$M = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_k denota la matriz identidad $k \times k$, y los 0 de bloques de ceros. El rango de p es igual a la dimensión de $\operatorname{Im} p$, es decir aquí a k y se tiene $k = \operatorname{tr} M = \operatorname{tr} p$.

Solución del ejercicio 3456 ▲001554

1. $\langle u_k(x), a\rangle = k\langle x,a\rangle\langle a,a\rangle + \langle x,a\rangle = (k+1)\langle x,a\rangle$, por lo tanto $x = \frac{-k}{k+1}\langle u_k(x),a\rangle a + u_k(x)$. Se deduce que u_k es invertible, y que $u_k^{-1} = u_{\frac{-k}{k+1}}$.
2. El adjunto de un endomorfismo u es el único endomorfismo v que satisface : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x),y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Por lo tanto $\langle u_k(x),y\rangle = k\langle x,a\rangle\langle y,a\rangle + \langle x,y\rangle = \langle x, u_k(y)\rangle$. Entonces u_k es igual a su adjunta.
3. Si u_k es ortogonal, se debe tener $\|u_k(a)\| = \|a\| = 1$, sea $|k+1| = 1$. Así $k = 0$ o $k = -2$. Para $k = 0$, $u_k = \mathrm{Id}$ es bien ortogonal. Para $k = -2$, $u_{-2}^{-1} = u_{\frac{-2}{-2+1}} = u_{-2} = {}^t u_{-2}$. Entonces u_{-2} es bien ortogonal.
Se trata de la simetría ortogonal con respecto al hiperplano $\{a\}^\perp$
4. Si $k = 0$, 1 es el único valor propio y $E_1 = E$.
Si $k \neq 1$, $\forall x \in \{a\}^\perp, u_k(x) = x$, por lo tanto 1 es valor propio de la multiplicidad al menos $n-1$. Además, $u_k(a) = (k+1)a$, por lo tanto $(k+1)$ es valor propio. Finalmente, 1 es valor propio de multiplicidad exactamente $n-1$, para el espacio propio $\{a\}^\perp$, y $k+1$ es valor propio simple con espacio propio $\mathbb{R}a$.

Solución del ejercicio 3480 ▲003568

1.
2. (a) Para $p \in K[X]$ se tiene $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$, por lo tanto u y Φ_u tienen los mismos polinomios anuladores.
   (b) $(\lambda \in \operatorname{Spec}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists\ v \neq 0$ tal que $v \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id}_E$ no es sobreyectiva$) \Leftrightarrow (\lambda \in \operatorname{Spec}(u))$. Así Φ_u y u tienen el mismo espectro. Si $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$ y $v \in \mathscr{L}(E)$ se tiene : $(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \ker v)$, por lo tanto $\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)})$ es isomorfo a $\mathscr{L}(H,E)$, donde H es un suplemento de $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
   Se deduce : $\dim(\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{L}(E)})) = \dim(E)\dim(\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E))$.

Solución del ejercicio 3482 ▲003570

$\lambda = 1 : \mathrm{Dir}(p) \subset \ker f, \quad \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Base}(p)$. $\lambda = 0 : f\big(\mathrm{Base}(p)\big) \subset \mathrm{Dir}(p)$.

Solución del ejercicio 3484 ▲003572

1. Para $P \in K[X]$ se tiene $P(u) \circ v - v \circ P(u) = P'(u)$.

Solución del ejercicio 3486 ▲003574

Se supone que existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tal que $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Entonces existe $\ell \in E^*$ y $a \in E$ ambos no nulos tales que :

$$\forall x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = \ell(x)a.$$

De donde por inducción sobre k :

$$\forall x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \ell(x)f^{k-1}(a) + \ell(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + \ell(f^{k-1}(x))a.$$

Como χ_f es irreducible, el subespacio f-monogénico generado por a es igual a E, sea : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ es una base de E, con $n = \dim E$ y $f^n(a) = \alpha_0 a + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$. Entonces $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \cdots - \alpha_0 f^0 = 0$ y :

$$\forall x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = \ell(x)f^{n-1}(a) + \cdots + \ell(f^{n-1}(x) - \cdots - \alpha_1 x)a.$$

Esto implica $\ell(x) = 0$, para todo x, en contradicción con la hipótesis $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Solución del ejercicio 3487 ▲003575

1. Sí, las aplicaciones $u \mapsto p \circ u$ y $u \mapsto u \circ p$ lo son (estos son proyectores) y conmutan.
2. Sea $\mathscr{B}$ una base de E obtenida por concatenación de una base en $\ker p$ y de una base de $\mathrm{Im}\, p$. Si $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, entonces $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{pmatrix}$, de donde $\mathrm{Spec}(\varphi) \subset \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y $d_0 = (n-r)^2$, $d_1 = r^2$ y $d_{\frac{1}{2}} = 2r(n-r)$.

Solución del ejercicio 3488 ▲003576

Si D es diagonalizable entonces las aplicaciones $X \mapsto DX$ y $X \mapsto XD$ lo son (anulador dividido de raíces simples) y conmutan, por lo que son simultáneamente diagonalizables y su diferencia, ϕ_D, es también diagonalizable. Por el recíproco, se empieza por constatar que si P es cualquier polinomio, entonces :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{\mathrm{grad}(P)} (-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{\mathrm{grad}(P)} (-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

(Fórmula binomial para $P = X^m$ y la linealidad de cada miembro con respecto a P, para P cualquiera). Se supone ϕ_D diagonalizable, se toma P anulador divido de raíces simples de ϕ_D, $x = U^t V$, donde U es un vector propio de D asociada a cierto valor propio λ y V un vector arbitrario. Entonces :

$$0 = \sum_{k=0}^{\mathrm{grad}(P)} (-1)^k \lambda^k U^t V \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V \sum_{k=0}^{\mathrm{grad}(P)} (-1)^k \lambda^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = U^t V P(D - \lambda I).$$

Como $U \neq 0$, esto implica ${}^tVP(D-\lambda I) = 0$, para todo V, por lo tanto $P(D-\lambda I) = 0$. Así $D-\lambda I$ es diagonalizable y D también.

Solución del ejercicio 3490 ▲003626

1.

2. $((-2,0,1),\ (0,3,-2),\ (1,-2,1))$.

Solución del ejercicio 3491 ▲003627

Base si y solo si n es impar, $2\overrightarrow{e}_1 = (1,1,-1,1,-1,\dots,1,-1)$ y los otros vectores se obtienen por rotación : $2\overrightarrow{e}_2 = (-1,1,1,-1,1,-1,\dots,1)$.

Solución del ejercicio 3493 ▲003629

2. $\phi_i^* = (1-2d_i(X-x_i))P_i^2$, $\psi_i^* = (X-x_i)P_i^2$.

Solución del ejercicio 3494 ▲003630

2. $\frac{1}{8}(9-15X^2,\ 75X-105X^3,\ -15+45X^2,\ -105X+175X^3)$.

Solución del ejercicio 3495 ▲003631

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & b & c & (b^2-a^2)/2 \\ a^2 & b^2 & c^2 & (b^3-a^3)/3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix}$ y $\det(M) = (b-a)^4(c-a)(c-b)\frac{2c-a-b}{12}$, entonces la familia es libre si y solo si $c \neq \frac{a+b}{2}$.

Solución del ejercicio 3496 ▲003632

2. término dominante $\Rightarrow P_n^*(Q_i) = 1$, por lo tanto $P_n^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{Q_i(i)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3. $P_k^* = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} f_i}{i!\,(k-i)!}$.

Solución del ejercicio 3497 ▲003633

2. $P_0^* = \frac{f_a}{(b-a)^2}$, $P_1^* = \frac{f_a+f_b-4f_c}{(b-a)^2}$, $P_2^* = \frac{f_b}{(b-a)^2}$.

Solución del ejercicio 3503 ▲003639

1. $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3. $(\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_{A'}, \delta_{B'}, \delta_{C'})$, donde A', B', C' son los puntos medios del triángulo ABC.

5. $\iint_T f(x,y)\,dxdy = \frac{f(A')+f(B')+f(C')}{6}$.

Solución del ejercicio 3504 ▲003640

3. Obsrv : coeficientes de Fourrier : $\alpha_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\cos(pa_k)$ y $\beta_p = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(a_k)\operatorname{sen}(pa_k)$.

Solución del ejercicio 3506 ▲003642

2. $\left(\frac{\varphi^{n-1}-\bar{\varphi}^{n-1}}{\varphi-\bar{\varphi}}, \frac{\varphi^{n}-\bar{\varphi}^{n}}{\varphi-\bar{\varphi}}\right)$, con $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Solución del ejercicio 3514 ▲003650

$\overrightarrow{e}_i \leftrightarrow \overrightarrow{e}_j$: $\quad e_i^* \leftrightarrow e_j^*$.
$\overrightarrow{e}_i \leftarrow \alpha\overrightarrow{e}_i$: $\quad e_i^* \leftarrow e_i^*/\alpha$.
$\overrightarrow{e}_i \leftarrow \overrightarrow{e}_i + \alpha\overrightarrow{e}_j$: $\quad e_j^* \leftarrow e_j^* - \alpha e_i^*$.

Solución del ejercicio 3524 ▲001311

1. Sí.
2. No. El único elemento que puede ser el elemento neutro es 1 que no pertenece al conjunto.
3. No. 0 no tiene inversa.
4. Sí.

Solución del ejercicio 3527 ▲001314

El primer conjunto no es un grupo porque, por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ solo puede tener por inverso $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ que no pertenece al conjunto. Denotemos $G = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\}$ y demostrar que G es un subgrupo de $Gl(2,\mathbb{R})$.

— la matriz identidad pertenece a G.
— si $A,B \in G$, entonces $AB \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ y $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, y entonces $AB \in G$.
— Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$, entonces $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ pertenece a G y es la inversa de A.

Solución del ejercicio 3535 ▲001322

1. El conjunto G de matrices $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leqslant 1$ no es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. De hecho, las dos matrices $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ pertenecen a G y su producto $\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ no pertenece a G.

2. El conjunto H de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}^*$ y $b \in \mathbb{R}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. En efecto,
– I_2 elemento neutro de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pertenece a H.
– Sean $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ dos elementos de H, entonces $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad+bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$, entonces el producto de dos elementos de H pertenece a H.
– Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Entonces $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ pertenece a H.

3. Sea K_M el conjunto de matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc \neq 0$ y $a \leqslant M$. Demostrar, en razonando por reducción al absurdo, que no existe valor $M \in \mathbb{R}$ tal que K_M forma un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Sea $M \in \mathbb{R}$ tal que K_M forma un subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Entonces I_2 pertenece a K_M, por lo tanto $M \geqslant 1$. Así, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pertenecen a K_n, entonces el producto $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertenece a K_n. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene : $1+n \leqslant M$, lo que es absurdo.

Solución del ejercicio 3536 ▲001323

- Si $H \subset K$, entonces $H \cup K = K$, que es un subgrupo de H. Lo mismo si $K \subset H$.
- Recíprocamente, se supone que $H \cup K$ es un subgrupo de G. Por reducción al absurdo supongamos que $H \not\subset K$ y $K \not\subset H$. Entonces existe $x \in H \setminus K$ y $y \in K \setminus H$. Como $x, y \in H \cup K$ y que $H \cup K$ es un grupo entonces $x \cdot y \in H \cup K$, o sea $x \cdot y \in H$ o $x \cdot y \in K$. Por ejemplo, si se supone $x \cdot y \in H$, entonces como $x \in H$, $x^{-1} \in H$ y así como H es un grupo $x^{-1} \cdot x \cdot y \in H$ y entonces $y \in H$, lo que contradice la hipótesis $y \in K \setminus H$.
  En conclusión, entre los subgrupos H, K uno está incluido en el otro.

Solución del ejercicio 3539 ▲001326

Sea $G = \langle a, b \rangle$, todo elemento g de G se escribe $g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \cdots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$. Si $h \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, en particular $h \in \langle a \rangle$ y $h = a^{\mu}$, con $\mu \in \mathbb{Z}$, por lo tanto h conmuta con a^{α_i}, para todo α_i en $\mathbb{Z}$ (en efecto, $a^{\alpha_i} a^{\mu} = a^{\alpha_i + \mu} = a^{\mu} a^{\alpha_i}$. Igualmente $h \in \langle b \rangle$, por lo tanto h se escribe igualmente $h = b^{\nu}$ ($\nu \in \mathbb{Z}$) y h conmuta con b^{β_i}. Entonces $hg = (ha^{\alpha_1}) b^{\beta_1} \cdots = (a^{\alpha_1} h) b^{\beta_1} \cdots = a^{\alpha_1} (h b^{\beta_1}) \cdots = a^{\alpha_1} (b^{\beta_1} h) \cdots = \cdots$
Finalmente, $hg = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \cdots a^{\alpha_n} b^{\beta_n} h = gh$. Así h conmuta con todo elemento de G y por lo tanto, pertenece al centro de G.

Solución del ejercicio 3548 ▲001343

Sea $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morfismo de grupo. Como todo morfismo f verifica $f(0) = 0$. Denotemos $a = f(1)$. Entonces

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2 \cdot a.$$

Igualmente, para $n \geqslant 0$:

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n \cdot f(1) = n \cdot a.$$

finalmente como

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

entonces $f(-1)=-a$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$:
$$f(n)=n \cdot a.$$
Así todos los morfismos son de la forma $n \mapsto n \cdot a$, con $a \in \mathbb{Z}$.
Un morfismo $n \mapsto n \cdot a$ es inyectiva si y solo si $a \neq 0$, y sobreyectiva si y solo si $n=\pm 1$.

Solución del ejercicio 3550 ▲001345

$\begin{aligned} f:(\mathbb{R},+) &\longrightarrow (\mathbb{C}^*,\times) \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{ix}. \end{aligned}$ Verificar que f es un morfismo de grupo. Sea $x,y \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{i(x+y)}=\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy}=f(x)\times f(y),$$

y

$$f(x^{-1})=\mathrm{e}^{i(-x)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{ix}}=f(x)^{-1}.$$

Entonces f es un morfismo de grupo.
Demostrar que f no es inyectiva probando que el núcleo no se reduce a 0 :

$$\ker f=\{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } f(x)=1\}=\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \mathrm{e}^{ix}=1\right\}=\{x=0+2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

en fin

$$\operatorname{Im} f=\left\{y \in \mathbb{C}^*, y=\mathrm{e}^{ix}\right\}$$

es el conjunto de complejos de módulo 1, es decir el círculo de centro 0 y de radio 1.

Solución del ejercicio 3559 ▲001354

Sea $\phi:\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morfismo entre los dos grupos multiplicativos $\mathbb{C}^*$ y $\mathbb{R}^*$. Denotemos $a=\phi(i)\in\mathbb{R}^*$. Entonces $\phi(-1)=\phi(i^2)=\phi(i)^2=a^2$, igualmente $1=\phi(1)=\phi((-1)^2)=\phi(-1)^2=a^4$; por lo tanto $a^4=1$ y necesariamente $a^2=1$. El morfismo ϕ no es inyectivo porque $\phi(1)=\phi(-1)=1$, *a fortiori* ϕ no es un isomorfismo.

Solución del ejercicio 3561 ▲001386

Sea $x \neq e$ un elemento de G, sea $H=\{e,x,x^2,\dots\}$ el subgrupo generado por x. H es un subgrupo de G, por lo tanto $\operatorname{card} H$ divide $\operatorname{card} G=p$ que es un número primo. En consecuencia $\operatorname{card} H=1$ o p, pero $H \neq \{e\}$, por lo tanto $\operatorname{card} H=p$ y $H=G$.
Se viene de demostrar que G es generado por x, por lo tanto G es cíclico, además, el razonamiento es válido sea cual sea $x \neq e$, entonces todo elemento de $G\setminus\{e\}$ es un generador de G.

Solución del ejercicio 3562 ▲001387

---

1. $H \cap H'$ es un subgrupo de H, por lo tanto $\operatorname{card} H \cap H'$ divide $\operatorname{card} H=p$. Por lo tanto p es primo y $\operatorname{card} H \cap H'=1$ o p. Pero $H \cap H' \neq H$, por lo tanto $\operatorname{card} H \cap H' \neq p$ y entonces $H \cap H'=\{e\}$.
2. Sea E el conjunto de elementos de orden p que se supone no vacío. Notemos que para $x \in E$ el subgrupo H_x generado por x es de orden p y además todo $z \in H_x \setminus \{e\}$ es de orden p, pues H_x es cíclico y p es primo y H_x contiene $p-1$ elementos de orden p.

   Si E contiene un solo elemento x, entonces $E=H_x\setminus\{e\}$ y entonces E contiene $p-1$ elementos. Si no, sea $x,y \in E$, con $x \neq y$. Entonces de acuerdo con la primera pregunta $H_x \cap H_y=\{e\}$. Entonces E se descompone en una unión disjunta de $H_x\setminus\{e\}$. Entonces $\operatorname{card} E$ es múltiplo de $p-1$.

Solución del ejercicio 3564 ▲001389

1. Notar primero que para $x \in G$, $x^2 = e$ y entonces $x^{-1} = x$. Sea ahora $x, y \in G$, entonces $xy \in G$ y $(xy)^2 = e$, por lo tanto $xy = (xy)^{-1}$ y consecuentemente $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$, pues x y y son de orden 2. El producto de dos elementos cualesquiera de G conmutan, así G es conmutativo.
2. Denotemos E el conjunto de elementos de orden 2.

$$E = \{x \in G \ / \ x^2 = e \text{ y } x \neq e\} = \{x \in G \ / \ x = x^{-1} \text{ y } x \neq e\}.$$

Por reducción al absurdo supongamos que H es el conjunto vacío. Entonces cualquiera que sea $x \neq e$ en G $x \neq x^{-1}$. Entonces podemos descomponer $G \setminus \{e\}$ en dos conjuntos disjuntos $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $F' = \{{x_1}^{-1}, \dots, {x_n}^{-1}\}$ que son de la misma cardinalidad n. Entonces el cardinal de G es $2n+1$ (el $+1$ viene del elemento neutro). Esto contradice la hipótesis «G de orden par».

Solución del ejercicio 3576 ▲002966

1. No, a no es regular.
2. Sí, $G \approx \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. No, no existe elemento neutro.

Solución del ejercicio 3608 ▲007360

1. En $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3) = (132)$ y por conjugación $(1,2)(2,3)(1,2) = (1,3)$.
2. El conjunto de transposiciones de $\mathscr{S}_7$ no contiene la identidad : por lo tanto, no es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$. El primer cálculo muestra que tampoco es estable por producto.

Solución del ejercicio 3611 ▲007363

1. Los posibles órdenes de los elementos de un grupo de órdenes 6 son, por el teorema de Lagrange los divisores de 6, es decir $1, 2, 3$ y 6.
2. Los elementos invertibles de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \times)$ son las clases de números enteros primos a 7, es decir todas las clases distintas no nulas.
3. La tabla de multiplicar de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star, \times)$ es

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

4. Se calcula el orden multiplicativo de 2. Como $2^3 = 1$ el orden de 2 es 3. Como $3^2 = 2$ y $3^3 = 6$, 3 es de orden 6. Es por lo tanto un generador de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star, \times)$.

5. Se deduce de la pregunta anterior que $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\star},\times)$ es un grupo cíclico de orden 6. Se tiene entonces $\phi(6)=\phi(2)\phi(3)=2$ generadores.
6. En el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ todos los elementos g verifican $4g=0$. Entonces no existe ningún elemento de orden 8. Por lo tanto, este grupo no es cíclico.
7. Por el teorema chino, ya que 4 y 5 son primos entre sí, $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. El grupo $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^{\star}$ es isomorfo al producto $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\star}\times(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\star}$. Como $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\star}$ es un grupo de orden 2, es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Como 5 es primo, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\star}$ es un grupo cíclico de orden 4 por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. En consecuencia, el grupo $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^{\star}$ no es cíclico.

Solución del ejercicio 3612 ▲007364

---

1. Como α y β son a soporte disjunto, conmutan $\alpha\beta=\beta\alpha$
2. El orden de α dado como producto de ciclos con soporte disjuntos es el *mcm* de los órdenes de los ciclos que lo componen, por lo tanto $mcm(3,2)=6$. El de la transposición β es 2.
3. $\alpha^{-1}=(175)(43)$ y $\beta^{-1}=(26)$.
4. Demostrar que $S=\{\alpha^i\circ\beta^j, 0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1\}$ es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$.
   *estabilidad por producto : Sea $\alpha^i\circ\beta^j$ y $\alpha^k\circ\beta^l$ dos elementos de S, donde $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$ y $0\leqslant k\leqslant 5, 0\leqslant l\leqslant 1$.
   $$\begin{aligned}(\alpha^i\circ\beta^j)\circ(\alpha^k\circ\beta^l) &= \alpha^i\circ\beta^j\circ\alpha^k\circ\beta^l\\ &= \alpha^i\alpha^k\beta^j\beta^l=\alpha^{i+k}\beta^{j+l}.\end{aligned}$$
   Como $\alpha^6=\mathrm{Id}$, considerando el resto $0\leqslant r\leqslant 5$ de la división euclidiana de $i+k$ por 6 y eso $0\leqslant s\leqslant 1$ de la división euclidiana de $j+l$ por 2 se obtiene $(\alpha^i\circ\beta^j)\circ(\alpha^k\circ\beta^l)=\alpha^r\beta^s$ que por lo tanto pertenece a S. *stabilité por inversión : Sea $\alpha^i\circ\beta^j$ en S, donde $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$. Como $\alpha^6=\mathrm{Id}$, $(\alpha^i)^{-1}=\alpha^{6-i}$. Como $\beta^2=\mathrm{Id}$, $\beta^{-1}=\beta$.
   $$(\alpha^i\circ\beta^j)^{-1}=(\beta^j)^{-1}(\alpha^i)^{-1}=\beta^j\alpha^{6-i}=\alpha^{6-i}\beta^j$$
   que por lo tanto pertenece a S.
5. Sea $\alpha^i\circ\beta^j$ y $\alpha^k\circ\beta^l$ dos elementos de S, donde $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$ y $0\leqslant k\leqslant 5, 0\leqslant l\leqslant 1$. Si $\alpha^i\circ\beta^j=\alpha^k\circ\beta^l$, entonces $\alpha^i\alpha^{6-k}=\beta^l\beta^j$. Como α y β son a soporte disjunto, esto implica que $\alpha^i\alpha^{6-k}=\mathrm{Id}$ y $\beta^l\beta^j=\mathrm{Id}$ y en particular $l=j$. Se deduce que $i=k$. Entonces todos los elementos de la lista $\{\alpha^i\circ\beta^j, 0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1\}$ son distintos. El orden de S es, por lo tanto $6\times 2=12$.
6. Sea H un subgrupo de $\mathscr{S}_7$ que contiene α y β. Por la estabilidad por producto, contiene α^i, β^j y $\alpha^i\circ\beta^j$, para todo $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$. Por lo tanto, contiene S.
7. Se puede deducir de las preguntas 4. y 6. precedentes que el subgrupo de $\mathscr{S}_7$ es generado por α y β es S.
8. Como α y β son a soporte disjunto, $\alpha\circ\beta=(157)(43)(26)$ es una escritura en producto de ciclos a soportes disjuntos. El orden de $\alpha\circ\beta$ es, por lo tanto $\mathrm{mcm}(3,2,2)=6$.
9. Una escritura como producto de ciclos con soporte disjunto de $\alpha^i\circ\beta^j$ demuestra que su orden es menor que $mcm(3,2)=6$. En consecuencia, el subgrupo S que no tiene elementos de orden 12 no es cíclico.

Solución del ejercicio 3613 ▲007365

---

1. Se verifica primero que
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calcular los productos de matrices ADA^{-1} y BDB^{-1} en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, donde
$$ADA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$BDB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Como $D \in \mathscr{D}$ y $B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, pero BDB^{-1} no pertenece a $\mathscr{D}$, el subgrupo $\mathscr{D}$ de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ de matrices diagonales invertibles no es normal en $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.
3. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.
4. $\mathrm{tr}(AB) = 0+8 = 8$ y $\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) = 0+2 = 2 \neq 8$. En consecuencia, tr no es un morfismo de grupos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ en $(\mathbb{R},+)$.

Solución del ejercicio 3617 ▲001336

Denotemos G el conjunto de elementos de orden finito de H. Demostrar que G es un subgrupo de H.

— $G \subset H$ y $0 \in G$.

— Si $x \in G$, entonces $(-x)+(-x)+\cdots+(-x) = -(x+x+\cdots+x) = 0$, o sea $-x \in G$.

— Si $x, y \in G$, entonces $(x+y)+\cdots+(x+y) = (x+\cdots+x)+(y+\cdots+y) = 0+0 = 0$, o sea $x+y \in G$.

Se viene de demostrar que G es un subgrupo de H. Además, como H es conmutativo entonces G ¡lo es también !

Solución del ejercicio 3618 ▲001337

1. La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es de orden 2. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es de orden finito ya que, para todo $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Denotemos e_G y e_H los respectivos elementos neutros de G y de H. Sea g un elemento de G de orden n.
   – Entonces $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e_G) = e_H$. Entonces $\varphi(g)$ es de orden menor o igual a n, orden de g.
   – Se supone φ inyectivo y $\varphi(g)$ de orden estrictamente inferior a n, es decir que existe $p < n$ tal que : $\varphi(g)^p = e_H$. Entonces $\varphi(g^p) = e_H$, por lo tanto, ya que φ es inyectiva y $\varphi(e_G) = e_H$, se tiene también : $g^p = e_G$, lo cual es imposible ya que el orden de g es n.
3. Se razona por reducción al absurdo : Sea G un grupo finito. Se supone que existe en G un elemento g no es de orden finito. Como G es un grupo, se puede considerar $X = \{g^k / k \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, para $i \neq j$: $g^i \neq g^j$. En efecto, se supone $i < j$. Si $g^i = g^j$, entonces $g^{j-i} = e_G$ y g es de orden menor o igual a $j-i$, por lo tanto finito, lo que es imposible. X es, por lo tanto un conjunto infinito. G contiene un conjunto infinito por lo tanto es infinito, lo que es absurdo, por lo tanto g solo puede ser de orden finito.

Solución del ejercicio 3621 ▲001340

Recordar primero que para x un elemento de orden n, entonces

$$x^q = e \Longrightarrow n|q.$$

— Si n es par entonces $ord(x^2) = n/2$: en efecto, $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ y para $p \geqslant 1$ tal que $(x^2)^p = e$, entonces $x^{2p} = e$ y $n|2p$, por lo tanto $p \geqslant \frac{n}{2}$. Así $n/2$ es el menor de los enteros q (no nulo) tal que $x^q = e$ y por lo tanto, $n/2$ es el orden de x.

— Si n es impar entonces $ord(x) = n$. En primer lugar, $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ y para p tal que $(x^2)^p = e$, entonces $n|2p$, pero 2 y n son primos entre sí por lo que según el teorema de Gauss, $n|p$ y, en particular $p \geqslant n$.

Solución del ejercicio 3622 ▲001341

1. Se sabe que $(xy)^{mn} = x^{mn}y^{mn} = (x^m)^n(y^n)^m = e.e = e$. Sea p tal que $(xy)^p = e$, entonces $e = (xy)^{mp} = x^{mp}y^{mp} = y^{mp}$, y entonces mp es divisible por el orden de y, es decir n. Como m y n son primos entre sí, entonces por el teorema de Gauss n divide p. Un razonamiento similar a partir de $(xy)^{np} = e$ conduce a : m divide p. Finalmente, $m|p$ y $n|p$, por lo tanto $mn|p$, pues m y n son primos entre sí.

   He aquí un contra ejemplo en el caso donde m y n no son primos entre sí : en el grupo $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\bar{2}$ es de orden 6, $\bar{4}$ es de orden 3, pero $\bar{2}+\bar{4} = \bar{6}$ es de orden $2 \neq 3 \times 6$.

2. A es de orden 4, B es de orden 3, $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es nunca la matriz identidad para $n \geqslant 1$.

Solución del ejercicio 3623 ▲001342

Por reducción al absurdo supongamos que $(\mathbb{Q},+)$ es generado por un solo elemento $\frac{p}{q}$ (p y q primos entre sí) entonces todo elemento de $\mathbb{Q}$ se escribe $n\frac{p}{q}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Se sigue que $\frac{p}{2q}$ (que pertenece a $\mathbb{Q}$) debe escribirse $n\frac{p}{q}$, pero entonces $2n = 1$, con $n \in \mathbb{Z}$, lo que es imposible. Conclusión $(\mathbb{Q},+)$ no es monogénico.

Solución del ejercicio 3631 ▲002981

1. $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Q}$.
2. $x \mapsto 0$.
3. $x \mapsto 1$.

Solución del ejercicio 3652 ▲003007

1.
2. A es íntegro porque $\{0\}$ es primo y si $a \in A \setminus \{0\}$, entonces $a \times a \in (a^2)$ que es primo y a^2 divide a, de donde a es invertible.

Solución del ejercicio 3655 ▲003010

1.
2. 1.
3. $x+y=(x+y)^2=x^2+y^2+xy+yx=x+y+xy+yx \Rightarrow xy+yx=0$.
   Para $y=1: x+x=0 \Rightarrow 1=-1$.
   Para y cualquier : $xy=-yx=yx$.
4. Antisimetría : si $x=ay$, entonces $xy=ay^2=ay=x$.
   Así $(x \leqslant y)$ y $(y \leqslant x) \Rightarrow xy=x=y$.

Solución del ejercicio 3657 ▲003012

Si $(1-ab)c=1=c(1-ab)$, entonces $abc=c-1=cab$, por lo tanto $babca=bca-ba=bcaba$ o sea $ba(1+bca)=bca=(1+bca)ba$, por lo tanto $1+bca$ es inverso de $1-ba$.

Solución del ejercicio 3658 ▲003013

1.
2.
3. Observación : el recíproco es falso : $A=\mathbb{Z}[X]$, $I=(X)$, $J=(X+4)$.
4. $114\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 3667 ▲003022

$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.
f es multiplicativa en base canónica $\Rightarrow a_ia_j=0$, para $i \neq j$.
$f(1,\dots,1)=1 \Rightarrow$ uno de los a_i vale 1, y los otros 0.
Conclusión : f = cte coordenadas.

Solución del ejercicio 3668 ▲003023

1.
2. idem 3667 : las proyecciones + el valor de estacionamiento.
3.

Solución del ejercicio 3669 ▲003024

1. $\pm 1, \pm i$.
2. Se tiene : $1+i=0\times 2+(1+i)=1\times 2+(i-1)$.
3.

Solución del ejercicio 3706 ▲007369

1. Se puede decir que el orden de a es un divisor de m.
2. Se trata del ideal $\mathrm{mcd}(18,28)\mathbb{Z}=252\mathbb{Z}$.

3.
4.
5. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ son dos grupos de orden 4, pero el segundo cuyos elementos son todos de orden 1 o 2 no es cíclico.
6. Como $(1,2)(1,3)(1,2)=(2,3)$, $(1,2)$ y $(1,3)$ no conmutan. En consecuencia, el grupo $\mathscr{S}_4$ no es cíclico.

Solución del ejercicio 3707 ▲007370

1. $(-7387)-(-1601)=-5786=(-2)2893$, por lo tanto, el entero -1601 es un representante de la clase $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$.
2. Por el pequeño teorema de Fermat, $11^{12}=1[13]$. Se efectúa la división euclidiana de 329 por 12. $329-27\times 12=5$. En consecuencia, $11^{329}=11^5[13]$, $11^2=121=4[13]$, $11^4=4^2=3[13]$, de donde $11^{329}=11^5=33=7[13]$.
3. Porque $\mathrm{mcd}(51,131)=1$, la clase $[51]$ es invertible en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Usando el algoritmo de Euclides encontramos que $1=131\times(-7)+51\times 18$ y en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$ se tiene $51^{-1}=18$.

Solución del ejercicio 3708 ▲007371

1. $X^3+X+1=(X^2+X+1)(X-1)+(X+2)$ y $X^2+X+1=(X+2)(X-1)+3$. Una relación de Bézout entre X^2+X+1 y X^3+X+1 en $\mathbb{R}[X]$ es
$$3=(X^2+X+1)-(X+2)(X-1)=(X^2+X+1)-(X-1)[(X^3+X+1)-(X^2+X+1)(X-1)]$$
o sea
$$3=(-X+1)(X^3+X+1)+(X^2-2X+2)(X^2+X+1).$$
2. Porque X^3+X+1 y X^2+X+1 son primos entre sí, la clase del polinomio X^2+X+1 invertible en el anillo cociente $\mathbb{R}[X]/(X^3+X+1)$. Su inversa es la clase de $(X^2-2X+2)/3$, como lo indica la relación de Bézout.

Solución del ejercicio 3709 ▲007372

1.
2. Como $\phi(12)=\phi(3)\phi(2^2)=2\times 2=4$ hay cuatro elementos invertibles en el anillo $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$. Se trata de $1,-1=11,5,-5=7$. Como $5^5=25=1[12]$, todos los elementos son de orden 1 o 2. El grupo $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ es, por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. También se puede observar que por el teorema chino, $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times=(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 3710 ▲007373

Como es un grupo de orden 5, es cíclico por lo tanto conmutativo. La tabla se completa así en

$*$	a	b	c	d	e
a		e	d		c
b	e		a		d
c	d	a			b
d				d	e
e	c	d	b	e	a

Como $de = e$, d es el elemento neutro. La tabla se completa así en

$*$	a	b	c	d	e
a		e	d	a	c
b	e		a	b	d
c	d	a		c	b
d	a	b	c	d	e
e	c	d	b	e	a

Por la propiedad de cuadrado latino, se puede terminar la tabla

$*$	a	b	c	d	e
a	b	e	d	a	c
b	e	c	a	b	d
c	d	a	e	c	b
d	a	b	c	d	e
e	c	d	b	e	a

Solución del ejercicio 3711 ▲007374

1. En $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3) = (132)$ y por conjugación $(1,2)(2,3)(1,2) = (1,3)$.
2. El conjunto de transposiciones de $\mathscr{S}_7$ no contiene la identidad : por lo tanto, no es un subgrupo de $\mathscr{S}_7$. El primer cálculo muestra que tampoco es estable por producto.

Solución del ejercicio 3728 ▲003026

$K = \{0,1,a,b\}$ y $\{1,a,b\}$ es un grupo multiplicativo $\Rightarrow b = a^2$, $a^3 = 1$.

$+$	0	1	a	a^2
0	0	1	a	a^2
1	1	0	a^2	a
a	a	a^2	0	1
a^2	a^2	a	1	0

$\times$	1	a	a^2
1	1	a	a^2
a	a	a^2	1
a^2	a^2	1	a

Solución del ejercicio 3756 ▲001412

1. $|S_n| = n!$, por lo tanto $|S_3| = 3! = 6$. Demostrar de manera más general que no existe elemento de orden $n!$ en S_n ($n \geqslant 3$). Por reducción al absurdo, sea α tal elemento. Entonces por hipótesis S_n es generado por α y entonces S_n es un grupo conmutativo. Pero $(1,2)(2,3) \neq (2,3)(1,2)$, lo que es absurdo. En conclusión, no existen elementos de orden 6.
2. Explicitar S_3 :
$$S_3 = \left\{id; \tau_1 = (1,2); \tau_2 = (2,3); \tau_3 = (1,3); \sigma_1 = (1,2,3); \sigma_2 = \sigma_1^{-1} = (3,2,1)\right\}.$$
Observaciones :
Los subgrupos de orden 2 son de la forma $\{id;\tau\}$, con $\tau^2 = id$. Los únicos elementos de orden 2 son lss transposiciones y por lo tanto, son los grupos $\{id;(1,2)\}$,$\{\mathrm{id}; (1,3)\}$, $\{id;(2,3)\}$. Los subgrupos de tercer orden son de la forma $\{id,\sigma,\sigma^2\}$, con $\sigma^2 = \sigma^{-1}$. Y así el único subgrupo de orden 3 es $\{id;(1,2,3);(3,2,1)\}$.

3. Los subgrupos de S_3 tienen un orden que divide $|S_3| = 6$. Entonces un subgrupo puede ser de orden $1, 2, 3$ o 6. El subgrupo de orden único 1 es $\{id\}$, y el único subgrupo de orden 6 es S_3. Los subgrupos de orden 2 y 3 se dieron en la pregunta anterior.

Solución del ejercicio 3762 ▲001418

1. $\sigma = (1,3)(2,7,9,5) = (2,7,9,5)(1,3)$ y $\sigma^k = (1,3)^k(2,7,9,5)^k$. Las transposiciones son de orden 2, por lo tanto $(1,3)^k = \mathrm{Id}$ si $k \equiv 0 \pmod 2$ y $(1,3)^k = (1,3)$ si $k \equiv 1 \pmod 2$. El ciclo $(2,7,9,5)$ es de orden 4, y $(2,7,9,5)^k$ es respectivamente igual a $\mathrm{Id}, (2,7,9,5), (2,9)(7,5), (5,9,7,2)$ si k es respectivamente congruente a $0, 1, 2, 3$ módulo 4. El cálculo de σ^k da así $\mathrm{Id}, (1,3)(2,7,9,5), (2,9)(7,5)$ o $(1,3)(5,9,7,2)$ según que k es congruente a $0, 1, 2$ o 3 módulo 4.
2. La escritura de $\varphi = (10,3,4,1)(8,7)(4,7)(5,6)(2,6)(2,9)$ es una descomposición producto de ciclos, pero no son de soportes disjuntos. Escribir φ bajo la forma :
$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
que se descompone $\varphi = (1,10,3,4,8,7)(2,9,5,6) = (2,9,5,6)(1,10,3,4,8,7)$.
El cálculo de $\varphi^k = (1,10,3,4,8,7)^k(2,9,5,6)^k$ es similar al cálculo anterior (según $k \pmod{12}$)

Solución del ejercicio 3770 ▲001426

1. $\mathscr{S}_N$ es el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$. En $\mathscr{S}_{n+2}$ se denota τ la permutación $(n+1, n+2)$. Se define una aplicación $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \mathscr{S}_{n+2}$ por las relaciones
$$\phi(\sigma) = \sigma \text{ si } \varepsilon(\sigma) = +1; \quad \phi(\sigma) = \sigma \circ \tau \text{ si no};$$
donde ε designa el signo. Entonces ϕ es un morfismo de grupo, además cualquiera que sea $\sigma \in \mathscr{S}_n$, entonces $\varepsilon(\phi(\sigma)) = +1$ (si $\varepsilon(\sigma) = +1$ es claro, si no $\varepsilon(\phi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau) = (-1) \times (-1) = +1$). Entonces $\phi(\mathscr{S}_n)$ es un subgrupo de $\mathscr{A}_{n+2}$.
Finalmente, ϕ es inyectiva : en efecto, sea σ tal que $\phi(\sigma) = \mathrm{Id}$. Sea $\varepsilon(\sigma) = +1$ y entonces $\phi(\sigma) = \sigma = \mathrm{Id}$; sea $\varepsilon(\sigma) = -1$ y entonces $\phi(\sigma) = \sigma \circ \tau$, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $j = \phi(\sigma)(j) = \sigma \circ \tau(j) = \sigma(j)$, y entonces cualquiera que sea $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\sigma(j) = j$ y entonces $\sigma = \mathrm{Id}$. Se viene de demostrar que la composición de dos permutaciones a soporte disjunto es la identidad si y solo si las permutaciones ya son la identidad !
Denotemos todavía $\phi : \mathscr{S}_n \longrightarrow \phi(\mathscr{S}_n)$ el morfismo inducido por ϕ. Es inyectivo y sobreyectivo, por lo tanto $\mathscr{S}_n$ es isomorfo $\phi(\mathscr{S}_n)$ que es un subgrupo de $\mathscr{A}_{n+2}$.
2. $\mathscr{A}_5$ es de cardinal $5!/2 = 60$, y como $24 = \operatorname{card} \mathscr{S}_4$ no divide 60, entonces $\mathscr{A}_5$ no tiene subgrupo de orden 24.
3. Es un poco más delicado, pues $\operatorname{card} \mathscr{S}_5 = 5! = 120$ divide $\operatorname{card} \mathscr{A}_6 = 6!/2 = 360$, por lo tanto el argumento arriba no es válido. Sin embargo, si existe un isomorfismo entre $\mathscr{S}_5$ y un subgrupo de $\mathscr{A}_6$, entonces un ciclo de orden 5 de $\mathscr{S}_5$ es enviado a una permutación $\sigma \in \mathscr{A}_6$ de orden 5.
Se descompone σ como producto de ciclos con soportes disjuntos, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots$. Como los ciclos σ_i son con soportes disjuntos, hay como máximo tres ciclos (de longitud $\geqslant 2$) en la descomposición (pues en $\mathscr{A}_6$ se pueden permutar a lo sumo 6 elementos).
— El caso $\sigma = \sigma_1$ no es posible porque entonces σ_1 es un ciclo de orden 5 y entonces de signo -1 en $\mathscr{A}_6$.

— Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$, entonces las longitudes de σ_1 y σ_2 son $(4,2)$ o $(2,2)$, y el orden de su composición $\sigma_1 \circ \sigma_2$ es, por lo tanto 4 o 2, pero no 5.

— Si $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, entonces los σ_i son las transposiciones, y el signo de σ es entonces -1, lo que contradice $\sigma \in \mathscr{A}_6$.

Solución del ejercicio 3774 ▲003076

1. $(a\ b) \circ (c\ d)$.
2.

Solución del ejercicio 3775 ▲003077

1. $(1\ 2) \circ (i\ j)$.
2.

Solución del ejercicio 3776 ▲003078

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n+c+f}$.

Solución del ejercicio 3780 ▲003082

Contar las inversiones o recurrencia : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Solución del ejercicio 3782 ▲003084

Las potencias de σ.

Solución del ejercicio 3783 ▲003085

Conjugación : $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$,
o $\tau = (1\ 6) \circ (2\ 7) \circ (3\ 8) \circ (4\ 9) \circ (5\ 10) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^x \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)^y$.
$\Rightarrow$ 50 elementos.

Solución del ejercicio 3785 ▲003087

30.

Solución del ejercicio 3787 ▲003089

$$C_{26}^3 \times \frac{2C_{23}^3 \times 2C_{20}^3}{2!} \times 4!C_{17}^5 \times \frac{5!C_{12}^6 \times 5!C_6^6}{2!} = 10\,372\,722\,765\,601\,996\,800\,000.$$

Solución del ejercicio 3788 ▲005353

1. Las inversiones de σ son :$\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

   $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{2,7\}$, $\{2,8\}$, $\{2,10\}$, $\{2,11\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{3,7\}$,$\{3,8\}$, $\{6,7\}$, $\{6,8\}$, $\{9,10\}$, $\{9,11\}$, $\{9,12\}$.

   En total, hay $2+8+5+2+3 = 20$ inversiones. σ es, por lo tanto una permutación par (de signo 1).

2. $\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 11\ 8\ 9\ 12)$.
Luego, $\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 8\ 11\ 12)$.
Después, $\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 8\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Luego, $\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 5\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Después, $\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 5\ 4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Luego, $\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$.
Después, $\tau_{1,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{11,12}\circ\sigma=(3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)=\tau_{1,3}$.
Así,
$$\sigma=\tau_{11,12}\circ\tau_{9,11}\circ\tau_{10,8}\circ\tau_{8,5}\circ\tau_{7,4}\circ\tau_{5,2}\circ\tau_{1,4}\circ\tau_{1,3}.$$

3. $O(1)=\{1,3,4,7\}=O(3)=O(4)=O(7)$, luego $O(2)=\{2,5,8,10\}$, luego $O(6)=\{6\}$ y $O(9)=\{9,11,12\}=O(11)=O(12)$. σ tiene 4 órbitas, dos de cardinal 4, uno de cardinal 3 y un punto aislado (correspondiente a un punto fijo).

4. σ es, por lo tanto el producto conmutativo de los ciclos $c_1=\begin{pmatrix}1&3&4&7\\3&7&7&4\end{pmatrix}$, $c_2=\begin{pmatrix}2&5&8&10\\10&2&5&8\end{pmatrix}$ y
$c_3=\begin{pmatrix}9&11&12\\12&9&11\end{pmatrix}$.
Se tiene $c_1^4=c_2^4=\mathrm{Id}$ y $c_3^3=\mathrm{Id}$. Por tanto, $2005=4.1001+1$. Entonces, $c_1^{2005}=c_1(c_1^4)^{1001}=c_1$, e igualmente $c_2^{2005}=c_2$. Después, $c_3^{2005}=(c_3^3)^{668}c_3=c_3$. Porque c_1, c_2 y c_3 conmutan,
$$\sigma^{2005}=c_1^{2005}c_2^{2005}c_3^{2005}=c_1c_2c_3=\sigma=(3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11).$$

Solución del ejercicio 3789 ▲005354

$(S_n,\circ)$ es generado por las transposiciones. Por tanto, basta con demostrar que para $2\leqslant i<j\leqslant n$, la transposición $\tau_{i,j}$ es producto de los $\tau_{1,k}$, $2\leqslant k\leqslant n$. Pero $\tau_{1,i}\circ\tau_{1,j}\circ\tau_{1,i}=(i1j)(ji1)(i1j)=(1ij)=\tau_{i,j}$, lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 3790 ▲005355

Los elementos de A_n son los productos pares de transposiciones. Entonces basta con verificar que un producto de dos transposiciones es un producto de ciclos de longitud 3.
Sean i, j y k tres elementos dos a dos distintos de $\{1,\dots,n\}$. $\tau_{i,k}\circ\tau_{i,j}$ es el 3-ciclo : $i\to j\ j\to k\ k\to i$, lo que demuestra que un 3-ciclo es par y que el producto de dos transposiciones cuyo los supports tienen en común un punto aislado es un 3-ciclo.
El caso $\tau_{i,j}\circ\tau_{i,j}=\mathrm{Id}=(231)(312)$ es inmediato. Queda por estudiar el producto de dos transposiciones con soportes disjuntos. Sean i, j, k y l cuatro elementos dos a dos distintos de $\{1,\dots,n\}$.
$$\tau_{i,j}\circ\tau_{k,l}=(jikl)(ijlk)=(jilk)=(jkil)(ljik).$$
Así, $\tau_{i,j}\circ\tau_{k,l}$ es bien un producto de 3-ciclos que completa la prueba.

Solución del ejercicio 3791 ▲005356

Según el ejercicio 3789, es suficiente demostrar que para $2\leqslant i\leqslant n$, $\tau_{1,i}$ se puede escribir usando solo $\tau=\tau_{1,2}$ y $c=(2\ 3\ \dots\ n\ 1)$. Se observa que $c^n=\mathrm{Id}$.

Primeramente, para $1 \leqslant i \leqslant n-1$, estudiemos $\sigma = c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1}$. Sea $k \in \{1,\dots,n\}$.

$$\tau \circ c^{n-i+1}(k) \neq c^{n-i+1}(k) \leqslant c^{n-i+1}(k) \in \{1,2\} \Leftrightarrow k \in \{c^{-n+i-1}(1), c^{-n+i-1}(2)\} \Leftrightarrow k \in \{c^{i-1}(1), c^{i-1}(2)\}$$
$$\Leftrightarrow k \in \{i, i+1\}.$$

Así, si $k \notin \{i, i+1\}$,

$$\sigma(k) = c^{i-1}(k)(\tau \circ c^{n-i+1}(k)) = c^{i-1}(c^{n-i+1}(k)) = c^n(k) = k,$$

y la restricción de σ a $\{1,\dots,n\} \setminus \{i,i+1\}$ es la identidad de este conjunto. Como σ no es la identidad ya que $\sigma(i) \neq i$, σ es, por lo tanto necesariamente la transposición $\tau_{i,i+1}$.
Se ha demostrado que $\forall i \in \{1,\dots,n-1\}$, $c^{i-1} \circ \tau \circ c^{n-i+1} = \tau_{i,i+1}$. Verificar ahora que los $\tau_{1,i}$ se escriben usando los $\tau_{j,j+1}$. Según el ejercicio 3789, $\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$, y así bien sûr, más generalmente, $\tau_{i,j} = \tau_{k,i} \circ \tau_{k,j} \circ \tau_{k,i}$. Así, $\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}$ después, $\tau_{2,i} = \tau_{2,3} \circ \tau_{3,i} \circ \tau_{2,3}$, después, $\tau_{3,i} = \tau_{3,4} \circ \tau_{4,i} \circ \tau_{3,4}$... Y $\tau_{i-2,i} = \tau_{i-2,i-1} \circ \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1}$. Finalmente,

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \dots \circ \tau_{i-2,i-1} \tau_{i-1,i} \circ \tau_{i-2,i-1} \circ \dots \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{1,2},$$

lo que termina la demostración.

Solución del ejercicio 3792 ▲005357

Sea $(G,\times)$ un grupo. Para x elemento de G, se considera $f_x : \begin{array}{l} G \to G \\ y \mapsto xy. \end{array}$ f_x es una aplicación de G hacia G y además, claramente $f_x \circ f_{x^{-1}} = f_{x^{-1}} \circ f_x = \mathrm{Id}_G$. Entonces, para todo elemento x de G, f_x es una permutación de G.
Sea entonces $\varphi : \begin{array}{l} (G,\times) \to (S_G,\circ) \\ x \mapsto f_x. \end{array}$ De acuerdo con lo anterior, φ es una aplicación. Además, φ es también un morfismo de grupos. En efecto, para $(x,x',y) \in G^3$, se tiene :

$$\varphi((xx'))(y) = f_{xx'}(y) = xx'y = f_x(f'_x(y)) = f_x \circ f_{x'}(y) = (\varphi(x) \circ \varphi(x'))(y),$$

y entonces $\forall (x,x') \in G^2$, $\varphi(xx') = \varphi(x) \circ \varphi(x')$. En fin, φ es inyectiva porque, para x elemento de G :

$$\varphi(x) = \mathrm{Id} \Rightarrow \forall y \in G,\ xy = y \Rightarrow xe = e \Rightarrow x = e.$$

Entonces, $\ker \varphi = \{e\}$, y φ es inyectiva.
φ es, pues un isomorfismo de grupos de $(G,\times)$ sobre $(f(G),\circ)$ que es un subgrupo de $(S_G,\circ)$. $(G,\times)$ es isomorfo a un subgrupo de $(S_G,\circ)$.

Solución del ejercicio 3793 ▲005358

Demostrar primero por inducción sobre $l \geqslant 2$ que el signo de un ciclo de longitud l es $(-1)^{l-1}$.
Es conocido por $l=2$ (signo de una transposición). Sea $l \geqslant 2$. Suponga que todo ciclo de longitud l tiene para la firma $(-1)^{l-1}$. Sea c un ciclo de duración $l+1$.
Se denota $\{x_1, x_2, \dots, x_{l+1}\}$ el soporte de c y se supone que, para $1 \leqslant i \leqslant l$, $c(x_i) = x_{i+1}$ y que $c(x_{l+1}) = x_1$.
Demostrar entonces que $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ es un ciclo de longitud l. $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ fijo ya x_{l+1} luego, si $1 \leqslant i \leqslant l-1$, $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_i) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}$ (pues x_{i+1} no es ni x_1, ni x_{l+1}), y en fin $\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c(x_l) = \tau_{x_1,x_{l+1}}(x_{l+1}) = x_1$.
$\tau_{x_1,x_{l+1}} \circ c$ es, por lo tanto un ciclo de longitud l. Por hipótesis de recurrencia, $u_{x_1,x_{l+1}}$ tiene el signo $(-1)^{l-1}$ y por lo tanto, c tiene el signo $(-1)^{(l+1)-1}$.

Demostrar ahora que si σ es una permutación cualquiera de $\{1,\ldots,n\}$ teniendo k orbitas el signo de σ es $(-1)^{n-k}$.
Si σ es la identidad, σ a n órbitas y el resultado es claro.
Si σ no es la identidad, se descompone σ como producto de ciclos con soportes disjuntos.
Se define $\sigma = c_1 \cdots c_p$, donde p denota el número de órbitas de σ no reducidas a un punto aislado y entonces $k-p$ es el número de puntos fijos de σ. Si l_i es la longitud de c_i, por lo tanto se tiene $n = l_1+\cdots+l_p+(k-p)$ o aún $n-k = l_1+\cdots+l_p-p$.
Pero entonces,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{p} \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{p}(-1)^{l_i-1} = (-1)^{l_1+\cdots+l_p-p} = (-1)^{n-k}.$$

Solución del ejercicio 3794 ▲005359

---

1. (a) Sean σ y σ' dos elementos de S_n. Sea $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$. El coeficiente fila i, columna j de $P_\sigma P_{\sigma'}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))},$$

y es, por lo tanto también el coeficiente línea i, columna j de la matriz $P_{\sigma\circ\sigma'}$. Así,

$$\forall(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2,\ P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.$$

(b) Sea $\sigma\in S_n$. De acuerdo cona), $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n = P_{\sigma^{-1}}P_\sigma$. Se deduce que toda matriz P_σ es invertible, de inverso $P_{\sigma^{-1}}$. Así, $G\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (y claramente, $G\neq\varnothing$). Sea entonces $(\sigma,\sigma')\in(S_n)^2$.

$$P_\sigma P_{\sigma'}^{-1} = P_\sigma P_{\sigma'^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma'^{-1}} \in G.$$

Se ha demostrado que G es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$.

Sea $\varphi : \begin{array}{l} S_n \to G \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{array}$. De acuerdo con a), φ es un morfismo de grupos. φ es claramente sobreyectiva.

Queda por verificar que φ es inyectiva.

Sea $\sigma\in S_n$.

$$\begin{aligned}\sigma\in\ker\varphi \Rightarrow P_\sigma = I_n &\Rightarrow \forall(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2,\ \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{i,j}\\ &\Rightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \delta_{i,\sigma(i)} = 1 \Rightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \sigma(i) = i\\ &\Rightarrow \sigma = \mathrm{Id}.\end{aligned}$$

Porque el núcleo del morfismo φ se reduce a $\{\mathrm{Id}\}$, φ es inyectiva.

Así, φ es un isomorfismo del grupo $(S_n,\circ)$ en el grupo $(G,\times)$ y se ha demostrado que $(G,\times)$ es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$, isomorfo a $(S_n,\circ)$.

2. Sea $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$. El coeficiente fila i, columna j de AP_σ vale :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Así, el elemento fila i, columna j, de AP_σ es el elemento fila i, columna $\sigma(j)$, de A, o aún, si j es un elemento dado de $\{1,\ldots,n\}$, la j-ésima columna de AP_σ es la $\sigma(j)$-ésima columna de A. Así, si se denota C_1,. . .,C_n las columnas de A (y entonces $A = (C_1,\ldots,C_n)$), entonces $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)},\ldots,C_{\sigma(n)})$.

En claro, multiplicar A por P_σ a la derecha tiene el efecto de aplicar la permutación σ en las columnas de A (ya que P_σ es invertible, se encuentra el hecho de que permutando las columnas de A no cambia el rango de A).
Igualmente, el coeficiente línea i, columna j, de $P_\sigma A$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\sigma^{-1}(i),k} a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j},$$

(se ha usado $\sigma(k) = i \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$) y multiplicar A por P_σ a la izquierda tiene por efecto aplicar la permutación σ^{-1} en las líneas de A.

Solución del ejercicio 3795 ▲005360

$G = \{A_1, \dots, A_p\}$ es ya una parte no vacía de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, estable para $\times$. Queda por verificar que G es estable por el pasaje a la inversa.
Sean $i \in \{1, \dots, n\}$, luego $\varphi_i : \begin{array}{l} G \to G \\ A \mapsto A_i A \end{array}$. Porque G es estable para el producto, φ_i es una aplicación de G en G.
Demostrar que φ_i es inyectiva. Sea $(A, B) \in G$.

$$\varphi_(A) = \varphi_i(B) \Rightarrow A_i A = A_i B \Rightarrow A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i B \Rightarrow A = B.$$

Entonces, φ_i es una aplicación inyectiva del conjunto **finito** G en sí mismo. Entonces se sabe que φ_i es una permutación de G. Por φ_i, A_i tiene un antecedente A en G. $A_i A = A_i$ proporciona $A_i^{-1} A_i A = A_i^{-1} A_i$, luego $A = I \in G$. Así, G contiene la matriz I. Luego, I tiene un antecedente de φ_i en G. Entonces, existe $B \in G$ tal que $A_i B = I$. Pero entonces $A_i^{-1} = B \in G$. G es de hecho estable por el pasaje a la inversa y, por lo tanto, es un subgrupo de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Solución del ejercicio 3796 ▲005361

Para $(x_1, \dots, x_n) \in E$, se establece $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = x_1 + \dots + x_n$. φ es una forma lineal no nula en E y H es el núcleo de φ. H es, por lo tanto de hecho un hiperplano de E. Es claro que, para $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$. $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ es un espacio vectorial y por lo tanto, p es de hecho un endomorfismo de E.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \left(\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right)^2 = \sum_{(\sigma, \sigma') \in (S_n)^2} f_\sigma \circ f_{\sigma'}.$$

Pero, $(S_n, \circ)$ es un grupo finito. Así, la aplicación $\begin{array}{l} S_n \to S_n \\ \sigma \mapsto \sigma \circ \sigma', \end{array}$ inyectiva (mismo enfoque que en el ejercicio 3795), es una permutación de S_n. Se deduce que, para σ' dada, $\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Así, se pone $q = n! p$.

$$p^2 = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} \Big(\sum_{\sigma \in S_n} f_{\sigma \circ \sigma'} \Big) = \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma' \in S_n} q = \frac{1}{n!^2} \cdot n! q = \frac{1}{n!} q = p.$$

p es, por lo tanto una proyección. Determinar entonces la imagen y el núcleo de p. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$p(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}.$$

Ahora, hay (claramente) tantas permutaciones σ tales que $\sigma(i)=1$, como permutaciones σ tales que $\sigma(i)=2,\dots$ o de permutaciones σ tales que $\sigma(i)=n$, a saber $\frac{n!}{n}=(n-1)!$. Así,

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ p(e_i)=\frac{1}{n!}\frac{n!}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k.$$

Se define $u=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e_k$. De acuerdo con lo anterior,

$$\operatorname{Im}p=\operatorname{vect}(p(e_1),\dots,p(e_n))=\operatorname{vect}(u).$$

entonces, si $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ es un elemento de E,

$$p(x)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}x_kp(e_k)=0\Leftrightarrow(\sum_{k=1}^{n}x_k)u=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}x_k=0\Leftrightarrow x\in H.$$

Así, p es la proyección sobre $\operatorname{vect}(u)$, paralelamente a H.

Solución del ejercicio 3797 ▲002960

1. Conmutativa, asociativa, $0=$ elemento neutro, todo elemento $\neq 1$ es regular, solo 0 es simetrisable.
2. Todo elemento es simetrisable y $x^{-1}=\frac{x}{x-1}$.

Solución del ejercicio 3798 ▲002961

$\exists\ b\in E$ tal que $a*b*a=a$. Entonces $b*a$ es neutro a la derecha y $a*b$ es neutro a la izquierda.

Solución del ejercicio 3799 ▲002962

1. Asociativa, conmutativa, $\{e\}$ = elemento neutro, A es simetrisable $\iff A=\{a\}$, con a simetrisable.
2. Sí.

Solución del ejercicio 3800 ▲002963

1. No conmutativa, asociativa, $(1,0)$ = elemento neutro,
   (a,b) es regular $\iff a\neq 0$.
   (a,b) es invertible $\iff a=\pm1$.
2.
3.
4.

Solución del ejercicio 3812 ▲002996

1.
2. Sea $x\in G:\exists\ u,v\in\mathbb{Z}$ tal que $ua+vb=1\Rightarrow x=(x^{ua})(x^{vb})$.

Solución del ejercicio 3819 ▲003003

Tarde $\{e_1,\dots,e_p\}$ una parte generatriz de cardinal minimal. Entonces los 2^p elementos $e_1^{\alpha_1}\dots e_p^{\alpha_p}$, con $\alpha_i\in\{0,1\}$ son distintos (si no uno de los e_i pertenece al grupo generado por los demás) por lo tanto $n\geqslant 2^p$.

Solución del ejercicio 3820 ▲003004

Si $a\in G$ es de orden infinito entonces genera un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}$, que tiene una infinidad de subgrupos ; es excluido. Así todos los subgrupos monógenos de G son finitos, y G es la unión de estos subgrupos.

Solución del ejercicio 3826 ▲007375

1. Es la multiplicación. Porque $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ es un cuerpo finito, por un teorema del curso, el grupo de sus invertibles es un grupo cíclico de orden 16.
2. Tiene $\phi(91)=\phi(13\times 17)=\phi(13)\times\phi(17)=12\times 16=192$.
3. $s=(15)(273)(469)$.
4. $$\begin{aligned}(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&8&6&7&2&3&9&4&5\end{pmatrix}\\ (28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&6&7&8&3&9&4&5\end{pmatrix}\\ (36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&7&8&6&9&4&5\end{pmatrix}\\ (47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&8&6&9&7&5\end{pmatrix}\\ (58)(47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&9&7&8\end{pmatrix}\\ (79)(58)(47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&9&8\end{pmatrix}=(89)\end{aligned}$$
   Así,
   $$\sigma=(19)(28)(36)(47)(58)(79)(89).$$
5. No, cambia en la transposición de t_1 por t_2.

Solución del ejercicio 3827 ▲007376

1. Por el curso, se tiene $\phi(24)=\phi(2^3\times 3)=(2^3-2^2)(2)=8$.
2. Por el teorema chino, como 3 y 8 son primos entre sí,
   $$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$
3. Por la pregunta anterior, $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times\simeq(\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\simeq(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$. Para determinar el grupo $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, se observa que es un grupo con $\phi(8)=4$ elementos. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times=\{1,3,-1,-3\}$. Como $3^2=1$, todos los elementos son de orden 2. En consecuencia, todos los elementos de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ son de orden 2, y este grupo no es cíclico.

Solución del ejercicio 3828 ▲007377

1. $221 = 13 \times 17$
2. Por el teorema chino,

$$(X-3)(X-5)=0 \pmod{221} \iff \begin{cases} (X-3)(X-5)=0 \pmod{13} \\ (X-3)(X-5)=0 \pmod{17}. \end{cases}$$

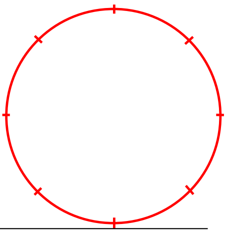
Porque 13 y 17 son primos, por el lema de Euclides,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (X-3)(X-5)=0 \pmod{13} \\ (X-3)(X-5)=0 \pmod{17}. \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} (X=3 \pmod{13} \quad \text{o} \quad X=5 \pmod{13}) \\ \quad \text{y} \quad (X=3 \pmod{17} \quad \text{o} \quad X=5 \pmod{17}) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} X=3 \pmod{13} & \text{y} & X=3 \pmod{17} \\ & \text{o} & \\ X=3 \pmod{13} & \text{y} & X=5 \pmod{17} \\ & \text{o} & \\ X=5 \pmod{13} & \text{y} & X=3 \pmod{17} \\ & \text{o} & \\ X=5 \pmod{13} & \text{y} & X=5 \pmod{17} \end{cases} \\ \iff & X=3 \pmod{221} \quad \text{o} \quad X=107 \pmod{221} \\ & \quad \text{o} \quad X=122 \pmod{221} \quad \text{o} \quad X=5 \pmod{221}. \end{aligned}$$

Las soluciones enteras de la ecuación $(X-3)(X-5)=0 \pmod{221}$ son los enteros congruentes a 3, 107, 122 o 5 módulo 221.

Solución del ejercicio 3829 ▲007378

1. Como ζ es de orden 8, ζ^3 es de orden $8/\operatorname{mcd}(8,3)=8$. El subgrupo generado por ζ^3 es, por lo tanto todo el grupo de raíces de la unidad de orden 8.



2. $z^11 = 1$ por lo que el orden de z es un divisor de 11. Pero $z \neq 1$. Entonces z es de orden 11. Como $z^8 \neq 1$, z^8 es también de orden 11. $z^8 = \exp(16 \times 8i\pi/11) = \exp(64 \times 2i\pi/11)$. Como $64 = 5 \times 11 + 9$, el argumento de z^8 es $18\pi/11$.

Solución del ejercicio 3830 ▲007379

1. $2^3 < 7 < 3^2$. Entonces, $2 < \sqrt{7} < 3$. Sea $P(x) = x^2 - 7$.

$$\begin{array}{r|lll} & 1 & 0 & -7 \\ \hline \text{factor } 2 & 1 & 2 & -3 \\ & 1 & 4 & \\ & 1 & & \end{array}$$

Entonces $P(2+y) = y^2 + 4y - 3$. En consecuencia, $Q(z) := 100P(2+z/10) = z^2 + 40z - 300$. Con $300/40 \sim 7$. Se encuentra $Q(6) < 0$ y $Q(7) > 0$. Entonces

$$2,6 < \sqrt{7} < 2.7.$$

2. $Q(z) = z^2 + 40z - 300$.

	1	40	-300
factor 6	1	46	-24
	1	52	
	1		

Entonces, $Q(6+u) = u^2 + 52u - 24$. En consecuencia, $R(v) := 100Q(6+v/10) = v^2 + 520u - 2400$. Como $2400/520 \sim 5$, se encuentra $R(5) > 0$ y $R(4) < 0$. Entonces

$$2,64 < \sqrt{7} < 2.65.$$

Solución del ejercicio 3841 ▲007390

1.
2. $60^2 = -53[281]$. $53^2 = -1[281]$. Entonces, $c = 53$ es una raíz de -1 módulo 281.
3. $281 = 5 \times (53+i) + (16-5i)$. $53 - i = (3+i)(16-5i)$. Entonces, $\text{mcd}(281, c+i) = 16-5i$. Calculando $N(16-5i)$ se encuentra
$$16^2 + 5^2 = 281.$$

Solución del ejercicio 3847 ▲007396

1. Si G es un grupo finito y H un subgrupo de G, entonces $\text{card}(G) = \text{card}(G/H)\text{card}(H)$. En particular, el orden de un elemento de un grupo finito divide el orden del grupo.
2. El orden de a^p es $\frac{k}{k \wedge p}$.
3. Se observa que el orden de $\mathscr{S}_3$ es 6. Un grupo finito de orden 6 es cíclico si y solo si tiene un elemento de orden 6. Hay tres elementos de orden 2, dos elementos de orden 3, y un elemento de orden 1 en $\mathscr{S}_3$. Entonces el grupo no es cíclico. Notar también que no es conmutativo.
4. Sea $D \in k[X]$ un polinomio no nulo. Para todo polinomio A de $k[X]$ existe un único par $(Q,R) \in (k[X])^2$ tal que $A = DQ + R$ y $\text{grad}(R) < \text{grad}(D)$.
5. Sean A y B dos enteros gaussianos con $B \neq 0$. Entonces existen dos enteros gaussianos Q y R tales que $A = BQ + R$ y $N(R) < N(B)$.

Solución del ejercicio 3848 ▲007397

1. Porque $\text{mcd}(51, 131) = 1$, la clase $[51]$ es invertible en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Usando el algoritmo de Euclides encontramos que $1 = 131 \times (-7) + 51 \times 18$. Entonces, en $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$ se tiene $51^{-1} = 18$ y $92 \times 51^{-1} = -39 \times 18 = -47 = 84$.
2. Un elemento a en $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ es un divisor de 0 si existe un elemento no nulo b tal que $ab = 0 \bmod 16$. Entonces los divisores de 0 son todos los elementos a en $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, tales que $\text{mcd}(a, 16) \neq 1$. Se encuentra : $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$.

Solución del ejercicio 3849 ▲007398

1. Si el polinomio $P = X^4 + X + 1$ es reducible, es divisible por un polinomio de grado 1 (por lo tanto X o $X+1$) o por un polinomio irreducible de grado 2 (por lo tanto X^2+X+1). Se verifica que los polinomios $X, X+1$ y X^2+X+1 no dividiendo P, entonces P es irreducible.
2. Realizamos la división euclidiana de $3X^5+X^2+X+7$ por X^4+X+1. Porque $3X^5+X^2+X+7 = X^5+X^2+X+1 = X(X^4+X+1)+1 = 1$ en A, la clase de $3X^5+X^2+X+7$ no es nula.
El anillo $\mathbb{F}_2[X]/P$ es un cuerpo si y solo si el polinomio P es irreducible en $\mathbb{F}_2[X]$. Como X^4+X+1 es irreducible, A es un cuerpo. A es de cardinal $2^4 = 16$.
3. Se tiene una relación $\alpha^4+\alpha+1 = 0$ en A, entonces $\alpha^4 = \alpha+1$. El grupo de los convertibles $A^\times$ de A contiene 15 elementos, entonces el teorema de Lagrange implica que el elemento invertible α verifica $\alpha^{15} = 1$.
4. Porque $\alpha^4+\alpha+1 = 0$ y $\alpha^{15}-1 = 0$, los polinomios $X^{15}-1$ y X^4+X+1 representan la misma clase (clase nula) en A. Entonces $X^{15}-1$ es de hecho un múltiplo de X^4+X+1 en $\mathbb{F}_2[X]$.

Solución del ejercicio 3850 ▲007399

1. Sea C el código dado. El alfabeto de C es el conjunto $\{0,1\}$. La longitud de las palabras es 15, entonces la longitud de C es 15. La matriz generatriz dada es exactamente la matriz de código engendrado por el polinomio $g = 1+X^3+X^4$. Porque g es un divisor unitario de $X^{15}-1$ de grado 4,
$$X^{15}-1 = (X^4+X^3+1)(X^{11}+X^{10}+X^9+X^8+X^6+X^4+X^3+1)$$
el código generado por g es cíclico, de dimensión $11 = 15-4$. Entonces C es cíclico de dimensión 11 generado por g. Contiene 2^{11} palabras.
2. Sí, ver más arriba.
3. Se encuentra el polinomio de control :
$$h = \frac{X^{15}-1}{g} = X^{11}+X^{10}+X^9+X^8+X^6+X^4+X^3+1$$
Entonces la matriz de control es
$$H = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}.$$
Dos columnas cualquiera de H son siempre linealmente independientes, por lo que la distancia del código es al menos 3. Porque el código contiene una palabra de peso 3, entonces la distancia es en realidad 3. Entonces C puede corregir un error y detectar dos.
4. Una palabra m pertenece a C si y solo si $H \cdot \mathrm{tr} m = \overrightarrow{0}$.
El producto de H y $m = (0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1)$ es la columna obtenida como la suma de las columnas estrelladas
$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 0&0&0&*&0&*&*&*&*&*&*&0&0&*&* \\ \hline 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$
sea $(0,0,0,0)$. Entonces m es una palabra de código.

Solución del ejercicio 3851 ▲007400

1. Se verifica que los primeros entre 2 y $\sqrt{613}$, es decir $2,3,5,7,11,13,17,19,23$ no dividiendo 613, entonces el número 613 es primo.
2. Porque $613 = 1 \mod 4$, por el teorema de dos cuadrados, 613 se puede escribir como la suma de dos cuadrados.
3. $35^2 = 1225 = -1 \mod 613$.
4. $\dfrac{613}{35+i} = \dfrac{613\times(35-i)}{(35+i)\times(35-i)} = \dfrac{613\times(35-i)}{1225+1} = \dfrac{35}{2} - \dfrac{i}{2}$. Un entero de Gauss el más cercano a $\frac{35}{2} - \frac{i}{2}$ es 17. Entonces
$$613 = 17\times(35+i) + (18-17i).$$
5. Se ha encontrado que 35 es una raíz de -1 módulo $p = 613$. Encontrar mcd(613,35+i). Porque $613 = 17\times(35+i)+(18-17i)$, $\text{mcd}(613, 35+i) = \text{mcd}(35+i, 18-17i) = 18-17i$. Entonces
$$613 = N(18-17i) = 18^2 + 17^2$$

Solución del ejercicio 3852 ▲007401

1. Para todo $P \in k[X]$ y $D \in k[X]^*$, existe un único par (Q,R) en $k[X]$ tal que $P = QD+R$ y $\text{grad}(R) < \text{grad}(D)$.
2. Para todo $a \in \mathbb{Z}[i]$ y $d \in \mathbb{Z}[i]^*$, existe un par (q,r) en $k[X]$ tal que $a = qd + r$ y $|r| < |d|$.
3. El orden de a^k es $\frac{n}{n\wedge k}$. En efecto, sean $d = n\wedge k$, $n' = n/d$ y $k' = k/d$, de manera que $n'\wedge k' = 1$. Para todo m, se tiene $a^{km} = 1 \iff n|km \iff n'|k'm \iff n'|m$. Entonces el orden de a^k es n'.
4. Sea G de orden 13 y x un elemento no trivial de G. Por el teorema de Lagrange, x solo puede ser de orden 13. Pero $\langle x\rangle$ contiene ya 13 elementos, por lo tanto $G = \langle x\rangle$. Así G es abeliano porque es monogénico.
5. Por ejemplo, 7, ya que 7 es congruente a 3 módulo 4 o bien como tampoco $7-1^2 = 6$, ni $7-2^2 = 3$, ni con $n\in\mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $7-n^2 < 0$ no son cuadrados.

Solución del ejercicio 3853 ▲007402

1. No, pues $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ no contiene ningún elemento de orden 9.
2. No, porque no tienen el mismo orden.
3. ¿Los grupos $(\mathbb{F}_7)^\star$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ son isomorfos? Por el teorema del grupo de invertibles de un campo finito y por el teorema chino, son los dos cíclicos de orden 6, por lo tanto isomorfos.

Solución del ejercicio 3854 ▲007403

1. Sea $P = X^2+X+1$. El polinomio P no tiene raíces, entonces si el es reducible, se factoriza en dos polinomios de grado 2. Por lo tanto $(X^2+X+1)^2 = X^4+X^2+1$, que es diferente de P. Entonces P es irreducible.

2. El ideal (X^4+X^3+1) es primo porque X^4+X^3+1 es irreducible, entonces es máxima porque $\mathbb{F}_2[X]$ es principal, como todo anillo de polinomios sobre un campo. Pero el cociente entre un ideal maximal es un cuerpo. Entonces A es un cuerpo. Además, es isomorfo al polinomio de $\mathbb{F}_2[X]$ de grado como máximo 3, por lo tanto A tiene 16 elementos.
3. Porque A es un cuerpo, A^* contiene 15 elementos, por lo que el orden de todo elemento de A^* es un divisor de 15. En particular, $\alpha^{15}=1$.
4.

$$\begin{array}{lll}
\alpha^1=\alpha & \alpha^6=\alpha^4+\alpha^2+\alpha=\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 & \alpha^{11}=\alpha^4+\alpha^2=\alpha^3+\alpha^2+1\\
\alpha^2=\alpha^2 & \alpha^7=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=\alpha^2+\alpha+1 & \alpha^{12}=\alpha^4+\alpha^3+\alpha=\alpha+1\\
\alpha^3=\alpha^3 & \alpha^8=\alpha^3+\alpha^2+\alpha & \alpha^{13}=\alpha^2+\alpha\\
\alpha^4=\alpha^3+1 & \alpha^9=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2=\alpha^2+1 & \alpha^{14}=\alpha^3+\alpha^2\\
\alpha^5=\alpha^4+\alpha=\alpha^3+\alpha+1 & \alpha^{10}=\alpha^3+\alpha & \alpha^{15}=1
\end{array}$$

5. $\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9=\alpha^7(1+\alpha+\alpha^2)=\alpha^{7+7}=\alpha^{14}=\alpha^3+\alpha^2$.
6. $(1+\alpha+\alpha^3)^{-1}=(\alpha^5)^{-1}=\alpha^{10}$.

Solución del ejercicio 3855 ▲007404

1. El grupo $\mathbb{F}_{19}^{\times}$ es de orden 18, por lo que los posibles órdenes de los elementos son los divisores de 18 (y estos son exactamente estos porque $\mathbb{F}_{19}^{\times}$ es cíclico), es decir $1,2,3,6,9,18$. Por lo tanto $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^6=7$, $2^9=-1$, por lo tanto 2 es de hecho un generador de $\mathbb{F}_{19}^{\times}$.
2. $C=2^3=8$.
3. $D=2^7=14$. $C^d=8^7=2^{21}=2^3=8$. $mC^d=11\times 8=12$. Finalmente, $(M_1,M_2)=(14,12)$.
4. Utiliza la fórmula : $m=M_2(M_1^c)^{-1}$. Se verifica en efecto, que $12\times 14^{-3}=12\times(-5)^{-3}=12\times(-7)=-8=11$.
5. El mensaje enviado es $3\times 8^{-3}=3\times 2^{-9}=-3=16$. Para codificar $m=16$, Alice eligió una clave privada k y envía el mensaje $(2^k,16\times 8^k)$. Pero se sabe que $2^3=8$ y que el logaritmo discreto es un isomorfismo, así como Alice eligió esta vez la clave privada 3. Y efectivamente, se encuentra $(2^3,16\times 8^3)=(8,3)$.

Solución del ejercicio 3890 ▲003660

1. $a>0, b=c, d>0, ad-bc>0$.
2. $a-b>0$ y $a+(n-1)b>0$.
3.

Solución del ejercicio 3891 ▲003661

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, X\sqrt{\frac{3}{2}}, (3X^2-1)\sqrt{\frac{5}{8}}+(5X^3-3X)\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

Solución del ejercicio 3892 ▲003662

$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{X-2}{\sqrt{10}}, \frac{X^2-4X+2}{\sqrt{14}}$.

Solución del ejercicio 3893 ▲003663

1.
2. Elevar al cuadrado.
3. (a) $(\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{u}) = 1 \Leftrightarrow (i(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{u} - i(\overrightarrow{x})) = 0$: esfera pasando por $\overrightarrow{0}$.
   (b) Hiperplano que no pasa por $\overrightarrow{0}$.
   (c) $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{x} - \dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2 - R^2}\right\|^2 = \dfrac{R^2}{(\|\overrightarrow{a}\|^2 - R^2)^2}$: esfera sin pasar por $\overrightarrow{0}$.

Solución del ejercicio 3894 ▲003664

1. Elevar al cuadrado.
2.

Solución del ejercicio 3895 ▲003665

1.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Solución del ejercicio 3896 ▲003666

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)\right)$
2. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\sqrt{\frac{7}{10}}$.

Solución del ejercicio 3897 ▲003667

$\frac{1}{\Sigma a_i^2}\Big(I - (a_i a_j)\Big)$.

Solución del ejercicio 3901 ▲003671

Si $p \circ q = q \circ p$: Sean $x \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} p$ y $y \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} q$.
Entonces $p \circ q(x) = q(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, por lo tanto $(q(x) \mid y) = (x \mid y) = 0$.

Si $A = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} p$ y $B = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)^\perp \cap \operatorname{Im} q$ son ortogonales : Entonces $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A$, $\operatorname{Im} q = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} B$, y $E = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \overset{\perp}{\oplus} A \overset{\perp}{\oplus} B \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} p^\perp \cap \operatorname{Im} q^\perp)$. Por descomposición, se obtiene $p \circ q = q \circ p =$ la proyección ortogonal en $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Solución del ejercicio 3902 ▲003672

1. $\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{e}_j \mid \overrightarrow{e}_i)^2 = 1 \Rightarrow$ familia ortonormada y $\text{vect}(\overrightarrow{e}_i)^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$.
2.

Solución del ejercicio 3905 ▲003675

Esfera de centro $-\dfrac{\gamma\overrightarrow{a}}{\beta\|\overrightarrow{a}\|^2}$.

Solución del ejercicio 3909 ▲003679

Sea X la matriz de $\overrightarrow{e}_n$ en $\mathscr{B}$. Se tiene $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ y ${}^tXGX = \lambda x_p = 1$. Luego se aplica las fórmulas de Cramer.

Solución del ejercicio 3911 ▲003681

No, $\|\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3\|^2 < 0$.

Solución del ejercicio 3913 ▲003683

1.
2.
3. $\displaystyle\int_0^1 t^k t^x\,dt = \frac{1}{k+x+1}$.
4. Φ tiene por polos a los más simples $-1, -2, \ldots, -n-1$ y por raíces $0, 1, \ldots, n-1$. Como $\Phi(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$, por lo tanto se tiene $\Phi(x) = \lambda\dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{(x+1)\cdots(x+n+1)}$.
5. $a_k =$ residuo de Φ en $-k-1 = (-1)^{n+k}\lambda\dfrac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}$.
6.

Solución del ejercicio 3914 ▲003684

$x^2 + (x+y)^2 + (x+2y)^2 = (\sqrt{3}(x-y))^2 + (\sqrt{2}y)^2$.

Solución del ejercicio 3917 ▲003687

$f \in F^{\perp} \Rightarrow xf \perp f$.

Solución del ejercicio 3918 ▲003688

1.
2. $30X^2 - 36X + 9$.

Solución del ejercicio 3919 ▲003689

$P_a(t) = \frac{3}{8}(3 - 5t^2 - 5a^2 + 15a^2t^2) + \frac{5at}{8}(15 - 21t^2 - 21a^2 + 35a^2t^2)$,
$8\|P_a\|^2 = 9 + 45a^2 - 165a^4 + 175a^6$ es maximal para $a = \pm 1 \Rightarrow \|P_a\| = 2\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 3920 ▲003690

1.
2. $\pi(f)(t) = f(0)\dfrac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)} + f(1)\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$.
3. El inf se alcanza para la función $f \in W$ tal que $f(0) = \alpha$ y $f(1) = \beta$, sea $f(t) = \alpha\dfrac{\mathrm{sh}(1-t)}{\mathrm{sh}(1)} + \beta\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(1)}$ y $\inf = \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}$.

Solución del ejercicio 3921 ▲003691

1. El subespacio vectorial generado tiene un ortogonal nulo.
2. Cualquier familia generatriz sirve (equivalencia de normas).
3. $1 = \|y_i\|^2 = \|y_i\|^4 + \sum_{j\neq i}(y_i \mid y_j)^2 \Rightarrow \forall j \neq i,\ (y_i \mid y_j) = 0$.
4. Por polarización se tiene : $\forall x, y,\ \sum_{j\in I}(x \mid y_j)(y \mid y_j) = A(x \mid y)$, por lo tanto $\sum_{j\in I}(x \mid y_j)y_j - Ax \in E^\perp$.

Solución del ejercicio 3922 ▲003692

Sean $x \in \ker(u - \mathrm{Id})$ y $y = u(z) - z \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Se tiene $y = u(z + \lambda x) - (z + \lambda x)$, de donde :

$$\|z + \lambda x\|^2 \geqslant \|u(z + \lambda x)\|^2 = \|z + \lambda x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + 2(z \mid y) + \|y\|^2.$$

Haciendo tender λ hacia $\pm\infty$ se obtiene $(x \mid y) = 0$ y se concluye con el teorema del rango.

Solución del ejercicio 3923 ▲003693

f lineal y $f = x \mapsto \|x\|^2$ sirven y el conjunto $\mathscr{E}$ funciones f verificando la propiedad es estable por combinación lineal por lo que toda función de la forma $x \mapsto \ell(x) + a\|x\|^2$, con $\ell \in E^*$ y $a \in \mathbb{R}$ sirve. Demostrar que son los únicos : Sea $f \in \mathscr{E}$ se descompone en su parte par f_p y su parte impar f_i. Entonces $f_p, f_i \in \mathscr{E}$
Sean $x, y \in E$, con $\|x\| = \|y\|$ y $x \perp y$. Se tiene $f_i(x \pm y) = f_i(x) \pm f_i(y)$ y $f_i(2x) = f_i(x+y) + f_i(x-y) = 2f_i(x)$.
Luego, $f_i(2x) + f_i(x) - f_i(y) = f_i(2x+y) + f_i(x-2y) = f_i(3x-y) = f_i(3x) - f_i(y)$, de donde $f_i(3x) = 3f_i(x)$ y paso a paso $f_i(kx) = kf_i(x)$, para $k \in \mathbb{N}$, luego para $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sucesivamente dada la continuidad de f.
Tomado una base $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormal se tiene $f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$, para todo $x_1, \dots, x_n$ reales así f_i es lineal.
Sean ahora $x, y \in E$, con $\|x\| = \|y\|$, entonces $f_p(x+y) + f_p(x-y) = f(2x)$ y $f_p(x+y) + f_p(y-x) = f_p(2y)$, de donde $f_p(2x) = f_p(2y)$. Así f_p es constante en las esferas de centro 0. Se escribe $f_p(x) = \varphi(\|x\|^2)$,

con $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ extendida a $\mathbb{R}$ por ser impar ($f_p(0)=0$ de manera evidente) y se tiene $\varphi(a^2+b^2)=f_p(ae_1+be_2)=f_p(ae_1)+f_p(be_2)=\varphi(a^2)+\varphi(b^2)$ de lo que se concluye que φ es lineal.

Solución del ejercicio 3924 ▲005482

Se define $\varphi:(A,B)\mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$. Demostrar que φ es un producto escalar en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
1a solución. • φ es simétrica. En efecto, para $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)=\mathrm{tr}({}^t({}^tAB))=\mathrm{tr}({}^tBA)=\varphi(B,A).$$

• φ es bilineal por linealidad de la traza y la transpuesta.
• Si $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, entonces

$$\varphi(A,A)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}a_{i,j}\right)=\sum_{i,j}a_{i,j}^2>0$$

pues al menos uno de los reales de esta suma es estrictamente positivo. φ por lo tanto, se define, positiva.
2a solución. Se define $A=(a_{i,j})$ y $B=(b_{i,j})$. Se tiene

$$\mathrm{tr}({}^tAB)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

Así, φ es el producto escalar canónico de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y, en particular, φ es un producto escalar en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. N es la norma asociada al producto escalar φ (y, en particular, N es una norma). Sea $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}N(AB)^2&=\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\&\leqslant\sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}b_{l,j}^2\right)\ \text{(por la desigualdad de Cauchy-Schwarz)}\\&=\sum_{i,j,k,l}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{i,k}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j}b_{l,j}^2\right)=N(A)^2N(B)^2,\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\boxed{\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB)\leqslant N(A)N(B).}$$

Solución del ejercicio 3925 ▲005483

1. Sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}f(x+z,y)+f(x-z,y)&=\tfrac14(||x+z+y||^2+||x-z+y||^2-||x+z-y||^2-||x-z-y||^2)\\&=\tfrac14\left(2(||x+y||^2+||z||^2)-2(||x-y||^2+||z||^2)\right)=2f(x,y).\end{aligned}$$

2. $2f(x,y)=f(x+x,y)+f(x-x,y)=f(2x,y)+f(0,y)$, pero $f(0,y)=(||y||^2-||-y||^2)=0$ (definición de una norma).

3. • Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx,y) = nf(x,y)$. Esto es claro para $n = 0$ y $n = 1$. Sea $n \geqslant 0$. Si la igualdad es cierta para n y $n+1$, entonces de acuerdo a 1),

$$f((n+2)x,y) + f(nx,y) = f((n+1)x + x,y) + f((n+1)x - x,y) = 2f((n+1)x,y),$$

y entonces, por hipótesis de recurrencia,

$$f((n+2)x,y) = 2f((n+1)x,y) - f(nx,y) = 2(n+1)f(x,y) - nf(x,y) = (n+2)f(x,y).$$

El resultado es demostrado por inducción.

• Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x,y) = f\left(n \times \frac{1}{n}.x,y\right) = nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)$ y entonces $f\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}f(x,y)$.

• Sea entonces $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $f(rx,y) = \frac{1}{q}f(px,y) = p\frac{1}{q}f(x,y) = rf(x,y)$ y entonces, para todo racional positivo r, $f(rx,y) = rf(x,y)$. En fin, si $r \leqslant 0$, $f(rx,y) + f(-rx,y) = 2f(0,y) = 0$ (de acuerdo a 1)) y por lo tanto, $= f(-rx,y) = -f(-rx,y) = rf(x,y)$.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx,y) = rf(x,y).$$

4. Se define $x = \frac{1}{2}(u+v)$ y $y = \frac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w) + f(v,w) = f(x+y,w) + f(x-y,w) = 2f(x,w) = 2f\left(\tfrac{1}{2}(u+v),w\right) = f(u+v,w).$$

5. f es simétrica (definición de una norma) y lineal con respecto a su primera variable (de acuerdo a 3) y 4)). Entonces f es bilineal.

6. f es una forma bilineal simétrica. Para $x \in E$, $f(x,x) = \frac{1}{4}(||x+x||^2 + ||x-x||^2) = \frac{1}{4}||2x||^2 = ||x||^2$ (definición de una norma) lo que demuestra todo a la vez que f es definida positiva y por lo tanto, un producto escalar, y que $||\ ||$ es la norma asociada. $||\ ||$ es, por lo tanto una norma euclidiana.

Solución del ejercicio 3926 ▲005485

Sea A un posible polinomio solución es decir tal que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,dt = P(0)$.

$P = 1$ proporciona $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,dt = 1$ y por lo tanto, necesariamente $A \neq 0$. $P = XA$ proporciona $\displaystyle\int_0^1 tA^2(t)\,dt = P(0) = 0$. Pero entonces, $\forall t \in [0,1]$, $tA^2(t) = 0$ (función continua positiva de integral nula) luego $A = 0$ (polinomio que tiene una infinidad de raíces distintas por pares). A no existe.

Solución del ejercicio 3927 ▲005495

Sea $\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (x|e_1,\ldots,x|e_n) \end{array}$ φ es claramente lineal y $\ker\varphi$ es $(e_1,\ldots,e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Como E y $\mathbb{R}^n$ tienen las mismas dimensiones finales, φ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, para todo n-tuple $(a_1,\ldots,a_n)$ real, existe un único vector x tal que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x|e_i = a_i$.

Solución del ejercicio 3928 ▲005496

1a solución. Demostrar por inducción que en $n = \dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ es obtusángulo, $p \leqslant n+1$.

• Para $n = 1$, una familia obtusángula no puede contener al menos tres vectores porque si contiene los vectores x_1 y x_2 verificando $x_1.x_2 < 0$, un vector x_3 cualquiera que sea nulo (en ese caso $x_3x_1 = 0$), sea del mismo sentido que x_1 (en ese caso $x_1x_3 > 0$) sea del mismo sentido que x_2 (en ese caso $x_2x_3 > 0$). Entonces $p \leqslant 2$.

• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que toda familia obtusángula de un espacio de dimensión n tiene un cardinal menor o igual a $n+1$. Sea $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ una familia obtusángula de un espacio E de dimensión $n+1$. Si $p=1$, no hay nada más que decir. Se supone $p \geqslant 2$. x_p no es nulo y $H = x_p^{\perp}$ es un hiperplano de E y por lo tanto, es de dimensión n. Sea, para $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $y_i = x_i - \dfrac{(x_i|x_p)}{||x_p||^2} x_p$ el proyectado ortogonal de x_i sobre H. Verificar que la familia $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ es una familia obtusángula. Sea $(i,j) \in [\![1,p-1]\!]$ tal que $i \neq j$.

$$y_i.y_j = x_i.x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{||x_p||^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{||x_p||^4} = x_i|x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{||x_p||^2} < 0.$$

Pero entonces, por hipótesis de recurrencia, $p-1 \leqslant 1+\dim H = n+1$ y entonces $p \leqslant n+2$. El resultado es demostrado por recurrencia.

2a solución. Demostrar que si la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ es obtusángulo, la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ es libre. Se supone por reducción al absurdo, que existe una familia de escalares $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ no todo cero tales que $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$ $(*)$. Si se multiplican los dos miembros de $(*)$ por -1, se puede suponer que existe al menos un real $\lambda_i > 0$. Sea I el conjunto de los índices i tales que $\lambda_i > 0$ y J el conjunto de los índices i tales que $\lambda_i \leqslant 0$ (eventualmente J es vacío). I y J son disjuntos. (*) se escribe $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = -\sum\limits_{i\in J} \lambda_i x_i$ (si J es vacío, el segundo miembro es nulo). Se tiene

$$0 \leqslant \left\| \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \right) . \left(-\sum_{i\in J} \lambda_i x_i \right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i(-\lambda_j) x_i.x_j \leqslant 0.$$

Entonces, $\left\| \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = 0$, luego $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$. Pero, haciendo el producto escalar con x_p, se obtiene $\left(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i \right) \cdot x_p = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i (x_i \cdot x_p) < 0$, lo cual es una contradicción. La familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ es, por lo tanto, libre. Pero entonces su cardinal $p-1$ es inferior o igual a la dimensión n y entonces $p \leqslant n+1$.

Solución del ejercicio 3929 ▲005629

---

1. Sea $a \in \mathbb{C}$. Sean $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ y $(P,Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

   Entonces, φ_a es una forma lineal en E.

2. Se tiene $\operatorname{card}\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Por lo tanto, es suficiente comprobar que la familia $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ es libre. Para $k \in [\![0,n]\!]$, se establece $P_k = \prod\limits_{j\neq k} \dfrac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Cada P_k es un elemento de E y además

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \neq k \\ 0 \text{ si } j = k \end{cases} \quad (*).$$

   Sea entonces $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0 \Rightarrow \forall P \in E,\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,k} = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Esto demuestra que la familia $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ es libre y por lo tanto, una base de E^*. Las igualdades $(*)$ demuestra entonces que el predual de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de E^* es la familia $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

3. Para $P\in E$, se escribe $\varphi(P)=\int_0^1 P(t)\,dt$. φ es una forma lineal en E y entonces, ya que la familia $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ es una base de E^*, existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\varphi=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_{a_j}$ o aún existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tal que para todo $P\in E$, $\int_0^1 P(t)\,dt=\lambda_0P(a_0)+\cdots+\lambda_nP(a_n)$ (los λ_j es independiente de P). Aplicando esta última igualdad al polinomio P_k, $0\leqslant k\leqslant n$, se obtiene $\lambda_k=\int_0^1 P_k(t)\,dt=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt$.

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kP(a_k),\ \text{donde}\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ \lambda_k=\int_0^1\prod_{j\neq k}\frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt.}$$

Solución del ejercicio 3930 ▲005630

Las cuatro aplicaciones φ_1, φ_2, ψ_1 y ψ_2 son de hecho formas lineales en E.
Se busca primeramente la futura base predual de la familia $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$. Se denota (P_0,P_1,P_2,P_3) esta futura base.
• Se debe tener $\varphi_1(P_2)=\varphi_2(P_2)=\psi_2(P_2)=0$ y $\psi_1(P_2)=1$. Así, P_2 se anula en 0 y en 1 y además $P_2'(1)=0$. Entonces P_2 admite 0 por raíz de orden 1 al menos y 1 por raíz de orden 2 al menos. Porque P_2 es de grado menor o igual que 3, existe una constante a tal que $P_2=aX(X-1)^2=aX^3-2aX^2+aX$, luego $P_2'(0)=1$ proporciona $a=1$, luego $P_2=X(X-1)^2$.
• Igualmente, existe una constante a tal que $P_3=aX^2(X-1)=aX^3-aX^2$ y $1=P_3'(1)=3a-2a$ proporciona $P_3=X^2(X-1)$.
• P_0 admite 1 por raíz doble y por lo tanto, existe dos constantes a y b tales que $P_0=(aX+b)(X-1)^2$, luego igualdades $P_0(0)=1$ y $P_0'(0)=0$ proporcionan $b=1$ y $a-2b=0$. Así, $P_0=(2X+1)(X-1)^2$.
• P_1 admite 0 por raíz doble y existe dos constantes a y b tales que $P_1=(aX+b)X^2$, luego igualdades $P_1(1)=1$ y $P_1'(1)=0$ proporcionan $a+b=1$ y $3a+2b=0$ y entonces $P_1=(-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0=(2X+1)(X-1)^2,\ P_1=(-2X+3)X^2,\ P_2=X(X-1)^2\ \text{y}\ P_3=X^2(X-1).}$$

Demostrar entonces que $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ es una base de E^*. Esta familia es libre porque si $a\varphi_1+b\varphi_2+c\psi_1+d\psi_2=0$, se obtiene aplicando sucesivamente a P_0, P_1, P_2 y P_3, $a=b=c=d=0$. Pero entonces, la familia $(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)$ es una familia libre de E^* de cardinal 4 y por lo tanto, una base de E^*. Su predual es (P_0,P_1,P_2,P_3).

Solución del ejercicio 3931 ▲005631

1 era solución. Se utiliza el hecho de que una unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial si y solo si uno de ellos contiene al otro. Entonces

$$\varphi\psi=0\Rightarrow\ker\varphi\cup\ker\psi=E\Rightarrow\ker\psi\subset\ker\varphi=\ker\varphi\cup\ker\psi=E\ \text{o}\ \ker\varphi\subset\ker\psi=\ker\varphi\cup\ker\psi=E\Rightarrow\varphi=0\ \text{o}\ \psi=0.$$

2a solución. Se supone que $\varphi\psi=0$ y que existe x y y tales que $\varphi(x)\neq0$ (y entonces $\psi(x)=0$) y $\psi(y)\neq0$ (y entonces $\varphi(y)=0$). Entonces $0=\varphi(x+y)\psi(x+y)=(\varphi(x)+\varphi(y))(\psi(x)+\psi(y))=\varphi(x)\psi(y)$, lo cual es una contradicción.

$$\boxed{\forall(\varphi,\psi)\in(E^*)^2,\ (\forall x\in E,\ \varphi(x)\psi(x)=0)\Rightarrow\varphi=0 \text{ o } \psi=0.}$$

Solución del ejercicio 3932 ▲005632

1. Sea $\varphi\in E^*$.

   • ($\Rightarrow$) Se supone que existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tal que $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_n\varphi_n$. Sea $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i$. Entonces $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(x)=0+\cdots+0=0$ y entonces $x\in\ker\varphi$. Se ha demostrado que $\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\subset\ker\varphi$.

   • ($\Leftarrow$) Se supone primero que la familia $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ libre. Se completa eventualmente la familia libre $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ de E^* a una base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\varphi_{n+1},\ldots,\varphi_p)$ de E^* y se denota $(e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_p)$ el predual de la base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$.

   Sea $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$ un elemento de E.

   $$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \varphi_i(x)=0\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0\Leftrightarrow x\in\operatorname{vect}(e_{n+1},\ldots,e_p)$$

   (con la convención usual $\operatorname{vect}(\varnothing)=\{0\}$ en el caso $p=n$). Entonces $\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i=\operatorname{vect}(e_{n+1},\ldots,e_p)$.

   Sea entonces $\varphi\in E^*$. Se define $\varphi=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i$.

   $$\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\subset\ker\varphi\Rightarrow\operatorname{vect}(e_{n+1},\ldots,e_p)\subset\ker\varphi\Rightarrow\forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \varphi(e_j)=0$$
   $$\Rightarrow\forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \lambda_j=0\Rightarrow\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i.$$

   El resultado es, por lo tanto demostrado en el caso donde la familia $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ es libre.

   Si todos los φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, son nulos entonces $\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i=E$, luego $\ker\varphi=E$ y entonces $\varphi=0$. En este caso también, φ es una combinación lineal de φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Si los φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, no son todos nulos y si la familia $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ es ld, se extrae de la familia $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ generatriz de $\operatorname{vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ una base $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m})$ de $\operatorname{vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.

   Se tiene $\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\subset\bigcap_{k=1}^{m}\ker\varphi_{i_k}$, pero por otra parte, todo φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, es una combinación lineal de los φ_{i_k}, $1\leqslant k\leqslant m$, cada $\ker\varphi_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, contiene $\bigcap_{k=1}^{m}\ker\varphi_{i_k}$ y entonces $\bigcap_{k=1}^{m}\ker\varphi_{i_k}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i$.

   Finalmente, $\bigcap_{k=1}^{m}\ker\varphi_{i_k}=\bigcap_{i=1}^{n}\ker\varphi_i\subset\ker\varphi$. Según el estudio del caso donde la familia es libre, φ es una combinación lineal de φ_{i_k}, $1\leqslant k\leqslant m$ y, por lo tanto de los φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$.
   El recíproco se demuestra en todos los casos.

2. Sea φ una forma lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que $P = \ker\varphi$ (en particular φ no es nula). Sean φ_1 la forma lineal $(x,y,z) \mapsto x+y+z$ y φ_2 la forma lineal $(x,y,z) \mapsto 2x+3z$. Entonces la familia (φ_1, φ_2) es una familia libre del dual de $\mathbb{R}^3$ y $D = \ker\varphi_1 \cap \ker\varphi_2$. De acuerdo a 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} / \ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (teoría de haces)},$$

luego

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Una ecuación de P es, por lo tanto $5(x+y+z) - 3(2x+3z) = 0$ o aún $-x+5y-4z = 0$.

Solución del ejercicio 3933 ▲005633

Sea $f : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \end{array}$. Se trata de demostrar que la familia $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es ld si y solo si $\ker(f) \neq \{0\}$.

• Si la familia $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es libre, es una base de E^* (pues $\dim(E^*) = n$). Denotemos $(u_1, \dots, u_n)$ su predual y se denota $(e_1, \dots, e_n)$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Para $1 \leqslant i \leqslant n$, se tiene $f(u_i) = e_i$. Así, la imagen por f de una base de E es una base de $\mathbb{K}^n$ y se sabe entonces que f es un isomorfismo. En particular, $\ker(f) = \{0\}$.

• Si los φ_i son todos nulos, todo vector no nulo x anula cada φ_i. Se supone entonces que la familia $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es ld y que los φ_i no son todos nulos. Se extrae de la familia $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ una base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ (con $1 \leqslant m < n$) de $\text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Se completa la familia libre $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ en una base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \dots, \psi_{n-m})$ de E^*. Se denota $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ es predual. Las formas lineales $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ se anulan todas en e_n y por lo tanto, cada uno de los φ_i se anula en e_n desde que cada uno de los φ_i es una combinación lineal de φ_{i_k}, $1 \leqslant i \leqslant m$.

El vector e_n es, por lo tanto un vector no nulo x tal que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

Solución del ejercicio 3934 ▲005634

La matriz de la familia (f_1, f_2, f_3, f_4) en la base canónica del dual de $\mathbb{R}^4$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$. La matriz A tiene el mismo rango que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (para $2 \leqslant j \leqslant 3$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$) luego que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ y $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$).

• Si $m = 0$, A tiene el mismo rango que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y entonces $\text{rg}(A) = 3$.

• Si $m \neq 0$, A tiene el mismo rango que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3$) luego que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ $(C_4 \leftarrow 2C_4 + (m-2)C_3)$

Entonces, si $m=4$, $\text{rg}(A)=3$ y si m no es ni 0 ni 4, $\text{rg}(A)=4$.

$$\boxed{\text{Si } m \notin \{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=4 \text{ y si } m \in \{0,4\},\ \text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=3.}$$

Solución del ejercicio 3935 ▲005773

1. • Sean P y Q dos polinomios. La función $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ es continua en $[0,+\infty[$ y es despreciable en $+\infty$ delante $\frac{1}{t^2}$ de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados. Entonces la función $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ es integrable en $[0,+\infty[$ y $\varphi(P,Q)$ existe en $\mathbb{R}$.

   • La simetría, la bilinealidad y positividad de la aplicación φ son claras. Además, para $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)\mathrm{e}^{-t}=0 \text{ (función continua positiva de integral nula)}\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0 \Rightarrow P=0 \text{ (polinomio teniendo una infinidad de raíces)}.\end{aligned}$$

   Así, la forma φ es definida y finalmente

$$\boxed{\text{la aplicación } \varphi \text{ es un producto escalar en } E.}$$

2. (a) Sea $n\in\mathbb{N}$. La fórmula de Leibniz permite escribir

$$(X^n\mathrm{e}^{-X})^{(n)}\mathrm{e}^X = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(X^n)^{(n-k)}(\mathrm{e}^{-X})^{(k)}\right)\mathrm{e}^X = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

   En particular, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{grad}(h_n)=n$ (y $\text{dom}(h_n)=(-1)^n$) y se sabe que

$$\boxed{\text{la familia } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una base de } \mathbb{R}[X].}$$

   (b) Sean $P\in E$ y $n\in\mathbb{N}^*$. Sea $A>0$. Las dos funciones $t\mapsto (t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}$ y P son de clase C^1 en el segmento $[0,A]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_0^A P(t)h_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_0^A P(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n)}\,dt = \left[P(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

   Ahora, $(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}$ se puede escribir $Q(t)\mathrm{e}^{-t}$, donde Q es un polinomio y, $P(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}(t)$ tiende a 0, cuando t tiende a $+\infty$ de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados. Por otra parte, la fórmula de Leibniz demuestra que el polinomio Q tiene una valoración al menos igual a 1. Se deduce que la función $t\mapsto P(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}(t)$ se anula en 0. Al hacer tender A hacia $+\infty$, se obtiene

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

   En general, para $0\leqslant k\leqslant n$, las observaciones anteriores se aplican a la función $P^{(k)}(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-k)}$ y por inducción se tiene

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = (-1)^k\int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n\mathrm{e}^{-t})^{(n-k)}\,dt.$$

En particular, para $k=n$ se obtiene $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$. Esta igualdad es aún cierta cuando $n=0$ y se ha demostrado que

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(P,h_n)=\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=(-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

En particular, si $n\in\mathbb{N}^*$ y $\mathrm{grad}(P)<n$, se tiene $P^{(n)}=0$ y entonces $\varphi(P,h_n)=0$. Así, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $h_n\in(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Porque $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{grad}(h_n)=n$, en particular, se deduce que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\varphi(hn,h_k)=0$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la familia } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una base ortogonal del espacio pre-hilbertiano } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

(c) Sea $n\in\mathbb{N}$. Porque $\mathrm{grad}(h_n)=n$ y $\mathrm{dom}(h_n)=(-1)^n$, se tiene $h_n^{(n)}=(-1)^n n!$. La pregunta anterior proporciona entonces

$$\|h_n\|^2=(-1)^n\int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt=n!\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt=n!\Gamma(n+1)=n!^2,$$

y entonces $\|h_n\|=n!$. Así,

$$\boxed{\text{la familia } \left(\frac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una base ortonormada del espacio pre-hilbertiano } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

Solución del ejercicio 3936 ▲005774

1. • Sea $(P,Q)\in E^2$. La aplicación $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ es continua en $]-1,1[$. Luego, la aplicación $t\mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ es acotada en un vecindario de 1 porque es continua en 1 y así cuando t tiende a 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}\times\frac{1}{\sqrt{1-t}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Porque $\frac{1}{2}<1$, se deduce que la aplicación $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ es integrable en un vecindario de 1 a la izquierda. Igualmente, cuando t tiende a 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ y la aplicación $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ es integrable en un vecindario de -1 a la derecha. Finalmente, la aplicación $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ es integrable en $]-1,1[$ y $\varphi(P,Q)$ existe.
   • La simetría, la bilinealidad y la positividad de φ son claras. Además, para $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0 \text{ (función continua, positiva, de integral nula)}\\ &\Rightarrow \forall t\in]-1,1[, P(t)=0\Rightarrow P=0 \text{ (polinomio teniendo una infinidad de raíces).}\end{aligned}$$

   Así, la aplicación φ es definida y finalmente

$$\boxed{\text{la aplicación } \varphi \text{ es un producto escalar en } E.}$$

2. (a) Sea $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. Usando $t=\cos\theta$, se obtiene

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\operatorname{sen}\theta\,d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

Si además, $n \neq p$,

$$\varphi(T_n, T_p) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((n+p)\theta) + \cos((n-p)\theta))\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\operatorname{sen}((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Así, la familia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal. Además, se sabe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{grad}(T_n) = n$ y por lo tanto, se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la familia } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una base ortogonal del espacio pre-hilbertiano } (E, \varphi).}$$

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Cuando $p = n$, la fórmula anterior proporciona

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta))\, d\theta = \begin{cases} \pi \text{ si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

y entonces

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} \text{ si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 3937 ▲005775

1. Demostrar que E es un subespacio de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. La sucesión nula es un elemento de E. Sean $(u, v) \in E^2$ y $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$0 \leqslant (\lambda u + \mu v)^2 = \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu uv + \mu^2 v^2 \leqslant \lambda^2 u^2 + \lambda\mu(u^2 + v^2) + \mu^2 v^2 = (\lambda^2 + \lambda\mu)u^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v^2.$$

Por hipótesis, la serie de término general $(\lambda^2 + \lambda\mu)u_n^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v_n^2$ converge y se deduce que la sucesión $\lambda u + \mu v$ es cuadrado sumable. Se ha demostrado que

$$\boxed{E \text{ es un subespacio vectorial del espacio vectorial } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot).}$$

2. • Sean u y v dos elementos de E. Para todo natural n,

$$|u_n v_n| \leqslant \tfrac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Así, la serie de término general $u_n v_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto, convergente. Esto demuestra que $\varphi(u, v)$ existe en $\mathbb{R}$.

• La simetría, la bilinealidad y la positividad de φ son claras. Además, para $u \in E$,

$$\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

En resumen, la aplicación φ es una forma bilineal, simétrico, definida, positiva y por lo tanto,

$$\boxed{\text{la aplicación } \varphi \text{ es un producto escalar en } E.}$$

Solución del ejercicio 3938 ▲005776

Sea $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tA \times B) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

La aplicación Φ es el producto escalar canónico de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y en particular es un producto escalar. La base canónica de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituida por matrices elementales) es ortonormada para este producto escalar. La aplicación Φ no es un producto escalar en $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Por ejemplo, si $A = iE_{1,1} \neq 0$, entonces ${}^tAA = -E_{1,1}$, luego $\mathrm{tr}({}^tAA) = -1 < 0$.

Solución del ejercicio 3939 ▲005777

Sea N una norma en E verificando $\forall (x,y) \in E^2$ $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.
Es necesario demostrar que la norma N está asociada a un producto escalar B. Si B existe, B es necesariamente definido por

$$\forall (x,y) \in E^2, B(x,y) = \tfrac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Recíprocamente, • Para todo $x \in E$, $B(x,x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))2$ y entonces $\forall x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$, luego $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Además, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$.
• $\forall (x,y) \in E^2$, $B(y,x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x,y)$.
• Verificar que la aplicación B es bilineal.
1) Demostrar que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x+y,z) + B(x-y,z) = 2B(x,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x+y,z) + B(x-y,z) &= \tfrac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2) \\
&= \tfrac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2) - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2) \\
&= \tfrac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2) - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2) \text{ (por hipótesis sobre } N) \\
&= \tfrac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x,z).
\end{aligned}$$

2) Demostrar que $\forall (x,z) \in E^2$, $B(2x,z) = 2B(x,z)$. En primer lugar, $B(0,z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$, luego de acuerdo a 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Demostrar que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x,z) + B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\
&= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (de acuerdo a 1))} \\
&= B(x+y,z) \text{ (de acuerdo a 2))}.
\end{aligned}$$

4) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$.
• Es cierto para $n = 0$ y $n = 1$.
• Sea $n \geqslant 0$. Se supone que $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$ y $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$, entonces

$$B((n+2)x,y) + B(nx,y) = B((n+2)x + nx, y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

y por hipótesis de recurrencia, $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$.
5) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$. El resultado se adquiere por $n \geqslant 0$. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx,y) + B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ y entonces } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y) = B\left(\frac{1}{n}nx,y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x,y\right) \text{ y entonces } B\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}B(x,y).$$

7) Demostrar que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(rx,y) = rB(x,y)$. Sean $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, luego $r = \frac{p}{q}$.

$$B(rx,y) = B\left(\frac{p}{q}x,y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x,y\right) = \frac{p}{q}B(x,y) = rB(x,y).$$

8) Demostrar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y)$. Sea λ un real. Porque $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe una sucesión de racionales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de límite λ. Ahora, la aplicación $\begin{array}{rcl} N : (E,N) & \to & (\mathbb{R},|\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ es continua en E, pues 1-lipschitziana sobre E. Entonces

$$B(\lambda x,y) = B(\lim_{n\to+\infty} r_n x,y) = \lim_{n\to+\infty} B(r_n x,y) = \lim_{n\to+\infty} r_n B(x,y) = \lambda B(x,y).$$

Finalmente, la aplicación B es una forma bilineal simétrica definida positiva y, por lo tanto, un producto escalar. Porque $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$, N es la norma asociada a este producto escalar. Se ha demostrado que

$$\boxed{\text{toda norma que verifica la identidad del paralelogramo es una norma hilbertiana.}}$$

Solución del ejercicio 3940 ▲005778

Sea $i \in [\![1,n]\!]$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j\geqslant 1}(e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$$

y entonces $\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2 = 0$. Se deduce que $\forall j \neq i$, $(e_i|e_j) = 0$. Así, para todo par de índices (i,j) tal que $i \neq j$, se tiene $e_i|e_j = 0$. Así la familia $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es una familia ortonormal.
Queda por comprobar que si $F = \text{vect}(e_1,\dots,e_n)$, entonces $F = E$. Sea x un vector de E. F es un subespacio vectorial de E de dimensión finita. Por tanto, se puede definir la proyección ortogonal $p_F(x)$ de x sobre F. Se sabe que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i.$$

Se deduce que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = \|x\|^2$. Por el teorema de PITÁGORAS,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

y entonces $x = p_F(x)$, lo que demuestra que $x \in F$. Entonces $F = E$ y finalmente

$$\boxed{\text{la familia } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ es una base ortonormada de } E.}$$

Solución del ejercicio 3941 ▲005788

1a solución. Sea $p \geqslant 2$. Demostrar que si la familia $(x_1,\dots,x_p)$ es obtusángulo entonces la familia $(x_1,\dots,x_{p-1})$ es libre.

Sea $(x_1,\dots,x_p)$ una familia obtusángula. Se supone que la familia $(x_1,\dots,x_{p-1})$ es ld.

Existe por lo tanto $(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1})\in\mathbb{R}^{p-1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$ tal que $\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k x_k=0$.

Al multiplicar ambos miembros de la igualdad por -1, se puede suponer que uno de los λ_i al menos es estrictamente positivo. Se define $I=\{k\in[\![1,p-1]\!]\,/\,\lambda_k>0\}$ y $J=\{k\in[\![1,p-1]\!]\,/\,\lambda_k\leqslant 0\}$ (eventualmente J es vacío). Si J es vacío, $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$ y si J es no vacío :

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right\|^2=-\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right)\left(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j\right)=-\sum_{(i,j)\in I\times J}\lambda_i\lambda_j\,(x_i|x_j)\leqslant 0$$
$$\text{(pues }\forall(i,j)\in I\times J,\ (x_i|x_j)<0\text{ y }\lambda_i\lambda_j\leqslant 0).$$

Así, en todos los casos, $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$. Pero esto es imposible porque $\left(\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\right)|x_p=\sum_{i\in I}\lambda_i\,(x_i|x_p)<0$. Se ha demostrado que la familia $(x_1,\dots,x_{p-1})$ es libre y se deduce que $p-1\leqslant n$ o aún $p\leqslant n+1$.

2a solución. Demostrar por inducción sobre $n=\dim E_n\geqslant 1$ que toda familia obtusángulo de E_n tiene un cardinal menor o igual a $n+1$.

• Para $n=1$. Sean x_1, x_2 y x_3 tres vectores de E_1. Se puede identificar estos vectores con reales. Dos de tres reales x_1, x_2 o x_3 tienen el mismo signo y por lo tanto, no se puede tener $x_1x_2<0$ y $x_1x_3<0$ y $x_2x_3<0$. Una familia obtusángula de E_1 por lo tanto tiene un cardinal menor o igual a 2.

• Sea $n\geqslant 1$. Se supone que toda familia obtusángula de un espacio euclidiano de dimensión n tiene un cardinal menor o igual a $n+1$. Sea $(x_1,\dots,x_p)$ una familia obtusángula de E_{n+1}.

Si $p=1$, entonces $p\leqslant n+2$. Se supone de ahora en adelante $p\geqslant 2$.

Se va a construir a partir de esta familia una familia obtusángula de cardinal $p-1$ de un espacio euclidiano de dimensión n.

Sea $F=x_p^{\perp}$. Porque la familia $(x_1,\dots,x_p)$ es obtusángulo, el vector x_p no es nulo y F es un espacio euclidiano de dimensión n. Se denota y_1, $y_2,\dots,y_{p-1}$ las proyecciones ortogonales de los vectores $x_1,\dots,x_{p-1}$ sobre F. Se sabe que

$$\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ y_i=x_i-\frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p.$$

Sea $(i,j)\in[\![1,p-1]\!]$ tal que $i\neq j$.

$$(y_i|y_j)=(x_i|x_j)-2\frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2}+\frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)\,\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4}=(x_i|x_j)-\frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2}<0.$$

Así, la familia $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ es una familia obtusángula de un espacio euclidiano de dimensión n y por hipótesis de inducción $p-1\leqslant n+1$ y entonces $p\leqslant n+2$. El resultado es demostrado por inducción.

Solución del ejercicio 3950 ▲003713

1. Sí, si y solo si $\lambda^2+\mu^2\leqslant 1$.
2. No, disc $=-1$.
3. Sí, $=\frac{5x^2}{12}+3\left(y+\frac{x}{3}\right)^2+4z^2+\left(t+\frac{x}{2}\right)^2$.

Solución del ejercicio 3951 ▲003714

$\mathrm{Spec}(A)=\{6,3,3\}\Rightarrow$ si.

Solución del ejercicio 3952 ▲003715

$(n-1,0)$.

Solución del ejercicio 3954 ▲003717

Recurrencia, $q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i<k}\frac{i+1}{2i}y_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant k}x_i^2+\frac{1}{2k}\Big(\sum_{i\geqslant k}x_i\Big)^2$.

Solución del ejercicio 3957 ▲003720

1.
2.
3. Si $a\in\ker f$, $\ker\tilde{\varphi}=E$.
   Si $a\notin\ker f$ y $q(a)=0$, $\ker\tilde{\varphi}=a^{\perp}$.
   Si $q(a)\neq 0$, $\ker\tilde{\varphi}=\ker(f)\oplus\langle a\rangle$.

Solución del ejercicio 3960 ▲003723

1.
2. $(d-1,0)$ o $(d,0)$.

Solución del ejercicio 3961 ▲003724

Recurrencia sobre n. Sea $(e_1,\dots,e_n)$ la base en la que A es la matriz de q. $\Delta_{n-1}(A)\neq 0$, entonces existen coeficientes $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tales que $u_n=e_n-\sum_{i<n}\alpha_ie_i$ sea q-ortogonal a $e_1,\dots,e_{n-1}$. Entonces A tiene los mismos menores principales que la matriz de q en la base $(e_1,\dots,e_{n-1},u_n)$.

Solución del ejercicio 3962 ▲003725

Para A, con una diagonal fuertemente dominante, recurrencia sobre n.
Sea $(e_1,\dots,e_n)$ la base en la que A es la matriz de q. $\Delta_{n-1}(A)\neq 0$, entonces existen coeficientes $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tales que $u_n=e_n-\sum_{i<n}\alpha_ie_i$ sea q-ortogonal a $e_1,\dots,e_{n-1}$ y es necesario demostrar que $q(u_n)>0$ que resulta de $|\alpha_i|\leqslant 1$ considerando la i-ésima fila de A.

Solución del ejercicio 3963 ▲003726

1.
2.
3. $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ lo es.

Solución del ejercicio 3965 ▲003728

1. No existe solución para $n=2$, tampoco para $n>2$.
2. Para $n=3$ se encuentra $A={}^tCC$, donde C es una columna sin ceros, para $n\geqslant 3$ se obtiene el mismo resultado considerando los bloques 3×3 centrados en la diagonal.

Solución del ejercicio 3966 ▲003729

Sea P ortogonal diagonalizando S : ${}^tPSP = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ y $Y = {}^tPX$.

Se tiene : $q(X) = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_n & & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = -\lambda_1\cdots\lambda_n\Big(\frac{y_1^2}{\lambda_1}+\cdots+\frac{y_n^2}{\lambda_n}\Big).$

Solución del ejercicio 3967 ▲003730

Para $a = 0$, q es definida positiva. Para $a \neq 0$ tomar una base ortonormal comenzando por a ; la matriz de q en esta base es $\mathrm{diag}(\alpha+\beta\|a\|^2,\alpha,\dots,\alpha)$.

Solución del ejercicio 3968 ▲003731

Sea (E_{ij}) la base canónica de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: $E_{12}^2 = 0$, por lo tanto $q(E_{12}) = 0$ y si A es una matriz cualquiera de rango 1, A es equivalente a E_{12}, de donde $q(A) = 0$. Si $A = 0$ se tiene también $q(A) = 0$ y si A es invertible entonces toda matriz es múltiplo de A, por lo tanto $q(A) \neq 0$, en particular $q(I) = 1$, pues $q^2(I) = q(I)$. Se deduce $q(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.
Para A cualquiera, las aplicaciones : $z \mapsto \det(A-zI)$ y $z \mapsto q(A-zI)$ son polinomios de grado 2, con el mismo coeficiente de z^2 y las mismas raíces, por lo tanto son iguales, de donde $q = \det$.
Observación : el mismo razonamiento es aplicable a todo cuerpo limitándose a matrices triangulares, y toda matriz es producto de triangulares (algoritmo de pivote gaussiano).

Solución del ejercicio 3969 ▲003732

Si se reemplaza E por $\mathrm{vect}(x_1,\dots,y_n)$, se puede asumir E de dimensión finita p. Sea $\mathscr{B}$ una base de E, y X,Y y F las matrices de $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)$ y ϕ en $\mathscr{B}$. Se debe probar $\det({}^tXFY)^2 \leqslant \det({}^tXFX)\det({}^tYFY)$. Como F es simétrica positiva, es de la forma $F = {}^tMM$, para cierta matriz cuadrada M, entonces reemplazando X y Y por MX y MY, es suficiente probar $\det({}^tXY)^2 \leqslant \det({}^tXX)\det({}^tYY)$, para todas las matrices X,Y reales rectangulares del mismo tamaño.
Proyectando cada columna de Y en el subespacio vectorial generado por las columnas de X, se puede descomponer $Y = XA+B$, donde A es una matriz cuadrada y B una matriz rectangular de igual tamaño que X tal que ${}^tXB = 0$. Queda por probar : $\det({}^tXXA)^2 \leqslant \det({}^tXX)\det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$, o sea : $\det({}^tA{}^tXXA) \leqslant \det({}^tA{}^tXXA+{}^tBB)$.
Se define $U = {}^tA{}^tXXA$ y $V = {}^tBB$: U y V son matrices reales simétricas positivas del mismo tamaño, a priori cualquiera. Si U es invertible, se escribe $U = {}^tPP$, con P invertible y se es llevado a demostrar que $1 \leqslant \det(I+{}^tP^{-1}VP^{-1}) = \det(I+W)$, con W simétrica positiva, que resulta del hecho de que todos los valores propios de $I+W$ son mayores o iguales que 1. Si U no es invertible, se reemplaza U por $U+\varepsilon I$, con $\varepsilon > 0$, luego se hace tender ε hacia 0^+.
Observación : ¿quizás haya algo más simple ?

Solución del ejercicio 3970 ▲005807

1. Si la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

$$Q(f) = \lambda(a^2+2bc+d^2)+\mu(ad-bc).$$

   Q es un polinomio homogéneo de grado 2 en las coordenadas de f en la base canónica de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ y entonces Q es una forma cuadrática en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. • Si $\lambda=\mu=0$, $r=0$ y $s=(0,0)$. Si $\lambda=0$ y $\mu\neq 0$,

$$Q(f)=\frac{\mu}{4}(a+d)^2-\frac{\mu}{4}(a-d)^2-\frac{mu}{4}(b+c)^2+\frac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

y por lo tanto, $r=4$ y $s=(2,2)$.

• Si $\lambda\neq 0$,

$$Q(f)=\lambda a^2+\mu ad+(2\lambda-\mu)bc+\lambda d^2=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+(2\lambda-\mu)bc+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2$$
$$=\lambda\left(a+\frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2+\frac{2\lambda-\mu}{4}(b+c)^2-\frac{2\lambda-\mu}{4}(b-c)^2.$$

Ahora, las cuatro formas lineales $(a,b,c,d)\mapsto a+\frac{\mu}{2\lambda}d$, $(a,b,c,d)\mapsto d$, $(a,b,c,d)\mapsto b+c$ y $(a,b,c,d)\mapsto b-c$ son linealmente independientes. Entonces

- si $\mu=2\lambda$ $(\neq 0)$, $r=1$, - si $\mu=-2\lambda$ $(\neq 2\lambda)$, $r=3$, - si $|\mu|\neq 2|\lambda|$ $(\neq 0)$, $r=4$.

En particular, si $\lambda=1$ y $\mu=0$, entonces $r=4$ y $s=(3,1)$ y si $\lambda=0$ y $\mu=1$, $r=4$ y $s=(2,2)$.

Solución del ejercicio 3971 ▲005808

En el caso donde E es de dimensión finita, el signo de Q permite concluir inmediatamente. Entonces se supone que E no es de dimensión finita.

Por hipótesis, existe un vector no nulo x_0 tal que $Q(x_0)=0$. Se supone Q de signo constante. Si se reemplaza Q por $-Q$, se supone que Q es positiva. Por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (válido para las formas cuadráticas positivas)

$$\forall y\in E,\ |\varphi(x_0,y)|\leqslant\sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)}=0.$$

Entonces $\forall y\in E,\ \varphi(x_0,y)=0$ y x_0 está en el centro de φ. Porque $x_0\neq 0$, se deduce que φ es degenerada.

En resumen, si Q es de signo constante, φ es degenerado o si aún φ es no degenerada, Q no es de signo constante.

Solución del ejercicio 3972 ▲005809

1. Para todo $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt\right)x_ix_j=\int_a^b\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jf_i(t)f_j(t)\right)dt=$$
$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n x_if_i(t)\right)^2dt\geqslant 0.$$

Entonces Q es una forma cuadrática positiva.

2. Además, para todo $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $Q((x_1,\dots,x_n))=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n x_if_i=0$ (función continua positiva de integral nula). Entonces

$$Q\text{ definida}\Leftrightarrow\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [Q((x_1,\dots,x_n))=0\Rightarrow(x_1,\dots,x_n)=0]$$
$$\Leftrightarrow\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ [\sum_{i=1}^n x_if_i=0\Rightarrow(x_1,\dots,x_n)=0]$$

$(f_1,\dots,f_n)$ libre.

3. En el caso particular considerado, la matriz de Q en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la matriz de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Solución del ejercicio 3973 ▲005810

Pongamos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}$.

Un cálculo por blocs proporciona $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}$, luego

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXS^{-1}X & {}^tXS^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Se deduce que $\det(A)\times\det(S^{-1})\times(-1) = {}^tXS^{-1}X$ ya que $Q(X) = -\det(A) = {}^tX((\det(S))S^{-1})X = {}^tXS'X$, donde $S' = (\det(S))S^{-1}$.

Ahora, la matriz S es definida positiva y por lo tanto, sus valores propios son números reales estrictamente positivos. Los valores propios de la matriz S' son los $\frac{\det(S)}{\lambda}$, donde λ recorre el espectro de S y por lo tanto, la matriz S' es también una matriz simétrica definida positiva. Q es, por lo tanto una forma cuadrática definida positiva.

Solución del ejercicio 3976 ▲005792

El producto escalar usual de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ es definida por

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

1. Determinar el ortogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ en $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Sea $(A,B) \in \mathscr{S}_(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = -\mathrm{tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

y entonces $(A|B) = 0$. Entonces $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ y como además, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left(((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, se ha demostrado que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

2. Así, la proyección ortogonal de M sobre $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ es exactamente la parte antisimétrica $p_a(M)$ de M y la distancia buscada es la norma de $M - p_a(M) = p_s(M)$, con

$$p_s(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$d(M, \mathscr{A}_3(R)) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 1.$$

Solución del ejercicio 3995 ▲003735

$\lambda = 0$, $f = \mathrm{Id}_E$ y $\lambda = -\frac{2}{\|\overrightarrow{v}\|^2}$, $f =$ la simetría con respecto a $\mathrm{vect}(\overrightarrow{v})$.

Solución del **ejercicio 4000** ▲003740

$\varphi(A) = \mathrm{tr}(A\,{}^t\!A)$, entonces para toda matriz P tal que P^tP sea escalar (no nula) se tiene $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$. Estas matrices son las matrices de la forma $P = \lambda M$, con M ortogonal (matrices de similitud).
Recíprocamente, sea P tal que $\varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A)$ y $Q = P^tP$. Se tiene por polarización : $\forall A, B,\ \mathrm{tr}(AQ\,{}^t\!B\,{}^t\!Q^{-1}) = \mathrm{tr}(A\,{}^t\!B)$, por lo tanto para $B = QC$: $\forall A, C\ \ \mathrm{tr}(AQ^tC) = \mathrm{tr}(A^tCQ)$, lo que implica : $\forall C,\ Q^tC = {}^tCQ$ y así que Q es escalar.

Solución del **ejercicio 4010** ▲003750

1.
2. Se razona por inducción sobre $d = \dim(F) = \dim(G)$. Para $d = 0$ no existe nada que probar.
   Para $d \geqslant 1$ se considera $a \in F$ y $b \in G$ unitarios tales que $(a \mid b)$ sea maximal. Sean F_1 la ortogonal de a en F y G_1 la ortogonal de b en G (subespacios vectoriales de dimensiones iguales a $d-1$). La elección de a, b hace que F_1 sea ortogonal a b y G_1 es ortogonal a a, por lo tanto F_1 y G_1 ambos están incluidos en el ortogonal de $\mathrm{vect}(a,b)$. Se puede encontrar un endomorfismo de este ortogonal que intercambia F_1 y G_1, que se completa por la simetría ortogonal en $\mathrm{vect}(a,b)$ que intercambia a y b.

Solución del **ejercicio 4011** ▲003751

1.
2.
3. Sí para ϕ_P.
   Para $\psi_P : \forall A, B,\ \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
   Así $P^tP^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, por lo tanto P^tP es escalar y P es una matriz de similitud.

Solución del **ejercicio 4012** ▲003752

$A = 0$ o $A \in \mathscr{O}^+(n)$.

Solución del **ejercicio 4013** ▲003753

1. $A = P - I$, $P \in \mathscr{O}(n)$.
2. Hadamard.

Solución del **ejercicio 4015** ▲003755

1.
2. Todo $f \in G$ verifica $\det(f) \in \{-1, 1\}$. Recíprocamente, sea $f \in U(E)$ tal que $\det(f) \in \{-1, 1\}$ y $F = \ker(f - \mathrm{Id})$. Demostrar que f se compone de reflexiones recurrentes en $p = \mathrm{codim}F$.
   $p = 0 \Rightarrow f = \mathrm{Id}$. $p = 1 \Rightarrow f$ es una reflexión porque F es un hiperplano y $F^\perp$ es estable por f.
   $0, \dots, p-1 \Rightarrow p$: sea $(e_1, \dots, e_n)$ una BON de E tal que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ es una BON de F y e_1 es un vector propio de f. Sea $e_1' = f(e_1) = \lambda e_1$, y σ, σ' dos reflexiones tales que $\sigma(e_1) = e_2$ y $\sigma'(e_2) = e_1'$.

Entonces $g = \sigma \circ \sigma' \circ f \in U(E)$, $\det(g) = \det(f) \in \{-1, 1\}$ y $\operatorname{codim}(\ker(g - \mathrm{Id})) < p$, por lo tanto g se compone de reflexiones y f también.

Solución del ejercicio 4019 ▲003759

$f = \mathrm{Id} - r$, donde $r(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$. Entonces $f^* \circ f = 2\,\mathrm{Id} - r - r^{-1}$ tiene como valores propios los números $2 - 2\cos(2k\pi/n)$, $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ y $\|f\| = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\cos(\pi/2n) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Solución del ejercicio 4020 ▲003760

Sí. Para $n = 1$ hay igualdad. Para $n = 2$ esto resulta de la densidad de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ en $\mathbb{U}$ (demostración a continuación). Para n cualquiera, es suficiente ver que una flexión cualquiera es límite de reflexiones con coeficientes racionales (aproximar un vector no nulo normal al hiperplano de reflexión mediante una sucesión de vectores racionales).

Densidad de $\mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ en $\mathbb{U}$: para $p \in \mathbb{N}^*$ se considera $z_p = \dfrac{(p^2-1)+2ip}{p^2+1}$. Se tiene $z_p \in \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]$ y $z_p \to 1$, cuando $p \to \infty$. Si $z \in \mathbb{U}$, entonces $d(z, \mathbb{U} \cap \mathbb{Q}[i]) \leqslant d(z, \{z_p^k,\ k \in \mathbb{Z}\}) \leqslant \frac{1}{2}|1 - z_p|$.

Solución del ejercicio 4021 ▲003761

${}^tAA = I \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$. En este caso $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$, por lo tanto f es un cuarto de vuelta. El eje de cuarto de vuelta es generado por $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4022 ▲005486

1. Sea $\mathscr{B}$ una base ortonormada de E y $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ (M es una matriz de tamaño (p, n)). Porque $\mathscr{B}$ es ortonormada, el producto escalar usual de las columnas C_i y C_j es aún $x_i | x_j$. Entonces, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = x_i | x_j$ o aún

$$\boxed{G = {}^tMM.}$$

Se trata entonces de demostrar que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}({}^tMM)$. Esto proviene del hecho que M y ${}^tMM$ tienen el mismo núcleo. En efecto, para $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \ker M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tM \times MX = 0 \Rightarrow ({}^tMM)X = 0 \Rightarrow X \in \ker({}^tMM)$$

y

$$X \in \ker({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow ||MX||^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$$
$$\Rightarrow X \in \ker M.$$

Así, $\ker(M) = \ker({}^tMM) = \ker(G(x_1, \dots, x_n))$. Pero por el teorema de rango, $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(G(x_1, \dots, x_n))$.

$$\boxed{\operatorname{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n).}$$

2. Si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es ld, $\mathrm{rg}(G)=\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)<n$, y entonces, ya que G es una matriz cuadrada de tamaño n, $\gamma(x_1,\dots,x_n)=\det(G)=0$. Si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es libre, $(x_1,\dots,x_n)$ genera un espacio F de dimensión n. Sean $\mathscr{B}$ una base ortonormada de F y M la matriz de la familia $(x_1,\dots,x_n)$ en $\mathscr{B}$. De acuerdo a 1), se tiene $G={}^tMM$ y por otro lado, M es una matriz cuadrada. Así,

$$\gamma(x_1,\dots,x_n)=\det({}^tMM)=\det({}^tM)\det(M)=(\det M)^2>0.$$

3. Se escribe $x=x-p_F(x)+p_F(x)$. La primera columna de $\gamma(x,x_1,\dots,x_n)$ se escribe :

$$\begin{pmatrix}||x||^2\\ x|x_1\\ x|x_2\\ \vdots\\ x|x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}||x-p_F(x)+p_F(x)||^2\\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_1\\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_2\\ \vdots\\ x-p_F(x)+p_F(x)|x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}||x-p_F(x)||^2\\ 0|x_1\\ 0|x_2\\ \vdots\\ 0|x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}||p_F(x)||^2\\ p_F(x)|x_1\\ p_F(x)|x_2\\ \vdots\\ p_F(x)|x_n\end{pmatrix}.$$

(en la primera línea, es el teorema de PITÁGORAS y en las siguientes, $x-p_F(x)\in F^\perp$). Por linealidad con respecto a la primera columna, $\gamma(x,x_1,\dots,x_n)$ es la suma de dos determinantes. El segundo es $\gamma(p_F(x),x_1,\dots,x_n)$ y es nulo porque la familia $(p_F(x),x_1,\dots,x_n)$ es ld. Se desarrolla el primero siguiendo su primera columna y se tiene :

$$\gamma(x,x_1,\dots,x_n)=||x-p_F(x)||^2\gamma(x_1,\dots,x_n),$$

lo que proporciona la fórmula deseada.

$$\boxed{\forall x\in E,\ d(x,F)=\|x-p_F(x)\|=\sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}.}$$

Solución del ejercicio 4023 ▲005488

Un vector generador D es $\overrightarrow{u}=(2,1,3)$. Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$p((x,y,z))=\frac{(x,y,z)|(2,1,3)}{||(2,1,3)||^2}(2,1,3)=\frac{2x+y+3z}{14}(2,1,3).$$

Se deduce que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}p=P=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&2&6\\2&1&3\\6&3&9\end{pmatrix}$, luego $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}s=2P-I=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&2&6\\2&-6&3\\6&3&2\end{pmatrix}$. Más generalmente, la matriz de la proyección ortogonal sobre el vector unitario (a,b,c) en la base canónica ortonormada es $P=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}$ y la matriz de la proyección ortogonal sobre el plano $ax+by+cz=0$ en la base canónica ortonormada es $I-P=\begin{pmatrix}1-a^2&-ab&-ac\\-ab&1-b^2&-bc\\-ac&-bc&1-c^2\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4024 ▲005494

1a solución.

$$\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx = \frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab = \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36}$$
$$= \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geqslant\frac{4}{225},$$

con igualdad si y solo si $a+\frac{1}{2}(3b-1)=b+\frac{1}{5}=0$ o aún $b=-\frac{1}{5}$ y $a=\frac{4}{5}$.

$\boxed{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx \text{ es mínimo para } a=\frac{4}{5} \text{ y } b=-\frac{1}{5} \text{ y este mínimo vale } \frac{4}{225}.}$

2a solución. $(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ es un producto escalar en $\mathbb{R}_4[X]$ y $\int_0^1 (x^4-ax-b)^2dx$ es, para este producto escalar, el cuadrado de la distancia del polinomio X^4 en el polinomio de grado menor o igual que 1, $aX+b$. Se debe calcular $\inf\left\{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ que es el cuadrado de la distancia de X^4 a $F=\mathbb{R}_1[X]$. Se sabe que este límite inferior es un mínimo, alcanza una y solo una vez cuando $aX+b$ es la proyección ortogonal de X^4 sobre F. Encontrar una base ortonormal de F. El ortonormalizado (P_0,P_1) de $(1,X)$ sirve. $||1||^2=\int_0^1 1\,dt=1$ y $P_0=1$. Luego $X-(X|P_0)P_0=X-\int_0^1 t\,dt=X-\frac{1}{2}$, y como $||X-(X|P_0)P_0||^2=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $P_1=2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1)$. La proyección ortogonal de X^4 sobre F es entonces $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$, con $(X^4|P_0)=\int_0^1 t^4\,dt=\frac{1}{5}$ y $(X^4|P_1)=\sqrt{3}\int_0^1 t^4(2t-1)\,dt=\sqrt{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{2\sqrt{3}}{15}$. Entonces, la proyección ortogonal de X^4 sobre F es $\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1)=\frac{1}{5}(4X-1)$. El mínimo buscado es entonces $\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2\,dt=\cdots=\frac{4}{225}$.

Solución del ejercicio 4025 ▲005504

Denotemos P el plano de ecuación $x+y=0$ en la base $\mathscr{B}=(i,j,k)$. P es el plano de vector normal $n=i+j$.

1. Sea s la simetría ortogonal con respecto al plano P' de ecuación $x-y+z=0$. $s(P)$ es el plano de vector normal $s(n)$. Por tanto, el vector n está en P' y entonces $s(n)=n$, luego $s(P)=P$.

   $\boxed{s(P) \text{ es el plano } P.}$

2. Denotemos σ la simetría ortogonal con respecto al vector $u=(1,1,1)$. $\sigma(P)$ es el plano de vector normal

   $$\sigma(n)=2\frac{n\cdot u}{||u||^2}u-n=2\tfrac{2}{3}(1,1,1)-(1,1,0)=\tfrac{1}{3}(1,1,4).$$

   $\boxed{\sigma(P) \text{ es el plano de ecuación } x+y+4z=0.}$

3. Denotemos r la rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ alrededor del vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. $r(P)$ es el plano de vector normal

$$\begin{aligned}
r(n) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)n + \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)(n.u)u + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)u\wedge n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3+2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3}, 3+2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-1)) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-1)).
\end{aligned}$$

$$\boxed{r(P) \text{ es el plano de ecuación } (1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})y+2(\sqrt{2}-1)z=0.}$$

Solución del ejercicio 4026 ▲005509

Denotemos p la proyección sobre (P), paralelamente a (Δ).
• Determinar un sistema de referencia de (D).

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=-x+1 \\ 2y+z=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ z=-3x+2 \end{cases}$$

(D) es la recta de referencia $(A,\overrightarrow{u})$, donde $A(0,-1,2)$ y $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$.
• (Δ) es dirigida por el vector $\overrightarrow{u'}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ no es colineal con $\overrightarrow{u'}$ y entonces (D) no es paralela a (Δ). Se deduce que $p(D)$ es una recta. Más precisamente, $p(D)$ es la recta de intersección del plano (P) y del plano (P') conteniendo (D) y paralela a (Δ). Determinar una ecuación de (P'). Un marco de referencia (P') es $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}')$. Entonces

$$M(x,y,z)\in(P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

Finalmente

$$\boxed{p(D) \text{ es la recta cuyo sistema de ecuaciones cartesianas es } \begin{cases} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 4027 ▲005520

Denotemos p la proyección ortogonal en (P). Un marco de referencia (D) es $(A,\overrightarrow{u})$, donde $A(0,-1,2)$ y $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. Un vector normal a (P) es $\overrightarrow{n}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{n}$ no son colineales y por lo tanto, $p(D)$ es una recta en el plano (P). Más precisamente, $p(D)$ es la intersección del plano (P) y del plano (P') conteniendo (D) y perpendicular a (P). Un marco de referencia (P') es $(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$. Entonces

$$M(x,y,z)\in(P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0 \Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

La proyección ortogonal de (D) sobre (P) es la recta de ecuaciones $\begin{cases} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6. \end{cases}$

Solución del ejercicio 4044 ▲005484

La familia (V_1,V_2) es claramente libre y por lo tanto, una base de F. Su ortonormalizado (e_1,e_2) es una base ortonormada de F. $||V_1|| = \sqrt{1+4+1+1} = \sqrt{7}$ y $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}V_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$. $(V_2|e_1) = \frac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1) = \frac{4}{\sqrt{7}}$, luego $V_2-(V_2|e_1)e_1 = (0,3,1,-1)-\frac{4}{7}(1,2,-1,1) = \frac{1}{7}(-4,13,11,-11)$, luego $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.

Una base ortonormada de F es (e_1,e_2), donde $e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ y $e_2 = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.

Sea $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in F^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z,t)\in(V_1,V_2)^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3y+z-t=0. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 4045 ▲005500

1. La simetría, la bilinealidad y la positividad son claras. Sea entonces $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P|P=0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\,dt=0 \\ &\Rightarrow \forall t\in[0,1],\ P^2(t)=0 \text{ (función continua, positiva, de integral nula)} \\ &\Rightarrow P=0 \text{ (polinomio teniendo una infinidad de raíces)}. \end{aligned}$$

   Así, la aplicación $(P,Q)\mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ es un producto escalar en $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Para verificar que la familia $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es el ortonormalizado de SCHMIDT de la base canónica de E, verificar que

   (a) $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\text{vect}(L_0,L_1,\dots,L_p)=\text{vect}(1,X,\dots,X^p)$,

   (b) La familia $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es ortonormal,

   (c) $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $L_p|X^p>0$.

   Para a), se denota que L_p es un polinomio de grado p (y con coeficiente principal $\frac{(2p)!}{p!}$).
   Así, $(L_0,L_1,\dots,L_p)$ es una base de $\mathbb{R}_p[X]$, o aún, $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\text{vect}(L_0,L_1,\dots,L_p)=\text{vect}(1,X,\dots,X^p)$.
   Sea $p\in[\![0,n]\!]$. Sea P un polinomio de grado menor o igual que p. Si $p\geqslant 1$, una integración por partes proporciona :

$$\begin{aligned} L_p|P &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p)}P(t)\,dt = \left[((t^2-1)^p)^{(p-1)}P(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt \\ &= -\int_{-1}^1 ((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\,dt. \end{aligned}$$

En efecto, 1 y -1 son raíces de orden p de $(t^2-1)^p$ y por lo tanto, de orden $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$, para $0 \leqslant k \leqslant p$ y, en particular, raíces de cada $((t^2-1)^p)^{(k)}$, para $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Reiterando, se obtiene para todo $k \in [\![0,p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^{1} ((t^2-1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t)\, dt$ y para $k=p$, se obtiene finalmente $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p P^{(p)}(t)\, dt$, esta fórmula es aún válida para $p=0$.

Sean p y q dos enteros tales que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. De acuerdo con lo anterior, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\, dt = 0$, pues $q = \mathrm{gr}(L_q) < q$. Así, la familia $(L_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es, por lo tanto una familia ortogonal de $n+1$ polinomios todos no nulos y por lo tanto, es una base ortogonal de $\mathbb{R}_n[X]$. Se deduce que la familia $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es una base ortonormada de $\mathbb{R}_n[X]$.

En fin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p (t^p)^{(p)}\, dt = p! \int_{-1}^{1} (1-t^2)^p\, dt > 0$.

Se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la familia } \left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leqslant p\leqslant n} \text{ es el ortonormalizado de la base canónica de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Calculemos $\|L_p\|$. Se observa que $L_p \in (L_0,\ldots,L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Así,

$$\begin{aligned}
||L_p||^2 &= L_p|L_p = L_p|\mathrm{dom}(L_p)X^p \text{ (pues } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp) \\
&= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^{1} (1-t^2)^p\, dt = 2(2p)! \int_0^1 (1-t^2)^p\, dt \\
&= 2(2p)! \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 u)^p (-\operatorname{sen} u)\, du = 2(2p)! \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p+1} u\, du \\
&= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (integral de WALLIS)} \\
&= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (a revisar)} \\
&= \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2.
\end{aligned}$$

Entonces, $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} 2^p p!$.

Se deduce que la familia $\left(\sqrt{\frac{2p+1}{2}} \frac{1}{2^p p!} ((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0\leqslant p\leqslant n}$ es una base ortonormada de $\mathbb{R}_n[X]$ (para el producto escalar considerado).

Solución del ejercicio 4046 ▲005772

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\ell_n = (X^2-1)^n$ de manera que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n es un polinomio de grado n, pues ℓ_n es de grado $2n$.

1. (a) Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $P \in E$. Una integración por partes proporciona

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\, dx = \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\, dx.$$

Ahora, -1 y 1 son raíces de orden n del polinomio ℓ_n y entonces, para todo $k \in [\![0,n]\!]$, -1 y 1 son raíces de orden $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ y en particular raíces de $(\ell_n)^{(k}$, para $k \in [\![0,n-1]\!]$. Entonces

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Más generalmente, si para un entero $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left(\left[(\ell_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que para todo entero $k \in [\![0,n]\!]$,

$$(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx.$$

En particular

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx \quad (*).$$

Esta última igualdad es aún válida para $n=0$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\,dx.}$$

Sean entonces n y p dos enteros naturales tales que $0 \leqslant p < n$. Porque $\text{grad}(L_p) = p < n$, se tiene $(L_n|L_p) = 0$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\text{La familia } (L_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ es una base ortogonal del espacio } (\mathbb{R}[X],\ |\ ).}$$

(b) Se aplica ahora la fórmula $(*)$ en el caso particular $P = L_n$. Se obtiene

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)dx = 2\times(2n)! \int_{0}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\times(2n)! \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 t)^n(-\operatorname{sen} t)dt \\ &= 2\times(2n)! \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} t\,dt = 2\times(2n)! W_{2n+1} \text{ (integral de WALLIS).}\end{aligned}$$

Se « sabe » que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3}W_1 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. Se obtiene entonces

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!} \times 2 \times (2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\frac{2^n n!}{2n+1}.}$$

Se deduce que la familia $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormada de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. Para $n \in \mathbb{N}$, se establece $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

2. La familia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormada de $\mathbb{R}[X]$. Cada P_n, $n \in \mathbb{N}$, es de grado n y entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{vect}(P_0,\dots,P_n) = \text{vect}(1,X,\dots,X^n)$ y además, para $n \in \mathbb{N}$

$$P_n|X^n = \frac{1}{\text{dom}}((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\text{dom}(P_n)}(P_n|P_n)$$

pues $P_n \in (P_0,\dots,P_{n-1})^\perp = (1,X,\dots,X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Esto demuestra que $P_n|X^n > 0$.

El ortonormalizado de la base canónica de $\mathbb{R}[X]$ es la familia de polinomios de LEGENDRE $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución del ejercicio 4047 ▲005779

1. La existencia, la bilinealidad, la simetría y la positividad son inmediatas. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\Phi(P,P) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0$$

(función continua positiva de integral nula). Ahora, la función f es continua, positiva en $[0,1]$ y no es nula. Entonces la función f es estrictamente positiva en un intervalo abierto no vacío incluido en el segmento $[0,1]$. Así, el polinomio P tiene una infinidad de raíces y finalmente $P = 0$.

La aplicación Φ es un producto escalar en $\mathbb{R}[X]$.

2. El ortonormalizado de la base canónica de $\mathbb{R}[X]$ responde la pregunta.
3. Sea n un entero natural no nulo. El polinomio $P_n \in (P_0,\dots,P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Sea p el número de raíces reales de orden impar del polinomio P_n. Sean $a_1,\dots,a_p$ estas raíces (dos a dos distintos, reales y de orden impar) en el caso donde $p \geqslant 1$.
Si $p \geqslant 1$, se establece $Q = (X-a_1)\cdots(X-a_p)$ y si $p = 0$, se establece $Q = 1$.
Si $p < n$, el polinomio Q es ortogonal a P_n, pues es de grado estrictamente menor que el grado de P_n. Por otra parte, en vista de la definición de Q, la función $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ es continua en $[0,1]$, de signo constante en $[0,1]$, de integral nula en $[0,1]$. La función $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ es, por lo tanto nula. Se deduce que el polinomio P_n es el polinomio nulo, pero no lo es. Entonces $p = n$, lo que significa que el polinomio P_n tiene n raíces reales simples.

Solución del ejercicio 4048 ▲005789

Si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es ld, la desigualdad es verdadera.
Si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es libre, se puede considerar $B_0 = (e_1,\dots,e_n)$ el ortonormalizado de SCHMIDT de la familia $(x_1,\dots,x_n)$. Los conceptos básicos B_0 y B son las bases ortonormadas de E y entonces

$$|\det{}_B(x_1,\dots,x_n)| = |\det{}_{B_0}(x_1,\dots,x_n)| = \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^n \|x_k\|\|e_k\| \text{ (por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ)}$$

$$= \prod_{k=1}^n \|x_k\|.$$

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ |\det_B(x_1,\dots,x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (desigualdad de HADAMARD).}}$$

Luego, – si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es ld, se tiene igualdad si y solo si uno de los vectores x_k es nulo
– si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es libre, se tiene igualdad si y solo si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\|e_k\|$.
Los casos de igualdad de la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ es conocido, se tiene igualdad si y solo si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, x_k es colineal a e_k o aún si y solo si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es ortogonal.
En resumen, la desigualdad de HADAMARD es una igualdad si y solo si la familia $(x_1,\dots,x_n)$ es ortogonal libre o si uno de los vectores es nulo.

Solución del ejercicio 4049 ▲005790

Esto es el ejercicio 4048.

Solución del ejercicio 4050 ▲005806

1. **1a solución.** La matriz de la forma cuadrática Q en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

   El polinomio característico de A es

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X)\left(X^2+8X-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}X-2\right) - 2\left(-2X+\frac{5}{4}\right)$$
$$= -X^3-6X^2+\frac{45}{2}X = -X\left(X^2+6X-\frac{45}{2}\right).$$

   Porque A es realmente simétrica, se sabe que los valores propios de A son reales. χ_A admite por raíces 0 y dos reales no nulos de signos opuestos (porque su producto vale $-\frac{45}{2}$). Así, el rango y la firma de Q son

$$\boxed{r = 2 \text{ y } s = (1,1).}$$

   2a solución. Se efectúa una reducción de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x,y,z)) &= 2x^2-2y^2-6z^2+3xy-4xz+7yz = 2x^2+x(3y-4z)-2y^2+7yz-6z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}y-z\right)^2 - 2y^2+7yz-6z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}y^2+10yz-8z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y-\frac{8}{5}z\right)^2. \end{aligned}$$

   Las formas lineales $(x,y,z) \mapsto x+\frac{3}{4}y-z$ y $(x,y,z) \mapsto y-\frac{8}{5}z$ son linealmente independiente, se encuentra el hecho de que Q es de rango $r=2$ y de signo $s=(1,1)$. La forma cuadrática Q es degenerada y no es ni positiva ni negativa.

2. La matriz de Q en la base canónica (i,j,k) es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. El número 4 es valor propio de A y como A es diagonalizable, 4 es valor propio de orden $\dim(\ker(A-4I_3)) = 3-\mathrm{rg}(A-4I_3) = 2$. El último valor propio λ es dado por $4+4+\lambda = \mathrm{tr}(A) = 9$ y ? $= 1$. Así, $\mathrm{Sp}(A) = (1,4,4)$.

   Los tres valores propios de A son estrictamente positivos y por lo tanto, la forma cuadrática Q es de rango 3 y de signo $(3,0)$.

   $$\boxed{Q \text{ es definida positiva.}}$$

3. Se efectúa una reducción de GAUSS.

   $$Q((x,y,z,t)) = xy+yz+zt+tx = (x+z)(y+t) = \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x-y+z-t)^2.$$

   Como las dos formas lineales $(x,y,z,t) \mapsto x+y+z+t$ y $(x,y,z,t) \mapsto x-y+z-t$ son linealmente independientes, la forma cuadrática Q es de rango $r=2$ y de signo $s=(1,1)$.

4. Efectuar una reducción de GAUSS.

   $$\begin{aligned} Q((x,y,z,t)) &= x^2+(4+\lambda)y^2+(1+4\lambda)z^2+\lambda t^2+4xy+2xz+4(1-\lambda)yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda y^2+4\lambda z^2+\lambda t^2-4\lambda yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+zt = (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+\frac{1}{4}(z+t)^2-\frac{1}{4}(z-t)^2. \end{aligned}$$

   Si $\lambda < 0$, la forma cuadrática Q es de rango 4 y de signo $(2,2)$.
   Si $\lambda = 0$, la forma cuadrática Q es de rango 3 y de signo $(2,1)$.
   Si $\lambda > 0$, la forma cuadrática Q es de rango 4 y de signo $(3,1)$.

5. **1a solución.** La matriz de la forma cuadrática Q en la base canónica es $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Los valores propios de A son $-\frac{1}{2}$ que es de orden 4 y 2 que es valor propio simple. Entonces, el signo de la forma cuadrática Q es

   $$\boxed{s = (1,4).}$$

   2a solución. Efectuando una reducción de GAUSS.

   $$\begin{aligned} Q((x_1,\dots,x_5)) &= x_1x_2+x_1(x_3+x_4+x_5)+x_2(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5 \\ &= (x_1+x_3+x_4+x_5)(x_2+x_3+x_4+x_5)-(x_3+x_4+x_5)^2+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\tfrac{1}{4}(x_1-x_2)^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2-x_3x_4-x_3x_5-x_4x_5 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\tfrac{1}{4}(x_1-x_2)^2-\left(x_3+\tfrac{1}{2}x_4+\tfrac{1}{2}x_5\right)^2-\tfrac{3}{4}x_4^2-\tfrac{1}{2}x_4x_5-\tfrac{3}{4}x_5^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2-\tfrac{1}{4}(x_1-x_2)^2-\left(x_3+\tfrac{1}{2}x_4+\tfrac{1}{2}x_5\right)^2-\tfrac{3}{4}\left(x_4-\tfrac{1}{3}x_5\right)^2-\tfrac{5}{6}x_5^2, \end{aligned}$$

   y se reencuentra $s=(1,4)$.

6. $Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n)^2$ y entonces

   $$\boxed{r = 1 \text{ y } s = (1,0).}$$

7. Para $n \geqslant 2$, $Q((x_1,\dots,x_n)) = \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i+1)x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i-1)x_i\right)^2$. Entonces

$$\boxed{r = 2 \text{ y } s = (1,1)}$$

porque las dos formas lineales $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i+1)x_i$ y $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i-1)x_i$ son independientes para $n \geqslant 2$.

8. Porque la matriz de Q en la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Q((x_1,\dots,x_n)) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + \cdots + \sum_{n-1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j + x_n^2 \\ &= (x_1+\cdots+x_n)^2 + (x_2+\cdots+x_n)^2 + \cdots + (x_{n-1}+x_n)^2 + x_n^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{Q \text{ es, por lo tanto definida positiva.}}$$

Solución del ejercicio 4051 ▲005811

1. (Cuando x^2 y y^2 tienen los mismos coeficientes, pensar en hacer una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$) Usando $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ y $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, se obtiene
$$x^2+10xy+y^2 = \tfrac{1}{2}(X+Y)^2 + 5(X+Y)(X-Y) + \tfrac{1}{2}(X-Y)^2 = 6X^2 - 4Y^2.$$
Así, si se denota (i,j) la base canónica de $\mathbb{R}^2$, luego $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ y $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, se tiene
$$x^2+10xy+y^2 = Q(xi+yj) = Q(Xe_1+Ye_2) = 6X^2-4Y^2.$$

2. La matriz de Q en la base canónica (i,j) de $\mathbb{R}^2$ es $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Los dos números 5 y 10 tienen una suma igual a $15 = \mathrm{tr}(A)$ y un producto igual a $50 = \det(A)$ y son, por lo tanto los valores propios de A. Entonces se sabe que en una base ortonormada (e_1,e_2) de vectores propios de A asociada a la familia de valores propios $(5,10)$, se tiene $Q(Xe_1+Ye_2) = 5X^2+10Y^2$. Determinar una tal base.
$(A-5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y=0$ y entonces $\ker(A-5I_2) = \mathrm{vect}(e_1)$, donde $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, luego $\ker(A-10I_2) = (\ker(A-5I_2))^\perp = \mathrm{vect}(e_2)$, donde $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
Entonces, si $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $u = xi+yj = Xe_1+Ye_2$ y $q(u) = 6x2+4xy+9y2 = 5X^2+10Y^2$. Además, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$ y $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)$.

3. La matriz de Q en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9-X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-8X-12) - \sqrt{6}(-\sqrt{6}X - 6\sqrt{6}) + 5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X - 42\sqrt{2})$$
$$= -X^3 + 12X^2 + 36X - 432 = -(X-6)(X+6)(X-12).$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A-6I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 3y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -12x - 4\sqrt{6}y = 0 \\ 12\sqrt{2}x + 8\sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}(-\sqrt{\frac{3}{2}}x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}z \\ y = -\sqrt{3}z, \end{cases}$$

y $\ker(A-6I_3) = \operatorname{vect}(e_1)$, donde $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)$. Igualmente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A+6I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 15y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y \\ 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -\sqrt{2}x \end{cases}$$

y $\ker(A+6I_3) = \operatorname{vect}(e_2)$, donde $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -\sqrt{2})$. En fin $\ker(A-12I_3) = \operatorname{vect}(e_3)$, donde

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Así, si se establece $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, entonces $PA^tP = \operatorname{diag}(6, -6, 12)$ o aún

$$Q(Xe_1 + Ye_2 + Ze_3) = 6X^2 - 6Y^2 + 12Z^2, \text{ donde } \operatorname{Mat}_{(i,j,k)}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 4052 ▲005812

---

1. Sea P un elemento de E. De acuerdo a un teorema de crecimientos comparados, $P(k)P(-k)\mathrm{e}^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ y entonces $Q(P)$ existe.
   Para todo elemento P de E, $Q(P) = B(P,P)$, donde B es la forma bilineal simétrica definida en E por
   $$\forall (P_1,P_2) \in E^2,\ B(P_1,P_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(P_1(k)P_2(-k) + P_1(-k)P_2(k))\mathrm{e}^{-k}\right)$$
   y entonces Q es una forma cuadrática en E.
2. Sea F el subespacio vectorial de E cuyos elementos son los polinomios pares y G el subespacio vectorial de E cuyos elementos son los polinomios impares. F y G son suplementarios en E.
   Sea P es un polinomio par y no nulo. En primer lugar, $Q(P)\ \sum_{k=0}^{+\infty}(P(k))^2\mathrm{e}^{-k} \geqslant 0$. Además, como P no puede admitir ningún entero natural como raíz, se tiene más precisamente $Q(P) > 0$. Igualmente, si P es impar y no nulo, $Q(P) < 0$.
   Así, la restricción de Q a F (resp. G) es definida positiva (resp. negativa). En fin, si P_1 es par y P_2 es impar, se tiene
   $$\begin{aligned} B(P_1,P_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(-k)\mathrm{e}^{-k} = -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(k)\mathrm{e}^{-k} \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} P_1(-k)P_2(k)\mathrm{e}^{-k} = -B(P_2,P_1) = -B(P_1,P_2), \end{aligned}$$
   y entonces $B(P_1,P_2) = 0$ (F y G son ortogonales para B).
   Existe una base de F en la que $Q_{|F}$ es combinación lineal con coeficientes estrictamente positivos de cuadrados de formas lineales linealmente independientes en número igual a $\dim(F)$ e igualmente existe una base de G en la que $Q_{|G}$ es una combinación lineal con coeficientes estrictamente negativos de cuadrados de formas lineales linealmente independientes en número igual a $\dim(G)$. Ahora, si P es un polinomio arbitrario con partes pares e impares P_1 y P_2 respectivamente,
   $$Q(P) = Q(P_1+P_2) = Q(P_1) + 2B(P_1,P_2) + Q(P_2) = Q_{|F}(P_1) + Q_{|G}(P_2).$$
   Entonces la unión de las dos bases anteriores es una base de E en la que Q es combinación lineal de cuadrados de formas lineales linealmente independientes en la que $\dim(F) = E\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ coeficientes son estrictamente positivos y $\dim(G) = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ son estrictamente negativos. Finalmente,
   $$\boxed{Q \text{ es no degenerada de signo } s = \left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).}$$

Solución del ejercicio 4054 ▲003695

$\overrightarrow{x} = -\frac{\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} + \lambda\overrightarrow{a}$.

Solución del ejercicio 4055 ▲003696

$$p = [\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}] \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = p\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} = p\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u} = p\overrightarrow{a} \end{cases} \quad \text{y } [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = p^2.$$

si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]<0$: sin soluciones.
si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$ y $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})>1$: sin soluciones.
si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$ y $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\leqslant 1$: una infinidad de soluciones.
si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]>0$: 2 soluciones.

Solución del ejercicio 4056 ▲003697

3. $G=\mathrm{tr}(F)I-{}^tF$.

Solución del ejercicio 4058 ▲003699

$abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=abc\sqrt{(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)}$.

Solución del ejercicio 4060 ▲003701

1. $f(\overrightarrow{x})=(\overrightarrow{x}\,|\,\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}+\cos\alpha(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x})\wedge\overrightarrow{u}+\operatorname{sen}\alpha(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x})$.
2. $M=(\cos\alpha)I+(1-\cos\alpha)\begin{pmatrix}a^2&ab&ac\\ab&b^2&bc\\ac&bc&c^2\end{pmatrix}+\operatorname{sen}\alpha\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4062 ▲003703

Para $f,g\in\mathscr{O}^+(\mathbb{R}^3)$, f y g tienen la misma matriz reducir en una base ortonormada adecuada, por lo tanto son conjugados en $\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$. h no es siempre positivo pues las bases pueden no tener la misma orientación (ex : dos rotaciones inversas). Para $f,g\in\mathscr{O}^-(\mathbb{R}^3)$, considerar $-f$, $-g$.

Solución del ejercicio 4063 ▲003704

3. $\pi/2,\pi/2,\pi;\quad -\pi/2,\alpha,\pi/2$.

Solución del ejercicio 4065 ▲003706

1.
2. matriz en una *bond*.
3. $f=2(h+\mathrm{Id})^{-1}-\mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 4066 ▲003707

1. $f(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}$, con $\overrightarrow{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$.
3. Eje dirigido por $\overrightarrow{u}$, $\cos\theta=\dfrac{1-\|\overrightarrow{u}\|^2}{1+\|\overrightarrow{u}\|^2}$, $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{-2\|\overrightarrow{u}\|}{1+\|\overrightarrow{u}\|^2}$.
2. $\overrightarrow{y}=\dfrac{\overrightarrow{x}+(\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}}{1+\|\overrightarrow{u}\|^2}$.

Solución del ejercicio 4067 ▲003708

1.
2. $g(\overrightarrow{x})=(\cos\alpha)\overrightarrow{x}+(1-\cos\alpha)\dfrac{(\overrightarrow{a}\,|\,\overrightarrow{x})\overrightarrow{a}}{\alpha^2}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x})}{\alpha}$.

Solución del ejercicio 4068 ▲003709

1. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Rotación alrededor de $(1,1,1)$ de ángulo $\arccos(\frac{11}{14})$.

Solución del ejercicio 4069 ▲003710

1. Se tiene
$$ {}^tMM = I \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2 = 1 \text{ y } ab+bc+ca = 0), $$
y
$$ \det(M) = 1 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = 1. $$
Observando que
$$ (a^3+b^3+b^3-3abc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca), $$
se deduce que (a)$\Leftrightarrow$ (b)$\Leftrightarrow$ $(a+b+c = 1$ y $ab+ac+bc = 0)$, de donde, el polinomio P.
Por tanto, P tiene tres raíces reales si y solo si $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{4}{27}$(estudio de la función asociada), de donde la equivalencia con la condición (c).
2. Se ve en la matriz que $(1,1,1)$ es propio para el valor propio $a+b+c$. Si $M \in SO(3)$, es, por lo tanto (la identidad o) una matriz de rotación a lo largo del eje $\mathbb{R}(1,1,1)$. El ángulo θ de la rotación verifica entonces $\mathrm{tr}(M) = 2\cos(\theta)+1$, de donde $|\theta| = \arccos\frac{3a-1}{2}$.
3. El conjunto es el de todas las rotaciones de eje $(1,1,1)$. Es un grupo isomorfo a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 4070 ▲003711

1. rotación alrededor de $(1,0,1)$ de ángulo $-\arccos(1/3)$.
2. rotación alrededor de $(-3,1,1)$ de ángulo $-\arccos(7/18)$.
3. semi-vuelta alrededor de $(-1,-2,1)$.
4. rotación alrededor de $(0,1,1)$ de ángulo $2\pi/3$.
5. rotación alrededor de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ de ángulo $\arccos(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.
6. simetría con respecto a $x = y+z$.
7. simetría con respecto a $3x = 2y-z$.
8. simetría con respecto a $x+2y-z = 0$.
9. simetría-rotación alrededor de $(1,-3,1)$ de ángulo $-\arccos(5/6)$.
10. simetría-rotación alrededor de $(1,-1,0)$ de ángulo $\pi/3$.
11. proyección sobre $2x+2y+z = 0$, luego rotación de ángulo $\arccos(3/5)$.

Solución del ejercicio 4071 ▲003712

$M=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

Solución del ejercicio 4072 ▲005491

$$\begin{aligned}[u\wedge v,v\wedge w,w\wedge u]&=((u\wedge v)\wedge(v\wedge w))|(w\wedge u)=(((u\wedge v)|w)v-((u\wedge v)|v)w)|(w\wedge u)\\&=(((u\wedge v)|w)v)|(w\wedge u)=((u\wedge v)w)\times(v|(w\wedge u))=[u,v,w][w,u,v]\\&=[u,v,w]^2.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4073 ▲005493

$(u\wedge v)|(w\wedge s)=[u,v,w\wedge s]=[w\wedge s,u,v]=((w\wedge s)\wedge u)|v=((u|w)s-(u|s)w)|v=(u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$.
Igualmente, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s)=((u\wedge v)|s)w-((u\wedge v)|w)s=[u,v,s]w-[u,v,w]s$.

Solución del ejercicio 4074 ▲005793

Se define $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$. Sea $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$. Se sabe que

$$r(u)=(\cos\theta)u+(1-\cos\theta)\,(u|k)\,k+(\operatorname{sen}\theta)k\wedge u=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}(u|(e_1+e_2))(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{6}}{4}(e_1+e_2)\wedge u$$

$$\text{« = »}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix}z\\-z\\-x+y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z\\\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{\sqrt{6}}{4}z\\-\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{1}{2}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

y la matriz buscada es

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{\sqrt{6}}{4}\\-\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 4075 ▲005797

Sea (i,j,k) una base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$ euclidiana orientada. Se define $u=f(i)$, $v=f(j)$ y $w=f(k)$.
Necesariamente, $u\wedge v=f(i)\wedge f(j)=f(i\wedge j)=f(k)=w$ e igualmente $v\wedge w=u$ y $w\wedge u=v$.
1er caso. Si uno de los vectores u o v o w es nulo, entonces $u=v=w=0$ y entonces $f=0$. Recíprocamente, la aplicación nula es adecuada.

2o caso. Si los tres vectores u, v y w son no nulos entonces $u \wedge v \neq 0$ y así la familia (u,v) es libre. Pero entonces la familia (u,v,w) es una base directa de $\mathbb{R}^3$.
Luego $w = u \wedge v$ es ortogonal a u y v y $v = w \wedge u$ es ortogonal a u. Se deduce que la familia (u,v,w) es una base ortogonal directa de $\mathbb{R}^3$.
En fin, ya que u y v son ortogonales, $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$ e igualmente $\|u\| = \|v\|\|w\|$ y $\|v\| = \|u\|\|w\|$. Después $\|u\|\|v\|\|w\| = (\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ y entonces, ya que los vectores u, v y w son no nulos, $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$. Las igualdades $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$ y $\|u\| = \|v\|\|w\|$ proporcionan $\|u\|^2 = 1$ e igualmente $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$. Finalmente, la familia (u,v,w) es una base ortonormada directa.
En resumen, la imagen por f de cierta base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$ es una base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$ y se sabe que f es un automorfismo ortogonal positivo de $\mathbb{R}^3$, es decir una rotación de $\mathbb{R}^3$.
• Recíprocamente, si f es la rotación del ángulo θ alrededor del vector unitario e_3. Se considera e_1 y e_2 dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que la familia (e_1,e_2,e_3) sea una base ortonormada directa.
Para verificar que f es solución, por linealidad, es suficiente verificar los 9 igualdades : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$, $f(e_i \wedge e_j) = f(e_i) \wedge f(e_j)$. Para comprobar estas 9 igualdades, es suficiente reducirse al final de verificar 2 :

$$f(e_1) \wedge f(e_2) = e_3 = f(e_3) = f(e_1 \wedge e_2) \text{ y } f(e3) \wedge f(e1) = e_3 \wedge f(e_1) = f(e_2) = f(e_3 \wedge e_1).$$

Los endomorfismos buscados son entonces la aplicación nula y rotaciones de $\mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 4076 ▲005801

Si $a = 0$, $f = 0$ y no hay más que decir.
Si $a \neq 0$, ya que $f(a) = 0$, 0 es valor propio de f y $\text{vect}(a) \subset E_0(f)$. Por otra parte, si x es ortogonal a a, según la fórmula del doble producto vectorial

$$f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Así, el real no nulo $-\|a\|^2$ es valor propio de f y $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$. Ahora, $\dim \text{vect}(a) + \dim a^\perp = 3$ y entonces $\text{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$, luego $E_0(f) = \text{vect}(a)$ y $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$. También se deduce que f es diagonalizable. Se puede notar que, ya que f es diagonalizable y los subespacios propios son ortogonales, f es un endomorfismo simétrico.

Solución del ejercicio 4077 ▲005803

Las dos formas lineales consideradas son independientes y por lo tanto, P es un plano. Una base en P es por ejemplo $(i,j) = ((1,-1,0,0)(1,0,2,-3))$. Se ortonormaliza la base (i,j).
Se toma $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, luego $e_2' = j - (j|e_1)e_1 = (1,0,2,-3) - \frac{1}{2}(1,-1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,4,-6)$, luego $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

Una base ortonormada de P es (e_1,e_2), donde $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ y $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

1. La proyección ortogonal de $u = (x,y,z,t)$ sobre P es

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6) \\ &= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t). \end{aligned}$$

La matriz en la base canónica de la proyección ortogonal sobre P es

$$M=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}14 & -13 & 2 & -3\\ -13 & 14 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 8 & -12\\ -3 & -3 & -12 & 18\end{pmatrix}.$$

La matriz en la base canónica de simetría ortogonal con respecto a P es

$$S=2M-I_4=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}1 & -26 & 4 & -6\\ -26 & 1 & 4 & -6\\ 4 & 4 & -11 & -24\\ -6 & -6 & -24 & 9\end{pmatrix}.$$

2. La distancia de $u=(x,y,z,t)$ a P es

$$\begin{aligned}&\|u-p_P(u)\| =\\ &=\frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t,13x+14y-2z+3t,-2x-2y+19z+12t,3x+3y+12z+9t)\|\\ &=\frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2+(13x+14y-2z+3t)^2+(-2x-2y+19z+12t)^2+(3x+3y+12z+9t)^2}\,.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4082 ▲003766

1. $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $D=\operatorname{diag}(3\ 6\ 9)$.
2. $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $D=\operatorname{diag}(3\ 3\ 2)$.

Solución del ejercicio 4083 ▲003767

Si todos los a_i son nulos, $M=0$. Sinon, $M={}^tCC\Rightarrow E_0=C^{\perp}$ y $E_\nu=\operatorname{vect}(C)$, con $\nu=\|C\|^2$.

Solución del ejercicio 4084 ▲003768

$$M=5\begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0 & \frac12\\ 0 & \frac12 & \frac12 & 0\\ 0 & \frac12 & \frac12 & 0\\ \frac12 & 0 & 0 & \frac12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0 & -\frac12\\ 0 & \frac12 & -\frac12 & 0\\ 0 & -\frac12 & \frac12 & 0\\ -\frac12 & 0 & 0 & \frac12\end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 4085 ▲003769

1.
2. u es autoadjunta para $\langle\ ,\ \rangle$.
3. $P_0=1$, $P_2=x$, $P_6=3x^2-1$, $P_{12}=5x^3-3x$.

Solución del ejercicio 4086 ▲003770

1.
2.
3. $\lambda_k = k(k+1)$.

Solución del ejercicio 4089 ▲003773

1.
2.
3. $(p\circ q)_{|\operatorname{Im} p} = (p\circ q\circ p)_{|\operatorname{Im} p}$ es diagonalizable y $(p\circ q)_{|\ker q+(\ker p\cap \operatorname{Im} q)} = 0$, por lo que todo vector de E es la suma de los vectores propios para $p\circ q$.

Solución del ejercicio 4094 ▲003778

1.
2. Recurrencia : para $n=1$ es evidente. $n-1\to n : A = \begin{pmatrix} A' & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$, con $A' = {}^tB'B'$.

   Se busca $B = \begin{pmatrix} B' & X' \\ 0 & x \end{pmatrix}$, de donde : $X' = {}^tB'^{-1}C'$ y $x^2 = \alpha - {}^tX'X' = \frac{\det A}{\det A'} > 0$.

Solución del ejercicio 4098 ▲003782

1. Sea $(\overrightarrow{u}_1,\dots,\overrightarrow{u}_n)$ una base propia para u. Se toma $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u}_1+\dots+\overrightarrow{u}_n$.
2. Se norma $\overrightarrow{x}$ y se completa en base ortonormada. La matriz de u en esta base es simétrico, de traza nula, y la diagonal comienza con 0. Se termina por recurrencia.

Solución del ejercicio 4100 ▲003784

$ABX = \lambda X \Rightarrow {}^tX^tBABX = \lambda^tXBX$.

Solución del ejercicio 4101 ▲003785

Se lleva al caso donde A es diagonal.

Solución del ejercicio 4102 ▲003786

Existe P invertible tal que $A = {}^tPP$ y $B = {}^tPB'P$, con B' simétrica definida positiva. Entonces $A+B = {}^tP(I+B')P$ y $\det(I+B') = \prod(1+\beta_i) \geqslant 1+\prod\beta_i \Rightarrow$ lqfd.

Solución del ejercicio 4103 ▲003787

Sea $\mathscr{B}$ una BON fija, $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $\mathscr{B}'$ el BON buscado y P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Se quiere que ${}^tM'M'$ sea diagonal con $M' = {}^tPMP$, es decir ${}^tP^tMMP$ diagonal.

Solución del ejercicio 4106 ▲003790

Sea $(\overrightarrow{h}_i)$ una base diagonal para h, $H_i = \operatorname{vect}\{\overrightarrow{h}_1,\dots,\overrightarrow{h}_i\}$ y $(\overrightarrow{f}_i)$, F_i idem para f.

Para $\overrightarrow{x} \in F_k \cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k \|\overrightarrow{x}\|^2 + (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}_0)^2 \leqslant (h(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x}) + (\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}_0)^2 = (f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x}) \leqslant \mu_k \|\overrightarrow{x}\|^2$.
Para $\overrightarrow{x} \in H_{k+1} \cap F_{k-1}^{\perp} \cap \overrightarrow{x}_0^{\perp}$, $\mu_k \|\overrightarrow{x}\|^2 \leqslant (f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x}) = (h(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x}) \leqslant \lambda_{k+1} \|\overrightarrow{x}\|^2$.

Solución del ejercicio 4107 ▲003791

1. Si $f(x) + f^*(x) = 0$, entonces $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} f^* = \operatorname{Im} f \cap (\ker f)^{\perp} = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} f)^{\perp}$, por lo tanto $f(x) = f^*(x) = 0$ y $x \in \ker f \cap \ker f^* = \ker f \cap (\ker f)^{\perp}$.
2. $f^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker f$.
   $f + f^* \in \mathrm{GL}(E) \Rightarrow \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} f^* = \operatorname{Im} f + (\ker f)^{\perp} = E \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \geqslant \dim \ker f$.

Solución del ejercicio 4112 ▲003796

1. $((u - u^*)(x) \mid x) = 0$.
2. Ortodiagonalizar y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Solución del ejercicio 4113 ▲003797

Sea $K = \sup\{\|u_0 + \cdots + u_n\|\}$ y $x \in H$. Se denota $v_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} u_n$, para $p \leqslant q$. La serie $\sum (u_n(x) \mid x)$ es convergente (términos positivos, sumas parciales mayoradas) por lo que satisface el criterio de Cauchy : $(v_{p,q}(x) \mid x) \to 0$, cuando $p, q \to \infty$. Como $v_{p,q}$ es positivo, verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$|(v_{p,q}(x) \mid y)|^2 \leqslant (v_{p,q}(x) \mid x)(v_{p,q}(y) \mid y) \leqslant 2K\|y\|^2 (v_{p,q}(x) \mid x).$$

En particular para $y = v_{p,q}(x)$ se obtiene : $\|v_{p,q}(x)\|^2 \leqslant 2K(v_{p,q}(x) \mid x)$, entonces la serie $\sum u_n(x)$ es de Cauchy.
Observación : ejemplo donde $\sum u_n$ no converge en $\mathscr{L}_c(H)$: $H = \ell^2(\mathbb{N})$ y $u_n =$ proyección ortogonal sobre $\langle e_n \rangle$, donde $e_n(p) = \delta_{n,p}$. $\sum u_n$ converge simplemente y no uniformemente a la identidad.

Solución del ejercicio 4114 ▲003798

${}^tAA$ es $\mathbb{R}$-diagonalizable por lo tanto anula un polinomio P divido de raíces simples. A anula el polinomio $P(X^3)$, así es $\mathbb{C}$-diagonalizable si 0 no es raíz de P que se puede imponer si A es invertible.
Si A no es invertible, sea $P(X) = XQ(X)$, con $Q(0) \neq 0$.
Se tiene $\mathbb{R}^n = \ker(A^3) \oplus \ker(Q(A^3))$ y $\ker(A^3) = \ker({}^tAA) = \ker(A)$, por lo tanto $AQ(A^3) = 0$ y A es aún $\mathbb{C}$-diagonalizable.
Contraejemplo para la $\mathbb{R}$-diagonalizabilidad : tomar una rotación de ángulo $2\pi/3$ en el plano.

Solución del ejercicio 4115 ▲003799

1. Se está en una base propia para u, sean U, V, W las matrices correspondientes con $U = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. Se debe por lo tanto resolver $(\lambda_i + \lambda_j)W_{ij} = V_{ij}$, de donde la existencia, la unicidad y la simetría de w.
2. ```
   > A:= matrix([[4,1,1],[1,4,-1],[1,-1,4]]); B:= matrix([[0,0,-1],[0,0,1],[-1,1,3]]);
   > eigenvals(A); eigenvects(A);
   > P:= transpose(matrix([[1, 0, 1], [1, 1, 0],[-1, 1, 1]]));
   > A1:= evalm(P^(-1)&*A&*P); B1:= evalm(P^(-1)&*B&*P);
   > C1:= matrix(3,3);
   ```
   ```

```
> for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do C1[i,j]:=B1[i,j]/(A1[i,i]+A1[j,j]) od od;
> C:= evalm(P&*C1&*P^(-1)); evalm(A&*C+C&*A-B);
```

$\Rightarrow C = \frac{1}{140}\begin{pmatrix} 11 & -11 & -33 \\ -11 & 11 & 33 \\ -33 & 33 & 69 \end{pmatrix}$.

3. Si v es definida positiva : se tiene $(v(x) \mid x) = 2(u(x) \mid w(x))$, entonces si λ es un valor propio de w y x es un vector propio asociado, se tiene $\lambda = \frac{(v(x) \mid x)}{2(u(x) \mid x)} > 0$, de donde w es definida positiva.

   Caso w definida positiva y v no positivo : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4x+4 \end{pmatrix}$, con $0 < x < \frac{1}{8}$.

Solución del ejercicio 4116 ▲003800

1. Es un endomorfismo autoadjunto positivo de determinante 1.
2. $X^n \det\left(\frac{\mathrm{Id}}{X} + s^* \circ s\right) = \det(\mathrm{Id} + X s^* \circ s) = \det(s^* \circ (\mathrm{Id} + X s^* \circ s) \circ s) = \det(s^* \circ s + X\,\mathrm{Id})$.
3. $s^* \circ s$ es diagonalizable con valores propios (λ_i) reales positivos dos a dos inversos para la misma multiplicidad. $P^2(1) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1+\lambda_i)\left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right)$ y $(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) \geqslant 4$, para todo $x > 0$, con igualdad si y solo si $x = 1$.

   Si $P(1) = 2^n$, entonces todos los valores propios de $s^* \circ s$ valen 1 y $s^* \circ s$ es diagonalizable por lo que $s^* \circ s = \mathrm{Id}$ y s es una simetría ortogonal. El recíproco es inmediato.
4. Se lleva al caso $A_4 = I$, luego calcular $\det A$ por pivotaje.

Solución del ejercicio 4117 ▲003801

1. Que es un espacio prehilbertiano.
2. $g_x(t) = \min(t(1-x), x(1-t))$
3. Se denota $g_i = g_{x_i}$: $(g_1, \ldots, g_n)$ es libre considerando los puntos angulares, por lo que genera un espacio vectorial G de dimensión n. Sea $f \in P$: $f = f_0 + f_1$, con $f_0 \in G$ y $f_1 \in G^\perp$. Entonces $\varphi(f) = \varphi(f_0) + \|f_1\|^2$, por lo tanto φ es minimal en f si y solo si $\varphi_{|G}$ es minimal en f_0 y $f_1 = 0$. A partir de ahora se supone $f_1 = 0$ y $f \in G$.

   La aplicación :
   $$u : G \to \mathbb{R}^n, f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)) = ((f \mid g_1), \ldots, (f \mid g_n))$$
   es un isomorfismo lineal. Sea v el endomorfismo autoadjunto definido positivo de $\mathbb{R}^n$ (para el producto escalar canónico) tal que : $\forall t \in \mathbb{R}^n, (t \mid v(t)) = \|u^{-1}(t)\|^2$.

   Por lo tanto, señalando $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\mathrm{Id}+v)^{-1}(\alpha)$:
   $$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(u^{-1}(t)) &= (t \mid v(t)) + (t-\alpha \mid t-\alpha) \\ &= (t \mid (\mathrm{Id}+v)(t)) - 2(t \mid \alpha) + (\alpha \mid \alpha) \\ &= (t-\beta \mid (\mathrm{Id}+v)(t-\beta)) + (\alpha \mid \alpha - \beta). \end{aligned}$$
   $\mathrm{Id}+v$ es autoadjunta definida positiva por lo que el mínimo de φ se alcanza para $f = u^{-1}(\beta)$ (solución única) y vale $(\alpha \mid \alpha - \beta)$.

Solución del ejercicio 4118 ▲003802

1. p es un proyector ortogonal $\Leftrightarrow$ p es un proyector y $p = p^*$ $\Leftrightarrow$ p^* es un proyector ortogonal.
2. p y p^* conmutan, por lo tanto $\ker p$ y $\operatorname{Im} p$ son estables por p y por p^*, de donde $p^*_{|\ker p} = (p_{|\ker p})^* = 0_{\ker p}$ y $p^*_{|\operatorname{Im} p} = (p_{|\operatorname{Im} p})^* = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} p}$. Así $p = p^*$, lo que implica $\ker p \perp \operatorname{Im} p$.

Solución del ejercicio 4119 ▲003803

1.
2. Se tiene para $f, g \in E$: $u \circ v(f) = g \Leftrightarrow g$ es $\mathscr{C}^2$, $g(0) = g'(1) = 0$ y $g'' = -f$. En particular $u \circ v$ es inyectiva, 0 no es valor propio de $u \circ v$. Para $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $f \in E$ se tiene $u \circ v(f) = \lambda f$ si y solo si f es de la forma $x \mapsto a\mathrm{e}^{\alpha x} + b\mathrm{e}^{-\alpha x}$, con $\alpha^2 = -\frac{1}{\lambda}$ y $a + b = a\alpha\mathrm{e}^{\alpha} - b\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} = 0$. Se obtiene $f \neq 0$ tomando $a \neq 0$, $b = -a$ y $\alpha = i\pi(\frac{1}{2} + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Así $\operatorname{Spec}(u \circ v) = \left\{ \frac{1}{\pi^2(\frac{1}{2}+k)^2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Solución del ejercicio 4120 ▲003804

1. $u_1 + \cdots + u_p$ es el endomorfismo autoadjunto asociado a $q_1 + \cdots + q_p$.
2. $\operatorname{Im}(u_1) + \cdots + \operatorname{Im}(u_p) \supset \operatorname{Im}(u_1 + \cdots + u_p) = E$ y la suma de las dimensiones es igual a $\dim E$, entonces la suma de los subespacios es directa.
3. Se tiene $\ker(u_1) = \{x \in E \text{ tal que } x = u_2(x) + \cdots + u_p(x)\} \subset \operatorname{Im}(u_2 + \cdots + u_p) = \operatorname{Im}(u_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_p)$ y los dos términos extremos tienen la misma dimensión, de donde $\ker(u_1) = \operatorname{Im}(u_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(u_p)$.
   Como u_1 es autoadjunta, $\operatorname{Im}(u_1) \perp \ker(u_1)$, lo que prueba la ortogonalidad de la suma. Además, $\operatorname{Im}(u_1) \subset \ker(u_j)$, para $j \geqslant 1$, por lo tanto $q_1(x) = \|x\|^2$, para todo $x \in \operatorname{Im}(u_1)$. Aplicando **1)** a $\operatorname{Im}(u_1)$ se obtiene $u_1(x) = x$, para todo $x \in \operatorname{Im}(u_1)$, lo que prueba que u_1 es un proyector, y es un proyector ortogonal porque es autoadjunto.

Solución del ejercicio 4121 ▲003805

$A = P^{-1}DP \Rightarrow {}^tA = ({}^tPP)A(P^{-1}\,{}^tP^{-1})$.
S definida positiva $\Rightarrow \exists\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que $S = {}^tPP$, por lo tanto ${}^tA = SAS^{-1} \Rightarrow {}^tA = {}^tPM\,{}^tP^{-1}$, con $M = PAP^{-1}$, de donde ${}^tM = M$ es diagonal.

Solución del ejercicio 4122 ▲003806

Para A simétrica real se tiene $\max(\mathrm{Sp}(A)) = \sup\{(x \mid Ax)/\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, por lo tanto f es la cota superior de funciones afines $t \mapsto ((x \mid Ax) + t(x \mid Bx))/\|x\|^2$, cuando x recorre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Como el sup de funciones convexas, es una función convexa.

Solución del ejercicio 4125 ▲003825

1. $(f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(f(\overrightarrow{y}) \mid \overrightarrow{x})$ y $(f(i\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{y}) = -(f(\overrightarrow{y}) \mid i\overrightarrow{x})$.

2.
3.

Solución del ejercicio 4127 ▲003827

$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}$, $b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}$, $m = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}$.

Solución del ejercicio 4128 ▲003828

1. $\frac{1}{16}$.
2. $\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 4132 ▲003832

1.
2.
3.
4.
5. $\frac{1}{12}$.

Solución del ejercicio 4134 ▲003834

1.
2.
3. $\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{7}}}$.

Solución del ejercicio 4135 ▲003835

1.
2. Sea $P_0 = Q_0'$. Por integración por partes se tiene Q_0 es ortogonal a la familia $(jX^{j-1} - X^j)_{j\geqslant 1}$ que es una base de $\mathbb{R}[X]$, por lo tanto $Q_0 = 0 = P_0$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^0 P_0(t)\,dt \neq \delta_{0,0}$.

Solución del ejercicio 4136 ▲003836

$f =$ cte.

Solución del ejercicio 4138 ▲003838

Sea $\mathscr{B}$ una base ortonormada de E y P la matriz de pasaje de $\mathscr{B}$ a $(\overrightarrow{e}_i)$.
El primer miembro vale ${}^tXPG^{-1}{}^tPX = {}^tXX$.

Solución del ejercicio 4140 ▲003840

1.
2.
3. Sea $g \in H^\perp$ no nula. Las formas lineales : $f \mapsto \int_0^{1/2} f$ y $f \mapsto \int_0^1 fg$ son nulas sobre H, por lo tanto proporcionales, lo que es imposible para g continua.

Solución del ejercicio 4141 ▲003841

1. $u \geqslant 0$ y $u^{-1}(0)$ es de interior vacío.
2. Existe $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha u \leqslant v \leqslant \beta u$.

Solución del ejercicio 4142 ▲003842

1. (a_n) es denso en todas partes.
2.
3.
4. Si los a_n son distintos, se escoge para todo n una función f_n comprendida entre 0 y 1 alternativamente valiendo 1 y -1 en $a_0, \dots, a_n$. Entonces la sucesión (f_n) es de Cauchy, pero no converge porque si $f_n \to f$, entonces $f^2 \equiv 1$, absurdo.

Solución del ejercicio 4143 ▲003843

$\sqrt{1 - |(u \mid v)|^2} = d(v, \mathbb{C}u) \leqslant d(v, \mathbb{C}w) + |(v \mid w)| d(w, \mathbb{C}u)$.

Solución del ejercicio 4144 ▲003844

1. $A = U T\, {}^tU \Rightarrow A\overline{A} = U T\overline{T}\, {}^t\overline{U}$ es semejante a $T\overline{T}$.
2. $A\overline{A}$ tiene valores propios positivos distintos. Sea U unitaria trigonalizante $A\overline{A}$ y $T = U^{-1} A\, {}^tU^{-1}$. Entonces $T\overline{T}$ es triangular superior con valores propios reales distintos. Demostrar que esto implica T triangular superior por inducción sobre n.
$T = \begin{pmatrix} t & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Rightarrow T\overline{T} = \begin{pmatrix} |t|^2 + X\overline{Y} & t\overline{X} + X\overline{Z} \\ \bar{t}Y + Z\overline{Y} & Y\overline{X} + Z\overline{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{real} & * \\ 0 & \text{tr.sup de vp reales} \end{pmatrix}$. Entonces $X\overline{Y} = \overline{X}Y$ y $Z\overline{Y} = -\bar{t}Y$, de donde $(Y\overline{X} - X\overline{Y}I)Y = 0 = (Z\overline{Z} - |t|^2 I)Y$.
Por hipótesis $Y\overline{X} + Z\overline{Z} - (|t|^2 + X\overline{Y})I$ es invertible, entonces $Y = 0$ y se es llevado al caso $n-1$.
3. $A\overline{A}$ tiene valores propios positivos : ? ?
Solución de Pierre Février (MP* Neuilly sobre Seine) :
Lema : Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$, entonces existe $W \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $A\overline{W} = \alpha W$ y $\alpha^2 = \lambda$.
Sea $V \in E_\lambda(A\overline{A})$, $V \neq 0$. Si $A\overline{V} = -\sqrt{\lambda} V$ se tiene el resultado deseado, si no se escribe $W = A\overline{V} + \sqrt{\lambda} V$. Se tiene entonces :
$$\overline{A}W = \overline{A}A\overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \lambda \overline{V} + \sqrt{\lambda}\,\overline{A}V = \sqrt{\lambda}\,\overline{W}.$$
Se puede hacer que el vector anterior sea unitario y construir U matriz unitaria de primera columna W.
Se tiene entonces ${}^t\overline{U} A \overline{U} = \begin{pmatrix} \alpha & x & x & x \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, luego ${}^t\overline{U} A \overline{A} U = \begin{pmatrix} \alpha^2 & y & y & y \\ 0 & & & \\ \vdots & & B\overline{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.
Se deduce el resultado por inducción.

Solución del ejercicio 4145 ▲003807

$M = X^tY - Y^tX$.
Sea $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tal que $(I + aM)Z = 0$. Entonces $Z \in \mathrm{vect}(X,Y) : Z = \lambda X + \mu Y$.
Se reemplaza :

$$\begin{cases} (1 - a^tYX)\lambda - a^tYY\mu = 0 \\ a^tXX\lambda + (1 + a^tYX)\mu = 0. \end{cases}$$

CNS $\iff a^2({}^tXX\,{}^tYY - ({}^tXY)^2) + 1 \neq 0$.

Solución del ejercicio 4146 ▲003808

Se tiene ${}^tAA - {}^tCC = I_n$.
Sea X tal que $AX = 0$. Entonces ${}^tXX = -{}^t(CX)(CX)$, por lo tanto $X = 0$.

Solución del ejercicio 4147 ▲003809

$A^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$.

Solución del ejercicio 4148 ▲003810

Trigonalizar A en una base ortonormada.

Solución del ejercicio 4149 ▲003811

$h = f \circ f^* : h^2 = \mathrm{Id}$ y $h \geqslant 0 \Rightarrow h = \mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 4151 ▲003813

$a = b = \pm c$.

Solución del ejercicio 4152 ▲003814

Son iguales (descomponer A en simétrica + antisimétrica).

Solución del ejercicio 4153 ▲003815

1. $\mathrm{spec}(M) = \{j, j^2\} \Rightarrow$ se toma como base ortonormal $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b = \frac{2}{\sqrt{3}}(f(a) + \frac{1}{2}a) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
2. M es una matriz de rotación si y solo si $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U} \setminus \{\pm 1\}$ o $M = \pm I$.
3. M es la matriz de una aplicación ortogonal si y solo si $\mathrm{spec}(M) \subset \mathbb{U}$ y M es $\mathbb{C}$-diagonalizable (entonces M es $\mathbb{R}$-semblable en una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son matrices de rotación).

Solución del ejercicio 4155 ▲003817

1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2. Existe P ortogonal del mismo tamaño que A tal que $D = {}^tPAP$ es diagonal positiva. Entonces $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ {}^tCP & B \end{pmatrix}$ es simétrica positiva por lo que si $d_{ii} = 0$, entonces la recta i de ${}^tPC$ es nula. Así $\begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U' \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & {}^tPC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es, luego de una posible remuneración de filas y columnas, de la forma $U'' = \begin{pmatrix} D' & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde D' es diagonal invertible y U' es semejante a U''. Finalmente, U'' es diagonalizable : $\begin{pmatrix} I & D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} U'' \begin{pmatrix} I & -D'^{-1}C' \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4156 ▲003818

1. Si ${}^tUMV = D$ es diagonal entonces ${}^tMM = VD^{2t}V$. Inversamente, como ${}^tMM$ es definida positiva simétrica, existe D diagonal invertible y V ortogonal tales que ${}^tMM = VD^{2t}V$. Se escribe $M = UD^tV$ que define U ya que D^tV es invertible y se tiene $VD^{2t}V = {}^tMM = VD^tUUD^tV$, de donde ${}^tUU = I$.
2. M es límite de matrices M_k invertibles que se pueden descomponer bajo la forma $M_k = U_kD_k{}^tV_k$, con U_k y V_k ortogonales y D_k diagonal. Como $O(n)$ es compacto podemos suponer, incluso si eso significa extraer sub-sucesiones, que las sucesiones (U_k) y (V_k) convergente hacia U,V ortogonales de donde ${}^tUMV = \lim\limits_{k\to\infty} {}^tU_kM_kV_k = \lim\limits_{k\to\infty} D_k = D$ diagonal.
3. Diagonalizando ${}^tMM$ se encuentra $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como D no es invertible, es necesario ser astuto para encontrar U. Se da coeficientes indefinidos en U y se escribe que ${}^tUMV = D$, lo que da $U = \begin{pmatrix} a & b+\sqrt{2} & c \\ -a-\frac{3}{\sqrt{6}} & -b-\frac{1}{\sqrt{2}} & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Se escoge entonces a,b,c de manera que $U \in O(3)$, de donde, por ejemplo, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4157 ▲003819

1. $\det(A)^2 = (-1)^n$.
2. A es $\mathbb{C}$-diagonalizable (anulador simple) y sus valores propios son $i, -i$, con la misma multiplicidad (A es real). La matriz A' dada tiene las mismas propiedades, por lo que A y A' son $\mathbb{C}$-semejantes a la mismo matriz diagonal, y entonces $\mathbb{C}$-semejantes entre sí. Como la $\mathbb{C}$-similitud entre matrices reales es equivalente a la $\mathbb{R}$-similitud (resultado bien conocido), A y A' son $\mathbb{R}$-semejantes.
3. Sea e_1 unitario y $e'_1 = Ae_1$. Entonces e'_1 es unitario y $Ae'_1 = -e_1$, de donde $(e_1 \mid e'_1) = (Ae_1 \mid Ae'_1) = -(e_1 \mid e'_1) = 0$, por lo tanto (e_1, e'_1) es una familia ortonormal. Si F_1 es el subespacio vectorial generado por (e_1, e'_1), entonces $F_1^{\perp}$ es estable por A por lo que se puede construir por inducción una base ortonormal $(e_1, \ldots, e_{n/2}, e'_1, \ldots, e'_{n/2})$ tal que $Ae_i = e'_i$ y $Ae'_i = -e_i$.

Solución del ejercicio 4158 ▲003820

Se reemplaza A por $A+b_nI$ y B por $B-b_nI$ lo que no modifica C. Ahora los valores propios de B son positivos, por lo tanto para todo $x\in\mathbb{C}^n$ se tiene $(Ax \mid x)\leqslant(Cx\mid x)$. Sea $(x_1,\dots,x_n)$ una base ortonormal propia para A y $(y_1,\dots,y_n)$ una base ortonormal propia para C. Si $z\in\operatorname{vect}(x_1,\dots x_i)$, entonces $(Az\mid z)\geqslant a_i\|z\|^2$ y si $z\in\operatorname{vect}(y_i,\dots y_n)$, entonces $(Az\mid z)\leqslant(Cz\mid z)\leqslant c_i\|z\|^2$. Por lo tanto $\operatorname{vect}(x_1,\dots x_i)$ y $\operatorname{vect}(y_i,\dots y_n)$ tienen una intersección no trivial (la suma de las dimensiones es igual a $n+1$), entonces existe $z\neq 0$ tal que $a_i\|z\|^2\leqslant c_i\|z\|^2$, de donde $a_i\leqslant c_i$.

Solución del ejercicio 4159 ▲003821

1. Tomar A superior o igual que el valor propio más pequeño de $-M$.
2. Sobreyectividad de ϕ : $\operatorname{Im}\Phi$ es un subespacio vectorial de $S_n(\mathbb{R})$ conteniendo $S_n^{++}(\mathbb{R})$ por lo tanto conteniendo $\operatorname{vect}(S_n^{++}(\mathbb{R}))=S_n(\mathbb{R})$ según la pregunta anterior. Se deduce que ϕ es un isomorfismo gracias al teorema del rango.
   Si $M\in S_n^{+}(\mathbb{R})$, entonces $M=\lim\limits_{p\to\infty}(M+I_n/p)$, por lo tanto $M\in\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$. Recíprocamente, si $M\in\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}$, entonces $M=\lim\limits_{p\to\infty}(M_p)$, con M_p definida positiva, por lo tanto para todo $x\in\mathbb{R}^n$ se tiene ${}^txMx=\lim\limits_{p\to\infty}({}^txM_px)\geqslant 0$, es decir $M\in S_n^{+}(\mathbb{R})$. Así : $\overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}=S_n^{+}(\mathbb{R})$. Como ϕ es continua (porque es lineal en dimensión finita) se deduce que $\phi(S_n^{+}(\mathbb{R}))\subset S_n^{+}(\mathbb{R})$. Además, $\phi(S_n^{++}(\mathbb{R}))=S_n^{++}(\mathbb{R})\Rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})=\phi^{-1}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$, entonces por continuidad de ϕ^{-1} : $\phi^{-1}(S_n^{+}(\mathbb{R}))\subset S_n^{+}(\mathbb{R})$, de donde $S_n^{+}(\mathbb{R})\subset\phi(S_n^{+}(\mathbb{R}))$.
3. Sea $M\in S_2(\mathbb{R})$ de valores propios a,b, con $a\leqslant b$, y sean $a'\leqslant b'$ valores propios de $\phi(M)$. Para todo $\lambda>b$ se tiene $M+\lambda I_2\in S_2^{++}(\mathbb{R})$, por lo tanto $\phi(M)+\lambda I_2\in S_2^{++}(\mathbb{R})$, es decir $\lambda>b'$. Esto prueba que $b'\leqslant b$ y se demuestra la igualdad considerando ϕ^{-1}. Igualmente, considerando $-M$ se demuestra que $a'=a$. Finalmente, $\chi_M=(X-a)(X-b)=\chi_{\phi(M)}$. Además, $\det(M)=ab=\det(\phi(M))$.
   Observación : sean $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, y $A'=\phi(A)$, $B'=\phi(B)$, $C'=\phi(C)$. Se sabe que A' es ortodiagonalizable con valores propios 0 y 1, entonces existe $P\in O(2)$ tal que $A'={}^tPAP$. $A'+B'=\phi(I_2)=I_2$, de donde $B'=I_2-A'={}^tPBP$. Se define $C'={}^tP\left(\begin{smallmatrix}u&v\\v&w\end{smallmatrix}\right)P$. $0=\operatorname{tr}(C)=\operatorname{tr}(C')=u+w$ y $-1=\det(C)=\det(C')=uw-v^2$, por lo tanto $w=-u$ y $u^2+v^2=1$. Además, $-1=\det(A+C)=-u-u^2-v^2$, de donde $u=0$ y $v=\pm1$.
   Si $v=1$, entonces $C'={}^tPCP$ y por linealidad, $\phi(M)={}^tPMP$, para toda $M\in S_2(\mathbb{R})$.
   Si $v=-1$ se encuentra lo mismo $\phi(M)={}^tQMQ$, con $Q=P\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\in O(2)$.
   Recíprocamente, toda aplicación de la forma $M\mapsto{}^tPMP$, con $P\in O(2)$ verifica las hipótesis de la pregunta. Las funciones ϕ lineales verificando la única condición $\phi(S_2^{++}(\mathbb{R}))=S_2^{++}(\mathbb{R})$ son las funciones de la forma $M\mapsto{}^tPMP$, con $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (se escribe $\phi(I_2)={}^tTT$, luego se considera $M\mapsto{}^tT^{-1}\phi(M)T^{-1}$). ¿Se generaliza a cualquier dimensión ?

Solución del ejercicio 4160 ▲003822

$M=({}^tMM)^{-2}$ es definida positiva simétrica, entonces diagonalizable en base ortonormal. Examinando la forma diagonal se encuentra $M=I$.

Solución del ejercicio 4161 ▲005489

1. $\|C_1\| = \|C_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ y $C_1|C_2 = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. En fin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Entonces, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ y f es una rotación (distinta de la identidad). **Eje de f.** Sea $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y-2z = 0 \\ -2x-5y-z = 0 \\ -x+2y-5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x-5y \\ 3x+9y = 0 \\ 9x+27y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = y. \end{cases}$$

El eje D de f es vect$(\overrightarrow{u})$, donde $\overrightarrow{u} = (-3,1,1)$. D es de ahora en adelante orientado por $\overrightarrow{u}$.
Ángulo de f. El vector $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ es un vector unitario ortogonal al eje. Así,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}\cdot f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

y entonces, $\theta = \pm\arccos(-\frac{5}{6})\ (2\pi)$. (Si se sabe que $\mathrm{tr}(A) = 2\cos\theta+1$, es más corto : $2\cos\theta+1 = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$ proporciona $\cos\theta = -\frac{5}{6}$). El signo de $\operatorname{sen}\theta$ es el signo de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} < 0$. Entonces,

$$\boxed{f \text{ es la rotación del ángulo } -\arccos(-\tfrac{5}{6}) \text{ alrededor de } u = (-3,1,1).}$$

2. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ y $C_1|C_2 = \frac{1}{16}(3+3-6) = 0$. En fin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Entonces, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ y f es una rotación. **Eje de f.** Sea $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+\sqrt{6}z = 0 \\ x-y-\sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y = \sqrt{6}z = \frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x = y \text{ y } z = 0.$$

El eje D de f es vect$(\overrightarrow{u})$, donde $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. D está ahora orientado por $\overrightarrow{u}$. **Ángulo de f.** $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ es un vector unitario ortogonal a $\overrightarrow{u}$. Así,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}\cdot f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1)\cdot\tfrac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \tfrac{1}{2},$$

y entonces $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. El signo de $\operatorname{sen}\theta$ es el signo de $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$. Entonces,

$$\boxed{f \text{ es la rotación del ángulo } \frac{\pi}{3} \text{ alrededor de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

3. $||C_1|| = ||C_2|| = \frac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ y $C_1|C_2 = \frac{1}{81}(8-16+8) = 0$. En fin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Entonces, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A no es simétrica, y entonces f no es una reflexión. f es, por lo tanto la composición conmutativa $s \circ r$ de un ángulo de rotación θ alrededor de algún vector unitario $\overrightarrow{u}$ y de la reflexión del plano $\overrightarrow{u}^{\perp}$, donde $\overrightarrow{u}$ y θ son a determinar.

Eje de r. El eje de r es $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ (pues $f \neq -\mathrm{Id}_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} 17x + y + 4z = 0 \\ -4x + 13y + 7z = 0 \\ x + 8y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -17x - 4z \\ -225x - 45z = 0 \\ -135x - 27z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5x \\ y = 3x. \end{cases}$$

$\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}) = D$, donde $u = (1,3,-5)$. D está ahora orientado por $\overrightarrow{u}$. s es la reflexión con respecto al plano $P = u^{\perp}$ de la cual una ecuación es $x + 3y - 5z = 0$. Se escribe entonces la matriz S de s en el punto de partida. Se calcula $S^{-1}A = SA$ que es la matriz de r y se termina como en 1) y 2).

Solución del ejercicio 4162 ▲005490

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz M en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \text{ es una rotación} &\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ||C_1|| = ||C_2|| = ||C_3|| = 1 \text{ y } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ y } \det M = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ y } ab + bc + ca = 0 \text{ y } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1. \end{aligned}$$

Se define $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$ y $\sigma_3 = abc$. Se tiene $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Luego,

$$\sigma_1^3 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ba^2+a^2c+ca^2+b^2c+c^2b)+6abc,$$

y

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3+b^3+c^3+(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b).$$

Así,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -2(a^3+b^3+c^3)+6\sigma_3$$

y finalmente, $a^3+b^3+c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$\begin{aligned} M \in O_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ y } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ y } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ y } \sigma_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow a,\ b \text{ y } c \text{ son las soluciones reales de una ecuación del tipo } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (donde } k = -\sigma_3). \end{aligned}$$

Se define $P(x) = x^3 - x^2 + k$ y entonces $P'(x) = 3x^2 - 2x = x(2x-3)$. Sobre $]-\infty, 0]$, P es estrictamente creciente, estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$. P por lo tanto admite como máximo una raíz en cada uno de estos tres intervalos.

1er caso. Si $P(0) = k > 0$ y $P\left(\frac{2}{3}\right) = k - \frac{4}{27} < 0$ o lo que es lo mismo, $0 < k < \frac{4}{27}$, P admite tres raíces reales dos a dos distintas (P es por otra parte continua en $\mathbb{R}$), necesariamente todos simples.

2o caso. Si $k \in \left\{0, \frac{4}{27}\right\}$, P y P' tienen una raíz real común (a saber 0 o $\frac{4}{27}$) y P admite una raíz real de orden de al menos 2. La tercera raíz es entonces necesariamente real.

3o caso. Si $k < 0$ o $k > \frac{4}{27}$, P admite una raíz real exactamente. Esto es necesariamente simple en vista del 2o caso y por lo tanto, P admite otras dos raíces no reales.

En resumen, P tiene todas sus raíces reales si y solo si $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$ y entonces, f es una rotación si y solo si a, b y c son las soluciones de una ecuación del tipo $x^3 - x^2 + k = 0$, donde $0 \leqslant k \leqslant \frac{4}{27}$.

Solución del ejercicio 4163 ▲005780

1. Sea $F = \text{vect}(x_1, \ldots, x_n)$ y $m = \dim F$. Sea $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ una base ortonormada de F, luego M la matriz de la familia $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ en la base $\mathscr{B}$. M es una matriz rectangular de tamaño (m, n).
   Sea $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$. Porque la base $\mathscr{B}$ es ortonormada, el coeficiente línea i, columna j de la matriz ${}^tMM$ es
   $$\sum_{k=1}^{m} m_{k,i} m_{k,j} = (x_i | x_j),$$
   y se tiene así
   $$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^tMM.$$
   Porque $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \text{rg}\, M$, se trata de comprobar que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}\, M$. Para esto, demostremos que las matrices M y ${}^tMM$ tienen el mismo núcleo.
   Sea $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \ker M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \ker({}^tMM)$ y así
   $$x \in \ker({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0$$
   $$\Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \ker M.$$
   Finalmente, $\ker({}^tMM) = \ker M$ y entonces, de acuerdo con teorema de rango, $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \text{rg}\, M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.
   $$\boxed{\text{rg}(G(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \ldots, x_n).}$$

2. De acuerdo a 1),
   $$(x_1, \ldots, x_n) \text{ ld} \Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \Leftrightarrow \text{rg}\, G(x_1, x_2, \ldots, x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})$$
   $$\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$
   Además, cuando la familia $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es libre, con las notaciones de la pregunta 1), se tiene $m = n$ y la matriz M es una matriz cuadrada. Por lo tanto, se puede escribir
   $$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$
   $$\boxed{\begin{array}{c}(x_1, \ldots, x_n) \text{ ld} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ (x_1, \ldots, x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0.\end{array}}$$

3. **1a solución.** Sea x un vector de E y $p_F(x)$ su proyectado ortogonal sobre F. En la primera columna de $\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)$, el teorema de PITÁGORAS permite escribir (ya que $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix} (x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}.$$

Después de sustituir también en primera línea los $(x|x_i)$ por $(p_F(x)|x_i)$, se obtiene por linealidad con respecto a la primera columna

$$\gamma(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ahora, $p_F(x)$ está en F y así la familia $(p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es ld y entonces según la pregunta 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Queda $\gamma(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y desarrollando a lo largo de la primera columna, se obtiene

$$\forall x \in E,\ \gamma(x, x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \ldots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Finalmente,

$$\boxed{\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.}$$

2a solución. Se define $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, luego $d = \|x - p_F(x)\|$ de manera que

$$d^2 = (x - p_F(x))|(x - p_F(x)) = (x - p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

Por otra parte, para cada $i \in [\![1, n]\!]$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_I) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Así, los $n+1$ reales d^2, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} d^2 + \lambda_1(x|x_1) + \cdots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ \lambda_1(x_1|x_1) + \cdots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ \vdots \\ \lambda_1(x_n|x_1) + \cdots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n). \end{cases}$$

El determinante de este sistema es $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ y el sistema es CRAMER. El determinante asociado con d^2 es $\gamma(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y las fórmulas de CRAMER proporcionan

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Solución del ejercicio 4164 ▲005786

La matriz H_n es real simétrica. Sea $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$^tXH_nX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geqslant 0.$$

Además, si $X \neq 0$, el polinomio $\sum_{i=1}^{n} x_i Y^{i-1}$ no es el polinomio nulo y por lo tanto, porque un polinomio no nulo admite un número finito de raíces, la función $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2$. Así, la función $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2$ es continua positiva y no nulo en $[0,1]$ y se deduce que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt > 0$.

Se ha demostrado que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ y así como

$$\boxed{\text{la matriz } H_n \text{ es definida positiva simétrica.}}$$

Solución del ejercicio 4165 ▲005787

1. ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Entonces $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Sea $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Entonces $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2. Sea $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Por el teorema espectral, existe P en $O_n(\mathbb{R})$ y D en $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tales que $S = PD^tP$.
   Se define $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Porque S está en $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D está en $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ y se puede escribir $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ de manera que $D'^2 = D$. Se puede entonces escribir

$$S = PD^tP = PD'D'^tP = {}^t(D'^tP)D'^tP,$$

   y la matriz $A = D'^tP$ sirve.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ S = {}^tAA.}$$

   También se tiene ${}^t(-A)(-A) = S$ y como en general $-A \neq A$, no se tiene la unicidad de la matriz A.

3. S definida positiva $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\|AX\|_2^2 > 0$
   $\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $AX \neq 0 \Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. Demostrar que las matrices A y S tienen el mismo núcleo. Sea $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$x \in \ker A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \ker S,$$

   y

$$x \in \ker S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \ker A.$$

   Así, $\ker({}^tAA) = \ker(A)$ y, en particular, gracias al teorema del rango, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

5. Sea $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Existencia. Por el teorema espectral, existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ y $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ tales que $S = P_0D_0{}^tP_0$.
   Se define $D_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde los λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, son números reales positivos, luego $\Delta_0 = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ y en fin $R = P_0\Delta_0{}^tP_0$. La matriz R es ortogonalmente semejante a una matriz de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ y por lo tanto, es un elemento de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Después

$$R^2 = P_0\Delta_0^{2t}P_0 = P_0D_0{}^tP_0 = S.$$

Unicidad. Sea M un elemento de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ tal que $M^2 = S$. M es diagonalizable por el teorema espectral y, por lo tanto $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda\in\mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Pero si λ es un valor propio de M, $\ker(M-\lambda I_n) \subset \ker(M^2-\lambda^2 I_n) = \ker(S-\lambda^2 I_n)$. Además, valores propios de M es positiva, los λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, son dos a dos distintos o incluso los $\ker(S-\lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, son dos a dos distintos.
Esto demuestra que para cada $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\ker(M-\lambda I_n) = \ker(S-\lambda^2 I_n)$ y que los λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, son todos los valores propios de S. Así, necesariamente la matriz ${}^tP_0MP_0$ es una matriz diagonal D. La igualdad $M^2 = S$ proporciona $D^2 = D_0$, luego $D = \Delta_0$ (pues $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) y finalmente $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Solución del ejercicio 4166 ▲005791

Sea $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ una matriz ortogonal. Se define $X = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| &= \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1\times a_{i,j}\times 1\right| = \left|{}^tXAX\right| = |(AX|X)|\\ &\leqslant \|AX\|\|X\| \text{ (por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ)}\\ &= \|X\|^2 \text{ (porque la matriz } A \text{ es ortogonal)} \qquad = n.\end{aligned}$$

Se tiene la igualdad si y solo si la familia (X,AX) es ld que es equivalente a X vector propio de A. Se sabe que los valores propios (reales) de A solo puede ser 1 o -1. Entonces,

$$\text{igualdad} \Leftrightarrow AX = X \text{ o } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| = 1$$

Parece difícil mejorar este resultado en el caso general. Se supone además que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Sea $i \in [\![1,n]\!]$. Porque todos los $a_{i,j}$ son elementos de $[0,1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

La desigualdad escrita es, por lo tanto una igualdad y se deduce que cada desigualdad $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, es una igualdad. Así, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Esto demuestra que la matriz A es una matriz de permutación que recíprocamente sirve.

Solución del ejercicio 4167 ▲005794

La matriz A es simétrica real positiva. Entonces sus valores propios $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ son reales positivos. Además,

$$\det A = \lambda_1\cdots\lambda_n \text{ y } \det(I_n+A) = \chi_A(-1) = (1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n).$$

La desigualdad a probar es, por lo tanto equivalente a :

$$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+\lambda_k)}.$$

Sea así $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$. Si uno de los λ_k es nulo, la desigualdad es inmediata. Se supone en adelante que todos los λ_k estrictamente positivos. La desigualdad a probar se escribe

$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(\lambda_1)+\cdots+\ln(\lambda_n)\right)\right)\right)\leqslant\frac{1}{n}\left(\ln(1+\exp(\ln(\lambda_1)))+\cdots+\ln(1+\exp(\ln(\lambda_n)))\right)\quad(*)$$

o todavía $f\left(\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right)\leqslant\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$, donde $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$ y $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=\ln(\lambda_k)$.
La desigualdad a demostrar es una desigualdad de convexidad. La función f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1},\text{ luego }f''(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\geqslant 0.$$

La función f es, por lo tanto convexa en $\mathbb{R}$, lo que demuestra la desigualdad $(*)$.

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1+\sqrt[n]{\det(A)}\leqslant\sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

Solución del ejercicio 4168 ▲005795

Sea A una matriz ortogonal con coeficientes enteros. Dado que las columnas o filas de A son unitarias, se encuentra por línea o por columna uno y solo un coeficiente de valor absoluto igual a 1, los otros coeficientes son cero. A se obtiene, por lo tanto, multiplicando cada coeficiente de una matriz de permutación por 1 o -1. Recíprocamente, tal matriz es ortogonal con coeficientes enteros.
Hay $n!$ matrices de permutación y para cada matriz de permutación 2^n formas de atribuir un signo $+$ o $-$ a cada coeficiente igual a 1. Entonces

$$\boxed{\mathrm{card}(O_n(\mathbb{R})\cap\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))=2^n n!.}$$

Solución del ejercicio 4169 ▲005798

Dado que las matrices $S_1={}^tAA$ y $S_2=A^tA$ son simétricas reales, estas dos matrices tienen valores propios reales. También se sabe que si M y N son dos matrices cualesquiera entonces las matrices MN y NM tienen el mismo polinomio característico.
Se denota entonces $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la familia de valores propios de las matrices S_1 y S_2 y se escribe $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots\lambda_n)$. Por el teorema espectral, existen dos matrices ortogonales P_1 y P_2 tales que $S_1=P_1D^tP_1$ y $S_2=P_2D^tP_2$. Pero entonces

$$S_2=P_2({}^tP_1S_1P_1)^tP_2=(P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Como la matriz $P_2{}^tP_1$ es ortogonal, se ha demostrado que las matrices S_1 y S_2 son ortogonalmente semejantes.

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\text{ las matrices }{}^tAA\text{ y }A^tA\text{ son ortogonalmente semejantes.}}$$

Solución del ejercicio 4170 ▲005799

Observación. Es necesario notar el hecho que el producto de dos matrices simétricas no es necesariamente simétrica. Más precisamente, si A y B son dos matrices simétricas entonces

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

y el producto de dos matrices simétricas es simétrica si y solo si estas dos matrices conmutan. Así el inicio, nada impone que los valores propios de AB sean todos reales. Sean A y B dos matrices simétricas reales positivas. Según el ejercicio 4165, existen dos matrices cuadradas M y N tales que $A = {}^tMM$ y $B = {}^tNN$. Se tiene entonces $AB = {}^tMM{}^tNN$. La matriz AB tiene el mismo polinomio característico que la matriz $N({}^tMM){}^tN = {}^t(M{}^tN)M{}^tN$. Según el ejercicio 4165, esta última matriz es simétrica positiva y por lo tanto, tiene valores propios reales positivos. Se ha demostrado que los valores propios de la matriz AB son reales y positivos.

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Solución del ejercicio 4171 ▲005800

Sean A y B dos matrices simétricas reales positivas.

1er caso. Se supone que ninguna de las dos matrices A o B es invertible, entonces $\det A + \det B = 0$. Por otra parte, la matriz $A+B$ es simétrica porque $(\mathscr{S}_n(R), +, \cdot)$ es un espacio vectorial y sus valores propios son, por lo tanto reales. Además, para X vector de columna dado, ${}^tX(A+B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$. La matriz $A+B$ es, por lo tanto simétrica real positiva. Así, los valores propios de la matriz $A+B$ son números reales positivos y como $\det(A+B)$ es el producto de estos valores propios, se tiene $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2o caso. Si no, una de las dos matrices A o B es invertible (y por lo tanto, automáticamente definida positiva). Se supone por ejemplo A definida positiva. Según el ejercicio 4165, existe una matriz invertible M tal que $A = {}^tMM$. Se puede entonces escribir $A+B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$ y

$$\det(A+B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1} = (\det M)^2 \det(I_n + C),$$

donde $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matriz C es simétrica, positiva pues para todo vector columna X,

$${}^tXCX = {}^tX{}^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0,$$

y sus valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son reales positivos. Los valores propios de la matriz $I_n + C$ son los reales $1 + \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ y entonces

$$\det(I_n + C) = (1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Ahora, $\det A = (\det M)^2$, luego $\det B = (\det M)^2 \det C$ y entonces

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1 + \det C) \leqslant (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A+B).$$

Se ha demostrado que

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leqslant \det(A+B).}$$

Solución del ejercicio 4172 ▲005804

1a solución. (No usa valores propios) Sean A la matriz del enunciado entonces $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un elemento de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (n-1)\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j}(x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2\right) \\ &= \sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

y entonces la matriz A es positiva. Además, si $X=(1)_{1\leqslant i\leqslant n}\neq 0$, ${}^tXAX=0$ y por lo tanto, la matriz A no está definida.

2a solución. La matriz A es realmente simétrica. Entonces sus valores propios son reales y A es diagonalizable. Así, la dimensión de cada uno de los subespacios propios de A es igual al orden de multiplicidad del valor propio correspondiente. Se denota entonces que $\mathrm{rg}(A-nI_n)=1$ y entonces n es valor propio de A de orden $n-1$. Sea λ el valor propio faltante.

$$(n-1)n+\lambda=\mathrm{tr}A=n(n-1).$$

Entonces $\lambda=0$. Así, $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbb{R}^+$ y por lo tanto, la matriz A es positiva pero 0 es valor propio de A y por lo tanto, la matriz A no es definida.

$$\boxed{\text{La matriz } A \text{ es positiva y no definida.}}$$

Solución del ejercicio 4173 ▲005805

Para la primera pregunta, una simple observación es suficiente : las matrices I y $-I$ están en $O_n(\mathbb{R})$, pero no la matriz nula que es la mitad.

Sean A y B dos matrices ortogonales distintas. Demostrar que para todo real $\lambda\in]0,1[$, la matriz $(1-\lambda)A+\lambda B$ no es ortogonal.

Se supone por contradicción que existe $\lambda\in]0,1[$ tal que la matriz $(1-\lambda)A+\lambda B$ sea ortogonal. Para $j\in[\![1,n]\!]$, se denota respectivamente A_j, B_j y C_j la j-ésima columna de matriz A, de la matriz B y de matriz $(1-\lambda)A+\lambda B$. Siendo estas tres matrices ortogonales, para todo $j\in[\![1,n]\!]$,

$$1=\|C_j\|\leqslant(1-\lambda)\|A_j\|+\lambda\|B_j\|=(1-\lambda)+\lambda=1,$$

y entonces $\|C_j\|=(1-\lambda)\|A_j\|+\lambda\|B_j\|$. Se está en un caso de igualdad de la desigualdad de MINKOWSKI. Porque $\lambda\in]0,1[$, las columnas $(-\lambda)A_j$ y λB_j no son nulos y por lo tanto, son colineales y tienen la misma dirección. Porque los reales $1-\lambda$ y λ son estrictamente positivos, lo mismo ocurre con las columnas A_j y B_j y como estas columnas son vectores unitarios, estas columnas son finalmente iguales.

En resumen, si existe $\lambda\in]0,1[$ tal que la matriz $(1-\lambda)A+\lambda B$ sea ortogonal, entonces $A=B$. Esto es una contradicción y se ha demostrado que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ no es convexo.}}$$

Solución del ejercicio 4174 ▲005813

A es la matriz de un producto escalar φ en cierta base $\mathscr{B}$ fija de $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathscr{B}'$ el ortonormalizada de SCHMIDT de la base $\mathscr{B}$, para el producto escalar φ y T la matriz de pasaje de la base $\mathscr{B}'$ en la base $\mathscr{B}$. La matriz T es triangular como lo es la matriz ${}^tT$.

Porque la base $\mathscr{B}'$ es ortonormada para el producto escalar φ, la matriz de φ en la base $\mathscr{B}'$ es I_n. Según las fórmulas de cambio de base, $A={}^tT(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\varphi)T={}^tTT$.

Solución del ejercicio 4175 ▲005814

Porque la matriz A es definida positiva, existe según el ejercicio 4174 una matriz triangular superior invertible T tal que $A={}^tTT$. Se define entonces $T=(t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A)=(\det(T))^2=t_{1,1}^2\cdots t_{n,n}^2$$

Pero para $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i}^2 \geqslant t_{i,i}^2$ y entonces $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Observación. Se ha demostrado de paso que los coeficientes diagonales $a_{i,i}$ de A son reales estrictamente positivos.

Solución del ejercicio 4176 ▲005487

Se debe comprobar la linealidad. Si x es colineal a a, $f(x) = 0$ y los vectores de $\text{vect}(a) \setminus \{0\}$ son vectores no nulos colineales con su imagen. Si x no es colineal con a, $a \wedge x$ es un vector no nulo ortogonal a a y también lo es $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Entonces, si x es colineal a $f(x)$, x es necesariamente ortogonal a a.
Recíprocamente, si x es un vector no nulo ortogonal a a, $f(x) = (a \cdot x)a - \|a\|^2 x = -||a||^2 x$ y x es colineal a $f(x)$. Los vectores no nulos colineales con su imagen son los vectores no nulos de $\text{vect}(a)$ y de $a^{\perp}$.

Solución del ejercicio 4177 ▲005492

Si la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es una familia ld, la desigualdad es clara y además, se tiene igualdad si y solo si uno de los vectores es cero. si la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es una familia libre y por lo tanto, una base de E, se considera $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ su ortonormalizado de SCHMIDT. Se tiene

$$\left|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right| = \left|\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \times \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}|,$$

pues $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}'$ es el determinante de una base ortonormada en otra y por lo tanto, vale 1 o -1. Ahora, la matriz de la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ en $\mathscr{B}'$ es triangular superior y su determinante es el producto de los coeficientes diagonales, a saber, los números $x_i|e_i$ (ya que $\mathscr{B}'$ es ortonormada). Entonces

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}| = \left|\prod_{i=1}^{n}(x_i|e_i)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\| \times \|e_i\| = \prod_{i=1}^{n} ||x_i||,$$

por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ. Además, se tiene igualdad si y solo si, para todo i, $|x_i|e_i| = \|x_i\| \times \|e_i\|$ o aún si y solo si, para todo i, x_i es colineal a e_i o finalmente si y solo si la familia $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ es ortogonal.

Solución del ejercicio 4178 ▲005497

La aplicación $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ es un producto escalar en $E = \mathbb{R}_3[X]$. Determinar una base ortonormada de E. Para esto, se determinan (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) el ortonormalizado de la base canónica $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2, X^3)$.

• $||P_0||^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dt = 2$ y se toma $\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$

• $P_1|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$, luego $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 = X$, $||P_1 - (P_1|Q_0)Q_0||^2 = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}$ y $\boxed{Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.}$

• $P_2|Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$ y $P_2|Q_1 = 0$. Entonces, $P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$, luego $||P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1||^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ y $\boxed{Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1).}$

• $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ y $P_3|Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} t^4\,dt = \frac{\sqrt{6}}{5}$ y $P_3-(P_3|Q_0)Q_0-(P_3|Q_1)Q_1-(P_3|Q_2)Q_2 = X^3-\frac{3}{5}X$, luego $\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right) = 2\frac{25-21}{175} = \frac{8}{175}$, y $\boxed{Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X).}$

Una base ortonormada de E es (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3), donde $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ y $Q_3 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)$.

Sea entonces P un elemento cualquiera de $E = \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$. Se define $P = aQ_0+bQ_1+cQ_2+dQ_3$. Porque (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) es una base ortonormada de E, $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = ||P||^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Ahora, para $x\in[-1,1]$, poniendo $M_i = \max\{|Q_i(x)|,\ x\in[-1,1]\}$, se tiene :

$$\begin{aligned}|P(x)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)| \leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\ &\leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = \sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Un breve estudio muestra entonces que cada $|P_i|$ alcanza su máximo en $[-1,1]$ en 1 (y -1) y entonces

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Así, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leqslant 2\sqrt{2}$ y entonces $\max\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Estudiar los casos de igualdad. Sea $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un posible polinomio tal que $\max\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leqslant 2\sqrt{2}$. Sea $x_0\in[-1,1]$ tal que $\max\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\} = |P(x_0)|$. Entonces :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2} = |P(x_0)| &\leqslant |a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)|\\ &\leqslant |a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3 \leqslant \sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cada una de estas desigualdades es, por lo tanto una igualdad. La última (CAUCHY-SCHWARZ) es una igualdad si y solo si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ es colineal a $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ o aún si y solo si P es de la forma $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$, donde $\lambda^2(1+3+5+7) = 1$ y entonces $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, lo que deja solo 16 polinomios posibles. La penúltima desigualdad es una igualdad si y solo si $x_0\in\{-1,1\}$ (claro). La primera desigualdad es una igualdad si y solo si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)| = |a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

lo que equivale al hecho que a, b, c y d tienen el mismo signo y P es uno de los dos polinomios

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3) &= \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\ &= \pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4179 ▲005498

Si x es colineal a k, $r(x)=x$, y si $x\in k^{\perp}$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\operatorname{sen}\theta)k\wedge x$. Sea $x\in E$. Se escribe $x=x_1+x_2$, donde $x_1\in k^{\perp}$ y $x_2\in\operatorname{vect}(k)$. Se tiene $x_2=(x\cdot k)k$ (pues k es unitario) y $x_1=x-(x\cdot k)k$. Así,

$$\begin{aligned}r(x)&=r(x_1)+r(x_2)=(\cos\theta)x_1+(\operatorname{sen}\theta)k\wedge x_1+x_2=(\cos\theta)(x-(x\cdot k)k)+(\operatorname{sen}\theta)k\wedge x+(x\cdot k)k\\&=(\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x\cdot k)k+sin\theta(k\wedge x)=(\cos\theta)x+2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x\cdot k)k+\operatorname{sen}\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

Aplicación. Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ y $\theta=\frac{\pi}{3}$, para todo vector x, se tiene :

$$r(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x\cdot k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

luego, $r(e_1)=\frac12 e_1+\frac14(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac14(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$
$r(e_2)=\frac12 e_2+\frac14(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac14(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$
$r(e_3)=\frac12 e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac14(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3)$.

$$\boxed{\text{La matriz buscada es } \frac14\begin{pmatrix}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 4180 ▲005499

La aplicación $(f,g)\mapsto\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ es un producto escalar en $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned}I_nI_{n+2}&=\int_0^1 f^n(t)\,dt\int_0^1 f^{n+2}(t)\,dt=\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2dt\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2dt\\&\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\,dt\right)^2=\left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\,dt\right)^2=I_{n+1}^2\end{aligned}$$

Ahora, como f es continua y estrictamente positiva en $[0,1]$, I_n es estrictamente positiva, para todo natural n. Se deduce que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ y así como

$$\boxed{\text{la sucesión } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es definida y creciente.}}$$

Solución del ejercicio 4181 ▲005796

1. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$. Para todo número complejo z

$$\begin{aligned}f(z)&=f((\operatorname{Re}(z))\cdot1+(\operatorname{Im}(z))\cdot i)=(\operatorname{Re}(z))f(1)+(\operatorname{Im}(z))f(i)=\frac12(z+\bar{z})f(1)+\frac{1}{2i}(z-\bar{z})f(i)\\&=\frac{f(1)-if(i)}{2}z+\frac{f(1)+if(i)}{2}\bar{z},\end{aligned}$$

y se puede tomar $a = \dfrac{f(1) - if(i)}{2}$ y $b = \dfrac{f(1) + if(i)}{2}$. (Recíprocamente, para a y b complejos dados, la aplicación f así definido es $\mathbb{R}$-lineal y por lo tanto, se tiene la escritura general compleja de un endomorfismo del plano).

2. $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{Re}(f(1)) + \mathrm{Im}(f(i)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Im}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b) + \mathrm{Re}(a-b) = 2\mathrm{Re}(a)$

y

$$\begin{aligned}\det(f) &= \mathrm{Re}(a+b)\,\mathrm{Im}(i(a-b)) - \mathrm{Im}(a+b)\mathrm{Re}(i(a-b)) = \mathrm{Re}(a+b)\mathrm{Re}(a-b) + \mathrm{Im}(a+b)\,\mathrm{Im}(a-b)\\ &= (\mathrm{Re}(a))^2 - (\mathrm{Re}(b))^2 + (\mathrm{Im}(a))^2 - (\mathrm{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = 2\mathrm{Re}(a) \text{ y } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.}$$

3. Sean z y z' dos números complejos. Se recuerda que

$$z|z' = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Re}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Im}z') = \tfrac{1}{4}(z+\bar{z})(z'+\overline{z'}) - \tfrac{1}{4}(z-\bar{z})(z'-\overline{z'}) = \tfrac{1}{2}(\bar{z}z' + z\overline{z'}) = \mathrm{Re}(\bar{z}z').$$

y al pasaje si se orienta el plano de forma que la base ortonormada $(1,i)$ sea directo,

$$[z,z'] = (\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z') + (\mathrm{Im}z)(\mathrm{Re}z') = \tfrac{1}{4i}(z+\bar{z})(z'-\overline{z'}) - \tfrac{1}{4i}(z-\bar{z})(z'+\overline{z'}) = \tfrac{1}{2i}(\bar{z}z' - z\overline{z'}) = \mathrm{Im}(\bar{z}z').$$

Denotemos M la matriz de f en la base $(1,i)$. Porque la base $(1,i)$ es ortonormada,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^tM \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Re}(i(a-b)) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(a+b) = -\mathrm{Im}(a-b) \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}\,a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.}$$

Solución del ejercicio 4182 ▲005802

Se trata de demostrar que un endomorfismo de un espacio euclidiano E, que conserva la ortogonalidad es una similitud.

Se puede razonar sobre una base ortonormada de E que se denota $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Por hipótesis, la familia $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ es ortogonal. Además, para $i \neq j$, $(e_i+e_j)|(e_i-e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ y entonces $f(e_i+e_j)|f(e_i-e_j) = 0$, lo que proporciona $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Sea k el valor común de las normas de los $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si $k = 0$, todos los $f(e_i)$ son nulos y por lo tanto, f es nula.

Si $k \neq 0$, la imagen por el endomorfismo $\frac{1}{k}f$ de la base ortonormada $\mathscr{B}$ es una base ortonormada. Entonces el endomorfismo $\frac{1}{k}f$ es un automorfismo ortogonal de E y por lo tanto, el endomorfismo $\frac{1}{k}f$ conserva la norma.

En todos los casos, se ha encontrado un real positivo k tal que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Solución del ejercicio 4183 ▲002658

a) Por inducción e integración por partes, se demuestra que $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

b) Desarrollando $(1-x)^n$ utilizando la fórmula binomial, se obtiene luego integración $I_{n,n} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}$.

D_n es el mcm de los denominadores en la expresión anterior, se deduce que $I_{n,n} = \frac{a}{D_n}$, donde a es un entero. Como $I_{n,n} > 0$, $a \geqslant 1$ y entonces $I_{n,n} \geqslant \frac{1}{D_n}$. Usando el resultado de la pregunta a), se deduce la desigualdad requerida.

c) Sea $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la descomposición en factores primos de D_n. Para todo i comprendido entre 1 y k, $p_i^{\alpha_i}$ divide uno de los números $n+1,\ n+2,\dots,\ 2n+1$. En consecuencia, $p_i^{\alpha_i} \leqslant 2n+1$. Además, los p_i son distintos dos a dos pares e inferiores o iguales a $2n+1$, $k \leqslant \pi(2n+1)$. De donde la mayoración solicitada.

Solución del ejercicio 4184 ▲005291

Sea n un entero natural.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+3n+1)^2,$$

con n^2+3n+1 entero natural.

Solución del ejercicio 4185 ▲005292

1. Sea n un entero relativo.
   Si n es par, n y $5n^3$ son pares lo mismo que $5n^3+n$ y 2 divide $5n^3+n$.
   Si n es impar, n y $5n^3$ son impares y de nuevo $5n^3+n$ es par. Finalmente : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2|(5n^3+n)$.
   Si n es múltiplo de 3, n y $5n^3$ son múltiplos de 3 del mismo modo $5n^3+n$.
   Si n es de la forma $3p+1$, entonces
   $$5n^2+1 = 5(3p+1)^2+1 = 45p^2+30p+6 = 3(9p^2+10p+2)$$
   y $5n^2+1$ es divisible por 3. Es lo mismo con $5n^3+n = n(5n^2+1)$.
   Si n es de la forma $3p+2$, $5n^2+1 = 5(3p+2)^2+1 = 45p^2+60p+21 = 3(9p^2+20p+7)$ y $5n^2+1$ es divisible por 3. Es lo mismo con $5n^3+n = n(5n^2+1)$.
   Finalmente, $\forall n \in \mathbb{Z},\ 3|(5n^3+n)$.
   En fin, $5n^3+n$ es divisible por 2 y 3 y por lo tanto, por $2\times 3 = 6$. Se ha demostrado que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|(5n^3+n)$. (Todo esto se expresa mucho mejor usando congruencias. Por ejemplo : si $n \equiv 1\ (3)$, $5n^2+1 \equiv 5.1^2+1 = 6 \equiv 0\ (3)$)
2. 4^{2^n} significa $(\cdots((4^2)^2)^2\cdots)^2$. Estudiar la sucesión de estas elevaciones al cuadrado sucesivas, módulo 7. $4^{2^0} = 4$ está en $4+7\mathbb{Z}$. $4^{2^1} = 16$ está en $2+7\mathbb{Z}$. $4^{2^2} = 16^2 = (7k+2)^2 = 4+7k'$ está en $4+7\mathbb{Z}$... Demostrar por inducción sobre p entero natural que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $4^{2^{2p}}$ está en $4+7\mathbb{Z}$ y $4^{2^{2p+1}}$ está en $2+7\mathbb{Z}$.
   Es verdadero para $p=0$.
   Sea $p \geqslant 0$. Si existen dos enteros relativos k_{2p} y k_{2p+1} tales que $4^{2^{2p}} = 4+7k_{2p}$ y $4^{2^{2p+1}} = 2+7k_{2p+1}$, entonces :
   $$4^{2^{2p+2}} = (4^{2^{2p+1}})^2 = (2+7k_{2p+1})^2 = 4+7(4k_{2p+1}+7k_{2p+1}^2) \in 4+7\mathbb{Z},$$
   luego
   $$4^{2^{2p+3}} = (4^{2^{2p+2}})^2 = (4+7k_{2p+2})^2 = 16+28k_{2p+2}+49k_{2p+2}^2 = 2+7(2+4k_{2p+2}+7k_{2p+2}^2) \in 2+7\mathbb{Z}.$$
   Se ha demostrado por inducción que si n es par, 4^{2^n} está en $4+7\mathbb{Z}$ y si n es impar, 4^{2^n} está en $2+7\mathbb{Z}$. Luego $2^{2^0} = 2$ está en $2+7\mathbb{Z}$ después, para $n \geqslant 1$, $2^{2^n} = 2^{2.2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}}$ está en $4+7\mathbb{Z}$ si $n-1$ es par o aún si n es impar y está en $2+7\mathbb{Z}$ si n es par. Así, que ya sea n par o impar, $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ está en $(4+2)+1+7\mathbb{Z} = 7+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$ y se ha demostrado que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1.$$

Solución del ejercicio 4186 ▲005293

Sean m, n y p tres enteros naturales y r_1, r_2 y r_3 los restos de las divisiones euclidianas de m, n y p por 8. Entonces,

$$m^2+n^2+p^2=(8q_1+r_1)^2+(8q_2+r_2)^2+(8q_3+r_3)^2 \in r_1^2+r_2^2+r_3^2+8\mathbb{Z}.$$

Así, $m^2+n^2+p^2$ está en $7+8\mathbb{Z}$ si y solo si $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ está en $7+8\mathbb{Z}$. Como r_1, r_2 y r_3 son enteros entre 0 y 7, es suficiente verificar que las sumas de tres cuadrados de números enteros comprendidos en sentido amplio entre 0 y 7 no están en $7+8\mathbb{Z}$. Por tanto, $0^2=0\in 8\mathbb{Z}$, $1^2=1\in 1+8\mathbb{Z}$, $2^2=4\in 4+8\mathbb{Z}$, $3^2=9\in 1+8\mathbb{Z}$, $4^2=16\in 8\mathbb{Z}$, $5^2=25\in 1+8\mathbb{Z}$, $6^2=36\in 4+8\mathbb{Z}$ y $7^2=49\in 1+8\mathbb{Z}$. Entonces, los cuadrados de los enteros de 0 a 7 están en $8\mathbb{Z}$ o $1+8\mathbb{Z}$ o $4+8\mathbb{Z}$. En fin,

$$\begin{array}{llll}
0+0+0=0\in 8\mathbb{Z}, & 0+0+1=1\in 1+8\mathbb{Z}, & 0+0+4=4\in 4+8\mathbb{Z}, & 0+1+1=2\in 2+8\mathbb{Z},\\
0+1+4=5\in 5+8\mathbb{Z} & 0+4+4=8\in 8\mathbb{Z}, & 1+1+1=3\in 3+8\mathbb{Z}, & 1+1+4=6\in 6+8\mathbb{Z},\\
1+4+4=9\in 1+8\mathbb{Z}, & 4+4+4=12\in 4+8\mathbb{Z}. & &
\end{array}$$

Ninguna de estas sumas está en $7+8\mathbb{Z}$ y se ha demostrado que un entero de la forma $8n+7$ no es la suma de tres cuadrados.

Solución del ejercicio 4187 ▲005294

Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Desarrollando $(1+\sqrt{2})^n$ por la fórmula binomial de NEWTON y separando los términos donde $\sqrt{2}$ aparece en un exponente par de los términos donde $\sqrt{2}$ aparece en un exponente impar, se escribe $(1+\sqrt{2})^n$ bajo la forma $a_n+b_n\sqrt{2}$, donde a_n y b_n son números naturales no nulos. Pero entonces $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ y entonces

$$(-1)^n=(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n=(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=a_n^2-2b_n^2$$

o finalmente,

$$((-1)^n a_n)a_n+(2(-1)^{n+1}b_n)b_n=1$$

donde $(-1)^n a_n=u$ y $2(-1)^{n+1}b_n=v$ son enteros relativos. El teorema de BÉZOUT permite afirmar que a_n y b_n son primos entre sí.

Solución del ejercicio 4188 ▲005295

Se define $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, donde a_n y b_n son números naturales. Se tiene entonces $(1-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ y entonces

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=2a_{2n+1}\in\mathbb{N}.$$

Pero además, $-1<1-\sqrt{3}<0$ y entonces, ya que $2n+1$ es impar, $-1<(1-\sqrt{3})^{2n+1}<0$. Así,

$$2a_{2n+1}<(1+\sqrt{3})^{2n+1}<2a_{2n+1}+1,$$

lo que demuestra que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})=2a_{2n+1}=(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}$ y demuestra ya que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ es un entero par. Pero se quiere además :

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}&=(1+\sqrt{3})((1+\sqrt{3})^2)^n+(1-\sqrt{3})((1-\sqrt{3})^2)^n\\
&=(1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^n\\
&=2^n((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n).
\end{aligned}$$

Demostrar finalmente que $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ es un entero, par. Pero, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ es de la forma $A+B\sqrt{3}$, donde A y B son números naturales y por lo tanto, ya que $(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = A-B\sqrt{3}$, finalmente se tiene $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n = 2A$, donde A es un entero. Entonces, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ es un entero par, o aún $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1} = E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ es un entero divisible por 2^{n+1}.

Solución del ejercicio 4189 ▲005296

Sea n un entero natural no nulo. Se denota $\sigma(n)$ la suma de sus cifras en base 10 (ver el ejercicio 4202). Si $n = a_0+10a_1+\cdots+10^k a_k$, donde $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant a_i\leqslant 9$, para $0\leqslant i\leqslant k$ y $a_k\neq 0$, entonces

$$\sigma(n) = a_0+\cdots+a_k \leqslant 9(k+1)\leqslant 9(E(\log n)+1)\leqslant 9(\log n+1).$$

Así,

$$A=\sigma(4444^{4444})\leqslant 9(\log(4444^{4444})+1)\leqslant 9(4444\log(10^5)+1) = 9(4444\cdot 5+1) = 9\cdot 22221 = 199989.$$

Después, $B=\sigma(A)\leqslant 1+5\cdot 9 = 46$, luego $\sigma(B)\leqslant\sigma(39) = 12$. Entonces, $1\leqslant\sigma(B)\leqslant 12$. Por otra parte, se sabe que, módulo 9 : $\sigma(B)\equiv B\equiv A = 4444^{4444}$.
En fin, $4444^{4444} = (9\cdot 443+7)^{4444}\equiv 7^{4444}\ (9)$. Además, $7\equiv -2\ (9)$, luego $7^2\equiv 4\ (9)$, o bien $7^3\equiv 28\equiv 1\ (9)$ y entonces $7^{4444} = (7^3)^{1481}.7\equiv (1^3)^{1481}.7\equiv 7\ (9)$.
Finalmente, $1\leqslant\sigma(B)\leqslant 12$ y $C\equiv 7\ (9)$ que impone $C=7$.

Solución del ejercicio 4190 ▲005297

Se tienen tres posibilidades : $p\in 3\mathbb{Z}$, $p\in 3\mathbb{Z}+1$ o $p\in 3\mathbb{Z}-1$. En los dos últimos casos, $p^2\in 1+3\mathbb{Z}$ y $8p^2+1\in 9+3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. Pero entonces, $8p^2+1$ es primo y múltiplo de 3 que impone $8p^2+1=3$. Esta última igualdad es imposible.
Entonces solo queda el caso donde p es primo y múltiplo de 3, es decir $p=3$ (en resumen, p y $8p^2+1$ primos implicando $p=3$). En este caso, $8p^2+1 = 73$ y $8p^2-1 = 71$ son en realidad primos.

Solución del ejercicio 4191 ▲005298

1. Para $1\leqslant k\leqslant n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Entonces, si k y n son primos entre sí, ya que n divide kC_n^k, el teorema de GAUSS permite afirmar que n divide C_n^k.
2. Igualmente, $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ demuestra que $(n+1)$ divide nC_{2n}^n y, ya que n y $(n+1)$ son primos entre sí (de acuerdo a BÉZOUT ya que $(n+1)-n=1$), $(n+1)$ divide C_{2n}^n de acuerdo con teorema de GAUSS.

Solución del ejercicio 4192 ▲005299

1. Se define $d = x\wedge y$ y $m = x\vee y$. d divide $m = 105 = 3\cdot 5\cdot 7$ pero, ya que d divide x y y, d divide también $x+y = 56 = 2^3\cdot 7$. Entonces, d divide $105\wedge 56 = 7$ y necesariamente $d=1$ o $d=7$.
   1er caso. $d=1$ proporciona, ya que $m=105$, $xy = md = 105$. x y y son, por lo tanto las soluciones de la ecuación $X^2-56X+105=0$ que no admite soluciones enteras.
   2o caso. $d=7$ proporciona $xy = 7\cdot 105 = 735$. x y y son, por lo tanto las soluciones de la ecuación $X^2-56X+735=0$, que admite las soluciones 21 y 35.
   Recíprocamente, $21+35=56$ y $21\vee 35 = 3\cdot 5\cdot 7 = 105$. $\mathscr{S} = \{(21,35),(35,21)\}$.

2. Se define $x = dx'$ y $y = dy'$, con x' y y' primos entre sí y $d = x \wedge y$. El sistema se escribe $\begin{cases} x' - y' = 1 \\ dx'y' = 72 \end{cases}$ o todavía $\begin{cases} x' = y' + 1 \\ d(y'+1)y' = 72. \end{cases}$

   En particular, y' y $y'+1$ son dos divisores consecutivos de 72. $72 = 2^3 \cdot 3^2$ admite $4 \cdot 3 = 12$ divisores a saber 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72. Entonces y' es elemento de $\{1,2,3,8\}$.

   1er caso. $y' = 1$ proporciona $d = \frac{72}{1 \cdot 2} = 36$, luego $y = 36 \cdot 1 = 36$ y $x = y + d = 72$. Recíprocamente, $72 - 36 = 36 = 36 \wedge 72$ y $36 \vee 72 = 72$.

   2o caso. $y' = 2$ proporciona $d = 12$, $y = 24$, $x = 36$ que recíprocamente sirven.

   3o caso. $y' = 3$ proporciona $d = 6$, $y = 18$, $x = 24$ que recíprocamente sirven.

   4o caso. $y' = 8$ proporciona $d = 1$, $y = 8$, $x = 9$ que recíprocamente sirven.

$$\mathscr{S} = \{(9,8),(24,18),(36,24),(72,36)\}.$$

3. d divide m y entonces d divide $243 = 3^5$ y $d \in \{1,3,9,27,81,243\}$. Se define así $x = dx'$, $y = dy'$, con x' y y' primos entre sí.

   1er caso. Si $d = 1$ se tiene $x'y' - 1 = 243$ o aún $x'y' = 244$ que brinda las posibilidades (sin olvidar que x' y y' son primos entre sí) : $x' = 1$, $y' = 244$, luego $x = 1$ y $y = 244$, $x' = 4$, $y' = 61$, luego $x = 4$ y $y = 61$, $x' = 61$, $y' = 4$, luego $x = 61$ y $y = 4$, $x' = 244$, $y' = 1$, luego $x = 244$ y $y = 1$ que recíprocamente sirven.

   2o caso. Si $d = 3$, se tiene $x'y' = 81 + 1 = 82$ que brinda las posibilidades : $x' = 1$, $y' = 82$, luego $x = 3$ y $y = 246$, $x' = 2$, $y' = 41$, luego $x = 6$ y $y = 123$, $x' = 41$, $y' = 2$, luego $x = 123$ y $y = 6$, $x' = 82$, $y' = 1$, luego $x = 246$ y $y = 3$ que recíprocamente sirven.

   3o caso. Si $d = 9$ se tiene $x'y' = 27 + 1 = 28$ que brinda las posibilidades : $x' = 1$, $y' = 28$, luego $x = 9$ y $y = 252$, $x' = 4$, $y' = 7$, luego $x = 36$ y $y = 63$, $x' = 7$, $y' = 4$, luego $x = 63$ y $y = 36$, $x' = 28$, $y' = 1$, luego $x = 252$ y $y = 9$ que recíprocamente sirven.

   4o caso. Si $d = 27$ se tiene $x'y' = 9 + 1 = 10$ que brinda las posibilidades : $x' = 1$, $y' = 10$, luego $x = 27$ y $y = 270$, $x' = 2$, $y' = 5$, luego $x = 54$ y $y = 135$, $x' = 5$, $y' = 2$, luego $x = 135$ y $y = 54$, $x' = 10$, $y' = 1$, luego $x = 270$ y $y = 27$ que recíprocamente sirven.

   5o caso. Si $d = 81$, se tiene $x'y' = 3 + 1 = 4$ que brinda las posibilidades : $x' = 1$, $y' = 4$, luego $x = 81$ y $y = 324$, $x' = 4$, $y' = 1$, luego $x = 324$ y $y = 81$ que recíprocamente sirven.

   6o caso. Si $d = 243$, se tiene $x'y' = 1 + 1 = 2$ que brinda las posibilidades : $x' = 1$, $y' = 2$, luego $x = 243$ y $y = 486$, $x' = 2$, $y' = 1$, luego $x = 486$ y $y = 243$ que recíprocamente sirven.

Solución del ejercicio 4193 ▲005300

Sea n un entero superior o igual que 2.

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2).$$

$5(n^2+2)$ deben ser un cuadrado perfecto, n^2+2 debe todavía ser divisible por 5, pero si n está en $5\mathbb{Z}$, n^2+2 está en $2+5\mathbb{Z}$, si n está en $\pm 1 + 5\mathbb{Z}$, n^2+2 está en $3+5\mathbb{Z}$ y si n está en $\pm 2 + 5\mathbb{Z}$, n^2+2 está en $1+5\mathbb{Z}$ y n^2+2 nunca es divisible por 5. Una suma de cinco cuadrados de enteros consecutivos no es, por lo tanto un cuadrado perfecto.

Solución del ejercicio 4194 ▲005301

Sean n y m dos enteros naturales tales que $n < m$. Se define $m = n + k$, con $k > 0$. Se observa que

$$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1.$$

Desarrollando la expresión anterior por la fórmula binomial de NEWTON y teniendo en cuenta el hecho que 2^k es par porque k es estrictamente positivo, se obtiene una expresión de la forma $q \cdot F_n + 1 + 1 = q \cdot F_n + 2$. El P.G.C.D. de F_n y F_m debe todavía dividir $F_m - q \cdot F_n = 2$ y por lo tanto, vale 1 o 2. En fin, ya que 2^n y 2^m son estrictamente positivos, F_n y F_m son impares y su M.C.D. vale entonces 1 (este resultado prueba nuevamente la existencia de una infinidad de números primos).

Solución del ejercicio 4195 ▲005302

---

1. Sea, para n entero natural no nulo dado, $v_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$. Entonces,

$$v_{n+1} = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -v_n.$$

La sucesión v es, por lo tanto una sucesión geométrica de razón -1 y se tiene :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (-1)^{n-1}v_1 = (-1)^n.$$

Esta igualdad se vuelve a escribir $((-1)^n u_{n-1})u_{n+1} + ((-1)^{n+1}u_n)u_n = 1$ y el teorema de BÉZOUT permite afirmar que para todo entero natural n, enteros u_n y u_{n+1} son primos entre sí (es claro por inducción que la sucesión u es de valores enteros).

2. Para $m = 1$ y n entero natural cualquiera :

$$u_{n+m} = u_{n+1} = u_{n+1}u_1 + u_n u_0 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Para $m = 2$ y n entero natural cualquiera :

$$u_{n+m} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n+1}u_2 + u_n u_1 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

Sea $m \geqslant 1$. Se supone que para todo entero natural n, se tiene $u_{n+m} = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$ y $u_{n+m+1} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n$. Entonces, para todo entero natural n,

$$\begin{aligned} u_{n+m+2} &= u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n + u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n \text{ (por hipótesis de recurrencia)} \\ &= u_{n+1}(u_{m+1} + u_m) + u_n(u_m + u_{m-1}) = u_{n+1}u_{m+2} + u_n u_{m+1}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad propuesta por recurrencia.

Sean n y m dos enteros naturales tales que $n \geqslant m$. La división euclidiana de n por m se escribe $n = mq + r$, con q y r enteros tales que $0 \leqslant r \leqslant m - 1$.

Por tanto, $u_{m+r} = u_m u_{r+1} + u_{m-1}u_r$. Así, un divisor común a u_m y u_r divide de nuevo u_m y u_{m+r} y recíprocamente un divisor común a u_m y u_{m+r} divide $u_{m-1}u_r$. Pero, u_m y u_{m-1} son primos entre sí y, de acuerdo con teorema de GAUSS, un divisor común a u_m y u_{m+r} divide u_r. Los divisores comunes de u_m y u_r son de nuevo los divisores comunes de u_m y u_{m+r} y entonces :

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r}.$$

Después, por recurrencia

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r} = u_m \wedge u_{2m+r} = \cdots = u_m \wedge u_{qm+r} = u_m \wedge u_n.$$

Así, el algoritmo de EUCLIDES aplicado por un lado a u_m y u_n y por otro lado a m y n se efectúan en paralelo y en particular, $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$.

Solución del ejercicio 4196 ▲005303

1. Se define $d = x \wedge y \wedge z$, luego $x = dx'$, $y = dy'$ y $z = dz'$, donde $x' \wedge y' \wedge z' = 1$.

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow d^2(x'^2 + d^2 y'^2) = d^2 z' 2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

con $x' \wedge y' \wedge z' = 1$, lo que demuestra que podemos volver al caso donde x, y y z son primos entre sí. Entonces se supone x, y y z primos entre sí (en su conjunto). Sea p un número primo. Si p divide x y y, entonces p divide $x^2 + y^2 = z^2$ y entonces p es igualmente un factor primo de z contradiciendo el hecho de que x, y y z son primos entre sí. Entonces, x y y son primos entre sí. Si p divide x y z, entonces p divide $z^2 - x^2 = y^2$ y p es igualmente un factor primo de y, contradiciendo el hecho de que x, y y z son primos entre sí. Entonces, x y z son primos entre sí. Igualmente, y y z son primos entre sí. Finalmente, x, y y z son primos entre sí dos a dos.

2. Porque x, y y z son dos a dos primos entre sí, entre los números x, y y z, existe como máximo un número par. Pero si estos tres números son impares, $x^2 + y^2 = z^2$ es par como la suma de dos números impares contradiciendo el hecho de que z es impar. Así, entre los números x, y y z, existe exactamente un número par y dos números impares. Si x y y son impares, entonces por un lado, z es par y z^2 está en $4\mathbb{Z}$ y por otro lado x^2 y y^2 están en $1 + 4\mathbb{Z}$. Pero entonces, $x^2 + y^2$ está en $2 + 4\mathbb{Z}$ excluyendo así la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$. Entonces, z es impar y uno de los dos números x o y es par. Se supone, aunque se intercambien las letras x y y, que x es impar y y es par. Se define entonces $y = 2y'$, luego $X = \frac{z+x}{2}$ y $Z = \frac{z-x}{2}$ (ya que x y z son impares, X y Z son enteros).

3. Se tiene
$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow 4y'^2 = (z+x)(z-x) \Leftrightarrow y'^2 = XZ.$$
Un divisor común a X y Z divide de nuevo $z = Z + X$ y $x = Z - X$ y por lo tanto, es igual a ± 1 ya que x y z son primos entre sí. X y Z son enteros primos entre sí. El producto de los dos enteros X y Z es un cuadrado perfecto y estos enteros son coprimos. Entonces, un factor primo de X no aparece en Z y por lo tanto, aparece en X a un exponente par que demuestra que X es un cuadrado perfecto. Igualmente, Z es un cuadrado perfecto.

4. Entonces, existen dos enteros relativos u y v tales que $X = u^2$ y $Z = v^2$. Pero entonces, $z = Z + X = u^2 + v^2$ y $x = Z - X = u^2 - v^2$. En fin, $y^2 = z^2 - x^2 = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2)^2 = 4u^2v^2$ y entonces, $y = 2uv$ basta reemplazar u por $-u$.
En resumen, si $x^2 + y^2 = z^2$, entonces existe $(d, u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $x = d(u^2 - v^2)$, $y = 2duv$ y $z = d(u^2 + v^2)$ o bien $x = 2duv$, $y = d(u^2 - v^2)$ y $z = d(u^2 + v^2)$. Recíprocamente,
$$(d(u^2 - v^2))^2 + (2duv)^2 = d^2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) = (d(u^2 + v^2))^2,$$
y se ha encontrado todos los tripletes Pitagóricos. Por ejemplo, $d = 1$, $u = 2$ y $v = 1$ proporcionan el triplete $(3, 4, 5)$. $d = 2$, $u = 2$ y $v = 1$ proporcionan el triplete $(6, 8, 10)$ y $d = 1$, $u = 3$ y $v = 2$ proporcionan el triplete $(5, 12, 13)$.

Solución del ejercicio 4197 ▲005304

Sean x y y dos enteros naturales tales que $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$. Se tiene $4y^3 \leqslant 3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ y entonces
$$y \leqslant \sqrt[3]{\frac{349}{4}} = 4,4\ldots$$

Entonces, $y \in \{0,1,2,3,4\}$. Igualmente, $3x^3 \leqslant 3x^3+xy+4y^3=349$ y entonces

$$x \leqslant \sqrt[3]{\frac{349}{3}} = 4,8...$$

Entonces, $x \in \{0,1,2,3,4\}$, lo que deja solo $5 \cdot 5 = 25$ parejas candidatas. Luego,
$y=0$ da $3x^3=349$ que no da soluciones.
$y=1$ da $3x^3+x-345=0$, ecuación de la cual ninguno de los enteros de 0 a 4 es solución.
$y=2$ da $3x^3+2x-317=0$, ecuación de la cual ninguno de los enteros de 0 a 4 es solución.
$y=3$ da $3x^3+3x-241=0$, ecuación de la cual ninguno de los enteros de 0 a 4 es solución.
$y=4$ da $3x^3+4x-93=0$ y solo $x=3$ es solución.

$$\mathscr{S}=\{(3,4)\}.$$

Solución del ejercicio 4198 ▲005305

Si $x \geqslant 5$ y $5 \leqslant k \leqslant x$, entonces $k!$ es divisible por $2 \cdot 5 = 10$. Por otra parte, $1!+2!+3!+4!=33$ y el número de unidades de $\sum_{k=1}^{x} k!$ es 3.

$\sum_{k=1}^{x} k!$ por lo tanto, no es un cuadrado perfecto porque el dígito de las unidades (en base 10) de un cuadrado perfecto se debe elegir entre 0, 1, 4, 5, 6, 9. Entonces, $x \leqslant 4$. Luego, $1!=1=1^2$, luego $1!+2!=1+2=3$ no es un cuadrado perfecto, luego $1!+2!+3!=9=3^2$, luego $1!+2!+3!+4!=33$ no es un cuadrado perfecto.

$$\mathscr{S}=\{(1,1),(3,3)\}.$$

Solución del ejercicio 4199 ▲005306

$$\begin{aligned} n &= 9+8(10+10^2+\cdots+10^{p-1})+4(10^p+\cdots+10^{2p-1}) = 9+80\frac{10^{p-1}-1}{10-1}+4\cdot 10^p\frac{10^p-1}{10-1} \\ &= \frac{1}{9}(81+80(10^{p-1}-1)+4\cdot 10^p(10^p-1)) = \frac{1}{9}(4\cdot 10^{2p}+4\cdot 10^p+1) = \left(\frac{2\cdot 10^p+1}{3}\right)^2, \end{aligned}$$

(lo que demuestra que n es el cuadrado de un racional). Ahora,

$$2\cdot 10^p+1 = 2(9+1)^p+1 = 2\cdot\sum_{k=0}^{p} C_p^k 9^k+1 = 3+2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k} = 3(1+2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k-1}),$$

y $2\cdot 10^p+1$ es un entero divisible por 3. Finalmente, $n=\left(\frac{2\cdot 10^p+1}{3}\right)^2$ es el cuadrado de un entero.

Solución del ejercicio 4200 ▲005307

Para $k \in \mathbb{N}$, se escribe $a_k = 11\cdots 1$ ($k+1$ cifras 1 en base 10). Sea n un entero natural cualquiera. La división euclidiana de a_k por n se escribe : $a_k = n\cdot q_k + r_k$, donde q_k y r_k son números naturales tales que $0 \leqslant r_k \leqslant n-1$.

Los $n+1$ enteros $r_0,\dots,r_n$ son a elegir entre los n enteros 0, $1,\dots,n-1$. Los $n+1$ restos considerados no pueden, por lo tanto, ser dos a dos distintos. Así,

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 / \, 0 \leqslant k < l \leqslant n \text{ y } r_k = r_l.$$

Pero entonces, $a_l - a_k = (q_l - q_k)n$ es múltiplo de n. Como $a_l - a_k = 11\cdots 10\cdots 0$ ($l-k$ dígitos 1 y $k+1$ dígitos 0), se ha demostrado que todo entero natural admite un múltiplo de la forma $11\cdots 10\cdots 0 = 11\cdots 1 \cdot 10^K$. Si además n es impar, no divisible por 5, entonces n es primo con 2 y con 5 y por lo tanto, con 10^K. Por el teorema de GAUSS, n divide $11\cdots 1$.

Solución del ejercicio 4201 ▲005308

---

1. $u_n^2 = (2^{n+1}+1)^2 = 2^{2n+2}+2^{n+2}+1 = 10...010...01_2$ ($n-1$, luego $n+1$ cifras 0)
2. $$\begin{aligned} u_n^3 &= (2^{n+1}+1)^3 = 2^{3n+3}+3.2^{2n+2}+3.2^{n+1}+1 = 2^{3n+3}+(2+1).2^{2n+2}+(2+1).2^{n+1}+1 \\ &= 2^{3n+3}+2^{2n+3}+2^{2n+2}+2^{n+2}+2^{n+1}+1 = 10...0110...0110...01_2 \end{aligned}$$
   ($n-1$, luego $n-1$, luego n cifras 0)
3. $$\begin{aligned} u_n^3 - u_n^2 + u_n &= 2^{3n+3}+3.2^{2n+2}+3.2^{n+1}+1-2^{2n+2}-2^{n+2}-1+2^{n+1}+1 = 2^{3n+3}+2^{2n+3}+2^{n+2}+1 \\ &= 10...010...010...01 \end{aligned}$$
   ($n-1$, luego n, luego $n+1$ cifras 0)

Solución del ejercicio 4202 ▲005309

---

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se define $n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$, donde $p \in \mathbb{N}$, y $\forall k \in \{0,\dots,p\}$, $a_k \in \{0,\dots,9\}$, y $a_p \neq 0$. El número de dígitos de n es entonces $p+1$. El entero p verifica $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ o aún $p \leqslant \log n < p+1$. Así, $p = E(\log n)$. Así, el número de cifras de n en base 10 es $E(\log n)+1$.
2. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se escribe $u_n = \dfrac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}$
   (a) Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se define $n = a_p 10^p + \cdots + 10a_1 + a_0 = \overline{a_p...a_1a_0}_{10}$. Si al menos uno de los dígitos de n no es 9, se denota k el índice más pequeño tal que $a_k \neq 9$. Entonces, $0 \leqslant k \leqslant p-1$ y $n = \overline{a_p...a_k9...9}_{10}$ y $n+1 = \overline{a_p...a_{k+1}(a_k+1)0...0}_{10}$. En este caso, si $k=0$,

   $$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{\sigma(n)+1}{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant 1+1 = 2.$$

   Si $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

   $$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{a_p+\cdots+a_k+1}{a_p+\cdots+a_k+9k} \leqslant \frac{a_p+\cdots+a_k+1}{a_p+\cdots+a_k+1} = 1 \leqslant 2.$$

   Si no, todos los dígitos de n son iguales a 9, y en este caso,

   $$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{1}{9(p+1)} \leqslant 2.$$

   Así, para todo entero natural no nulo n, se tiene $u_n \leqslant 2$. La sucesión u por lo tanto es acotada. Para $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p-1} = \dfrac{\sigma(10^p)}{\sigma(10^p-1)} = \dfrac{1}{9p}$. La sucesión extraída $(u_{10^p-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge y tiene el límite 0. Para $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p} = \dfrac{\sigma(10^p+1)}{\sigma(10^p)} = \frac{2}{1} = 2$. La sucesión extraída $(u_{10^p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge y tiene el límite $2 \neq 0$. Se deduce que la sucesión u diverge.

(b) Con las notaciones de 1), $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(p+1) = 9(E(\log n)+1) \leqslant 9(\log n+1)$.

(c) Sea $n \in \mathbb{N}^*$. $1 \leqslant \sqrt[n]{\sigma(n)} \leqslant \sqrt[n]{9(\log n+1)} = \exp(\frac{1}{n}(\ln 9+\ln(1+\frac{\ln n}{\ln 10})$. Los dos miembros de este encuadramiento tienden a 1 y así la sucesión $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sigma(n)} = 1$.

Solución del ejercicio 4203 ▲005310

1. (Fórmula de LEGENDRE) Sea n un entero natural superior o igual a 2.
   Si p es un número primo que divide $n! = 1\cdot 2\cdots n$, entonces p es un factor primo de uno de los enteros $2,\dots,n$ y, en particular, $p \leqslant n$. Recíprocamente, es claro que si p es un número primo tal que $p \leqslant n$, p divide $n!$. Los factores primos de $n!$ son, por lo tanto los números primos menores o iguales que n.
   Sea así p un número primo tal que $p \leqslant n$. Para encontrar el exponente de p en la descomposición primaria de $n!$, se cuenta 1 por cada múltiplo de p inferior o igual a n, se agrega 1 por cada múltiplo de p^2 inferior o igual a n, se agrega de nuevo 1 por cada múltiplo de p^3 inferior o igual a n... Y se detiene cuando el exponente k verifica $p^k > n$.
   $$n \geqslant p^k \Leftrightarrow \ln n \geqslant k\ln p \Leftrightarrow k \leqslant \frac{\ln n}{\ln p},$$
   (pues $\ln p > 0$). Entonces, si $k \geqslant E(\frac{\ln n}{\ln p})+1$, entonces $p^k > n$.
   Dicho de otra manera, el exponente de p es la suma del número de múltiplos de p inferiores o iguales a n, del número de múltiplos de p^2 inferiores o iguales a n, del número de múltiplos de p^3 inferiores o iguales a $n\dots$ Y del número de múltiplos de $p^{E(\ln n/\ln p)}$.
   Sea k un entero tal que $1 \leqslant k \leqslant E(\frac{\ln n}{\ln p})$ y K un entero natural.
   $$1 \leqslant K\cdot p^k \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leqslant K \leqslant \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leqslant K \leqslant E(\frac{n}{p^k}).$$
   Por lo tanto hay $E(\frac{n}{p^k})$ múltiplos de p^k ampliamente entendido entre 1 y n. Se ha demostrado que el exponente de p en la descomposición de $n!$ en factores primos es
   $$E(\frac{n}{p})+E(\frac{n}{p^2})+E(\frac{n}{p^3})+\cdots$$
2. El exponente de 5 en la descomposición primaria de 1000! es
   $$E(\frac{1000}{5})+E(\frac{1000}{5^2})+E(\frac{1000}{5^3})+E(\frac{1000}{5^4}) = 200+40+8+1 = 249.$$
   El exponente de 2 es obviamente superior (hay al menos ya 500 números pares entre 1 y 1000). Entonces, la potencia más grande de 10 dividiendo 1000! es aún la mayor potencia de 5 dividiendo 1000!, a saber 249. La escritura en base 10 de 1000! se termina por 249 ceros.

Solución del ejercicio 4204 ▲005311

(Pequeño teorema de FERMAT) Sea p un número primo.

1. Sea p un número primo y k un entero tal que $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Se tiene $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$. Entonces, p divide kC_p^k. Pero, p es primo y por lo tanto, p es primo a todos los enteros comprendidos entre 1 y $p-1$ en sentido amplio. Por el teorema de GAUSS, p divide C_p^k.

2. Sea p un número primo. Demostrar por inducción que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.

Esto es claro para $a=1$. Sea $a \geqslant 1$. Se supone que $a^p \equiv a\ (p)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}(a+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k \\ &\equiv a^p + 1\ (p) \quad \text{(de acuerdo a 1))} \\ &\equiv a+1\ (p) \quad \text{(por hipótesis de recurrencia)}\end{aligned}$$

Se ha demostrado por recurrencia que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.

Solución del ejercicio 4205 ▲005312

Sea p un entero natural superior o igual a 2.

Se supone que $(p-1)! \equiv -1\ (p)$. Entonces existe un entero relativo a tal que $(p-1)! = -1 + ap\ (*)$. Sea $k \in \{1,\dots,p-1\}$. La igualdad $(*)$ se escribe aún $k(-\prod_{j\neq k} j) + ap = 1$. El teorema de BÉZOUT permite entonces afirmar que k y p son primos entre sí. Así, p es primo con todos los números naturales elementos de $\{1,\dots,p-1\}$ y entonces, p es un número primo.

Solución del ejercicio 4215 ▲003151

1. $x = \dot{\overline{25}}$, $y = \dot{\overline{32}}$.
2. $x = \dot{\overline{15}}$ o $\dot{\overline{16}}$.

Solución del ejercicio 4216 ▲003152

1. $\dot{0}$, $\pm\dot{1}$, $\pm\dot{5}$.
2.
3.

Solución del ejercicio 4219 ▲003155

Estudiar el mismo producto en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 4221 ▲003157

1.
2. 3.
3.
4.
5.
6. $\dot{\overline{11}}$, $\dot{\overline{27}}$.

Solución del ejercicio 4224 ▲003160

Para $1 \leqslant k < p$: $k!C_{p+k}^k = (p+1)\cdots(p+k) \equiv k!\ (\mathrm{mod}\, p)$, por lo tanto $C_{p+k}^k \equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p)$. Además, $C_p^k \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p)$, de donde $C_p^k C_{p+k}^k \equiv C_p^k\ (\mathrm{mod}\, p^2)$. Luego

$(p-1)!C_{2p}^p = 2(p+1)\cdots(p+p-1) \equiv 2(p-1)! + 2p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}\ (\mathrm{mod}\, p^2) \equiv 2(p-1)!\Big(1+p\sum_{i=1}^{p-1} i'\Big)\ (\mathrm{mod}\, p^2)$, donde i' representa el inverso de i módulo p. La aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es una permutación de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, por lo tanto $\sum_{i=1}^{p-1} i' \equiv \frac{p(p-1)}{2}\ (\mathrm{mod}\, p) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p)$, de donde $C_p^p C_{2p}^p \equiv 2\ (\mathrm{mod}\, p^2)$.

Finalmente, $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{p+k}^k \equiv 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k + 2 \pmod{p^2} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$.

Solución del ejercicio 4225 ▲003161

La ecuación característica, $X^3 = 4(X^2 + X + 1)$ admite tres raíces distintas en $\mathbb{Z}/11Z : 1, 6, 8$. Entonces x_n es de la forma : $x_n = a + 6^n b + 8^n c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Se tiene $6^{10} \equiv 8^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, por lo tanto (x_n) es periódica con periodo dividiendo 10. El período más pequeño es 1 si $b = c = 0$, 10 si no porque las sucesiones (6^n) y (8^n) tienen 10 como el período más pequeño módulo 11 y se tiene : $8(x_{n+1} - x_n) - 5(x_{n+2} - x_{n+1}) = 7 \cdot 8^n c$ y $7(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 7 \cdot 6^n b$.

Solución del ejercicio 4226 ▲003162

1.
2. (a) El número de soluciones de la ecuación $x^q = \dot{1}$ es inferior o igual a $q < p - 1$.
   (b) $\dot{0} = a^{3q} - \dot{1} = (a^q - \dot{1})(a^{2q} + a^q + \dot{1})$, por lo tanto a^{2q} es raíz de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, de discriminante $-\dot{3}$.
3. Existe $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ solución de $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$, y un tal x es de orden multiplicativo 3. Por el teorema de Lagrange, se deduce que $3 \mid p - 1$.

Solución del ejercicio 4227 ▲003163

Reagrupar x y $n - x$.

Solución del ejercicio 4229 ▲004565

1. $R = 1$.
2. $R = 1$.
3. $R = 1$.
4. $R = \frac{1}{e}$.
5. $R = \frac{1}{\sqrt{b}}$.
6. $R = 1$.
7. $R = 1$.
8. $R = 1$.
9. $R = \frac{1}{3}$.
10. $R = 1$.
11. $R = 1$.
12. $R = \sqrt{2} - 1$.
13. $R = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.
14. $R = 0$.
15. $R = \frac{1}{2}$, $2t \leqslant 1 + t^2 \leqslant 2$.
16. $R = 1$, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$.
17. $R = 1$.

Solución del ejercicio 4231 ▲004567

La sucesión $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5} + \alpha\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ es periódica de periodo 5, por lo tanto toma como máximo cinco valores distintos. Sea a el de mayor valor absoluto. Entonces $R = \frac{1}{|a|}$.

Solución del ejercicio 4232 ▲004568

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \sim \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1, \\ \zeta(\alpha) & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

En los tres casos, se obtiene $R = 1$.
Hay convergencia en $x = 1$ si y solo si $\alpha < 0$ y hay divergencia grosera en $x = -1$, cuando $\alpha > 1$ dadas los equivalentes. Para $\alpha \leqslant 1$ y $x = -1$ hay convergencia (CSA).

Solución del ejercicio 4233 ▲004569

1. (a_n) es acotada y (na_n) no lo es, por lo tanto $R_a = 1$. $|b_n| \sim |a_n|$, por lo tanto $R_b = 1$.
2. Hay duda solamente para $x = \pm 1$. El criterio de convergencia de Abel (fuera de programa) se aplica, $\sum a_n x^n$ converge si $x = \pm 1$. $b_n = a_n - \frac{1}{6}a_n^3 + O(n^{-5/3})$ y el criterio de Abel también se aplica a $\sum a_n^3 x^n$ (linealizar el $\cos^3$), también existe convergencia para $x = \pm 1$.
   Resolución conforme al programa : agrupar en grupos de seis términos.

Solución del ejercicio 4234 ▲004570

1. $R' = R^2$.
2. $R' = \infty$.
3. $R' = eR$.

Solución del ejercicio 4235 ▲004571

$\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

Solución del ejercicio 4236 ▲004572

1. Serie producto de $a(z)$ y $\frac{1}{z-\rho} \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}\rho^k$.
2. Si $a(\rho) \neq 0 : b(z)$ converge para $|z| < \rho$ y tiende a infinito para $z \to \rho^- \Rightarrow R = \rho$.
   Si $a(\rho) = 0 : \forall r > \rho,\ |a_p| \leqslant \frac{M}{r^p} \Rightarrow |b_n| \leqslant \frac{M}{r^n(r-\rho)} \Rightarrow R = \infty$.

Solución del ejercicio 4237 ▲004573

1. $]-1, 2[$.
2. Para $0 \leqslant k \leqslant 4^n$, se tiene $|a_k| \leqslant C_{4^n}^{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ (alcanzado por $k = 4^n/2$). Entonces $a_n \to 0$, cuando $n \to \infty$ y si $x > 1$, entonces $a_{3*4^n/2}x^{3*4^n/2} \to \emptyset$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4238 ▲005745

1. Sea $z \neq 0$. Para $n > \mathrm{e}^{1/|z|}$, se tiene $|z|\ln n > 1$ y así la sucesión $((\ln n)^n z^n)$ no tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$. Así, para todo número complejo no nulo z, la serie propuesta diverge groseramente.
   $$\boxed{R = 0.}$$
2. Sea $z \neq 0$. Para $n > \frac{1}{|z|^2}$, se tiene $|z|\sqrt{n} > 1$ y así la sucesión $((\sqrt{n})^n z^n)$ no tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$. Para todo número complejo no nulo z, la serie propuesta diverge groseramente.

$$\boxed{R=0.}$$

3. Según la fórmula de STIRLING

$$(\ln(n!))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right) = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln(\sqrt{2\pi})\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\ln^2 n.$$

La serie entera propuesta tiene el mismo radio de convergencia que la serie entera asociada a la sucesión $(n^2\ln^2 n)$. Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2\ln^2(n+1)}{n^2\ln^2 n} = 1$, la regla de d'ALEMBERT permite afirmar que

$$\boxed{R=1.}$$

4. $n^4\ln\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)) \underset{n\to+\infty}{=} n^4\ln\left(1+\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24}+o(1).$

Entonces $\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1/24}$ y

$$\boxed{R=1.}$$

5. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $a_n = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{n!^2}{(n+1)!^2}\times\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^2(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\times\frac{4n+2}{n+1}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{ne}.$$

y entonces $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Según la regla de d'ALEMBERT,

$$\boxed{R=+\infty.}$$

6. Sea ha visto que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$. Entonces la serie entera propuesta tiene el mismo radio de convergencia que la serie entera asociada a la sucesión $\left(\frac{(n\ln n)^a}{n!^b}\right)$. Luego

$$\frac{((n+1)\ln(n+1))^a/(n+1)!^b}{(n\ln n)^a/n!^b} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^b}$$

y entonces, de acuerdo a la regla de d'ALEMBERT

$$\boxed{\text{si } b>0,\ R=+\infty,\ \text{si } b=0,\ R=1 \text{ y si } b<0,\ R=0.}$$

7. Si $a=0$, $R=+\infty$. Se supone $a\neq 0$.
   - Si $b>1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ y entonces $R=\frac{b}{a}$.
   - Si $b=1$, $\frac{a^n}{1+b^n} = \frac{a^n}{2}$ y $R=a$.
   - Si $0\leqslant b<1$, $\frac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$ y $R=a$. En todos los casos

$$\boxed{R=\frac{\operatorname{Max}(1,b)}{a} \text{ si } a>0 \text{ y } R=+\infty \text{ si } a=0.}$$

Solución del ejercicio 4241 ▲004581

---

1. $-1+\sqrt{x}\,\operatorname{argth}\sqrt{x}$, para $0\leqslant x<1$ y $-1-\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}$, para $-1\leqslant x\leqslant 0$.
2. $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.
3. $\dfrac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.
4. $\dfrac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (descomponer en elementos simples).
5. $-\frac{1}{2}(x+(x^2+1)\arctan x)$ (descomponer en elementos simples).
6. $-1+\frac{u}{4}\operatorname{argth} u-\frac{u}{2}\arctan u$, $u=\sqrt[4]{x}$.
7. $\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}\operatorname{argth}\sqrt{x}$, para $0\leqslant x<1$ y $\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{5}{2\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}$, para $-1<x\leqslant 0$.
8. $-\frac{1}{2}\ln(1-2x\operatorname{ch} a+x^2)$.
9. $1-\dfrac{5\cos 2\theta-4}{(5-4\cos 2\theta)^2}$ (linealizar).
10. $\dfrac{2x-1}{(1-x)^2}-\dfrac{2\ln(1-x)}{x}$.
11. $\operatorname{ch}\sqrt{x}$, para $x\geqslant 0$ y $\cos\sqrt{-x}$, para $x\leqslant 0$.
12. $\dfrac{e^{x^2}}{2}-\dfrac{e^{x^2\cos 2\theta}}{2}\cos(x^2\operatorname{sen} 2\theta)$.
13. $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.
14. $\dfrac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f'''=f)$.
15. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.
16. $\dfrac{x^2-1}{2}$.
17. $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Solución del ejercicio 4242 ▲004582

$R=\sqrt{2}-1$, $\Sigma=\dfrac{1-x}{1-2x-x^2}$.

Solución del ejercicio 4243 ▲004583

1.
2. Si existe $\lambda\in\operatorname{Sp}(A)$ tal que $|\lambda|\geqslant 1$ y si x es un vector propio asociado, entonces $kA^kx=k\lambda^kx\not\to 0$, entonces la serie diverge. Si todos los valores propios de A son de módulo <1, como $kA^k=\sum_\lambda \lambda^k P_\lambda(k)$, donde los P_λ son polinomios con coeficientes matriciales, la serie converge absolutamente.
3. $S=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)A^{k+1}=AS+\sum_{k=0}^{\infty}A^{k+1}=AS+A(I-A)^{-1}$, por lo tanto $S=A(I-A)^{-2}$ es invertible si y solo si A es.

Solución del ejercicio 4244 ▲004584

---

1. $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 1$. $\chi_A(-1) > 0$, $\chi_A(0) < 0$, $\chi_A(1) > 0$, $\chi_A(2) > 0$, $\chi_A(3) < 0$, por lo tanto χ_A admite una raíz en cada uno de los intervalos $]-1,0[$, $]0,1[$ y $]2,3[$.
2. Cayley-Hamilton : $t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2} - t_{n-3}$.
3. Sean $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < 2 < \gamma < 3$ valores propios de A. Se tiene $t_n z^n = (\alpha z)^n + (\beta z)^n + (\gamma z)^n$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ converge si y solo si $|\gamma z| < 1$ y vale la pena :

$$\frac{1}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\beta z} + \frac{1}{1-\gamma z} = \frac{1}{z}\frac{\chi'}{\chi}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-z^2-4z+3}{z^3-z^2-2z+1}.$$

Solución del ejercicio 4245 ▲004585

$$= -\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^3}\,dt = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - 1.$$

Solución del ejercicio 4246 ▲004586

$R = 1$. Se descompone P bajo la forma : $P = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)(X+2) + \dots + a_p(X+1)\dots(X+p)$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{(1-x)^2} + \dots + \frac{p!\,a_p}{(1-x)^{p+1}}$.

Solución del ejercicio 4247 ▲004587

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{2^n} = \frac{2\operatorname{sen}\theta}{5-4\cos\theta}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n2^n} = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(5-4\cos\theta)$.

Solución del ejercicio 4248 ▲004588

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n = \frac{e^{-t}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} t^n$, por lo tanto $u_n \to \frac{1}{e}$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4249 ▲005746

1. La regla de ALEMBERT demuestra que la serie propuesta tiene un radio de convergencia igual a 1.

   1a solución. Para $x \in]-1,1[$, se establece $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n$. f es derivable en $]-1,1[$ y para x en $]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

   Después, para $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = (1-x)\ln(1-x) + x$.

   2a solución. Para $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n = x\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.}$$

2. La regla de ALEMBERT demuestra que la serie propuesta tiene un radio igual a 1. Para $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n = \begin{cases} 3\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))\right) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

3. La regla de ALEMBERT demuestra que la serie propuesta tiene un radio igual a 1.
   • Sea $x \in]0,1[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}))$$
$$= \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

   • Sea $x \in]-1,0[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{(-x)^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} \frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-1,0[. \end{cases}}$$

4. La regla de ALEMBERT demuestra que la serie propuesta tiene un radio igual a $+\infty$. Para x real,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1-1}{(2n+1)!}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^n.$$

   • Si $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right).$$

   • Si $x < 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n} - \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{sen}(\sqrt{-x})\right).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}(\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{sen}(\sqrt{-x})\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

5. Inmediatamente, $R=+\infty$ y

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch}x).}$$

6. $\operatorname{ch}n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{2}$ y entonces $R=\frac{1}{\mathrm{e}}$. Para x en $\left]-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{ch}n)x^n&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{e}x)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}x}+\frac{1}{1-\frac{x}{\mathrm{e}}}\right)=\frac{1}{2}\frac{2-\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x}{x^2-\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x+1}\\&=\frac{1-x\operatorname{ch}1}{x^2-2x\operatorname{ch}1+1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(\operatorname{ch}n)x^n=\frac{1-x\operatorname{ch}1}{x^2-2x\operatorname{ch}1+1}.}$$

7. La serie propuesta es el producto de CAUCHY de series enteras $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ y ambas de radio 1. Entonces $R\geqslant 1$. Pero, por otra parte, para todo entero natural no nulo n, $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant 1$ y $R\leqslant 1$. Finalmente, $R=1$. Además, para x en $]-1,1[$, $f(x)=\frac{1}{1-x}\times-\ln(1-x)=\frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

8. La regla de ALEMBERT demuestra que el radio de convergencia es igual a $+\infty$. Para n entero natural dado, $\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}=\frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$, luego

$$\begin{aligned}n^3+5n^2+3n-1&=(n+2)(n+1)n+2n^2+n-1=(n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5n-5\\&=(n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5(n+2)+5.\end{aligned}$$

Entonces, para todo real x,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!}x^n-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{(n+2)!}x^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}x^n.$$

Luego $f(0)=-\frac{1}{2}$ y para $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n-5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}x^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}x^n\\&=x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+5\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)}x^n=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2} & \text{si } x\in\mathbb{R}^*\\ -\frac{1}{2} & \text{si } x=0.\end{cases}}$$

9. Para $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\leqslant a_n=n^{(-1)^n}\leqslant n$ y entonces $R=1$. Para x en $]-1,1[$, $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k$. Luego

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)x^k = 2x\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1} = 2x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)' = 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^2}.$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n = \operatorname{argth}x + \frac{2x}{(1-x)^2}.}$$

10. $R=1$. Para x real no nulo en $]-1,1[$, $f(x) = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^4)^n}{n} = -\frac{\ln(1+x^4)}{4x}$ y si no $f(0)=0$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n-1}}{4n} = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1+x^4)}{4x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}}$$

11. La regla de ALEMBERT proporciona $R=\frac{1}{2}$. Para x en $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n &= 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)(2x)^n - 3\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2x)^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)\\ &= 2\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)'' - 3\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)' + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)\\ &= 2\left(2\frac{1}{1-2x} - 3\frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{4}{(1-2x)^3}\right)\\ &= 2\frac{2(1-2x)^2-6(1-2x)+8}{(1-2x)^3} = 2\frac{8x^2+4x}{(1-2x)^3}.\end{aligned}$$

12. Para $x=1$, la sucesión $((-1)^{n+1}nx^{2n+1})$ no está acotada y por lo tanto, $R\geqslant 1$. Pero la serie converge si $|x|<1$ y $R\leqslant 1$. Finalmente, $R=1$. Para x en $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(2n+2)x^{2n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\right)' + 2x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)' + \frac{2x}{1+x^2}\right)\\ &= -\frac{x(1+x^2)-x^3}{1+x^2)^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = \frac{x^3}{1+x^2)^2}.}$$

13. **1a solución.** Las raíces de la ecuación característica $z^2-z-1=0$ son $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Se sabe que existen dos números reales λ y μ tales que para todo entero natural n,

$$a_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Las igualdades $n=0$ y $n=1$ proporcionan

$$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ \mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \mu=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

Finalmente, para todo entero natural n, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$. Las series enteras respectivamente asociadas a las sucesiones $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ y $\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$ tienen radios respectivos $\left|\frac{1}{(1+\sqrt{5})/2}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $\left|\frac{1}{(1-\sqrt{5})/2}\right| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Estos rayos son distintos, la serie propuesta tiene radio

$$R = \min\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Para x en $\left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha x)^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}(\beta x)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\alpha\beta x^2 - (\alpha+\beta)x + 1}\\ &= \frac{1}{1-x-x^2}.\end{aligned}$$

2a solución. Se supone a priori que el radio R de la serie propuesta estrictamente positiva. Para x en $]-R,R[$, se tiene

$$\begin{aligned}f(x) &= 1+x+\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} = 1+x+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}+a_n)x^{n+2}\\ &= 1+x+x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ (las dos series tienen el mismo radio)}\\ &= 1+x+x(f(x)-1)+x^2 f(x).\end{aligned}$$

Entonces, necesariamente $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$. Recíprocamente, la fracción racional anterior no admite 0 como polo y, por lo tanto, es desarrollable en serie entera. El radio de convergencia de la serie obtenida es el mínimo de los módulos de los polos de f a saber $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Denotemos $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ este desarrollo. Para todo x de $]-R,R[$, se tiene $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)(1-x-x^2) = 1$ y entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+2} = 1$, lo que se escribe aún $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x_n - \sum_{n=2}^{+\infty} b_{n-2}x^n = 1$. Finalmente,

$$\forall x \in]-R,R[,\ b_0 + (b_1-b_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(bn - b_{n-1} - b_{n-2})x^n = 1.$$

Por unicidad de los coeficientes de una expansión de serie entera, se tiene entonces $b_0 = b_1 = 1$ y $\forall n \geqslant 2$, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. Entonces se deduce por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}.}$$

Observación. Generalizando el trabajo anterior, se puede demostrar que las sucesiones asociadas con las expansiones en series enteras de las fracciones racionales son precisamente las sucesiones que satisfacen las relaciones de recurrencia lineal.

14. Para todo natural n, $1 \leqslant a_n \leqslant n+1$. Entonces $R = 1$. Se observa que para todo número natural n, $a_n = \sum_{k+5l=n} 1$. La serie entera propuesta es, por lo tanto el producto de CAUCHY de series $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ y $\sum_{l=0}^{+\infty} x^{5l}$. Para x en $]-1,1[$, por lo tanto se tiene

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty}x^{5l}\right)=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{(1-x)^5}.$$

Observación. ¿De cuántas maneras se puede pagar 100 euros con monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos de euro, de piezas de 1 y 2 euros y billetes de 10 y 20 euros ? Sea N el número de soluciones. N es el número de soluciones en números enteros $a,b,\dots$ de la ecuación

$$a+2b+5c+10d+20e+50f+100g+200h+500k+1000i+2000j=10000$$

y es, por lo tanto el coeficiente de x^{10000} del desarrollo en serie entera de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100})(1-x^{200})(1-x^{500})(1-x^{1000})(1-x^{2000})}.$$

Sin embargo, la observación es anecdótica y parece mucho más preferible contar el número de soluciones a mano. Los ejercicios 4255 y 4312 de esta placa permiten entender mucho mejor hasta qué punto las series enteras son una herramienta interesante para la enumeración.

Solución del ejercicio 4250 ▲005752

Para todo natural no nulo, $|a_n|\leqslant\frac{1}{n}$ y entonces $R\geqslant 1$. Pero si $x>1$, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n\right)_{n\geqslant 1}$ no está acotada, como vemos al considerar la sucesión extraída de los términos de índices múltiplos de 3 y entonces $R=1$. Para x en $]-1,1[$, $f(x)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(jx)^n}{n}\right)$. El problema entonces es no poder escribir $-\ln(1-jx)$. Es necesario hacerlo de otra manera. f es, por lo tanto derivable en $]-1,1[$ y para x en $]-1;1[$,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^{n-1}=\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}j^nx^{n-1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j}{1-jx}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{j(1-j^2x)}{x^2+x+1}\right)=-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Por consiguiente, para $x\in]-1,1[$, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n=-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1).}$$

Solución del ejercicio 4251 ▲005753

El radio de la serie considerada es igual 1. Sea $x\in]-1,1[$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^n=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right).$$

• Si x está en $]0,1[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right).$$

• Si x está en $]-1,0[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right).$$

• $f(0)=-1$. Ahora, la suma se define de hecho en $[-1,1]$ porque la serie numérica de términos generales $\frac{1}{4n^2-1}$ y $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ convergente. Verificar que la suma es continua en $[-1,1]$. Para x en $[-1,1]$ y $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\frac{x^n}{4n^2-1}\right|\leqslant\frac{1}{4n^2-1}$ que es el término general de una serie numérica convergente. La serie entera considerada converge, por lo tanto normalmente en $[-1,1]$. Se deduce que esta suma es continua en $[-1,1]$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{2}\left(-1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})\right)$$
$$=-\frac{1}{2}$$

Observación. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ (serie telescópica). También se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=f(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)\arctan(\sqrt{-x})\right)$$
$$=\frac{1}{2}(-1-2\arctan 1)=-\frac{\pi+2}{4}.$$

Solución del ejercicio 4252 ▲005754

Para todo natural n, $|a_n|\geqslant\frac{1}{2n+1}$ y por lo tanto, la serie propuesta no converge absolutamente. Para todo entero natural n,

$$|u_n|-|u_{n+1}|=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{4k+1}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2n+3}\times\frac{1}{4n+5}$$
$$=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}\geqslant\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+3)(4n+5)}>0.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{4n+1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{4n+1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt=1+\ln(4n+1)$$

y entonces $|u_n|\leqslant\frac{1+\ln(4n+1)}{2n+1}$. Se deduce que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Finalmente, la serie propuesta converge bajo el criterio especial de series alternadas. Se considera la serie entera $\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^{2n+1}$. La serie de término general a_n converge y por lo tanto, $R\geqslant 1$, pero porque la serie de término general $|a_n|$ diverge y por lo tanto, $R\leqslant 1$.

Finalmente, $R = 1$. Para $x \in]-1,1[$, se escribe $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$. Para x en $]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1} \right) x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1} \right) (-x^2)^n$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{4n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \right) \quad \text{(producto de CAUCHY de dos series numéricas absolutamente convergentes.)}$$

Entonces, para x en $]0,1[$, $f'(x) = g(x)h(x)$, donde $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$, luego

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} (\sqrt{x})^{4n+1}.$$

Ahora, poniendo $k(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^{4n+1}$, para X en $]-1,1[$, $k'(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^{4n} = \frac{1}{X^4+1}$. Luego, poniendo $\omega = e^{i\pi/4}$, por realidad y paridad

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{a}{X-\omega} + \frac{\overline{a}}{X-\overline{\omega}} - \frac{a}{X+\omega} - \frac{\overline{a}}{X+\overline{\omega}}$$

donde $a = \frac{1}{4\omega^3} = -\frac{\omega}{4}$. Se tiene entonces

$$\frac{1}{X^4+1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{X-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{X-\overline{\omega}} - \frac{\omega}{X+\omega} - \frac{\overline{\omega}}{X+\overline{\omega}} \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{X\sqrt{2}-2}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{X\sqrt{2}+2}{X^2+\sqrt{2}X+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2X+2\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \frac{2X-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} \right)$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right)$$

Teniendo en cuenta $k(0) = 0$, obtenemos para $X \in]-1,1[$,

$$k(X) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1) - \ln(X^2-X\sqrt{2}+1) \right) + 2 \left(\arctan(X\sqrt{2}+1) + \arctan(X\sqrt{2}-1) \right) \Big).$$

Así, para todo real $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} k(\sqrt{x}) \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} k'(\sqrt{x})\, k(\sqrt{x})$ y se tiene

$$f(x) = f(0) + \left(k\left(\sqrt{x}\right)^2 - k(0)^2 \right) = k\left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$= \frac{1}{32} \left(\ln(X^2+X\sqrt{2}+1) - \ln(X^2-X\sqrt{2}+1) \right) + 2 \left(\arctan(X\sqrt{2}+1) + \arctan(X\sqrt{2}-1) \right) \Big)^2.$$

Cuando x tiende a 1, $f(x)$ tiende a

$$\frac{1}{32} \left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) + 2(\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1)) \right)^2 = \frac{1}{32} \left(\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi \right)^2.$$

(pues $\arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan(\sqrt{2}-1) = \arctan(\sqrt{2}+1)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{\pi}{2}$).

En fin, para x en $[0,1]$ y n en $\mathbb{N}$, $|u_n|x^n - |u_{n+1}|x^{n+1} \geqslant (|u_n| - |u_{n+1}|)x^n \geqslant 0$ y la serie numérica de término general u_nx^n se alternada. Según una mayoración clásica del resto a de orden n de una serie tal, para todo entero natural n y todo real x de $[0,1]$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k\right| \leqslant \left|u_{n+1}x^{n+1}\right| \leqslant |u_{n+1}|,$$

y entonces $\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leqslant |a_{n+1}| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La convergencia es uniforme en $[0,1]$ y se deduce que la suma es continua en $[0,1]$. En particular

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}\right) = \frac{1}{32}\left(\ln(3+2\sqrt{2})+\pi\right)^2.}$$

Solución del ejercicio 4253 ▲005757

Para todo natural n, $a_{n+1}+b_{n+1} = 2(a_n+b_n)$ y $3a_{n+1}+2b_{n+1} = 3a_n+2b_n$ (recordar que estas combinaciones lineales son proporcionadas por los vectores propios de ${}^tA$ si no lo adivina). Se deduce que para todo entero natural n, $a_n+b_n = 2^n(a_0+b_0) = 2^n$ y $3a_n+2b_n = 3a_0+2b_0 = 3$. Finalmente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3-2^{n+1} \text{ y } b_n = 3(2^n-1).$$

Las dos series propuestas son entonces claramente de radios infinitos y para todo los números reales x, $f(x) = 3e^x - 2e^{2x}$ y $g(x) = 3(e^{2x}-e^x)$. (Se pueden tener otras ideas para la resolución, más inteligente, pero en última instancia menos eficientes).

Solución del ejercicio 4254 ▲005758

Para $n \geqslant 1$, se escribe $a_n = \frac{1}{nC_{2n}^n}$. Para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}\times\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times\frac{(n+1)!^2}{n!^2} = \frac{n}{2(2n+1)} \quad (*).$$

Así, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4}$ y de acuerdo con la regla de ALEMBERT, el radio de la serie entera considerada es $R = 4$.

Para $x \in]-4,4[$, se escribe $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Las relaciones $(*)$ se escriben todavía $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4(n+1)a_{n+1} - 2a_{n+1} = na_n$.

Sea $x \in]-4,4[$. Se multiplica los dos miembros de la igualdad anterior por x^{n+1} y se suma sobre n. Se obtiene

$$4x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1},$$

o aún $x^2f'(x) = 4x(f'(x)-a_1) - 2(f(x)-a_1x)$ o aún $x(x-4)f'(x)+2f(x) = -x \quad (E)$.

Sea I uno de los dos intervalos $]-4,0[$ o $]0,4[$. Sobre I, la ecuación (E) se escribe :

$$f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x)=-\frac{1}{x-4}.$$

Una primitiva en I de la función $a:\ x\mapsto\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)$ es la función $A:\ x\mapsto\frac{1}{2}(\ln|x-4|-\ln|x|)=\ln\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}$.

$$\begin{aligned}f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right)f(x)=-\frac{1}{x-4}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ \mathrm{e}^{A(x)}f'(x)+a(x)\mathrm{e}^{A(x)}f(x)=\frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{|x-4|}{|x|}}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (\mathrm{e}^{A}f)'(x)=\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}\quad (*).\end{aligned}$$

Determinar una primitiva de la función $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sobre I.

• Si $I=]0,4[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}=\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$ y una primitiva de la función $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sobre I es la función $x\mapsto\arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right)$. Después

$$\begin{aligned}f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ \mathrm{e}^{A(x)}f(x)=\arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\\ &\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C\right).\end{aligned}$$

• Si $I=]-4,0[$, $\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}=\frac{1}{\sqrt{x(x-4)}}=\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-4}}$ y una primitiva de la función $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{|x(x-4)|}}$ sobre I es la función $x\mapsto-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)$. Así

$$\begin{aligned}f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ \mathrm{e}^{A(x)}f(x)=\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'\\ &\Leftrightarrow \exists C'\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-4}}\left(-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'\right).\end{aligned}$$

f debe ser definido, continua y derivable en $]-4,4[$ y en particular derivable en 0.
Esto impone $\lim_{x\to 0^+}\arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C=0$ (porque si no $f(x)\underset{0^+}{\sim}C\sqrt{x}$) y entonces $C=\frac{\pi}{2}$.
Para $x\in]0,4[$, se tiene entonces $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsen\left(\frac{2-x}{2}\right)\right)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\arccos\left(\frac{2-x}{2}\right)$, lo que es aún cierto para $x=0$ por continuidad.
Igualmente, $\lim_{x\to 0^-}-\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+C'=0$ y entonces $C'=0$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\forall x\in]-4,4[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nC_{2n}^n}x^n=\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{4-x}}\arccos\left(\frac{2-x}{2}\right) & \text{si } x\in[0,4[\\ -\sqrt{\frac{x}{x-4}}\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) & \text{si } x\in]-4,0].\end{cases}}$$

Solución del ejercicio 4255 ▲005763

Se tiene $I_0 = 0$, $I_1 = 1$ y $I_2 = 2$ (la identidad y transposición $\tau_{1,2}$).
Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Hay I_{n+1} involuciones σ de $[\![1,n+2]\!]$ verificando $\sigma(n+2) = n+2$ porque la restricción de tal permutación a $[\![1,n+1]\!]$ es una involución de $[\![1,n+1]\!]$ y recíprocamente.
Si $\sigma(n+2) = k \in [\![1,n+1]\!]$, necesariamente $\sigma(k) = n+2$, luego la restricción de σ a $[\![1,n+2]\!] \setminus \{k,n+2\}$ es una involución y recíprocamente existe I_n involuciones de $[\![1,n+2]\!] \setminus \{k,n+2\}$ y $n+1$ escogencias posibles de k y entonces $(n+1)I_n$ involuciones de $[\![1,n+2]\!]$ tales que $\sigma(n+2) \neq n+2$.
En resumen,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n.$$

El radio R de la serie entera asociada a la sucesión $\left(\frac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es superior o igual a 1, pues $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_n}{n!} \leqslant 1$.
Para x en $]-R,R[$, se escribe $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$. f es derivable en $]-R,R[$ y para $x \in]-R,R[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{(n-1)!}x^{n-1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+2}}{(n+1)!}x^{n+1} = 1 + 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1} + (n+1)I_n}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n \\
&= 1 + 2x + f(x) - x + xf(x) = 1 + x + (x+1)f(x).
\end{aligned}$$

Entonces, para $x \in]-R,R[$, $f'(x) + (x+1)f(x) = x+1$ o aún $e^{\frac{x^2}{2}+x}f'(x) + (x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x) = (x+1)e^{\frac{x^2}{2}+x}$.
Así, para $x \in]-R,R[$,

$$e^{\frac{x^2}{2}+x}f(x) - f(0) = \int_0^x (t+1)e^{\frac{t^2}{2}+t}\,dt = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1,$$

y ya que $f(0) = 0$, $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1$.
Recíprocamente, la función anterior se puede desarrollar como serie entera en $\mathbb{R}$ en virtud de teoremas generales ($= e^{\frac{x^2}{2}} \times e^x$) y los coeficientes de esta expansión satisfacen las relaciones que definen $\frac{I_n}{n!}$ de manera única. Entonces, estos coeficientes son los $\frac{I_n}{n!}$, lo que demuestra que $R = +\infty$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n = e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1.}$$

Solución del ejercicio 4256 ▲004574

1. $= \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} - 2\frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right).$
2. Factorizar : $-\ln 6 + \left(\frac{5}{6} + \ln 6\right)x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^n} + \frac{2n+1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n(n-1)}.$

3. Derivar el ln : $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n$.

5. $\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+2\sqrt{2}^n(2\cos(3n\pi/4)-\operatorname{sen}(3n\pi/4))\right)x^n$.

6. Integrar : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^{n+2}-(\sqrt{2}-1)^{n+2}\right)x^n$.

7. $= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-1)^n(x^{2n}-x^{2n+1})$.

8. Derivar : $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^n}(-1)^n x^n$.

9. Derivar : $\frac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/6)}{n2^n} x^n$.

10. Derivar, factorizar : $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n+2^{-n}}{n^2} x^n$.

11. Linealizar : $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!}\left(x^{2n-1}+\frac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n}\right)$.

12. Derivar : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)} x^{2n+1}$.

13. $y' = -4xy+1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

14. $2x(1-x)y'+(1-2x)y = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n} x^n$.

15. $(1-x^2)y''-xy'+\frac{y}{9} = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n C_{3n}^n}{(2n+1)3^{3n+1}} x^{2n+1}$.

Solución del ejercicio 4257 ▲004575

$= \frac{1}{2}\ln(e^a-x)+\frac{1}{2}\ln(e^{-a}-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ka)}{k} x^k$.

Solución del ejercicio 4258 ▲004576

$\frac{e^{x^2}}{1-x} = (1+x)\frac{e^{x^2}}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)(x^{2n}+x^{2n+1})$.

Solución del ejercicio 4259 ▲004577

$f(\operatorname{sh} y) = e^{y/2}$ por lo tanto, la ecuación diferencial : $(1+x^2)f''(x)+xf'(x) = \frac{1}{4}f(x)$.

Usando $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se obtiene $4(k+1)(k+2)a_{k+2} = -(2k+1)(2k-1)a_k$, con $a_0 = f(0) = 1$ y $a_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$, de donde $a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}C_{4p-2}^{2p-1}}{p2^{4p}}$ si $p \geqslant 1$ y $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p C_{4p}^{2p}}{2^{4p+1}(2p+1)}$ si $p \geqslant 0$.

El radio de convergencia de la serie correspondiente es 1, lo que valida el método (con el teorema de unicidad de Cauchy-Lipschitz).

Solución del ejercicio 4260 ▲004578

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$

Solución del **ejercicio 4261** ▲004579

Coeficiente de x^n en $(\sum x^k)(\sum (k+1)x^k)(\sum (k+1)^2 x^k) = \frac{1+x}{(1-x)^6}$

$\Rightarrow c_n = \binom{n+5}{5} + \binom{n+4}{5} = \frac{(2n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}.$

Solución del **ejercicio 4263** ▲004589

1. Para $|x| < \frac{1}{q}$: $\ln f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-q^n x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{kn}x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k x^k}{k(1-q^k)}$,
   $f = \mathrm{e}^{\ln f}$ es DSE por composición.
2. $a_n = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q-1)\cdots(q^n-1)}$, $R = \infty$.

Solución del **ejercicio 4264** ▲004590

$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}\mathrm{e}^{-n} \geqslant k^{2k}\mathrm{e}^{-k}$, por lo tanto $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geqslant k^k \mathrm{e}^{-k} \Rightarrow R = 0$.

Solución del **ejercicio 4265** ▲004591

Hay derivación término a término fácilmente e indefinidamente.

DSE en un vecindario de 0 : se planea permutar las $\sum$ en : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha}\frac{(inx)^p}{p!}$, que es legítimo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha}\mathrm{e}^{n|x|}$ converge. Se deduce que una condición suficiente para que f sea DSE en un vecindario de 0 es $\alpha \geqslant 1$ (con convergencia si $x \in\,]-1,1[$, para $\alpha = 1$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha > 1$).

Caso $\alpha < 1$: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha} n^k \geqslant \mathrm{e}^{-N^\alpha} N^k$, con $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$, por lo tanto para $r > 0$ fijo y k tendiendo al infinito se tiene $\ln\left(\left|\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}\right|\right) \sim \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) k\ln(k)$ y la serie de término general $\frac{f^{(k)}(0)r^k}{k!}$ diverge groseramente.

DSE en un vecindario de $a \neq 0$: el mismo razonamiento al escribir $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha}\mathrm{e}^{ina}\frac{(in(x-a))^p}{p!}$. En conclusión, f es analítica en $\mathbb{R}$ si y solo si $\alpha \geqslant 1$.

Solución del **ejercicio 4266** ▲004592

1. Para $x \neq 0$ la serie tiene un número finito de términos no nulos en un vecindario de x, así es $\mathscr{C}^\infty$ en un vecindario de x. Se tiene $|f^{(k)}(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^{k-n}\varphi_n^{(k)}(\lambda_n x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\lambda_n^{k-n}M_n \leqslant \mathrm{cte}(k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|M_n/\lambda_n$ suponiendo $\lambda_n \geqslant 1$, para $n \geqslant k$, por lo tanto $f^{(k)}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Esto implica que f es $\mathscr{C}^\infty$ en 0 y se tiene el desarrollo limitado : $f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + o(x^k)$, pues $\phi \equiv 1$ en un vecindario de 0, por lo tanto $f^{(k)}(0) = k!\,a_k$.

2. $\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{(1-x)(x-2)}\right)$ sobre $]1,2[$, $\psi(x) = 0$ en otro lugar.

Solución del ejercicio 4267 ▲005747

En cada pregunta, se denota f la función considerada.

1. f es desarrollable en serie entera en el origen como una fracción racional que no admite 0 como polo. El radio de desarrollo es el mínimo de los módulos de los postes de f a saber 1. Para x en $]-1,1[$,
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

2. f es desarrollable en serie entera en el origen como una fracción racional que no admite 0 como polo. **1er caso.** Si $|t| < 1$, sea $\theta = \arccos t$. Se tiene entonces $\theta \in]0,\pi[$ y $t = \cos(\theta)$. Para todo real x, se tiene
$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}),$$
con $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$. Los polos son de módulo 1 y el radio del desarrollo es, por lo tanto igual a 1. Para x en $]-1,1[$,
$$\frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \frac{1}{2i\operatorname{sen}(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{i\theta}} - \frac{1}{x - e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{2i\operatorname{sen}(\theta)}\left(-\frac{e^{-i\theta}}{1 - xe^{-i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right)$$
$$= \frac{1}{2i\operatorname{sen}(\theta)}\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{en\theta}x^n - e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\operatorname{sen}\theta}x^n.$$
$$\boxed{\forall t \in]-1,1[, \forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{x^2 - 2xt + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\operatorname{sen}\theta}x^n, \text{ donde } \theta = \arccos t.}$$
2o caso. Si $t > 1$, se puede escribir $t = \operatorname{ch}(\theta)$, donde θ es un cierto real positivo o nulo. Más precisamente, $\theta = \operatorname{argch} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \in]0,+\infty[$. Para todo real x, se tiene
$$x^2 - 2tx + 1 = x^2 - 2x\operatorname{ch}(\theta) + 1 = (x - e^{\theta})(x - e^{-\theta}),$$
con $e^{\theta} \neq e^{-\theta}$. Los módulos mínimos de los polos de f es $e^{-\theta} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} = t - \sqrt{t^2 - 1}$. Por lo tanto, el radio del desarrollo es $R = t - \sqrt{t^2 - 1}$. Para $x \in]-R,R[$,
$$\frac{1}{x^2 - 2x\operatorname{ch}(\theta) + 1} = \frac{1}{2\operatorname{sh}(\theta)}\left(\frac{1}{x - e^{\theta}} - \frac{1}{x - e^{-\theta}}\right) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(\theta)}\left(-\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{-\theta}} + \frac{e^{\theta}}{1 - xe^{\theta}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\operatorname{sh}(\theta)}\left(e^{\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n\theta}x^n - e^{-\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\theta}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}((n+1)\theta)}{\operatorname{sh}\theta}x^n.$$
3o caso. Si $t < -1$, se aplica lo anterior a $-t$ y $-x$.
4o caso. Si $t = 1$, para $x \in]-1,1[$,
$$\frac{1}{x^2 - 2xt + 1} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$
Si $t = -1$, reemplazando x por $-x$, se obtiene por $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

3. Para todo real x, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ y así si $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$. Para $x \in]-2,2[$,

$$\ln(x^2-5x+6)=\ln(2-x)+\ln(3-x)=\ln(6)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right),$$

y como para x en $]-2,2[$, $\frac{x}{2}$ y $\frac{x}{3}$ están en $]-1,1[$,

$$\ln(x^2-5x+6)=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n},$$

y en particular la función f es desarrollable en serie entera y el radio del desarrollo es 2 claramente.

4. Si $\cos a=0$, la función f está definida y es derivable en $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ y si $\cos a\neq 0$, f es definida y derivable en $\mathscr{D}=\left]-\infty,\frac{1}{\cos a}\right[\cup\left]\frac{1}{\cos a},+\infty\right[$. Para $x\in\mathscr{D}$,

$$f'(x)=\operatorname{sen}a\times\frac{1}{(1-x\cos a)^2}\times\frac{1}{1+\left(\dfrac{x\operatorname{sen}a}{1-x\cos a}\right)^2}=\frac{\operatorname{sen}a}{x^2-2x\cos a+1}.$$

De acuerdo a 2), la función f' es en todo caso desarrollable en serie entera, el radio de desarrollo es 1 y para x en $]-1,1[$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}((n+1)a)}{\operatorname{sen}a}x^n.$$

Entonces se sabe que la función f es desarrollable en serie entera, que la expansión tiene el mismo radio de convergencia y se obtiene integrando término a término. Entonces, para x en $]-1,1[$,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(n+1)a)}{\operatorname{sen}a}x^{n+1}.$$

5. La función f es desarrollable en serie entera como una fracción racional que no admite 0 como polo. El radio es el mínimo de los módulos de los polos de f a saber 1.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-p)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{x-k}$$

con $\lambda_k=(-1)^{p-k}\frac{1}{(k-1)!(p-k)!}=(-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k$. Por consiguiente, para x en $]-1,1[$

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\frac{k}{p!}C_p^k\left(-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{k}}=\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}C_p^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{k^n}\right)\\&=\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\frac{C_p^k}{k^n}\right)x^n.\end{aligned}$$

6. La función f es dos veces derivable en $]-1,1[$ y para x en $]-1,1[$, $f'(x)=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arcsen}x$, luego

$$f''(x)=2x\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\operatorname{arcsen}x+\frac{2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}f'(x)+\frac{2}{1-x^2}.$$

Entonces, para x en $]-1,1[$,

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2 \quad (1) \quad \text{y } f(0)=f'(0)=0 \quad (2).$$

Se admite que estas igualdades determinan la función f de manera única. Sea $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ una serie entera de radio R se supone a priori estrictamente positivo. Para $x\in]-R,R[$, se establece $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

g es solución de (1) en $]-R,R[$:

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ (1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} = 2$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^{n} = 2$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^{n} = 2$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n) x^{n} = 2$$
$$\Leftrightarrow a_2 = 1 \ \text{ y } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad \text{(por unicidad de los coeficientes de un DES).}$$

En resumen, la función g es solución de (1) y (2) sobre $]-R,R[$ si y solo si $a_0 = a_1 = 0$ y $a_2 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ (3) luego

$$(3) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \ \text{ y } \ a_0 = 0,\ a_2 = 1 \ \text{ y } \ \forall n \geqslant 2,\ a_{2n} = \frac{((2n-2)\times\cdots\times 4\times 2)^2}{(2n)\times(2n-1)\cdots\times 4\times 3}a_2$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 0 \ \text{ y } \ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \ \text{ y } \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}$$

En resumen, bajo la hipótesis $R > 0$, la función g es solución de (1) y (2) sobre $]-R,R[$ si y solo si $\forall x \in]-R,R[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n} x^{2n}$.

Recíprocamente, calculemos el radio de la serie entera anterior. Para x real no nulo,

$$\left| \frac{2^{2n+1}(n!)^2 x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2 x^{2n}} \right| = \frac{4x^2 n^2}{(2n+2)(2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x^2.$$

Según la regla de d'ALEMBERT, la serie propuesta converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge groseramente para $|x| > 1$. El radio de la serie propuesta es así $1 > 0$ que valida los cálculos anteriores. Por unicidad de la solución de (1) y (2) sobre $]-1,1[$, f es desarrollable en serie entera y

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \text{arcsen}^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n} x^{2n}.}$$

7. Para todo real x, $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ (el radio es infinito). Entonces se sabe que la función f es desarrollable en serie entera, que el radio de la expansión es aún infinito y que se puede integrar término a término para obtener (considerando el hecho $f(0) = 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)\times(2n)!}.}$$

8. Los ceros del polinomio t^4+t^2+1 son j, j^2, $-j$ y $-j^2$. Entonces la función $t\mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ es desarrollable en serie entera como una fracción racional que no admite cero por polo y que el radio de la serie obtenida es 1. Después para t en $]-1,1[$,

$$\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{1-t^2}{1-t^6}=(1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n}-\sum_{n=0}^{+\infty}t^{6n+2}=1-t^2+t^6-t^8+t^{12}-t^{14}+\cdots.$$

La función $t\mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ es continua en $]-\infty,0]$ y despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $-\infty$. La función $t\mapsto \frac{1}{t^4+t^2+1}$ es, por lo tanto integrable en $]-\infty,0]$. Por integración lícita término a término, se obtiene por x en $]-1,1[$,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\int_0^x\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).$$

Cálculo de $I=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt$. Por paridad y ser real, $\frac{1}{t^4+t^2+1}=\frac{a}{t-j}+\frac{\overline{a}}{t-j^2}-\frac{a}{t+j}-\frac{\overline{a}}{t+j^2}$, con $a=\frac{1}{4j^3+2j}=\frac{1}{2(2+j)}=\frac{2+j^2}{2(2+j)(2+j^2)}=\frac{1-j}{6}$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^4+t^2+1}&=\frac{1}{6}\left(\frac{1-j}{t-j}+\frac{1-j^2}{t-j^2}-\frac{1-j}{t+j}-\frac{1-j^2}{t+j^2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{3t+3}{t^2+t+1}+\frac{-3t+3}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{t^2+t+1}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{t^2-t+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt&=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{0}\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

En resumen, $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t^{6n+1}}{6n+1}-\frac{t^{6n+3}}{6n+3}\right).}$

9. f es desarrollable en serie entera en $\mathbb{R}$ en tanto que producto de funciones desarrollables en series enteras en $\mathbb{R}$. Para x real,

$$\begin{aligned}\cos x\operatorname{ch}x&=\frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}\right)\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^n+(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4})^n\right)\frac{x^n}{n!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{2p}(-1)^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)!} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^{4k}(-1)^{2k}\cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)\frac{x^{4k}}{(4k)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x\,\mathrm{ch}\,x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k-2}\frac{x^{4k}}{(4k)!}.}$$

Solución del ejercicio 4268 ▲005748

Para x real no nulo, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, lo que es aún cierto para $x=0$. La función f por lo tanto, se puede desarrollar en serie entera en $\mathbb{R}$ y, en particular, la función f es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4269 ▲005756

Para x real, se sabe que $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right)$.
La función F es impar, por lo que los coeficientes de índice par son nulos. Por otra parte, para $n\in\mathbb{N}$, el coeficiente de x^{2n+1} del producto de Cauchy de las dos series anteriores es

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

El método elegido proporciona clásicamente una expresión complicada de los coeficientes.
También se puede obtener F como la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden. F es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x, $F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt + 1 = -2xF(x)+1$. F está determinada únicamente por las condiciones $F'+2xF = 1$ y $F(0) = 0$ (*). F es desarrollable en serie entera en $\mathbb{R}$ según el inicio del ejercicio y impar. Para x real, se escribe por lo tanto $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+1}$.

$$(*) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+2} = 1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n + 2a_{n-1})x^{2n} = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ y } \forall n\geqslant 1,\ (2n+1)a_n + 2a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ y } \forall n\geqslant 1,\ a_n = -\frac{2}{2n+1}a_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 1 \text{ y } \forall n\geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}a_0$$
$$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Se ha demostrado que para todo real x, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Por unicidad de los coeficientes de una serie entera, $\forall n\in\mathbb{N}$, se obtiene en particular,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(2k+1)}\times\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}.$$

Solución del ejercicio 4270 ▲005761

1. La función f es de clase C^∞ sobre $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ en tanto que cociente de funciones de clase C^∞ sobre $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ cuyo denominador no se anula en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y además $f' = 1+f^2$.
Demostrar por inducción que para todo natural n, existe un polinomio P_n, con coeficientes enteros naturales tales que $f^{(n)} = P_n \circ f$ (o aún $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$).
• Es cierto para $n=0$, con $P_0 = X$ y para $n=1$, con $P_1 = 1+X^2$.
• Sea $n \geqslant 1$. Se supone que para todo $k \in [\![0,n]\!]$, existe un polinomio P_k, con coeficientes enteros naturales tales que $f^{(k)} = P_k \circ f$. Según la fórmula de LEIBNIZ,
$$f^{(n+1)} = (1+f^2)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}f^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}\right)\circ f$$
y el polinomio $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_kP_{n-k}$ es un polinomio con coeficientes enteros naturales tales que $\tan^{(n+1)} = P_{n+1}\circ f$.
Observación. Se puede también derivar la igualdad $f^{(n)} = P_n\circ f$, para obtener $f^{(n+1)} = f' \times P_n' \circ f = (P_1 \times P_n')\circ f$, pero ya se tiene en mente una relación de recurrencia sobre los coeficientes del desarrollo de tangente que no está dada por esta última igualdad.
2. Sean $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y $n \in \mathbb{N}$. La fórmula de TAYLOR-LAPLACE de orden n en 0 proporciona
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$
El 1) demuestra que para todo real t de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y todo entero natural k, $f^{(k)}(t) = P_k(\tan t) \geqslant 0$. Entonces, por un lado $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \geqslant 0$ y por otro lado,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$
La sucesión de sumas parciales de la serie de término general $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \geqslant 0$ es mayorada y entonces la serie de término general $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge. Así, la serie de TAYLOR de f en el origen converge para todo real x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Su radio de convergencia R es, por lo tanto mayor o igual que $\frac{\pi}{2}$ (y por lo tanto, la serie de término general $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge también para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right]$). Por otro lado, no existe razón por el momento para que su suma sea f.
3. Para n entero natural dado, se escribe $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, luego para x en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, se escribe $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$. Sea ha visto que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}P_kP_{n-k}$. Se divide los dos miembros de estas igualdades por $n!$ y se toma el valor en 0 ($=\tan 0$). Se obtiene
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} = a_ka_{n-k} \text{ y también } a_0 = 0 \text{ y } a_1 = 1.$$
Entonces, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n = 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\right)x^n = 1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2$$
$$= 1+g^2(x).$$

Además, $g(0) = a_0 = 0$.
Para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, se escribe entonces $h(x) = \arctan(g(x))$. La función h es derivable en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} = 1, \text{ luego } h(x) = h(0) + (x-0) = x.$$

Así, para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x = f(x)$. Esto demuestra que f es desarrollable en serie entera en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pero cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$ para valores inferiores, $g(x) = f(x)$ tiende a $+\infty$ y entonces $R \leqslant \frac{\pi}{2}$, luego $R = \frac{\pi}{2}$.
En resumen, la función tangente se puede desarrollar como serie entera en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donde $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ ya que la función tangente es impar.

4. $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$, luego $a_1 = 1$.
$3a_3 = a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 = 1$ y entonces $a_3 = \frac{1}{3}$.
$5a_5 = 2a_1a_3 = \frac{2}{3}$ y entonces $a_5 = \frac{2}{15}$.
$7a_7 = 2a_1a_5 + a_3^2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{51}{135} = \frac{17}{45}$ y $a_7 = \frac{17}{315}$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan x = x + \frac{x^3}{2} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots}$$

5. Para todo real x, $\operatorname{th}(x) = \frac{1}{x}\tan(ix)$ y por lo tanto, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(ix)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

Esta serie entera tiene también por radio de convergencia $\frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 4271 ▲005762

Sea $x \in \mathbb{R}$. La función $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)$ es continua en $[0, +\infty[$, despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$ y por lo tanto, integrable en $[0, +\infty[$. La función F por lo tanto, se define en $\mathbb{R}$ e impar.
Sea $x \in \mathbb{R}$. Para todo real t, se escribe $f(t) = e^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)$. Para $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$e^{-t^2}\operatorname{sen}(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$, se escribe $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1} e^{-t^2}$.
• Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}$, es continua y luego integrable en $[0, +\infty[$ porque es despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$.
• La serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplemente a la función f sobre $[0, +\infty[$.
• Luego, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2}\, dt$. Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2}\, dt$.
Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Sea A un real estrictamente positivo. Las dos funciones $t \mapsto t^{2n}$ y $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ son de clase C^1 en el segmento $[0, A]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_0^A t^{2n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^A t^{2n}\times t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^A + n\int_0^A t^{2n-1}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}A^{2n}\mathrm{e}^{-A^2} + n\int_0^A t^{2n-1}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt.$$

Cuando A tiende a $+\infty$, se obtiene $I_n = nI_{n-1}$. Teniendo en cuenta, de $I_0 = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$, por lo tanto se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2}$, y

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \dfrac{(n+1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}$ y entonces $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{(n+1)!|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = 0$. Por la regla de d'ALEMBERT, la serie numérica de término general $\dfrac{n!|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge.

En resumen, para todo real x, • Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}$, es continua y luego integrable en $[0,+\infty[$ porque es despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$.

• La serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplemente a la función f sobre $[0,+\infty[$.

• $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt < +\infty$.

De acuerdo a un teorema de integración término a término, para todo real x,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n+1}}{2(2n+1)!}.}$$

F es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!x^{2n}}{2(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^{2n-1}}{(2(2n-1)!} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}F(x).$$

Así, para todo real x, $\mathrm{e}^{x^2/4}F'(x) + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2/4}F(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2/4}}{2}$ y entonces

$$F(x) = F(0) + \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}(tx)\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\,dt.}$$

Solución del ejercicio 4277 ▲004593

---

1. $R = 1$.
2. $x = -1 \Rightarrow$ cv (serie alternada), $x = 1 \Rightarrow$ dv.
3. f es creciente en $[0,1[$, por lo tanto L existe en $[0,+\infty]$. $L = \sup\limits_{[0,1[} f(x) \geqslant \sup\limits_{[0,1[} \sum\limits_{n=1}^{N} x^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ $L = +\infty$.

Solución del ejercicio 4278 ▲004594

1. Función creciente. $\lim\limits_{x \to 1^-} A(x) \geqslant \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$.
2. Demostración del tipo Césaro.

Solución del ejercicio 4279 ▲004595

Continuidad radial.

Solución del ejercicio 4280 ▲004596

$\frac{c_n}{b_n} = a_0 + a_1 \frac{b_{n-1}}{b_n} + \cdots + a_n \frac{b_0}{b_n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k u_{n,k}$ y se aplica el teorema de la convergencia dominada.

Solución del ejercicio 4281 ▲004597

$y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-2} x^n}{\prod\limits_{2 \leqslant k \leqslant n} (3k+2)}$ $(R = \infty)$.

$N = 8 \Rightarrow 0.409954 \leqslant y(1) \leqslant 0.409973$.

Solución del ejercicio 4282 ▲004598

1. $\tan^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}$.
2. Para $0 \leqslant x < \pi/2$ la serie es de términos positivos y las sumas parciales están mayoradas por $\tan x$. Para $-\pi/2 < x \leqslant 0$, hay convergencia absoluta.
3.
4. Si $R > \pi/2$, f tiene un límite finito en $\pi/2$.

Solución del ejercicio 4283 ▲004599

1. Producto de dos series $\Rightarrow R \geqslant 1$. Cuando $x \to 1^-$ $f(x) \to +\infty \Rightarrow R = 1$.
2. $(1-x^2)y' = xy + 1 \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n \Rightarrow a_{2k} = a_0 \frac{C_{2k}^k}{4^k}$, $a_{2k+1} = a_1 \frac{4^k}{(2k+1)C_{2k}^k}$.

   $a_0 = 0$, $a_1 = 1 \Rightarrow y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{4^k x^{2k+1}}{(2k+1)C_{2k}^k}$.
3. $\operatorname{arcsen}^2 x = 2 \int_0^x f(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{k^2 C_{2k}^k}$.

Solución del ejercicio 4284 ▲004600

1. $R = 4$.
2. $y = 4\sqrt{\frac{x}{(4-x)^3}}\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} + c\right)$. $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Solución del ejercicio 4285 ▲004601

1. $R = \sqrt{2}$.
2. Stirling $\Rightarrow a_n\sqrt{2}^{2n+1} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow$ DV.
3. $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2\arcsen(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2-x^2}}$.

Solución del ejercicio 4286 ▲004602

1.
2. $f'(x) = e^x f(x)$.

Solución del ejercicio 4287 ▲004603

1. $a_n \leqslant n!$ por recurrencia.
2. $2f' = f^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x/2}$.
3. $a_n = n!2^{-n}$.

Solución del ejercicio 4288 ▲004604

$Z(x) = \sum_{n,p\geqslant 1} \frac{x^n}{p^{2n}} = \sum_{p\geqslant 1} \frac{x}{p^2 - x}$.

$Z'(x) = \sum_{p\geqslant 1} \frac{p^2}{(p^2-x)^2} = \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2-x} + \sum_{p\geqslant 1} \frac{x}{(p^2-x)^2}$.

$Z^2(x) = \sum_{p,q\geqslant 1} \frac{x^2}{(p^2-x)(q^2-x)} = \sum_{p\neq q} \frac{x^2}{q^2-p^2}\left(\frac{1}{p^2-x} - \frac{1}{q^2-x}\right) + \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^2}{(p^2-x)^2}$

$Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = 2\sum_{p\neq q} \frac{x^2}{(q^2-p^2)(p^2-x)}$.

p fijo, $\sum_{q\neq p} \frac{1}{q^2-p^2} = \frac{1}{2p}\sum_{q\neq p}\left(\frac{1}{q-p} - \frac{1}{q+p}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$.

Así $Z^2(x) - xZ'(x) + Z(x) = \frac{3}{2}\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^2}{p^2(p^2-x)} = \frac{3}{2}(Z(x) - x\zeta(2))$.

Observación : $2Z(x^2) = 1 - \pi x \cotan(\pi x)$ (Euler).

Solución del ejercicio 4289 ▲004605

$\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/2$.

Solución del ejercicio 4291 ▲004607

1. $t^t=\exp(t\ln t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\ln^k t}{k!}$.

2. 0.78343

Solución del ejercicio 4292 ▲004608

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 -\frac{t^n\ln t}{n}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

Solución del ejercicio 4293 ▲004609

Desarrollar en serie entera $\ln(1-t^2)$. $I=\frac{\pi^2}{2}-4\ln 2$.

Solución del ejercicio 4297 ▲005751

Ya se ha visto que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ y la regla de d'ALEMBERT proporciona $R=1$. Sea $x\in]-1,1[$.

Para todo $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y todo entero natural n, $|x^n\cos^n t|\leqslant |x|^n$. Como la serie numérica de término general $|x|^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge, la serie de funciones de término general $t\mapsto x^n\cos^n t$ es normalmente y por lo tanto, uniformemente convergente en el segmento $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Del teorema de integración término a término en un segmento,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt=\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos^n t\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x\cos t}\,dt\\&=\int_0^1\frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}\ \text{(poniendo } u=\tan\left(\frac{t}{2}\right))\\&=2\int_0^1\frac{1}{(1+x)u^2+(1-x)}\,du=2\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)\right]_0^1\\&=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.}$$

Solución del ejercicio 4299 ▲004614

1. Cálculo.
2. Sea $0<r_0<d$ y $R(\theta)$ el radio de la serie de Taylor de f en $r_0e^{i\theta}$. El círculo de centro 0 y de radio r_0 es recubierta por discos abiertos $D(r_0e^{i\theta},\frac{1}{2}R(\theta))$, θ variando de 0 à 2π, por lo que se puede extraer un recubrimiento finito; sea ρ el radio mínimo discos extraídos. Entonces, para $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ se tiene $R(\theta)\geqslant\rho$ (cf. analiticidad de la suma de serie entera en el disco abierto de convergencia). De acuerdo a la primera pregunta se tiene : $\left|\frac{f^{(n)}(r_0e^{i\theta})}{n!}\right|\leqslant\frac{M}{\rho^n}$, donde M mayora $|f|$ sobre $\overline{D}(0,r_0+\rho)$, de donde

para $|r-r_0|<\rho$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{en\theta}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}(r-r_0)^k e^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}(r-r_0)^k\int_0^{2\pi}\frac{f^{(k)}(r_0e^{i\theta})}{k!}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta.$$

lo que demuestra la analiticidad de $\varphi=r\mapsto\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{en\theta}}\,d\theta$ sobre $]0,d[$.

En fin, $\varphi(r)=a_nr^n$ en un vecindario de 0, de donde $\varphi(r)=a_nr^n$ sobre $[0,d[$ por continuación analítica.

3. $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^ke^{ik\theta}}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k.$
   El radio es al menos igual a r, pues f es acotada en $\overline{D}(0,r)$.
4. Resulta de la pregunta 3).
5. Según la pregunta 1., $|a_n|\leqslant\|f\|_\infty/r^n$, para todo $r>0$, por lo tanto $a_n=0$ si $n\geqslant1$.
6. $1/P$ es analítica acotada en $\mathbb{C}$.
7. Se puede pasar al límite uniforme (o dominado) en la pregunta 3).
8. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\Rightarrow f\circ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng^n(z)$ y hay convergencia localmente uniforme.

Solución del ejercicio 4301 ▲004616

$2\Rightarrow1$: evidente.

$1\Rightarrow2$: Sea $a>0$ y $M=\sup(|f(z)|e^{-a|z|})$. $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^ne^{en\theta}}\,d\theta\Rightarrow|a_n|\leqslant M\frac{e^{aR}}{R^n}\leqslant M\inf_{R>0}\frac{e^{aR}}{R^n}=M\left(\frac{ea}{n}\right)^n.$

Así $\sqrt[n]{n!\,\|a_n\|}\leqslant\sqrt[n]{n!}\frac{ea}{n}\to a$, cuando $n\to\infty$. lqfd

---

Solución del ejercicio 4302 ▲004617

1. $f(\bar z)=\overline{f(z)}$.
2. $\mathrm{Im}(f)$ tiene signo constante en el conexo $D\cap\Omega^+$ y $f(z)\sim z$ en un vecindario de 0.
3. Integrar término a término.
4. $\mathrm{Im}(f(re^{i\theta}))\,\mathrm{sen}\,\theta\geqslant0$ por la pregunta 2..

Solución del ejercicio 4304 ▲004619

Se pone, sujeto a la convergencia, $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}z_nt^n$. Entonces :

$$f(t)=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n+\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_j\sum_{n=p+1}^{\infty}z_{n-j}t^n=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n+\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\Big(f(t)-\sum_{n=1}^{p-j}z_nt^n\Big)$$

sea :

$$\Big(1-\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\Big)f(t)=P(t)f(t)=\sum_{n=1}^{p}z_nt^n-\sum_{j=1}^{p}e^{i\omega}p_jt^j\sum_{n=1}^{p-j}z_nt^n=Q(t),$$

por lo tanto $f(t)=Q(t)/P(t)$.

Recíprocamente, sea $Q(t)/P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$: volviendo a los cálculos anteriores, vemos que (a_n) verifica la misma relación de recurrencia que (z_n), con los mismos primeros términos, de donde $z_n = a_n$, para todo n. Si $|t| < 1$, entonces $\left|\sum_{j=1}^{p} e^{i\omega} p_j t^j\right| < 1$, por lo tanto P no tiene raíz en el disco unidad abierto. Si P tampoco tiene raíz en el círculo unitario, entonces la expansión en serie entera de $Q(t)/P(t)$ tiene un radio > 1 y $z_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Si P admite raíces en $\mathbb{U}$ ya se puede decir que la sucesión (z_n) es acotada por $\max(|z_1|, \ldots, |z_p|)$ luego…?

Solución del ejercicio 4305 ▲004620

1.
2. Completitud : sea (f_k) una sucesión de elementos de E por Cauchy, $f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} z^n$. Se tiene, a k y n fijos, por convergencia dominada :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f_k(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = a_{n,k}.$$

La sucesión (f_k) converge uniformemente en $\overline{D}$ a una función $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continua. Se denota :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}.$$

La sucesión (a_n) es acotada, entonces el radio de convergencia de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ es superior o igual a 1. Para $z \in D$ fijo se tiene entonces cuando $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} z^n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_k(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta \\ &\to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \end{aligned}$$

lo que prueba que $\varphi \in E$. Finalmente, se tiene $\|f_k - \varphi\| \to 0$, cuando $k \to \infty$ por convergencia uniforme, de donde $\varphi = \lim_{k\to\infty} f_k$ en E.

3. Sea $f \in E$ y $f_n(z) = f\left(\frac{nz}{n+1}\right)$. Como f es uniformemente continua, f_n converge uniformemente a f sobre $\overline{D}$. Sea $\varepsilon > 0$ y n tal que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Como f_n es desarrollable en serie entera con un radio al menos igual a $1 + \frac{1}{n}$, su desarrollo converge uniformemente hacia f_n sobre $\overline{D}$, entonces existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tal que $\|f_n - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Solución del ejercicio 4306 ▲004621

---

1. $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ $(R = 1)$.

   Para $z, t \in \mathring{D}(0,1)$ se tiene $\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{(z-t)(1-zt)}{(1-z)^2(1-t)^2}$, cantidad nula si y solo si $z = t$, de ahí la inyectividad de $z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$.

2. (a) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z}) \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
Por inyectividad, se deduce que $\mathrm{Im}(f(z))$ mantiene un signo constante en cada semi-disco limitado por $]-1,1[$, y como $f(z) = z + o_{z \to 0}(z)$, este signo es el de $\mathrm{Im}\, z$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it}))\,\mathrm{sen}\, nt\, dt = \frac{\pi a_n r^n}{2}$.
Se tiene $|\mathrm{sen}(nt)| \leqslant n\,\mathrm{sen}(t)$, para $0 \leqslant t \leqslant \pi$ por recurrencia, por lo tanto

$$\frac{\pi |a_n| r^n}{2} \leqslant n \int_0^{\pi} \mathrm{Im}(f(re^{it}))\,\mathrm{sen}\, t\, dt = \frac{n\pi a_1 r}{2}.$$

Se deduce $|a_n| r^n \leqslant n|a_1| r$ y se concluye $|a_n| \leqslant n$ haciendo tender r hacia 1.

Solución del ejercicio 4307 ▲005749

Sea $R > 0$. Denotemos D_R el disco cerrado en el centro 0 y de radio R. Sean $z \in D_R$ y n un entero natural.

$$|P_n(z)| = |\mathrm{e}^z - (\mathrm{e}^z - P_n(z))| \geqslant |\mathrm{e}^z| - |\mathrm{e}^z - P_n(z)| \geqslant \mathrm{e}^{-R} - |\mathrm{e}^z - P_n(z)|.$$

Se sabe que la sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función exponencial en D_R.Entonces existe un entero n_0 tal que para todo $z \in D_R$ y todo entero $n \geqslant n_0$, $|\mathrm{e}^z - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-R}$.
Para $n \geqslant n_0$ y $z \in D_R$, $|P_n(z)| \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-R} > 0$ y P_n no se anula en D_R.

Solución del ejercicio 4308 ▲005750

Se busca una serie entera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ radio R estrictamente positiva tal que $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n^x n\right) = 1$, para x elemento de algún intervalo abierto no vacío de centro 0. Esta igualdad impone a la sucesión (b_n) de verificar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_0 b_0 & = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 & = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 & = 0 \\ \quad\vdots & \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 & = 1 \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

1. Demostrar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n existe y es único.
   • Porque $a_0 = 1$, $a_0 b_0 = 1 \Leftrightarrow b_0 = 1$. Esto demuestra la existencia y la unicidad de b_0.
   • Sea $n \in \mathbb{N}$. Se supone que hemos probado la existencia y unicidad de $b_0, b_1, \ldots, b_n$.
   Entonces $a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0 = 0 \Leftrightarrow b_{n+1} = -a_1 b_n - \cdots - a_n b_1 - a_{n+1} b_0$. Esto demuestra la existencia y unicidad de b_{n+1}.
   Se ha demostrado por inducción que la sucesión (b_n) existe y es único.
2. Es necesario verificar que la serie entera asociada a la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un radio de convergencia estrictamente positivo.
   Sea $R > 0$ el radio de la serie asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y sea r un real tal que $0 < r < R$. Se sabe que la sucesión $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y existe $M > 0$ tal que para todo entero natural n, $|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$.
   $b_0 = 1$, $|b_1| = |-a_1 b_0| \leqslant \frac{M}{r}$, $|b_2| = |-a_2 b_0 - a_1 b_1| \leqslant \frac{M}{r^2} + \frac{M}{r} \times \frac{M}{r} = \dfrac{M(M+1)}{r^2}$, luego
   $$|b_3| = |-a_3 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2| \leqslant \frac{M}{r^3} + \frac{M}{r^2} \times + \frac{M}{r} + \frac{M}{r} \times \frac{M(M+1)}{r^2} = \frac{M(M^2+2M+1)}{r^3} = \frac{M(M+1)^2}{r^3}.$$

Demostrar entonces por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n| \leqslant \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
• Es cierto para $n = 1$.
• Sea $n \geqslant 1$, se supone que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|b_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$. Entonces

$$|b_{n+1}| \leqslant |-a_{n+1}b_0| + |-a_nb_1| + \cdots + |-a_1b_n| \leqslant \frac{M}{r^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \times \frac{M}{r^{n+1-k}}$$
$$= \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + M\sum_{k=1}^{n}(M+1)^{k-1}\right) = \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + M\frac{(M+1)^n - 1}{(M+1)-1}\right) = \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}.$$

Se ha demostrado por inducción que para todo natural no nulo n, $|b_n| \leqslant \frac{M(M+1)^n}{r^{n+1}}$. En particular, el radio R' de la serie entera asociada a la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $R' \geqslant \frac{r}{M+1} > 0$. Esto valida los cálculos iniciales en $]-\rho,\rho[$, donde $\rho = \text{Min}(R,R') > 0$ y por lo tanto, la inversa de una función f desarrollable en serie entera en el origen y tal que $f(0) \neq 0$ es desarrollable en serie entera en el origen.

Solución del ejercicio 4309 ▲005755

Se define $\text{Sp}_{\mathbb{C}}A = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$. Se sabe que para todo entero natural n, $\text{tr}(A^n) = \lambda_1^n + \cdots + \lambda_p^n$.
Sea λ un número complejo.
• Si $\lambda = 0$, la serie entera asociada a la sucesión $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de radio infinito y para todo número complejo z, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = 1 = \frac{1}{1-\lambda z}$.
• Si $\lambda \neq 0$, la serie entera asociada a la sucesión (λ^n) es de radio $\frac{1}{|\lambda|}$ y para $|z| < \frac{1}{|\lambda|}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n z^n = \frac{1}{1-\lambda z}$.
Sea $\rho = \max(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_p|)$ (ρ es el radio espectral de la matriz A) y $R = \frac{1}{\rho}$ si $\rho \neq 0$ y $R = +\infty$ si $\rho = 0$.
Para $|z| < R$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{tr}(A^n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k z)^n\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_k z)^n\right) \text{ (suma de } p \text{ series convergentes)}$$
$$= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_k z}.$$

Entonces es claro que R es el radio de convergencia de la serie entera propuesta (desarrollo en serie entera de una fracción racional).

Si además, $0 < |z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{tr}(A^n)z^n = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\frac{1}{z}-\lambda_k}\right) = \frac{\chi_A'\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}\chi_A\left(\frac{1}{z}\right)}$ (descomposición usual de $\frac{P'}{P}$).

Solución del ejercicio 4310 ▲005759

1. Sean A y B las sumas de la serie entera asociada a las sucesiones a y b sobre $]-1,1[$. La función B es estrictamente positiva en $]0,1[$ y en particular no se anula en $]0,1[$.
   • La sucesión a es positiva por lo que la función A es creciente en $[0,1[$ y por lo tanto, admite un límite real o infinito cuando x tiende a 1 para valores inferiores. Además, para N entero natural dado y $x \in [0,1[$, se tiene $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ y entonces

$$\forall N \in \mathbb{N}, \lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) \geqslant \lim_{x\to 1,\, x<1} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Porque la serie de término general positivo a_n diverge, cuando N tiende a $+\infty$, se obtiene $\lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) \geqslant +\infty$ y entonces $\lim_{x\to 1,\, x<1} A(x) = +\infty$. Lo mismo se aplica a B porque la serie de término general b_n diverge cualquiera que sea el valor de k.

• Entonces se quiere demostrar que $A - kB \underset{x\to 1^-}{=} o(B)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, $a_n - kb_n \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ y por lo tanto, existe un entero natural N tal que para $n \geqslant N$, $|a_n - kb_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} b_n$. Sea $x \in [0,1[$.

$$|A(x) - kB(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - kb_n| x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n| + \frac{\varepsilon}{2} B(x).$$

Ahora, $B(x)$ tiende a $+\infty$, cuando x tiende a 1 para valores inferiores. Entonces existe $\alpha \in]0,1[$ tal que para $x \in]1-\alpha, 1[$, $B(x) > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{N} |a_n - kb_n|$. Para $x \in]1-\alpha, 1[$, se tiene entonces $|A(x) - kB(x)| < \frac{\varepsilon}{2} B(x) + \frac{\varepsilon}{2} B(x) = \varepsilon B(x)$. Se ha demostrado que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0,1[/ \forall x \in]1-\alpha, 1[$, $|A(x) - kB(x)| < \varepsilon B(x)$ y entonces $\lim_{x\to 1^-} \frac{A(x)}{B(x)} = k$.

2. (a) La serie entera propuesta « verifica » las hipótesis de 1) y además, $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Entonces

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}.}$$

(b) Sea $p \geqslant 2$. $n^{p-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)$. Como las dos sucesiones (n^{p-1}) y $((n+1)(n+2)\cdots(n+p-1))$ verifican las hipótesis de 1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p-1)\cdots(n+1) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^{(p-1)} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(p-1)} = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-1} x^n = (p-1)!.}$$

Solución del ejercicio 4311 ▲005760

Se supone que existe un entero natural p tal que $a_p = a_{p+1}$. El desarrollo limitado de orden 1 de $f^{(p)}$ en 0 se escribe $f^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} f^{(p)}(0) + x f^{(p+1)}(0) + o(x) = a_p(1+x) + o(x)$ y se deduce

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\geqslant |a_p(1+x)| - |o(x)| = 1 + x - |o(x)| \\ &\geqslant 1 + x - \frac{x}{2} \text{ (en un vecindario sin centro de 0 a la derecha)} \\ &= 1 + \frac{x}{2} > 1 \text{ (en un vecindario sin centro de 0 a la derecha).} \end{aligned}$$

Entonces si dos términos consecutivos son iguales, f una no verifica las condiciones del enunciado o aún si f verifica las condiciones del enunciado, entonces $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{p+1} = -a_p$, luego $a_p = (-1)^p a_0$. Pero entonces, necesariamente para todo real x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ o para todo real x, $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Recíprocamente, estas dos funciones son claramente soluciones al problema planteado.

Solución del ejercicio 4312 ▲005764

1. Sean $n \geqslant 2$, luego $k \in [\![1, n-1]\!]$. Se define un paréntesis alrededor de $X_1 \dots X_k$ y uno alrededor $X_{k+1} \dots X_n$. Luego, para cada uno de los a_k paréntesis de $X1 \dots X_k$, hay a_{n-k} paréntesis posibles de $X_{k+1} \dots X_n$. Finalmente, variando k de 1 a $n-1$, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.}$$

2. Se supone momentáneamente el radio R de la serie entera asociada a la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ estrictamente positivo. Se define convencionalmente $a_0 = 0$. Para $x \in]-R, R[$,

$$f^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = f(x) - x,$$

y entonces

$$\boxed{\forall x \in]-R, R[,\ f^2(x) = f(x) - x.}$$

3. Necesariamente, para todo x de $]-R, R[$, $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4x})$ (I) o $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ (II). Así, para cada $x \in]-R, R[$, se debe elegir una de estas dos expresiones. Porque $f(0) = 0$, es necesario elegir la expresión (II), cuando $x = 0$.
Para $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, se escribe $g(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$. g es desarrollable en serie entera en $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en virtud de teoremas generales. Denotemos $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de los coeficientes del desarrollo. Porque $g(0) = 0$, se tiene $b_0 = 0 = a_0$ y desde $g'(0) = 1$, se tiene $b_1 = 1 = a_1$. En fin, la función g verifica $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $g^2(x) = g(x) - x$ y entonces $\forall n \geqslant 2$, $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$. Se deduce por inducción que para todo entero natural n, $b_n = a_n$ y entonces $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).}$$

4. Para conocer los a_n, queda por desarrollar la función g en la serie entera. Para $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$,

$$g(x) = \frac{1}{2}(1 - (1-4x)^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/2}^n (-4x)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} x^n.$$

enfin, para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} C_{1/2}^n 2^{2n-1} &= (-1)^{n-1} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!} 2^{2n-1} = \frac{2^{n-1}}{n!} \times 1 \times 3 \times \dots . \times (2n-3) \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots . \times (2n-3) \times (2n-2)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}.}$$

Solución del ejercicio 4315 ▲001951

1. $a_0 = \pi$ y para $n \neq 0$, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$ (nulo cuando n es par), $b_n = 0$.
2. Por la fórmula de Parseval
$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\,dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4},$$
entonces $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^4}{96}$.
3. Como
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}$$
se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. Es el teorema de Dirichlet. Aplicado en $x = 0$, esto implica que $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$. Se deduce que $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solución del ejercicio 4318 ▲004622

1. $a_0 = \pi$, $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$, $b_n = 0$. 2. $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n}$. 3. $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$.
4. $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2-1)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_p = 0$.
5. $a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$, $a_{2p+1} = 0$, $b_p = 0$.

Solución del ejercicio 4319 ▲004623

$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2)$. Así $I_{2p} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right)$, $I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}$. $b_n = 0$ (paridad), $a_{2p} = 0$ (simetría con respecto a $(\pi/2, 0)$), $a_{2p+1} = -\frac{4}{(2p+1)\pi}I_{2p+1} = -\frac{2}{2p+1}$.

Solución del ejercicio 4320 ▲004624

$$\begin{cases} 2a_k &= (a_{k-1} + a_{k+1})\cos\alpha \\ a_0 &= a_1\cos\alpha + 2 \end{cases} \Rightarrow a_k = A\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)^k + B\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)^k.$$

Como $a_k \to 0$ (cuando $k \to \infty$) se tiene $B = 0$, de donde $A = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$.
Finalmente, $f(t) = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^k\cos(kt)\right)$.

Solución del ejercicio 4321 ▲004625

---

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (ae^{ix})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right) = g(x)$.
2. Hay convergencia normal.
3. $$h(x) = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(nx-nt) f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a^n \cos(nx-nt) f(t)\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_0^{2\pi} a^n \cos(nt) f(t)\,dt + \operatorname{sen}(nx) \int_0^{2\pi} a^n \operatorname{sen}(nt) f(t)\,dt\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\pi a^n a_n(f)\cos(nx) + \pi a^n b_n(f)\operatorname{sen}(nx)).$$
Hay convergencia normal porque $|a|<1$ y los coeficientes de Fourier de f están acotados. Se deduce que h es continua, luego que los coeficientes de Fourier de h son $a^n a_n(f)$ y $a^n b_n(f)$.
4. Los coeficientes de Fourier de ambos miembros deben ser iguales, lo que da : $a_n(f) = \frac{1}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ y $b_n(f)=0$ si para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene $\pi\lambda a^n \neq 1$ (si no, no existe solución), y $a_0(f)=0$ si $2\pi\lambda \neq 1$, $a_0(f)$ cualquiera si no.

   Recíprocamente, poniendo $f(x) = [a_0/2] + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(1-\pi\lambda a^n)}$ se define f, 2π-periódica continua (la serie converge normalmente), solución de la ecuación por igualdad de los coeficientes de Fourier de cada miembro.

Solución del ejercicio 4322 ▲004626

---

1. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n} = \frac{3}{2(5-4\cos x)}$.
2. $\frac{\pi}{3}$.

Solución del ejercicio 4323 ▲004627

1.
2. $g(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(e^a f(e^{ix}) - e^{-ix} f(e^{-ix})\right) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left(1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-ka} \cos kx\right)$.

Solución del ejercicio 4325 ▲004629

---

1. $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$.
2.

Solución del ejercicio 4326 ▲004630

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(x-2n\pi)^2 - ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-(x-2n\pi)^2-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ikx}\,dx = \frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$$
$\left(\text{calcular } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-i\xi x}\,dx = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \text{ por ecuación diferencial}\right)$.

Solución del ejercicio 4327 ▲004631

---

1. $a_0 = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}$, $a_n = \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi(1+n^2)}$, $b_n = -na_n$.

2. $S = \frac{\pi - \mathrm{th}\,\pi}{2\,\mathrm{th}\,\pi}$, $S' = \frac{\pi - \mathrm{sh}\,\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi}$.

Solución del ejercicio 4328 ▲004632

1. Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{2\pi(a-en)}\mathrm{e}^{inx} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{\pi(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\,\mathrm{sen}(nx))$.
2. Se puede suponer $a > 0$, pues $I(-a) = -I(a)$ y $I(0) = 0$. Se prevé integrar término a término la relación :
$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{sen}(au) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{sen}(au).$$
Se corta la integral $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sobre $[0, \pi/a]$ el seno es positivo y el teorema de convergencia monótona se aplica. Sobre $[\pi/a, +\infty[$ se aplica el teorema de integración término a término (serie de normas 1 convergente) pues $\int_{\pi/a}^{+\infty} |\mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{sen}(au)|\,du \leqslant \int_{\pi/a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nu}\,du = \mathrm{e}^{-n\pi/a}/n$. Así,
$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{sen}(au)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$
3. Ya hecho, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{sen}(au)\,du = \frac{a}{a^2+1}$. ¡Debe haber otro método para la pregunta precedente !
4. Comparando con 1) para $x = 0$ se obtiene : $I(a) = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}+1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$, para $a > 0$.

Solución del ejercicio 4329 ▲004633

1. $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{2\pi(a-en)}\mathrm{e}^{inx}$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{e}^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+n^2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{\mathrm{e}^{4a\pi}-1}{4a\pi}$, por lo tanto $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}+1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}$.
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\pi}{\mathrm{th}(a\pi)} - \frac{1}{a}\right) \to \frac{\pi^2}{6}$, cuando $a \to 0$ y hay convergencia dominada.
3. $\frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 4330 ▲004634

1. $a_n = -\frac{4}{4n^2-1}$,
$b_n = -\frac{32n}{\pi(4n^2-1)^2}$.
2.
3. $\frac{\pi-2}{4}$.

Solución del ejercicio 4331 ▲004635

1. $\cos ax = \frac{\operatorname{sen}\pi a}{\pi a} + \frac{2a\operatorname{sen}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}$.
2. $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2} = \frac{\pi\cos\pi t}{\operatorname{sen}\pi t} - \frac{1}{t} \Rightarrow g(t) = \ln\left(\lambda\frac{\operatorname{sen}\pi t}{t}\right)$ y $g(0)=0 \Rightarrow g(t) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}\right)$.

Solución del ejercicio 4332 ▲004636

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$. 2.

3 El primer miembro es $f(1) = \frac{\pi-1}{2}$ y el segundo $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f(t+1)-f(t-1))^2\,dt = \frac{\pi-1}{2}$.

Solución del ejercicio 4333 ▲004637

1. $a_{2p+1} = b_{2p+1} = 0$. 2. $a_{2p} = b_{2p} = 0$.

Solución del ejercicio 4335 ▲004639

$a'_k = kb_k$, $b'_k = -ka_k$ + desigualdad de Bessel.

Solución del ejercicio 4336 ▲004640

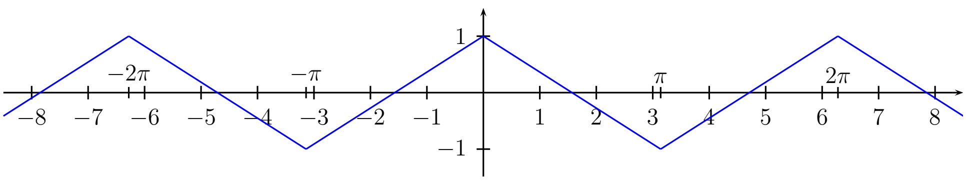
1. 2. $S'_g(x) = \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n - \frac{f(0)-f(2\pi)}{\pi}\right)\cos nx - na_n\operatorname{sen} nx$.

Solución del ejercicio 4338 ▲004642

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \sum_{i=0}^{k-1}\int_0^{2\pi/k} f(t+2i\pi/k)\cos(kt)\,dt$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\int_0^{\pi/2k}\Big(f(t+2i\pi/k) - f(t+2i\pi/k+\pi/k) - f(t+2(i+1)\pi/k-\pi/k) + f(t+2(i+1)\pi/k)\Big)\cos(kt)\,dt.$$

Solución del ejercicio 4339 ▲005782

1. La función f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica. Por lo tanto, se puede calcular sus coeficientes de FOURIER.



Porque f es par, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)\,dx$.

Por consiguiente, $a_0(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La función f es 2π-periódica, continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Por el teorema de DIRICHLET, la serie de FOURIER de f converge a f sobre $\mathbb{R}$. Así, para todo real x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\,\mathrm{sen}(nx)) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) =$$

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.}$$

La igualdad $f(0) = 1$ proporciona $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Luego, si $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, se tiene

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

y por lo tanto, $S = \frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

Por otra parte, ya que f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica, la fórmula de PARSEVAL proporciona $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ y entonces

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

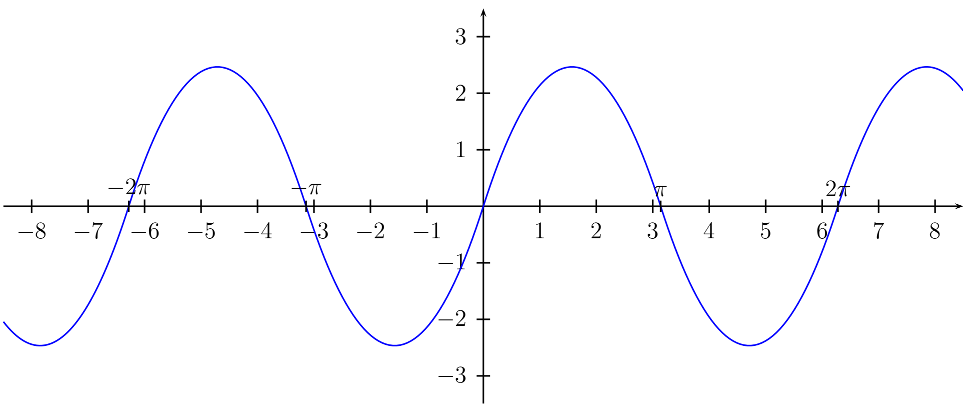
y entonces $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}\times\frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}$. En fin, si se establece $S = \frac{1}{n^4}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16},$$

y por lo tanto, $S = \frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

2. La función f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica. Por lo tanto, se puede calcular sus coeficientes de FOURIER.



porque f es impar, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(\pi - 2x)\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}.$$

La función f es 2π-periódica, continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Por el teorema de DIRICHLET, la serie de FOURIER de f converge a f sobre $\mathbb{R}$. Así, para todo real x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\operatorname{sen}(nx)) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(nx) =$$
$$\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.}$$

La igualdad $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ proporciona $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Luego, ya que f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica, la fórmula de PARSEVAL proporciona $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ y entonces

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi - x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = 2\pi^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}$$

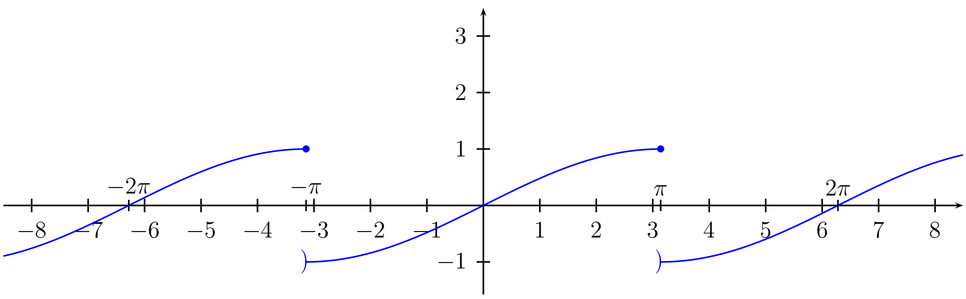
y entonces $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64}\times\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}$. En fin, si se establece $S = \frac{1}{n^6}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{S}{64},$$

y por lo tanto, $S = \frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \text{ y } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.}$$

3. La función f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica. Por lo tanto, se puede calcular sus coeficientes de FOURIER.



La función f tiene los mismos coeficientes de FOURIER que la función g definida en $\mathbb{R}$, impar y 2π-periódica tal que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 0$. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}} = -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

La función f es 2π-periódica y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Por el teorema de DIRICHLET, la serie de FOURIER de f converge en todo real x y tiene la suma $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particular,

$$\boxed{\forall x \in]-\pi, \pi[,\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen}(nx).}$$

La igualdad $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ proporciona

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2p+1}{4(2p+1)^2-1}\operatorname{sen}\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{2p+1}{16p^2+1p+3},$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.}$$

4. f es 2π-periódica, continua a trozos en $\mathbb{R}$ y par. Para $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx$.

1a solución. Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)e^{inx}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\lambda+in)x}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}e^{(-\lambda+in)x}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi} - e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi} - e^{-(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in} + \frac{-2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in}\right) \\
&= \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda-en}{\lambda^2+n^2} + \frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2}\right) = \frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

2a solución. Una doble integración por partes proporciona

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}(\lambda x)\operatorname{sen}(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}(\lambda x)\operatorname{sen}(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\lambda}\operatorname{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx\right)\right)\\
&= \frac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \dfrac{2(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\times\dfrac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2} = \dfrac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\dfrac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La función f es 2π-periódica, continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Por el teorema de DIRICHLET, la serie de FOURIER de f converge a f sobre $\mathbb{R}$. Se deduce que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos(nx).}$$

La igualdad $f(0) = 1$ proporciona $1 = \dfrac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \dfrac{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ y entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\pi(\operatorname{sh}(\lambda\pi)-\pi\lambda)}{2\lambda^2\pi\operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

y la igualdad $f(\pi) = \operatorname{ch}(\lambda\pi)$ proporciona

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\left(\operatorname{ch}(\lambda\pi) - \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \frac{\lambda\pi\operatorname{ch}(\lambda\pi)-\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\boxed{\forall\lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda\operatorname{sh}(\lambda\pi)}\ \text{y}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\lambda\pi\operatorname{ch}(\lambda\pi)-\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\operatorname{sh}(\lambda\pi)}.}$$

La función f es 2π-periódica, continua a trozos en $\mathbb{R}$. La igualdad de PARSEVAL se escribe

$$\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$$

con

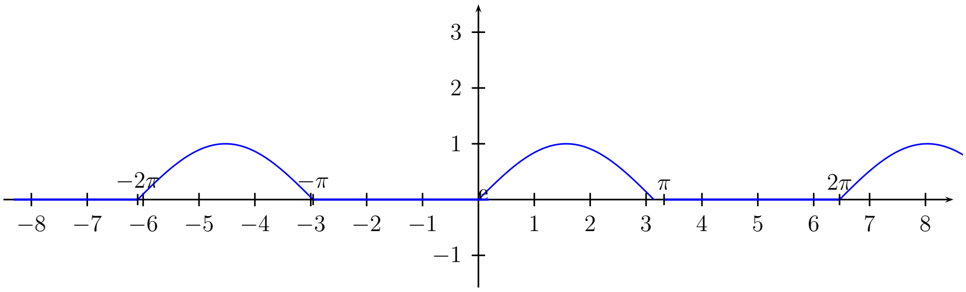
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{ch}(2\lambda x)+1}{2}\,dx = 1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi},$$

y por lo tanto, $1 + \dfrac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} = \dfrac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \dfrac{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$, luego

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} - \frac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}\right) = \frac{2\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda\operatorname{sh}(2\lambda\pi) - 4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\boxed{\forall\lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda\operatorname{ch}(\lambda\pi)\operatorname{sh}(\lambda\pi) - 2\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.}$$

5. La función f es continua a trozos en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica. Por lo tanto, se puede calcular sus coeficientes de FOURIER.



Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sup(\operatorname{sen} x, 0)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}((n+1)x) - \operatorname{sen}((n-1)x)\,dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\,dx \text{ si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \text{ si } n \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} & \text{si } n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x))\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

La función f es 2π-periódica, continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Por el teorema de DIRICHLET, la serie de FOURIER de f converge a f sobre $\mathbb{R}$. Se deduce que para todo real x

$$\sup(\operatorname{sen} x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}\cos(2px).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sup(\operatorname{sen} x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).}$$

La igualdad $f(0) = 0$ proporciona $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$ y entonces

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

Observación. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}.$

Solución del ejercicio 4340 ▲005783

1. (a) Sea $a \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Para todo real t, $a - \cos t \neq 0$ y

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{2}{2a - \mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}} = \frac{-2\mathrm{e}^{it}}{(\mathrm{e}^{it})^2 - 2a\mathrm{e}^{it} + 1}.$$

La ecuación $z^2 - 2az + 1 = 0$ admite dos soluciones distintas de cero inversas entre sí. Se denota b la solución del más pequeño módulo tal que $|b| \leqslant 1$. No se puede tener $|b| = 1$ porque entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $b = \mathrm{e}^{i\theta}$. Se deduce que $2a = b + \frac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2,2]$ ya que $a \in [-1,1]$, lo que no es. Entonces $|b| \neq 1$. Más precisamente, ya que $|b| \leqslant \left|\frac{1}{b}\right|$, se tiene $|b| < 1$ y $\left|\frac{1}{b}\right|$. En particular, $b \neq \frac{1}{b}$. Luego, para $|t| < |b|$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-\cos t} &= \frac{-2\mathrm{e}^{it}}{(\mathrm{e}^{it}-b)\left(\mathrm{e}^{it}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{b}-b}\left(\frac{b}{\mathrm{e}^{it}-b} - \frac{1/b}{\mathrm{e}^{it}-\frac{1}{b}}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(\frac{b\mathrm{e}^{-it}}{1-b\mathrm{e}^{-it}} + \frac{1}{1-b\mathrm{e}^{it}}\right) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(b\mathrm{e}^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \mathrm{e}^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \mathrm{e}^{int}\right) \text{ (pues } |b\mathrm{e}^{it}| = |b\mathrm{e}^{-it}| = |b| < 1) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1}\mathrm{e}^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \mathrm{e}^{int}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \mathrm{e}^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \mathrm{e}^{-int}\right) \\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a-\cos t} = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt)\right).}$$

(b) Para todo real $t \in [-\pi,\pi]$ y todo entero natural no nulo n, se tiene $|b^n \cos(nt)| \leqslant |b|^n$. Como la serie numérica de término general $|b|^n$ converge, se deduce que la serie de funciones de término general $t \mapsto b^n \cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en el segmento $[-\pi,\pi]$. Se sabe entonces que la serie obtenida es la serie de FOURIER de f.

2. Porque la función f es par, para todo entero natural n, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$. Entonces, para todo entero natural n (incluso para $n = 0$),

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.}$$

Solución del ejercicio 4341 ▲005784

1. Sea $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. La función f es 2π-periódica, continua en $\mathbb{R}$ y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces la serie de FOURIER de f converge a f sobre $\mathbb{R}$ de acuerdo con teorema de DIRICHLET. Porque f es par, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$, luego para $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_n(f)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n+\alpha)x)+\cos((n-\alpha)x))\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((\alpha+n)x)}{\alpha+n}+\frac{\operatorname{sen}((\alpha-n)x)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi}\ (\text{pues }\alpha\notin\mathbb{Z})\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}+\frac{\operatorname{sen}((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right)=(-1)^n\frac{2\alpha\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \forall x\in[-\pi,\pi],\ \cos(\alpha x)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx).}$$

2. Sea $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Se toma $\alpha=z$ y $x=0$ en la fórmula anterior y se obtiene

$$1=\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}+\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}.\quad(*)$$

Ahora,

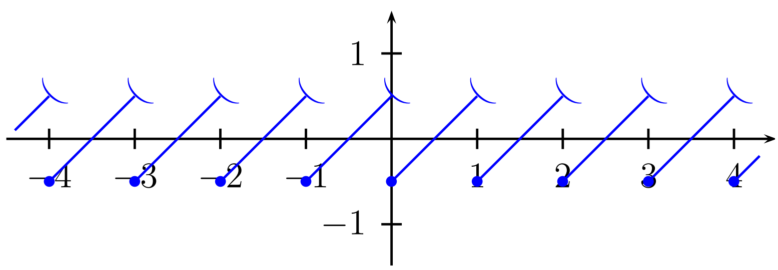
$$\operatorname{sen}(\pi z)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})=0\Leftrightarrow e^{i\pi z}=e^{-i\pi z}\Leftrightarrow e^{2i\pi z}=1\Leftrightarrow 2i\pi z\in 2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}.$$

porque $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\operatorname{sen}(\pi z)\neq 0$ y la igualdad $(*)$ puede ser escrita $\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$. Igualmente, tomando $\alpha=z$ y $x=\pi$, se obtiene $\cos(\pi z)=\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}+\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ y entonces $\pi\operatorname{cotan}(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$.

$$\boxed{\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}\quad\text{y}\quad\pi\operatorname{cotan}(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.}$$

Solución del ejercicio 4342 ▲005785

La función f es 1-periódica, continua a trozos en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, se puede calcular sus coeficientes de FOURIER.



La función f tiene los mismos coeficientes de FOURIER que la función $g:\ x\mapsto\begin{cases}f(x)\text{ si }x\notin\mathbb{Z}\\0\text{ si }x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ que es impar.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, luego para $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{1}\right)\,dt = \int_0^1 (2t-1)\operatorname{sen}(2n\pi t)\,dt \\
&= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\
&= -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

La función f es además de clase C^1 a trozos en $\mathbb{R}$ y de acuerdo con el teorema de DIRICHLET, en todo real x, la serie de FOURIER de f converge y tiene por suma $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particular,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x) = x - E(x) - \tfrac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n\pi x)}{n\pi}.}$$

Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(f_p) &= 2\int_0^1 f(pt)\operatorname{sen}(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^p f(u)\operatorname{sen}\left(2n\pi\frac{u}{p}\right)\frac{du}{p} \\
&= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\
&= -\frac{1}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Observación. Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $x \in [0,1]\setminus\left\{\frac{k}{p},\ k \in [\![0,p]\!]\right\}$. Entonces $px \notin \mathbb{Z}$ y entonces

$$f_p(x) = f(px) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2np\pi x)}{n\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,p}\operatorname{sen}(2k\pi x),$$

donde

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad b_{k,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin p\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{\frac{k}{p}\pi} & \text{si } k \in p\mathbb{Z}, \end{cases}$$

, pero desafortunadamente, no se pueden recuperar estos coeficientes porque la serie obtenida no converge normalmente.

$$\boxed{\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \int_0^1 f_q(x) f_q(x)\,dx = \frac{(\mathrm{MCD}(p,q))^2}{12pq}.}$$

Solución del ejercicio 4343 ▲004650

---

1. $\frac{\pi}{n+1}$.
2. Suma de Riemann : $\ell = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$.

Solución del ejercicio 4344 ▲004651

$\sup_{[\alpha,\beta]} |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, para $n \geqslant \dfrac{\beta - \alpha}{2\pi}$.

Solución del ejercicio 4345 ▲004652

Si existe convergencia uniforme : $\|a_n \operatorname{sen} nx + \cdots + a_p \operatorname{sen} px\|_\infty \to 0$, cuando $n, p \to \infty$.
Se toma $x = \frac{\pi}{2p}$: $0 \leqslant \frac{a_p}{p}(n + \cdots + p) \leqslant \frac{1}{p}(na_n + \cdots + pa_p) \to 0$, cuando $n, p \to \infty$. $n = [p/2] \Rightarrow$ lqfd.
Si $na_n \to 0$: Sea $x \in]0, \pi]$ y n tal que $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n-1}$.
Transformación de Abel : $|a_n \operatorname{sen} nx + \cdots + a_p \operatorname{sen} px| \leqslant \dfrac{2a_n}{\operatorname{sen} x/2} \leqslant \dfrac{2na_n}{\pi}$, y

$$|a_k \operatorname{sen} kx + \cdots + a_{n-1} \operatorname{sen}(n-1)x| \leqslant (ka_k + \cdots + (n-1)a_{n-1})x \leqslant \frac{n-k}{n-1} a_k \leqslant 2a_k.$$

Solución del ejercicio 4347 ▲004654

1. $R(n) = \frac{a}{n} + S(n)$, con $\operatorname{grad} S \leqslant -2$. Entonces $f(x) = R(0) + 2ia \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (S(n)e^{inx} + S(-n)e^{-inx})$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $R(n) = \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k} + S(n)$, con $\operatorname{grad} S \leqslant -k-1 \Rightarrow f(x) = R(0) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_k f_k(x) + g(x)$, con $f_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{inx} + (-1)^p e^{-inx}}{n^p}$ y g de clase $\mathscr{C}^k$ sobre $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $f_p' = if_{p-1}$ y f_1 es $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, por lo tanto f_p también.

Solución del ejercicio 4348 ▲004655

1. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.
2. Sea $P(n) = an^2 + bn + c$. Entonces $f(x) - 4ag(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{bn + c}{an^4 + bn^3 + cn^2} \cos nx$.

Solución del ejercicio 4349 ▲004656

1. $k_n(x) = \dfrac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1 - \cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2((n+1)x/2)}{(n+1)\operatorname{sen}^2(x/2)}$.
2.

Solución del ejercicio 4352 ▲004643

1. Inmediato. La función extendida es $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$ y $\mathscr{C}^2$ por trozos.
2. Se descompone f en serie de Fourier : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x)$, con $c_n = 2\int_0^1 f''(u) \operatorname{sen}(n\pi u)\, du$.

   Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene : $\|f\|_\infty^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right) = \frac{2\zeta(4)}{\pi^4} \|f''\|_2^2 =$

$\frac{\|f''\|_2^2}{45}$. Otro demostración sin utilizar los series de Fourier : para $x \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x f'(t)\,dt = xf'(x) - \int_0^x tf'(t)\,dt \\
f(x) &= \int_1^x f'(t)\,dt = (x-1)f'(x) - \int_1^x (t-1)f'(t)\,dt \\
f(x) &= (1-x)f(x) + xf(x) = \int_0^x t(x-1)f''(t)\,dt + \int_x^1 x(t-1)f''(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \varphi(x,t)f''(t)\,dt. \text{ con } \varphi(x,t) = xt - \min(x,t).
\end{aligned}$$

Se deduce que $|f(x)|^2 \leqslant \|f''\|_2^2 \int_0^1 \varphi(x,t)^2\,dt = \frac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \leqslant \frac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Solución del ejercicio 4353 ▲004644

Parseval para f y f'. Igualdad si y solo si $f(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$.

Solución del ejercicio 4354 ▲004645

1. Desarrollar f, f' y g' en series de Fourier y aplicando la desigualdad $2|\overline{a}b| \leqslant |a|^2 + |b|^2$. Existe igualdad si y solo si f' y g' son CL de cos y sen.
2. Se parametriza por una abscisa curvilínea : $x = f(t)$, $y = g(t) \Rightarrow \mathscr{A} = \int_0^{2\pi} fg' \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{f'^2 + g'^2}{2} = \pi$.

Solución del ejercicio 4358 ▲004649

Se define $g(t) = f(a|t|/\pi)$, para $t \in [-\pi,\pi]$, extendida por 2π-periodicidad. Entonces g es par, continua, y todos sus coeficientes de Fourier son cero por lo que $g = 0$.

Solución del ejercicio 4362 ▲004659

1. $|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.
2.

Solución del ejercicio 4363 ▲004660

$|\operatorname{sen} x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.
Esta serie converge y define una función de clase $\mathscr{C}^4$ solución de la ecuación.
Unicidad : las soluciones de la ecuación homogénea son combinación de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} y e^{-j^2x}, por lo tanto no π-periódicas.

Solución del ejercicio 4364 ▲004661

$k \notin \mathbb{Z} : y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)} + a\cos kx + b\,\mathrm{sen}\,kx.$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$: reemplazar $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ por $\frac{x\cos kx}{2k^3}$.

Solución del ejercicio 4365 ▲004662

1. Desarrollar f en serie de Fourier.
2. Densidad de polinomios trigonométricos en $\mathscr{C}^0$.
3. $f(t) = \mathrm{sen}^2(\pi t)$, $\alpha = \frac{1}{\pi}$, $x = 0 : S_n = \mathrm{sen}^2 1 + \cdots + \mathrm{sen}^2 n \sim \frac{n}{2}$.

   Transformación de Abel : $\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{sen}^2 n}{n} = -\mathrm{sen}^2 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{S_k}{k(k-1)} + \frac{S_N}{N} \to +\infty$, cuando $N \to \infty$.

   Observación : se tiene un razonamiento más simple al escribir $2\,\mathrm{sen}^2(n) = 1 - \cos(2n)$.

Solución del ejercicio 4366 ▲004663

Integración con $x' - x$ constante : $a_k = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|y|^\beta}(1-|y|)\mathrm{e}^{-2ik\pi y}\,dy$ es el $2k$-ésimo coeficiente de Fourier de la función f, 2-periódica, tal que $f(y) = \mathrm{e}^{-|y|^\beta}(1-|y|)$ si $-1 \leqslant y \leqslant 1$, entonces el k-ésimo coeficiente de Fourier de g, 1-periódica, tal que $g(y) = \frac{1}{2}(f(y) + f(y+1))$. Sea g_n la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de g, $g_n(y) = \sum_{|k|\leqslant n} a_k \mathrm{e}^{2ik\pi y}$.

Se tiene por convergencia normal de la serie de Fourier de g : $\sum_{|k|>n \text{ o } |\ell|>n} a_k a_\ell = g^2(0) - g_n^2(0)$.

$$\begin{aligned}
g(0) - g_n(0) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{g(0)-g(y)}{\mathrm{sen}\,\pi y}\,\mathrm{sen}((2n+1)\pi y)\,dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{g(0)-g(y)}{\mathrm{sen}\,\pi y}\,\mathrm{sen}((2n+1)\pi y)\,dy \\
&= 2\Big[-\frac{g(0)-g(y)}{\mathrm{sen}\,\pi y}\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\Big]_{y=0}^{\frac{1}{2}} + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dy}\Big(\frac{g(0)-g(y)}{\mathrm{sen}\,\pi y}\Big)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{(2n+1)\pi^2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{funccont}(y)\frac{\cos((2n+1)\pi y)}{(2n+1)\pi}\,dy \sim \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{(2n+1)\pi^2}.
\end{aligned}$$

$g(0) + g_n(0) \to 2g(0) = 1$ (cuando $n \to \infty$), de donde $\sum_{|k|>n \text{ o } |\ell|>n} a_k a_\ell \sim \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{(2n+1)\pi^2}$.

Solución del ejercicio 4367 ▲004664

1. Si $f = 0$, entonces $c_n = 0$, para todo n por integración término a término. Entonces una función $f \in E$ tiene un único desarrollo trigonométrico y $\|f\|$ está bien definida. Entonces E es isomorfo a $\ell^1(\mathbb{Z})$ que es un espacio vectorial normado completo.
2. Producto de convolución de dos $\mathbb{Z}$-sucesiones sumables.
3. (a) $z_0 = \varphi(x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x})$. Se tiene $|z_0| = 1$ porque la sucesión $(\varphi(x \mapsto \mathrm{e}^{2en\pi x})_{n\in\mathbb{Z}})$ es acotada.

   (b)

Solución del ejercicio 4368 ▲004665

$$u_0+\cdots+u_n = 1+(-1)^n\int_0^1 \frac{\cos((n+1)t^2)}{\cos(t^2)}\,dt = 1+(-1)^n\int_0^1 \frac{\cos((n+1)u)}{2\cos(u)\sqrt{u}}\,du \to 1, \text{ cuando } n\to\infty.$$

Solución del ejercicio 4369 ▲004666

1. Si f es $\mathscr{C}^1$ 2π-periódica entonces f' es continua, 2π-periódica promedio cero por lo tanto $D(E_0^1)\subset E_0$. Recíprocamente, si $g\in E_0$, entonces todas las primitivas de g son 2π-periódicas de clase $\mathscr{C}^1$ y hay exactamente una que tiene valor media nulo (solo una posibilidad para fijar la constante).
2. No (y esto cualquiera que sea la norma) porque el espectro de D no es acotado.
3. $\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(f)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |ikc_k(f)|^2 = \|f'\|^2$.
4. Idem, $|||D^{-1}_{|E_n}||| = \frac{1}{n+1}$.

Solución del ejercicio 4370 ▲004667

Se tiene $c_0(g)=c_1(g)=c_{-1}(g)=0$, por lo tanto g es ortogonal a todo polinomio trigonométrico de grado inferior o igual a 1. Si g es de signo constante en $]0,2\pi[$, se contradice $c_0(g)=0$. Entonces g tiene al menos una raíz $a\in\,]0,2\pi[$. Si g no tiene otra raíz en $]0,2\pi[$, entonces g tiene signos constantes opuestos en $]0,a[$ y $]a,2\pi[$. Pero entonces $g(t)(\cos(t-a/2)-\cos(a/2))$ tiene signo constante en la unión de estos intervalos, es absurdo. Así g tiene una segunda raíz en $]0,2\pi[$, por ejemplo $b\in\,]a,2\pi[$. Si g no tiene otra raíz en $]0,2\pi[$, entonces g es de signo constante en $]0,a[$, $]a,b[$ y $]b,2\pi[$ y los signos se alternan. Se obtiene una nueva contradicción porque entonces $g(t)(\cos(t-(a+b)/2)-\cos((b-a)/2))$ tiene signo constante en la unión de estos intervalos. Así g admite una tercera raíz, por ejemplo $c\in\,]b,2\pi[$. En fin, si se supone que g no tiene otra raíz en $]0,2\pi[$, entonces se tiene $g(t)>0$ sobre $]0,a[$ y $]b,c[$ y $g(t)<0$ sobre $]a,b[$ y $]c,2\pi[$ o la inversa. En los dos casos, se deduce que $g(0)=g(2\pi)=0$.

Solución del ejercicio 4371 ▲005781

1. • Porque f es impar, $f(0)=0$. Porque f es impar y 2π-periódica, $-f(\pi)=f(-\pi)=f(\pi)$ y entonces $f(\pi)=0$. Porque f es 2π-periódica, para $k\in\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)=f(0)=0$ y $f((2k+1)\pi)=f(\pi)=0$. Finalmente, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $f(k\pi)=0$.

   Sea $x\in\,]-\pi,0[$. Porque f es impar, $f(x)=-f(-x)=-\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y entonces $\forall x\in\,]-\pi,\pi[$, $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

   Sea $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $-\pi<x-2k\pi<\pi$ y desde f es 2π-periódica, $f(x)=f(x-2k\pi)=\operatorname{sen}\left(\frac{x-2k\pi}{2}\right)=(-1)^k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. Además, $-\pi<x-2k\pi<\pi\Rightarrow k<\frac{x+\pi}{2\pi}<k+1$ y $k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in\pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ donde } k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right) & \text{si } x\notin\pi\mathbb{Z}.\end{cases}}$$

2. • Sea $x\in[-\pi,0]$. Porque f es par, $f(x)=f(-x)=\operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$ y entonces $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=\operatorname{sen}\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$.

   Sea $x\in\mathbb{R}$. Existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $-\pi<x-2k\pi\leqslant\pi$ y como f es 2π-periódica, $f(x)=f(x-2k\pi)=\operatorname{sen}\left(\left|\frac{x-2k\pi}{2}\right|\right)$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen}\left(\left|\frac{x}{2}-k\pi\right|\right),\ \text{donde } k=E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right).$$

Solución del ejercicio 4372 ▲002683

A 1. $\displaystyle \frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))=$
$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\left[\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))+\phi^{(n-m)}(t)(z-a)f^{(m+1)}(a+t(z-a))\right]=$$
$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\phi^{(n-m+1)}(t)f^{(m)}(a+t(z-a))+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^{m+1}\phi^{(n-m)}(t)f^{(m+1)}(a+t(z-a)).$$
Efectuando el cambio de índice de suma $m=m'+1$ en la segunda suma ; todos los términos se eliminan dos a dos, a excepción del primero término de la primera suma y del último término de la segunda suma, de ahí el resultado solicitado.

2.a. Más generalmente, se tiene el resultado siguiente : si una función f es nula en cero y de clase C^{n+1} en un intervalo I conteniendo cero, $g(t)=f(t)/t$ es extensible por continuidad en cero y su extensión es de clase C^n. Tengamos cuidado de no deducir falazmente este resultado de la existencia de un desarrollo limitado de orden n de g. Se demuestra con ayuda de un desarrollo limitado de orden 1 de f que g es extensible por continuidad en 0 poniendo $\tilde{g}(0)=f'(0)$. Por otro lado, g es de clase C^{n+1} sobre $I\backslash\{0\}$. Haciendo la hipótesis de recurrencia

$$g^{(k-1)}(t)=\frac{f^{(k)}(0)}{k}+\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}\frac{t}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}+o(t^{n-k+1}),\quad (1\leqslant k\leqslant n,\ t\neq 0).$$

Derivando k veces la identidad $f(t)=tg(t)$, se obtiene que $\forall t\neq 0\ \ g^{(k)}(t)=\frac{f^{(k)}(t)-kg^{(k-1)}(t)}{t}$. Por lo tanto $f^{(k)}(t)=f^{(k)}(0)+f^{(k+1)}(0)\frac{t}{1!}+\cdots+f^{(n+1)}(0)\frac{t^{n+1-k}}{(n-k)!}+o(t^{n+1-k})$. Sustituyendo estos desarrollos limitados en la identidad precedente, se demuestra que la hipótesis de recurrencia es verificada al rango siguiente, por lo tanto para todo entero k de 1 a $n+1$.

Hacer la hipótesis de recurrencia que $g^{(k)}(0)$ existe y es igual a $f^{(k+1)}(0)/(k+1)$ $(0\leqslant k\leqslant n)$. El desarrollo limitado de $g^{(k)}$ (truncado de orden 1) y de la hipótesis de recurrencia, resulta que $g^{(k)}$ es continua y derivable en cero y que, si $k<n$, $g^{(k+1)}(0)=f^{(k+2)}(0)/(k+2)$, lo que prueba por recurrencia que g es n veces continuamente derivable en I. En consecuencia, $t\mapsto\frac{e^t-1}{t}$ es extensible por continuidad en una función indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Esta función no se anula nunca, su inversa es igualmente definida e indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. La función $t\mapsto\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$ es par pues

$$\frac{-t}{e^{-t}-1}+\frac{-t}{2}=\frac{-te^t}{1-e^t}-\frac{t}{2}=\frac{te^t-t+t}{e^t-1}-\frac{t}{2}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}.$$

Entonces el desarrollo limitado de $\frac{t}{e^t-1}$, cuyo la existencia es garantizada por el hecho que la función es indefinidamente derivable, es de la forma pedida por el enunciado. En consecuencia

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{zt}-1)=\left(1-\frac{t}{2}+\frac{b_1t^2}{2!}+\frac{b_2t^4}{4!}+\cdots+\frac{b_Nt^{2N}}{(2N)!}+o(t^n)\right)\times\left(zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{z^nt^n}{n!}+o(t^n)\right)$$

y $\phi_n(z)/n!$ es el coeficiente de t^n en este desarrollo :

$$\phi_n(z)/n!=\frac{z^n}{n!}-\frac{1}{2}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{b_1}{2!}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{b_2}{4!}\frac{z^{n-4}}{(n-4)!}+\cdots+\frac{b_N}{(2N)!}\frac{z^{n-2N}}{(n-2N)!},$$

de donde la expresión de ϕ_n pedida.

2.b. $\phi_n(z+1)-\phi_n(z)=\frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}-t\frac{e^{(z+1)t}-1}{e^t-1}\right)=\frac{d^n}{dt^n}_{|t=0}\left(te^{zt}\right).$

Como $t\mapsto te^{zt}$ es de clase C^∞ y que su desarrollo limitado de orden n en $t=0$ es $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{k!}t^{k+1}+o(t^n)$, se tiene $\phi_n(z+1)-\phi_n(z)=nz^{n-1}$.

3. (i) es obtenida derivando tantas veces como sea necesario la identidad precedente y dando a z el valor cero. (ii), (iii), (iv), (v) y (vi) son las consecuencias inmediatas de 2.a.

4.a. Se aplica la pregunta 1 al polinomio ϕ_{2n} de grado 2n y se integra entre 0 y 1. Se tiene

$$\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m(z-a)^m\left[\phi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right]=$$
$$-(2n)!\big(f(z)-f(a)\big)+(z-a)^{2n+1}\int_0^1\phi_{2n}(t)f\Big(a+(z-a)t\Big)dt.$$

Teniendo en cuenta del hecho que $\phi_{2n}^{(2n)}=(2n)!$
Se obtiene la igualdad pedida sustituyendo en las derivadas iteradas de ϕ_{2n} las expresiones determinadas en la pregunta 3.

4.b. Apliquemos la pregunta precedente reemplazando f por una primitiva de F y z por ω. Se tiene

$$0=\int_a^{a+\omega}F(t)dt-\frac{\omega}{2}(F(a+\omega)+F(a))+\sum_{m=1}^{n-1}b_m\frac{(z-a)^{2m}}{(2m)!}\left[F^{(2m-1)}(a+\omega)-F^{(2m-1)}(a)\right]$$
$$-\frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\phi_{2n}(t)F^{(2n)}\Big(a+(z-a)t\Big)dt.$$

Cuando se suman las igualdades obtenidas reemplazando a sucesivamente por sí mismo, $a+\omega,\ldots,a+(r-1)\omega$, se obtiene el resultado pedido, ciertos términos se simplifican dos a dos.

B 1. Se tiene para todo $x>0$ fijo

$$u_k(x)=\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)+x\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}+O(\frac{1}{k^2})=O(\frac{1}{k^2}).$$

Entonces la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1}u_k(x)$ converge.

2. $$\ln(x+1)+\sum_{k=1}^{n}u_k(x+1)=\ln(x+1)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}\Big[-\ln(k)+(x+1)\big(\ln(k)-\ln(k+1)\big)\Big]$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\ln(x+k)+\sum_{k=1}^{n}x(\ln(k)-\ln(k+1))-\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)+\ln(x+n+1)-\ln(n+1).$$

Cuando n tiende a $+\infty$, $\ln(x+n+1)-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{x+n+1}{n+1}\right)$ tiende a cero; se obtiene entonces pasando al límite, la igualdad deseada.

3. Para todo $k\geqslant 1$ entero, $u_k(1)=0$, por lo tanto $G(1)=0$ y se prueba fácilmente por recurrencia usando la pregunta precedente que para todo entero estrictamente positivo n, $G(n+1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k)$, igualdad de la cual se deduce inmediatamente, el resultado pedido.

4. Inmediata

5. Es una aplicación directa de la pregunta A.4.b.

$$T_{p,n}(x,y) = -\tfrac{1}{(2p)!}\int_0^1 \phi_{2p}(t)\sum_{m=0}^{n-1} f^{(2p)}(m+t)dt = -\frac{1}{(2p)!}\int_0^n \phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt.$$

6. El integrando en la expresión de $T_{p,n}(x,y)$ es mayorada en valor absoluto por el producto de la cota superior de la función continua ϕ_{2p} en el segmento $[0,1]$ y del valor absoluto de $f^{(2p)}$.
Se prueba fácilmente por recurrencia que $f^{(m)}(t) = (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{(y+t)^m} - \frac{1}{(x+t)^m}\right) = O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right)$ (cuando $t \to +\infty$). Entonces la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_{(2p)}\big(t-E(t)\big)f^{(2p)}(t)dt$ es absolutamente convergente, lo que prueba que $T_{p,n}(x,y)$ admite un límite finito cuando n tiende a $+\infty$.

7. De acuerdo a las preguntas 4 y 5,

$$\begin{aligned}
G(y)-G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\ln(y+k)-\ln(x+k)+(y-x)\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\Big]+\ln y-\ln x \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big\{\sum_{k=0}^{n}[\ln(y+k)-\ln(x+k)]+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Big\} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big\{(y+n)\ln(y+n)-(y+n)-y\ln y+y-(x+n)\ln(x+n) \\
&\quad +(x+n)+x\ln x-x+\frac{1}{2}\big(\ln y-\ln x+\ln(y+n)-\ln(x+n)\big) \\
&\quad +\sum_{h=1}^{p-1}\frac{b_h}{(2h)!}\big(f^{(2h-1)}(n)-\frac{1}{y^{2h-1}}+\frac{1}{x^{2h-1}}\big)+T_{p,n}(x,y)+(y-x)\ln\frac{1}{n+1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(y+n)\ln(y+n)-(x+n)\ln(x+n) = (y-x)\ln n+y-x+o(1)$, cuando $n\to+\infty$. Se obtiene por lo tanto después de simplificaciones $G(y)-G(x) = g(x)-g(y)+R_n(x,y)$, lo que faltaba demostrar.

8. Según la pregunta 5 y la expresión de las derivadas sucesivas de f dada en la pregunta 6, $T_{p,n}(x,y)$ es mayorada en valor absoluto por el producto de una constante y de la integral $\displaystyle\int_0^n \left|\frac{1}{(y+t)^{2p}}-\frac{1}{(x+t)^{2p}}\right| dt$.
$|R_p(x,y)|$ es mayorada de la misma manera reemplazando la cota final de integración n por $+\infty$.
El argumento del valor absoluto mantiene un signo constante, la integral mayorante es igual a

$$\frac{1}{2p-1}\left[\left|\frac{1}{(y+t)^{2p-1}}-\frac{1}{(x+t)^{2p-1}}\right|\right]_0^{+\infty}$$

y se obtiene así el estimado deseado.

9. Se tiene $g(m) = m\ln m - m - \frac{1}{2}\ln m + o(1)$ y $G(m) = -\ln(m-1)! = -\ln m! + \ln m$, para m entero, por lo tanto el resultado pedido se sigue inmediatamente, de la fórmula de Stirling $m! \sim \sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-m}$.

10. El resultado pedido es obtenido a partir de la igualdad de la pregunta 7 pasando al límite. Se hace tender x hacia $+\infty$ para valores enteros y se tiene en cuenta del estimado obtenido en la pregunta 8.

11. Calculando los primeros términos del desarrollo limitado de la pregunta A.2.a, se encuentra $b_1 = 1/6,\ b_2 = -1/30,\ b_3 = 1/42$. De las preguntas 3 y 10, resulta que

$$\ln(m!) = -G(m)+\ln m = m\ln m - m + \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12}\frac{1}{m} - \frac{1}{360}\frac{1}{m^3} + \frac{1}{1260}\frac{1}{m^5} + O(\frac{1}{m^7})$$

Solución del ejercicio 4373 ▲004503

1.

2. $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim en^{\alpha-1}$.

Solución del ejercicio 4376 ▲004506

1.

2. Integral constante = 1.

Solución del ejercicio 4377 ▲004507

1. e^{-x}.

2.

3.

4.

Solución del ejercicio 4378 ▲004508

CVU en todo compacto por encuadramiento del logaritmo.

Solución del ejercicio 4381 ▲004511

1. $y_n = (n+1)\left(e^x - e^{nx/(n+1)}\right)$.

2. $y = xe^x$.

3.

Solución del ejercicio 4382 ▲004512

$\left(|f_n(x)|\right)$ decrece, por lo tanto tiende a L. Se extrae una sub-sucesión $(f_{\varphi(n)})$ convergiendo hacia $\ell \Rightarrow |\ell| = L$. La sub-sucesión $(f_{\varphi(n)+1})$ converge a $f(\ell) \Rightarrow |f(\ell)| = L \Rightarrow L = 0$.

Solución del ejercicio 4383 ▲004513

1. $\ell(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$

2.

3. Incrementos finitos.

4.

Solución del ejercicio 4385 ▲004515

$f_n(t) \to \sqrt{t}$ para valores crecientes, hay convergencia uniforme.

Solución del ejercicio 4386 ▲004516

$P_n\left(t+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{t^2}{4}-1\right)^k$.

Solución del ejercicio 4387 ▲004522

1. Polinomio de Lagrange.

2.

Solución del ejercicio 4388 ▲004523

1. Hay convergencia simple a la función nula en 0 y 1 y igual a $1/2$ en otro lugar. La convergencia es uniforme en todo $[a,b] \subset]0,1[$.
2. La cuestión precedente da el resultado para $1/2$, el suficiente entonces utilizar el teorema de Weierstrass y los números diádicos.

Solución del ejercicio 4391 ▲005726

1. Para todo natural n, f_n se define en $\mathbb{R}$ e impar.

   Convergencia simple en $\mathbb{R}$**.** Sea $x \in \mathbb{R}$.

   • Si $x = 0$, para todo entero natural n, $f_n(x) = 0$ y entonces $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

   • Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ y de nuevo $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

   $$\boxed{\text{La sucesión de funciones } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplemente en } \mathbb{R} \text{ a la función nula.}}$$

   Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$**.** Se puede notar todo de sucesión que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ y entonces $\|f_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}$. Se deduce que $\|f_n\|_\infty$ no tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$.

   $$\boxed{\text{La sucesión de funciones } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ no converge uniformemente en } \mathbb{R} \text{ a la función nula.}}$$

   Si no ha notado lo anterior, se estudia la función f_n sobre $\mathbb{R}^+$ (f_n es impar) con el objetivo de determinar $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0|$.

   Sea $n \in \mathbb{N}^*$. La función f_n es derivable en $\mathbb{R}^+$ y para todo real positivo x, $f_n'(x) = n\frac{(1+n^2x^2) - x(n^2x)}{(1+n^2x)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x)^2}$. Así, la función f_n es creciente en $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. Porque la función f_n es positiva en $\mathbb{R}^+$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ que no tiende a 0, cuando n tiende a infinito.

   Convergencia uniforme y localmente uniforme sobre $]0,+\infty[$**.** La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge siempre no uniformemente a la función nula en $]0,+\infty[$ porque para $n \geqslant 1$, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$.

   Sea a un número real fijo estrictamente positivo. Sea $n > \frac{1}{a}$. Se tiene $0 < \frac{1}{n} < a$ y por lo tanto, la función f_n es decreciente en $[a,+\infty[$. Así, para todo real x de $[a,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$. Entonces $\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = fn(a)$, para $n > \frac{1}{a}$. Se deduce que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = 0$. Entonces la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función nula en todo intervalo de la forma $[a,+\infty[$, donde $a > 0$ y, en particular converge localmente uniformemente a la función nula en $]0,+\infty[$, pero no converge uniformemente a la función nula en $]0,+\infty[$.

2. **Convergencia simple en** $\mathbb{R}$**.** Sea $x \in \mathbb{R}$. Se sabe que $e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ y así la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplemente en $\mathbb{R}$ hacia la función constante $f: x \mapsto 1$.

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{x\to-\infty}|f_n(x)-f(x)|=+\infty$. Así, para todo entero natural n, la función $|f_n-f|$ no es acotada en $\mathbb{R}$. La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge entonces uniformemente hacia f sobre $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}|f_n(x)-f(x)|=1$ y entonces $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)-f(x)|\geqslant 1$. La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge entonces uniformemente hacia f sobre $\mathbb{R}^+$.

Convergencia localmente uniforme sobre $\mathbb{R}$.

Sea $[a,b]$ un segmento de $\mathbb{R}$. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $g_n=f_n-f$. La función g_n es derivable en $\mathbb{R}$ y para $x\in\mathbb{R}$

$$g_n'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}x^n}{n!}.$$

Si n es par, la función g_n es decreciente en $\mathbb{R}$ y se anula en 0. Si n es impar, la función g_n es creciente en $\mathbb{R}^-$, decreciente sobre $\mathbb{R}^+$ y se anula en 0. En los dos caso, si $x\in[a,b]$, $|g_n(x)|\leqslant \max\{|g_n(a)|,|g_n(b)|\}$, con igualdad efectivamente obtenida para $x=a$ o $x=b$. Entonces

$$\sup_{x\in[a,b]}|gn(x)|=\max\{|g_n(a)|,|g_n(b)|\}=\frac{g_n(a)+g_n(b)+|g_n(a)-g_n(b)|}{2}.$$

Esta última expresión tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Se deduce que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en todo segmento $[a,b]$ contenida en $\mathbb{R}$ o aún

La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniformemente a la función $f:\ x\mapsto 1$ sobre $\mathbb{R}$.

3. Para x real y n entero natural, se establece $f_n(x)=n(1-x)^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

   Convergencia simple. Sea x real fijado. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)=0\Leftrightarrow x\in 2\mathbb{Z}$. En este caso, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.

   Si $x\notin 2\mathbb{Z}$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la sucesión $(n(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |1-x|<1\Leftrightarrow 0<x<2$. En este caso, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.

La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplemente a la función nula en $[0,2]\cup 2\mathbb{Z}$.

   Convergencia uniforme en $[0,2]$. Sea n un entero natural no nulo fijado.

   $$\sup_{x\in[0,2]}|f_n(x)-0|\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

   Esta última expresión es equivalente a $\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$ en $+\infty$ y, en particular no tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$.

La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a la función nula en $[0,2]$.

Solución del ejercicio 4392 ▲005727

Convergencia simple en $\mathbb{R}^+$. Sea x un real positivo fijo. Para $n>x$, $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ y entonces

$$f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\underset{n\to+\infty}{=}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\exp(-x+o(1)).$$

Entonces la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplemente en $\mathbb{R}^+$ a la función $f:\ x\mapsto e^{-x}$.
Convergencia uniforme en $\mathbb{R}^+$. Para x real positivo y n entero natural no nulo, se escribe $g_n(x)=f(x)-f_n(x)=\begin{cases} e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\in[0,n] \\ e^{-x} & \text{si } x>n \end{cases}$.
Determinar la cota superior de la función $|g_n|$ sobre $[0,+\infty[$.
La función g_n es definida y continua en R^+. Para $x\geqslant n$, $0<g_n(x)\leqslant e^{-n}=g_n(n)$.
Estudiar la función g_n sobre $[0,n]$. Para $x\in[0,n]$, $g_n'(x)=-e^{-x}+\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}$. ($g_n'(n)$ es la derivada a la izquierda de la función g_n en n, pero se puede demostrar que, de hecho la función g_n es derivable en n, para $n>1$).
La función g_n es continua en el segmento $[0,n]$ y por lo tanto, admite en $[0,n]$ un mínimo y un máximo.
• La función g_n tiene un mínimo igual a 0 alcanzado en 0.
En efecto, se sabe que para todo real u, $e^u\geqslant 1+u$ (desigualdad de convexidad) y así para todo real x de $[0,n]$, $e^{-x/n}\geqslant 1-\frac{x}{n}\geqslant 0$. Después de elevar ambos lados de esta desigualdad, por crecimiento de $t\mapsto t^n$ sobre $\mathbb{R}^+$, se obtiene $e^{-x}\geqslant\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ o aún $g_n(x)\geqslant 0=g_n(0)$.
• Para $0<x\leqslant n$, las desigualdades anteriores son estrictas y la función $g_{n|[0,n]}$ admite su máximo en $]0,n]$. Además, $g_n'(n)=-e^{-n}<0$ y dado que la función g_n es de clase C^1 sobre $[0,n]$, su derivada g_n' es estrictamente negativa en un vecindario a la izquierda de n. La función g_n es entonces estrictamente decreciente en este vecindario y la función g_n admite necesariamente su máximo en $\mathbb{R}^+$ en algún punto x_n de $]0,n[$. En tal punto, porque el intervalo $]0,n[$ es abierto, se sabe que la derivada de la función g_n se anula. La igualdad $g_n'(x_n)=0$ proporciona $\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}=e^{-x_n}$ y entonces

$$g_n(x_n)=e^{-x_n}-\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n=\left(1-\left(1-\frac{x_n}{n}\right)\right)e^{-x_n}=\frac{x_ne^{-x_n}}{n}.$$

En resumen, para todo real positivo x, $0\leqslant g_n(x)\leqslant\frac{x_ne^{-x_n}}{n}$, donde x_n es un cierto real de $]0,n[$. Para u real positivo, se escribe $h(u)=ue^{-u}$. La función h es derivable en $\mathbb{R}^+$ y para $u\geqslant 0$, $h'(u)=(1-u)e^{-u}$. Así, la función h admite un máximo en 1 igual a $\frac{1}{e}$. Se ha demostrado que

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant g_n(x)\leqslant\frac{1}{ne}$$

o aún $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\{|g_n(x)|,\ x\geqslant 0\}\leqslant\frac{1}{ne}$. Así, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\{|g_n(x)|,\ x\geqslant 0\}=0$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la sucesión de funciones } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformemente en } \mathbb{R}^+ \text{ a la función } x\mapsto e^{-x}.}$$

Existencia de $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$. La función $x\mapsto e^{-x^2}$ es continua en $[0,+\infty[$ y despreciable frente a $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Entonces la función $x\mapsto e^{-x^2}$ es integrable en $[0,+\infty[$. Así, I existe en $\mathbb{R}$. Se puede entonces esperar que $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x^2)\,dx$. La función $x\mapsto f_n(x^2)$ es continua en $[0,+\infty[$ y nula en $[\sqrt{n},+\infty[$. Entonces la función $x\mapsto f_n(x^2)$ es integrable en $[0,+\infty[$.
Para $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $I_n=\int_0^{+\infty}f_n(x^2)\,dx=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx$. Demostrar que I_n tiende a I, cuando n tiende a $+\infty$.

$$|I-I_n|\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}|f(x^2)-f_n(x^2)|\,dx+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\leqslant\sqrt{n}\times\frac{1}{ne}+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{e\sqrt{n}}+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

Porque la función $x\mapsto e^{-x^2}$ es integrable en $[0,+\infty[$, esta última expresión tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=I$.
Cálculo del límite de I_n. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Cambios de variables $x=u\sqrt{n}$, luego $u=\cos v$ proporcionan

$$I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx=\sqrt{n}\int_0^1(1-u^2)^n\,du=\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2n+1}v\,dv=\sqrt{n}W_{2n+1}\ ,$$

donde W_n es la n-ésima integral de WALLIS. Ya se ha visto (ejercicio clásico, ver fichas de Maths Sup) que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ y entonces

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\times\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalmente, I_n tiende a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, cuando n tiende a $+\infty$ y entonces

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Se pueden ver diferentes cálculos de la integral de GAUSS en « Grandes clásicos de competición : integración ».

Solución del ejercicio 4393 ▲005729

Pongamos $f=\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$. El criterio de CAUCHY de convergencia uniforme (aplicada a $\varepsilon=1$) permite escribir

$$\exists N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ \forall m\geqslant N,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |P_n(x)-P_m(x)|\leqslant 1.$$

Para $n\geqslant N$, los polinomios P_N-P_n están acotados en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, constantes. Así, para cada $n\geqslant N$, existe $a_n\in\mathbb{R}$ tal que $P_N-P_n=a_n\quad(*)$. Porque la sucesión (P_n) converge simplemente en $\mathbb{R}$, La sucesión $(a_n)=(P_N(0)-P_n(0))$ converge a un número real que se denota a. Se hace entonces tender n tiende a $+\infty$ en la igualdad $(*)$ y se obtiene

$$f=P_N-a$$

Se ha demostrado que f es un polinomio.

Solución del ejercicio 4394 ▲005732

1. **Convergencia simple.** Cada función f_n, $n\in\mathbb{N}$, se define en $\mathbb{R}$. Sea $x\in\mathbb{R}$.
   - Si $x<0$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ y la serie de término general $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, diverge groseramente.
   - Si $x=0$, ya que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=f_n(0)=0$, la serie de término general $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, converge.
   - Si $x>0$, $n^2f_n(x)=x^2e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ y entonces $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En este caso también, la serie de término general $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, converge.

   $$\boxed{\text{La serie de funciones de término general } f_n,\ n\in\mathbb{N}, \text{ converge simplemente en } \mathbb{R}^+.}$$

   Convergencia normal. La función f_0 es la función nula. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. La función f_n es derivable en $\mathbb{R}^+$ y para todo real positivo x,

   $$f_n'(x)=n(2x-x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}=nx(2-x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

   La función f_n es positiva en $[0,+\infty[$, creciente en $\left[0,\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{2}{\sqrt{n}},+\infty\right[$. Se deduce que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Así, la serie numérica de término general $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, diverge groseramente y así

La serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, no converge normalmente en $\mathbb{R}^+$.

Sea $a > 0$. Para $n \geqslant \frac{4}{a^2}$, se tiene $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a$ y por lo tanto, la función f_n es decreciente en $[a, +\infty[$. Sea así n un entero superior o igual que $\frac{4}{a^2}$. Para todo real t superior o igual a a, se tiene $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant f_n(a)$ y entonces $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$. Como la serie numérica de término general $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en $[a, +\infty[$.

Para todo $a > 0$, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normal y uniformemente en $[a, +\infty[$.

Convergencia uniforme en $[0, +\infty[$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geqslant f_{n+1}(t),$$

y entonces $\sup_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)| \geqslant \sup_{t\in[0,+\infty[} |f_{n+1}(t)| 4e^{-2}$. Así, $\sup_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)|$ no tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y entonces

la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, no converge uniformemente en $\mathbb{R}^+$.

2. **Convergencia simple.** Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, se define en $]0, +\infty[$. Sea $x \in]0, +\infty[$. Porque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} > 0$, la serie numérica de término general $f_n(x)$ converge. Entonces

   la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplemente en $]0, +\infty[$.

   Convergencia normal. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. La función f_n es decreciente y positiva en $]0, +\infty[$. Entonces $\sup_{x\in]0,+\infty} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$. Porque la serie numérica de término general $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge

   la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, no converge normalmente en $\mathbb{R}^+$.

   Sea $a > 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, la función f_n es decreciente y positiva en $5a, +\infty[$ y entonces $\sup_{x\in[a,+\infty} |f_n(x)| = f_n(a)$. Como la serie numérica de término general $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en $[a, +\infty[$.

   Para todo $a > 0$, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normal y uniformemente en $[a, +\infty[$.

3. **Convergencia simple.** Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}$, se define en $\mathbb{R}$ e impar. Sea $x \in \mathbb{R}^+$.

   • Si $x = 0$, para todo entero natural n, $f_n(x) = f_n(0) = 0$. En este caso, la serie numérica de término general $f_n(x)$ converge.

• Si $x > 0$, la sucesión $\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión geométrica de números primos $x > 0$ y de razón $\dfrac{1}{x^2+1} \in]0,1[$. Se deduce que la sucesión $\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es positiva decreciente de límite nulo. Así, la serie numérica de término general $f_n(x)$ converge en virtud del criterio especial a series alternadas.

• Si $x < 0$, porque para todo entero natural n, $f_n(x) = -f_n(-x)$, la serie numérica de término general $f_n(x)$ converge. Finalmente,

$$\boxed{\text{la serie de funciones de término general } f_n,\ n\in\mathbb{N}, \text{ converge simplemente en } \mathbb{R}.}$$

Convergencia normal. La función f_0 no es acotada en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, no converge normalmente en $\mathbb{R}$.

Analizar la convergencia normal de la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, sobre $\mathbb{R}$.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. La función $g_n = (-1)^n f_n$ es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x \times \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La función g_n es positiva en $\mathbb{R}^+$, creciente en $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ y decreciente en $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Porque la función g_n es impar, se deduce que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Pero $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$ y entonces

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2}\times\sqrt{n}} > 0.$$

Así, la serie numérica de término general $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge y por lo tanto,

$$\boxed{\text{la serie de funciones de término general } f_n,\ n\in\mathbb{N}^*, \text{ no converge normalmente en } \mathbb{R}.}$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}^+$, ya que la sucesión $\left(\dfrac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es positiva decreciente y de límite nulo, de acuerdo a una mayoración clásica del resto de orden n de una serie alternada,

$$R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x}{(1+x^2)^k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

esta desigualdad es aún válida para $x < 0$ por paridad. Entonces $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)| \leqslant g_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

De acuerdo a lo anterior, $g_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$ y es lo mismo con $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)|$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la serie de funciones de término general } f_n,\ n\in\mathbb{N}, \text{ converge uniformemente en } \mathbb{R}.}$$

Solución del ejercicio 4395 ▲005733

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{ka}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-t^a)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt,$$

con $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)a}\,dt = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Así, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a}\,dt = 0$. Se deduce que la serie de término general $\frac{(-1)^k}{1+ka}$, $k \geqslant 0$, converge y que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\,dt.}$$

Solución del ejercicio 4399 ▲004518

1.

2. si, por convolución.

Solución del ejercicio 4402 ▲004521

$|g_n(f_n(x)) - g(f(x))| \leqslant |g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - g(f(x))|$ y g es uniformemente continua.

Solución del ejercicio 4404 ▲004527

Tomar una subdivisión regular de $[a,b]$ y encuadrar f_n por las cadenas asociadas.

Solución del ejercicio 4405 ▲005728

1. (a) Sea $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$,
   $$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$
   - Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$,
   $$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = X \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)}$$
   $$= X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} = X.$$
   - Si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x(x-1)$, entonces $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k}$ y entonces $B_1(f) = 0$. Para $n \geqslant 2$ y $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k} = -\frac{1}{n^2}k(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = -\frac{n-1}{n}\frac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)!} = -\frac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-1}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}B_n(f) &= -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)}\\ &= -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}X^k(1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X),\end{aligned}$$

lo que es aún cierto para $n=1$.

(b) Según la pregunta anterior

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2X^k(1-X)^{n-k} - 2nX\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-n)X^k(1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k}$$

$$+n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} =$$

$$n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2 =$$

$$-n(n-1)X(1-X) - n^2(2X-1)X + n^2X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X).$$

2. Sea $\varepsilon > 0$. Sean n un entero natural no nulo y α un real estrictamente positivo dado. Sea x un real de $[0,1]$. Denotemos A (resp. B) el conjunto de enteros $k \in [\![0,n]\!]$ tales que $\left|x-\frac{k}{n}\right| < \alpha$ (resp. $\left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$). (Si A o B es vacío, las sumas correspondientes a continuación son nulas).

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|\\ &\leqslant \sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

f es continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, es uniformemente continua en este segmento por el teorema de HEINE. Así, existe $\alpha > 0$ tal que si x y y son dos reales de $[0,1]$ de modo que $|x-y| < \alpha$, entonces $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. α se fija de ahora en adelante. Para esta elección de α,

$$\sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, la función f es continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, es acotada en este segmento. Sea M un mayorante de la función $|f|$ sobre $[0,1]$.

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Pero si $k \in B$, la desigualdad $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$ proporciona $1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}(k-nx)^2$ y entonces

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2 n^2}\times nx(1-x) = \frac{1}{\alpha^2 n}\left(\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{4\alpha^2 n}.$$

En resumen, para todo real $x \in [0,1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \times \frac{1}{4\alpha^2 n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Ahora, ya que $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{2\alpha^2 n} = 0$, existe un entero natural no nulo N tal que para $n \geqslant N$, $\frac{M}{2\alpha^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Para $n \geqslant N$, se tiene $|f(x) - B_n(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha demostrado que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ (n \geqslant N \Rightarrow |f(x) - (B_n(f))(x)| < \varepsilon,$$

y así como

$$\boxed{\text{la sucesión de polinomios } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformemente en } [0,1] \text{ hacia } f.}$$

3. La cuestión 2) demuestra el teorema de WEIERSTRASS en el caso del segmento $[0,1]$.
Sean $[a,b]$ un segmento cualquiera y f una aplicación continua en $[a,b]$.
Para $x \in [0,1]$, se escribe $g(x) = f(a+(b-a)x)$. La función g es continua en $[0,1]$ y por lo tanto, existe una sucesión de polinomios (P_n) convergiendo uniformemente hacia g sobre $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $Q_n = P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$.
Sea $\varepsilon > 0$. $\exists N \geqslant 1$ tal que $\forall n \geqslant N$, $\forall y \in [0,1]$, $|g(y) - P_n(y)| < \varepsilon$.
Sean $x \in [a,b]$ y $n \geqslant N$. El real $y = \frac{x-a}{b-a}$ está en $[0,1]$ y

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(a+(b-a)y) - Q_n(a+(b-a)y)| = |g(y) - P_n(y)| < \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión de polinomios $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función f sobre $[a,b]$.

Solución del ejercicio 4406 ▲005730

---

1. Para $x \in]-1,1[$ y n entero natural no nulo, se escribe $f_n(x) = \frac{x^n \operatorname{sen}(nx)}{n}$.
Sea $x \in]-1,1[$. Para n entero natural no nulo, $|f_n(x)| \leqslant |x|^n$. Por tanto, la serie geométrica de término general $|x|^n$, $n \geqslant 1$, es convergente y por lo tanto, la serie numérica de término general $f_n(x)$ es absolutamente convergente y en particular convergente. Se deduce que $f(x)$ existe.

$$\boxed{f \text{ se define en }]-1,1[.}$$

Sea $a \in]0,1[$. Cada f_n, $n \geqslant 1$, es de clase C^1 sobre $[-a,a]$ y para $x \in [-a,a]$,

$$f_n'(x) = x^{n-1}\operatorname{sen}(nx) + x^n\cos(nx).$$

Para $x \in [-a,a]$ y $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(x)| \leqslant a^{n-1} + a^n \leqslant 2a^{n-1}.$$

Porque la serie numérica de término general $2a^{n-1}$, $n \geqslant 1$, converge, la serie de funciones de término general f_n', $n \geqslant 1$, está normalmente y por lo tanto, uniformemente en $[-a,a]$.
En resumen,
• la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, converge simplemente a f sobre $[-a,a]$, • cada función f_n, $n \geqslant 1$, es de clase C^1 sobre $[-a,a]$, • la serie de funciones de término general f_n' converge uniformemente en $[-a,a]$. De acuerdo a un corolario del teorema de derivación término a término, f es de clase C^1 sobre $[-a,a]$, para todo real a de $]0,1[$ y por lo tanto, en $]-1,1[$ y su derivada se obtiene por derivación término a término.

$$\boxed{f \text{ es de clase } C^1 \text{ sobre }]-1,1[\text{ y } \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\operatorname{sen}(nx) + x^n\cos(nx)).}$$

2. Así, para $x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n-1}\operatorname{sen}(nx)+x^n\cos(nx)) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}e^{inx}\right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n}e^{inx}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{x^2-2x\cos x+1}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}x + x\cos x - x^2}{x^2-2x\cos x+1}. \end{aligned}$$

Pero, para $x \in]-1,1[$,

$$\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen}x+x\cos x)(1-x\cos x) - x\operatorname{sen}x(-\cos x + x\operatorname{sen}x)}{(1-x\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen}x+x\cos x-x^2}{(1-x\cos x)^2}.$$

y entonces

$$\begin{aligned} \left(\arctan\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right)\right)' &= \frac{\operatorname{sen}x+x\cos x-x^2}{(1-x\cos x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right)^2} = \frac{\operatorname{sen}x+x\cos x-x^2}{(1-x\cos x)^2+x^2\operatorname{sen}^2x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}x+x\cos x-x^2}{x^2-2x\cos x+1} = f'(x). \end{aligned}$$

Finalmente, para $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \arctan\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\operatorname{sen}(nx)}{n} = \arctan\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1-x\cos x}\right).}$$

Solución del ejercicio 4407 ▲005731

1. Para n entero natural no nulo, se denota f_n la función $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Para todo real x, $f(x)$ existe si y solo si cada $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, existe y la serie numérica de término general $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe si y solo si $x > 0$ y $x \neq \frac{1}{n}$. Sea por lo tanto $x \in D =]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{p},\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Para $n > \frac{1}{x}$, se tiene $\ln(nx) > 0$. Se deduce que la sucesión $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es positiva y decreciente a partir de cierto punto y tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$. Así, la serie numérica de término general $f_n(x)$ converge en virtud del criterio especial de series alternadas y por lo tanto, $f(x)$ existe.

$$\boxed{\text{El dominio de definición de } f \text{ es } D =]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}.}$$

2. **Límite de f en $+\infty$.** Sea $x > 1$. Entonces $f(x)$ existe. Para todo natural no nulo n, $\ln(nx) > 0$. Se deduce que la sucesión $\left(\frac{1}{\ln(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es decreciente. Entonces se sabe que el valor absoluto de $f(x)$ es mayorada por el valor absoluto del primer término de la serie. Así

$$\forall x > 1,\ |f(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^0}{\ln(x)}\right| = \frac{1}{\ln x},$$

y, en particular

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Se puede señalar además que para $x > 1$, $f(x)$ es del signo del primer término de la serie, a saber $\frac{1}{\ln(x)}$ y entonces $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 0$.

Convergencia uniforme en $]1,+\infty[$. Según una mayoración clásica del resto a de orden n alternancia de una serie alterna, para $x > 1$ y n natural no nulo,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)}\right| = \frac{1}{\ln((n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Entonces, para todo entero natural no nulo, $\sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$ y así $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$.

La serie de funciones de término general f_n converge uniformemente a su suma en $]1,+\infty[$.

Continuidad en $]1,+\infty[$. Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ es continua en $]1,+\infty[$ y entonces f es, por lo tanto continua en $]1,+\infty[$ en tanto que límite uniforme de $]1,+\infty[$ de una sucesión de funciones continuas en $]1,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ es continua en }]1,+\infty[.}$$

Límite en 1 a la derecha. Sea $n \geqslant 2$. Cuando x tiende a 1 para valores superiores, $f_n(x)$ tiende a $\ell_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$. Porque la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 2$, converge uniformemente a su suma en $]1,+\infty[$, el teorema de inversión de límites nos permite afirmar que la serie numérica de término general ℓ_n, $n \geqslant 2$ converge y que la función $x \mapsto f(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ tiende al real $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$, cuando x tiende a 1, para valores superiores o incluso

$$\boxed{f(x) \underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{\ln x} + O(1) \text{ y, en particular, } \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty.}$$

3. La serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, converge simplemente a la función f sobre $]1,+\infty[$. Además, cada función f_n es de clase C^1 sobre $]1,+\infty[$ y para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x > 1$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.$$

Queda por comprobar la convergencia uniforme de la serie de funciones de término general f_n' sobre $]1,+\infty[$. Sea $x > 1$. La serie de término general $f_n'(x)$ es alternada porque su término general es alternada en signo y su valor absoluto a saber $\frac{1}{x\ln^2(nx)}$ tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$ en forma decreciente. Entonces, de acuerdo a una mayoración clásica del resto de orden n de una serie alternada,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x\ln^2(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x\ln^2((n+1)x)}\right| = \frac{1}{x\ln^2((n+1)x)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Así, $\sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}$ y entonces $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$. Así, la serie de funciones de término general f_n', $n \geqslant 1$, converge uniformemente en $]1,+\infty[$.

En resumen,

• la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, converge simplemente a f sobre $]1,+\infty[$, • cada función f_n, $n \geqslant 1$, es de clase C^1 sobre $]1,+\infty[$, • la serie de funciones de término general f_n' converge uniformemente en $]1,+\infty[$. De acuerdo a un corolario del teorema de derivación término a término, f es de clase C^1 sobre $]1,+\infty[$ y su derivada se obtiene por derivación término a término.

$$\boxed{f \text{ es de clase } C^1 \text{ sobre }]1,+\infty[\text{ y } \forall x > 1,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.}$$

Para $x > 1$, porque la serie de suma $f'(x)$ es alternada, $f'(x)$ es del signo del primer término de la suma, a saber $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. Así, $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) \leqslant 0$ y f es, por lo tanto estrictamente decreciente en $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La función } f \text{ es decreciente en }]1,+\infty[.}$$

Solución del ejercicio 4408 ▲005734

1. **Convergencia simple.** Sea $t \in \mathbb{R}$. Para todo natural no nulo n, $1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \geqslant 1 > 0$ y entonces $f_n(t)$ existe. Luego, $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) > 0$ y por lo tanto, la sucesión numérica $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ es alternada en signo. Además, $|f_n(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ y la sucesión $(|f_n(t)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tiende a 0 en forma decreciente. Se deduce que la serie de término general $f_n(t)$, $n \geqslant 1$, converge en virtud del criterio especial a series alternadas.

$$\boxed{\text{La serie de funciones de término general } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge simplemente en } \mathbb{R}.}$$

Se define así $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Convergencia uniforme. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Según una mayoración clásica del resto a de orden n de una serie alternada, para todo real t se tiene

$$|R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)| = \ln\left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1 + \frac{t^2+1-1}{(n+1)(1+t^2)}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(1+t^2)}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$

y entonces, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Como $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 0$, todavía se tiene $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| = 0$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\text{La serie de funciones de término general } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge uniformemente a } f \text{ sobre } \mathbb{R}.}$$

Continuidad. Dado que cada función f_n, $n \geqslant 1$, es continua en $\mathbb{R}$, la función f es continua en $\mathbb{R}$ en tanto que límite uniforme de $\mathbb{R}$ de una sucesión de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}.}$$

2. Por el teorema de inversión de los límites, f tiene un límite real en $+\infty$ y

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) \text{ (ver el ejercicio 1954, 5)).}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Solución del ejercicio 4409 ▲005735

Dominio de definición. Sea $t \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t)$ existe y demás $f_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Así la serie numérica de término general $f_n(t)$, $n \geqslant 1$, converge absolutamente y en particular converge. Se ha demostrado que

$$\boxed{f \text{ está definida en } \mathbb{R}.}$$

Paridad Para todo real t,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(-nt)}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{n^2} = -f(t).$$

$$\boxed{f \text{ es impar.}}$$

Convergencia normal. Para todo real t y todo entero natural no nulo n, $|f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$ y por lo tanto, para todo entero natural no nulo n,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}.$$

Como la serie numérica de término general $\frac{\pi}{2n^2}$, $n \geqslant 1$, converge, la serie de funciones de término general f_n converge normalmente y por lo tanto, uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$.

Límite de f en $+\infty$. Porque la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, converge uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$ y que cada función f_n tiene un límite real cuando t tiende a $+\infty$ a saber $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$, el teorema de inversión de límites nos permite afirmar que f tiene un límite real en $+\infty$ y que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12} \text{ y } \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}.}$$

Continuidad. Dado que cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, es continua en $\mathbb{R}$ y que la serie de funciones de término general f_n converge uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$, la función f es continua en $\mathbb{R}$ en tanto que límite uniforme de $\mathbb{R}$ de una sucesión de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}.}$$

Derivación. Sea $a > 0$. Cada función f_n, $n \geqslant 1$, es de clase C^1 sobre $[a, +\infty[$ y para $n \in \mathbb{N}^*$ y $t \geqslant a$,

$$f_n'(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene entonces $\sup\limits_{t\in[a,+\infty[} |f_n'(t)| = f_n'(a) = \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$. Porque $\frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^3} > 0$, la serie de término general $\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge y por lo tanto, la serie de funciones de término general f_n', $n \geqslant 1$, converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en $[a, +\infty[$.

En resumen, • la serie de funciones de término general f_n, $n \geqslant 1$, converge simplemente a f sobre $[a, +\infty[$, • cada función f_n es de clase C^1 sobre $[a, +\infty[$, • la serie de funciones de término general f_n' converge uniformemente en $[a, +\infty[$.

De acuerdo a un corolario del teorema de derivación término a término, f es de clase C^1 sobre $[a, +\infty[$ y su derivada se obtiene por derivación término a término. Siendo esto cierto para todo $a > 0$, f es de clase C^1 sobre $]0, +\infty[$ y como f es impar

$$\boxed{f \text{ es de clase } C^1 \text{ sobre } \mathbb{R}^* \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^*,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.}$$

Derivabilidad en 0**.** La función f' es decreciente en $]0, +\infty[$. Entonces la función f' admite un límite en 0^+ elemento de $]-\infty, +\infty]$. Para $t > 0$ y $N \in \mathbb{N}^*$, se tiene $f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$ y cuando t tiende a 0, se obtiene

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

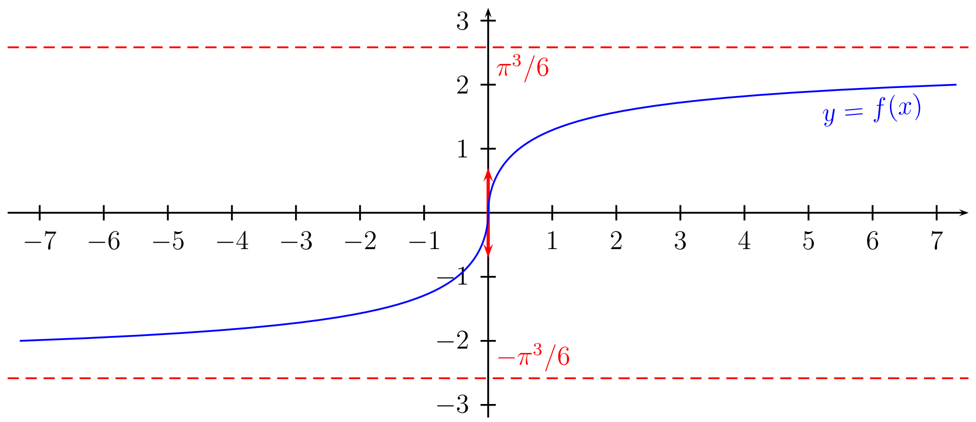
Esta desigualdad es cierta para todo entero natural no nulo N, cuando N tiende a $+\infty$ se obtiene

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Se ha demostrado que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) = +\infty$.

En resumen, f es de clase C^0 sobre $[0, +\infty[$, de clase C^1 sobre $]0, +\infty[$ y $f'(t)$ tiende a $+\infty$, cuando t tiende a 0 para valores superiores. De un corolario del teorema de incrementos finitos, se sabe que f no es derivable en 0 por la derecha y que su curva representativa admite $[Oy)$ por semi-tangente en $(0, 0)$. Porque f es impar, f no es derivable en 0 y su curva representativa admite (Oy) por tangente en $(0, 0)$.

Forma del gráfico.



Solución del ejercicio 4410 ▲005738

1. Sea $x \in [0,+\infty[$. Para $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)$ y entonces $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x^2+o(1))$. Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplemente en $\mathbb{R}^+$ a la función $f:\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, es continua a trozos en $[0,+\infty[$ y nula en un vecindario de $+\infty$. Entonces cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, es integrable en $[0,+\infty[$.
   La función f es continua en $[0,+\infty[$ y despreciable frente a $\frac{1}{x^2}$, cuando x tiende a $+\infty$. Entonces la función f es integrable en $[0,+\infty[$.
   Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Por convexidad de la función exponencial, $\forall u \in \mathbb{R}$, $1+u \leqslant \mathrm{e}^u$. Así, $\forall x \in [0,\sqrt{n}]$, $0 \leqslant 1-\frac{x^2}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/n}$, luego por crecimiento de la función $t \mapsto t^n$ sobre $\mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$. Por otra parte, para $x > \sqrt{n}$, $f_n(x) = 0 \leqslant f(x)$. Finalmente,
   $$.\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ |f_n(x)| \leqslant f(x).$$
   En resumen, • cada función f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, es continua a trozos e integrable sobre $[0,+\infty[$, • la sucesión de funciones (f_n) converge simplemente a la función f sobre $[0,+\infty[$ y la función f es continua en $[0,+\infty[$.
   • $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leqslant f$, la función f es integrable en $[0,+\infty[$.
   Por el teorema de convergencia dominada, la sucesión $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
   Así,
   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx.$$
   Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Usando $t = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ y entonces $\frac{x^2}{n} = \cos^2 t$ y $dx = -\sqrt{n}\operatorname{sen} t\,dt$, se obtiene
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n \times (-\sqrt{n}\operatorname{sen} t)\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} t\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1},$$
   donde W_n es la n-ésima integral de Wallis. Clásicamente, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (ver Exercices Maths Sup) y entonces
   $$\frac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
   Se ha demostrado que
   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Solución del ejercicio 4411 ▲005739

Para $x \in]0,1]$, $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$ y entonces $\lim_{x\to 0^+} x^{-x} = 1$. Entonces si ponemos $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ f es una función continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, integrable en el segmento $[0,1]$.

Para $x\in]0,1]$, $x^{-x}=\mathrm{e}^{-x\ln(x)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Se define entonces $\forall x\in[0,1]$, $f_0(x)=1$, luego $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)=\begin{cases}\frac{(-x\ln(x))^n}{n!} & \text{si } x\in]0,1]\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

La función f_0 es continua en $[0,1]$ y para $n\in\mathbb{N}^*$, ya que $-x\ln(x)\underset{x\to 0^+}{\to}0$, la función f_n es continua en $[0,1]$. En resumen, cada función f_n, $n\in\mathbb{N}$, es continua en $[0,1]$. Además,

$$\forall x\in[0,1],\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x).$$

Verificar que la serie de funciones de término general f_n converge normalmente y por lo tanto, uniformemente a f en el segmento $[0,1]$. Para $x\in[0,1]$, se escribe $g(x)=\begin{cases}-x\ln x & \text{si } x\in]0,1]\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

La función g es continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, admite un máximo M en este segmento. Para $x\in[0,1]$, se tiene $0\leqslant g(x)\leqslant M$ (se puede demostrar que $M=g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$). Pero entonces $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]0,1]$, $|f_n(x)|=\frac{(g(x))^n}{n!}\leqslant\frac{M^n}{n!}$, lo que es aún cierto para $x=0$. Como la serie numérica de término general $\frac{M^n}{n!}$ converge, se ha demostrado que la serie de funciones de término general f_n converge normalmente y por lo tanto, uniformemente a f en el segmento $[0,1]$.

De acuerdo al teorema de integración término a término en un segmento, la serie numérica de término general $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, converge y

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \qquad (*).$$

Para $n\in\mathbb{N}$, se escribe $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Sea $n\in\mathbb{N}$. Usando $u=-\ln(x)$, luego $v=(n+1)u$, se obtiene

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{n!}\int_0^1(-x\ln x)^n\,dx=\frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0(u\mathrm{e}^{-u})^n\times(-\mathrm{e}^{-u}\,du)=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}u^n\mathrm{e}^{-(n+1)u}\,du\\&=\frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}v^n\mathrm{e}^{-v}\,dv=\frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

La igualdad $(*)$, entonces se escribe $\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Observación. Para calcular $I_n=\int_0^1\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx$, también se puede estar interesados de manera más general en $J_{n,p}=\int_0^1\frac{x^n(-\ln x)^p}{n!}\,dx$ que se calcula por inducción gracias a una integración por partes.

El trabajo anterior todavía nos permite escribir

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}\ \text{ y }\ \int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Solución del ejercicio 4412 ▲005740

Para $x>0$, se escribe $f(x)=\frac{x^2}{e^x-1}$. f es continua en $]0,+\infty[$. Luego, para todo real estrictamente positivo x, se tiene $0<e^{-x}<1$ y entonces

$$\frac{x^2}{e^x-1}=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^2e^{-(n+1)x}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}.$$

Para $n\in\mathbb{N}^*$ y $x>0$, se escribe $f_n(x)=x^2e^{-nx}$. Cada función f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, es continua e integrable en $[0,+\infty[$ porque es despreciable frente a $\frac{1}{x^2}$, cuando x tiende a $+\infty$. En particular, cada función f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, es integrable en $]0,+\infty[$. Además, para $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}\,dx=\frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty}u^2e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(3)}{n^3}=\frac{2}{n^3},$$

que es el término general de una serie numérica convergente.
En resumen, • cada función f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, es continua e integrable en $]0,+\infty[$, • la serie de funciones de término general f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplemente a la función f sobre $]0,+\infty[$ y la función f es continua en $]0,+\infty[$.
• $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx<+\infty$.
De acuerdo a un teorema de integración término a término, f es integrable en $]0,+\infty[$, la serie numérica de término general $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge y

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}.$$

Se ha demostrado que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Solución del ejercicio 4413 ▲005741

Es casi el mismo ejercicio que el ejercicio 4412. Para todo real $x>0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh}x}=\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}=2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x},$$

luego con el mismo enfoque que en el ejercicio anterior

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,du=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2}$$
$$=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh}x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}.}$$

Solución del ejercicio 4414 ▲005742

Aquí, quizás lo más simple es no usar un teorema de integración término a término. La función $f:\ x\mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ es continua en $]0,1]$. Además, cuando x tiende a 0, $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\ln x\underset{x\to 0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Se deduce que f es integrable en $]0,1]$.

Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\ln x+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}.$$

Ahora, cada una de las funciones $f_k:\ x\mapsto(-1)^k x^{2k}\ln x$, $0\leqslant k\leqslant n$, es integrable en $]0,1]$ porque es continua en $]0,1]$ y despreciable frente a $\frac{1}{\sqrt{x}}$, cuando x tiende a 0. Se deduce además que la función $g_n:\ x\mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}$ es integrable en $]0,1]$, pues $g_n=f-\sum_{k=0}^{n}f_k$. Se tiene entonces

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx+\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

La función $h:\ x\mapsto\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ es continua en $]0,1]$ y prolongable por continuidad en 0. Se deduce que la función h es acotada en $]0,1]$. Sea M un mayorante de la función $|h|$ sobre $]0,1]$. Para todo natural n, se tiene entonces

$$\left|\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx\right|\leqslant\int_0^1 x^{2n}\left|\frac{x\ln x}{1+x^2}\right|\,dx\leqslant M\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{M}{2n+1}.$$

En particular, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx=0$. Esto demuestra que la serie numérica de término general $(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx$, $k\in\mathbb{N}$, converge y que

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx.$$

Sean $n\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon\in]0,1[$. Las dos funciones $x\mapsto\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ y $x\mapsto\ln x$ son de clase C^1 en el segmento $[\varepsilon,1]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_\varepsilon^1 x^{2n}\ln x\,dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1-\frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1 x^{2n}\,dx=-\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon-\frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Cuando ε tiende a 0, se obtiene $\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx=-\frac{1}{(2n+1)^2}$. Así,

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\frac{\pi}{4}.$$

Verificar ahora la integrabilidad de la función f sobre $]0,+\infty[$. La función f es continua en $]0,+\infty[$ y se sabe también ya que f es integrable en $]0,1]$. Además, $x^{3/2}f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ y entonces $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Esto demuestra que la función f es integrable en $[1,+\infty[$ y finalmente en $]0,+\infty[$.

Para calcular $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, el método anterior ya no funciona en absoluto porque para $x>1$, x^n tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$. Es una idea completamente diferente que te permite ir hasta el final. Se define $u=\frac{1}{x}$ y se obtiene

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\int_{+\infty}^0\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\times\frac{-du}{u^2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,du=-I,$$

y por lo tanto, $I=0$.

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}\text{ y }\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=0.}$$

Solución del ejercicio 4415 ▲005743

1. Sea $x\in[0,1[$. Para todo real t de $[0,x]$, se tiene $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^n$. Ahora, para todo real $t\in[0,x]$ y todo entero natural n, se tiene $|t|^n\leqslant x^n$. Porque la serie numérica de término general x^n converge, se deduce que la serie de funciones de término general $t\mapsto t^n$ converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en el segmento $[0,x]$. Del teorema de integración término a término en un segmento, se puede decir que
$$-\ln(1-x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x t^n\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$
$$\boxed{\forall t\in[0,1[,\ -\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}.}$$

2. Así, para $t\in]0,1[$,
$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}\ln t}{n}.$$
Para $t\in]0,1[$, se escribe $f(t)=\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$, luego para $t\in]0,1]$ y $n\in\mathbb{N}^*$, se escribe $f_n(t)=-\frac{t^{n-1}\ln t}{n}$. Sea $n\in\mathbb{N}^*$. La función f_n es continua en $]0,1]$ y despreciable frente a $\frac{1}{\sqrt{t}}$, cuando t tiende a 0. La función f_n es, por lo tanto integrable en $]0,1]$. En particular, la función f_n es, por lo tanto integrable en $]0,1[$. Calculemos entonces $\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Sea $a\in]0,1[$. Las dos funciones $t\mapsto\frac{t^n}{n}$ y $t\mapsto-\ln t$ son de clase C^1 en el segmento $[a,1]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene
$$\int_a^1 t^{n-1}(-\ln t)\,dt=\left[-\frac{t^n\ln t}{n}\right]_a^1+\frac{1}{n}\int_a^1 t^{n-1}\,dt=\frac{a^n\ln a}{n}+\frac{1}{n^2}(1-a^n).$$
Cuando a tiende a 0, se obtiene $\int_0^1 -t^{n-1}\ln t\,dt=\frac{1}{n^2}$ y entonces $\int_0^1 f_n(t)\,dt=\frac{1}{n^3}$. Porque la función f_n es positiva en $]0,1[$, todavía se tiene $\int_0^1|f_n(t)|\,dt=\frac{1}{n^3}$. Se deduce que la serie numérica de término general $\int_0^1|f_n(t)|\,dt$ converge.
En resumen, • cada función f_n es continua a trozos e integrable sobre $]0,1[$, • la serie de funciones de término general f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge simplemente a la función f sobre $]0,1[$ y la función f es continua en $]0,1[$, • $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1|f_n(t)|\,dt<+\infty$.
De acuerdo a un teorema de integración término a término,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

Solución del ejercicio 4416 ▲005744

Existencia de la integral. Sea $x\in\mathbb{R}$. La función $f:\ t\mapsto\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}$ es continua en $[0,+\infty[$. Además, para todo real positivo t, $|f(t)|\leqslant\frac{1}{\operatorname{ch}t}$ y entonces $|f(t)|\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{2}{e^t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Se deduce que la función f es integrable en $[0,+\infty[$.

$$\text{para todo real } x,\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,dt \text{ existe.}$$

Convergencia de la serie. Sea $x\in\mathbb{R}$. Para $n\in\mathbb{N}$, se escribe $u_n(x)=\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$. Para $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_n(x)-u_{n+1}(x)&=\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}-\frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2}=\frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2)-(2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}\\&=\frac{2(2n+1)(2n+3)-2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}.\end{aligned}$$

Como el numerador de esta última expresión tiende a $+\infty$, cuando n tiende a $+\infty$, esta expresión es positiva para n grande.
Se deduce que la sucesión $(u_n(x))$ decrece a partir de cierto rango. Por otra parte, $\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=0$. Se deduce que la serie de término general $(-1)^n u_n(x)$ converge en virtud del criterio especial a series alternadas.

$$\text{para todo real } x,\text{ la serie de término general } (-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}\text{ converge.}$$

Igualdad de la integral y la suma de la serie. Sea $n\in\mathbb{N}$. Para $t\in]0,+\infty[$, se tiene $e^{-t}\in]0,1[$ y entonces

$$\begin{aligned}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}&=\frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}}=2\cos(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\\&=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(xt)e^{-(2k+1)t}+(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}.\end{aligned}$$

Ahora, para cada $k\in\mathbb{N}$, la función $t\mapsto\cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ es integrable en $[0,+\infty[$ porque es continua en $[0,+\infty[$ y despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$.

Se deduce además que la función $t\mapsto(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ es integrable en $[0,+\infty[$ ya que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}t}\,dt=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-(2k+1)t}\,dt+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt.$$

luego,

$$\left|\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-(2n+3)t}\,dt=\frac{1}{2n+3},$$

y entonces $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt=0$, con lo cual

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-(2n+1)+ix)t}\,dt\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\left(1-\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(-(2n+1)+ix)t}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\right) \ (\text{pues } \left|\mathrm{e}^{(-(2n+1)+ix)t}\right| = \mathrm{e}^{-(2n+1)t} \underset{n\to+\infty}{\to} 0)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, se ha demostrado que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.}$$

Solución del ejercicio 4417 ▲005864

Sea $a \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, se establece $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se puede escribir $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & -\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$. Las sumas de los cuadrados de los dos números $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ y $\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ es igual a 1. Entonces existe un real $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ tal que $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ y $\operatorname{sen}(\theta_n) = \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$. Además, $\cos(\theta_n) > 0$ y $\operatorname{sen}(\theta_n) > 0$ y así podemos tomar

$$\theta_n = \arctan\left(\tfrac{a}{n}\right) \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene entonces

$$A_n^n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\operatorname{sen}(\theta_n) \\ \operatorname{sen}(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\operatorname{sen}(n\theta_n) \\ \operatorname{sen}(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Ahora, $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{a^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+o(1)$.
Por otra parte, $n\theta_n = n\arctan\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n \times \frac{a}{n} = a$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^n = 1.\begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a>0,\ \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(a) & -\operatorname{sen}(a)\\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a)\end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 4418 ▲005865

Sea $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Se sabe que si la serie de término general A^n, $n\in\mathbb{N}$, converge, entonces $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se supone $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$. Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ un valor propio de A y $X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ un vector propio asociado. Para todo natural n, $A^nX=\lambda^nX$. Porque $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$, todavía se tiene $\lim_{n\to+\infty}A^nX=0$, luego $\lim_{n\to+\infty}\lambda^nX=0$ y entonces $\lim_{n\to+\infty}\lambda^n=0$.

Así, si $\lim_{n\to+\infty}A^n=0$, entonces $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{Sp}(A)\subset B_o(0,1)$. Se sabe (ver ejercicio 3287 : descomposición de DUNFORD) que existen dos matrices D y N tales que

1) $A=D+N$ 2) D diagonalizable 3) N nilpotente 4) $DN=ND$.

Además, valores propios de D son los valores propios de A. Se denota k el índice de nilpotencia de N. Dado que las matrices D y N convergente, la fórmula del binomio de NEWTON permite escribir para $n\geqslant k$

$$A^n=(D+N)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D^{n-j}N^j=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}D^{n-j}N^j.$$

Existe una matriz $P\in\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ y una matriz diagonal Δ tal que $D=P\Delta P^{-1}$. Pero entonces, $\forall j\in[\![0,k]\!]$, $\forall n\geqslant j$, $\binom{n}{j}D^{n-j}N^j=P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$.

Sea $j\in[\![0,k]\!]$. Verificar primero que la serie de término general $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n\geqslant j$ converge. Se define $\Delta=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$. Entonces $\forall n\geqslant j$, $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}=\mathrm{diag}\left(\binom{n}{j}\lambda_1^{n-j},\dots,\binom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Ahora, si λ es un valor propio de Δ (y por lo tanto, de A), $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}=\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^j\lambda^{n-j}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pues $|\lambda|<1$ y por lo tanto, la serie de término general $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n\geqslant j$, converge.

Así, la serie de término general $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. Por otra parte, la aplicación $M\mapsto P\times M\times PN^j$ es continua en $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ como un endomorfismo de un espacio de dimensión finita. Se deduce que la serie de término general $P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$ converge.

Finalmente, para cada $j\in[\![0,k]\!]$, la serie de término general $P\times\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\times PN^j$ converge y por lo tanto, la serie de término general A^n converge porque es la suma de $j+1$ series convergentes.

Solución del ejercicio 4419 ▲005866

$\chi_A=\begin{vmatrix}4/3-X & -5/6\\ 5/3 & -7/6-X\end{vmatrix}=X^2-\frac{1}{6}X-\frac{1}{6}=\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{3}\right)$. Así, $A=PDP^{-1}$, donde $D=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y entonces $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Porque $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ están en $]-1,1[$, la serie numérica de los respectivos términos generales $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ y $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergente. Es lo mismo de la serie de término general D^k. Ahora, la aplicación $M \mapsto PMP^{-1}$, converge es continua porque es lineal sobre un espacio de dimensión finita y se deduce que la serie de término general A^k converge. Además,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (por continuidad de la aplicación } M \mapsto PMP^{-1})\\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4}\\ 2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4}\\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4}\\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

Observación. Según el siguiente ejercicio, la matriz obtenida es $(I-A)^{-1}$.

Solución del ejercicio 4420 ▲005867

Sea $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ tal que $\|A\| < 1$. Para todo natural n, se tiene $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Porque $\|A\| < 1$, la serie numérica de término general $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Es lo mismo para serie de término general $\|A^n\|$ y por lo tanto, la serie de término general A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolutamente. Porque $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ es completo en tanto que $\mathbb{C}$ espacio de dimensión finita, se deduce que la serie de término general A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. Además,

$$\begin{aligned}(I-A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \quad \text{(por continuidad de la aplicación } M \mapsto (I-A)M)\\ &= \lim_{n\to+\infty}(I-A^{n+1}) = I\ (\lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = 0, \text{ pues } \forall n \in \mathbb{N},\ \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}).\end{aligned}$$

Así, la matriz $I-A$ es invertible a la derecha y por lo tanto, invertible y además, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. Se deduce además

$$\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

Solución del ejercicio 4421 ▲005868

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Se sabe que por un lado $\det(\exp(A)) \neq 0$ y por otro lado $\exp(A) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right)$. Por continuidad del determinante, por lo tanto se tiene $\lim_{p\to+\infty}\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Así, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}\right) \neq 0$ y por lo tanto, tal que $\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solución del ejercicio 4422 ▲005869

1. $\chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1)-(-2X-2)-(2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3).$

Sea $n\in\mathbb{N}$. La división euclidiana de X^n por χ_A se escribe $X^n = Q_n\times\chi_A + a_nX^2+b_nX+c_n$, donde $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ y $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. Evaluando los dos miembros de esta igualdad en -1, 1 y 3, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} a_n-b_n+c_n=(-1)^n \\ a_n+b_n+c_n=1 \\ 9a_n+3b_n+c_n=3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n) \\ a_n+c_n=\frac{1}{2}(1+(-1)^n) \\ 8a_n+\frac{3}{2}(1-(-1)^n)+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)=3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=\frac{1}{8}(3^n-2+(-1)^n) \\ b_n=\frac{1}{2}(1-(-1)^n) \\ c_n=\frac{1}{8}(-3^n+6+3(-1)^n). \end{array}\right.$$

El teorema de Cayley-Hamilton proporciona entonces

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3).$$

Ahora,

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

y entonces, para todo real t,

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}A^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}.\frac{1}{8}((3^n-2+(-1)^n)A^2+4(1-(-1)^n)A+(-3^n+6+3(-1)^n)I_3) \\
&= \frac{e^{3t}-2e^t+e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}+\frac{4(e^t-e^{-t})}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}+ \\
&\qquad \frac{-e^{3t}+6e^t+3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t}-8e^t & 8e^{3t}-8e^t \\ 2e^{3t}-2e^{-t} & 2e^{3t}+6e^{-t} & 2e^{3t}-2e^{-t} \\ -2e^{3t}+2e^{-t} & -2e^{3t}+8e^t-6e^{-t} & 2e^{3t}+8e^t+2e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^t & 4e^{3t}-4e^t \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^t-3e^{-t} & e^{3t}+4e^t+e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t}-4e^t & 4e^{3t}-4e^t \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+3e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ -e^{3t}+e^{-t} & -e^{3t}+4e^t-3e^{-t} & e^{3t}+4e^t+e^{-t} \end{pmatrix}}.$$

2. $$\begin{aligned}\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1 \\ 6 & 4-X & 2 \\ -10 & -4 & -2-X \end{vmatrix} &= (4-X)(X^2-2X)-6(-X+2)-10(X-2) \\ &= (X-2)[-X(X-4)+6-10] \\ &= -(X-2)(X^2-4X+4) = -(X-2)^3.\end{aligned}$$

Se está en la situación donde A tiene un valor propio único. Por el teorema de CAYLEY-HAMILTON, $(A-2I_3)^3=0$ y así para todo real t,

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \exp(t(A-2I_3)+2tI_3) = \exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3) \quad \text{(porque las matrices } t(A-2I_3) \text{ y } 2tI_3 \text{ conmutan)}\\
&= \left(I_3+t(A-2I_3)+\frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}+\frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA)=\begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 4423 ▲005870

$$\chi_A=\begin{vmatrix}-X&\frac12&-2\\\frac12&-X&0\\0&0&-\frac12-X\end{vmatrix}=-X\left(X^2+\tfrac12X\right)-\tfrac12\left(-\tfrac12X-\tfrac14\right)=-X^2\left(X+\tfrac12\right)+\tfrac14\left(X+\tfrac12\right)=-\left(X+\tfrac12\right)^2\left(X-\tfrac12\right).$$

Sea $n\in\mathbb{N}$. La división euclidiana de X^n por χ_A se escribe $X^n=Q_n\chi_A+a_nX^2+b_nX+c_n$, donde $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ y $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$. Se evalúan los dos miembros de esta igualdad en $\frac12$ y $-\frac12$ y se obtiene $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac12\right)^n$ y $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac12\right)^n$. Luego, derivando los dos miembros de la igualdad y evaluando en $-\frac12$, se obtiene $-a_n+b_n=n\left(-\frac12\right)^{n-1}=-2n\left(-\frac12\right)^n$. Ahora,

$$\begin{cases}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n=\left(\frac12\right)^n\\ \frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n=\left(-\frac12\right)^n\\ -a_n+b_n=-2n\left(-\frac12\right)^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_n=\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\\ \frac{a_n}{2}+2c_n=\left(\frac12\right)^n+\left(-\frac12\right)^n\\ -a_n+\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n=-2n\left(-\frac12\right)^n\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_n=\left(\frac12\right)^n+(2n-1)\left(-\frac12\right)^n\\ b_n=\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\\ c_n=\frac14\left(\frac12\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac12\right)^n.\end{cases}$$

Entonces $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\left(\left(\frac12\right)^n+(2n-1)\left(-\frac12\right)^n\right)A^2+\left(\left(\frac12\right)^n-\left(-\frac12\right)^n\right)A+\left(\frac14\left(\frac12\right)^n-\frac{2n-3}{4}\left(-\frac12\right)^n\right)I_3$, con $A^2=\begin{pmatrix}0&\frac12&-2\\\frac12&0&0\\0&0&-\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac12&-2\\\frac12&0&0\\0&0&-\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14&0&1\\0&\frac14&-1\\0&0&\frac14\end{pmatrix}$.

Se deduce que para $|t| < 2$,

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \right) \right) A^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \right) \right) A \\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n \right) I_3.
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n} \right) A^2 \\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n} \right) A \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n} \right) I_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}} - 1\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \right) A^2 + \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \right) A \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}} - 1\right) + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \right) I_3 \\
&= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \frac{2t}{2-t} + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]-2,2[,\ \ln(I_3+tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 4424 ▲005871

---

1. (a) Sea $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. $f_{\overrightarrow{\omega}}$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ por bilinealidad del producto vectorial. Además, para $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{y} = \left[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = -\left[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}\right] = -\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{y}\right) \cdot \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x} \cdot f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{y})$.

Así,

$$\boxed{\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3).}$$

(b) Sea $\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathscr{A}(\mathbb{R}^3) \\ \overrightarrow{\omega} & \mapsto f_{\overrightarrow{\omega}} \end{array}$.

• Verificar que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$. Sean $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(\overrightarrow{\omega}_1, \overrightarrow{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Para todo $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\left(\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x}) &= f_{\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2\right) \wedge = \lambda_1\left(\overrightarrow{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{x}\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{x}\right) \\ &= \lambda_1 f_{\overrightarrow{\omega}_1}(\overrightarrow{x}) + \lambda_2 f_{\overrightarrow{\omega}_2}(\overrightarrow{x}) = \left((\lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)\right)(\overrightarrow{x})\end{aligned}$$

y entonces $\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2) = \lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)$. Se ha demostrado que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$.

• Verificar que φ es inyectiva. Sea $\omega \in \mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{\omega} \in \ker(\varphi) \Rightarrow f_{\overrightarrow{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Luego se aplica este último resultado a dos vectores no colineales $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se obtiene $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ y entonces $\overrightarrow{x} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Se ha demostrado que φ es inyectiva.

• En fin, $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = \dfrac{3 \times (3-1)}{2} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. Se deduce que φ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. En particular,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3),\ \exists \overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3 /\ f = f_{\overrightarrow{\omega}}.}$$

2. Sea $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Si $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$, entonces $f_{\overrightarrow{\omega}} = 0$ y entonces $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Ahora se supone que $\overrightarrow{\omega} \neq \overrightarrow{0}$. Se define $\overrightarrow{e_3} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{\omega}\|}\overrightarrow{\omega}$, luego se completa la familia ortonormal $(\overrightarrow{e_3})$ en una base ortonormal directa $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ (en particular $\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$).

• Porque $\overrightarrow{e_3}$ es colineal a $\overrightarrow{\omega}$, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}$. Se deduce que

$$\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_3}) = \mathrm{Id}(\overrightarrow{e_3}) + f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \tfrac{1}{2}f^2_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \tfrac{1}{6}f^3_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_3}) + \cdots = \overrightarrow{e_3}.$$

• Por otra parte, $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_2}$ e igualmente $f_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|\,\overrightarrow{e_1}$.

Se deduce que $f^2_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = -\|\overrightarrow{\omega}\|^2\,\overrightarrow{e_1}$ y así como

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\,\overrightarrow{e_1} \quad \text{después} \quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\,\overrightarrow{e_2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_1}) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_1}) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_2} \text{ (suma de dos series convergentes)} \\ &= \cos\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_1} + \mathrm{sen}\left(\|\overrightarrow{\omega}\|\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = (-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}\,\overrightarrow{e_2} \quad \text{después} \quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}(\overrightarrow{e_2}) = -(-1)^n\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}\,\overrightarrow{e_1}.$$

y entonces

$$\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})(\overrightarrow{e_2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\overrightarrow{\omega}}^n(\overrightarrow{e_2}) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n}}{(2n)!}\right) \overrightarrow{e_2} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\overrightarrow{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \overrightarrow{e_1}$$
$$= -\operatorname{sen}(\|\overrightarrow{\omega}\|)\overrightarrow{e_1} + \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|)\overrightarrow{e_2}.$$

Así, la matriz de $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ en la base ortonormada directa $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ es $\begin{pmatrix} \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & -\operatorname{sen}(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ \operatorname{sen}(\|\overrightarrow{\omega}\|) & \cos(\|\overrightarrow{\omega}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ es la rotación del ángulo $\|\overrightarrow{\omega}\|$ alrededor de $\overrightarrow{\omega}$.

Solución del ejercicio 4425 ▲005872

Se provee $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de una norma sub multiplicativa denotada $\|\ \|$. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Sea $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k}\right) A^k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k.$$

Ahora, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{\overbrace{p \times (p-1) \times \cdots \times (p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{k}}\right) \geqslant 0$. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{p} \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|^p}{p}\right)^p \underset{n \to +\infty}{\to} \mathrm{e}^{\|A\|} - \mathrm{e}^{\|A\|} = 0.$$

Se deduce que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p$ tiende a 0, cuando p tiende a $+\infty$ y como $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ tiende a $\exp(A)$, cuando p tiende a $+\infty$, lo mismo se aplica a $\left(I + \frac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

Solución del ejercicio 4426 ▲005873

Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Porque χ_A es de grado n, la división euclidiana de X^k por χ_A se escribe

$$x^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \cdots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)}, \text{ donde } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ y } (a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

El teorema de CAYLEY-HAMILTON entonces demuestra que $A^k = a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} + \cdots + a_1^{(k)} A + a_0^{(k)} I_n$.

Así, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \operatorname{vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$, luego $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \operatorname{vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. En fin, ya que $\operatorname{vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ como un subespacio vectorial de un espacio vectorial de dimensión finita, $\exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \operatorname{vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$

Solución del ejercicio 4427 ▲004528

1. 2. $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi\operatorname{sh}1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}-\cos 1)$.

Solución del ejercicio 4428 ▲004529

1. $\mathbb{R}^*$.
2. CSI : $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2}\,dx \leqslant f(a) \leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2}\,dx+1=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}+1$. Entonces $af(a)\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, cuando $a\to 0^+$.
3. TCM : $f(a)\to 1$ cuando $a\to+\infty$.

Solución del ejercicio 4431 ▲004532

1. 2. $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.

Solución del ejercicio 4433 ▲004534

1. 2. $xg(x)-g(x+1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.
3. CSA $\Rightarrow g'<0$. $g(x)\to+\infty$, cuando $x\to 0^+$, $g(x)\to 0$, cuando $x\to+\infty$.
4. $g(x)\sim\frac{1}{x}$ en 0^+ y $g(x)\sim\frac{1}{ex}$ en $+\infty$.

Solución del ejercicio 4435 ▲004536

1. 2. CSA $\Rightarrow |R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. 3. No, $\|u_n\|_\infty=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Solución del ejercicio 4436 ▲004537

1. 2. $f(x+1)=xf(x)-1$. 3.

Solución del ejercicio 4437 ▲004538

1. CVU en todo $[a,b]$.
2.
3. $f(x+1)=f(x)+\frac{\pi}{2}-\arctan x$.
4. $f(x+1)-f(x)\sim\frac{1}{x}$, por lo tanto la sucesión $(f(n))$ diverge y f es creciente $\Rightarrow \lim=+\infty$.

Solución del ejercicio 4438 ▲004539

$\frac{1}{t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

Solución del ejercicio 4439 ▲004540

1. $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \dfrac{x(x+1)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, entonces la serie $\sum_n \ln f_n(x)$ es convergente para todo $x \notin -\mathbb{N}^*$.
2.
3. $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} \to -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x}{k(k+x)}$ cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4440 ▲004541

Expresar $t = xu$, luego integrar dos veces por partes : $f_n(x) = 1 - \int_0^1 (1-u)^{n+1} x \operatorname{sen}(xu)\,du$, por lo tanto (f_n) converge simplemente a la función constante 1, y la convergencia es uniforme en todo intervalo acotado.

Solución del ejercicio 4442 ▲004543

1. cva si $|\cos x| < 1$, scv si $\cos x = 1$, dv si $\cos x = -1$.
2. TCM agrupando los términos de dos en dos.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\,dx$.

Solución del ejercicio 4443 ▲004544

1. $F_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X + n(1-e^{2ik\pi/n})}$.
2. $F_n(2x) - F_n(-2x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2 - n^2(1-e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\operatorname{sen}(k\pi/n)^2}$.
   Si se supone n impar, y se reagrupan los términos conjugados obtenidos para k y $n-k$:
   $F_n(2x) - F_n(-2x) = \frac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \underbrace{\left(\frac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\operatorname{sen}(k\pi/n)^2} + \frac{x}{x^2e^{2ik\pi/n} + n^2\operatorname{sen}(k\pi/n)^2}\right)}_{=u(k,n,x)}$.
   Se transforma la suma en serie de $k = 1$ a $k = \infty$ poniendo $u(k,n,x) = 0$ si $k > (n-1)/2$, luego se pasa al límite, sujeto a justificación, en esta serie para $n \to \infty$, que da la fórmula solicitada.
   Justificación de la inversión límite-serie : utilizando $\operatorname{sen}(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$, para $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ se tiene $|u(k,n,x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{4k^2 - x^2}$, para todo $k \geqslant |x/2|$, entonces hay convergencia normal con respecto a n, con x fijo.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{x^2 + k^2\pi^2} = \frac{\coth(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$ es normalmente convergente en $\mathbb{R}$, se puede pasar al límite para $x \to 0$.

Solución del ejercicio 4444 ▲004545

1. Transformación de Abel.
2. $f(x) = \arctan\left(\frac{x\operatorname{sen}x}{1 - x\cos x}\right)$.
3. $\frac{\pi - 1}{2}$.

Solución del ejercicio 4445 ▲004546

1.
2. $\zeta(x)-\frac{1}{x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\right)$. Para n fijo, $\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\to\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$, cuando $x\to 1^+$ y la convergencia es monótona por lo que cuando $x\to 1^+$
$\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\to\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\right)=\gamma.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\eta'(1)=\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln(2)^2.$

Solución del ejercicio 4447 ▲004548

Para k fijo y $x\in[0,1[$ se tiene $0\leqslant f(x)\leqslant \text{polinomio}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}x^k=\text{polinomio}(x)+\frac{1}{1-x^k}$ y $\frac{1}{1-x^k}\sim\frac{1}{k(1-x)}$ en un vecindario de 1, por lo tanto $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{2}{k(1-x)}$, para x suficientemente cerca de 1.

Solución del ejercicio 4448 ▲004549

1.
2. Sea $y\in[c,d]$ y $x_n=f_n^{-1}(y)$. La sucesión (x_n) admite como máximo un valor de adherencia, $x=f^{-1}(y)$.
3.

Solución del ejercicio 4449 ▲004550

Sí : $|\sup f_n-\sup f|\leqslant\|f_n-f\|_\infty$.

Solución del ejercicio 4450 ▲004551

1. Hay convergencia normal en todo intervalo $[a,+\infty[$, con $a>0$. No hay convergencia normal en un vecindario de 0, pues $\sup\left\{\frac{xe^{-nx}}{\ln n},\ x\geqslant 0\right\}=\frac{1}{en\ln n}$ alcanzado por $x=\frac{1}{n}$ y $\sum_n\frac{1}{n\ln n}$ diverge (Serie de Bertrand). Sin embargo, hay convergencia uniforme sobre $[0,+\infty[$ car
$$0\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}f_k(x)\leqslant\frac{1}{\ln n}\sum_{k=n}^{\infty}xe^{-kx}=\frac{xe^{-nx}}{\ln n(1-e^{-x})}\leqslant\frac{\sup\{t/(1-e^{-t}),\ t\geqslant 0\}}{\ln n}.$$
2.
3. Cuando $x\to 0^+$, $\frac{S(x)-S(0)}{x}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{\ln n}\to\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=+\infty$ por la convergencia monótona.
4.

Solución del ejercicio 4451 ▲004552

Comparación serie-integral, $f(x)\to\ln(2)$, cuando $x\to 1^-$.

Solución del ejercicio 4452 ▲004553

1. $-1 < t < 1$.
2. Para $0 \leqslant t < 1$ y $n \geqslant 2$ se tiene :

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{t^n}{1-t^n} = \frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}} &= \frac{t^n}{n} + \frac{t^n((1-t)+(1-t^2)+\cdots+(1-t^{n-1}))}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})} \\ &= \frac{t^n}{n} + \frac{(t^n-t^{n+1})((n-1)+(n-2)t+\cdots+t^{n-2})}{n(1+t+\cdots+t^{n-1})},\end{aligned}$$

de donde $0 \leqslant (1-t)\frac{t^n}{1-t^n} - \frac{t^n}{n} \leqslant \frac{n-1}{n}(t^n - t^{n+1}) \leqslant t^n - t^{n+1}$ (verdadero también si $n = 1$) y sumando :

$$0 \leqslant (1-t)S(t) + \ln(1-t) \leqslant 1.$$

Solución del ejercicio 4453 ▲004554

1. La serie converge normalmente y ϕ es continua.
2. ϕ es 1-lipschitziana, pero nada se puede deducir nada para f : para N fijo y $0 < h \leqslant \frac{1}{2.4^N}$, se tiene $|f(h) - f(0)| = f(h) \geqslant \sum_{n=1}^{N} 3^n h = \frac{3^{N+1}-3}{2} h$, por lo tanto f no es lipschitziana en un vecindario de 0.
3. De acuerdo con lo anterior, la tasa de crecimiento de f en 0 es arbitrariamente grande, por lo tanto f no es derivable en 0. Del mismo modo, demostramos que f no es derivable en $x \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4454 ▲004555

Se supone h real. La serie converge localmente normalmente en $\mathbb{R}^*$, por lo tanto f se define en $\mathbb{R}$ y continua en $\mathbb{R}^*$.

Continuidad en 0 : se establece $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ y $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ es $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$ como la suma de serie entera de radio infinito). Para $h \neq 0$ se tiene :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,dt.$$

Esta última serie es uniformemente convergente sobre $\mathbb{R}$, pues $A_n \to 0$ (cuando $n \to \infty$) y $\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,dt$ es convergente.

Solución del ejercicio 4455 ▲004556

1. Sea $k = \lfloor n/2\pi \rfloor$. Se tiene $F_n(x) = \frac{2k\pi}{n} \int_0^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_{2k\pi}^{n} f(x+t)f(t)\,dt \to \int_0^{2\pi} f(x+t)f(t)\,dt$, cuando $n \to \infty$.
2. Uniforme.
3. Cauchy-Schwarz.

Solución del ejercicio 4456 ▲004557

$g = x \mapsto f(\tan(x/2))$ es el límite uniforme de polinomios trigonométricos.

Solución del ejercicio 4457 ▲004558

1. CSA : $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, por lo tanto $f(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

2. $xf(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2+x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2+x^2)^{3/2}}\,dt\,.$
$= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du$
Se tiene $\int_0^{\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = 1 = a+b$ con :
$a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{(2p)/x}^{(2p+1)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du$ y $b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}\,du = xf(x)$.
$h : u \mapsto \frac{u}{(u^2+1)^{3/2}}$ es creciente en $[0, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ y decreciente en $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$, por lo tanto $|a-b| \leqslant \frac{3\|h\|_\infty}{x}$,
y $xf(x) \to \frac{1}{2}$, cuando $x \to +\infty$.

Solución del ejercicio 4458 ▲004559

Se tiene $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \leqslant xS_1(x) \leqslant \frac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$ y $\frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{t} + O(t)$, por lo tanto $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$.
Se deduce que $S_1(x) \sim -\frac{\ln x}{x}$.
El mismo método no funciona para S_2 porque el término residual, $\frac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ no es despreciable frente a $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)}$. Sin embargo, se puede notar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ es normalmente convergente en $\mathbb{R}$, de donde $S_2(x) \sim \frac{\zeta(2)}{x^2}$.

Solución del ejercicio 4459 ▲004560

1. Cuando $n \to \infty$, $S_n(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - t^n e^{i(n+1)x}}{1-te^{ix}}\right) \to \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-2t\cos x+t^2}$, para $-1 < t < 1$.

2. $\int_0^1 S_n(t)\,dt = \sum_{p=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(px)}{p}$.
$\int_0^1 S(t)\,dt = (t - \cos x = u \operatorname{sen} x) = \int_{-\cot x}^{\tan x/2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi - x}{2}$.

3. TCD : $|S_n(t)| \leqslant \frac{2}{\operatorname{sen} x}$ integrable con respecto a t sobre $[0,1]$. Se deduce $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(px)}{p} = \frac{\pi - x}{2}$.

Solución del ejercicio 4460 ▲004561

1. R es trivialmente un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. El teorema de descomposición en elementos simples da una base de R limitándose a elementos simples que no tienen polo en $[0,1]$. $R_{m,n}$ no es un espacio vectorial. Por ejemplo, $\frac{1}{X+1}$ y $\frac{1}{X+2}$ pertenecen a $R_{0,1}$, pero no su suma.

2. Sea (f_k) una sucesión de elementos de $R_{m,n}$ tal que $\|g-f_k\| \to d$, cuando $k\to\infty$. Se denota $f_k = P_k/Q_k$, con $P_k \in \mathbb{R}_m[X]$, $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ y $\|Q_k\| = 1$. Se tiene $\|P_k\| \leqslant \|g-f_k\| + \|g\|$, entonces las consecuencias (P_k) y (Q_k) están acotadas en $\mathbb{R}_m[X]$ y $\mathbb{R}_n[X]$. Si se toma una sub-sucesión, se vuelve al caso $P_k \to P \in \mathbb{R}_m[X]$ y $Q_k \to Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (cuando $k\to\infty$) con además $\|Q\| = 1$.

   Si Q no tiene raíz en $[0,1]$, existe $\alpha > 0$ tal que $|Q(x)| \geqslant \alpha$, para todo $x \in [0,1]$, por lo tanto $|Q_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}\alpha$, para todo $x\in[0,1]$ y todo k bastante grande. Se deduce que la sucesión (P_k/Q_k) converge uniformemente a P/Q sobre $[0,1]$ y que $r_0 = P/Q$ sirve.

   Si Q admite en $[0,1]$ de raíces $a_1,\dots,a_p$ de multiplicidades $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, se denota $Q^0 = \prod_i (X-a_i)^{\alpha_i}$ y $Q^1 = Q/Q^0$. Sea $M = \max\{\|g-f_k\|,\ k\in\mathbb{N}\}$. Para todos $x\in[0,1]$ y $k\in\mathbb{N}$ se tiene $|g(x)Q_k(x) - P_k(x)| \leqslant M|Q_k(x)|$ así en el límite, $|g(x)Q(x)-P(x)| \leqslant M|Q(x)|$, para todo $x\in[0,1]$. Esto implica que Q^0 divide P, se denota $P^1 = P/Q^0$. Entonces, para todo $x\in[0,1]$ y $k\in\mathbb{N}$ se tiene $|g(x)Q^0(x) - P_k(x)Q^0(x)/Q_k(x)| \leqslant \|g-f_k\||Q^0(x)|$, de donde $|g(x)Q^0(x) - P^1(x)Q^0(x)/Q^1(x)| \leqslant d|Q^0(x)|$ y finalmente $r_0 = P^1/Q^1$ sirve.

Solución del ejercicio 4461 ▲004562

1.
2. Sea P_n el polinomio de Lagrange definido por $P_n(x_i) = f_n(x_i)$ y $\operatorname{grad} P_n < p$. Los datos de contacto de P_n en la base de Lagrange forman sucesiones convergentes, por lo que la sucesión (P_n) es uniformemente convergente sobre $[a,b]$. En cuanto a la sucesión $(P_n^{(p)})$, es la sucesión nula. Entonces podemos reemplazar f_n por $f_n - P_n$ en el enunciado, lo que equivale a suponiendo que $f_n(x_i) = 0$, para todo n y i. Sea f la función definida por $f(x_i) = 0$ y $f^{(p)} = g$: f existe (tomar una primitiva p-ésimo arbitrario de g y restarle un polinomio de Lagrange apropiado) y es única (la diferencia entre dos soluciones es un polinomio de grado $< p$ y se anula en p puntos distintos). Se reemplaza ahora f_n por $f_n - f$, y nos vemos llevados a demostrar que : si $f_n(x_i) = 0$, para todo n y i y si $(f_n^{(p)})$ converge uniformemente a la función nula, entonces (f_n) converge uniformemente a la función nula. Esto resulta del lema siguiente :

   Existe una función φ_p acotada en $[a,b]^2$, independiente de n, tal que $f_n(x) = \int_a^b \varphi_p(x,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$.

   Demostración. Se escribe la fórmula de Taylor con resto integral para f_n entre x y y :

$$f_n(y) = f_n(x) + (y-x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) + \int_x^y \frac{(y-t)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p)}(t)\,dt.$$

   La integral se puede extender al intervalo $[a,b]$ bajo la forma $\int_a^b u_p(x,y,t) f_n^{(p)}(t)\,dt$ poniendo

$$u_p(x,y,t) = \begin{cases} (y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } x<t<y;\\ -(y-t)^{p-1}/(p-1)! & \text{si } y<t<x;\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

   Tomando sucesivamente $y = x_1, \dots, y = x_n$, se obtiene un sistema lineal en $f_n(x),\dots,f_n^{(p-1)}(x)$ de la forma :

$$\begin{cases} f_n(x) + (x_1-x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(x_1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) = -\int_a^b u_p(x,x_1,t) f_n^{(p)}(t)\,dt \\ \vdots \\ f_n(x) + (x_p-x)f_n'(x) + \cdots + \frac{(x_p-x)^{p-1}}{(p-1)!} f_n^{(p-1)}(x) = -\int_a^b u_p(x,x_p,t) f_n^{(p)}(t)\,dt. \end{cases}$$

La matriz M de este sistema es la matriz de Vandermonde de $x_1 - x, \dots, x_p - x$, invertible. Se deduce, con las fórmulas de Cramer, una expresión de $f_n(x)$ usando las integrales del segundo miembro, de la forma deseada. El factor φ_p es acotado porque el denominador es $\det(M) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$, independiente de x.

Solución del ejercicio 4462 ▲004563

Desarrollar en serie bajo la integral, multiplicar, permutar con la integral y luego simplificar.

Solución del ejercicio 4463 ▲005736

Sea $x > 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados. Se deduce que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y así como la serie de término general $e^{-x\sqrt{n}}$ converge. Así, f está bien definida en $]0,+\infty[$.

Sea $x \in]0,+\infty[$. La función $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ es decreciente en $[0,+\infty[$. Entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{k}}$ y $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$. Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \quad (*).$$

Sea $x \in]0,+\infty[$. Usando$u = x\sqrt{t}$ y entonces $t = \frac{u^2}{x^2}$, luego $dt = \frac{2u}{x^2}\,du$, se obtiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = \frac{2}{x^2} \times \Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

El encuadramiento $(*)$, entonces se escribe

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$, se ha demostrado que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to 0,\ x>0}{\sim} \frac{2}{x^2}.}$$

Solución del ejercicio 4464 ▲005737

Sea $x \in]-1,1[$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x^{n^2}\right| = |x|^{n^2} \leqslant |x|^n$. Porque la serie numérica de término general $|x|^n$ converge, se deduce que la serie de término general x^{n^2} es absolutamente convergente y en particular convergente. Entonces, f está bien definida en $]-1,1[$.

Sea $x \in]0,1[$. La función $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ es decreciente en $[0,+\infty[$. Entonces, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt \leqslant x^{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} x^{t^2}\,dt$. Sumando estas desigualdades, se obtiene

$$\forall x \in]0,1[,\ \int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt \quad (*).$$

Sea $x \in]0,1[$. Usando $u = t\sqrt{-\ln x}$, se obtiene

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t\sqrt{-\ln x})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

El encuadramiento $(*)$, entonces se escribe

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} - \int_0^1 x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = +\infty$, se ha demostrado que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1,\, x<1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.}$$

Solución del ejercicio 4465 ▲001784

---

1. Con $f(x) = x^4$, de donde $y = x^4 - x$, se obtiene $\frac{x^2y}{x+y} = x^2 - \frac{1}{x}$, de donde

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{x^2y}{x+y}$$

no existe.

2. $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = \frac{2}{3}$ y $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y=z=0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2} = 0$. Se sigue que

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ 2x^3+yz^2\neq 0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$$

no existe.

3. Sobre $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la función f definida por $f(x) = \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}$ tiende a $+\infty$, cuando x tiende a cero de donde

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

no existe en tanto que límite finito.

4. Por una parte, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0, y=0}} \frac{x^4y}{x^2-y^2} = 0$. Por otra parte, en vista de la indicación, con $x^2 - y^2 = h(y)$, un cálculo inmediata da

$$\frac{x^4y}{x^2-y^2} = \frac{y^5 + 2y^3h(y) + (h(y))^2y}{h(y)} = \frac{y^5}{h(y)} + 2y^3 + h(y)y.$$

Con $h(y) = y^6$, la expresión $\frac{x^4y}{x^2-y^2}$ por lo tanto tiende a $+\infty$, cuando y tiende a cero de donde

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq\pm y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$$

no existe.

5. A lo largo de la semi-recta $x>0, y=0, z=0$, el límite existe y vale cero y a lo largo de la semi-recta $x=y=z>0$ el límite existe y vale $1/3$, de donde

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$$

no existe.

Solución del ejercicio 4466 ▲001785

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} = \frac{\lim_{y\to 0} y^2}{\lim_{y\to 0} y^2+(1-y/x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Igualmente $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$, de donde (1). Por otra parte, $f(x,x) = \frac{x^4}{x^4} = 1$, de donde $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no puede existir.

Solución del ejercicio 4468 ▲001787

1. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x}{x^2+y^2}$ no existe, de donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ no existe.
2. $\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = r(\cos\varphi+2\operatorname{sen}\varphi)^3$, de donde $\left|\frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant 27r$ y
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2} = 0$$
pues $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$.
3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 1 \neq 0$ y $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(x+e^y) = \log 2$, de donde
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log 2.$$
4. $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 1$, mientras que $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2} = 0$, de donde
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}.$$
no existe.

Solución del ejercicio 4469 ▲001788

1. Se supone $x+y+z \neq 0$. Entonces
$$\frac{xyz}{x+y+z} = \frac{xy(h(x,y)-x-y)}{h(x,y)} = xy - \frac{xy(x+y)}{h(x,y)}$$
de donde, con
$$h(x,y) = (x+y)^4,$$
se obtiene
$$\frac{xyz}{x+y+z} = xy - \frac{xy}{(x+y)^3}.$$
Se sigue que
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z=(x+y)^4\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$
no existe, al menos no en tanto que límite finito. Por otra parte,
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+z\neq 0, y=0}} \frac{xyz}{x+y+z} = 0.$$
En consecuencia,
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x+y+z\neq 0}} \frac{xyz}{x+y+z}$$
no puede existir.
2. El límite
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq \pm y, z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1}{x-y}$$
no existe pues $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x-x^2}} \frac{1}{x-y}$ no existe. En consecuencia,
$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x^2-y^2+z^2\neq 0}} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$
no puede existir.

Solución del ejercicio 4474 ▲002621

Des cálculos elementales dan

1. $u_1 = (\frac{1}{2}, \cos 1),\ u_2 = (\frac{16}{15}, \cos\frac{1}{2}), \dots, u_{10} = (\frac{400}{143}, \cos\frac{1}{10}), \dots$
2. $u_1 = (\frac{1}{2}\arctan 1, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4e})), u_2 = (\frac{4}{5}\arctan 2, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4e^{1/2}})),$
   $u_3 = (\frac{9}{10}\arctan 3, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4e^{1/3}})), \dots, u_{10} = (\frac{100}{101}\arctan(10), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4e^{1/10}})), \dots$
3. $u_1 = (\sinh 1, 0), u_2 = (\sinh 2, \frac{\ln 2}{2}), u_3 = (\sinh 3, \frac{\ln 3}{3}), \dots, u_{10} = (\sinh 10, \frac{\ln 10}{10}), \dots$
4. $u_1 = a^n(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)),\ u_2 = a^2(\cos(2\alpha), \operatorname{sen}(2\alpha)),$
   $u_3 = a^3(\cos(3\alpha), \operatorname{sen}(3\alpha)),\ \dots u_{10} = a^{10}(\cos(10\alpha), \operatorname{sen}(10\alpha)),\ \dots$

Los límites que existen se calculan así :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2+4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(1/n)=\cos(0)=1$, de donde
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^2+4n+3},\cos\frac{1}{n}\right)=(4,0).$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1/n^2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\pi/2$,
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\arctan n}{n^2+1}=\pi/2$, pero $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}\exp(-\frac{1}{n}))$ no existe de donde $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ no existe.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty}\sinh n$ no existe como un límite finito porque
$$\lim_{x\to+\infty}\sinh x=+\infty$$
de donde
$$\lim u_n=\lim\left(\sinh n,\frac{\ln n}{n}\right)$$
no existe.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos(n\alpha),\operatorname{sen}(n\alpha))$ no existe mientras que para que $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$ exista es necesario y suficiente que $a\leqslant 1$ y, si es así, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ si $a<1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$ si $a=1$. En consecuencia :
Para que
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}a^n(\cos(n\alpha),\operatorname{sen}(n\alpha))$$
exista es necesario y suficiente que $a<1$, y el límite es entonces cero.

Solución del ejercicio 4476 ▲005553

Se denota f la función considerada.

1. Para $x\neq 0$, $f(x,-x+x^3)=\dfrac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3}\underset{x\to 0^+}{\sim}-\frac{1}{x}$. Cuando x tiende a 0, $-x+x^3$ tiende a 0, luego $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0,\ y=-x+x^3}}f(x,y)=-\infty$. f no tiene límite real en $(0,0)$.

2. Para $x\neq 0$, $f(x,0)=\dfrac{x\times 0}{x^2+0^2}=0$, luego $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f(x,y)=0$. Pero también, para $x\neq 0$, $f(x,x)=\dfrac{x\times x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$, luego $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}f(x,y)=\dfrac{1}{2}$. Entonces si f tiene un límite real, este límite debe ser igual a 0 y a $\frac{1}{2}$, lo que es imposible. f no tiene límite real en $(0,0)$.

3. Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2-2|xy|+y^2=(|x|-|y|)^2\geqslant 0$ y entonces $|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Por consiguiente, para $(x,y)\neq(0,0)$,
$$|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4}(x^2+y^2).$$
Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{4}(x^2+y^2)=0$, se tiene también $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sen}y}{y}=1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$. Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$.

5. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^3+y^3| = |x+y|(x^2+xy+y^2) \leqslant \frac{3}{2}|x+y|(x^2+y^2)$ y por lo tanto, para $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}|x+y|.$$
Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$, se tiene también $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

6. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^4+y^4| = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \leqslant (x^2+y^2)^2 + 2\times\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2 = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2$ y por lo tanto, para $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \frac{|x^4+y^4|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}(x^2+y^2).$$
Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}(x^2+y^2) = 0$, se tiene también $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Solución del ejercicio 4477 ▲005887

1. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Cuando x tiende a 0, el par $(x,0)$ tiende al par $(0,0)$ y $f(x,0)$ tiende a 0. Entonces, si f tiene un límite real en 0, este límite es necesariamente 0. Para $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Cuando x tiende a 0, el par (x,x) tiende a $(0,0)$ y $f(x,x)$ tiende a $\frac{1}{2} \neq 0$. Entonces f no tiene límite real en $(0,0)$.
2. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \frac{1}{2}|xy|$. Como $\frac{1}{2}|xy|$ tiende a 0 cuando el par (x,y) tiende al par $(0,0)$, es lo mismo con f. $f(x,y)$ tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.
3. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Cuando y tiende a 0 para valores superiores, el par $(0,y)$ tiende al par $(0,0)$ y $f(0,y)$ tiende a $+\infty$. Entonces f no tiene límite real en $(0,0)$.
4. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$. Cuando x tiende a 0, el par (x,x) tiende al par $(0,0)$ y $f(x,x)$ tiende a $+\infty$. Entonces f no tiene límite real en $(0,0)$.
5. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$. Para $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Cuando x tiende a 0 para valores superiores, el par $(x,-x+x^3)$ tiende a $(0,0$ y $f(x,-x+x^3)$ tiende a $-\infty$. Entonces f no tiene límite real en $(0,0)$.
6. f se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ y entonces f tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.
7. f se define en $\mathbb{R}^3$ privado del cono de revolución de ecuación $x^2-y^2+z^2=0$. $f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ que tiende a $+\infty$, cuando x tiende a 0 para valores superiores. Entonces f no tiene límite real en $(0,0,0)$.
8. $f(2+h,-2+k,l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tiende a $\frac{1}{4}$, cuando h tiende a 0 y $g(0,0,l)$ tiende a $0 \neq \frac{1}{4}$, cuando l tiende a 0. Entonces, f no tiene límite real cuando (x,y,z) tiende a $(2,-2,0)$.

Solución del ejercicio 4484 ▲005554

Determinar primero $F(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

• Para $y \in \mathbb{R}$, $F(x,y) = \max\{f_{0,y}(-1), f_{0,y}(1)\} = \max\{y, -y\} = |y|$.
• Si $x \neq 0$, $F(x,y) = \max\left\{f_{x,y}(-1), f_{x,y}\left(-\frac{y}{2x}\right), f_{x,y}(1)\right\} = \max\left\{x+y, x-y, -\frac{y^2}{4x}\right\} = \max\left\{x+|y|, -\frac{y^2}{4x}\right\}$.
Más precisamente, si $x > 0$, se tiene $x+|y| > 0$ y $-\frac{y^2}{4x} \leqslant 0$. Entonces $F(x,y) = x+|y|$ lo cual es aún cierto cuando $x = 0$.
Si $x < 0$, $x+|y| - \left(-\frac{y^2}{4x}\right) = \frac{4x^2+4x|y|+y^2}{4x} = \frac{(2x+|y|)^2}{4x} < 0$ y entonces $F(x,y) = -\frac{y^2}{4x}$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{cases} x+|y| & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\frac{y^2}{4x} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

En virtud de teoremas generales, F es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$.
Sea $y_0 \neq 0$. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x<0,\ y=y_0}} F(x,y) = +\infty \neq |y_0| = F(0,y_0)$ y entonces F no es continua en $(0,y_0)$.

En fin, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x<0,\ y=\sqrt{-x}}} F(x,y) = \frac{1}{4} \neq 0 = F(0,0)$ y entonces F no es continua en $(0,0)$.

$$\boxed{F \text{ es continua en } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\} \text{ y es discontinua en todo } (0,y),\ y \in \mathbb{R}.}$$

Solución del ejercicio 4485 ▲005900

• Para todo $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$. Entonces f es de hecho una aplicación de E en B.
• Si $y = 0$, para $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Sea entonces $y \in B \setminus \{0\}$. Para $x \in E$,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1+\|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}/\ x = \lambda y.$$

Así un eventual antecedente de y es necesariamente de la forma λy, $\lambda \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, para $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ y entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1+|\lambda|\|y\| \\ &\Leftrightarrow (\lambda \geqslant 0 \text{ y } (1-\|y\|)\lambda = 1) \text{ o } (\lambda < 0 \text{ y } (1+\|y\|)\lambda = 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\|y\|} \text{ (pues } \|y\| < 1). \end{aligned}$$

En todos los casos, y admite un antecedente para f y solo uno a saber $x = \frac{1}{1-\|y\|}y$. Así,

$$f \text{ es biyectiva y } \forall x \in B,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• Se sabe que la aplicación $x \mapsto \|x\|$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Entonces la aplicación $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ como la inversa de una función continua en $\mathbb{R}^2$, con valores en $\mathbb{R}$, no se anula en $\mathbb{R}^2$.
La aplicación $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ es continua en B por las mismas razones. Entonces las aplicaciones f y f^{-1} son continuas en $\mathbb{R}^2$ y B respectivamente y se ha demostrado que

$$\boxed{\text{la aplicación } \begin{array}{rl} f: E & \to B \\ x & \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array} \text{ es un homeomorfismo.}}$$

Solución del ejercicio 4486 ▲005901

1a solución. Para $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en virtud de teoremas generales y para todo $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y todo $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}=\frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Se deduce que f es diferenciable en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y para $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y $h\in\mathbb{R}^n$

$$df_x(h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i=\frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_ih_i=\frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2a solución. Sea $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Para $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2=\frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

entonces

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Ahora, se sabe que la aplicación $x\mapsto\|x\|_2$ es continua en $\mathbb{R}^n$.
Se deduce que $\frac{1}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{\sim}\frac{1}{2\|x\|_2^2}$ y también que $\|x+h\|_2-\|x\|_2$ tiende a 0, cuando h tiende a 0. Luego, ya que $|(x|h)|\leqslant\|x\|_2\|h\|_2$ (desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ), se tiene $x|h\underset{h\to0}{=}O(\|h\|_2)$, luego $(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$.
Finalmente, $\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$ y entonces

$$\|x+h\|_2\underset{h\to0}{=}\|x\|_2+\frac{x|h}{\|x\|_2}+o(\|h\|_2).$$

Porque la aplicación $h\mapsto\frac{x|h}{\|x\|_2}$ es lineal, se ha vuelto a demostrar que f es diferenciable en todo x de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y que $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}$. Sea L una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, es decir una forma lineal.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2-\|0\|_2-L(h))=1-L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Se supone que esta expresión tiende a 0, cuando h tiende a 0. Para u vector no nulo dado y t real no nulo, la expresión $1-L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right)=1-\frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ por lo tanto tiende a 0, cuando t tiende a 0. Pero si t tiende a 0 para valores superiores, se obtiene $L(u)=\|u\|_2$ y si t tiende a 0 para valores inferiores, se obtiene $L(u)=-\|u\|_2$ lo cual es imposible porque $u\neq 0$. Entonces f no es diferenciable en 0.

Solución del ejercicio 4489 ▲001800

Porque $\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|$ permanece acotado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$$

de donde f es continua en $(0,0)$. Igualmente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y=0$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0$$

de donde las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen, y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Además, fuera del origen,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x,y)}{x}+xy\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{f(x,y)}{x}+4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{y}+xy\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{f(x,y)}{x}+4\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=0,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=0,$$

se sigue que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)=0,\quad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)=0,$$

de donde las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$.

Solución del ejercicio 4490 ▲001801

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(x+y),\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=f'(x+y),\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2xf'(x^2+y^2),$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2yf'(x^2+y^2),\quad \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)=yf'(xy),\quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y)=xf'(xy).$$

Solución del ejercicio 4492 ▲001803

Es obvio que, en todo punto tal que $|x| < |y|$ o $|x| > |y|$, la función es continua y las derivadas parciales existen. Sea $x \neq 0$. Entonces f no es ni continua en (x,x) ni en $(x,-x)$. Porque

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,x)\\|u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0, \qquad \lim_{(u,u)\to(x,x)} f(u,u) = 0,$$

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(x,-x)\\|u|>|v|}} f(u,v) = \lim_{u\to x} u = x \neq 0,$$

$$\lim_{(u,-u)\to(x,-x)} f(u,u) = 0.$$

Sin embargo, f es continua en $(0,0)$. Porque

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = 0$$

ya que

$$f(u,v) = u \text{ si } |u| > |v|, \qquad f(u,v) = v \text{ si } |u| < |v|, \qquad f(u,v) = 0 \text{ si } |u| = |v|,$$

y entonces $\lim_{u\to 0} u = 0$ y $\lim_{v\to 0} v = 0$.

Sea (x,y) un punto donde $|x| = |y|$. Queda por estudiar las derivadas parciales en tal punto (x,y). Sea $x \neq 0$. Entonces la función h de la variable t definida por

$$h(t) = f(x+t,y) = \begin{cases} x+t, & |x+t| > |y| \\ y, & |x+t| < |y| \end{cases}$$

no es derivable en $t = 0$, entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no existe. Igualmente, la función k de la variable t definida por

$$k(t) = f(x,y+t) = \begin{cases} x, & |x| > |y+t|, \\ y+t, & |x| < |y+t|, \end{cases}$$

no es derivable en $t = 0$, entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ no existe. Finalmente, sea $x = 0$, la función h de la variable t definida por

$$h(t) = f(t,0) = t$$

es derivable en $t = 0$, entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe. Igualmente, la función k de la variable t definida por

$$k(t) = f(0,t) = t$$

es derivable en $t = 0$, entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe.

Solución del ejercicio 4512 ▲002628

---

1. El plano tangente a la superficie de ecuación $z^2 = 19 - x^2 - y^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es dada por la ecuación

$$2z_0(z - z_0) = -2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0)$$

de donde, en el punto $(1,3,3)$, esta ecuación se escribe

$$6(z-3) = -2(x-1) - 6(y-3)$$

o

$$x + 3y + 3z = 19$$

2. Sea f la función definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$. Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 4xy\operatorname{sen}(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pi x\cos(\pi xy)\exp(2x^2y-1) + 2x^2\operatorname{sen}(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1\tfrac{1}{2}) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\tfrac{1}{2}) = 2.$$

El plano tangente a la superficie de ecuación $z = \operatorname{sen}(\pi xy)\exp(2x^2y-1)$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es dada por la ecuación

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

de donde, en el punto $(1,\frac{1}{2},1)$, esta ecuación se escribe

$$z - 1 = 2(x-1) + 2(y-\tfrac{1}{2})$$

o

$$2x + 2y - z = 2.$$

Solución del **ejercicio 4513** ▲002629

1. ¡La ecuación de un plano tangente debe ser una ecuación lineal!
2. La confusión es exactamente la que hay que evitar siguiendo las indicaciones dadas.
3. De acuerdo a (16), el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y) = x^4 - y^2$ en el punto $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$ es dado por la ecuación

$$z - 7 = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3),$$

es decir

$$z - 7 = 32(x-2) - 6(y-3).$$

Solución del **ejercicio 4514** ▲002630

Según indicación, el plano tangente a la superficie de ecuación $z = 4x^2 + y^2$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es dado por la ecuación

$$\begin{aligned} z &= z_0 + 8x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) \\ &= 8x_0x + 2y_0y + z_0 - 8x_0^2 - 2y_0^2 = 8x_0x + 2y_0y - z_0 \end{aligned}$$

de donde por

$$z - 8x_0x - 2y_0y = z_0. \tag{35}$$

Para que este plano sea paralelo al plano de ecuación $x + 2y + z = 6$ es necesario y suficiente que $(1,2) = (-8x_0,-2y_0)$, de donde $x_0 = -1/8$ y $y_0 = -1$. En consecuencia, el punto buscado en el paraboloïde $z = 4x^2 + y^2$ es el punto $(-1/8,-1,17/16)$. Igualmente, para que el plano (35) sea paralelo al plano de ecuación

$3x+5y-2z=3$ es necesario y suficiente que $(3/2,5/2)=(8x_0,2y_0)$, de donde $x_0=3/16$ y $y_0=5/4$, y el punto buscado en el paraboloide $z=4x^2+y^2$, es el punto $(3/16,5/4,9/64+25/16)=(3/16,5/4,109/64)$.

Solución del ejercicio 4515 ▲002631

1. El vector normal del cono C en el punto (x_0,y_0,z_0) de C es el vector $(x_0,y_0,-z_0)$ y el plano tangente al cono C en este punto viene dada por la ecuación
$$x_0x+y_0y-z_0z=0$$
pues el origen pertenece a este plano.
2. La intersección del cono C, con el plano vertical de ecuación $y=ax$, donde $a\in\mathbb{R}$ está constituido de los puntos $x(1,a,\pm\sqrt{1+a^2})$, donde $x\in\mathbb{R}$, es decir de las dos rectas
$$\mathscr{D}_1=\{x(1,a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R}\},\quad \mathscr{D}_2=\{x(1,a,-\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R}\}.$$
La intersección del semi-cono C^+, con este plano vertical se compone así de dos semirrectas
$$\mathscr{D}_1^+=\{x(1,a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R},x\geqslant 0\}$$
$$\mathscr{D}_2^+=\{x(-1,-a,\sqrt{1+a^2});x\in\mathbb{R},x\geqslant 0\}.$$
3. El vector normal en cualquier punto $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_1$ respectivamente $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ de $\mathscr{D}_2$ es el vector $x(1,a,-\sqrt{1+a^2})$ respectivamente $x(1,a,\sqrt{1+a^2})$ de ahí la dirección y por lo tanto, el plano tangente al cono C son iguales en todo punto de $\mathscr{D}_1\setminus\{(0,0,0)\}$ respectivamente $\mathscr{D}_2\setminus\{(0,0,0)\}$.

Solución del ejercicio 4516 ▲002632

1. La forma (17) de la ecuación del plano tangente a la gráfica $z=x^2-2y^3$ de la función f en el punto (x_0,y_0,z_0) da la ecuación
$$z-z_0=2x_0(x-x_0)-6y_0^2(y-y_0)=2x_0x-6y_0^2y-2x_0^2+6y_0^3.$$
2. En el punto $(2,1,2)$, este plano tangente está así dada por la ecuación
$$4x-6y-z=0.$$
Para que este plano sea paralelo al plano tangente en el punto (x_1,y_1,z_1) distinto de (x_0,y_0,z_0) es necesario y suficiente que $(4,6,-1)=(2x_1,6y_1^2,-1)$ y $y_1\neq 1$, es decir que $(x_1,y_1,z_1)=(2,-1,6)$.

Solución del ejercicio 4517 ▲002633

1. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi$ existe y vale cero porque $\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi$ es acotado. En consecuencia f es continua en el origen y por lo tanto, en todas partes. Es obvio que la función f es diferenciable en cada punto distinto del origen. Sea $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ no nulo. Entonces
$$D_vf(0,0)=\frac{d}{dt}\left(t\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\bigg|_{t=0}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

existe, de donde $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; porque existe una derivada direccional no nula, la función f no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

2. La asociación $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto D_v f(0,0)$ obviamente no es lineal y las rectas pertenecientes a la familia de rectas que pasan por el origen y de vectores directores $(v, D_v f(0,0)) \in \mathbb{R}^3$ no forman un plan.
3. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \operatorname{sen}^4\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2xy(x^2+y^2)-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = 2\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi,\end{aligned}$$

de donde, en coordenadas polares,

$$D_v f(x,y) = D_v f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) = a(\operatorname{sen}^4\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi$$

y, para φ fijo,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) = a(\operatorname{sen}^4\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi) + 2b\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi.$$

En consecuencia, $D_v f(x,y)$ no es continua en (x,y) excepto tal vez si $a=0$. Por ejemplo, con $\operatorname{sen}\varphi = 1$, se encuentra

$$\lim_{r\to 0} D_v f(0,r) = a$$

y $a \neq \frac{ab^2}{a^2+b^2}$ salvo si $a=0$. Si $a=0$, la derivada direccional D_v es la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ y para φ fijo,

$$\lim_{r\to 0} D_v f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) = 2b\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi,$$

lo que no es nulo si $\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$ no lo es. Porque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en $(0,0)$ tampoco.

Solución del ejercicio 4518 ▲002634

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x\cos y\exp[-\operatorname{sen}x\cos y], \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\exp[-\operatorname{sen}x\cos y]$$

etc. de donde, con $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \cdots = 1 - x + \cdots$$

Con $x = 0,0184$ se encuentra, para $\exp[\operatorname{sen}(3.16)\cos(0.02))]$, el valor aproximado $1-0,0184 = 0,9816$.
N.B. Se puede hacer mejor si es necesario : Con

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (\operatorname{sen}x\cos y + \cos^2 x\cos^2 y)\exp[-\operatorname{sen}x\cos y] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= (\cos x\operatorname{sen}y + \cos x\cos y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)\exp[-\operatorname{sen}x\cos y] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (\operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y)\exp[-\operatorname{sen}x\cos y]\end{aligned}$$

se encuentra
$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\cdots=1-x++\tfrac{1}{2}x^2+\cdots$$
etc. Igualmente,
$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{2(1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2)\sqrt{4+x}},\qquad \frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{2\exp(y)}{1+(\sqrt{4+x}-2\exp(y))^2}$$
etc. de donde, con $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{4}$ y $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)=-2$,
$$h(x,y)=h(0,0)+\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)y+\cdots=\tfrac{1}{4}x-2y+\cdots.$$
Con $x=0,03$ y $y=0,01$ se encuentra, para $\arctan[\sqrt{4.03}-2\exp(0.01)]$, el valor aproximado $0,0075-0,02=-0,00125$.

Solución del ejercicio 4521 ▲005555

• Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ y entonces f se define en $\mathbb{R}^2$.
• f es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tanto que cociente de funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ cuyo denominador no se anula en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
• Para $(x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)|\leqslant\frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|xy|$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0$, se deduce que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=0=f(0,0)$. Así, f es continua en $(0,0)$ y por lo tanto, en $\mathbb{R}^2$.
• **Existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.** Para $x\neq 0$,
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{x\times 0\times(x^2-0^2)}{x\times(x^2+0^2)}=0,$$
y entonces $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Así, f admite una derivada parcial con respecto a su primera variable en $(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
• Para $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-y^2x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Finalmente, f admite en $\mathbb{R}^2$ una derivada parcial con respecto a su primera variable definida por
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$
• Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(y,x)=-f(x,y)$. Así, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.
En efecto, para (x_0,y_0) dada en $\mathbb{R}^2$
$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{-f(y,x_0)+f(y_0,x_0)}{y-y_0}=-\frac{f(y,x_0)-f(y_0,x_0)}{y-y_0}\underset{y\to y_0}{\to}-\frac{\partial f}{\partial x}(y_0,x_0).$$
Entonces, f admite en $\mathbb{R}^2$ una derivada parcial con respecto a su segunda variable definida por
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

• **Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y(x^4+4x^2y^2-y^4)|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{|y|(x^4+4x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Como $2|y|$ tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Se deduce que la aplicación $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$ y por lo tanto, en $\mathbb{R}^2$.
En fin, ya que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2$. f es, por lo tanto al menos de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$.
• Para $x \neq 0$, $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{x^4}{x^4} = 1$ y entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1$. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Para $y \neq 0$, $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -\frac{y^4}{y^4} = -1$ y entonces $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(y,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1$. Así, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y entonces f no es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ de acuerdo con teorema de SCHWARZ.

$$\boxed{f \text{ es de clase } C^1 \text{ exactamente en } \mathbb{R}^2.}$$

Solución del ejercicio 4522 ▲005888

• f se define en $\mathbb{R}^2$.
• f es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como una fracción racional cuyo denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
• **Continuidad en** $(0,0)$**.** Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Como $|xy|$ tiende a 0 cuando el par (x,y) tiende al par $(0,0)$, por lo tanto se tiene $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$.

Se deduce que f es continua en $(0,0)$ y finalmente f es continua en $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ es de clase } C^0 \text{ al menos en } \mathbb{R}^2.$$

• **Derivadas parciales de orden 1 sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f es de clase C^1 al menos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

Por otra parte, para $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Entonces, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Para $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

y entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Así, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Igualmente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Así, f admite primeras derivadas parciales en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

• **Continuidad de $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ y $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ en $\mathbf{(0,0)}$.** Para $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Como $2|y|$ tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, se deduce que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tiende a 0, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Entonces la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$ y finalmente en $\mathbb{R}^2$. Lo mismo ocurre con la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y se ha demostrado que

$$\boxed{f \text{ es al menos de clase } C^1 \text{ sobre } \mathbb{R}^2.}$$

Solución del ejercicio 4523 ▲005894

1. f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces si f admite un extremo local en un punto (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) es un punto crítico de f.

$$df_{(x,y)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+6xy-15=0\\3x^2-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\frac{1}{4}\end{cases}\text{ o }\begin{cases}x=-2\\y=-\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Recíprocamente, $r=6x+6y$, $t=0$ y $s=6x$, luego $rt-s^2=-36x^2$.
Así, $(rt-s^2)\left(2,\frac{1}{4}\right)=(rt-s^2)\left(-2,-\frac{1}{4}\right)=-144<0$ y f no admite un extremo local en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ o $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{f \text{ no admite un extremo local en } \mathbb{R}^2.}$$

2. La función f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ en tanto que polinomio en varias variables. Entonces, si f admite un extremo local en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) es un punto crítico de f. Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4(x-y)+4x^3=0\\4(x-y)+4y^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=0\\-4(x-y)+4x^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\x^3-2x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Recíprocamente, f es más precisamente de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned} r(x,y)t(x,y)-s^2(x,y) &= (-4+12x^2)(-4+12y^2)-(4)^2 = -48x^2-48y^2+144x^2y^2 \\ &= 48(3x^2y^2-x^2-y^2). \end{aligned}$$

• $(rt-s^2)\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 48(12-2-2) > 0$. Entonces f admite un extremo local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Más precisamente, ya que $r\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\times 12-4 = 20 > 0$, f admite un mínimo local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Además, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2+x^4+y^4-8 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8 \\ &\geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2(x^2+y^2)+8 = (x^4-4x^2+4)+(y^4-4y^2+4) = \end{aligned}$$
$(x^2-2)^2+(y^2-2)^2 \geqslant 0.$

y $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ es un mínimo global.

• Para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ y entonces f también admite un mínimo global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ igual a 8.

• $f(0,0) = 0$. Para $x\neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ y entonces f toma valores estrictamente mayores que $f(0,0)$ en todo vecindario de $(0,0)$. Para $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0) = x^4-2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ y f toma valores estrictamente menores que $f(0,0)$ en todo vecindario de $(0,0)$. Finalmente, f no admite un extremo local en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ admite un mínimo global igual a 8, alcanzado en } \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).}$$

Solución del ejercicio 4524 ▲005895

Se provee $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de una norma sub multiplicativa $\|\ \|$. Sea $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Se sabe que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y por lo tanto, para $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norma suficientemente pequeña, $A+H\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Para tal H

$$(A+H)^{-1}-A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n-(A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

luego

$$\begin{aligned} (A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1} \\ &= (A+H)^{-1}(-HA^{-1}+(A+H)A^{-1}HA^{-1}) = (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\left\|f(A+H)-f(A)+A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|^2.$$

Ahora, la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t(\mathrm{com}(M))$, válido para todo $M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, y la continuidad del determinante demuestra que la aplicación $M\mapsto M^{-1}$ es continua sobre el abierto $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Se deduce que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tiende a $\left\|A^{-1}\right\|$, cuando H tiende a 0. Así,

$$\lim_{H\to 0}\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\| = 0 \text{ y entonces } \lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Como la aplicación $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ es lineal, es el diferencial de f en A.

$$\boxed{\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.}$$

Solución del ejercicio 4525 ▲005896

Para todo complejo z tal que $|z| \leqslant 1$,

$$|\operatorname{sen}(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh}(|z|) \leqslant \operatorname{sh}1,$$

la igualdad se alcanza efectivamente para $z = i$, pues $|\operatorname{sen}(i)| = \left|\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}\right| = \frac{e-e^{-1}}{2} = \operatorname{sh}(1)$.

$$\boxed{\max\{|\operatorname{sen} z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\} = \operatorname{sh}(1).}$$

Solución del ejercicio 4526 ▲005899

Se provee $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norma definida por $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\| = \max\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$.
• Sea $(a,b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Para $(h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h)) = (a+h).(b+k) = a\cdot b + a\cdot h + b\cdot k + h\cdot k,$$

y entonces $f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) = (a\cdot h + b\cdot k) + h\cdot k$. Ahora la aplicación $L:\ (h,k) \mapsto a\cdot h + b\cdot k$ es lineal y además, para $(h,k) \neq (0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = |h\cdot k| \leqslant \|h\|_2\|k\|_2 \leqslant \|(h,k)\|^2,$$

y por lo tanto, $\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| \leqslant \|(h,k)\|$, luego

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = 0.$$

Porque la aplicación $(h,k) \mapsto a\cdot h + b\cdot k$ es lineal, se deduce que f es diferenciable en (a,b) y que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k) = a\cdot h + b\cdot k$. El enfoque es análogo para el producto vectorial :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k) - a\wedge b - a\wedge h - b\wedge k\|_2 = \frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \|(h,k)\|.$$

Porque la aplicación $(h,k) \mapsto a\wedge h + b\wedge k$ es lineal, se deduce que g es diferenciable en (a,b) y que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k) = a\wedge h + b\wedge k$.

Solución del ejercicio 4527 ▲002622

1. $D_f = \mathbb{R}^2$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(xy) + x^2y\exp(xy)$, $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3\exp(xy)$
2. $D_f = \{(x,y); x > 0 \text{ o } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}.$$

3. $D_f = \mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\operatorname{sen} x \cos x$, $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2\operatorname{sen} y \cos y$.
4. $D_f = \{(x,y,z); z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$.

Solución del ejercicio 4528 ▲002623

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\operatorname{sen} y + \exp x$.
2. $D_v f(0,0) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

Esta derivada direccional de f es maximal cuando $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, y minimal cuando $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir cuando $\theta = \frac{5}{4}\pi$.
Significado geométrico : El plano generado por el vector $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y el eje de los z interseca el gráfico $z = f(x,y)$ en una curva. Esta curva tiene una pendiente máxima en valor absoluto para $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (mismo plano). Los dos signos se explican por las dos orientaciones posibles de esta curva (sentido de parametraje).

Solución del ejercicio 4529 ▲002624

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = \mathrm{e}^{x\log(x^2+y^2)} = \mathrm{e}^{2r\cos\varphi\log r}$. Porque $\cos\varphi$ es acotado, $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r = 0$, de donde
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} 2r\cos\varphi\log r} = \mathrm{e}^0 = 1,$$
porque la función exponencial es continua.
2. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ las derivadas parciales con respecto en la variables x y y se calculan así :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x$$
3. Para que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, es necesario y suficiente que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x,0)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{(x^2)^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^{2x\log x} - 1}{x}$$
exista. Si $x > 0$,
$$\frac{\mathrm{e}^{2x\log x} - 1}{x} = 2\log x + \varepsilon(x)$$
donde $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varepsilon(x) = 0$. En consecuencia, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe. Por otra parte,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{f(0,y)-1}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{(y^2)^0 - 1}{y} = 0$$
existe.

Solución del ejercicio 4530 ▲002625

1. Porque $f(x,y)=\dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=r(\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi+3\operatorname{sen}^3\varphi)$, se sigue que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)=0,$$

pues $\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi+3\operatorname{sen}^3\varphi$ permanece acotada. En consecuencia la función f es continua en $(0,0)$.

2. Las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{0}{x^2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\substack{y\to0\\y\neq0}}\frac{f(0,y)}{y}=\lim_{\substack{y\to0\\y\neq0}}\frac{3y^3}{y^2}=3$$

existen.

3. Porque $f(x,x)=\frac{4x^3}{2x^2}=2x$, la derivada direccional $D_vf(0,0)$ siguiendo el vector $v=(1,1)$ es no nulo. En consecuencia, la función f no es diferenciable en $(0,0)$.

4. $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=-4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y+3y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+8x^2y^2+3y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. De acuerdo a (19), esta ecuación se escribe

$$z-2=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)=1-x+3(y-1),$$

de donde $z=3y-x$.

6. La función $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ se escribe $F(x,y)=\left(\dfrac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2},\dfrac{y^2x+3x^3}{x^2+y^2}\right)$ y su matriz jacobiana

$$\mathrm{J}_F(1,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

en el punto $(1,1)$ es invertible. En consecuencia, la función F admite un recíproco local al vecindario del punto $(1,1)$. Au punto $(2,2)$,

$$\mathrm{J}_F(2,2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) & \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

de donde la función F admite igualmente una inversa local en un vecindario del punto $(2,2)$.

Solución del ejercicio 4531 ▲002626

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z},\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial g}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial y},$$

de donde (2).

Solución del ejercicio 4532 ▲002627

1. $g(f(x,y)) = xy^2\operatorname{sen}^2(xy)\cos x\exp(y^2)$
2. $$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= y^2\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy)-x\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(xy)+\cos x\operatorname{sen}(xy))\\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= 2xy\cos x\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy)+(1+y^2)\operatorname{sen}(xy))\end{aligned}$$
3. Calculemos primero
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= y\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)+xy^2\cos(xy)\exp(y^2)\\ &= y\exp(y^2)(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= x\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)+x^2y\cos(xy)\exp(y^2)+2xy^2\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)\\ &= x\exp(y^2)(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy)+2y^2\operatorname{sen}(xy))\\ &= x\exp(y^2)((1+2y^2)\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy)).\end{aligned}$$
Así la matriz jacobiana J_f de f se escribe
$$\mathrm{J_f}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\operatorname{sen}x & \cos x\\ y\exp(y^2)(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy)) & x\exp(y^2)((1+2y^2)\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\end{bmatrix}.$$
Igualmente, la matriz jacobiana J_g de g es :
$$\begin{aligned}\mathrm{J}_g &= \left[\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial g}{\partial w}\right]=[vw,uw,uv]\\ &= \left[xy^2\operatorname{sen}(xy)\cos x\exp(y^2), xy\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2), y\operatorname{sen}(xy)\cos x\right]\end{aligned}$$
4. La matriz jacobiana $\mathrm{J}_{g\circ f}$ de la función composición $g\circ f$ se escribe como producto matricial
$$\mathrm{J}_{g\circ f}=\mathrm{J}_g\circ\mathrm{J}_f=\left[\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial g}{\partial w}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x} &= (xy^2\operatorname{sen}(xy)\cos x\exp(y^2))y\cos(xy) - (xy\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2))y\operatorname{sen} x\\
&\qquad + (y\operatorname{sen}(xy)\cos x)y\exp(y^2)(\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\\
&= xy^3\cos x\operatorname{sen}(xy)\cos(xy)\exp(y^2)) - xy^2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2)\\
&\qquad + y^2\cos x\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2) + xy^3\cos x\operatorname{sen}(xy)\cos(xy)\exp(y^2)\\
&= y^2\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)(2xy\cos x\cos(xy) - x\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(xy)+\cos x\operatorname{sen}(xy))\\
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y} &= (xy^2\operatorname{sen}(xy)\cos x\exp(y^2))x\cos(xy) + (xy\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2))\cos x\\
&\qquad + (y\operatorname{sen}(xy)\cos x)x\exp(y^2)((1+2y^2)\operatorname{sen}(xy)+xy\cos(xy))\\
&= x^2y^2\cos x\operatorname{sen}(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + xy\cos x\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2)\\
&\qquad + xy(1+2y^2)\cos x\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2) + x^2y^2\cos x\operatorname{sen}(xy)\cos(xy)\exp(y^2)\\
&= 2x^2y^2\cos x\operatorname{sen}(xy)\cos(xy)\exp(y^2) + 2xy(1+y^2)\cos x\operatorname{sen}^2(xy)\exp(y^2)\\
&= 2xy\cos x\operatorname{sen}(xy)\exp(y^2)(xy\cos(xy)+(1+y^2)\operatorname{sen}(xy)).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4534 ▲004137

$\lim = 3$.

Solución del ejercicio 4535 ▲004138

1.
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pm 1}{1+x^2}$, $+$ si $y > x$, $-$ si $y < x$.
   $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pm 1}{1+y^2}$, $-$ si $y > x$, $+$ si $y < x$.
3. Para $y \geqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} + g(x,y)$, para $y \leqslant x$, $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - g(x,y)$.

Solución del ejercicio 4538 ▲004141

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Solución del ejercicio 4540 ▲004143

1.
2. $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

Solución del ejercicio 4542 ▲004145

$\Delta F = \frac{n-1}{r}f'(r) + f''(r)$.

Solución del ejercicio 4543 ▲004146

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -yf'(\pi/2)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = xf'(0)$.

Solución del ejercicio 4544 ▲004147

1. f es homogéneo de grado 2, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son homogéneas de grado 1, por lo tanto estas tres funciones tienden a 0 en $(0,0)$. Así f es de clase $\mathscr{C}^1$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Solución del ejercicio 4548 ▲004151

$$\frac{\partial^n (fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i} \partial y^{n-k-j}}.$$

Solución del ejercicio 4549 ▲004152

1. no hay solución.
2. $f(x,y) = \frac{y-1}{x+y+1} +$ cte.
3. $f(x,y) = \frac{xy}{x+y} +$ cte.
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x}{y} +$ cte.

Solución del ejercicio 4550 ▲004153

$f(y) = \lambda \mathrm{e}^{-y}$, $F(x,y) = \lambda \left(\frac{x^2}{2} - (y+1)\mathrm{e}^{-y} \right)$.

Solución del ejercicio 4551 ▲004154

$f(x,y) = g(x^2 + y^2)$.

Solución del ejercicio 4552 ▲004155

$f(y) = \frac{y}{k}$, $g(z) = kz + \ell$, $F(x,y) = \left(x^2 + \frac{y^2}{2} \right) z + \frac{\ell y^2}{2k} + C$.

Solución del ejercicio 4553 ▲004156

1. $f(x,y) = -\frac{\ln x}{xy} - \frac{1}{x}$.
2. $y = \frac{\ln x}{\lambda x - 1}$.

Solución del ejercicio 4557 ▲004160

$\det(J_f) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$.

Solución del ejercicio 4559 ▲004162

$f(\mathbb{R}^3) = \{(u,v,w) \text{ tal que } u+v>0,\ ue^{2w}-v>0\}$.

Solución del ejercicio 4561 ▲004164

$y = -\frac{x}{2} + \frac{9x^2}{16} + o(x^2) \Rightarrow$ pendiente de tangente $-\frac{1}{2}$, arriba.

Solución del ejercicio 4562 ▲004165

1.
2. $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Solución del ejercicio 4563 ▲004166

$\varphi'(1) = -\frac{1}{3}$, $\varphi''(1) = -\frac{8}{27}$.

Solución del ejercicio 4566 ▲004169

$x = 1 - \dfrac{\lambda+\mu}{5} + \dfrac{\lambda^2+\lambda\mu}{25} + o(\lambda^2+\mu^2)$.

Solución del ejercicio 4567 ▲004170

$x = \operatorname{sh}(a),\ y = \operatorname{sh}(b) \Rightarrow u = \operatorname{sh}(a+b),\ v = \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{ch}(a+b)$. Por lo tanto $f(\mathbb{R}^2)$ está incluido en la hipérbola de ecuación $v^2 - 2uv = 1$ y se debe tener $v \geqslant u$, lo que da la rama superior.

Solución del ejercicio 4570 ▲004173

1. $f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty))\,dt$.
2.
3.

Solución del ejercicio 4571 ▲004174

1. (a) Teorema de las tres cuerdas para $u \mapsto f(x+uh)$ sobre $[-1,1]$.
   (b) Sea $\overline{B}_\infty(x,r) \subset U$ y y tal que $0 < \|x-y\|_\infty \leqslant r$. Se denota $t = \|x-y\|_\infty/r$ y $h = (y-x)/t$. Entonces $y = x+th$ y $\|x \pm h\| = r$, por lo tanto :
   $$|f(x)-f(y)| \leqslant t\max(|f(x+h)-f(x)|, |f(x-h)-f(x)|) \leqslant Mt$$
   porque la restricción de f en la frontera de $\overline{B}_\infty(x,r)$ es acotada (función convexa en dimensión 1).
2. La superficie representativa de f está por encima de sus planos tangentes.
3.

Solución del ejercicio 4573 ▲004176

1. $df_M(H) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(M^{k-1}H + \cdots + HM^{k-1})$.

2.
3. Las matrices $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ son todos semejantes a M_∞ y tienen la misma exponencial I.
4. $M_k = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi+1/k \\ -4\pi^2/(2\pi+1/k) & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4578 ▲004181

1. $xy/(x^2+y^2)$.
2. f es lipschitziana para $\| \|_\infty$.

Solución del ejercicio 4579 ▲004182

1. $2x^4y^2 \leqslant (x^4+y^2)^2$.
2. $g_\theta(r) \sim r^2$.
3. $f(x,x^2) = -x^4$. Entonces $(0,0)$ no es mínimo local de f.

Solución del ejercicio 4581 ▲004184

1.
2. $\|f(x)\| \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$, por lo tanto $x \mapsto \|f(x)-a\|^2$ admite un mínimo en $\mathbb{R}^n$. En este punto se tiene para todo $h \in \mathbb{R}^n$: $(f(x)-a \mid df_x(h)) = 0$ y df_x es sobreyectiva (lineal inyectiva en dimensión finita) por lo tanto $f(x) = a$.

Solución del ejercicio 4582 ▲004185

1. Si u alcanza su máximo en $(x,y) \in \Omega$, entonces $d^2u(x,y)$ es negativa, contradicción con $\Delta u(x,y) > 0$.
2. Sea $u_p(x,y) = u(x,y) + (x^2+y^2)/p$: $\Delta u_p = \Delta u + 2/p > 0$, por lo tanto u_p cae en el caso anterior. Se tiene $\max_\Omega u + \frac{M}{p} \geqslant \max_\Omega u_p = \max_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u_p \geqslant \max_{\overline{\Omega}\setminus\Omega} u$ y se pasa al límite.
3. Sea $u_1(x,y) = u(x,y) + \alpha\ln(x^2+y^2)$, donde α es tal que $M_1(r_1) = M_1(r_2)$, con $M_1(r) = \max_{x^2+y^2=r^2}(u(x,y))$. Se tiene $\Delta u_1 \geqslant 0$, de donde $M_1(r) \leqslant M_1(r_1) = M_1(r_2)$, es decir :
$$M(r) \leqslant M(r_1) + \alpha\ln(r_1/r) = M(r_2) - \alpha\ln(r/r_2) = \frac{M(r_1)\ln(r_2/r) + M(r_2)\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Solución del ejercicio 4583 ▲004186

1. Se define $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, $h(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ y se tiene $0 = \Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$, de donde :
$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

El corchete es nulo por la 2π-periodicidad de g, por lo tanto $h''(r)+\frac{1}{r}h'(r)=0$, o sea $h'(r)=\frac{K}{r}$ y $K=0$ por continuidad de h' en 0.

2. $\pi r^2 f(0,0)$.

Solución del ejercicio 4584 ▲004187

1. $\det(J_\varphi(x,y))=f'(x)f'(y)-g'(x)g'(y)>0$, entonces el teorema de inversión local se aplica, es suficiente verificar la inyectividad de φ. Si $\varphi(x,y)=\varphi(u,v)$, entonces :

$$|x-u|\leqslant|f(x)-f(u)|=|g(v)-g(y)|\leqslant|v-y|$$
$$|v-y|\leqslant|f(v)-f(y)|=|g(x)-g(u)|\leqslant|x-u|,$$

de donde $|x-u|\leqslant|x-u|$ y hay desigualdad estricta si $v\neq y$, lo que es absurdo, por lo tanto $v=y$ e igualmente $u=x$.

2. Se tiene $\varphi(x,y)=(u,v)$ si y solo si $x=f^{-1}(u-g(y))$ y $y=f^{-1}(v-g(f^{-1}(u-g(y))))=h(y)$. h es k^2-lipschitziana entonces se aplica el teorema del punto fijo.

Solución del ejercicio 4585 ▲004188

Si no existe $a\in\mathbb{R}^2$ tal que $g:x\mapsto f(x)-(a\mid x)$ no tiene punto crítico, entonces no hay mínimo ni máximo. Se tiene también $|g(x)|/\|x\|\to+\infty$, cuando $\|x\|\to\infty$, de donde $\sup(g)=+\infty$ y $\inf(g)=-\infty$. Se considera para $r>0$ $E_r=\{x\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|x\|\geqslant r\}$: $g(E_r)$ es una parte conexa de $\mathbb{R}$, entonces un intervalo, y $\sup(g(E_r))=\sup(g)=+\infty$, $\inf(g(E_r))=\inf(g)=-\infty$, de donde $g(E_r)=\mathbb{R}$. Así existe x de norma, arbitrariamente grandes, tales que $g(x)=0$ en contradicción con la propiedad $|g(x)|/\|x\|\to+\infty$, cuando $\|x\|\to\infty$. Observación : la hipótesis f de clase $\mathscr{C}^2$ es sobreabundante, la clase $\mathscr{C}^1$ suficiente para concluir.

Solución del ejercicio 4586 ▲004189

Observaciones :
– la transformación $f\mapsto g$ es llamada *transformación de Legendre*. Se denota $g=f^*$ abajo.
– la hipótesis « H_f es definida positiva en cada punto » implica que f es convexa.
Estudio de un caso particular : $f(x)=\alpha\|x\|^2+\beta(x\mid a)+\gamma$, con $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ y $a\in\mathbb{R}^n$.
Entonces $(x\mid y)-f(x)=-\alpha\left\|x-\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2+\alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2-\gamma$, de donde $f^*(y)=\alpha\left\|\frac{y-\beta a}{2\alpha}\right\|^2-\gamma=\alpha^*\|y\|^2+\beta^*(y\mid a)+\gamma^*$, con $\alpha^*=1/4\alpha$, $\beta^*=-\beta/2\alpha$ y $\gamma^*=\beta^2\|a\|^2/4\alpha-\gamma$. Así, f^* tiene la misma forma que f, y se verifica inmediatamente, que $f^{**}=f$.
Caso general : se demuestra que f^* está bien definida, verifica las mismas hipótesis que f y que se tiene $f^{**}=f$.
1. Buena definición de f^* : si y es fijo se tiene $(x\mid y)-f(x)\to-\infty$, cuando $\|x\|\to\infty$, entonces el sup existe y es un máximo, alcanzado en un punto x tal que $\nabla f(x)=y$. Este punto x es único : en efecto, si $h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, entonces la función $\mathbb{R}\ni t\mapsto(h\mid\nabla f(x+th))$ es estrictamente creciente (define positividad de H_f) lo que implica $\nabla f(x+h)\neq\nabla f(x)$. Así,

$$f^*(y)=(y\mid y^*)-f(y^*)\text{ con }\nabla f(y^*)=y.$$

2. f^* es $\mathscr{C}^2$ y H_{f^*} es definida-positiva : de acuerdo a lo que precede, la función ∇f es un $\mathscr{C}^1$ difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$; su diferencial es el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ de matriz H_f en la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces f^* es de clase $\mathscr{C}^1$ y para $y,h\in\mathbb{R}^n$:

$$d(f^*)_y(h)=(\nabla f^*(y)\mid h)=(h\mid y^*)+(y\mid dy^*(h))-(\nabla f(y^*)\mid dy^*(h))=(h\mid y^*)$$

ya que $\nabla f(y^*) = y$. Se deduce : $\nabla f^*(y) = y^*$, luego $H_{f^*}(y) = (H_f(y^*))^{-1}$, matriz simétrica definida positiva.
3. $f^*(y)/\|y\| \to +\infty$, cuando $\|y\| \to \infty$: sea $a > 1$ y $M_a = \sup\{f(x),\ \|x\| \leqslant a\}$. Para $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $x = ay/\|y\|$ se tiene $f^*(y) \geqslant (x \mid y) - f(x) \geqslant a\|y\| - M_a \geqslant (a-1)\|y\|$ si $\|y\|$ es bastante grande.
4. $f^{**} = f$: porque para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $f^{**}(x) = (x \mid y) - f^*(y)$, donde y es definida por $\nabla f^*(y) = x$, es decir $y^* = x$ y entonces $f^{**}(x) = (y^* \mid y) - f^*(y) = f(y^*) = f(x)$.

Solución del ejercicio 4587 ▲004190

1. ???
2. Se tiene para $a, b \in \mathbb{R}$: $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty b^2$. Entonces, para $f, h \in E$: $|T(f+h) - T(f) - (h \mid \varphi' \circ f)| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty \|h\|^2$, lo que prueba que T es diferenciable en f de diferencial $h \mapsto (h \mid \varphi' \circ f)$. Se deduce entonces que T es continua en f.

Solución del ejercicio 4588 ▲005556

1. Se define $\Delta = \{(x,y)/\ y \neq 0\}$. f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en virtud de teoremas generales. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$.
$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right| & \text{si } y \neq 0 \end{array}\right\} \leqslant y^2.$$
Como $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| = 0$ y entonces f es continua en $(x_0,0)$. Finalmente,
$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.}$$

2. • f es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. En particular, de acuerdo con teorema de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sobre Δ. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$
luego
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right),$$
y en fin
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - 2\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right).$$
• **Existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$.** Para $x \neq x_0$, $\frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} = 0$ y por lo tanto, $\frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\to} 0$. Se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. En resumen, f admite una derivada parcial con respecto a su primera variable en $\mathbb{R}^2$ definida por
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } y = 0 \\ y\cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0. \end{array}\right.}$$

• **Existencia de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.** Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para $y \neq 0$,

$$\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } y=0 \\ y\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x_0}{y}\right)\right| & \text{si } y \neq 0 \end{array}\right\} \leqslant |y|,$$

y así $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} \underset{y\to 0}{\to} 0$. Se deduce que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. En resumen, f admite una derivada parcial con respecto a su segunda variable en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } y=0 \\ 2y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \end{array}\right.}$$

• **Existencia de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.** Para $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 0$$

y entonces $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tiende a 0, cuando x tiende a 0. Se deduce que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe y

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.}$$

• **Existencia de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.** Para $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1$$

y entonces $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tiende a 1, cuando y tiende a 0. Se deduce que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe y

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.}$$

Solución del ejercicio 4589 ▲005557

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \in [-1,1]$. Más precisamente, cuando x recorre $\mathbb{R}$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times 0)}$ recorre $[-1,1]$ y así cuando (x,y) recorre $\mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}$ recorre $[-1,1]$. Se supone ya que f es de clase C^2 sobre $[-1,1]$. La aplicación g es entonces de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ y para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right), \text{ luego } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\operatorname{sen}^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right).$$

entonces,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

luego

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) - 2\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)\frac{-4\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right).$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\Delta g(x,y) &= \frac{-8\cos(2x)\operatorname{ch}^2(2y) + 8\cos(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&\quad + \frac{4\operatorname{sen}^2(2x)\operatorname{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4(1-\cos^2(2x))\operatorname{ch}^2(2y) + 4\cos^2(2x)(\operatorname{ch}^2(2y)-1)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{-8\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \frac{4\operatorname{ch}^2(2y) - 4\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) \\
&= \frac{4}{\operatorname{ch}^2(2y)}\left(-2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Delta g = 0 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ -2tf'(t) + (1-t^2)f''(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1], ((1-t^2)f')'(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in [-1,1],\ (1-t^2)f'(t) = \lambda.
\end{aligned}$$

La elección $\lambda \neq 0$ no proporciona una solución en $[-1,1]$. Entonces $\lambda = 0$, luego $f' = 0$, luego f constante que se excluye. Entonces, no se puede continuar en $[-1,1]$. Se busca de ahora en adelante f de clase C^2 sobre $]-1,1[$ de manera que g es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solución} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall t \in]-1,1[,\ (1-t^2)f'(t) = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \ \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} / \ \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \lambda \operatorname{argth} t + \mu.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4590 ▲005893

Se deriva con respecto a λ ambos miembros de la igualdad $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ y se obtiene

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r\lambda^{r-1} f(x),$$

y para $\lambda = 1$, se tiene

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

Solución del ejercicio 4591 ▲002635

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\ln(xy)\right) &= \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy} = \frac{x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x}{xy} = \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}x}{x};\\
\mathrm{d}\left(xyz(1+\sinh(yz))\right) &= (1+\sinh(yz))\mathrm{d}(xyz) + xyz\mathrm{d}(\sinh(yz))\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x + xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y + xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z + xyz\cosh(yz)\mathrm{d}(yz)\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x + xz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}y + xy(1+\sinh(yz))\mathrm{d}z\\
&\quad + xyz^2\cosh(yz)\mathrm{d}y + xy^2z\cosh(yz)\mathrm{d}z\\
&= yz(1+\sinh(yz))\mathrm{d}x + xz(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}y + xy(1+\sinh(yz)+yz\cosh(yz))\mathrm{d}z;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\mathrm{sen}(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right) &= \left(\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\right)\mathrm{d}(x^2y) + \mathrm{sen}(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}(x-y)\\
&= x^2\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y + 2xy\cos(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x + \mathrm{sen}(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x - \mathrm{sen}(x^2y)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y\\
&= \left(x^2\cos(x^2y)x - \mathrm{sen}(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y + \left(2xy\cos(x^2y) + \mathrm{sen}(x^2y)\right)\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio 4592 ▲002636

1. La forma diferencial $x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y$ de grado 1 no es cerrada porque la forma diferencial de grado 2
$$d(x^2y^2\mathrm{d}x + x^3y\mathrm{d}y) = 2x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + 3x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
es no nula. En consecuencia, una función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del tipo buscado no puede existir.
2. Una función b del tipo buscado debe satisfacer la ecuación diferencial parcial
$$2x^2y - \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$
de donde $b(x,y) = \frac{2}{3}x^3y + k(y)$, y k es una función de la variable y. Una función g correspondiente debe satisfacer las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3y + k(y).$$
Se sigue que g es de la forma $g(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^2 + K(y)$, donde K es una función de la variable y.

Solución del ejercicio 4593 ▲002637

1. Un cálculo inmediato da $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = \mathrm{d}g$.
2. En consecuencia, $g = u + v + c$, donde la constante c está determinada por la condición
$$3 = g(1,1) = u(1,1) + v(1,1) + c = 1 + 1 + c$$
de donde $c = 1$.
3. Un cálculo directo demuestra que la aplicación inversa
$$k\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$$
de h es dada por la fórmula
$$k(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = \left(\left(\frac{u^2}{v}\right)^{1/3}, \left(\frac{v^2}{u}\right)^{1/3}\right).$$

4. $\mathrm{d}(g\circ k) = \mathrm{d}(u\circ k) + \mathrm{d}(v\circ k) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, pues $u(k(u,v)) = u$ y $v(k(u,v)) = v$.
5. Un cálculo inmediato da

$$J_h = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} & -\frac{u^{2/3}}{3v^{4/3}} \\ -\frac{v^{2/3}}{3u^{4/3}} & \frac{2}{3}(uv)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

   de donde $J_h(x,y)J_k(h(x,y)) = I_2$.

Solución del ejercicio 4594 ▲002638

$$\mathrm{d}\operatorname{sen}(xyz) = yz\cos(xyz)\mathrm{d}x + zx\cos(xyz)\mathrm{d}y + xy\cos(xyz)\mathrm{d}z$$

de donde, la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} -y^2z^2\operatorname{sen}(xyz) & z\cos(xyz) - xyz^2\operatorname{sen}(xyz) & y\cos(xyz) - xy^2z\operatorname{sen}(xyz) \\ z\cos(xyz) - xyz^2\operatorname{sen}(xyz) & -x^2z^2\operatorname{sen}(xyz) & x\cos(xyz) - x^2yz\operatorname{sen}(xyz) \\ y\cos(xyz) - xy^2z\operatorname{sen}(xyz) & y\cos(xyz) - x^2yz\operatorname{sen}(xyz) & -x^2y^2\operatorname{sen}(xyz) \end{bmatrix}.$$

Igualmente

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\operatorname{sen}^2(y/x)) &= -2yx^{-2}\operatorname{sen}(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}x + 2x^{-1}\operatorname{sen}(y/x)\cos(y/x)\mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sen}(2y/x)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) \end{aligned}$$

por lo tanto, la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} 2yx^{-3}\operatorname{sen}(2y/x) + 2y^2x^{-4}\cos(2y/x) & -x^{-2}\operatorname{sen}(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) \\ -x^{-2}\operatorname{sen}(2y/x) - 2yx^{-3}\cos(2y/x) & 2x^{-2}\cos(2y/x) \end{bmatrix}.$$

Solución del ejercicio 4595 ▲002639

1. $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial F}{\partial r} + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$
2. $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{r}$
3. $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$
4. Tomando la suma de las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ r\frac{\partial F}{\partial r} &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

   se encuentra el resultado deseado.

Solución del ejercicio 4596 ▲002640

1. Con $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ y $\frac{\partial}{\partial v} = 1/2(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})$ se obtienen las identidades
$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
de donde para que f satisfaga la ecuación (4) es necesario y suficiente que F satisfaga la ecuación (20).
2. Se supone que F satisface la ecuación (20). Entonces la función $\frac{\partial F}{\partial u}$ es una función digamos h_1 solamente de la variable u y la función $\frac{\partial F}{\partial v}$ es una función digamos h_2 solamente de la variable v. En consecuencia, $F(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$, donde $g_1' = h_1$ y $g_2' = h_2$.
3. La solución general de (4) entonces se escribe
$$f(x,t) = g_1(u) + g_2(v) = g_1(x+t) + g_2(t-x).$$
La función g_1 describe una onda que se mueve hacia la derecha y la función g_1 describe una onda que se mueve hacia la izquierda. En fin, para encontrar la única solución que satisface las condiciones iniciales (5) se constata que las condiciones iniciales implican las identidades
$$\begin{aligned} f(x,0) &= g_1(x) + g_2(-x) = \operatorname{sen} x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= g_1'(x) - g_2'(-x) = \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) &= g_1'(x) + g_2'(-x) = -\cos x \end{aligned}$$
de donde $g_1' = 0$ y $g_2'(-x) = -\cos x$, es decir $g_2(x) = \operatorname{sen}(-x)$. En consecuencia, la solución única buscada f se escribe
$$f(x,t) = \operatorname{sen}(x-t).$$

Solución del ejercicio 4597 ▲005889

Se establece $D = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$, luego $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.
• f se define en $\mathbb{R}^2$.
• f es de clase C^1 sobre Ω en virtud de teoremas generales y para $(x,y) \in \Omega$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$
• Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$. Para $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y) - f(0,0)| = \begin{cases} y^2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$
Como y^2 tiende a 0, cuando (x,y) tiende a 0, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ y entonces f es continua en $(0,0)$, luego

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.$$

• Estudiar la existencia y el valor eventual de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, x_0 real dado. Para $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Entonces $\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tiende a 0, cuando x tiende a x_0. Se deduce que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$. Finalmente, la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se define en $\mathbb{R}^2$ por

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0. \end{cases}$$

• Estudiar la existencia y el valor eventual de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 real dado. Para $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \frac{y^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x_0}{y}\right)}{y} = y\operatorname{sen}\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

Se deduce que $\left|\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| \leqslant |y|$ ya que $\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tiende a 0, cuando y tiende a 0. Así, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. Finalmente, la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ se define en $\mathbb{R}^2$ por

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0. \end{cases}$$

• Estudiar la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 real dado. Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| = \left\{\begin{matrix} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{matrix}\right\} \leqslant |y|.$$

Cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, $|y|$ tiende a 0 y entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tiende a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, cuando (x,y) tiende a $(x_0,0)$. La función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es, por lo tanto continua en $(x_0,0)$ y finalmente

$$\text{la función } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ es continua en } \mathbb{R}^2.$$

• Estudiar la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 real dado. Se supone primero $x_0=0$. Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \left\{\begin{matrix} \left|2y\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{matrix}\right\} \leqslant 2|y|+|x|.$$

Cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, $|x|+2|y|$ tiende a 0 y entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tiende a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Se supone ahora $x_0\neq 0$. Para $y\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 2y\operatorname{sen}\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Cuando y tiende a 0, $2y\operatorname{sen}\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tiende a 0, pues $\left|2y\operatorname{sen}\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ y $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ no tiene límite real porque $x_0\neq 0$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ no tiene límite cuando y tiende a 0 y la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no es continua en $(x_0,0)$ si $x_0\neq 0$. Se ha demostrado que

$$f \text{ es de clase } C^1 \text{ sobre } \Omega \cup \{(0,0)\}.$$

• Estudiar la existencia y el valor eventual de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Para $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0.$$

Entonces $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tiende a 0, cuando x tiende a 0. Se deduce que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe y $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$. • Estudiar la existencia y el valor eventual de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Para $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y \cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Entonces $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tiende a 1, cuando y tiende a 0. Se deduce que $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe y $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Se ha demostrado que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existen y son diferentes. Por el teorema de SCHWARZ, f no es de clase C^2 sobre $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

Solución del ejercicio 4598 ▲005904

Porque la función ch no se anula en $\mathbb{R}$, g es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ y para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\text{sen}(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\text{sen}^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) \\
&= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).
\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\,\text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right)$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -2\cos(2x)\frac{2\,\text{ch}^3(2y) - 4\,\text{sh}^2(2y)\,\text{ch}(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)\,\text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) \\
&= -4\frac{\cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)}(-\text{ch}^2(2y)+2) f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)(\text{ch}^2(2y)-1)}{\text{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).
\end{aligned}$$

Entonces, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\text{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}\right).$$

Ahora, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \leqslant 1$ y por otro lado, la expresión $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)} = \cos(2x)$ recorre $[-1,1]$, cuando x recorre $\mathbb{R}$. Entonces $\left\{\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2\times)},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = [-1,1]$. Así,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0.$$

Se busca una aplicación f de clase C^2 sobre $]-1,1[$. Por lo tanto $\left|\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right|=1 \Leftrightarrow |\cos(2x)|=\mathrm{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)|=\mathrm{ch}(2y)=1 \Leftrightarrow y=0$ y $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Entonces

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\tfrac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y)=0 &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t)=0\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\,\mathrm{argth}\,t+\mu.\end{aligned}$$

Además, f no es constante si y solo si $\mu=0$.

$$\boxed{\text{La aplicación } t\mapsto \mathrm{argth}\,t \text{ sirve.}}$$

Solución del ejercicio 4599 ▲005905

Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La matriz jacobiana de f en (x,y) se escribe $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y)\\ s(x,y) & c(x,y)\end{pmatrix}$, donde c y s son dos funciones de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $c^2+s^2=1$ $(*)$. El primer paso es verificar que las funciones c y s son constantes en $\mathbb{R}^2$. Porque f es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$, de acuerdo con teorema de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Esto se escribe de nuevo $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c\\ s\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s\\ c\end{pmatrix}$ o finalmente

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\ (**).$$

Derivando $(*)$, con respecto a x o en y, se obtienen igualdades $c\frac{\partial c}{\partial x}+s\frac{\partial s}{\partial x}=0$ y $c\frac{\partial c}{\partial y}+s\frac{\partial s}{\partial y}=0$. Esto demuestra que los dos vectores $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ son ortogonales al vector no nulo $\begin{pmatrix} c\\ s\end{pmatrix}$ y por lo tanto, son colineales. Pero la igualdad $(**)$ demuestra que los dos vectores $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ también son ortogonales entre sí. Finalmente, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ambos vectores $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ son nulos. Se deduce que las dos aplicaciones c y s son constantes en $\mathbb{R}^2$ y entonces, existe θ en $\mathbb{R}$ tal que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la matriz jacobiana de f en (x,y) es $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta)\\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

Sea g la rotación de ángulo θ tomando el mismo valor que f en $(0,0)$. f y g tienen las mismas diferenciales en todos los puntos y coinciden en un punto. Entonces $f=g$ y f es una rotación afín.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sea } f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \text{ de clase } C^2 \text{ cuyo diferencial en todo punto es una rotación.}\\ \text{Entonces } f \text{ es una rotación afín.}\end{array}}$$

Solución del **ejercicio 4600** ▲002641

1. $df = (2x-y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y$ y $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, de donde

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u-v)+v(2v-u) = 2(u^2-uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u-\tfrac{v}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

De ahí la forma hessiana en el punto $(0,0)$ es positiva y por lo tanto, este punto tiene un mínimo local.

2. $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+6 = (x+y)^2+6$ de ahí el punto $(0,0)$ tiene un mínimo local.
3. $df = (3x^2+2x+2y^2+3y)\mathrm{d}x + (4xy-4y^3+3x+2y)\mathrm{d}y$ y

$$\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x+2 & 4y+3 \\ 4y+3 & -12y^2+4x+2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned}(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u,v)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u+3v)u+(3u+2v)v = 2(u^2+3uv+v^2) \\ &= 2\left(\left(u+\tfrac{3v}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}v^2\right).\end{aligned}$$

En consecuencia la forma hessiana en el punto $(0,0)$ es no degenerada e indefinida y este punto es un punto silla.

Solución del **ejercicio 4601** ▲002642

Porque $df = \cos x\,\mathrm{d}x + (2y-2)\mathrm{d}y$, los puntos críticos son los puntos $((k+1/2)\pi, 1)$ $(k\in\mathbb{Z})$. Además, $\mathrm{Hess}_f = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y

$$-\operatorname{sen}((k+1/2)\pi) = (-1)^{k+1},$$

de donde $\mathrm{Hess}_f((k+1/2)\pi,1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. En consecuencia, si k es impar, el punto $((k+1/2)\pi,1)$ tiene un mínimo local y, si k es par, el punto $((k+1/2)\pi,1)$ es un punto silla.

Solución del **ejercicio 4602** ▲002643

1. $dF = f(y)f'(x)\mathrm{d}x + f(x)f'(y)\mathrm{d}y$ y

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} f(y)f''(x) & f'(x)f'(y) \\ f'(x)f'(y) & f(x)f''(y) \end{bmatrix} \tag{36}$$

de donde $\mathrm{Hess}_f(0,0) = (f'(0))^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y

$$(u,v)\mathrm{Hess}_f(0,0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (f'(0))^2(u,v) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2(f'(0))^2 uv$$

De ahí la forma hessiana en el punto $(0,0)$ es no degenerada e indefinida y este punto no puede tener un extremo relativo. En efecto, el punto $(0,0)$ es crítico pero es un punto de silla.

2. Según la parte (1.) y la periodicidad, los puntos de la forma

$$(x,y) = (k,l) \in \mathbb{R}^2,\ k,l \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

son puntos de silla. Igualmente según la parte (1.),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(y)f'(x) = 2\pi \,\mathrm{sen}(2\pi y)\cos(2\pi x), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f(x)f'(y) = 2\pi \,\mathrm{sen}(2\pi x)\cos(2\pi y).$$

En consecuencia, para que el punto (x,y) sea crítico es necesario y suficiente que sea de la forma

$$(k,l),\ (k+\tfrac{1}{2},l),\ (k,l+\tfrac{1}{2}),\ (k+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}),\ k,l \in \mathbb{Z},$$

o

$$(k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{1}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{1}{4}),\ (k+\tfrac{3}{4},l+\tfrac{3}{4}),\ k,l \in \mathbb{Z}.$$

Según la periodicidad, solo mira los ocho puntos

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2},0),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4})$$

y, de acuerdo a (1.), el origen tiene un punto de silla. De (36),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_f(0,\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(0) & f'(0)f'(\frac{1}{2}) \\ f'(0)f'(\frac{1}{2}) & f(0)f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},0) &= \begin{bmatrix} f(0)f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(0) \\ f'(\frac{1}{2})f'(0) & f(\frac{1}{2})f''(0) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathrm{Hess}_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) \\ f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de donde los puntos $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ y $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ tiene puntos de silla. Es geométricamente evidente que el comportamiento de la función seno implica que los puntos $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ y $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ teniendo máximos y que los puntos $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ y $(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ teniendo mínimos.

Solución del ejercicio 4603 ▲002644

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y,z) = \mathrm{sen}(\pi xy) + \mathrm{sen}(\pi yz) - 1.$$

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y\cos(\pi xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \pi(x\cos(\pi xy) + z\cos(\pi yz)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \pi y\cos(\pi yz)$$

y, luego de la simplificación, en el punto $(1,\frac{1}{6},1)$, la ecuación (21) del plano tangente a la superficie plana en cuestión se convierte en

$$(x-1)+12(y-1/6)+(z-1)=0.$$

Así, en este punto, el vector $(1,12,1)$ es perpendicular a la superficie.

Solución del ejercicio 4604 ▲002645

1. Porque $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^x+2e^y\cos(2x)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=e^x+e^y\operatorname{sen}(2x)$ se sigue que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$. En consecuencia, existe una función h de la variable x definida en un vecindario de 0 tal que $h(0)=0$ y tal que, para que en un vecindario de $(0,0)$ las coordenadas x y y del punto (x,y) satisfagan la ecuación $ye^x+e^y\operatorname{sen}(2x)=0$ es necesario y suficiente que $y=h(x)$; igualmente existe una función k de la variable y definida en un vecindario de 0 tal que $h(0)=0$ y tal que, para que en un vecindario de $(0,0)$ las coordenadas x y y del punto (x,y) satisfagan la ecuación $ye^x+e^y\operatorname{sen}(2x)=0$ es necesario y suficiente que $x=k(y)$. Además,
$$h'(0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}=-2, \qquad k'(0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}=-\tfrac{1}{2}.$$
2. Dado que el punto $(0,0)$ pertenece a la curva $\mathscr{C}$, en 0, las funciones h y k toman los valores $h(0)=0$ y $k(0)=0$. En consecuencia,
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq 0\\ ye^x+e^y\operatorname{sen}(2x)=0}} y/x=h'(0)=-2.$$

Solución del ejercicio 4605 ▲002646

1. Porque $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$ y $\frac{\partial f}{\partial x}=(x+1)^2+2x(x+1)=(x+1)(3x+1)=3x^2+4x+1$, los puntos estacionarios de f son los puntos $(-1,0)$ y $(-\frac{1}{3},0)$. Además,
$$\operatorname{Hess}_f(x,y)=\begin{bmatrix}6x+4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$
de donde $\operatorname{Hess}_f(-1,0)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ y $\operatorname{Hess}_f(-\frac{1}{3},0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$. De ahí la forma hessiana en el punto $(-1,0)$ es definida negativa y este punto tiene un máximo local ; igualmente, la forma hessiana en el punto $(-\frac{1}{3},0)$ es no degenerada e indefinida y este punto es un punto silla.
2. La curva $y=\sqrt{x}\,(x+1)$, para $x\geqslant 0$ pasa por los puntos $(0,0)$, $(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1,2)$, y $(2,3\sqrt{2})$; ella tiene una tangente vertical en el origen, el punto $(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\sqrt{3})$ es un punto de inflexión, la pendiente en este punto vale $\sqrt{3}$, y es la pendiente minimal de la curva. Estas hechos se deducen de las expresiones $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}$ y $y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. La curva constituida de puntos tales que $f(x,y)=0$ y $x\geqslant 0$ se obtiene por reflexión de la curva $y=\sqrt{x}\,(x+1)$, para $x\geqslant 0$, con respecto al eje de las x.

3. En la bola abierta
$$\{(x,y,z);(x+1)^2+y^2+x^2<1\}\subseteq\mathbb{R}^3,$$
la gráfica $z=f(x,y)$ de la función f solo interseca el plano de los x y y en el punto $(-1,0)$. En consecuencia, la intersección $D\cap\mathscr{C}$ del disco
$$D=\{(x,y);(x+1)^2+y^2<1\}$$
con $\mathscr{C}$ solo consiste del punto $(-1,0)$.
4. Ver la indicación del ejercicio anterior.
5. Cualquiera que sea el punto (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ distinto de $(-1,0)$, de acuerdo a (1.),
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\neq(0,0).$$
La afirmación es, por lo tanto una consecuencia inmediata del teorema de funciones implícitas.

Solución del ejercicio 4607 ▲004191

1. $(0,0)$: no extremo
   $(1,1)$: máximo local
2. $(0,0)$: no extremo
   $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$: mínimo absoluto
3. $(-2/15,-1/5)$: máximo local
   $(x,0)$: max. local para $x<-1/3$, min. local para $x>-1/3$
   $(0,y)$: max. local para $y<-1/2$, min. local para $y>-1/2$
4. $(2^{-1/3},4^{-1/3})$: máximo absoluto
5. tomar el log. $(1,1)$: máximo absoluto
6. $(-1,-1)$: no extremo
7. $(1,0)$: mínimo absoluto
   $(\mathrm{e}^{-2},0)$: no extremo
8. $=MA+MB\Rightarrow$ mínimo absoluto en $[A,B]$
9. $M\in\mathrm{med}(A,B)$, $\overline{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}=\pm\frac{2\pi}{3}$
   $M=A,B$: mínimo absoluto
   $M=O$

Solución del ejercicio 4608 ▲004192

1.
2. (a) isobaricentro de ABC.
   (b) punto de Fermat o A,B,C.
   (c) A,B,C.

Solución del ejercicio 4609 ▲004193

1. $4S = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.
2. max = $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Solución del ejercicio 4610 ▲004194

Existencia de un máximo por compacidad. Sean x, y las coordenadas de un punto M en un sistema ortonormado del plano y (u, v, w) las coordenadas baricéntricas de M, con respecto a A, B, C (con $u + v + w = 1$). u, v, w son funciones afines de x, y, z y (AB) tiene por ecuación baricéntrica $w = 0$, de donde $d(M, AB) = \alpha|w|$ por cierto real $\alpha > 0$. Igualmente para $d(M, AC)$ y $d(M, BC)$ y $f(M) = \alpha\beta\gamma|u||v||w|$.
Cuando M varía en el triángulo, (u, v, w) recorre todos los tripletes de reales positivos con suma 1 y se busca el máximo del producto uvw, se alcanza cuando u, v, w son iguales, es decir en el centro de gravedad del triángulo.

Solución del ejercicio 4612 ▲004196

Existe una base ortonormal de E y un real λ tales que $f(x) = \lambda x_1$ y $g(x) = \lambda x_1 \mathrm{e}^{-x_1^2} \mathrm{e}^{-x_2^2 - \cdots - x_n^2}$. Entonces g es maximal/minimal para $x_1 = \pm 1/\sqrt{2}$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Solución del ejercicio 4613 ▲004197

El mínimo requerido existe porque $\varphi(M, N, P) \to +\infty$ cuando al menos uno de los puntos M, N, P tiende a infinito en su recta personal. Sean $D_1 \cap D_2 = \{A\}$, $D_2 \cap D_3 = \{B\}$, $D_3 \cap D_1 = \{C\}$ y A', B', C' los círculos de $[B,C]$, $[C,A]$ y $[A,B]$. Ya se tiene $\varphi(B', C', A') = \frac{3}{2}a$ y $\varphi(A, N, P) \geqslant 2AP \geqslant a\sqrt{3}$ por lo tanto, el mínimo no se alcanza cuando uno de los puntos M, N, P se confunde con uno de los puntos A, B, C, ni tampoco si alguno de los puntos M, N, P está fuera del triángulo ABC. Para N, P fijos fuera de D_1, se hace variar M sobre D_1 : $M = A + t\overrightarrow{AB}$, con $t \in \mathbb{R}$ y se considera $f(t) = \varphi(M, N, P)$. Entonces $f'(t) = \left(\overrightarrow{AB} \mid \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} + \frac{\overrightarrow{MP}}{MP}\right)$, por lo tanto $f(t)$ es minimal cuando D_1 es la bisectriz exterior de las semirrectas $[MN)$ y $[MP)$.
Sea (M, N, P) un triplete que realiza el mínimo de φ y α, β, γ los ángulos del triángulo MNP en P, M y N. Los ángulos del triángulo AMN son $\pi/3$, $(\pi - \beta)/2$ y $(\pi - \gamma)/2$, de donde $2\pi/3 = \beta + \gamma = \pi - \alpha$ y entonces $\alpha = \pi/3 = \beta = \gamma$. Se deduce que (MP) es paralela a (AB), (MN) a (BC) y (NP) a (AC) ya que $(M, N, P) = (B', C', A')$.

Solución del ejercicio 4614 ▲004198

1. Se fija $A_i \in D_i$ y $\vec{u}_i$ un vector director de D_i. Sea $M_i = A_i + x_i \vec{u}_i$. Entonces

$$\begin{aligned} f(M_1, M_2, M_3) =& f(A_1, A_2, A_3) \\ &+ 2\Big((\overrightarrow{A_1A_2} \mid x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1) + (\overrightarrow{A_2A_3} \mid x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2) + (\overrightarrow{A_3A_1} \mid x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3)\Big) \\ &+ \Big(\|x_2\vec{u}_2 - x_1\vec{u}_1\|^2 + \|x_3\vec{u}_3 - x_2\vec{u}_2\|^2 + \|x_1\vec{u}_1 - x_3\vec{u}_3\|^2\Big) \\ =& a + b(x_1, x_2, x_3) + c(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

b es una forma lineal y c es una forma cuadrática positiva, e incluso definida positiva porque $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ son dos a dos no colineales. Resulta que $f(M_1,M_2,M_3) \to +\infty$ cuando $|x_1|+|x_2|+|x_3| \to \infty$, entonces por continuidad, f admite un mínimo. Escoger entonces A_1,A_2,A_3 de manera que $f(A_1,A_2,A_3)$ sea igual a este mínimo. Se tiene entonces $b=0$, pues (A_1,A_2,A_3) es punto crítico de f, de donde $f(M_1,M_2,M_3) > f(A_1,A_2,A_3)$ si $(x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$ dada la definida-positividad de c. Esto prueba la unicidad del triplete donde f alcanza su mínimo.

2. Se sospecha fuertemente el triplete formado por los puntos medios los lados. Denotando A_1,A_2,A_3 estos puntos medios, es suficiente verificar que la forma lineal b de la respuesta anterior es nula, y este es claramente el caso luego de agrupar alrededor de x_1, x_2, x_3.

Solución del ejercicio 4615 ▲004199

Se parametriza el camino en coordenadas esféricas por $t \mapsto (\theta(t), \phi(t))$.
La longitud del camino es $\int_0^1 \sqrt{\phi'^2(t)+\mathrm{sen}^2(\phi(t))\theta'^2(t)}dt \geqslant \left|\int_0^1 \phi'(t)dt\right|$, con igualdad si y solo si $\theta'=0$ y ϕ' es de signo constante. Se encuentran así los meridianos.

Solución del ejercicio 4616 ▲004200

Sea $y \in B$ ortogonal a x. La función $g : \theta \mapsto f(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)$ admite un extremo en 0, por lo tanto $g'(0)=0$, sea $\nabla f(x) \perp y$. Si $x=0$ por lo tanto se tiene $\nabla f(0)=0$. Si no, $\nabla f(x) = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, y haciendo un desarrollo limitado de $f(x-tx)$ se ve que $\lambda \geqslant 0$.

Solución del ejercicio 4617 ▲005558

1. f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces si f admite un extremo local en un punto (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) es un punto crítico de f. Por tanto, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$
Entonces si f admite un extremo local, está necesariamente en $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$, con $f\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. Por otra parte,
$$f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y = \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{y}{2}+1\right)^2 + y^2+3y = \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2 + \frac{3y^2}{4}+2y-1$$
$$= \left(x+\frac{y}{2}+1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right).$$
Entonces f admite un mínimo local en $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ igual a $-\frac{7}{3}$ y este mínimo local es un mínimo global. Por otra parte, f no admite un máximo local.

2. f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces si f admite un extremo local en un punto (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) es un punto crítico de f. Por tanto, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x^9-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}.$$

Los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$. Ahora, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$. Esto permite restringir el estudio de los dos puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

• Para $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^4 > 0$ sobre $\mathbb{R}^*$ y $f(x,x) = -4x^2 + 2x^4 = 2x^2(-2+x^2) < 0$ sobre $]-\sqrt{2},0[\cup]0,\sqrt{2}[$. Entonces f cambia de signo en todos los vecindarios de $(0,0)$ y desde $f(0,0) = 0$, f no admite un extremo local en $(0,0)$.

• Para $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(1+h,1+k) - f(1,1) &= (1+h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) + 2 \\ &= 6h^2 + 6k^2 - 4hk + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 \\ &\geqslant 6h^2 + 6k^2 - 2(h^2+k^2) + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 \\ &= 4h^2 + 4h^3 + h^4 + 4k^2 + 4k^3 + k^4 \\ &= h^2(2h^2+1)^2 + k^2(2k^2+1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

f admite así un mínimo global en $(1,1)$ (y en $(-1,-1)$) igual a -2.

Solución del ejercicio 4618 ▲005559

Sea M un punto dentro del triángulo ABC. Se define $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$. Se denota x, y, z y $\mathscr{A}$ las áreas respectivas de los triángulos MBC, MCA, MAB y ABC. Se tiene

$$d(M,(BC))d(M,(CA))d(M(AB)) = \frac{2\text{área}(MBC)}{a}\frac{2\text{área}(MCA)}{b}\frac{2\text{área}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathscr{A}-x-y).$$

Por lo tanto, se debe determinar el máximo de la función $f(x,y) = xy(\mathscr{A}-x-y)$, cuando (x,y) describe el triángulo abierto $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0,\ x+y < \mathscr{A}\}$. Se admite que f admite un máximo global en el triángulo cerrado $T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant \mathscr{A}\}$ (esto resulta de un teorema de Math Spéc : « una función numérica continua en un compacto tiene un mínimo y un máximo »). Este máximo se alcanza en el interior T de T', pues f es nula en el borde de T' y estrictamente positivo al interior de T'. Porque f es de clase C^1 sobre T que es un abierto de $\mathbb{R}^2$, f alcanza su máximo en T en un punto crítico de f. Por tanto, para $(x,y) \in T^2$,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathscr{A}-x-y) - xy = 0 \\ y(\mathscr{A}-x-y) - xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathscr{A}-2x-y) = 0 \\ x(\mathscr{A}-x-2y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = \mathscr{A} \\ x+2y = \mathscr{A} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\mathscr{A}}{3}. \end{aligned}$$

El máximo buscado es, por lo tanto igual a $\frac{8}{abc} \times \frac{\mathscr{A}}{3} \times \frac{\mathscr{A}}{3} \times \left(\mathscr{A} - \frac{\mathscr{A}}{3} - \frac{\mathscr{A}}{3}\right) = \frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$. (Se puede demostrar que este máximo se obtiene cuando M es el centro de gravedad del triángulo ABC).

Solución del ejercicio 4619 ▲005560

Sean $\mathscr{R}$ un marco ortonormado de $\mathbb{R}^2$ dotado de su estructura canónica euclidiana entonces M, A y B los respectivos puntos de coordenadas (x,y), $(0,a)$ y $(a,0)$ en $\mathscr{R}$.

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = MA + MB \geqslant AB = a\sqrt{2}$, con igualdad si y solo si $M \in [AB]$. Entonces

$$\boxed{\text{el mínimo de } f \text{ sobre } \mathbb{R}^2 \text{ existe y vale } a\sqrt{2}.}$$

Solución del ejercicio 4620 ▲005902

Se define $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$ y se denota $\mathscr{A}$ el área del triángulo ABC. Sea M un punto dentro del triángulo ABC. Se denota I, J y K las proyecciones ortogonales de M en las rectas (BC), (CA) y (AB) respectivamente. Se define $u =$ área de MBC, $v =$ área de MCA y $w =$ área de MAB. Se tiene

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathscr{A} - u - v).$$

Se trata entonces de encontrar el máximo de la función $f: (u,v) \mapsto uv(\mathscr{A} - u - v)$ en el dominio

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geqslant 0, \ v \geqslant 0 \ \text{ y } \ u+v \leqslant \mathscr{A}\right\}.$$

T es un compacto de $\mathbb{R}^2$. En efecto :
- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u+v \leqslant \mathscr{A}$ y entonces T es acotada.
- las aplicaciones $\varphi_1 : (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2 : (u,v) \mapsto v$ y $\varphi_3 : (u,v) \mapsto u+v$ son continuas en $\mathbb{R}^2$ en tanto que formas lineales en un espacio de dimensión finita. Entonces los conjuntos
$P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$,
$P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ y
$P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u+v \leqslant 0\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$
son cerrados de $\mathbb{R}^2$ como imágenes recíprocas de cerrados por aplicaciones continuas. Se deduce que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ como intersección de cerrados de $\mathbb{R}^2$.
Porque T es un cerrado acotado de $\mathbb{R}^2$, T es un compacto de $\mathbb{R}^2$ ya que $\mathbb{R}^2$ es de dimensión finita y por el teorema de BOREL-LEBESGUE. f es continua en el compacto T, con valores en $\mathbb{R}$ en tanto que polinomio en varias variables y por lo tanto, f admite un máximo en T.
Para todo (u,v) perteneciendo a la frontera de T, se tiene $f(u,v) = 0$. Como f es estrictamente positiva en $\overset{\circ}{T} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u > 0, \ v > 0 \ \text{ y } \ u+v < 0\}$, f admite su máximo en $\overset{\circ}{T}$. Porque f es de clase C^1 sobre $\overset{\circ}{T}$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$, si f admite un máximo en $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) es necesariamente un punto crítico de f. Sea $(u,v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v(\mathscr{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathscr{A} - u - 2v) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2u + v = \mathscr{A} \\ u + 2v = \mathscr{A} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Porque f admite un punto crítico y solo uno a saber $(u_0,v_0) = \left(\frac{\mathscr{A}}{3}, \frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admite su máximo en este punto y este máximo vale $f(u_0,v_0) = \frac{\mathscr{A}^3}{27}$. El máximo del producto de las distancias a un punto M interior al triángulo ABC a los lados de este triángulo es, por lo tanto $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.
Observación. Se puede demostrar que para todo punto M interior al triángulo ABC, se tiene

$$M = \text{bar}\left((A, \text{área de } MBC), (B, \text{área de } MAC), (C, \text{área de } MAB)\right).$$

Si ahora M es el punto en el que se alcanza el máximo, las tres áreas son iguales y por lo tanto, el máximo se alcanza en G el isobaricentro del triángulo ABC.

Solución del ejercicio 4621 ▲005903

Sean A y B los puntos del respectivo plano de coordenadas $(0,a)$ y $(a,0)$ en un cierto sistema de referencia $\mathscr{R}$ ortonormada. Sea M un punto del plano de coordenadas (x,y) en $\mathscr{R}$. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2 = MA + MB \geqslant AB, \text{ con igualdad si y solo si } M \in [AB].$$

Entonces f admite un mínimo global igual a $AB = a\sqrt{2}$ alcanzado en todo par (x,y) de la forma $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda \in [0,1]$.

Solución del ejercicio 4623 ▲005890

Sea $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\varphi(x,y) = (z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y = z \\ x + y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x - e^{t-x} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ (e^x)^2 - ze^x - e^t = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x = z - \sqrt{z^2+4e^t} \text{ o } e^x = z + \sqrt{z^2+4e^t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = z + \sqrt{z^2+4e^t} \\ y = t - x \end{cases} \quad (\text{pues } z - \sqrt{z^2+4e^t} < z - \sqrt{z^2} = z - |z| \leqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(z + \sqrt{z^2+4e^t}) \\ y = t - \ln(z + \sqrt{z^2+4e^t}) \end{cases} \quad (\text{pues } z + \sqrt{z^2+4e^t} > z + \sqrt{z^2} = z + |z| \geqslant 0).$$

Así, todo elemento $(z,t) \in \mathbb{R}^2$ tiene un antecedente y solo uno en $\mathbb{R}^2$ por φ y entonces φ es una biyección de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. La función φ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ de jacobiano $J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y$. El jacobiano de φ no se anula en $\mathbb{R}^2$. En resumen, φ es una biyección de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ y el jacobiano de φ no se anula en $\mathbb{R}^2$. Entonces se sabe que

$$\boxed{\varphi \text{ es un } C^1\text{-difeomorfismo de } \mathbb{R}^2 \text{ en sí mismo.}}$$

Solución del ejercicio 4624 ▲005891

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in \mathbb{R}$. La función $f_x : y \mapsto y^{2n+1} + y - x$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ como una suma de funciones continuas y estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$. Entonces la función f_x realiza una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\left]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)\right[= \mathbb{R}$. En particular, la ecuación $f_x(y) = 0$ tiene una y solo una solución en $\mathbb{R}$ que se denota $\varphi(x)$.

La función $f : (x,y) \mapsto y^{2n+1} + y - x$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y además, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, la función φ implícitamente definida por la igualdad $f(x,y) = 0$ es derivable en todo real x y además, derivando la igualdad $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi(x) - x = 0$, se obtiene $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n} + \varphi'(x) - 1 = 0$ y entonces

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n} + 1}.$$

Demostrar por inducción que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la función φ es p veces derivable en $\mathbb{R}$.

– Es cierto para $p = 1$.

– Sea $p \geqslant 1$. Se supone que la función φ sea p veces derivable en $\mathbb{R}$. Entonces la función $\varphi' = \frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ es p veces derivable en $\mathbb{R}$ como la inversa de una función p veces derivable en $\mathbb{R}$ no se anula en $\mathbb{R}$. Se deduce que la función φ es $p+1$ veces derivable en $\mathbb{R}$.

Se ha demostrado por recurrencia que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la función φ es p veces derivable en $\mathbb{R}$ y así como

$$\boxed{\text{la función } \varphi \text{ es de clase } C^\infty \text{ sobre } \mathbb{R}.}$$

Calculemos ahora $I = \int_0^2 \varphi(t)\,dt$. Se observa primero que, ya que $0^{2n+1}+0-0=0$, se tiene $\varphi(0)=0$ y desde $1^{2n+1}+1-2=0$, se tiene $\varphi(2)=1$.
Ahora, para todo real x de $[0,2]$, se tiene $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi'(x)\varphi(x)-x\varphi'(x)=0$ (multiplicando por $\varphi'(x)$ los dos miembros de la igualdad definitoria $\varphi(x)$) e integrando sobre el segmento $[0,2]$, se obtiene

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx=0 \quad (*).$$

Por tanto, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2=\frac{1}{2n+2}$. Igualmente, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}$ y entonces $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2n+2}$.
Por otra parte, ya que las dos funciones $x\mapsto x$ y $x\mapsto\varphi(x)$ son de clase C^1 en el segmento $[0,2]$, se puede realizar una integración por partes que proporciona

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx=\Big[-x\varphi(x)\Big]_0^2+\int_0^2\varphi(x)\,dx=-2+I.$$

La igualdad $(*)$ se escribe así $\frac{n+2}{2n+2}-2+I=0$ y se obtiene $I=\frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2 \varphi(x)\,dx=\frac{3n+2}{2n+2}.}$$

Solución del ejercicio 4625 ▲005892

Sea $x\in\mathbb{R}$. La función $f_x : y\mapsto e^{x+y}+y-1$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ como una suma de funciones continuas y estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$. Entonces la función f_x realiza una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particular, la ecuación $f_x(y)=0$ tiene una y solo una solución en $\mathbb{R}$ que se denota $\varphi(x)$.
La función $f:(x,y)\mapsto e^{x+y}+y-1$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y además, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}+1\neq 0$. Por el teorema de la función implícita, la función φ implícitamente definida por la igualdad $f(x,y)=0$, es derivable en todo real x y además, derivando la igualdad $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$, se obtiene $\forall x\in\mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}+\varphi'(x)=0$ o aún

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ \varphi'(x)=-\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}. \quad (*)$$

Se deduce por inducción que φ es de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ y en particular admite en 0 un desarrollo limitado de orden 3. Determinar este desarrollo limitado.
1a solución. porque $e^{0+0}+0-1=0$, se tiene $\varphi(0)=0$. La igualdad $(*)$ proporciona entonces $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$ y se puede escribir $\varphi(x)\underset{x\to0}{=}-\frac{1}{2}x+ax^2+bx^3+o(x^3)$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to0}{=} 1+\left(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+ax^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} 1+\frac{x}{2}+\left(a+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

La igualdad $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$ proporciona entonces $a+\frac{1}{8}+a=0$ y $b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}+b=0$ o aún $a=-\frac{1}{16}$ y $b=\frac{1}{192}$.

2a solución. Se tiene ya $\varphi(0)=0$ y $\varphi'(0)=0$. Derivando la igualdad $(*)$, se obtiene

$$\varphi''(x)=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1)-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

y entonces $\frac{\varphi''(0)}{2}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times 2^2}=-\frac{1}{16}$. Igualmente,

$$\varphi^{(3)}(x)=-\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}+(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

y entonces $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{192}$. La fórmula de TAYLOR-YOUNG proporciona entonces

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to 0}{=}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{384}+o(x^3).}$$

Solución del ejercicio 4633 ▲005561

Sea φ una aplicación de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$, luego f la aplicación definida en U por $\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifica :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\&=\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

Así, cuando (x,y) recorre U, $\frac{y}{x}$ recorre $\mathbb{R}$ (pues $\frac{y}{1}$ ya recorre $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall(x,y)\in U,\ \frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}\\&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ 2t\varphi'(t)+(t^2-1)\varphi''(t)=t\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda\quad(*)\end{aligned}$$

Ahora, $\frac{t^2}{2}+\lambda$ no se anula en ±1, la igualdad $(*)$ proporciona una función φ tal que φ' no tiene un límite real en ±1. Tal solución no es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$. Así necesariamente $\lambda=-\frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3}&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ (t^2-1)\varphi'(t)=\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\\&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t)=\frac{1}{2}\ \text{(por continuidad de }\varphi'\text{ en }\pm1)\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\frac{t}{2}+\lambda.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4634 ▲005562

1. $\begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2u-v \\ y = -u+v. \end{cases}$
La aplicación $(x,y) \mapsto (u,v)$ es un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo. Para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, se escribe entonces $g(u,v) = f(2u-v, u+v) = f(x,y)$ de manera que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x+y, x+2y) = g(u,v)$. f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ si y solo si g es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\partial}{\partial x}(g(x+y,x+2y)) - \frac{\partial}{\partial y}(g(x+y,x+2y)) \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\ &= 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v). \end{aligned}$$

Así, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists F:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^1 \text{ tal que } \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = F(v) \\ &\Leftrightarrow \exists F:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^1 \text{ tal que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = F(x+2y). \end{aligned}$$

2. Se define $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ de manera que $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.
Sea $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = g(r,\theta)$. Se sabe que $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + r\operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = r\frac{\partial g}{\partial r},$$

luego $\forall (x,y) \in D$,

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \forall r>0,\ r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \Leftrightarrow \forall r>0,\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \text{ de clase } C^1 \text{ sobre } \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[/\ \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g(r,\theta) = r+\varphi(\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \text{ de clase } C^1 \text{ sobre } \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[/\ \forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists \psi \text{ de clase } C^1 \text{ sobre } \mathbb{R}/\ \forall (x,y) \in D,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4658 ▲004381

1. $\frac{1}{30}$.	2. 0.	3. $\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.	4. $\frac{96}{35}$.	5. $\frac{\pi}{2}$.
6. $\pi(1-\ln 2)$.	7. $\frac{5}{6}$.	8. $2(\ln 2-1)$.	9. $\frac{3\pi}{2}$.	10. $\frac{65\pi}{48}$.
11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.	12. $\frac{7}{45}$.	13. $\pi(1-\frac{1}{e})$.	14. $\frac{(e^{2p}-1)^2}{3}$, $(x=u^2v, y=uv^2)$.	

Solución del ejercicio 4659 ▲004382

Expresar $u = x, v = x + y$. Se obtiene $I = \frac{2}{1701}$.

Solución del ejercicio 4660 ▲004383

simetría + pasada a polares. $I = \frac{3}{4}\pi - \frac{11}{6}$.

Solución del ejercicio 4661 ▲004384

1. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{27}\right)$.
2. $2\pi a^2 \arcsin\frac{R}{a} - 2\pi R\sqrt{a^2 - R^2}$.
3. $\frac{1}{720}$.
4. $\frac{3}{4} - \ln 2$.
5. $\frac{\pi R^2 a^2}{4}(a^2 + 3R^2)$.
6. $\frac{\pi}{2}(1 - \ln 2)$.
7. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2 + b^2)$.

Solución del ejercicio 4662 ▲004385

1. Integrar en z primeramente : $\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \frac{1}{x^2 - y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{1+y^2z^2}\right)$. Se obtiene $I = \pi \ln 2$.
2. Integrar I en x y y primeramente. Se obtiene $I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz$.

Solución del ejercicio 4663 ▲004386

$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Solución del ejercicio 4664 ▲004387

$\frac{1}{2}\pi^2 R r^2(4R^2 + 3r^2)$.

Solución del ejercicio 4665 ▲004388

$2\pi b\left(a^2 - \frac{b^2}{3}\right)$.

Solución del ejercicio 4666 ▲004389

1.
2.
3. Fubini $\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8}$.

Solución del ejercicio 4668 ▲004391

1. $2A = \left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\pi^2}{32}$.
2.
3.
4. $B + C = \frac{D}{2}, B - C = -D$.
5. $C = -\frac{3\pi^2}{32}, D = -\frac{\pi^2}{8}$.

Solución del ejercicio 4669 ▲004392

1. $A = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.
2. $4ab\arctan\frac{b}{a}$.

Solución del ejercicio 4670 ▲004393

Fórmula de Green : $\mathscr{A} = \frac{3\pi a^2}{8}$.

Solución del ejercicio 4671 ▲004394

Fórmula de Green. $A = \frac{4}{3}(p_2 - p_1)(q_2 - q_1)$.

Solución del ejercicio 4672 ▲004395

Fórmula de Green. $A = \pi a^2$.

Solución del ejercicio 4673 ▲004396

1. $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.
2. $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.
3. $V = 2\pi^2 Rr^2$.

Solución del ejercicio 4673 ▲004396

1. $V = \frac{4\pi}{3}(1 - \sqrt{1-a^2}^3)$.
2. $V = \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.
3. $V = 2\pi^2 Rr^2$.

Solución del ejercicio 4674 ▲004397

$V = \frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

Solución del ejercicio 4675 ▲004398

$\frac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2})$.

Solución del ejercicio 4676 ▲004399

hauteur $= \alpha R$, con $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha \approx 0.347$.

Solución del ejercicio 4679 ▲004402

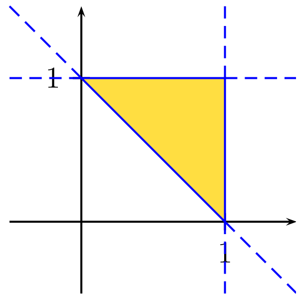
Esto es obviamente cierto para $\psi \equiv 1$ y también para $\psi(t) = t$. De manera general, si $\psi(t) = t^k$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces para $n \geqslant k$, $(x_1 + \cdots + x_n)^k$ es una suma de n^k monomios entre los que hay $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ monomios donde cada variable aparece con el exponente 0 o 1. Se tiene entonces :

$$\Lambda_n(\psi) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\Big(\int_0^1 xf(x)\,dx\Big)^k\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big)^{n-k} + \Big(1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\Big)O(1),$$

lo que prueba que $\Lambda_n(\psi) \to \psi\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)$ (cuando $n \to \infty$) para $\psi(t) = t^k$. Por linealidad, esta relación es aún válida para todo ψ polinomio. Se concluye por ψ continua cualquiera con el teorema de Stone-Weierstrass.

Solución del ejercicio 4680 ▲005908

1. Representar el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ x+y \geqslant 1\}$.



$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right) dx \text{ (o también } \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x+y)dx\right) dy) \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

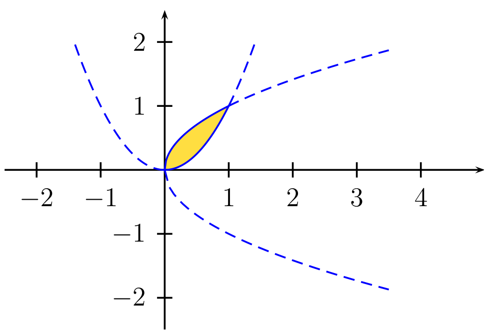
$$\boxed{\iint_D (x+y)\,dxdy = \frac{2}{3}.}$$

2. Si se escribe para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = |x+y|$ así como para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ o aún f toma los mismos valores en dos puntos simétricos con respecto a O. Como el punto O es centro de simetría de $[-1,1]^2$, se deduce que

$$\begin{aligned} I &= \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0} f(x,y)\,dxdy + \iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\leqslant 0} f(x,y)\,dxdy \\ &= 2\iint_{-1\leqslant x,y\leqslant 1,\ x+y\geqslant 0} (x+y)\,dxdy = 2\int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x+y)\,dy\right) dx \\ &= 2\int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=1} dx = 2\int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 2\right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2} |x+y|\,dxdy = \frac{8}{3}.}$$

3. Representar el dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}$.



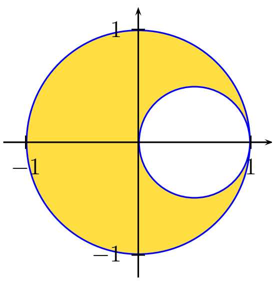
$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right)x\,dx=\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}.$$

4. Pasando a polares, se obtiene

$$\begin{aligned}I&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\iint_{0\leqslant r\leqslant 1,\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{1+r^2}\,rdrd\theta\\&=\left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr\right)\times\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\text{ (integrales independientes)}\\&=2\pi\times\left[\tfrac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1=\pi\ln 2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\pi\ln 2.}$$

5. Se define $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$. Porque $x\leqslant x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}$, D es la intersección del interior del disco de centro O y de radio 1, borde incluido, y el exterior del disco de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y de radio $\frac{1}{2}$, borde incluido. Sea M un punto del plano. Se denota (r,θ) un par de coordenadas polares de M tal que $r\geqslant 0$ y $\theta\in[0,2\pi]$.



$$M\in D\Leftrightarrow r\cos\theta\leqslant r^2\leqslant 1\Leftrightarrow r=0\ \text{ o }\ (0<r\leqslant 1\ \text{ y }\ r\geqslant\cos\theta).$$

pasando a polares, se obtiene

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{\substack{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy\\&=2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^1\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta\right)\\&=2\left(\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_{\cos\theta}^1 d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}dr\right]_0^1 d\theta\right)\\&=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta}-\frac{1}{2}\right)d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2+\tan^2\theta}d(\tan\theta)\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}\,dt=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

6.
$$\begin{aligned} I &= \iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 zdz\right)ydy\right)xdx = \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{1}{2}(1-y^2)ydy\right)xdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_x^1 (y-y^3)dy\right)xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_x^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)xdx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 (x^5-2x^3+x)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyzdxdydz = \frac{1}{48}.}$$

7. Sumando por rebanadas, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz = \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1-\sqrt{z}} dxdy\right)zdz \\ &= \int_0^1\left(\iint_{\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1} (1-\sqrt{z})^4 dudv\right)zdz \text{ (usando } x=(1-\sqrt{z})^2u \text{ y } y=(1-\sqrt{z})^2v) \\ &= \mathscr{A}(D)\times\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz \text{ donde } D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant 1\}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1\left(\int_0^{(1-\sqrt{u})^2} dv\right)du = \int_0^1(1-2\sqrt{u}+u)du = 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

y

$$\int_0^1 z(1-\sqrt{z})^4dz = \int_0^1 (z-4z^{3/2}+6z^2-4z^{5/2}+z^3)\,dz = \frac{1}{2}-\frac{8}{5}+2-\frac{8}{7}+\frac{1}{4} = \frac{1}{140}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\iiint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant 1} zdxdydz = \frac{1}{840}.}$$

Solución del ejercicio 4681 ▲005910

El área del dominio considerado $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 2p_1x\leqslant y^2\leqslant 2p_2x \text{ y } 2q_2y\leqslant x^2\leqslant 2q_2x\}$ es

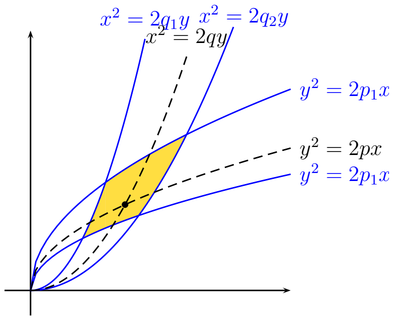
$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy.$$

Para $(x,y)\in D^2$, se escribe $p=\frac{y^2}{2x}$ y $q=\frac{x^2}{2y}$ o aún se considera la aplicación $\begin{array}{rcl}\varphi: D & \to & [p_1,p_2]\times[q_1,q_2] \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{y^2}{2x},\frac{x^2}{2y}\right)\end{array}$ y hay que verificar que φ es un C^1-difeomorfismo.

• Para cada $(x,y)\in D^2$, se $2p_1x\leqslant y^2\leqslant 2p_2x$ y $2q_1y\leqslant x^2\leqslant 2q_2y$ o aún $p_1\leqslant\frac{y^2}{2x}\leqslant p_2$ y $q_1\leqslant\frac{x^2}{2y}\leqslant q_2$. Entonces φ es una aplicación.

• Sea $(p,q)\in[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Para $(x,y)\in(]0,+\infty[)^2$,

$$\begin{cases}\frac{y^2}{2x}=p\\ \frac{x^2}{2y}=q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{x^2}{2q}\\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x}=p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt[3]{8pq^2}\\ y=\sqrt[3]{8p^2q}\end{cases}$$



Entonces, la ecuación $\varphi(x,y)=(p,q)$ tiene exactamente una solución (x_0,y_0) en $]0,+\infty[^2$. Además, ya que $\frac{y_0^2}{2x_0}=p\in[p_1,p_2]$ y $\frac{x_0^2}{2y_0}=q\in[q_1,q_2]$, se tiene $2p_1x_0\leqslant y_0^2\leqslant 2p_2x_0$ y $2q_1y_0\leqslant x_0^2\leqslant 2q_2y_0$ y entonces $(x_0,y_0)\in D^2$. Entonces φ es una biyección.
• φ es de clase C^1 sobre D y para $(x,y)\in D^2$,

$$\frac{D(p,q)}{D(x,y)}=J(\varphi)(x,y)=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x}\\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}\neq 0.$$

Así, φ es una biyección de D sobre $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$, de clase C^1 sobre D y su jacobiano no se anula en D. Entonces se sabe que φ es un C^1-difeomorfismo de D sobre $[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]$. Se define entonces $(p,q)=\varphi(x,y)$ en $\iint_D dxdy$. Se obtiene

$$\mathscr{A}=\iint_D dxdy=\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]}\left|\frac{D(x,y)}{D(p,q)}\right|dpdq=\frac{4}{3}\iint_{[p_1,p_2]\times[q_1,q_2]}dpdq=\frac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).$$

$$\boxed{\mathscr{A}=\tfrac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1).}$$

Solución del ejercicio 4682 ▲005911

Para $n\in\mathbb{N}^*$ y $R\geqslant 0$, se escribe $B_n(R)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant R^2\}$ y denotar $V_n(R)$ el volumen de $B_n(R)$. Por definición,

$$V_n(R)=\int\cdots\int_{x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\cdots dx_n.$$

poniendo $x_1=Ry_1,\dots,x_n=Ry_n$, se tiene $\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}=R^n$ (cuando $R>0$) luego

$$V_n(R)=\int\cdots\int_{x_1^2+\dots+x_n^2\leqslant R^2}dx_1\dots dx_n=R^n\int\cdots\int_{y_1^2+\dots+y_n^2\leqslant 1}dy_1\dots dy_n=R^nV_n(1),$$

lo cual es aún cierto cuando $R=0$. Para $n\geqslant 2$, se puede entonces escribir

$$\begin{aligned}V_n(1)&=\int_{-1}^{1}\left(\int\cdots\int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2\leqslant 1-x_n^2}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)\,dx_n\\&=\int_{-1}^{1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}(1)\,dx_n=I_nV_{n-1}(1)\end{aligned}$$

donde $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx$. Para calcular I_n, se establece $x=\cos\theta$. Se obtiene

$$I_n=\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2\theta)^{(n-1)/2}(-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^n\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n\theta\,d\theta=2W_n\text{ (integrales de WALLIS).}$$

Finalmente,

$$V_1(1)=2\text{ y }\forall n\geqslant 2,\ V_n(1)=2W_nV_{n-1}(1).$$

Se deduce que para $n \geqslant 2$,

$$V_n(1) = (2W_n)(2W_{n-1})\cdots(2W_2)V_1(1) = 2^n \prod_{k=2}^{n} W_k = 2^n \prod_{k=1}^{n} W_k,$$

lo que es aún cierto para $n = 1$. Ahora, es bien sabido que la sucesión $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante y más precisamente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Entonces, para $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{2p} W_k = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k-1}W_{2k}) = 2^{2p}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!},$$

e igualmente

$$V_{2p+1}(1) = 2^{2p+1}\prod_{k=2}^{2p+1} W_k = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}(W_{2k}W_{2k+1}) = 2^{2p+1}\prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{2(2k+1)}$$
$$= \frac{\pi^p 2^{p+1}}{3\times 5\times\cdots\times(2p+1)} = \frac{\pi^p 2^{p+1}(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)!} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p!}{(2p+1)!}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall R > 0, V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!} \text{ y } V_{2p-1}(R) = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p! R^{2p+1}}{(2p+1)!}.}$$

En particular, $V_1(R) = 2R$, $V_2(R) = \pi R^2$ y $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Solución del ejercicio 4683 ▲005912

1a solución. $V = \iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz$. Por lo tanto $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = \left(x+\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. Se define así $u = x + \frac{z}{2}$, $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$ y $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Se deduce que $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 2$ ya que

$$V = \iiint_{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}z^2+xz\leqslant 1} dxdydz = \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw = 2\times\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

2a solución. Se supone que se sabe que el volumen acotado por el elipsoide de ecuación $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ es $\frac{4}{3}\pi abc$. La matriz de la forma cuadrática $(x,y,z) \mapsto x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz$ en la base canónica ortonormada de $\mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Se sabe que esta matriz tiene 3 valores propios estrictamente positivos $\lambda = \frac{1}{a^2}$, $\mu = \frac{1}{b^2}$ y $\nu = \frac{1}{c^2}$, luego que existe una base ortonormada en la que el elipsoide tiene por ecuación $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$. El volumen del elipsoide es entonces

$$V=\tfrac{4}{3}\pi abc=\tfrac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}}=\tfrac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}=\tfrac{4}{3}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\tfrac{8\pi}{3}$$

$$\boxed{V=\tfrac{8\pi}{3}.}$$

Solución del ejercicio 4684 ▲005914

Se define $x=ua$ y $y=vb$ de manera que $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=ab$. Se obtiene

$$I=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(x^2-y^2)\,dxdy=ab\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}(a^2u^2-b^2v^2)\,dudv,$$

luego,

$$\begin{aligned}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}u^2\,dudv=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}v^2\,dudv&=\frac{1}{2}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}(u^2+v^2)\,dudv=\frac{1}{2}\int_0^{r=1}\int_0^{2\pi}r^2\times rdrd\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

y entonces

$$\boxed{I=\frac{\pi ab(a^2-b^2)}{4}.}$$

Solución del ejercicio 4685 ▲004313

$=\displaystyle\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-\frac{5t}{6}+o(t)\right)dt\to\ln 2.$

Solución del ejercicio 4686 ▲004314

Solución del ejercicio 4687 ▲004315

Fórmula de la media en $[3,x]$ y $[x,x+x^2]\Rightarrow\lim=0$.

Solución del ejercicio 4688 ▲004316

$\ln 2$.

Solución del ejercicio 4689 ▲004317

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}=\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^N}{(1+t^3)^N}\right)\frac{dt}{2+t^3}\to\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3}=\frac{\pi 2^{5/3}}{3\sqrt{3}}$ cuando $N\to\infty$.

Solución del ejercicio 4690 ▲004318

1.
2. $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(t-x)}{t}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt - \operatorname{sen} x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \to 0$, cuando $x \to +\infty$.

Solución del ejercicio 4691 ▲004319

$\frac{\pi}{2} f(0)$.

Solución del ejercicio 4692 ▲004320

$t = ux$, luego integración por partes $\Rightarrow\sim \frac{1}{x^2}$.

Solución del ejercicio 4693 ▲004321

$f'(x) = \frac{2\ln x}{a(1+x^2)} \Rightarrow f(1+h) = \frac{1}{2a}(h^2-h^3)+o(h^3)$.

Solución del ejercicio 4694 ▲004322

1.
2. Sea $\varepsilon > 0$: Para x bastante pequeño, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leqslant \varepsilon x$, pues $\ln f$ es acotado en $[a,b]$.
   Entonces $\left|\int_a^b f(t)^x dt - 1 - x\int_a^b \ln(f(t))\,dt\right| \leqslant \varepsilon x$, y $\left|\ln\left(\int_a^b f(t)^x dt\right) - x\int_a^b \ln(f(t))\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon x$.

Solución del ejercicio 4697 ▲004325

1. Cortar en $\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$
2. $= \left[\frac{t\ln(1+t^n)}{n}\right]_{t=0}^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \sim \frac{\ln 2}{n}$.
3. $\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} = \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n}$.

Solución del ejercicio 4698 ▲004326

$1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solución del ejercicio 4699 ▲004327

$1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{2}-2+2\ln(2\sqrt{2}-2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solución del ejercicio 4700 ▲004328

$u = t^n \Rightarrow\sim \frac{1}{n}\int_1^e \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$.

Solución del ejercicio 4702 ▲004330

$f(0)$.

Solución del ejercicio 4703 ▲004331

Sea $f_n(x) = (1-x/n)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n$ y $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Entonces $f_n(x)$ converge simplemente a e^{-x} y hay convergencia dominada.

Solución del ejercicio 4704 ▲004332

$f(x) = \cos x$.

Solución del ejercicio 4705 ▲004333

1. $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
2. $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{1} + (-1)^k \frac{\pi}{4}$,
   $I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{2} - (-1)^k \ln\sqrt{2}$.
3. $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$.

Solución del ejercicio 4706 ▲004334

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4707 ▲004335

1.
2. $g(c)$.

Solución del ejercicio 4708 ▲004336

$\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,dt \Rightarrow \Phi'\Phi^2 \to \ell^2 \Rightarrow \Phi^3 \sim 3\ell^2 x \Rightarrow f = \sqrt{\Phi'} \sim \sqrt[3]{\frac{\ell}{3x}}$.

1.
2.
3.
4. Para $\alpha = 0$ se tiene $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, cantidad acotada porque la integral converge en $+\infty$. Para $\alpha = 1$ se tiene $h(x) = \cos x \displaystyle\int_0^x \frac{\cos t \operatorname{sen} t}{t}\,dt + \operatorname{sen} x \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$, cantidad no acotada porque la segunda integral diverge en $+\infty$. Para $0 < \alpha < 1$, desarrollar el $\cos(x-t)$, luego linealizar los productos obtenidos. Se obtienen cuatro integrales convergentes, por lo tanto h es acotada.

Solución del ejercicio 4711 ▲004339

1. $\frac{\ln(1+a)}{a}$.
2. $= -\varphi'(a) = \frac{\ln(1+a)}{a^2} - \frac{1}{a(1+a)}$.

Solución del ejercicio 4714 ▲004342

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $f(x) = \pi \ln(x+1)$.

Solución del ejercicio 4715 ▲004343

1.
2. $I'(x) = \frac{\pi}{x+1}$, $\quad I(x) = \pi \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 4716 ▲004344

1. $g'(x) = \int_0^1 (-2x)\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2\mathrm{e}^{-x^2}\sqrt{f(x)} = -f'(x)$.
2.
3.

Solución del ejercicio 4717 ▲004345

$u = \frac{a}{t} \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\frac{dI}{da} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2a}$.

Solución del ejercicio 4718 ▲004346

1.
2. $I'(x) = -2xI(x)$.
3. $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

Solución del ejercicio 4722 ▲004350

1. $g(x,y) = \int_1^y f(ux)\,du$.
2. $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x}\left(yf(xy) - f(x) - \int_1^y f(ux)\,du\right) \to \frac{y^2-1}{2}f'(0)$, cuando $x \to 0$.

Solución del ejercicio 4723 ▲004351

1. -2 de $-\infty$ a $-\frac{\pi}{2}$, $\quad 2\operatorname{sen} x$ de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, $\quad 2$ de $\frac{\pi}{2}$ a $+\infty$.
2.
3.
4.
5.

Solución del ejercicio 4724 ▲004352

$2.40 < x < 2.41$.

Solución del ejercicio 4725 ▲004353

1.
2. $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.
3. comparación serie-integral $\Rightarrow I(\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ cuando $\alpha \to +\infty$.

Solución del ejercicio 4726 ▲004354

$\ln\Gamma$ es convexo, encuadrar $\ln\Gamma(x)$ por las cuerdas que pasan $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

Solución del ejercicio 4728 ▲004356

1. $f'(a) = -\frac{a}{2}f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-a^2/4)$.
2. $g'(a) = f(a) \Rightarrow g(a) \to \frac{\pi}{2}$ cuando $a \to +\infty$.

Solución del ejercicio 4730 ▲004358

1. IPP.
2. Sea $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$. Se tiene $\varphi(a) = F(0) - a\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}F(t)\,dt$. Sea $\varepsilon > 0$ y A tal que $x > A \Rightarrow |F(x)| \leqslant \varepsilon$. Se a :

$$\left|a\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}F(t)\,dt\right| \leqslant a\sup|F(t)|, t \in [0,A] + \varepsilon \mathrm{e}^{-aA} \leqslant 2\varepsilon$$

   para a suficientemente pequeño.

Solución del ejercicio 4731 ▲004359

$v_n \to 1$ (cuando $n \to \infty$) por convergencia dominada. $v_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{-1/n}}{1+u}\,du \sim \frac{\ln 2}{n}$, entonces la serie diverge.

Solución del ejercicio 4732 ▲004360

$u_n \to 1$ (cuando $n \to \infty$) por convergencia dominada.
$u_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+x^{n-2}}{1+x^n} - 1\right)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1-1/n}}{1+u}(u^{-2/n} - 1)\,du$.
Se tiene $0 \leqslant u^{-2/n} - 1 = \exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right) - 1 \leqslant -\frac{2\ln(u)}{n}\exp\left(-\frac{2\ln(u)}{n}\right)$, de donde

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{u^{1-3/n}(-\ln u)}{1+u}\,du = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solución del ejercicio 4733 ▲004361

$I(\alpha)$ se define para todo $\alpha > 1$.

$I(2) = (x = \mathrm{e}^u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{2u}}{(1+\mathrm{e}^{2u})^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^2}\,du = 0$ (paridad).

$$I(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{-u}}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^3}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{-u(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u})}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^3}\,du = \Big[\frac{u}{2(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^2}\Big]_{u=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{2(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^2}$$
$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2u}\,du}{2(1+\mathrm{e}^{2u})^2} = \Big[\frac{1}{4(1+\mathrm{e}^{2u})}\Big]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}.$$

$I(\alpha) \to 0$ (cuando $\alpha \to +\infty$) por convergencia dominada.

Solución del ejercicio 4734 ▲004362

1. $D_f =]0,1[$. f es convexa en $]0,1[$ por integración de la desigualdad de convexidad para $x \mapsto t^{-x}$ y $f(x) \to +\infty$ (cuando $x \to 0$ o $x \to 1$) por convergencia monótona por lo tanto f decrece luego crece.
2.
3. En 0 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{x+1}(1+t)}$, por lo tanto $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \frac{1}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} \sim \frac{1}{x}$.

   En 1 : $\frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{t^x} - \frac{t^{1-x}}{1+t}$, por lo tanto $f(x) = \frac{1}{1-x} - \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{1+t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \sim \frac{1}{1-x}$.
4. $f(1/n) \underset{(t=u^n)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{nu^{n-1}\,du}{u(1+u^n)} \underset{(v=1/u)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{n\,dv}{1+v^n} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/n)}$ (fórmula bien conocida...)

Solución del ejercicio 4735 ▲004363

Si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces $u_n = 0$, para todo n.

Sinon, $u_n = \mathrm{Im}\Big(\int_0^1 \sum_{k=1}^n t^{n+k-1}\mathrm{e}^{ik\alpha}\,dt\Big) = \mathrm{Im}\Big(\int_0^1 \frac{t^n\mathrm{e}^{i\alpha} - t^{2n}\mathrm{e}^{i(n+1)\alpha}}{1-t\mathrm{e}^{i\alpha}}\,dt\Big) \to 0$ (cuando $n \to \infty$) por convergencia dominada.

Solución del ejercicio 4736 ▲004364

$$I_a = \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dt\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{-|x+t|}}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,dx\,dt.$$

Se tiene $\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-|x+t|}\,dx = \begin{cases} 2-2\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{ch}\,t & \text{si } |t| < a \\ 2\mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{sh}\,a & \text{si } |t| \geqslant a, \end{cases}$

por lo tanto $I_a \leqslant \int_0^a \frac{2\,dt}{(1+t)\sqrt{t}} + \int_a^{+\infty} \frac{4\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sh}\,a}{(1+a)\sqrt{a}}\,dt = 4\arctan(\sqrt{a}) + \frac{4\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{sh}\,a}{(1+a)\sqrt{a}} \leqslant$ cte.

Solución del ejercicio 4737 ▲004365

1. $s(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{sen}(t)\mathrm{e}^{-kxt}\,dt.$

Se tiene $|\operatorname{sen}(t)\mathrm{e}^{-kxt}| \leqslant t\mathrm{e}^{-kxt}$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-kxt}\,dt = \frac{1}{k^2}$, por lo tanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} |\operatorname{sen}(t)\mathrm{e}^{-kxt}|\,dt$ converge, lo que legitima la inversión integral-serie. Por lo tanto $\displaystyle s(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t)\mathrm{e}^{-kxt}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2x^2+1}$.

2. Sabiendo (?) que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, se obtiene :

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{x\operatorname{sen} t}{\mathrm{e}^{xt}-1} - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^u-1} - \frac{1}{u}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{x}\right)du \\
&= -x\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{\mathrm{e}^u-1}-\frac{1}{u}\right)}_{\to\frac{1}{2}\text{ si } u\to 0^+}\cos\left(\frac{u}{x}\right)\Bigg]_{u=0}^{+\infty} + x\int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{-\mathrm{e}^u}{(\mathrm{e}^u-1)^2}+\frac{1}{u^2}\right)}_{\to\frac{1}{12}\text{ si } u\to 0^+}\cos\left(\frac{u}{x}\right)du \\
&= x(\text{cantidad acotada}) \to 0 \text{ si } u \to 0^+.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4738 ▲004366

Función de x de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $]0,+\infty[$, límite decreciente $\pi/2$ en 0^+ y 0 en $+\infty$. Semi-tangente vertical en 0^+, Equivalente a $1/x$ en $+\infty$ (por IPP). Ecuación diferencial : $f(x) + f''(x) = 1/x$.

Solución del ejercicio 4739 ▲004367

1. $[0,+\infty[$.
2.
3. $\displaystyle f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2x}\,dt = (u = t\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.
4. $\displaystyle f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{x+u^2}\,du = \frac{-1}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2\mathrm{e}^{-u^2}}{1+u^2/x}\,du \sim \frac{-1}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{-\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.
5.
6.

Solución del ejercicio 4740 ▲004368

1.
2. Teorema de Fubini : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{+\infty}\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{(-\alpha+i\operatorname{sen}\theta)x})\,dx\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{\alpha\,d\theta}{\alpha^2+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (cortar en $\theta = \pi/2$ y escribir $u = \tan\theta$).

Solución del ejercicio 4741 ▲004369

$\displaystyle I'(x) = \int_0^{+\infty}(\cos t - \mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-xt}\,dt = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x+1}$, por lo tanto $\displaystyle I(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right) + \text{cte}$ y $I(x) \to 0$ (para $x \to +\infty$) de donde cte $= 0$. Entonces $I(x) \to 0$, para $x \to 0^+$.

Solución del ejercicio 4743 ▲004371

$D_f =]0,+\infty[$. Hay un dominio local, por lo tanto f es continua.

Igualmente, para $x>0$ se tiene $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(t)t^{x+1}}{(t^{x+1}+t+1)^2}\,dt$. Cortando la integral en 1 y poniendo $u=1/t$ en la integral en $[1,+\infty[$ se tiene : $f'(x) = \int_0^1 \ln(t)t^{x+1}\Big(\frac{1}{(t+t^{x+1}+t^{x+2})^2} - \frac{1}{(t^{x+1}+t+1)^2}\Big)\,dt < 0$, pues $\ln(t)<0$ y $t^{x+2}<1$ si $t\in]0,1[$.

Entonces f es estrictamente decreciente en $]0,+\infty[$. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{x+1}+t} = \int_1^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{t^{(k+1)x+1}}\,dt =$ (dominación del resto con la CSA) $= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)x} = \frac{\ln 2}{x}$. $\left|f(x) - \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}+t}\right| = \int_0^1 \frac{dt}{t^{x+1}+t+1} + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{(t^{x+1}+t)(t^{x+1}+t+1)} \leqslant \int_0^1\frac{dt}{t+1} + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)} = 2\ln 2$, por lo tanto $f(x) = \frac{\ln 2}{x} + O_{x\to 0^+}(1)$.

Para $x\to+\infty$, se tiene con el TCM por separado en $[0,1]$ y en $[1,+\infty[$: cuando $x\to+\infty$, $f(x)\to \int_0^1\frac{dt}{t+1} = \ln 2$.

Solución del ejercicio 4745 ▲004372

Para $\lambda\neq 0$:

$$I_n = \left[\frac{\exp(\lambda n\,\mathrm{sen}^2(x))}{2\lambda n\cos(x)}\right]_{x=0}^{\alpha} - \int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{sen}(x)}{2\lambda n\cos^2(x)}\exp(\lambda n\,\mathrm{sen}^2(x))\,dx = \frac{\exp(\lambda n\,\mathrm{sen}^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)} - \frac{1}{2\lambda n} - \frac{J_n}{2\lambda n},$$

con $0\leqslant J_n\leqslant \frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$. Así $I_n \sim \frac{\exp(\lambda n\,\mathrm{sen}^2(\alpha))}{2\lambda n\cos(\alpha)}$ si $\lambda>0$ y $I_n\sim -\frac{1}{2\lambda n}$ si $\lambda<0$.

Solución del ejercicio 4745 ▲004373

1. Para $0\leqslant t\leqslant 1$ se tiene $t(1-t)(n-1)!\leqslant t(1-t)\cdots(n-t)\leqslant n!$, de donde $\frac{1}{6n}\leqslant |a_n|\leqslant 1$ y $R=1$.
2. $(-1)^n a_n = \int_0^1 t(1-t)(1-t/2)\cdots(1-t/n)\,dt$. Para $0\leqslant x\leqslant\frac12$ se tiene $x\leqslant -\ln(1-x)\leqslant x+x^2$ (estudio de función) por lo tanto para $k\geqslant 2$ y $0\leqslant t\leqslant 1$: $\mathrm{e}^{-t/k-t^2/k^2}\leqslant 1-t/k\leqslant \mathrm{e}^{-t/k}$, de donde :

$$b_n = \int_0^1 t(1-t)\mathrm{e}^{-t(H_n-1)-t^2K_n}\,dt \leqslant (-1)^n a_n \leqslant \int_0^1 t\mathrm{e}^{-tH_n}\,dt = c_n$$

con $H_n = 1+1/2+\cdots+1/n$ y $K_n = 1/2^2+\cdots+1/n^2$.

Equivalente del mayorante :

$$c_n = \frac{1-(1+H_n)\mathrm{e}^{-H_n}}{H_n^2} \sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Equivalente de minorando :

$$b_n \geqslant \int_0^1 t(1-t)(1-t^2K_n)\mathrm{e}^{-t(H_n-1)}\,dt = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t(H_n-1)}\,dt - \int_0^1 t^2(1+t(1-t)K_n)\mathrm{e}^{-t(H_n-1)}\,dt$$
$$\geqslant \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t(H_n-1)}\,dt - (1+\tfrac14 K_n)\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t(H_n-1)}\,dt \geqslant \frac{1-H_n\mathrm{e}^{1-H_n}}{(H_n-1)^2} - (1+\tfrac14 K_n)\frac{2-(H_n^2+1)\mathrm{e}^{1-H_n}}{(H_n-1)^3}$$
$$\sim \frac{1}{H_n^2}.$$

Finalmente, $a_n \sim \frac{(-1)^n}{H_n^2}\sim\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$.

Solución del ejercicio 4746 ▲004374

1. $\sum u_n(t)$ converge para $|t| < 1$.
2. $P_n(t) = t^{n+1}\operatorname{sen}(nx) - t^n \operatorname{sen}((n+1)x) + \operatorname{sen}(x)$, $Q(t) = t^2 - 2t\cos(x) + 1 = (t-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x \geqslant \operatorname{sen}^2 x$.
3. Para $|t| < 1$ se tiene $S_n(t) \to \frac{\operatorname{sen} t}{Q(t)}$ cuando $n \to \infty$ y hay convergencia dominada dado la minorización de Q, entonces la integral sigue : $\int_0^1 S_n(t)\,dt \to \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x\,dt}{t^2 - 2t\cos x + 1} = (t - \cos x = u \operatorname{sen} x) = \int_{-\cot x}^{\tan(x/2)} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi - x}{2}$.
4. $\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = \int_0^1 u_n(t)\,dt$, de donde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.

Solución del ejercicio 4747 ▲004375

1.
2. $\operatorname{sen}^2(nt) = \frac{1-\cos(2nt)}{2}$, así solo basta estudiar $I_n = \int_0^{n\pi} \cos(2nt) f(t)\,dt$.

   Pongamos $I_{n,p} = \int_0^{\min(n,p)\pi} \cos(2nt) f(t)\,dt$: on a $|I_n - I_{n,p}| \leqslant \int_{p\pi}^{+\infty} |f(t)|\,dt$, cantidad independiente de n y tendiendo hacia 0, cuando $p \to \infty$ por lo que se aplica el teorema de inversión de los límites : $\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} I_{n,p} = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_{n,p} = 0$. Se deduce que $u_n \to \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4748 ▲004376

1. $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$ y $f_n(1) = 1$, así cuando $n \to \infty$, $f_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
2. (a) No, la continuidad no se conserva.
   (b) Sí, hay un evidente decrecimiento.
3. Cambio de variable $u = \left(\frac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \frac{2}{n(n-1)}\int_{1/2^n}^1 (2u^{1/n} - 1)^{2/(n-1)} u^{1/n}\,du$ y la integral tiende a 1, cuando $n \to \infty$ por convergencia dominada.

Solución del ejercicio 4749 ▲004377

Hay convergencia si y solo si $x > -1$. $f'(x) = \int_0^1 (1-t)t^x\,dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, por lo tanto $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + C$ y $f(x) \to 0$ (cuando $x \to +\infty$) de donde $C = 0$.

Solución del ejercicio 4750 ▲004378

1. $]1,+\infty[$. 2.

3. $I'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sh} x e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right)$. De donde $I(a) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) +$ cte y $I(a) \to 0$, cuando $a \to +\infty$, entonces la constante es nula.

Solución del ejercicio 4751 ▲004379

1. Integrar por partes.
2. Integrar dos veces por partes.
3. Para $0 < u < v$: $\displaystyle\int_u^v e^{-it^2/2}\,dt = \left[\frac{e^{-it^2/2}}{-it}\right]_{t=u}^{v} - \int_u^v \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt \to \frac{e^{-iu^2/2}}{iu} - \int_u^{+\infty} \frac{e^{-it^2/2}}{it^2}\,dt$, cuando $v \to +\infty$. Así $\displaystyle\int_u^{+\infty} e^{-it^2/2}\,dt$ converge y lo mismo para $\displaystyle\int_{-\infty}^{-u} e^{-it^2/2}\,dt$.
4. Se define $f(t) = f(0) + t\varphi(t)$, con φ de clase $\mathscr{C}^1$. Se tiene :

$$g(x)\sqrt{x} = f(0)\int_{a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\,du - \frac{1}{i\sqrt{x}}\left[e^{-iu^2/2}\varphi(u/\sqrt{x})\right]_{u=a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} + \frac{1}{ix}\int_{a\sqrt{x}}^{b\sqrt{x}} e^{-iu^2/2}\varphi'(u/\sqrt{x})\,du \to f(0)\cdot I,$$

cuando $x \to +\infty$.

Solución del ejercicio 4753 ▲005453

Para x real dado, la función $t \mapsto |t-x|f(t)$ es continua en $[a,b]$ y entonces $F(x)$ existe. Para $x \leqslant a$, $F(x) = \displaystyle\int_a^b (t-x)f(t)\,dt = -x\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b tf(t)\,dt$. F es, por lo tanto de clase C^1 sobre $]-\infty,a]$ en tanto que función afín y, para $x < a$, $F'(x) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (en particular $F'_g(a) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$).
Igualmente, para $x \geqslant b$, $F(x) = x\displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)\,dt$. F es, por lo tanto de clase C^1 sobre $[b,+\infty[$ en tanto que función afín y, para $x \geqslant b$, $F'(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (en particular $F'_d(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$).
En fin, si $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt + \int_x^b (t-x)f(t)\,dt = x(\int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt) - \int_a^x tf(t)\,dt + \int_x^b tf(t)\,dt.$$

F es, por lo tanto de clase C^1 sobre $[a,b]$ y, para $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F'(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)\,dt.$$

(Y, en particular, $F'_d(a) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F'_g(a)$ y $F'_g(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F'_d(b)$).
F es continua $]-\infty,a]$, $[a,b]$ y $[b,+\infty[$ y por lo tanto, en $\mathbb{R}$. F es de clase C^1 sobre $]-\infty,a]$, $[a,b]$ y $[b,+\infty[$. Además, $F'_g(a) = F'_d(a)$ y $F'_g(b) = F'_d(b)$. F es, por lo tanto de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4754 ▲005460

Para $t \in \mathbb{R}$, se escribe $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, admite primitivas en $\mathbb{R}$. Sea G una primitiva de g sobre $\mathbb{R}$.

Definición, derivabilidad, derivada. Porque g es continua en $\mathbb{R}$, F se define en $\mathbb{R}$ y para todo real x, $F(x) = G(2x) - G(x)$. G es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y entonces F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Paridad.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Usando $t = -u$ y entonces $dt = -du$, se obtiene, notando que g es par

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt = \int_{x}^{2x} g(-u).-du = -\int_{x}^{2x} g(u)\,du = -F(x).$$

F es, por lo tanto, impar.

Variaciones.

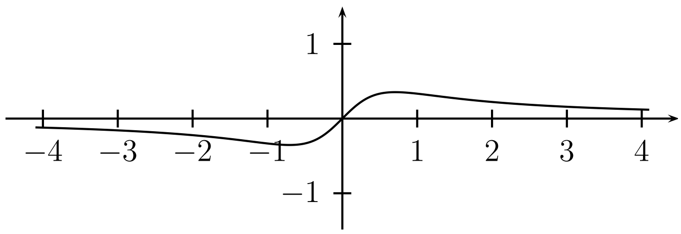
Para x real,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(F'(x)) &= \operatorname{sgn}\Big(\frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\Big) = \operatorname{sgn}(2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4-4x^2+1})\\ &= \operatorname{sgn}(4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1)) \text{ (por crecimiento de } t \mapsto t^2 \text{ sobre } \mathbb{R}^+)\\ &= \operatorname{sgn}(-12x^4+3) = \operatorname{sgn}(1-4x^4) = \operatorname{sgn}(1-2x^2).\end{aligned}$$

F es, por lo tanto estrictamente creciente en $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ y estrictamente decreciente en $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ y en $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

Estudio en $+\infty$. Para $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4}}\,dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Como $\frac{1}{x}$ tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$, el teorema de los gendarmes permite afirmar que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Gráfico.



Solución del ejercicio 4755 ▲005464

1. Si $x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ y $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ es continua en $]1, +\infty[$. Así, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe. Además,

$$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_x^{x^2} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Pero,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2.$$

Entonces, $\forall x > 1,\ x\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2\ln 2$. Se deduce que $\lim\limits_{x\to 1,\, x>1} F(x) = \ln 2$. Si $0 < x < 1$, se tiene $x^2 < x$, luego $[x^2, x] \subset]0,1[$. Entonces, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ es continua en $[x^2, x]$ y $F(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt$ existe. Para $t \in [x^2, x]$, se tiene $t\ln t < 0$ y $x^2 \leqslant t \leqslant x$. Así,

$$x\frac{1}{t\ln t} \leqslant t\frac{1}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant x^2\frac{1}{t\ln t},$$

entonces, $\int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln t}\, dt \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\, dt \leqslant \int_{x^2}^{x} x^2\frac{1}{t\ln t}\, dt$, y finalmente,

$$x^2\ln 2 = \int_{x}^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln t}\, dt \leqslant F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt \leqslant \int_{x}^{x^2} x\frac{1}{t\ln t}\, dt = x\ln 2.$$

Se obtiene entonces $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} F(x) = \ln 2$ y finalmente, $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \ln 2$. Se deduce que F se extiende por continuidad en 1 poniendo $F(1) = \ln 2$ (se denota todavía F la extensión obtenida).

2. Ya se ha visto que F se define (al menos) sobre $]0,+\infty[$ (F designando la extensión). Aún no parece posible dar sentido a $F(0)$ y aún menos a $F(x)$, cuando $x < 0$, porque entonces $[x, 0]$ es un intervalo de longitud no nula, contenido en $[x, x^2]$, en el que la función $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ ni siquiera está definida.

$$D_F =]0,+\infty[.$$

Para $t \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, se escribe $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ y denotar G una primitiva de g en este conjunto. Entonces, para x en $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. Se deduce que F es derivable (e incluso de clase C^1) sobre $]0,1[\cup]1,+\infty[$ y eso para x en $]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Ahora, cuando x tiende a 1, $\frac{x-1}{\ln x}$ tiende a 1. Así, F es continua en $]0,+\infty[$, de clase C^1 sobre $]0,1[\cup]1,+\infty[$ y F' tiene un límite real en 1. Un teorema de análisis clásico permite afirmar que F es de clase C^1 sobre D_F y, en particular, derivable en 1, con $F'(1) = 1$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

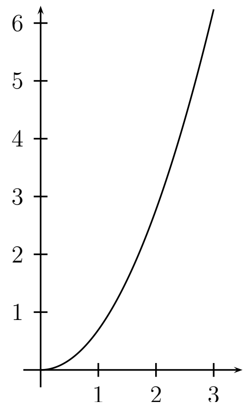
Si $x > 1$, $x-1 > 0$ y $\ln x > 0$ y si $0 < x < 1$, $x-1 < 0$ y $\ln x < 0$. En todos los casos ($0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$) $F'(x) > 0$. F es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$.

Sea ha visto que $\forall x > 1,\ F(x) > x\ln 2$ y entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Más precisamente, para $x > 1$,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt \geqslant \frac{x^2 - x}{x\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Como $\frac{x-1}{\ln x}$ tiende a $+\infty$, cuando x tiende a $+\infty$, se deduce que $\frac{F(x)}{x}$ tiende a $+\infty$, cuando x tiende a $+\infty$ y por lo tanto, que la curva representativa de F admite en $+\infty$ una rama parabólica de dirección (Oy).

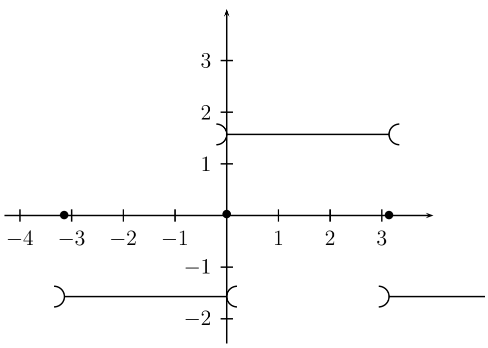
Para $x \in]0,1[$ y $t \in [x^2,x]$, se tiene $2\ln x = \ln(x^2) \leqslant \ln t \leqslant \ln x < 0$ y entonces $\frac{1}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{2\ln x}$, luego $(x-x^2)\frac{1}{\ln x} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant (x-x^2)\frac{1}{2\ln x}$ y finalmente, $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x-x^2}{-2\ln x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x-x^2}{-\ln x}$.
Se obtiene ya $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. Se puede extender F por continuidad en 0 poniendo $F(0) = 0$. Luego, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$ está comprendido entre $\frac{1-x}{-2\ln x}$ y $\frac{1-x}{-\ln x}$. Como estas dos expresiones tienden a 0, cuando x tiende a 0, se deduce que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tiende a 0, cuando x tiende a 0. F es, por lo tanto derivable en 0 y $F'(0) = 0$.



Solución del ejercicio 4756 ▲005472

Denotemos D el dominio de la definición de f. Si $x \in D$, $-x \in D$ y $f(-x) = -f(x)$. f es, por lo tanto, impar.
Si $x \in D$, $x+2\pi \in D$ y $f(x+2\pi) = f(x)$. f es, por lo tanto 2π-periódica.
Se estudia así f sobre $[0,\pi]$. Sean $x \in [0,\pi]$ y $t \in [-1,1]$. $t^2 - 2t\cos x + 1 = (t-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^x \geqslant 0$, con igualdad si y solo si $\operatorname{sen} x = 0$ y $t - \cos x = 0$.
Así, si $x \in]0,\pi[$, $\forall t \in]-1,1[$, $t^2 - 2t\cos x + 1 \neq 0$. Se deduce que la fracción racional $t \mapsto \frac{\operatorname{sen} t}{1-2t\cos x+t^2}$ es continua en $[-1,1]$, y así como $f(x)$ existe.
Si $x = 0$, $\forall t \in [-1,1[$, $\frac{\operatorname{sen} x}{t^2-2t\cos x+1} = \frac{0}{(t-1)^2} = 0$.
Se puede extender esta función por continuidad a 1 y considerar que $f(0) = \int_{-1}^{1} 0\,dt = 0$. Igualmente, se puede considerar que $f(\pi) = 0$. Así, f se define en $[0,\pi]$ y por paridad y 2π-periodicidad, sobre $\mathbb{R}$.
Sea $x \in]0,\pi[$. Calculemos $f(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{(t-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x}\,dt = \left[\arctan\frac{t-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]_{-1}^{1} \\
&= \arctan\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} + \arctan\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \arctan\frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)} + \arctan\frac{2\cos^2(x/2)}{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)} \\
&= \arctan(\tan(x/2)) + \arctan\left(\frac{1}{\tan(x/2)}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ (pues } \tan(x/2) > 0, \text{ para } x \in]0,\pi[).
\end{aligned}$$



Este cálculo completa el estudio de f. Este es el gráfico :

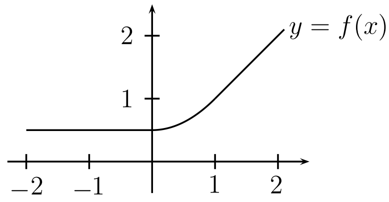
Solución del ejercicio 4757 ▲005473

Sea $x \in \mathbb{R}$. La función $t \mapsto \max(x,t) = \frac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ es continua en $[0,1]$ en virtud de teoremas generales. Así, $\int_0^1 \max(x,t)\,dt$ existe. Si $x \leqslant 0$, entonces $\forall t \in [0,1]$, $x \leqslant t$ y entonces $\max(x,t) = t$. Así, $f(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. Si $x \geqslant 1$, entonces $\forall t \in [0,1]$, $t \leqslant x$ y entonces $\max(x,t) = x$. Así, $f(x) = \int_0^1 x\,dt = x$.

Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \tfrac{1}{2}(1-x^2) = \tfrac{1}{2}(1+x^2).$$

En resumen, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$



f es ya continua en $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ y $]0,1[$. Además, $f(0^+) = \frac{1}{2} = f(0)$ y $f(1^-) = 1 = f(1)$. f es así continua a la derecha en 0 y continua a la izquierda 1 y por lo tanto, en $\mathbb{R}$. f es de clase C^1 sobre $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ y $]0,1[$. Además, $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x = 0$. f es, por lo tanto continua en $[0,1[$ de clase C^1 sobre $]0,1[$ y f' tiene un límite real cuando x tiende a 0. Según un teorema clásico de análisis, f es de clase C^1 sobre $[0,1[$ y, en particular, f es derivable a la derecha en 0 y ${f'}_d(0) = 0$. Como, por otro lado, f es derivable a la izquierda en 0 y que ${f'}_g(0) = 0 = {f'}_d(0)$, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$. El estudio en 1 demuestra que f es derivable en 1 y que $f'(1) = 1$.

Solución del ejercicio 4758 ▲005765

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Sean a y A dos reales tales que $0 < a < A$. Se considera $F_n : [a,A]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x,t) \mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

   • Para cada x de $[a,A]$, la función $t \mapsto F_n(x,t)$ es continua a trozos e integrable sobre $[0,+\infty[$, pues $F_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$, con $2n > 1$.

   • La función F_n admite en $[a,A]\times[0,+\infty[$ una derivada parcial con respecto a su primera variable x definida por :

$$\forall (x,t) \in [a,A]\times[0,+\infty[,\quad \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t) = \frac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}.$$

   Además, – para cada $x \in [a,A]$, la función $t \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ es continua a trozos en $[0,+\infty[$,

   – para cada $t \in [0,+\infty[$, la función $x \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ es continua en $[a,A]$, – para cada $(x,t) \in [a,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}} \leqslant \frac{2nA}{(t^2+a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

   donde la función φ es continua a trozos e integrable sobre $[0,+\infty[$ porque es despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$.

   Por el teorema de derivación de las integrales a parámetros (teorema de LEIBNIZ), la función I_n es de clase C^1 sobre $[a,A]$ y su derivada se obtiene por derivación bajo el signo de suma. Siendo esto cierto para todo real a y A tales que $0 < a < A$, se ha demostrado que la función I_n es de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$ y que

$$\forall x > 0,\ I_n'(x) = -2nx\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt = -2nxI_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n'(x) = -2nxI_{n+1}(x).}$$

2. Para $x > 0$, se tiene $I_1(x) = \left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$. Luego, $I_2(x) = -\frac{1}{2x}I_1'(x) = \frac{\pi}{4x^3}$, luego $I_3(x) = -\frac{1}{4x}I_2'(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$ y entonces $I_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{3\pi}{16}.}$$

Solución del ejercicio 4759 ▲005766

1. (a) **Paridad de *F*.** Sea x un real del dominio de definición de F. Usando $t = \theta + \pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 + 2x\cos t + 1)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x\cos t + 1)\,dt \text{ (por } 2\pi\text{-periodicidad)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln((-x)^2 - 2(-x)\cos t + 1)\,dt = F(-x). \end{aligned}$$

Así, para todo real x, $F(x)$ existe si y solo si $F(-x)$ existe y demás $F(x) = F(-x)$.

$$\boxed{F \text{ es par.}}$$

Definición de *F*. Sea $x \in [0, +\infty[$. Para todo real $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = \left|x - e^{i\theta}\right|^2 \geqslant 0.$$

Además, $\left|x - e^{i\theta}\right| = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = x \Leftrightarrow x = 1$ y $\theta = 0$. Así,

• si $x \neq 1$, la función $\theta \mapsto x^2 - 2x\cos\theta + 1$ es continua en el segmento $[0, \pi]$ y por lo tanto, integrable en este segmento.

• si $x = 1$, para todo real $\theta \in [-\pi, \pi]$ se tiene $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 2 - 2\cos\theta = 4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$. La función $\theta \mapsto \ln\left(4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$ es continua en $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ y cuando θ tiende a 0

$$\ln\left(4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\ln 2 + 2\ln\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln\left|\frac{\theta}{2}\right| \sim 2\ln|\theta| = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\theta|}}\right).$$

Se deduce que la función $\theta \mapsto \ln\left(4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ y así como $F(1)$ existe.

Finalmente, F se define en $[0, +\infty[$ y por paridad

$$\boxed{F \text{ se define en } \mathbb{R}.}$$

Observación. Por paridad de funciones $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$, para todo real x, todavía se tiene $F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta$.

Continuidad de *F*. Sea $A > 1$. Sea $\begin{aligned}\Phi : [0,A]\times]0,\pi] &\to \mathbb{R} \\ (x,\theta) &\mapsto \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1).\end{aligned}$

• Para cada $x \in [0, A]$, la función $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$ es continua a trozos en $]0, \pi]$.

• Para cada $\theta \in]0, \pi]$, la función $x \mapsto \Phi(x, \theta)$ es continua a trozos en $[0, A]$.

• Para cada $(x, \theta) \in \mathbb{R}^+\times]0, \pi]$, ya que $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2$,

$$\begin{aligned} |\Phi(x,\theta)| &\leqslant \max\{\left|\ln(0^2 - 0\cos\theta + 1)\right|, \left|\ln(\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\theta + 1)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} \\ &= \max\{2\left|\ln(|\operatorname{sen}\theta|)\right|, \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|\} = \varphi(\theta). \end{aligned}$$

Sea ha visto que la función $f_1 : \ \theta \mapsto 2\left|\ln(|\operatorname{sen}\theta|)\right|$ es integrable en $]0, \pi]$ y por otro lado, la función $f_2 : \ \theta \left|\ln(A^2 - 2A\cos\theta + 1)\right|$ es integrable en $[0, \pi]$ y por lo tanto, en $]0, \pi]$ porque es continua en $[0,\pi]$. Porque $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$, se deduce que la función φ es continua a trozos e integrable sobre $]0,\pi]$.

De acuerdo con el teorema de continuidad de las integrales a parámetros, la función F es continua en $[0,A]$ y esto para todo $A > 1$. Así, la función F es continua en $\mathbb{R}^+$, luego por paridad,

$$\boxed{\text{la función } F \text{ es continua en } \mathbb{R}.}$$

Derivabilidad de F. Sean $A \in]0,1[$, luego $\Phi : \begin{array}{ll} [-A,A]\times[0,\pi] & \to \mathbb{R} \\ (x,\theta) & \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) \end{array}$.

• Para cada $x \in [-A,A]$, la función $\theta \mapsto \Phi(x,\theta)$ es continua en el segmento $[0,\pi]$ y por lo tanto, integrable en este segmento.

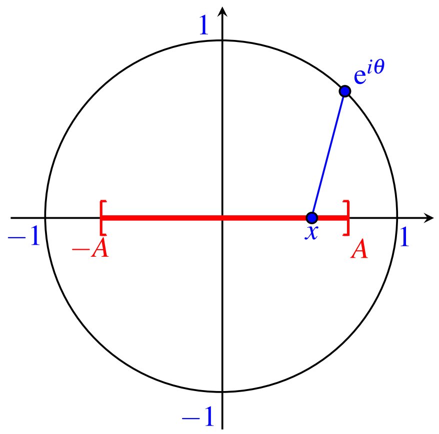
• La función Φ admite en $[-A,A]\times[0,\pi]$ una derivada parcial con respecto a su primera variable x definida por

$$\forall (x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi],\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta) = \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

Además, – para cada $x \in [-A,A]$, la función $\theta \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ es continua a trozos en $[0,\pi]$, – para cada $\theta \in [0,\pi]$, la función $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)$ es continua en $[-A,A]$, – para cada $(x,\theta) \in [-A,A]\times[0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\theta)\right| = \frac{2|x - \cos\theta|}{|x - e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{4}{|A-1|^2} = \varphi(\theta).$$

La última desigualdad escrita es clara geométricamente :



La distancia más corta de un punto del segmento $[-A,A]$ al círculo trigonométrico es la distancia de A a 1

Además, la función constante φ es integrable en el segmento $[0,\pi]$. Por el teorema de derivación de las integrales a parámetros, la función F es de clase C^1 sobre $[-A,A]$ y su derivada se obtiene por derivación bajo el signo de suma. Siendo esto cierto para todo $A \in]0,1[$, F es de clase C^1 sobre $]-1,1[$ y $\forall x \in]-1,1[$, $F'(x) = 4\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x - \cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,d\theta$.

El proceso es similar en $]-\infty,-1[$ y en $]1,+\infty[$ y finalmente F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ y

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x - \cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,d\theta.}$$

(b) **Cálculo de $F'(x)$.** Sea $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Se define $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Se tiene entonces $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$. Se obtiene :

$$F'(x) = 4\int_0^{\pi} \frac{x-\cos\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,d\theta = 8\int_0^{+\infty} \frac{x-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2-2x\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{dt}{1+t^2}$$
$$= 8\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)x-(1-t^2)}{((1+t^2)x^2-2x(1-t^2)+(1+t^2))(1+t^2)}\,dt$$
$$= 8\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Para todo real t,

$$\left(t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1) = \left(t-i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(t+i\frac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

Además, $\pm\frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x = 0$.

• $F'(0) = 4\displaystyle\int_0^{\pi}(-\cos\theta)\,d\theta = 0$.

• Si $x \neq 0$, los polos de la fracción racional $\dfrac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)}$ son simples y por paridad, la descomposición en elementos simples de esta fracción se escribe

$$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{a}{t-i\dfrac{x-1}{x+1}} - \frac{a}{t+i\dfrac{x-1}{x+1}} + \frac{b}{t-i} - \frac{b}{t+i},$$

con

$$a = \frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+(x-1)}{(x+1)^2\left(2i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)} = \frac{-(x+1)(x-1)^2+(x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2-(x-1)^2)}$$
$$= \frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)} = \frac{1}{4ix},$$

y

$$b = \frac{-(x+1)+(x-1)}{2i(-(x+1)^2+(x-1)^2)} = \frac{1}{4ix}.$$

Entonces

$$8\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{((x+1)^2t^2+(x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{2}{ix}\left(\frac{1}{t-i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{t+i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)$$
$$= \frac{2}{ix}\left(\frac{2i\frac{x-1}{x+1}}{t^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + \frac{2i}{t^2+1}\right)$$
$$= \frac{4}{x}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right)$$

entonces, denotando ε el signo de $\frac{x-1}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2-1}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$= \frac{4}{x}\left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\arctan\left(\frac{t}{\frac{x-1}{x+1}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{4}{x}(\varepsilon+1)\frac{\pi}{2}.$$

Así, si $x \in]-1,1[$, $F'(x) = 0$ y si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ \frac{4\pi}{x} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

(c) Sea $x > 1$.

$$\begin{aligned} F(x) - 4\pi\ln(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\ d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2)\ d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)\ d\theta = F\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0} F(y) = F(0) = 0$, por continuidad de F en 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln(x)) = 0.}$$

(d) • F es continua en $[-1,1]$, derivable en $]-1,1[$ de deriva nula en $]-1,1[$. La función F es constante en el intervalo $[-1,1]$. Así, para todo real $x \in [-1,1]$, $F(x) = F(0) = 0$.

• F es derivable en $]1,+\infty[$ y $\forall x > 1$, $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$. Entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x + C$, con $C = \lim\limits_{x\to+\infty}(F(x) - 4\pi\ln x) = 0$. Así $\forall x > 1$, $F(x) = 4\pi\ln x$.

• Si $x < -1$, $F(x) = F(-x) = 4\pi\ln(-x) = 4\pi\ln|x|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\ d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 4\pi\ln(|x|) & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}.}$$

2. (a) Sea $x \in]-1,1[$. Para $\theta \in [-\pi,\pi]$, se establece $f(\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$. Porque $\forall\theta \in [-\pi,\pi]$, $x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0$ (ver 1)), f es derivable en $[-\pi,\pi]$ y para $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{2x\operatorname{sen}\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}}{x - e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x - e^{-i\theta}}\right) = \frac{1}{i}\left(-\frac{1}{1 - xe^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right) \\ &= \frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{en\theta} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-in\theta}\right) \text{ (pues } |xe^{i\theta}| = |xe^{-i\theta}| = |x| < 1) \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(n\theta)x^n. \end{aligned}$$

Sea $\theta \in [-\pi,\pi]$. I denota el intervalo $[0,\theta]$ o $[\theta,0]$ dependiendo de que θ sea positivo o negativo. Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $t \in I$, se escribe $g_n(t) = 2\operatorname{sen}(nt)x^n$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y todo $t \in I$, se tiene $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$. Como $|x|^n$ es el término general de una serie numérica convergente, la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalmente y por lo tanto, uniformemente en el segmento I.

Del teorema de integración término a término en un segmento, se puede escribir

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \int_0^{\theta} f'(t)\ dt = 2\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n \int_0^{\theta} \operatorname{sen}(nt)\ dt \\ &= 2\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}x^n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \forall \theta \in [-\pi,\pi], \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n.}$$

Sea $x \in]-1,1[$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $\theta \in [-\pi,\pi]$, $\left|\frac{\cos(n\theta)}{n} x^n\right| \leqslant |x|^n$. Como antes, se puede integrar término a término y se tiene

$$F(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)\, d\theta = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta = 0.}$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}^*$.

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) - \ln(x^2))\, d\theta = -4\pi \ln|x| + F(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = -4\pi \ln|x| + F(x).}$$

Sea $x > 1$. Porque $\frac{1}{x} \in]0,1[$, $F(x) = 4\pi \ln x + F\left(\frac{1}{x}\right) = 4\pi \ln x$. Entonces se encuentran los resultados de 1).

Solución del ejercicio 4760 ▲005767

1. Sea $A > 0$. Sea $\Phi : \begin{array}{ll} [-A,A] \times [0,1] & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$.

   • Para cada x de $[-A,A]$, la función $t \mapsto F(x,t)$ es continua en el segmento $[0,1]$ y por lo tanto, integrable en este segmento.

   • La función Φ admite en $[-A,A] \times [0,1]$ una derivada parcial con respecto a su primera variable x definida por :

   $$\forall (x,t) \in [-A,A] \times [0,1], \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

   Además :

   – para cada $x \in [-A,A]$, la función $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua a trozos en el segmento $[0,1]$,

   – para cada $t \in [0,1]$, la función $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua a trozos en $\mathbb{R}$,

   – para cada $(x,t) \in [-A,A] \times [0,1]$, $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2A = \varphi(t)$, la función φ es continua y por lo tanto, integrable en el segmento $[0,1]$.

   Por el teorema de derivación de las integrales a parámetros (teorema de LEIBNIZ), la función F es de clase C^1 sobre $[-A,A]$ y su derivada se obtiene derivando bajo el signo de la suma. Siendo esto cierto para todo $A > 0$, F es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\, dt.}$$

2. La función $x \mapsto e^{-x^2}$ es continua en $\mathbb{R}$. Se deduce que la función $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$. Lo mismo ocurre con la función G y para todo real x,

$$\boxed{G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.}$$

3. Sea $x \in \mathbb{R}^*$. Usando $u = xt$, se obtiene
$$F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,xdt = -e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du = -G'(x),$$
esta igualdad es aún cierta cuando $x = 0$ por continuidad de las funciones F' y G' sobre $\mathbb{R}$. Así, $F' + G' = 0$ y entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + G(x) = \tfrac{\pi}{4}.}$$

4. Para $x \in \mathbb{R}$,
$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqslant e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4e^{x^2}},$$
y como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4e^{x^2}} = 0$, se ha demostrado que
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

5. Para $x > 0$, se tiene $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqslant 0$ y así de acuerdo a la pregunta 3),
$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$
La cuestión 4) permite entonces afirmar que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y así como
$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Solución del ejercicio 4761 ▲005768

Sea $x \in \mathbb{R}$. La función $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ es continua en $[0,+\infty[$. Cuando t tiende a $+\infty$, $e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ por el teorema de crecimiento comparativo y que la función $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ es integrable en $[0,+\infty[$. Para $x \in \mathbb{R}$, se puede escribir $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt$.

Cálculo de $f(x)$. Sea $A > 0$. Se define $\begin{array}{rcl}\Phi : [-A,A]\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx).\end{array}$

• Para cada $x \in [-A,A]$, la función $t \mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)$ es continua a trozos e integrable sobre $[0,+\infty[$.

• La función Φ admite en $[-A,A]\times[0,+\infty[$ una derivada parcial con respecto a su primera variable definida por :
$$\forall (x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx).$$

Además :

– para cada $x \in [-A,A]$, la función $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua a trozos en $[0,+\infty[$,

– para cada $t \in [0,+\infty[$, la función $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua en $[-A,A]$,

– para cada $(x,t) \in [-A,A]\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-t^2}|\operatorname{sh}(tx)| \leqslant te^{-t^2}\operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La función φ es continua a trozos en $[0,+\infty[$ e integrable en $[0,+\infty[$ porque es despreciable frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$. Por el teorema de derivación de las integrales con parámetros (teorema de LEIBNIZ), la función f es de clase C^1 sobre $[-A,A]$ y su derivada se obtiene por derivación bajo el signo de suma. Siendo esto cierto para todo real $A>0$, la función f es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt.$$

Sea $x\in\mathbb{R}$. Ahora se efectúa una integración por partes. Sea $A>0$. Las dos funciones $t\mapsto te^{-t^2}$ y $t\mapsto \operatorname{sh}(tx)$ son de clase C^1 en el segmento $[0,A]$. Se puede entonces integrar por partes y se tiene

$$\int_0^A te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\right]_0^A + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2}\operatorname{sh}(tA) + \frac{x}{2}\int_0^A e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt.$$

Cuando A tiende a $+\infty$, se obtiene $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\operatorname{sh}(tx)\,dt = \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{x}{2}f(x)$.
Luego, para todo real x, $e^{-x^2/4}f'(x) - \frac{x}{2}e^{-x^2/4}f(x) = 0$ o aún $(e^{-x^2/4}f)'(x) = 0$. Se deduce que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2/4}f(x) = e^0 f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y así como $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2/4}.}$$

Solución del ejercicio 4762 ▲005769

Sea $x\in\mathbb{R}$. La función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ es continua en $]0,1[$.
Estudio en 1. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 1}{\sim} 1\times 1 = 1$ y por lo tanto, la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ se extiende por continuidad en 1. Se deduce que la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ es integrable en un vecindario de 1 a la izquierda.
Estudio en 0. $\frac{t-1}{\ln t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$. -si $x>-1$, $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o(t^x)$ y desde $x>-1$, la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ es integrable en un vecindario de 0 a la derecha.
– si $x\leqslant -1$, la función $t\mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$ domina la función $t\mapsto -\frac{1}{t\ln t}$, cuando t tiende a 0 para valores superiores. Porque la función $-\frac{1}{t\ln t}$ es positiva y que $\displaystyle\int_x^{1/2} -\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(1/2)| \underset{x\to 0}{\to} +\infty$, la función $t\mapsto -\frac{1}{t\ln t}$ no es integrable en un vecindario de 0. Igualmente la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$.
Finalmente, la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ es integrable en $]0,1[$ si y solo si $x>-1$. Para $x>-1$, se puede escribir $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,dt$.
Cálculo de $f(x)$. Sea $a>-1$. Se define $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{t-1}{\ln t}t^x \end{array}$.

• Para cada $x\in[a,+\infty[$, la función $t\mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ es continua a trozos e integrable sobre $]0,1[$.
• La función Φ admite en $[a,+\infty[\times]0,1[$ una derivada parcial con respecto a su primera variable definida por :

$$\forall (x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

Además, – para cada $x \in [a,+\infty[$, la función $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua a trozos en $]0,1[$, – para cada $t \in]0,1[$, la función $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ es continua en $[a,+\infty[$, – para cada $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^a = \varphi(t).$$

La función φ es continua a trozos en $]0,1[$ e integrable en $]0,1[$, pues $a > -1$.
Por el teorema de derivación de las integrales con parámetros (teorema de LEIBNIZ), la función f es de clase C^1 sobre $[a,+\infty[$ y su derivada se obtiene por derivación bajo el signo de suma. Siendo esto cierto para todo real $a > -1$, la función f es de clase C^1 sobre $]-1,+\infty[$ y

$$\forall x > -1,\ f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,dt = \left[\frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Así, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C \qquad (*)$.

Para determinar la constante C, se puede usar el resultado del ejercicio 2750 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$. También se puede obtener directamente la constante C sin ningún cálculo integral. Por esto, se determina $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
La función $g:\ t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ es continua en el segmento $]0,1[$, prolongable por continuidad en 0 y en 1 poniendo $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Se deduce que esta función está acotada en el intervalo $]0,1[$ (porque su extensión es una función continua en un segmento). Sea M un mayorante de la función $|g|$ sobre $]0,1[$. Para $x > -1$, se tiene

$$|g(x)| \leqslant M \int_0^1 t^x\,dt = \frac{M}{x+1}.$$

Esto demuestra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y pasando al límite cuando x tiende a $+\infty$ en la igualdad $(*)$, se obtiene $C = 0$. Por lo tanto, se ha demostrado que

$$\boxed{\forall x > -1,\ \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,dt = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

Se encuentra en particular $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2$.

Solución del ejercicio 4763 ▲005770

Existencia de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Sea $x \geqslant 0$. La función $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ es continua en $[0,+\infty[$ y está dominado por $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$. Por lo tanto, esta función es integrable en $[0,+\infty[$. Entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ existe para todo real positivo x y se escribe $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

Continuidad de f sobre $[0,+\infty[$. Sea $\Phi : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$(x,t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Para cada $x \in [0,+\infty[$, la función $t \mapsto \Phi(x,t)$ es continua a trozos en $[0,+\infty[$.
- Para cada $t \in [0,+\infty[$, la función $x \mapsto \Phi(x,t)$ es continua en $[0,+\infty[$.
- Para cada $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|\Phi(x,t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

Además, la función φ_0 es continua e integrable en $[0,+\infty[$, porque es equivalente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$. De acuerdo con el teorema de continuidad de las integrales con parámetros, f es continua en $[0,+\infty[$.

Derivada segunda de f. Sea $a>0$. Se define $\Phi : [0,+\infty[\times[a,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$(x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}.$$

Además, de esto que precede, Φ admite en $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ derivadas parciales de orden 1 y 2 definidas por

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ y } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Para cada $x \in [a,+\infty[$, las funciones $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ y $t \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ son continuas a trozos en $[0,+\infty[$.
- Para cada $t \in [0,+\infty[$, las funciones $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ y $x \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ son continuas en $[a,+\infty[$.
- Para cada $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ y } \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

Además, las funciones φ_1 y φ_2 son continuas a trozos e integrables en $[0,+\infty[$ porque son despreciables frente a $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$.

De una generalización del teorema de derivación de integrales con parámetros, f es de clase C^2 sobre $[a,+\infty[$ y sus derivadas primera y segunda se obtienen por derivación bajo el signo de suma. Siendo esto cierto para todo $a>0$, f es de clase C^2 sobre $]0,+\infty[$ y

$$\boxed{\forall x>0,\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,dt \text{ y } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,dt.}$$

Ecuación diferencial verificada por f. Para $x>0$,

$$f''(x)+f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,dt = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ f(x)+f''(x) = \frac{1}{x}.}$$

Existencia de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{x+t}\,dt$. Si $x=0$, el ejercicio 2746, 1) demuestra que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es una integral convergente. Si $x>0$, una integración por partes da para $A>0$

$$\int_0^A \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt = -\frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt.$$

La función $t \mapsto \frac{\cos t}{(t+x)^2}$ es continua en $[0,+\infty[$ y está dominado por $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$. Por lo tanto, esta función es integrable en $[0,+\infty[$. Se deduce que la función $A \mapsto \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2}\,dt$ tiene un límite real cuando A tiende a $+\infty$ y lo mismo ocurre con la función $A \mapsto \int_0^A \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$. Así, para cada $x \in [0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$ es una integral convergente.

Para $x \geqslant 0$, se puede por lo tanto escribir $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$.

Ecuación diferencial verificada por g. Para $x>0$, se establece $u = x+t$. Se obtiene

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t+x}\,dt=\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(u-x)}{u}\,du=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du-\operatorname{sen}x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.$$

(porque todas las integrales consideradas son convergentes). Ahora, las funciones $c:\ u\mapsto\frac{\cos u}{u}$ y $s:\ u\mapsto\frac{\operatorname{sen}u}{u}$ son continuas en $]0,+\infty[$ y por lo tanto, admiten primitivas en $]0,+\infty[$.
Se denota C (respectivamente S) una primitiva de la función c (respectivamente s) sobre $]0,+\infty[$).
Para todo real $x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=\lim_{t\to+\infty}C(t)-C(x)$. Se deduce que la función $x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ es de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$, de derivada $-c$. Igualmente, la función $x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du$ es de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$, de derivada $-s$. Pero entonces la función g es de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$ y para todo real $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\operatorname{sen}x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du-\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos x\operatorname{sen}x}{x}\\&=-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du-\operatorname{sen}x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du.\end{aligned}$$

La función g' es aún de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$ y para todo real $x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\operatorname{sen}x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\frac{\cos^2x}{x}-\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du+\frac{\operatorname{sen}^2x}{x}\\&=\frac{1}{x}-g(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ g''(x)+g(x)=\tfrac{1}{x}.}$$

Igualdad de f y g sobre $]0,+\infty[$. Para todo real $x>0$, $(f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$. Entonces existen dos reales λ y μ tales que $\forall x>0$, $(f-g)(x)=\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen}x=A\cos(x+\varphi)$, para $A=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ y para cierto φ.
Ahora, para $x>0$, $|f(x)|=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x}$ y se deduce que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Luego, $|g(x)\leqslant\left|\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du\right|+\left|\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\right|$.
Dado que las integrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ son integrales convergentes, se tiene $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du=0$ y por lo tanto, también $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.
Finalmente, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$ que impone $A=0$ y entonces $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$.

$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t+x}\,dt.}$$

Continuidad de g en 0 y valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt$. Para $x>0$,

$$\begin{aligned}g(x)&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du-\operatorname{sen}x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du\\&=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,du-\operatorname{sen}x\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du+\operatorname{sen}x\int_x^{1}\frac{1-\cos u}{u}\,du-\operatorname{sen}x\ln x.\end{aligned}$$

Cuando x tiende a 0, $\operatorname{sen} x \ln x \sim x \ln x$ y entonces $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x = 0$. Luego, la función $u \mapsto \frac{1-\cos u}{u}$ es integrable en $]0,1]$ porque es continua en $]0,1]$ y prolongable por continuidad en 0.
Se deduce que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \int_x^1 \frac{1-\cos u}{u}\, du = 0 \times \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\, du = 0$. Queda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = g(0).$$

La función g es, por lo tanto continua en 0. Porque la función f es igualmente continua en 0, se deduce que

$$g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\, dt \text{ y, en particular, } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Solución del ejercicio 4764 ▲005771

1. • Sea $x \in \mathbb{R}$. La función $t \mapsto f(x-t)g(t)$ es continua en el segmento $[0,T]$ y por lo tanto, integrable en este segmento. Así, $f * g(x)$ existe.
   • Sea $x \in \mathbb{R}$. $f * g(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t)\, dt = \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = f * g(x)$. Entonces la función $f * g$ es T-periódica.
   • Las funciones f y g son continuas en $\mathbb{R}$ y T-periódicas. Estas funciones se limitan en particular a $\mathbb{R}$.
   Se denotan M_1 y M_2 mayorantes en $\mathbb{R}$ funciones $|f|$ y $|g|$ respectivamente.
   Sea $\Phi : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$
   $\qquad (x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$.
   – Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $t \mapsto \Phi(x,t)$ es continua a trozos en $[0,T]$.
   – Para cada $t \in [0,T]$, la función $x \mapsto \Phi(x,t)$ es continua en $\mathbb{R}$.
   – Para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $|\Phi(x,t)| \leqslant M_1 M_2 = \varphi(t)$. Además, la función φ es continua y así integrable en el segmento $[0,T]$. De acuerdo con el teorema de continuidad de los integrales a parámetros, la función $f * g$ es continua en $\mathbb{R}$.
2. Sean f y g dos elementos de E. Sea $x \in \mathbb{R}$. Usando $u = x-t$, se obtiene

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^T f(x-t)g(t)\, dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u-t)\, (-du) = \int_{x-T}^x g(u-t)f(u)\, du \\ &= \int_0^T g(u-t)f(u)\, du \text{ (porque la función } u \mapsto g(u-t)f(u) \text{ es } T\text{-periódica)} \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 4767 ▲000847

El objetivo del ejercicio es resolver la ecuación

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \tag{E}$$

1. Encontrar $a \in]0,\infty[$ tal que $y_0(x) = ax$ ya sea una solución particular. Porque

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 es solución si y solo si $a = \pm 3$. Se escoge $a = 3$.

2. Si z es una función $\mathscr{C}^1$ no se anula, se establece $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Entonces y es solución si y solo si

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

Multiplicando por $z(x)^2$, se obtiene que y es solución de (E) si y solo si z verifica

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{E$_1$}$$

3. Se résout (E_1) sobre $]0,\infty[$. Una primitiva de $x \mapsto 6x + 1/x$ es $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, por lo que las soluciones de la ecuación homogénea son las $x \mapsto A\exp(-3x^2 - \ln(x))$. Se busca una solución particular de (E_1) bajo la forma $z_p(x) = \alpha(x)\exp(-3x^2 - \ln(x))$; entonces z_p es solución si $\alpha'(x)\exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, es decir si $\alpha'(x) = x\exp(3x^2)$, por ejemplo si $\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$. Las soluciones de (E_1) son, por lo tanto los

$$z(x) = \frac{1 + A\exp(-3x^2)}{6x}, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

4. Se va ahora a deducir las soluciones de (E) definidas en $]0,\infty[$.
Sea y una solución $\mathscr{C}^1$ definida en $]0,\infty[$. Se supone en un primer momento que $y(x) > 3x$ en el intervalo abierto $I \subset]0,\infty[$, tomar lo más grande posible. Entonces $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$, para una función determinada $z_I < 0$ que es $\mathscr{C}^1$ sobre I. Según la pregunta anterior, se tiene necesariamente $z_I(x) = [1 + A_I\exp(-3x^2)]/6x$ por cierta constante $A_I \in \mathbb{R}$.
Porque $z_I < 0$, esto impone $A_I < 0$, pero entonces $I \neq]0,+\infty[$, pues $1 > A_I\exp(-3x^2)$ si x es bastante grande.
En todos los casos, entonces existe un intervalo abierto J tal que $y(x) < 3x$ sobre J. Se supone todavía que J es lo más grande posible. Sobre J, $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$, para una función determinada $z_J > 0$ que es $\mathscr{C}^1$ sobre J. De nuevo a partir de la pregunta anterior, $z_J(x) = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$ por cierta constante A_J. Porque el intervalo abierto $J =]a,b[$ ha sido asumido que es maximal, y desde y se supone definida en $]0,+\infty[$, si $a > 0$ se tiene $y(a) = 3a$ e igualmente si $b < \infty$, $y(b) = 3b$, porque si no por la continuidad de y se tiene todavía $y(x) < 3x$ sobre $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, para un pequeño $\varepsilon > 0$. Esto solo es posible respectivamente si $z_J(x) \to +\infty$, cuando $x \to a$ o $z_J(x) \to +\infty$, cuando $x \to b$. Pero se dijo que $z_J = [1 + A_J\exp(-3x^2)]/6x$, esto no es posible en absoluto (excepto precisamente si respectivamente $a = 0$ y $b = 0$). Así sea $y(x) = 3x$ sobre $]0,+\infty[$, sea $y(x) < 3x$ sobre $]0,+\infty[$. En este último caso, $z(x) = 1/(3x - y(x))$ se define en $]0,+\infty[$ y se escribe $z(x) = [1 + A\exp(-3x^2)]/6x$. Porque $z > 0$, necesariamente $A \geqslant -1$. Entonces si y es solución, entonces

$$y(x) = 3x \ \text{ o } \ y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A\exp(-3x^2)}, \quad \text{con } A \geqslant -1.$$

Recíprocamente, si y es así definida, entonces y es definida y $\mathscr{C}^1$ sobre $]0,\infty[$, y se puede comprobar que efectivamente es una solución.

Solución del ejercicio 4771 ▲000851

Las primitivas de la función $a(x) = 2x$ son las funciones $A(x) = x^2/2 + k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante real cualquiera. Entonces las soluciones de la ecuación homogénea asociada a E son todas las funciones definidas en $\mathbb{R}$ del tipo : $y(x) = c\mathrm{e}^{-x^2}$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Se busca ahora una solución particular de E bajo la forma $y_p(x) = c(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ (método de variación de constantes).quad Se tiene : $y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Entonces y_p es solución de E si y solo si : $c'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se escoge la función c entre las primitivas de la función $x\mathrm{e}^{x^2}$, por ejemplo : $c(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$. Entonces la función y_p tal que $y_p(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2}$ es solución de E.
Por lo tanto las soluciones de E son todas funciones de la forma :

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2}\ c \in \mathbb{R}.$$

Para y solución de E_1, la condición $y(0) = 1$ equivale a : $c = \frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 4773 ▲000853

Si $z = x + \lambda y$, entonces $\dot{z} = x(1+3\lambda) + y(1-\lambda)$. Para que $\dot{z}$ sea proporcional a z, es suficiente que $\lambda(1+3\lambda) = 1-\lambda$, dicho de otro modo $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. Hay dos soluciones : $a = -1$ y $b = 1/3$. Se define $u = x - y$ y $v = x + \frac{1}{3}y$. Se tiene entonces : $\dot{u} = -2u$ y $\dot{v} = 2v$.
Se deduce que las soluciones u y v son de la forma $u(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t}$ y $v(t) = C_2\mathrm{e}^{2t}$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Además,

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + \frac{1}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}(u+3v) \\ y = \frac{3}{4}(v-u). \end{cases}$$

Entonces las soluciones del sistema diferencial son los pares de funciones (x, y) de la forma

$$x(t) = D_1\mathrm{e}^{-2t} + 3D_2\mathrm{e}^{2t}, \quad y(t) = -3D_1\mathrm{e}^{-2t} + 3D_2\mathrm{e}^{2t}, \quad D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

Se quiere $x(0) = 2$ y $y(0) = -2$. Esto es equivalente a

$$\begin{cases} D_1 + 3D_2 = 2 \\ -3D_1 + 3D_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} D_1 = 1 \\ D_2 = 1/3. \end{cases}$$

Conclusión : hay una única solución, dada por

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t}, \quad y(t) = -3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t}.$$

Solución del ejercicio 4779 ▲005476

Las ecuaciones diferenciales a resolver en este ejercicio son todas lineales de primer orden. Se denota (E) la ecuación diferencial propuesta y (E_H) la ecuación homogénea asociada.

1. Las funciones $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ y $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ son continuas en I y se sabe que las soluciones de (E) sobre I son de la forma $f_0 + \lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Sea f una función derivable en I.

$$f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x\ln x f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ln x f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\ln x.f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}.$$

2. Las funciones $x \mapsto \frac{1}{x}$ y $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ son continuas en I y se sabe que las soluciones de (E) sobre I son de la forma $f_0 + \lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Sea f una función derivable en I.

$$f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xf)'(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x) + \lambda}{x}.$$

Las soluciones de (E) sobre I son las funciones de la forma $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Las funciones $x \mapsto \frac{1}{2x}$ y $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ son continuas en $I =]-\infty, 0[$ y se sabe que las soluciones de (E) sobre I son de la forma $f_0 + \lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Sea f una función derivable en I.

$$f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x} f(x) = \frac{x^3}{2}$$
$$\forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2} f'(x) + \frac{1}{2x} e^{\ln|x|/2} f(x) = \frac{x^3}{2} e^{\ln|x|/2}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x} f)'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{7/2}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x} f(x) = \frac{1}{9}(-x)^{9/2} + \lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}.$$

Las soluciones de (E) sobre I son las funciones de la forma $x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Las funciones $x \mapsto 2$ y $x \mapsto x^2 - 3x$ son continuas en $\mathbb{R}$ y se sabe que las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son de la forma $f_0 + \lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = (x^2 - 3x)e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x} f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x}$$

Búsqueda de una primitiva sobre $\mathbb{R}$ de la función $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$.
1er método. Dos integraciones por partes proporcionan :

$$\int (x^2 - 3x)e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x - 3)e^{2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x - 3)e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}(2x^2 - 8x + 3)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)e^{2x} + C.$$

2o método. Busquemos las primitivas de $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$ bajo la forma $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

$$((ax^2 + bx + c)e^{2x})' = (2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b))e^{2x} = (2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c)e^{2x}.$$

Así,

$$((ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x})' = (x^2-3x)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2(a+b)=-3 \\ b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=1. \end{cases}$$

Resolución de (E).

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (\mathrm{e}^{2x}f)'(x) = (x^2-3x)\mathrm{e}^{2x} \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x}f(x) = (\frac{x^2}{2}-2x+1)\mathrm{e}^{2x}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda\mathrm{e}^{-2x}. \end{aligned}$$

Las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x\mapsto \frac{x^2}{2}-2x+1+\lambda\mathrm{e}^{-2x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Las funciones $x\mapsto 1$ y $x\mapsto \frac{1}{1+2\mathrm{e}^x}$ son continuas en $\mathbb{R}$ y se sabe que las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son de la forma $f_0+\lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^x} \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^xf'(x)+\mathrm{e}^xf(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x} \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^xf(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2\mathrm{e}^x)+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = (\frac{1}{2}\ln(1+2\mathrm{e}^x)+\lambda)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x\mapsto (\frac{1}{2}\ln(1+2\mathrm{e}^x)+\lambda)\mathrm{e}^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

6. Las funciones $x\mapsto -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $x\mapsto -\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ son continuas en $I=]0,\pi[$ y se sabe que las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son de la forma $f_0+\lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H). Pero $x\mapsto \operatorname{sen} x$ es una solución no nula de (E_H) sobre I y $x\mapsto\cos x$ es una solución de (E) sobre $]0,\pi[$. Las soluciones de (E) sobre $]0,\pi[$ son las funciones de la forma $x\mapsto \lambda\operatorname{sen} x+\cos x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4780 ▲005477

La ecuación diferencial a resolver en este ejercicio es lineal de primer orden. Se denota (E) la ecuación diferencial propuesta y (E_H) la ecuación homogénea asociada.

Sea I uno de los dos intervalos $]-1,1[$ o $]1,+\infty[$. Las funciones $x\mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ y $x\mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ son continuas en I y se sabe que las soluciones de (E) sobre I son de la forma $f_0+\lambda f_1$, donde f_0 es una solución particular de (E) y f_1 es una solución particular no nula de (E_H).

Resolución de (E) sobre I. Sea f una función derivable en I.

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (1-x^2)f'(x)-2xf(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x) = \frac{x^3+\lambda}{3(1-x^2)}, \end{aligned}$$

(renombrando λ la constante 3λ).
Si $I=]-1,+\infty[$. Sea f una posible solución de (E) sobre I. Las restricciones de f a $]-1,1[$ y $]1,+\infty[$ son aún solución de (E) y por lo tanto, de la forma anterior. Así, necesariamente, existen dos constantes λ_1 y λ_2 tales que, para $-1<x<1$, $f(x)=\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ y para $x>1$, $f(x)=\frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$. En fin, la ecuación impone $f(1)=-\frac{1}{2}$.
En resumen, una posible solución de (E) sobre I es necesariamente de la forma :

$$\forall x>-1,\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si } -1<x<1\\ -\frac{1}{2} & \text{si } x=1\\ \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Recíprocamente, f así definida, es derivable en $]-1,1[$ y solución de (E) sobre $]-1,1[$, derivable en $]1,+\infty[$ y solución de (E) sobre $]1,+\infty[$ y, si f es derivable en 1, f verifica aún (E), para $x=1$. Entonces, f es solución de (E) sobre $]-1,+\infty[$ si y solo si f es derivable en 1. Para $-1<x<1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}+\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}.$$

Cuando x tiende a 1 para valores inferiores, el denominador de la fracción tiende a 0 y el numerador tiende a $2(1+\lambda_1)$. Entonces, si $\lambda_1\neq-1$, f no se deja derivable a la izquierda en 1. Igualmente, si λ_2 no es -1, f no es derivable a la derecha en -1. Así, si f es solución de (E) sobre I, necesariamente $\lambda_1=\lambda_2=-1$. En este caso, para $x\in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x)=\frac{x^3-1}{3(1-x^2)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)}=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

lo que es aún cierto para $x=1$. Así, si f es una solución de (E) sobre $]-1,+\infty[$, necesariamente para $x>-1$, $f(x)=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.
Recíprocamente, f así definida es derivable en $]-1,+\infty[$ y en particular en 1. f es, por lo tanto una solución de (E) sobre $]-1,+\infty[$. Sobre $]-1,+\infty[$, (E) admite una y solo una solución, a saber, la función $x\mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.
Si $I=\mathbb{R}$, sea f una posible solución de (E) sobre $\mathbb{R}$. La restricción de f a $]-1,+\infty[$ es necesariamente la función precedente. Pero esta función tiende a $-\infty$, cuando x tiende a -1 para valores superiores. Entonces f no puede ser continua en $\mathbb{R}$ y (E) no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4781 ▲005478

Resolución de (E) sobre $]0,+\infty[$. Sea f una función derivable en $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\ &\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)+(1-\frac{1}{x})f(x)=x^2\\ &\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+(1-\frac{1}{x})e^{x-\ln x}f(x)=e^{x-\ln x}x^2\\ &\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ (\frac{e^x}{x}f)'(x)=xe^x=((x-1)e^x)'\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda)=x^2-x+\lambda xe^{-x}.\end{aligned}$$

Las soluciones de (E) sobre $]0,+\infty[$ son las funciones de la forma $x\mapsto x^2-x+\lambda x\mathrm{e}^{-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Resolución de (E) sobre $]-\infty,0[$. Sea f una función derivable en $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ f'(x)+(-1+\frac{1}{x})f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ \mathrm{e}^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-x+\ln|x|}f(x)=-\mathrm{e}^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (-x\mathrm{e}^{-x}y)'=x^3\mathrm{e}^{-x}.\quad (*)
\end{aligned}$$

Determinar una primitiva de la función $x\mapsto -x^3\mathrm{e}^{-x}$ de la forma $(ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
((ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{-x})' &= (-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))\mathrm{e}^{-x}\\
&= (-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)\mathrm{e}^{-x},
\end{aligned}$$

y

$$((ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{-x})'=x^3\mathrm{e}^{-x}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=-1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=6=d.\end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
(*)\quad &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ x\mathrm{e}^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)\mathrm{e}^{-x}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda\mathrm{e}^{x}+6}{x}.
\end{aligned}$$

Las soluciones de (E) sobre $]-\infty,0[$ son las funciones de la forma $x\mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda\mathrm{e}^x+6}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Se puede demostrar que la ecuación admite una y solo una solución sobre $\mathbb{R}$ en « pegando » las expresiones anteriores, pero en este principio de año, aún nos faltan herramientas.

Solución del ejercicio 4782 ▲005481

Se sabe que las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación propuesta son las funciones de la forma :

$$g:\ x\mapsto\lambda\mathrm{e}^{-ax}+\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

En este caso, para $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T)=\lambda\mathrm{e}^{-a(x+T)}+\mathrm{e}^{-a(x+T)}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{x+T}\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt &= \int_0^x\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt+\int_x^{x+T}\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt=\int_0^x\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt+\int_0^T\mathrm{e}^{a(u+T)}f(u+T)\,du\\
&= \int_0^x\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt+\mathrm{e}^{aT}\int_0^T\mathrm{e}^{al}f(u)du.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
g(x+T) &= \lambda\mathrm{e}^{-a(x+T)}+\mathrm{e}^{-a(x+T)}\int_0^x\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt+\mathrm{e}^{-ax}\int_0^T\mathrm{e}^{al}f(u)\,du\\
&= \lambda\mathrm{e}^{-a(x+T)}+\mathrm{e}^{-a(x+T)}\int_0^T\mathrm{e}^{at}f(t)\,dt+g(x)-\lambda\mathrm{e}^{-ax}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g \text{ es } T\text{-periódica} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \mathrm{e}^{-a(x+T)} + \mathrm{e}^{-a(x+T)} \int_0^T \mathrm{e}^{at} f(t)\, dt - \lambda \mathrm{e}^{-ax} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(1-\mathrm{e}^{-aT}) = \mathrm{e}^{-aT} \int_0^T \mathrm{e}^{at} f(t)\, dt \Leftrightarrow \lambda = \frac{\mathrm{e}^{-aT}}{1-\mathrm{e}^{-aT}} \int_0^T \mathrm{e}^{at} f(t)\, dt.$$

($\mathrm{e}^{-aT} \neq 1$, pues $a \neq 0$ y $T \neq 0$). De ahí la existencia y unicidad de una solución T-periódica :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-aT}}{1-\mathrm{e}^{-aT}} \int_0^T \mathrm{e}^{at} f(t)\, dt \mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax} \int_0^x \mathrm{e}^{at} f(t)\, dt.$$

Solución del ejercicio 4783 ▲006991

1. Esta es una ecuación diferencial lineal de orden 1, con coeficientes constantes, con segundo miembro. Se comienza resolviendo la ecuación homogénea asociada $y' + 2y = 0$: las soluciones son las $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Es suficiente entonces de encontrar una solución particular de (E_1). Siendo el segundo miembro un polinomio de grado 2, se busca una solución particular de la misma forma :
   $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ es solución de (E_1)
   $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + 2y_0(x) = x^2$
   $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c = x^2$.
   Así, identificando los coeficientes, se ve que $y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ sirve. Las soluciones de (E_1) se obtienen sumando esta solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea :
   $$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda \mathrm{e}^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$
   donde λ es un parámetro real.
2. Esta es una ecuación diferencial lineal de orden 1, con coeficientes constantes, con segundo miembro. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y' + y = 0$ son los $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Es suficiente entonces encontrar una solución particular de (E_2). El segundo miembro es esta vez una función trigonométrica, se busca una solución particular en forma de una combinación lineal de cos y sen :
   $y_0(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x$ es solución de (E_2)
   $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = 2\operatorname{sen} x$
   $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x$
   Así, identificando los coeficientes, se ve que $y_0(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$ sirve.
   Las soluciones de (E_2) se obtienen sumando esta solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea :
   $$y(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x + \lambda \mathrm{e}^{-x}, \quad (x \in \mathbb{R}),$$
   donde λ es un parámetro real.
3. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y' - y = 0$ son los $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Se observa que el segundo miembro es el producto de una función exponencial por una función polinomial de grado $d = 1$: pero la función exponencial del segundo miembro es la misma (e^x) que la que

aparece en las soluciones de la ecuación homogénea. Se busca una solución particular en forma de un producto de e^x por una función polinomial de grado $d+1=2$:
$y_0(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ es solución de (E_3)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - y_0(x) = (x+1)e^x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax+b)e^x = (x+1)e^x$.
Así, identificando los coeficientes, se ve que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2+x)e^x$ sirve. Las soluciones de (E_3) se obtienen sumando esta solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2+x+\lambda)e^x, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

donde λ es un parámetro real.

4. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada $y'+y=0$ son los $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Se observa que el segundo miembro es la suma de una función polinomial de grado 1, de una función exponencial (diferente de e^{-x}) y de una función trigonométrica. Por el principio de superposición, se busca una solución particular en la forma de tal suma :
$y_0(x) = ax+b+\mu e^x+\alpha\cos x+\beta\operatorname{sen} x$ es solución de (E_4)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x)+y_0(x) = x-e^x+\cos x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax+a+b+2\mu e^x+(\alpha+\beta)\cos x+(-\alpha+\beta)\operatorname{sen} x = x-e^x+\cos x$.
Así, identificando los coeficientes, se ve que

$$y_0(x) = x-1-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

conviene. Las soluciones de (E_4) se obtienen sumando esta solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea :

$$y(x) = x-1-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\lambda e^{-x}, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

donde λ es un parámetro real.

Solución del ejercicio 4784 ▲006992

Una función $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ sirve si y solo si
— f es derivable
— f es solución de $y'+y=c$
— f verifica $f(0)+f(1)=c$ (donde c es un real cualquiera).

Pero las soluciones de la ecuación diferencial $y'+y=c$ son exactamente las $f : x \mapsto \lambda e^{-x}+c$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ (en efecto, se ve fácilmente que la función constante igual a c es una solución particular de $y'+y=c$). Obviamente, estas funciones son derivables, y $f(0)+f(1) = \lambda(1+e^{-1})+2c$, Entonces la tercera condición se satisface si y solo si $-\lambda(1+e^{-1}) = c$. Así, las soluciones del problema son exactamente las

$$f(x) = \lambda(e^{-x}-1-e^{-1}),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4785 ▲006993

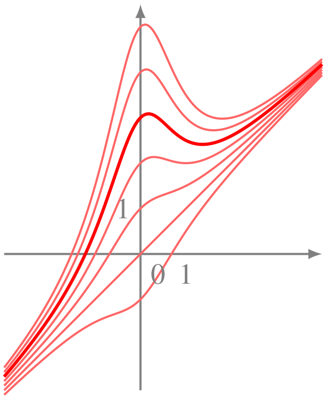
---

1. Como el coeficiente de y' no se anula, se puede reescribir la ecuación en la forma

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}.$$

   (a) Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son las $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, donde A es una primitiva de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Porque $a(x)$ es de la forma $-\frac{u'}{u}$, con $u > 0$, se puede elegir $A(x) = -\ln(u(x))$, donde $u(x) = x^2+1$. Las soluciones son, por lo tanto los $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1}$.

   (b) Es suficiente entonces encontrar una solución particular de la ecuación con segundo miembro : se observa que $y_0(x) = x$ sirve.



   (c) Las soluciones se obtienen sumando :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

   donde λ es un parámetro real.

   (d) $y(0) = 3$ si y solo si $\lambda = 3$. La solución buscada es, por lo tanto $y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$.
   Estas son las curvas integrales para $\lambda = -1, 0, \ldots, 5$.

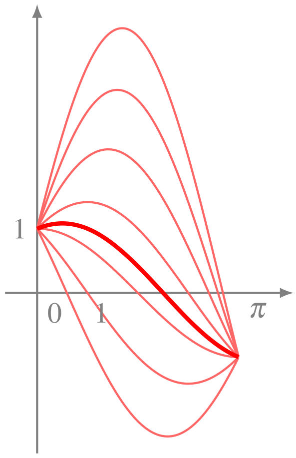
2. Se comienza por notar que $y_0(x) = \cos x$ es una solución particular. Para la ecuación homogénea : en el intervalo considerado, el coeficiente de y' no se anula, y la ecuación se reescribe

$$y' - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}y = 0.$$

   Las soluciones son los $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y A es una primitiva de $a(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Porque $a(x)$ es de la forma $\frac{u'}{u}$, con $u > 0$, se puede elegir $A(x) = \ln(u(x))$, con $u(x) = \operatorname{sen} x$.
   Las soluciones de la ecuación son, por lo tanto las $y(x) = \lambda e^{\ln(\operatorname{sen} x)} = \lambda \operatorname{sen} x$.
   Finalmente, las soluciones de la ecuación son

$$y(x) = \cos x + \lambda \operatorname{sen} x,$$

   donde λ es un parámetro real.



3. Se tiene

$$y(\tfrac{\pi}{4}) = 1 \iff \cos\tfrac{\pi}{4} + \lambda \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} = 1$$
$$\iff \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\lambda) = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1.$$

   La solución buscada es $y(x) = \cos x + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) \operatorname{sen} x$.
   Aquí están las curvas integrales para $\lambda = -2, -1, 0, \ldots, 4$ y $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$ (en color resaltado).

Solución del ejercicio 4786 ▲006994

---

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sobre $]0; +\infty[$

   (a) **Resolución de la ecuación homogénea** $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$**.**

   Una primitiva de $a(x) = 2x - \frac{1}{x}$ es $A(x) = x^2 - \ln x$, por lo que las soluciones de la ecuación homogénea son las $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln x) = \lambda \frac{1}{x} \exp(x^2)$, para λ una constante real arbitraria.

   (b) **Búsqueda de una solución particular.**

   Utilizar el método de variación constante para encontrar una solución particular a la ecuación $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$. Se busca tal solución bajo la forma $y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2)$, donde $x \mapsto \lambda(x)$ es ahora una función. Se calcula primero

$$y_0'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

   Ahora :

$$\begin{aligned}
& y_0 \text{ es solución de } y' - (2x + \frac{1}{x})y = 1 \\
\iff & y_0' - (2x - \frac{1}{x})y_0 = 1 \\
\iff & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - (2x - \frac{1}{x})\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
\iff & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \qquad \text{esto debe simplificarse!} \\
\iff & \lambda'(x) = x\exp(-x^2)
\end{aligned}$$

   Así podemos tomar $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\exp(x^2)$, que proporciona la solución particular :

$$y_0(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}$$

   Para asegurarse, ¡no olvidar comprobar que efectivamente es una solución !

   (c) **Solución general.**

   El conjunto de soluciones se obtiene por la suma de la solución particular con las soluciones de la ecuación homogénea. Dicho de otra manera, las soluciones son las :

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \lambda\frac{1}{x}\exp(x^2), \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sobre $\mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}$

   (a) **Resolución de la ecuación homogénea** $y' - y = 0$**.**

   Las soluciones de la ecuación homogénea son las $y(x) = \lambda \exp(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) **Búsqueda de una solución particular.**

   Se busca una solución particular bajo la forma $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$, donde $x \mapsto \lambda(x)$ ahora es una función. Como $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
& y_0 \text{ es solución de } y' - y = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x) \\
\iff & \lambda'(x) = x^k.
\end{aligned}$$

Se fija $\lambda(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, lo que conduce a la solución particular :

$$y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x).$$

(c) **Solución general.**
El conjunto de soluciones está formado por

$$y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x), \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sobre $]0,+\infty[$
El coeficiente de y' no se anula en $]0;+\infty[$, por lo tanto, la ecuación se puede escribir en la forma

$$y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}.$$

(a) Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son las $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, donde A es una primitiva de $a(x) = -\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se puede elegir $A(x) = -\ln(u(x))$, con $u(x) = 1+\ln^2(x)$. Las soluciones de la ecuación son las $y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \frac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

(b) Utilizar el método de variación de constantes para encontrar una solución particular de la ecuación con el segundo miembro. Se busca $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, con λ una función derivable. Por lo tanto $z(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}$ es solución de la ecuación homogénea y $y_0(x) = \lambda(x)z(x)$:

$$\begin{aligned}
& y_0 \quad \text{es solución} \\
\iff & y_0' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}y_0 = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{=0} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff & \lambda'(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede elegir $\lambda(x) = \ln x$, que da la solución particular $y_0(x) = \frac{\ln x}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Las soluciones se obtienen sumando esta solución particular y las soluciones de la ecuación homogénea : son las

$$y(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+\ln^2(x)}, \;\; (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donde λ es un parámetro real.

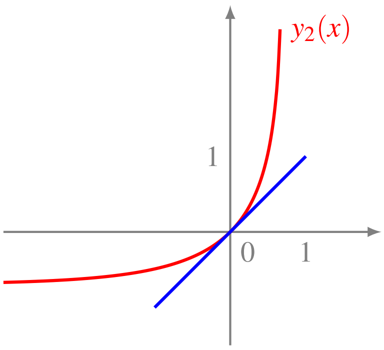
Observación : la elección de una primitiva de λ' se hace módulo una constante aditiva. Si se ha elegido por ejemplo $\lambda(x) = \ln x + 1$, la solución particular es diferente, pero las soluciones de la ecuación con segundo miembro habrían sido las

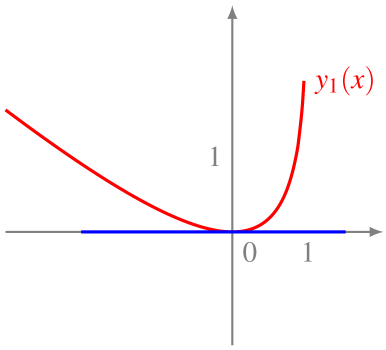
$$y(x) = \frac{\ln x + 1 + \lambda}{1+\ln^2(x)}, \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

Si se escribe $\lambda_0' = 1+\lambda$, ¡estos son obviamente los mismos que los encontrados anteriormente !

Solución del ejercicio 4787 ▲006995

1. La ecuación diferencial $y' - e^x e^y = 0$ es de variables separadas : en efecto, dividiendo por e^y, se obtiene $-y' e^{-y} = -e^x$. El término de izquierda es la derivada de e^{-y} (y es una función de x), el de la derecha es la derivada de $x \mapsto -e^x$:
$$\frac{de^{-y}}{dx} = \frac{d(-e^x)}{dx},$$
Las derivadas son iguales, esto implica que las dos funciones son iguales salvo una constante aditiva : así y es solución en I si y solo si es derivable en I y $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $e^{-y} = -e^x + c$. Para c fijo, esta igualdad solo es posible si $-e^x + c > 0$, es decir si $c > 0$ y $x < \ln c$. Se obtienen así las soluciones :
$$y_c(x) = -\ln(c - e^x), \quad (\text{para } x \in I_c =]-\infty; \ln c[),$$
donde c es un parámetro real estrictamente positivo. Para hacer que una de las curvas integrales pase por el origen, es necesario que exista $c > 0$ tal que $0 \in I_c$ y $y_c(0) = 0$: dicho de otro modo, $c > 1$ y $c - 1 = 1$. Se trata por lo tanto de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la curva integral buscada es su gráfica, por encima del intervalo $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Su tangente en el origen tiene por pendiente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, es la primera bisectriz. Como, por construcción y_2' es a valores estrictamente positivos, la función y_2 es estrictamente creciente.





2. Se define $z(x) = x + y(x)$: z tiene el mismo dominio de definición que y y es derivable si y solo si y lo es. Reemplazando $y(x)$ por $z(x) - x$ en la ecuación diferencial $y' - e^x e^y = -1$, se obtiene $z' - e^z = 0$, es decir $z' e^{-z} = 1$. Se trata de nuevo de una ecuación de variables separadas : integrando esta igualdad, se obtiene que z es solución en J si y solo si es derivable en J y $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in J$, $e^{-z} = -x + c$. Para c fijo, esta igualdad solo es posible si $c > x$. Se obtienen así las soluciones :
$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x), \quad (\text{para } x \in J_c =]-\infty; c[),$$
donde c es un parámetro real.
Para hacer que una de las curvas integrales pase por el origen, es necesario que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 \in J_c$ y $y_c(0) = 0$: dicho de otro modo, $c > 0$ y $c = 1$. Se trata por lo tanto de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la curva integral buscada es su gráfica, por encima del intervalo $J_1 =]-\infty; 1[$. Su tangente en el origen tiene por pendiente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: es horizontal.

Solución del ejercicio 4788 ▲006996

1. $x^2y' - y = 0 \quad (E_1)$

   Para reducir el estudio a una ecuación diferencial de la forma $y' + ay = b$, primero se resuelve en los intervalos donde el coeficiente de y' no se anula : nos situamos en $]-\infty;0[$ o $]0;+\infty[$.

   (a) **Resolución en $]-\infty;0[$ o $]0;+\infty[$.**

   En cada uno de estos intervalos, la ecuación diferencial se reescribe

$$y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

   que es una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 1 con coeficientes no constantes. Sus soluciones son de la forma $y(x) = \lambda e^{-1/x}$ (en efecto, sobre $]-\infty;0[$ o $]0;+\infty[$, una primitiva de $\frac{1}{x^2}$ es $-\frac{1}{x}$).

   (b) **Juntando en 0.** Una solución y de (E_1) sobre $\mathbb{R}$ debe ser solución en $]-\infty;0[$ y $]0;+\infty[$, existe por lo tanto $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ tales que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_+ e^{-1/x} \text{ si} x > 0 \\ \lambda_- e^{-1/x} \text{ si} x < 0. \end{cases}$$

   Queda por ver si las dos expresiones se pueden juntar para obtener una solución en $\mathbb{R}$: dicho de otro modo, ¿para qué elección de $\lambda_+,\ \lambda_-$ la función y se extiende en 0 a una función derivable que satisface (E_1) ?

   — $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ y $e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, por lo tanto y es extensible por continuidad en 0 si y solo si $\boxed{\lambda_- = 0}$. Se puede entonces escribir $\boxed{y(0) = 0}$, cualquiera que sea la elección de λ_+.

   — Para ver si la función así extendida es derivable en 0, se estudia su tasa de crecimiento :

$$\begin{cases} \text{para } x > 0,\ \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \dfrac{\lambda_+ e^{-1/x}}{x} = -\lambda_+ (\frac{-1}{x}) e^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \\ \text{para } x < 0,\ \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0. \end{cases}$$

   Así la función y es derivable en 0 y $\boxed{y'(0) = 0}$.

   — Por construcción, la ecuación diferencial (E_1) se satisface en $\mathbb{R}^*$. Verificar que igualmente se satisface en el punto $x = 0$: $0^2 \cdot y'(0) - y(0) = -y(0) = 0$.

   (c) **Conclusión.**

   Finalmente, las soluciones en $\mathbb{R}$ son exactamente las siguientes funciones :

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. $xy' + y - 1 = 0 \quad (E_2)$

   Para reducir al estudio de una ecuación diferencial de la forma $y' + ay = b$, primero se resuelve en los intervalos donde el coeficiente de y' no se anula : por lo tanto, se está en $I =]-\infty;0[$ o $I =]0;+\infty[$.

   (a) **Resolución en I.**

   Sobre el intervalo I, la ecuación diferencial se reescribe

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

   que es una ecuación diferencial lineal de orden 1 con coeficientes no constantes.

— Para la ecuación homogénea $y' + \frac{1}{x}y = 0$ una primitiva de $-\frac{1}{x}$ sobre I, es $-\ln|x|$. Las soluciones de la ecuación homogénea son, por lo tanto las $\lambda e^{-\ln|x|} = \lambda \frac{1}{|x|}$. Si se cambia λ por $-\lambda$ si $I =]-\infty; 0[$, se pueden escribir las soluciones de la ecuación homogénea en la forma $y(x) = \lambda \frac{1}{x}$.

— Para encontrar las soluciones de la ecuación con el segundo miembro, se aplica el método de variación de constantes buscando $y(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}$: reemplazando, se ve que y es solución en I si y solo si $\lambda'(x) = 1$. Integrando, se obtiene $\lambda(x) = x$. Una solución particular es, por lo tanto $y_0(x) = 1$.

— Sobre I las soluciones de (E_2) son las $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$, donde λ es un parámetro real.

(b) **Juntando en 0.**

Una solución y de (E_2) sobre $\mathbb{R}$ debe ser solución en $]-\infty; 0[$ y $]0; +\infty[$, existen por lo tanto $\lambda_+,\ \lambda_- \in \mathbb{R}$ tales que

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda_+}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \frac{\lambda_-}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Queda por ver si las dos expresiones se pueden juntar para obtener una solución en $\mathbb{R}$. Se ve inmediatamente, que y tiene un límite (finito) en 0 si y solo si $\boxed{\lambda_+ = \lambda_- = 0}$. En este caso, se puede entonces escribir $\boxed{y(0) = 1}$ y y es la función constante igual a 1, que por supuesto es derivable en $\mathbb{R}$. Además, (E_2) se satisface en el punto $x = 0$.

(c) **Conclusión.**

Finalmente, (E_2) admite en $\mathbb{R}$ una única solución, que es la función constante igual a 1.

Solución del ejercicio 4789 ▲007001

---

1. **Ecuación de Bernoulli**

(a) Se supone que una solución y no se anula. Se divide la ecuación $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ por y^n, da

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

Se establece $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ y entonces $z'(x) = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. La ecuación de Bernoulli se convierte en una ecuación diferencial lineal :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

(b) Ecuación $xy' + y - xy^3 = 0$.

Se buscan las soluciones y que no se anulan. Se puede entonces dividir por y^3, para obtener :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0.$$

Se establece $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, y entonces $z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y(x)^3}$. La ecuación diferencial se expresa entonces $-\frac{1}{2}xz' + z - x = 0$, es decir :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Las soluciones sobre $\mathbb{R}$ de esta última ecuación son las

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x \text{ si } x < 0, \end{cases} \qquad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}.$$

Como se ha puesto $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$, se restringe a un intervalo I en el cual $z(x) > 0$: necesariamente $0 \notin I$, por lo que se considera $z(x) = \lambda x^2 + 2x$, lo cual es estrictamente positivo en I_λ, donde

$$I_\lambda = \begin{cases}]0; +\infty[& \text{si } \lambda = 0 \\ ]0; -\frac{2}{\lambda}[& \text{si } \lambda < 0 \\ ]-\infty; -\frac{2}{\lambda}[\text{o}]0; +\infty[& \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

Se tiene $(y(x))^2 = \frac{1}{z(x)}$, para todo $x \in I_\lambda$ y entonces $y(x) = \varepsilon(x)\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$, donde $\varepsilon(x) = \pm 1$. Por lo tanto y es continua en el intervalo I_λ, y no se anula por hipótesis : de acuerdo con teorema de valores intermediarios, y no puede tomar a la vez valores estrictamente positivas y valores estrictamente negativos, por lo tanto $\varepsilon(x)$ es una constante igual a 1, o a -1. Así, las soluciones buscadas son las :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ o } y(x) = \frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}} \text{ sobre } I_\lambda, \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Notar que la solución nula es también solución.

2. **Ecuación de Riccati**
   (a) Sea y_0 una solución de $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$. Se define $u(x) = y(x) - y_0(x)$, por lo tanto $y = u + y_0$. La ecuación se convierte :

   $$u' + y_0' + a(x)(u + y_0) + b(x)(u^2 + 2uy_0 + y_0^2) = c(x).$$

   Como y_0 es una solución particular entonces

   $$y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 = c(x).$$

   Y por lo tanto la ecuación se simplifica en :

   $$u' + \big(a(x) + 2y_0(x)b(x)\big)u + b(x)u^2 = 0,$$

   que es una ecuación del tipo Bernoulli.

   (b) Ecuación $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.
   — Después de dividir por x^2 de hecho es una ecuación de Riccati en $I =]-\infty; 0[$ o $I =]0; +\infty[$.
   — $y_0 = \frac{1}{x}$ es una solución particular.
   — Se tiene $u(x) = y(x) - y_0(x)$ y entonces $y = u + \frac{1}{x}$. La ecuación $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ se convierte en

   $$x^2\left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(u + \frac{1}{x}\right) - 1$$

   que se simplifica en

   $$x^2\left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = xu$$

   que corresponde a la ecuación de Bernoulli :

   $$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si u no se anula, dividiendo por u^2, esta ecuación se convierte $\frac{u'}{u^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{u}+1=0$. Se define $z(x)=\frac{1}{u}$, la ecuación se convierte en $-z'+\frac{1}{x}z+1=0$. Sus soluciones sobre I son las $z(x)=\lambda x+x\ln|x|$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Así $u(x)=\frac{1}{z(x)}=\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|}$, pero también existe la solución nula $u(x)=0$.

— Conclusión. Como $y=u+\frac{1}{x}$, se obtiene entonces soluciones de la ecuación inicial en $]-\infty;0[$ y $]0;+\infty[$:

$$y(x)=\frac{1}{x}\quad\text{o}\quad y(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\lambda x+x\ln|x|},\quad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

Solución del ejercicio 4790 ▲007002

1. Denotemos $A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$, una primitiva de e^{x^2}. No se sabe explicitar esta primitiva. Las soluciones de $y'+e^{x^2}y=0$ se escriben $f(x)=\lambda e^{-A(x)}$.
   Si $x\geqslant 1$, se tiene por positividad de la integral $A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt\geqslant 0$ y como $e^{t^2}\geqslant 1$, entonces
   $$A(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt\geqslant\int_0^x 1\,dt=x.$$
   En consecuencia :
   $$0\leqslant e^{-A(x)}\leqslant e^{-x}.$$
   Así,
   $$0\leqslant|f(x)|\leqslant|\lambda|e^{-x}$$
   y $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
2. Se supone que y verifica en $\mathbb{R}$ la ecuación, y se escribe $u(x)=y(x)^2+e^{-x^2}y'(x)^2$. La función u es positiva, derivable, y
   $$u'(x)=2y'(x)y(x)+e^{-x^2}2y''(x)y'(x)-2xe^{-x^2}y'(x)^2$$
   usando que $e^{-x^2}y''(x)=-y(x)$ (pues y es solución de la ecuación diferencial) se obtiene :
   $$u'(x)=-2xe^{-x^2}y'^2.$$
   Así la función u es creciente en $]-\infty;0[$ y decreciente en $]0;+\infty[$, por lo tanto para todo $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant u(x)\leqslant u(0)$. Así $y^2(x)\leqslant u(x)$ por construcción y
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ \ |y(x)|\leqslant\sqrt{u(0)}=\sqrt{y(0)^2+y'(0)^2}.$$

Solución del ejercicio 4795 ▲000863

$y''-3y'+2y=e^x$. El polinomio característico es $f(r)=(r-1)(r-2)$ y las soluciones de la ecuación homogénea son, por lo tanto todas las funciones :

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x},\ \text{con}\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Se busca una solución particular de la forma $y_p(x) = P(x)e^x$, se está en la situación (ii) la condición $(*)$ sobre P es : $P'' - P' = 1$, y $P(x) = -x$ sirve. Las soluciones de la ecuación son, por lo tanto las funciones :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución del ejercicio 4796 ▲000864

$y'' - y = -6\cos x + 2x \operatorname{sen} x$. Aquí $f(r) = (r-1)(r+1)$ y la ecuación homogénea tiene por soluciones :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se observa que la función $3\cos x$ verifica la ecuación : $y'' - y = -6\cos x$, nos queda por encontrar una solución y_1 de la ecuación $y'' - y = 2x \operatorname{sen} x$, pues $y_p(x) = 3\cos x + y_1(x)$ es una solución de la ecuación considerada. Para esto, se observa que $2x \operatorname{sen} x = \operatorname{Im}(2xe^{ix})$ y se usa el método descrito anteriormente para encontrar una solución z_1 de la ecuación : $y'' - y = 2xe^{ix}$.
Se busca z_1 bajo la forma $P(x)e^{ix}$, donde P es un polinomio de grado 1 pues $f(i) = -2 \neq 0$. Se tiene $f'(i) = 2i$, la condición $(*)$ sobre P es, por lo tanto : $2iP'(x) - 2P(x) = 2x$ que da luego de la identificación $P(x) = -x - i$. Entonces $y_1(x) = \operatorname{Im}((-x+i)e^{ix}) = -x \operatorname{sen} x - \cos x$. Las soluciones son en consecuencia los funciones :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2\cos x - x \operatorname{sen} x, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Otra forma de encontrar una solución de $y'' - y = 2x \operatorname{sen} x$: Se busca de la forma $y_1(x) = A(x) \operatorname{sen} x + B(x)\cos x$, donde A, B son polinomios de grado 1 pues i no es la raíz de la ecuación característica (*peligro* : para un segundo miembro del tipo $Q(x)\operatorname{sen}(\beta x)e^{\alpha x}$ la discusión es sobre $\alpha + i\beta$ y no sobre α o β...). Se calcula y_1', y_1'' y se aplica la ecuación estudiada a $y_1 \ldots$ se obtiene la condición :

$$(A'' - A - 2B')\operatorname{sen} x + (B'' - B - 2A') = 2x \operatorname{sen} x$$

que se llevará a cabo si : $\begin{cases} A'' - A - 2B' = 2x \\ B'' - B - 2A' = 0. \end{cases}$
Se escribe : $A(x) = ax + b$ y $B(x) = cx + d$, luego de la identificación se obtiene : $a = d = -1$, $b = c = 0$, lo que determina y_1.

Solución del ejercicio 4797 ▲000865

$4y'' + 4y' + 5y = \operatorname{sen} x e^{-x/2}$. La ecuación característica tiene 2 raíces complejas $r_1 = -1/2 + i$ y $r_2 = \overline{r_1}$ y las soluciones de la ecuación homogénea son :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Se tiene $\operatorname{sen} x e^{-x/2} = \operatorname{Im}(e^{(-1/2+i)x})$, así que se empieza buscando una solución z_p de la ecuación con el nuevo nuevo segundo miembro $e^{(-1/2+i)x}$. Como $-1/2 + i$ es una raíz de la ecuación característica, se busca $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$, con P de grado 1. Por tanto la condición $(*)$ sobre P :

$$4P'' + f'(-1/2+i)P' + f(-1/2+i)P = 1$$

se escribe aquí : $8iP' = 1$ ($P' = 0$, $f(-1/2+i) = 0$ y $f'(-1/2+i) = 8i$), por lo que se puede tomar $P(x) = -i/8x$ y $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$ y su parte imaginaria $y_p(x) = \operatorname{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x \operatorname{sen} x e^{-x/2}$ es una solución de la ecuación. Las soluciones son, por tanto, todas las funciones de la forma :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + (c_2 + 1/8x)\operatorname{sen} x), \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solución general es de la forma

$$y(x) = K_1 \cos(x)e^{-x/2} + K_2 \operatorname{sen}(x)e^{-x/2} - \frac{1}{8}xe^{-x/2}\cos(x)$$

(K_1 y K_2 constantes reales) y las condiciones iniciales dan $K_1 = 0$, $K_2 = 1/8$.

Solución del ejercicio 4798 ▲000866

---

1. El polinomio característico asociado con E es : $p(x) = x^2 + 2x + 4$; su discriminante es $\Delta = -12$ y tiene por raíces las 2 números complejos $-1 + i\sqrt{3}$ y $-1 - i\sqrt{3}$. Las soluciones de la ecuación homogénea son, por lo tanto todas las funciones :
$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\operatorname{sen}\sqrt{3}x)$$
obtenida cuando a, b recorren $\mathbb{R}$.
2. El segundo miembro es de la forma $e^{\lambda x}Q(x)$, con $\lambda = 1$ y $Q(x) = x$. Se busca una solución de la ecuación en la forma : $y_p(x) = R(x)e^x$, con R polinomio de grado igual al de Q ya que $p(1) \neq 0$. Se define así $R(x) = ax + b$. Se tiene
$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$
Entonces y_p es solución si y solo si $7ax + 7a + 4b = x$. Se encuentra luego de identificación de coeficientes :
$$a = \frac{1}{7} \text{ y } b = \frac{-4}{49}.$$
La función $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$ es, por lo tanto una solución de E y la forma general de las soluciones de E es :
$$y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x, \ ; a, b \in \mathbb{R}.$$
3. Sea h una solución de E. Las condiciones $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ se llevan a cabo si y solo si
$$a = \frac{53}{49} \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\operatorname{sen}\sqrt{3}}.$$
4. (a) Se tiene : $g'(x) = e^x f'(e^x)$ y $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$, de donde para todo $x \in \mathbb{R}$:
$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$
por lo tanto g es solución de E.

   (b) Recíprocamente, para $f(t) = g(\log t)$, donde g es una solución de E se demuestra que f es dos veces derivable y verifica la ecuación dada en 4. Entonces las funciones f buscadas son de la forma :
$$\frac{1}{t}(a\cos(\sqrt{3}\log t) + b\operatorname{sen}(\sqrt{3}\log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}), \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Solución del ejercicio 4804 ▲000872

---

1. La ecuación característica $r^2-4r+4=0$ tiene una raíz (doble) $r=2$, entonces las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones :

$$y(x)=(c_1x+c_2)\mathrm{e}^{2x}, \text{ donde } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

2. Para $d(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ se puede buscar una solución particular de la forma : $y_1(x)=a\mathrm{e}^{-2x}$, pues -2 no es la raíz de la ecuación característica. Se tiene $y_1'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x}$ y $y_1''(x)=4a\mathrm{e}^{-2x}$. En consecuencia y_1 es solución si y solo si :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ (4a-4(-2a)+4a)\mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{-2x},$$
entonces si y solo si $a=\frac{1}{16}$.
Para $d(x)=\mathrm{e}^{2x}$ se busca una solución de la forma $y_2(x)=ax^2\mathrm{e}^{2x}$, pues 2 es la raíz doble de la ecuación característica. Se tiene $y_2'(x)=(2ax+2ax^2)\mathrm{e}^{2x}$ y $y_2''(x)=(2a+4ax+4ax+4ax^2)\mathrm{e}^{2x}=(4ax^2+8ax+2a)\mathrm{e}^{2x}$. Entonces y_2 es solución si y solo si
$$\forall x\in\mathbb{R},\ (4ax^2+8ax+2a-4(2ax+2ax^2)+4ax^2)\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x},$$
entonces si y solo si $a=\frac{1}{2}$.
3. Se deduce del principio de superposición que la función
$$y_p(x)=\frac{1}{4}(y_1(x)+y_2(x))=\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{8}x^2\mathrm{e}^{2x}$$
es solución de la ecuación del segundo miembro dada en esta pregunta, y la forma general de las soluciones es entonces :
$$y(x)=(c_1x+c_2)\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{8}x^2\mathrm{e}^{2x}, \text{ con } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Solución del ejercicio 4812 ▲000880

Respuesta : $(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}+\frac{\mathrm{e}^x}{25}[(3x-4)\cos x-(4x-2)\operatorname{sen} x]+(\operatorname{sen} x-x\cos x)\mathrm{e}^{-x}$.

Solución del ejercicio 4813 ▲000881

Respuesta : $\frac{1}{2}(-x\cos x+\operatorname{sen} x)+\lambda\cos x+\mu\sinh x$.

Solución del ejercicio 4816 ▲000884

Respuesta : $x\to\dfrac{\lambda x+\mu}{\sqrt{1+x^2}},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Solución del ejercicio 4817 ▲000885

Respuesta : $x\to\lambda x\sinh x+\mu x\cosh x,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Solución del ejercicio 4818 ▲005479

1. La ecuación característica de la ecuación homogénea $y''-2y'+2y=0$ es $r^2-2r+2=0$ cuyas raíces son $1-i$ y $1+i$. Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones de la forma $x\mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen} x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. La ecuación con el segundo miembro se escribe

$$y''-2y'+2y=\frac{x}{4}(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}).$$

Se aplica entonces el principio de superposición de soluciones. Se busca una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$. $1+i$ es raíz simple de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación anterior admite una solución particular de la forma $f:\ x\mapsto(ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. Según la fórmula de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a)\\&\quad-2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x}\\&=(2(1+i)(2ax+b)+2a-2((2ax+b)))e^{(1+i)x}=(2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x}\\&=(4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

luego,

$$f''-2f'+2f=xe^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4ia=1\ \text{ y }\ 2ib+2a=0\Leftrightarrow a=-\frac{i}{4}\ \text{ y }\ b=\frac{1}{4}.$$

Una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(1+i)x}$ es $x\mapsto\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}$. Por conjugación, una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(1-i)x}$ es $x\mapsto\frac{1}{4}(ix^2+x)e^{(1-i)x}$.

Búsqueda de una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$. $-1+i$ no es raíz de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación anterior admite una solución particular de la forma $f:\ x\mapsto(ax+b)e^{(-1+i)x}$. Según la fórmula de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f&=(((-1+i)^2(ax+b)+2(-1+i)a)-2((-1+i)(ax+b)+a)+2(ax+b))e^{(-1+i)x}\\&=((ax+b)(-2i-2(-1+i)+2)+2(-1+i)a-2a)e^{(-1+i)x}\\&=(4(1-i)(ax+b)-2(2-i)a)e^{(1+i)x}=(4(1-i)ax-2(2-i)a+4(1-i)b)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f=xe^{(-1+i)x}&\Leftrightarrow 4(1-i)a=1\ \text{ y }\ 4(1-i)b-2(2-i)a=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{1+i}{8}\ \text{ y }\ b=\frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)}=\frac{(3+i)(1+i)}{32}=\frac{1+2i}{16}.\end{aligned}$$

Una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(-1+i)x}$ es $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x}$. Por conjugación, una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=xe^{(-1-i)x}$ es $x\mapsto\frac{1}{16}(2(1-i)x+1-2i)e^{(-1-i)x}$. Una solución particular de la ecuación $y''-2y'+2y=x\cos x\operatorname{ch} x$ es, por lo tanto

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(2\mathrm{Re}(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{(1+i)x}+\frac{1}{16}(2(1+i)x+1+2i)e^{(-1+i)x})\\&=\frac{1}{32}\mathrm{Re}(4(-ix^2+x)(\cos x+i\operatorname{sen} x)e^x+(2x+1+2(x+1)i)(\cos x+i\operatorname{sen} x)e^{-x}\\&=\frac{1}{32}(4(x\cos x+x^2\operatorname{sen} x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\operatorname{sen} x)e^{-x}).\end{aligned}$$

Las soluciones sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación propuesta son las funciones de la forma $x\mapsto(\frac{1}{8}(x\cos x+x^2\operatorname{sen} x)+\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen} x)e^x+((2x+1)\cos x-2(x+1)\operatorname{sen} x)e^{-x})$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2. La ecuación característica de la ecuación homogénea $y''+6y'+9y=0$ es $r^2+6r+9=0$ que admite la raíz doble $r=-3$. Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones de la forma $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. 2 no es raíz de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación propuesta admite una solución particular de la forma $f:\ x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$. Según la fórmula de LEIBNIZ :

$$\begin{aligned} f''+6f'+9f &= ((4(ax^2+bx+c)+4(2ax+b)+2a)+6(2(ax^2+bx+c)+(2ax+b))+9(ax^2+bx+c))e^{2x} \\ &= (25(ax^2+bx+c)+10(2ax+b)+2a)e^{2x} = (25ax^2+(20a+25b)x+2a+10b+25c)e^{2x} \end{aligned}$$

luego,

$$f''+6f'+9f=x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a=1 \text{ y } 20a+25b=0,\ 2a+10b+25c=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{25},\ b=-\frac{4}{125},\ c=\frac{6}{625}.$$

Una solución particular de la ecuación $y''+6y'+9y=x^2e^{2x}$ es $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}$. Las soluciones sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación propuesta son las funciones de la forma $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2-20x+6)e^{2x}+(\lambda x+\mu)e^{-3x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

3. La ecuación característica de la ecuación homogénea $y''-2y'+y=0$ es $r^2-2r+1=0$ que admite la raíz doble $r=1$. Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones de la forma $x \mapsto e^x(\lambda x+\mu)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. El segundo miembro se escribe $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.
Se aplica el principio de superposición de soluciones. Se busca una solución particular de la ecuación $y''-2y'+y=e^x$. 1 es raíz doble de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación propuesta admite una solución particular de la forma $f:\ x \mapsto ax^2e^x$. Según la fórmula de LEIBNIZ :

$$f''-2f'+f=((ax^2+2(2ax)+2a)-2(ax^2+(2ax))+ax^2)e^{2x}=2ae^x$$

luego,

$$f''-2f'+f=e^x \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Una solución particular de la ecuación $y''-2y'+y=e^x$ es $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$. Se busca una solución particular de la ecuación $y''-2y'+y=e^{-x}$. -1 no es raíz de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación propuesta admite una solución particular de la forma $f:\ x \mapsto ae^{-x}$.

$$f''-2f'+f=(a+2a+a)e^{-x}=4ae^{-x}$$

luego,

$$f''-2f'+f=e^{-x} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Una solución particular de la ecuación $y''-2y'+y=e^{-x}$ es $x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$. Las soluciones sobre $\mathbb{R}$ de la ecuación propuesta son las funciones de la forma $x \mapsto (\frac{x^2}{4}+\lambda x+\mu)e^x+\frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

4. Sea $k \in \mathbb{R}$. La ecuación característica de la ecuación homogénea $y''-2ky'+(1+k^2)y=0$ es $r^2-2kr+1+k^2=0$ cuyo discriminante reducido es igual a $-1=i^2$. Esta ecuación admite así por raíces $k+i$ y $k-i$. Las soluciones de la ecuación homogénea son las funciones de la forma $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x+\mu \operatorname{sen} x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. El segundo miembro se escribe $\operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$.
Resolver entonces la ecuación $y''-2y'+y=e^{(1+i)x}$.
Si $k \neq 1$, $1+i$ no es raíz de la ecuación característica y por lo tanto, la ecuación propuesta admite una solución particular de la forma $f:\ x \mapsto ae^{(1+i)x}$. Así,

$$f''-2kf'+(1+k^2)f=a((1+i)^2-2k(1+i)+1+k^2)e^{(1+i)x}=((k-1)^2-2(k-1)i)ae^{(1+i)x}$$

y por lo tanto,

$$f'' - 2kf' + (1+k^2)f = \mathrm{e}^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k-1}\frac{1}{k-1-2i} = \frac{k-1+2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}.$$

Una solución particular de la ecuación $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{(1+i)x}$ es $x \mapsto \frac{k-1-2i}{(k-1)(k^2-2k+5)}\mathrm{e}^{(1+i)x}$ y una solución particular de la ecuación $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$ es

$$\frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}\operatorname{Im}((k-1-2i)(\cos x + i \operatorname{sen} x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x + (k-1)\operatorname{sen} x)\mathrm{e}^x.$$

Si $k \neq 1$, las soluciones de la ecuación propuesta son las funciones de la forma

$$x \mapsto \frac{1}{(k-1)(k^2-2k+5)}(-2\cos x + (k-1)\operatorname{sen} x)\mathrm{e}^x + (\lambda \cos x + \mu \operatorname{sen} x)\mathrm{e}^{kx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Solución del ejercicio 4819 ▲005480

1. Se supone y dos veces derivable en $]0, +\infty[$. La función $t \mapsto \mathrm{e}^t$ es dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con valores en $]0, +\infty[$ y la función $x \mapsto y(x)$ es dos veces derivable en $]0, +\infty[$. Entonces, porque para todo real t, $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$, la función z es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ como una composición de funciones dos veces derivables.

   Recíprocamente, se supone que z es dos veces derivable en $\mathbb{R}$. La función $x \mapsto \ln x$ es dos veces derivable en $]0, +\infty[$, con valores en $\mathbb{R}$ y la función $t \mapsto z(t)$ es dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Entonces, porque para todo real estrictamente positivo x, $y(x) = z(\ln x)$, la función y es dos veces derivable en $]0, +\infty[$.
2. Para t real, se escribe por lo tanto $x = \mathrm{e}^t$, luego $z(t) = y(x) = y(\mathrm{e}^t)$. Entonces, $z'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) = xy'(x)$ y $z''(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + (\mathrm{e}^t)^2 y''(\mathrm{e}^t) = xy'(x) + x^2 y''(x)$. Entonces, $xy'(x) = z'(t)$ y $x^2 y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$. Por consiguiente,

   $$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = a(z''(t) - z'(t)) + bz'(t) + cz(t) = az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t).$$

   Así,

   $$\forall x > 0,\ ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = 0.$$
3. Se aplica el 2) con $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$. La ecuación a resolver en $\mathbb{R}$ es entonces $z'' - 2z' + z = 0$. Las soluciones de esta ecuación en $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $t \mapsto (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Las soluciones sobre $]0, +\infty[$ de la ecuación inicial son, por lo tanto las funciones de la forma $x \mapsto \lambda x \ln x + \mu x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Solución del ejercicio 4820 ▲006997

1. Esta es una ecuación homogénea de segundo orden. La ecuación característica asociada es $r^2 - 3r + 2 = 0$, que admite dos soluciones : $r = 2$ y $r = 1$. Las soluciones son, por lo tanto las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{2x} + \mu \mathrm{e}^x$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

2. La ecuación característica asociada es $r^2+2r+2=0$, que admite dos soluciones : $r=-1+i$ y $r=-1-i$. Entonces se sabe que las soluciones son, por lo tanto las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por $y(x)=\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\operatorname{sen} x)$ $(A,B\in\mathbb{R})$. Se observa que, usando expresión de las funciones cos y sen usando exponenciales, estas soluciones también se pueden escribir en la forma $\lambda\mathrm{e}^{(-1+i)x}+\mu\mathrm{e}^{(-1-i)x}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.
3. La ecuación característica es $r^2-2r+1=0$, cuyo 1 es raíz doble. Las soluciones de la ecuación homogénea son así de la que forma $(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^x$.
4. Las soluciones de la ecuación homogénea son las $\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen} x$. De hecho, el segundo miembro puede reescribirse $\cos^2 x=1+\cos(2x)$: de acuerdo con principio de superposición, se busca una solución particular bajo la forma $a+b\cos(2x)+c\operatorname{sen}(2x)$. Reemplazando, se encuentra que tal función es una solución si $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=0$. Las soluciones generales son, por lo tanto $\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen} x-\frac{1}{3}\cos(2x)+1$.

Solución del ejercicio 4821 ▲006998

La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea es $r^2-4r+4=0$, para la cual $r=2$ es raíz doble. Las soluciones de la ecuación homogénea son, por lo tanto las $(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{2x}$. Cuando $d(x)=\mathrm{e}^{-2x}$, se busca una solución particular bajo la forma $a\mathrm{e}^{-2x}$, que es apropiado si $a=\frac{1}{16}$. Cuando $d(x)=\mathrm{e}^{2x}$, como 2 es la raíz doble de la ecuación característica, se busca una solución como el producto de e^{2x} por un polinomio de grado 2. Como ya se sabe que $(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{2x}$ es solución de la ecuación homogénea, no es necesario utilizar términos de grado 1 y 0 : se busca una solución de la forma $ax^2\mathrm{e}^{2x}$, que es adecuada si y solo si $a=\frac{1}{2}$. Porque $\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x)=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$, las soluciones generales se obtienen en la forma $y(x)=\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{8}x^2\mathrm{e}^{2x}+(\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{2x}$.

Solución del ejercicio 4822 ▲006999

Las soluciones de la ecuación homogénea son las $\lambda\cos x+\mu\operatorname{sen} x$. Usando $y_1(x)=\cos x$ y $y_2(x)=\operatorname{sen} x$, Se busca soluciones en la forma $\lambda y_1+\mu y_2$, verificando

$$\begin{cases}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=\operatorname{cotan} x\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda'\cos x+\mu'\operatorname{sen} x=0\\ \lambda'(-\operatorname{sen} x)+\mu'\cos x=\operatorname{cotan} x\end{cases}$$

$$\iff\lambda'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen} x\\ \operatorname{cotan} x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen} x\\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}},\quad \mu'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\operatorname{sen} x & \operatorname{cotan} x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen} x\\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}}$$

según las fórmulas de Cramer, donde $\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen} x\\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}=1$. Se obtiene por lo tanto

$$\begin{cases}\lambda'(x)=-\cos x\\ \mu'(x)=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\end{cases}$$

lo que da una primitiva $\lambda(x)=-\operatorname{sen} x$. Para μ, se busca una primitiva $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$ usando el cambio de variable $t=\cos x$ (y entonces $\mathrm{d}t=-\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}x$), se calcula una primitiva

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x &= -\int\frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=t-\int\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &=t+\frac{1}{2}\ln(1-t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)=\cos x+\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\end{aligned}$$

reemplazando, las soluciones generales son los

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (-\operatorname{sen} x)\cos x + \left(\cos x + \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)\right)\operatorname{sen} x$$

que se simplifica $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4823 ▲007000

1. Porque estamos buscando y función de $x \in]0;+\infty[$, y que la aplicación $t \mapsto \mathrm{e}^t$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $]0;+\infty[$, se puede escribir $x = \mathrm{e}^t$ y $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Se tiene entonces $t = \ln x$ y $y(x) = z(\ln x)$. Lo que da :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\ln x) = \mathrm{e}^{-t} z'(t) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x) = -\mathrm{e}^{-2t} z'(t) + \mathrm{e}^{-2t} z''(t) \end{aligned}$$

reemplazando, por lo tanto se obtiene que

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^2 y'' + xy' + y = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$

dicho de otro modo, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \operatorname{sen} t$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalmente, las soluciones de la ecuación original son de la forma

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \operatorname{sen}(\ln x)$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. La aplicación $t \mapsto \tan t$ es biyectiva de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sobre $\mathbb{R}$, se puede escribir $x = \tan t$ y $z(t) = y(\tan t)$. Se tiene entonces $t = \arctan x$ y así :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) &= \frac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\big(z''(\arctan x) - 2xz'(\arctan x)\big) \end{aligned}$$

reemplazando, se obtiene que z es solución de la ecuación diferencial $z'' + mz = 0$. Para resolver esta ecuación, se deben distinguir tres casos :
— $m < 0$: entonces $z(t) = \lambda \mathrm{e}^{\sqrt{-m}t} + \mu \mathrm{e}^{-\sqrt{-m}t}$ y entonces

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu \mathrm{e}^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$

— $m = 0$: $z'' = 0$ y entonces $z(t) = \lambda t + \mu$ y $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,
— $m > 0$: entonces $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \operatorname{sen}(\sqrt{m}t)$ y entonces

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu \operatorname{sen}(\sqrt{m}\arctan x)$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4824 ▲007003

1. Haciendo el cambio de variable $x=\mathrm{e}^t$ (por lo tanto $t=\ln x$) y poniendo $z(t)=y(\mathrm{e}^t)$ (por lo tanto $y(x)=z(\ln x)$, la ecuación $x^2y''+y=0$ se convierte en $z''-z'+z=0$, cuyas soluciones son los $z(t)=\mathrm{e}^{t/2}\cdot\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Dicho de otro modo,
$$y(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right).$$

2. Se supone que f sirve : por hipótesis, f es de clase $\mathscr{C}^1$, por lo tanto $x\mapsto f(\frac{1}{x})$ es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^*$ y por lo tanto, f' también. Así f es necesariamente de clase $\mathscr{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^*$ (de hecho, iterando el razonamiento, se demuestra fácilmente que f es $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}^*$). Derivando la ecuación $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, se obtiene
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
y reutilizando la ecuación :
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f(x).$$
Así se tiene que f es solución de $x^2y''+y=0$ sobre $\mathbb{R}^*$. Necesariamente, existen $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tales que
$$\forall x>0,\ f(x)=\sqrt{x}\big(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\big).$$
Por hipótesis, f es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$, en particular se extiende en 0 de manera $\mathscr{C}^1$. Se busca bajo qué condiciones de λ,μ esto es posible.
Sabemos que, $f(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\right)\xrightarrow[x\to0^+]{}0$, para todo λ,μ ; por lo tanto $f(0)=0$. Pero
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x}}\big(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)+\mu\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x)\big),$$
no tiene límite en 0 si $\lambda\neq0$ o $\mu\neq0$.
En efecto, para $x_n=\mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi)}$, se tiene $x_n\to0$, pero $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\frac{\lambda}{\sqrt{x_n}}$ que admite un límite finito solo si $\lambda=0$.
Del mismo modo con $x'_n=\mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-2n\pi+\frac{\pi}{2})}$ que da $\frac{f(x'_n)-f(0)}{x'_n-0}=\frac{\mu}{\sqrt{x'_n}}$ y por lo tanto, implica $\mu=0$.
En consecuencia, la sola posibilidad es $\lambda=\mu=0$. Así f es la función nula, sobre $[0,+\infty[$. El mismo razonamiento se aplica a $]-\infty,0]$. La función es, por lo tanto necesariamente cero en $\mathbb{R}$.
Recíprocamente, la función constante nula es de hecho la solución del problema inicial.

Solución del ejercicio 4825 ▲004054

1. $y = 2 + \frac{\lambda}{x+2}$.
2. $y = \frac{C + \operatorname{sen} x}{x}$.
3. $y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x + \lambda}{1+x}$.
4. $y = \lambda x - \frac{1}{3x^2}$.
5. $y = \lambda x^{4/3} - x$.
6. $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} + \frac{3 \operatorname{sen} 2x - 6 \cos 2x}{5} + \lambda \mathrm{e}^{-x}$.
7. $y = \frac{\operatorname{argch}(1-2x) + \lambda}{2\sqrt{x^2 - x}}$, para $x < 0$
   $y = \frac{\arcsen(2x-1) + \mu}{2\sqrt{x - x^2}}$, para $0 < x < 1$
   $y = \frac{-\operatorname{argch}(2x-1) + \nu}{2\sqrt{x^2 - x}}$, para $1 < x$.
8. $y = \frac{x-1}{2x} \arctan x + \frac{x+1}{2x} \left(\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \lambda \right)$.
9. $y = \frac{x}{1-x^2} \Big((1+x) \ln x + 1 + \lambda x \Big)$.

Solución del ejercicio 4826 ▲004055

1. $y = (x + a \cos x + b \operatorname{sen} x) \mathrm{e}^x$.
2. $y = (ax + b) \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^x$.
3. $y = \mathrm{e}^{2x} (a \cos 3x + b \operatorname{sen} 3x) + 2 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$.
4. $y = \operatorname{sen} x \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \lambda \cos x + \mu \operatorname{sen} x$ (variación de constantes con sen).
5. $y = (\lambda + \ln |x|) \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{-2x}$.
6. $y = \lambda \cos x + \mu \operatorname{sen} x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P^{(2n)}(x)$.
7. $y = a \cos x + b \operatorname{sen} x$, con $a^2 + b^2 = 1$ o $y = \pm 1$.

Solución del ejercicio 4827 ▲004056

1. $y = -\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$.
2. $y = \lambda \mathrm{e}^{x^2} + \mu \mathrm{e}^{2x^2} + \frac{2x^2 + 3}{16}$.
3. $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$.
4. $y = ax + bx^2 + 1 - 2x \operatorname{sen} x$.
5. $y = x^2 \ln |x+1| + \lambda \left(x^2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + x - \frac{1}{2} \right) + \mu x^2$.
6. $y = \frac{-1 + a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}{x^2}$.
7. $y = \lambda \sqrt{x^2 + 3} + \mu x - 1$.
8. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \Rightarrow y = a(\operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x) + b(x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

Solución del ejercicio 4828 ▲004057

1. $2n(2n-3)a_n = -9a_{n-3} \Rightarrow y = \begin{cases} a_0 \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ a_0 \operatorname{ch}(|x|^{3/2}) & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$

   Solución general : $y = \begin{cases} a \cos u + b \operatorname{sen} u & \text{si } x \geqslant 0 \\ a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$ con $u = |x|^{3/2}$.
2. $n(n+1)a_n = a_{n-2} \Rightarrow y = a_0 \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.
   Solución general : $y = \frac{a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x}{x}$.
3. $(2n+1)(2n+2)a_{n+1} = a_n \Rightarrow y = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{x})$.
   Solución general en $\mathbb{R}^+$: $u = a \operatorname{ch}(\sqrt{x}) + b \operatorname{sh}(\sqrt{x})$.

4. $n(n-1)a_n+(n+1)a_{n-2}=0 \Rightarrow y=a_0(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}+a_1 z.$

   Solución general : $y=(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}(a+bF(x))+bx$, con $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2/2}\,dt$.

5. $(n+2)(n+3)a_n=a_{n-2} \Rightarrow y=\dfrac{x-\operatorname{sh}x}{x^3}$.

   Solución general : $y=\dfrac{a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x+x}{x^3}$.

6. $na_{n+1}=(n+1)a_n \Rightarrow y=\dfrac{\lambda x}{(1-x)^2}$.

   Solución general : $y=\dfrac{ax+b(1+x\ln|x|)}{(1-x)^2}$.

Solución del ejercicio 4829 ▲004058

$|\operatorname{sen}x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} \Rightarrow y=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)(16n^4-4n^2+1)}$.

Esta serie converge y define una función de clase $\mathscr{C}^4$ solución de la ecuación.

Unicidad : las soluciones de la ecuación homogénea son combinación de e^{jx}, e^{-jx}, e^{j^2x} y e^{-j^2x}, entonces no π-periódicas.

Solución del ejercicio 4830 ▲004059

$k\notin\mathbb{Z}: y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(k^2-n^2)}+a\cos kx+b\operatorname{sen}kx.$

$k\in\mathbb{Z}$: reemplazar $\frac{\cos kx}{k^2(k^2-k^2)}$ por $\frac{x\operatorname{sen}kx}{2k^3}$.

Solución del ejercicio 4831 ▲004060

$y=x+1+\lambda\mathrm{e}^x$ o $y=x-1+\lambda\mathrm{e}^{-x}$.

Solución del ejercicio 4832 ▲004061

$$y=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1 & \text{si } x<0\\ 1-\cos x+\operatorname{sen}x & \text{si } 0\leqslant x<\frac{3\pi}{2}\\ \mathrm{e}^{3\pi/2-x}-1 & \text{si } x\geqslant\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Solución del ejercicio 4833 ▲004062

$4xz''+2z'+z=\frac{-1}{y^2}\left(4xy''+2y'-y-\frac{8xy'^2}{y}\right)=\frac{2}{y^3}(y^2+4xy'^2)$, por lo tanto $\frac{y'}{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{-4x}}$ y $y=\lambda\exp(\pm\sqrt{-x})$, para $x<0$.

Resolución sin indicación : se establece $x=\varepsilon t^2$ y $y(x)=z(t)$, de donde $\frac{d^2z}{dt^2}+\varepsilon z=0$.

Solución del ejercicio 4834 ▲004063

1. $g(x)=b\mathrm{e}^{-ax}+\int_0^x \mathrm{e}^{a(t-x)}f(t)\,dt.$

2. $\displaystyle\int_0^X g(x)\,dx = \frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-aX}) + \int_0^X \int_t^X \mathrm{e}^{a(t-x)} f(t)\,dx\,dt = \frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-aX}) + \int_0^X \frac{1-\mathrm{e}^{a(t-X)}}{a} f(t)\,dt$

$\displaystyle\to \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, cuando $X \to +\infty$.

Entonces la integral de g converge. Se demostrar la convergencia absoluta por acotación elemental.

Solución del ejercicio 4835 ▲004064

1. $x = 2\alpha\mathrm{e}^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)\mathrm{e}^{2t}, \quad y = (\gamma t + \beta)\mathrm{e}^{2t}, \quad z = \alpha\mathrm{e}^t + (\gamma t + \beta)\mathrm{e}^{2t}$.
2. $y = -1 + \lambda\mathrm{e}^{\alpha t} + \mu\mathrm{e}^{\beta t}, \quad z = -1 + \lambda(1+\alpha)\mathrm{e}^{\alpha t} + \mu(1+\beta)\mathrm{e}^{\beta t}, \quad \alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
3. $y = \frac{-3\cos t - 13\,\mathrm{sen}\, t}{25} + (at+b)\mathrm{e}^{2t}, \quad z = \frac{-4\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t}{25} + (at+a+b)\mathrm{e}^{2t}$.
4. $x = (a+bt+ct^2)\mathrm{e}^t, \quad y = \left(a + \frac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)\mathrm{e}^t, \quad z = \left(a - \frac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)\mathrm{e}^t$.
5. $x = -(b+c)\mathrm{e}^t + (a+b+c)\mathrm{e}^{2t}$,
   $y = \frac{1}{2}(-a+5b+3c) - 2(b+c)\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(a+b+c)\mathrm{e}^{2t}$,
   $z = \frac{1}{2}(a-5b-3c) + 3(b+c)\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}(a+b+c)\mathrm{e}^{2t}$.
6. $x = (at^2 + (a+b+\frac{1}{2})t + a+b+c)\mathrm{e}^t$,
   $y = (at^2 + (b-a+\frac{1}{2})t + a+c)\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$,
   $z = (-at^2 + (a-b-\frac{1}{2})t - c)\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$.

Solución del ejercicio 4836 ▲004065

$y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Rightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t$.
Resolución por DSE $\Rightarrow x = a(1+t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

Solución del ejercicio 4839 ▲004068

Derivar dos veces. $f(x) = \frac{\mathrm{sen}\, x - x\cos x}{2} + \lambda\,\mathrm{sh}\, x + \mu\cos x$.

Solución del ejercicio 4840 ▲004069

1. $z' + \frac{z}{\mathrm{th}\, x} = 0$.
2. $y = \frac{ax+b}{\mathrm{sh}\, x}$.
3.
4.
5.

Solución del ejercicio 4841 ▲004070

1. espectro $= \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{\lambda t}$.
2. Para $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \Leftrightarrow f = af_\lambda + bf_{-\lambda}$.
   Para $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-t^2/2}$.
3. $\Phi^2(y) = -2y \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{-t^2/2}\left(a\cos(t\sqrt{2}) + b\,\mathrm{sen}(t\sqrt{2})\right)$.

Solución del ejercicio 4842 ▲004071

1. $\lambda = n^2 : P(X) = aX^n$.
2. $\lambda > 0 : f(x) = \alpha x^{\sqrt{\lambda}} + \beta x^{-\sqrt{\lambda}}$.
   $\lambda = 0 : f(x) = \alpha + \beta \ln x$.
   $\lambda < 0 : f(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{-\lambda}\ln x\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}\ln x\right)$.
3. $\lambda \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha \exp\lambda\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right)$.

Solución del ejercicio 4843 ▲004072

1. $\lambda = 2k$, $P = \alpha(X-1)^{n-k}(X+1)^{n+k}$, para $-n \leqslant k \leqslant n$.
2. $\lambda = 0$, $P = \alpha X^{2n}$.
3. $\lambda = 0$, $P = \alpha(X^2+1)^n$.

Solución del ejercicio 4844 ▲004073

$y = \int_0^x g(t)\,dt \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{x} \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1\pm\sqrt{2}}$. Continuidad en $0 \Rightarrow g(x) = \alpha x^{1+\sqrt{2}}$.

Solución del ejercicio 4845 ▲004074

Estudiar $\mathrm{e}^{-A}(y-z)$, $A' = a$.

Solución del ejercicio 4846 ▲004075

Punto de concurrencia : $\left(x_0 - \frac{1}{a(x_0)}, -\frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$.

Solución del ejercicio 4848 ▲004077

1.
2. Sean y_0 una solución particular y y_1 una solución no nula de la ecuación homogénea : $y_1(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}$, con $A' = a$. Entonces $y_0(x+T) = y_0(x) + \alpha y_1(x)$, y para una solución y cualquier, $y = y_0 + \lambda y_1$: $y(x+T) - y(x) = (\alpha + \lambda(\mathrm{e}^{-I} - 1))y_1(x)$, donde $I = \int_0^T a(t)\,dt$.

Solución del ejercicio 4849 ▲004078

$\lambda \neq 0 : f(x) = a\operatorname{sen}(\alpha x)$, $\alpha \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$
$\lambda = 0 : f = 0$.

Solución del ejercicio 4850 ▲004079

$f(1) = \mathrm{e}^{-k}\int_0^1 g(t)\mathrm{e}^{kt}\,dt$. Con Cauchy-Schwarz se obtiene $\int_0^1 (f'(t)+kf(t))^2\,dt \geqslant \frac{2k}{1-\mathrm{e}^{-2k}}f(1)^2 = 9\frac{2k}{1-\mathrm{e}^{-2k}}$. Hay igualdad para $f(t) = 3\frac{\mathrm{e}^{kt}-\mathrm{e}^{-kt}}{\mathrm{e}^{k}-\mathrm{e}^{-k}}$.

Solución del ejercicio 4851 ▲004080

1. $u_n - u(t_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t_n}^{t} u'(x)\,dx\,dt$ y se mayora la integral interna por Cauchy-Schwarz.
2. $w+w'' = u'$, por lo tanto $w(t) = \int_{t_n}^{t}\mathrm{sen}(t-x)u'(x)\,dx + \alpha\cos t + \beta\,\mathrm{sen}\,t$, luego

$$\int_{t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt \int_{t_n}^{t_n+2\pi}\int_{t_n}^{t}\mathrm{sen}(t-x)u'(x)\,dx\,dt = \int_{t_n}^{t_n+2\pi}\int_{x}^{t_n+2\pi}\mathrm{sen}(t-x)u'(x)\,dt\,dx =$$
$$\int_{t_n}^{t_n+2\pi} u'(x)(\cos(t_n-t)-1)\,dx \to 0, \text{ cuando } n\to\infty$$

y $\int_{t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt = w(t_n) - w(t_n+2\pi) = -\int_{t_n}^{t_n+2\pi}\mathrm{sen}(t-x)u'(x)\,dx$.

Solución del ejercicio 4852 ▲004081

1. Fórmula de Duhamel : $y(t) = -\int_0^t \mathrm{e}^{t-x}f(x)\,dx + \lambda\mathrm{e}^t$. Por convergencia dominada, la integral tiende a 0, cuando t tiende a $-\infty$, entonces todas las soluciones de (E) están acotadas en un vecindario de $-\infty$. Para $t\geqslant 0$ se tiene $y(t) = \mathrm{e}^t\left(\lambda - \int_0^t \mathrm{e}^{-x}f(x)\,dx\right)$ por lo que a lo sumo hay un valor de λ tal que y sea eventualmente acotada en un vecindario de $+\infty$, es $\lambda = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\,dx$.

   Para esta escogencia se tiene : $|y(t)| = \left|\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{t-x}f(x)\,dx\right| \leqslant \int_t^{+\infty}|f(x)|\,dx \to 0$, cuando $t\to+\infty$.
2.
$$\int_a^b |F(t)|\,dt \leqslant \int_a^b\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{t-x}|f(x)|\,dxdt \leqslant \int_a^b\int_a^x \mathrm{e}^{t-x}|f(x)|\,dtdx + \int_b^{+\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{t-x}|f(x)|\,dtdx$$
$$\leqslant \int_a^b (1-\mathrm{e}^{a-x})|f(x)|\,dx + \int_b^{+\infty}(\mathrm{e}^{b-x}-\mathrm{e}^{a-x})|f(x)|\,dtdx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

   por lo tanto F es integrable. $F' = F - f$ es también integrable y $\int_{-\infty}^{+\infty}F'(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$, de donde $\int_{-\infty}^{+\infty}F = \int_{-\infty}^{+\infty}f$.

Solución del ejercicio 4853 ▲004082

Expresar $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ y $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, luego resolver :

$$\begin{cases} F(x) = x-1+G'(x) \\ G(x) = x-1+F'(x) \\ F(0) = G(0) = 0. \end{cases}$$

Se encuentra $f(x) = g(x) = 1$.

Solución del ejercicio 4854 ▲004083

y' es acotada, y admite un límite finito en todo punto finito, por lo que la solución no extensible se define en $\mathbb{R}$. Una solución y es de clase $\mathscr{C}^\infty$ dada la ecuación y $y'' = (1+\operatorname{sen}(x+y))\cos(x+y)$ es del signo de $\cos(x+y)$. En un punto (x_0, y_0) tal que $x_0 + y_0 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ se tiene $y'' = 0$ y $\frac{d}{dx}(x+y) \neq 0$, por lo tanto y'' cambia de signo y hay una inflexión. En un punto (x_0, y_0) tal que $x_0 + y_0 \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$ se tiene $x + y =$cte (pues $y = \text{cte} - x$ es solución y existe unicidad) por lo que no existe inflexión.

Solución del ejercicio 4855 ▲004084

1. Teorema de Cauchy–Lipschitz lineal.
2. $x \mapsto A(-x)$ y $x \mapsto -B(-x)$ son soluciones de (E) y verifican las condiciones iniciales.
3. Resolver $u''(x) + ku(x) = 2d\cos(x)u(x)$ por la fórmula de Duhamel.

Solución del ejercicio 4856 ▲004085

1.
2. Sí, $\ker u = \{0\}$.
3. Sí : si $g \in E$, entonces $f = t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s-t} g(s)\,ds$ pertenece à E y $f + f' = g$.

Solución del ejercicio 4857 ▲004086

1.
2. $u_p(x) = -\displaystyle\int_0^x pf(t)\operatorname{sh}\left(\frac{x-t}{p}\right)dt + \frac{\operatorname{sh}(x/p)}{\operatorname{sh}(1/p)}\int_0^1 pf(t)\operatorname{sh}\left(\frac{1-t}{p}\right)dt.$
3. TCD : cuando $p \to \infty$ $u_p(x) \to -\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt + x\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt = \int_0^x t(1-x)f(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)f(t)\,dt$ (segunda primitiva de $-f$ se anula en 0 y 1).

Solución del ejercicio 4858 ▲004087

1. Basta demostrar que las soluciones de $(\mathscr{E})$ son desarrollables en serie entera. El método de coeficientes indeterminados da $n(n-1)a_n = (\lambda-1)a_{n-4}$ si $n \geqslant 4$ y $a_2 = a_3 = 0$, de donde $a_{4k} = \dfrac{(\lambda-1)^k a_0}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i-1)}$, $a_{4k+1} = \dfrac{(\lambda-1)^k a_1}{\prod_{i=1}^{k} 4i(4i+1)}$, $a_{4k+2} = a_{4k+3} = 0$. Se obtiene una serie de radio infinito para todo escogencias de a_0, a_1, entonces las soluciones DSE forman un espacio vectorial de dimensión 2 y se tienen así todas las soluciones.
2. Se debe tener $H''(x) - 2xH'(x) + ((2-\lambda)x^2 - 1)H(x) = 0$. Si H es una función polinomial no nula, examinando los términos de grado superior se tiene una contradicción. Entonces no existe tal solución.

Solución del ejercicio 4859 ▲004088

Considerar $h(t) = a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$ y resolver la desigualdad diferencial $h'(t) \leqslant g(t)h(t)$ por la fórmula de Duhamel.

Solución del ejercicio 4860 ▲004089

$f(x) = \int_0^x g(t)\operatorname{sen}(x-t)\,dt + \lambda\cos x + \mu\operatorname{sen} x$, con $g = f + f''$.

Solución del ejercicio 4861 ▲004090

Se establece $\varphi(t) = f''(t) + f'(t) + f(t)$.
$f(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t \varphi(u)\mathrm{e}^{u/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}(u-t)}{2}\right), du + A\cos\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}u}{2}\right)\right]$.

Solución del ejercicio 4863 ▲004092

1. $y = \int_\alpha^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)-A(x)}\,dt + y(\alpha)\mathrm{e}^{-A(x)}$, con $A' = a$ y $A(\alpha) = 0$.
   Como $a \geqslant 1$, se tiene $A(x) \geqslant x-\alpha$ y $A(t) - A(x) \leqslant t - x$, para $t \leqslant x$.
   Entonces $|y| \leqslant \int_\alpha^z |b(t)|\mathrm{e}^{t-x}\,dt + \int_z^x |b(t)|\mathrm{e}^{t-x}\,dt + |y(\alpha)|\mathrm{e}^{\alpha-x} \leqslant \|b\|_\infty \mathrm{e}^{z-x} + \sup_{[z,+\infty[}|b| + |y(\alpha)|\mathrm{e}^{\alpha-x}$.
   Se escoge z tal que $z \to +\infty$ y $x - z \to +\infty \Rightarrow$ lqfd.
2. Como $A(t) - A(x) \leqslant t - x$, para $t \leqslant x$, la integral $\int_{-\infty}^x b(t)\mathrm{e}^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge y proporciona una solución nula en $-\infty$. Como $\mathrm{e}^{-A(x)} \to +\infty$, cuando $x \to -\infty$, es el único.

Solución del ejercicio 4864 ▲004093

1. Si no, la convexidad de y es incorrecta.
2. Si existe x tal que $z(x) = z'(x) = 0$, entonces $z = 0$, lo que es absurdo.
   Si existe x tal que $z(x) = 0 \neq z'(x)$, luego por convexidad, z no puede anularse afuera.

Solución del ejercicio 4866 ▲004095

Si y_1 y y_2 son dos soluciones acotadas entonces y_1'' y y_2'' son, por lo tanto integrables $y_i'(t) \to 0$, cuando $t \to +\infty$ y $W_{y_1,y_2}(t) = 0$, para todo t.

Solución del ejercicio 4867 ▲004096

1. Se supone $y \neq 0$ si no y no tiene ceros consecutivos. Como $y(x_0) = 0$, se tiene $y'(x_0) \neq 0$ si no $y = 0$. Esto implica que cada cero de y es aislado, entonces la noción de ceros consecutivos es pertinente. En fin, $y'(x_0)$ y $y'(x_1)$ son de signos opuestos si no existe otro cero en $]x_0, x_1[$.
2. $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$ (no simplificable).

3. Si z no se anula en $]x_0,x_1[$, entonces W' es de signo constante en este intervalo. El examen de los diversos casos posibles de signo trae una contradicción entre los signos de W' y de $W(x_1)-W(x_0)$ si $z(x_0)\neq 0$ o $z(x_1)\neq 0$.
4. Se toma $r=q$, $z=u$. Si $u(x_0)\neq 0$, entonces u admite un cero en $]x_0,x_1[$ e intercambiando los roles de u y y, el siguiente cero posible de u viene luego de y_1. Si no, $u=\dfrac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Solución del ejercicio 4868 ▲004097

1.
2. (a) Wronskiano.

   (b) $\left(\frac{z}{y}\right)'=\dfrac{z'y-zy'}{y^2}$ es de signo constante $\Rightarrow \frac{z}{y}$ es monótona. $\frac{z}{y}$ admite límites infinitos en u y v. TAI

Solución del ejercicio 4869 ▲004098

$z'=-\frac{\lambda}{t^2}\operatorname{sen}(t-a)y(t)$, entonces si y no se anula en $]a,a+\pi[$, entonces z es estrictamente monótono en $[a,a+\pi]$. Pero $z(a+\pi)-z(a)=y(a+\pi)+y(a)\Rightarrow$ contradicción de signo.

Solución del ejercicio 4870 ▲004099

1. El conjunto de ceros es localmente finito según Cauchy-Lipchitz. Si y no se anula en $[a,+\infty[$, por ejemplo $y>0$, entonces y es cóncava positiva por lo tanto minorada, con lo cual $y''\to-\infty$, lo que implica $y',y\to-\infty$, contradicción.
2.
3. Sea $b_n=\frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Entonces $b_{n+1}\leqslant 2\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)\leqslant b_n$ y $b_n\to 0$, por lo tanto $b_n\sim b_{n+1}\sim 2\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)$.
   Entonces $\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{2}$, $b_n\sim\frac{1}{2n}$ y $a_n\sim 2\ln n$.

Solución del ejercicio 4871 ▲004100

Las formas lineales $y\mapsto y(a)$ y $y\mapsto y(b)$ son linealmente independiente en el espacio de soluciones de la ecuación homogénea.

Solución del ejercicio 4872 ▲004101

Se vuelve al caso $z=0$. Sea x tal que $y(x)<0$ y $y'(x)=0$. Entonces $y''(x)<0$, por lo tanto y no es minimal en x. Entonces y no tiene mínimo local en $]a,+\infty[$.

Solución del ejercicio 4873 ▲004102

Si $x_i(0)>0$, para todo i se obtiene una contradicción al considerar el menor t tal que existe i, con $x_i(t)<0$. Caso general : dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales…

Solución del ejercicio 4874 ▲004103

$f'(x) = \frac{x+i}{2(x^2+1)} f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{\pi}(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x\right)$.

Solución del ejercicio 4875 ▲004104

1. Sea f no idénticamente nula verificando $f'' = \lambda\Delta f$, con $\lambda > 0$: en todo intervalo donde f es estrictamente positiva, f es estrictamente convexa por lo que no se puede anular en ambos bordes; igual cuando f es estrictamente negativa, hay una contradicción. El caso $\lambda = 0$ es trivial.
2. $(f \mid g) = \int_a^b f'(t)g'(t)\,dt = -\int_a^b f''(t)g(t)\,dt = -\int_a^b f(t)g''(t)\,dt.$
3. (a)

   (b) Si f_λ tiene un número finito de ceros, sea x_n el último y $A = \max(x_n, 2)$.
   Sobre $[A, +\infty[$, f es de signo constante, ε, y se tiene $f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$, de donde $f_\lambda(x) = \int_A^x \operatorname{sen}((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}) + \beta\operatorname{sen}(x\sqrt{-\lambda})$.
   En particular $f_\lambda(A) + f_\lambda\left(A + \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\right) = \int_A^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \operatorname{sen}((x-t)\sqrt{-\lambda})\varphi(t)\,dt$ es del signo de $-\varepsilon$, absurdo.
   Si el conjunto de ceros de f admite un punto de acumulación x se tiene $f_\lambda(x) = f_\lambda'(x) = 0$, de donde $f_\lambda = 0$, absurdo.

Solución del ejercicio 4876 ▲004105

1. La extensión indica que se puede aplicar la relación de Parseval a f y f' sabiendo que $c_0(f) = 0$, por ser impar y $|c_n(f)| = |c_n(f')|/n \leqslant |c_n(f')|$, para $n \neq 0$.
2. $x''(t) + q(t)x(t) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi x'^2 = \left[xx'\right]_0^\pi - \int_0^\pi xx'' = \int_0^\pi qx^2 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0.$
   Observación : no es necesario tener q de clase $\mathscr{C}^1$.
3. Existe x_0 de clase $\mathscr{C}^2$ verificando la ecuación diferencial. Por diferencia con x_0 se vuelve al caso $f = 0$ y es necesario demostrar que la aplicación $\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x(0), x(\pi))$ es biyectiva, denotando $\mathscr{S}$ el espacio de soluciones de la ecuación homogénea $x'' + qx = 0$. Por lo tanto φ es lineal y es inyectiva de acuerdo a la pregunta anterior, por lo tanto es una biyección porque $\dim \mathscr{S} = 2$.
   Observación : la hipótesis f de clase $\mathscr{C}^1$ es inútil, continua es suficiente.

Solución del ejercicio 4877 ▲004106

x y $1/x$ son solución $\Rightarrow x'^2 + qx^2 = 0$ por lo tanto una condición necesaria es : $q(t) \leqslant 0$ y $q = -x'^2/x^2$ es de clase $\mathscr{C}^1$. Recíprocamente, se supone q negativa de clase $\mathscr{C}^1$ y sea $r(t) = \sqrt{-q(t)}$.
Si x es solución de $x' = r(t)x$, entonces en todo intervalo I, donde q no se anula se tiene $x'' = r(t)x' + r'(t)x$, por lo tanto

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = (r(t) + p(t))x' + (r'(t) + q(t))x = (r(t)p(t) + r'(t))x$$

y una segunda condición necesaria es : $p(t)q(t) = -\frac{1}{2}q'(t)$. Estas dos condiciones son suficientes si q es estrictamente negativa.

Solución del ejercicio 4878 ▲004107

La sucesión (X_k) de funciones definidas por $X_k(t) = X_0$, $x_{k+1}(t) = X_0 + \int_0^t A(u)X_k(u)\,du$ converge localmente uniformemente a X y $X_k(t)$ es claramente con componentes positivas para $t \geqslant 0$.

Solución del ejercicio 4879 ▲004108

Para $n = 1$ y $A(t) = a > 0$ se encuentra luego de los "conjuros" usuales (ecuación homogénea, variación de constantes y formación de la integral) que $x:\ t \mapsto \int_0^1 F(tu)u^{a-1}\,du$ es la única solución extensible en 0 y que es de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$.
Para $n = 1$ y A no constante, se encuentra lo mismo :

$$X(t) = \int_0^1 F(tu)u^{A(0)-1}\exp\Big(\int_t^{tu} \frac{A(v)-A(0)}{v}\,dv\Big)\,du$$

y se ve que X es $\mathscr{C}^\infty$ escribir $\frac{A(v)-A(0)}{v} = \int_0^1 A'(vw)\,dw$.
Para n cualquiera y A constante : entonces la función $X:\ t \mapsto \int_0^1 u^{A(0)-I}F(tu)\,du$ es la única solución extensible en 0, acordando que $u^{A(0)-I} = \exp((A(0)-I)\ln(u))$ (la integral converge en 0, pues $u^{A(0)-I} = O(u^{\alpha-1}\ln(u)^n)$, para todo $\alpha > 0$ minorando las partes reales de los valores propios de $A(0)$). Para A no constante, se escribe la ecuación en forma integral :

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t) \Leftrightarrow X(t) = \int_0^1 u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

Sea $a > 0$ a elegir. Se define $E = \mathscr{C}([-a,a],\mathbb{C}^n)$ y para $X \in E$:

$$\Phi(X) = t \mapsto \int_0^1 u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du.$$

Se tiene fácilmente : $\Phi(X) \in E$ si $X \in E$ y Φ es contractante en E, para $\|\ \|_\infty$ si a se elige suficientemente pequeño. Entonces la ecuación $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$ admite una solución (única) definida en un vecindario de 0, y esta solución se puede extender a una solución en $\mathbb{R}$ porque el teorema de Cauchy–Lipschitz se aplica fuera de 0. Por otro lado, se tiene :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \int_0^1 u^{A(0)-I}\{F(tu) - (A(tu)-A(0))X(tu)\}\,du,$$

lo que demuestra por inducción en $k \in \mathbb{N}$ que X es de clase $\mathscr{C}^k$ sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4880 ▲004109

---

1. Expresar $F(t) = \int_{t_0}^t f(u)\,du$ y resolver la desigualdad diferencial $F'(t) \leqslant g(t) + kF(t)$ por la fórmula de Duhamel.
2. $M' = AM \Rightarrow |||M'(t)||| \leqslant K|||M(t)||| \Rightarrow |||M(t) - I||| \leqslant K\int_{t0}^t |||M(u)|||\,du$
$$\Rightarrow |||M(t)||| \leqslant 1 + K\int_{t0}^t |||M(u)|||\,du \Rightarrow |||M(t)||| \leqslant 1 + K\int_{t0}^t \mathrm{e}^{K(t-u)}\,du = \mathrm{e}^{K(t-t_0)}.$$
$(M-N)' = (A-B)M + B(M-N)$

$$\Rightarrow |||(M-N)'(t)||| \leqslant \eta e^{K(t-t_0)} + (K+\eta)|||(M-N)(t)|||$$

$$\Rightarrow |||(M-N)(t)||| \leqslant \frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1) + (K+\eta)\int_{t_0}^{t} |||(M-N)(u)|||\,du$$

$$\Rightarrow |||(M-N)(t)||| \leqslant \underbrace{\frac{\eta}{K}(e^{K(t-t_0)}-1) + \frac{(K+\eta)\eta}{K}\int_{t_0}^{t} e^{(K+\eta)(t-u)}(e^{K(u-t_0)}-1)\,du}_{=e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)}.$$

3. $X_0(t) = M_0(t)\alpha$ y $Y_0(t) = N_0(t)\alpha$, de donde $\|X_0(t)-Y_0(t)\| \leqslant e^{K(t-t_0)}(e^{\eta(t-t_0)}-1)\|\alpha\|$.

Solución del ejercicio 4881 ▲005874

En todo el ejercicio, se denota (E) la ecuación diferencial considerada y (E_H) la ecuación homogénea asociada.

1. Las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ forman un $\mathbb{R}$-espacio afín de dirección el espacio de soluciones de (E_H) sobre $\mathbb{R}$ que es de dimensión 1. La función $x \mapsto 1$ es una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ y la función $x \mapsto e^{-x}$ es una solución no nula de (E_H) sobre $\mathbb{R}$. Entonces
$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto 1+\lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

2. Las soluciones de (E_H) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x \mapsto \lambda e^{x/2}$. Determinar ahora una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$.
1a solución. Existe una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$ de la forma $x \mapsto a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Sea f una tal función. Entonces, para todo real x,
$$2f'(x) - f(x) = 2(-a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x) - (a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x) = (-a+2b)\cos x + (-2a-b)\,\mathrm{sen}\,x.$$
Por consiguiente, f es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - f(x) = \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a+2b = 1 \\ -2a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ y } b = \frac{2}{5}.$$
$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \tfrac{1}{5}(-\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x) + \lambda e^{x/2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$
2a solución. Por el método de variación de constantes, existe una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$ de la forma $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$, donde λ es una función derivable en $\mathbb{R}$. Sea f una tal función.
$$f \text{ solución de } (E) \text{ sobre} \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2}\right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x)$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x.$$
Por lo tanto,
$$\int \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i}\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}e^{-x/2}\mathrm{Re}\left((\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)(-1-2i)\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x) + C.$$

Así, se puede tomar $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\operatorname{sen} x)$ que proporciona la solución particular $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2\operatorname{sen} x)$.

3. Dado que las funciones $x \mapsto -2$ y $x \mapsto xe^{2x}$ son continuas en $\mathbb{R}$, el conjunto de soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 1. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-2x}f)'(x) = x \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

4. La ecuación característica (E_c) asociada a la ecuación homogénea $y'' - 4y' + 4y = 0$ es $z^2 - 4z + 4 = 0$ y admite $z_0 = 2$ por raíz doble. Se sabe que las soluciones de (E_H) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Porque 2 es la raíz doble de la ecuación característica, la ecuación $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ admite una solución particular f_0 de la forma : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = ax^2e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$. La fórmula de LEIBNIZ proporciona para todo real x,

$$f_0''(x) - 4f_0'(x) + 4f_0(x) = a(4x^2 + 8x + 2)e^{2x} - 4a(2x^2 + 2x)e^{2x} + 4ax^2e^{2x} = 2ae^{2x},$$

y f_0 es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $a = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

5. La ecuación característica (E_c) asociada a la ecuación homogénea $y'' + 4y = 0$ es $z^2 + 4 = 0$ y admite dos raíces no reales conjugadas $z_1 = 2i$ y $z_2 = \overline{z_1} = -2i$. Se sabe que las soluciones de (E_H) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\operatorname{sen}(2x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Una solución real de la ecuación $y'' + 4y = \cos(2x)$ es la parte real de una solución de la ecuación $y'' + 4y = e^{2ix}$. Dado que el número $2i$ es raíz simple de (E_c), esta última ecuación admite una solución de la forma $f_1 :\ x \mapsto axe^{2ix}$, $a \in \mathbb{C}$.

   La fórmula de LEIBNIZ proporciona para todo real x,

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = a((-4x + 4i)e^{2ix} + 4xe^{2ix}) = 4iae^{2ix}.$$

   y f_1 es solución de $y'' + 4y = e^{2ix}$ si y solo si $a = \frac{1}{4i}$.

   Se obtiene $f_1(x) = \frac{1}{4i}xe^{2ix} = \frac{1}{4}x(-i\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x))$ que proporciona una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x)$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(2x) + \lambda\cos(2x) + \mu\operatorname{sen}(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

6. La ecuación característica (E_c) asociada a la ecuación (E_H) es $z^2 + 2z + 2 = 0$ y admite dos raíces no reales conjugadas $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$. Se sabe que las soluciones de (E_H) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma $x \mapsto (\lambda\cos(x) + \mu\operatorname{sen}(x))e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Para todo real x, $\cos(x)\operatorname{ch}(x) = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\operatorname{ch}(x)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$.

   Se denota (E_1) la ecuación $y'' + 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ y (E_2) la ecuación $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$.

Si f_1 es una solución de (E_1) y f_2 es una solución de (E_2), entonces $f_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(f_1 + f_2)$ es una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ según el principio de superposición de soluciones.

• (E_1) admite una solución particular de la forma $f_1 : x \mapsto a\mathrm{e}^{(1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. Para todo real x,

$$f_1''(x) + 2f_1'(x) + 2f_1(x) = a((1+i)^2 + 2(1+i) + 2)\mathrm{e}^{(1+i)x} = a(4+4i)\mathrm{e}^{(1+i)x}$$

y f_1 es solución de (E_1) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $a = \frac{1}{4+4i} = \frac{1-i}{8}$. Se obtiene $f_1(x) = \frac{1-i}{8}\mathrm{e}^{(1+i)x}$.

• (E_2) admite una solución particular de la forma $f_2 : x \mapsto ax\mathrm{e}^{(-1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$.

La fórmula de LEIBNIZ proporciona para todo real x,

$$f_2''(x) + 2f_2'(x) + 2f_2(x) = a(((-1+i)^2 x + 2(-1+i)) + 2((-1+i)x + 1) + 2x)\mathrm{e}^{(-1+i)x} = 2ia\mathrm{e}^{(-1+i)x}$$

y f_2 es solución de (E_2) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. Se obtiene $f_2(x) = -\frac{i}{2}\mathrm{e}^{(-1+i)x}$.

• Una solución particular f_0 de (E) sobre $\mathbb{R}$ es, por lo tanto definida para todo real x por

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{8}\mathrm{e}^{(1+i)x} - \frac{i}{2}\mathrm{e}^{(-1+i)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x))\mathrm{e}^{x} - \frac{i}{2}(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x))\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x) + \mathrm{sen}(x))\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(x)\mathrm{e}^{-x}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{16}(\cos(x) + \mathrm{sen}(x))\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x)\mathrm{e}^{-x} + (\lambda\cos(x) + \mu\,\mathrm{sen}(x))\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Solución del ejercicio 4882 ▲005875

1. Se define $g = f' + \alpha f$. La función g es continua en $\mathbb{R}$ y la función f es solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $y' + \alpha y = g$. Además, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$. Luego,

$$\begin{aligned} f' + \alpha f = g &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\alpha x}f'(x) + \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}g(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{e}^{\alpha x}f)'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\alpha x}f(x) = f(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)\mathrm{e}^{-\alpha x} + \mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt. \end{aligned}$$

porque $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y que $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-\alpha x} = 0$.

Verificar entonces que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt = \frac{\ell}{\alpha}$ sabiendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Se supone todo primeramente $\ell = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $A_1 > 0$ tal que $\forall t \geqslant A_1$, $|g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Para $x \geqslant A_1$,

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)t}|g(t)|\,dt \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)t} \times \frac{\varepsilon}{2}\,dt \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)(x-A_1)}\right) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} \mathrm{e}^{\alpha t}g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora $\lim_{x\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| = 0$ y por lo tanto, existe $A \geqslant A_1$ tal que $\forall x > A$,

$$e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $x > A$, se tiene $\left|e^{-\alpha x}\int_0^{x} e^{\alpha t}g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Se ha así demostrado que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \frac{\ell}{\alpha}$.
Se vuelve ahora al caso general ℓ cualquiera.

$$f'+\alpha f \underset{x\to+\infty}{\to} \ell \Rightarrow f'+\alpha f-\ell \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right)'+\alpha\left(f-\frac{\ell}{\alpha}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$
$$\Rightarrow f-\frac{\ell}{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\ell}{\alpha}.$$

$$\boxed{\forall f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall \alpha\in\mathbb{C} \text{ tal que } \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \lim_{x\to+\infty}(f'(x)+\alpha f(x)) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.}$$

2. $f''+f'+f = (f'-jf)'-j^2(f'-jf)$. De acuerdo a 1), como $\mathrm{Re}(-j^2) = \mathrm{Re}(-j) = \frac{1}{2} > 0$,
$$f''+f'+f \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow (f'-jf)'-j^2(f'-jf) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f'-jf \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$
$$\boxed{\forall f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}(f''(x)+f'(x)+f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

3. Demostrar el resultado por inducción sobre n.
   • Para $n = 1$, es el 1) en el caso particular $\ell = 0$ (si $P = X-\alpha$, $P(D)(f) = f'-\alpha f$, con $\mathrm{Re}(-\alpha) > 0$).
   • Sea $n\in\mathbb{N}^*$. Se supone que el resultado adquirido para n. Sea P un polinomio de grado $n+1$ cuyas raíces tienen partes reales estrictamente negativas y tales que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0$.
   Sea α una raíz de P. P se escribe $P = (X-\alpha)Q$, donde Q es un polinomio cuyas raíces tienen todas una parte real estrictamente negativa. Porque
   $$P(D)(f) = ((D-\alpha\,\mathrm{Id})\circ(Q(D))(f) = (Q(D)(f))'-\alpha(Q(D)(f)) \underset{+\infty}{\to} 0,$$
   se deduce que $Q(D)(f) \underset{+\infty}{\to} 0$ según el caso $n = 1$ ya que $f \underset{+\infty}{\to} 0$ por hipótesis de recurrencia. El resultado es demostrado por recurrencia.

Solución del ejercicio 4883 ▲005876

Se define $g = f+f''$. Por hipótesis, la función g es una aplicación continua y positiva en $\mathbb{R}$ y además, la función f es solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $y''+y = g$ sobre $\mathbb{R}$. Resolver esta ecuación diferencial, denotada (E), sobre $\mathbb{R}$. Las soluciones de la ecuación homogénea asociada son las funciones de la forma $x\mapsto \lambda\cos x+\mu\,\mathrm{sen}\,x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Según el método de variación de constantes, existe una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$ de la forma $f_0:\ x\mapsto \lambda(x)\cos(x)+\mu(x)\,\mathrm{sen}(x)$, donde además las funciones λ y μ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \lambda'\cos(x)+\mu'\,\mathrm{sen}(x) = 0 \\ -\lambda'\,\mathrm{sen}(x)+\mu'\cos(x) = g. \end{cases}$$

Las fórmulas de CRAMER proporcionan $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda'(x) = -g(x)\,\mathrm{sen}(x)$ y $\mu'(x) = g(x)\cos(x)$. Se puede entonces tomar $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda(x) = -\int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(t)\,dt$ y $\mu(x) = \int_0^x g(t)\cos(t)\,dt$, luego

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = -\cos(x)\int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(t)\,dt + \mathrm{sen}(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt.$$

Así, las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma

$$x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\,\mathrm{sen}(x) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt,\ \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

La función f es una de estas soluciones. Así, existe $(\lambda_0,\mu_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda_0\cos(x) + \mu_0\,\mathrm{sen}(x) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt$ y así para todo real x,

$$\begin{aligned} f(x)+f(x+\pi) &= \int_0^{x+\pi} g(t)\,\mathrm{sen}(x+\pi-t)\,dt + \int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt \\ &= -\int_0^{x+\pi} g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt + \int_0^x g(t)\,\mathrm{sen}(x-t)\,dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t)\,\mathrm{sen}(t-x)\,dt = \int_0^{\pi} g(u+x)\,\mathrm{sen}(u)\,du \geqslant 0. \end{aligned}$$

Se ha demostrado que si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+f''(x) \geqslant 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi) \geqslant 0$.

Solución del ejercicio 4884 ▲005877

En todo el ejercicio, se denota (E) la ecuación propuesta y (E_H) la ecuación homogénea asociada.

1. Se denota J uno de los dos intervalos $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$. Sobre J, la ecuación (E) se escribe aún $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Como la función $x \mapsto -\frac{2}{x}$ es continua en J, las soluciones de (E) sobre J constituyen un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1. En fin, la función $x \mapsto x^2$ es una solución no nula de (E) sobre J y entonces $\mathscr{S}_J = \left\{x \mapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

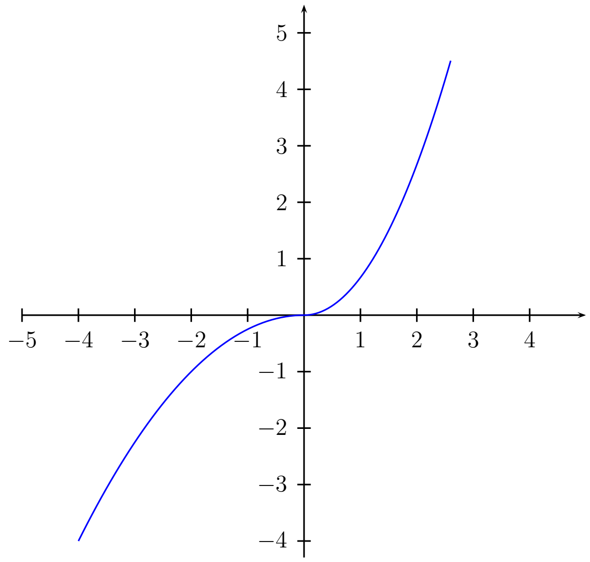
   Sea f una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$. Necesariamente,

   $$\exists (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   Recíprocamente, una tal función f se define en $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}^*$, solución de (E) sobre $\mathbb{R}^*$ y comprobar la ecuación de nuevo (E) en 0 si además es derivable en 0. Entonces, tal función es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si es derivable en 0. Es geométricamente claro que f es derivable en 0, para toda escogencia de λ_1 y λ_2 y entonces f es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$, para toda escogencia de λ_1 y λ_2.

   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^2 & \text{si } x < 0, \end{cases} (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \right\}}$$

   Se observa que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2. En efecto, para toda solución f de (E) sobre $\mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_1 \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} + \lambda_2 \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$. Entonces $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \mathrm{vect}(f_1,f_2)$, con (f_1,f_2) claramente libre. Un ejemplo de gráfico de solución es dado a la figura siguiente.



2. El conjunto de soluciones en $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$ es $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Sea f una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$. Necesariamente, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   Recíprocamente, una tal función f es solución de la ecuación (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si es derivable en 0. Es geométricamente claro que f es derivable en 0 si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2$ y entonces
   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$
   En este caso, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1.
3. El conjunto de soluciones en $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$ es $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Sea f una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$. Necesariamente, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   Recíprocamente, una tal función f es solución de la ecuación (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si es derivable en 0. Es geométricamente claro que f es derivable en 0 si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y entonces
   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}.}$$
   En este caso, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 0.
4. Sea f una función derivable en $]0,+\infty[$.
   $$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left(\frac{1}{x^2}f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x \in J,\ f(x) = x^3 + \lambda x^2. \end{aligned}$$
   $$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

5. Si f es una solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación $x^2y'+2xy=1$, entonces $0^2\times f'(0)+0\times f(0)=1$, lo que es imposible. Entonces

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\varnothing.}$$

6. • **Resolución en $]-\infty,0[$, $]0,1[$ y $]1,+\infty[$.** Sea I uno de los tres intervalos $]-\infty,0[$, $]0,1[$ o $]1,+\infty[$. Sobre I, la ecuación (E) se escribe aún $y'+\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2x(1-x)}$.

   Dado que las funciones $x\mapsto\frac{1}{2x}$ y $x\mapsto\frac{1}{2x(1-x)}$ son continuas en I, las soluciones de (E) sobre I constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 1.

   Sea f una función derivable en I. Para $x\in I$, se denota ε el signo de x sobre I.

$$\begin{aligned}f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=\frac{1}{2x(1-x)}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}f'(x)+\frac{1}{2x}e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}f(x)=\frac{e^{\frac12\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\,f)'(x)=\frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)}\Leftrightarrow \forall x\in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\,f)'(x)=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.\end{aligned}$$

   Determinar entonces las primitivas de la función $x\mapsto\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sobre I.

   Usando $u=\sqrt{\varepsilon x}$ y entonces $x=\varepsilon u^2$, luego $du=2\varepsilon u du$.

$$\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)}2\varepsilon u\,du=\int\frac{1}{1-\varepsilon u^2}\,du.$$

   -**Resolución en $]-\infty,0[$.**

   En este caso, $\varepsilon=-1$, luego $\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{1}{1+u^2}\,du=\arctan(u)+\lambda=\arctan(\sqrt{-x})+\lambda$.

   Así,

$$\begin{aligned}f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x)=\arctan(\sqrt{-x})+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=\frac{\arctan(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[}=\left\{x\mapsto\frac{\arctan(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

   -**Resolución en $]0,1[$ y $]1,+\infty[$.**

   En este caso, $\varepsilon=1$, luego $\int\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\,dx=\int\frac{1}{1-u^2}\,du=\begin{cases}\frac12\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) & \text{si } x>1\\ \operatorname{argth}(\sqrt{x}) & \text{si } x\in]0,1[.\end{cases}+\lambda$

   -**Resolución en $]0,1[$ y $]1,+\infty[$.**

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,1[}=\left\{x\mapsto\frac{\operatorname{argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}\text{ y }\mathscr{S}_{]1,+\infty[}=\left\{x\mapsto\frac{\frac12\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

   -**Resolución en $]0,+\infty[$ y en $\mathbb{R}$.** Si f es una solución de (E) sobre $]0,+\infty[$ o en $\mathbb{R}$, entonces $0\times f'(1)+0\times f(1)=1$ lo que es imposible. Entonces

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \varnothing \text{ y } \mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

-**Resolución en $]-\infty,1[$.** Si f es una solución de (E) sobre $]-\infty,1[$, entonces necesariamente existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall x \in]-\infty,1[$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\operatorname{argth}\left(\sqrt{x}\right)+\lambda}{\sqrt{x}} & \text{si } 0<x<1. \end{cases}$

Recíprocamente, tal función es solución si y solo si es derivable en 0. Cuando x tiende a 0 para valores inferiores,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\lambda_1 + \sqrt{-x} - \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3} + o\left((\sqrt{-x})^3\right)\right) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) =$$
$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x).$$

y cuando x tiende a 0 para valores superiores,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2 + \sqrt{x} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} + o\left((\sqrt{x})^3\right)\right) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x}} + f(0) + \frac{x}{3} + o(x).$$

Así, f es derivable a la derecha y a la izquierda en 0 si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y en este caso, cuando x tiende a 0, $f(x) = f(0) + \frac{x}{3} + o(x)$, lo que demuestra que f es derivable en 0.
En resumen, f es solución de (E) sobre $]-\infty,1[$ si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[} = \left\{x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\operatorname{argth}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} & \text{si } 0<x<1. \end{cases}\right\}}$$

7. **Resolución de (E) sobre $]-\infty,0[$ y en $]0,+\infty[$.** Sea I uno de los dos intervalos $]-\infty,0[$ o $]0,+\infty[$. Se denota ε el signo de x sobre I. Sobre I, (E) se escribe aún $y' + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)y = \varepsilon x^2$. Porque las dos funciones $x \mapsto \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)$ y $x \mapsto \varepsilon x^2$ son continuas en I, las soluciones de (E) sobre I constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 1. Sea f una función derivable en I.

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x) = \varepsilon x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)} f'(x) + \varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)} f(x) = \varepsilon x^2 e^{\varepsilon x - \varepsilon\ln(\varepsilon x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left((\varepsilon x)^{-\varepsilon} e^{\varepsilon x} f\right)'(x) = x^{-\varepsilon} x^2 e^{\varepsilon x} \end{aligned}$$

• Si $I =]0,+\infty[$, $\varepsilon = 1$ y

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x) = xe^x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x) = (x-1)e^x + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2 - x + \lambda x e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto x^2 - x + \lambda x\mathrm{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

• Si $I =]-\infty, 0[$, $\varepsilon = -1$ y

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(-x\mathrm{e}^{-x} f\right)'(x) = x^3\mathrm{e}^{-x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(x\mathrm{e}^{-x} f\right)'(x) = -x^3\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int -x^3\mathrm{e}^{-x}\,dx = x^3\mathrm{e}^{-x} - 3\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx = (x^3+3x^2)\mathrm{e}^{-x} - 6\int x\mathrm{e}^{-x}\,dx = (x^3+3x^2+6x+6)\mathrm{e}^{-x} + \lambda$ y entonces

$$\begin{aligned} f \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ x\mathrm{e}^{-x} f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)\mathrm{e}^{-x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2+3x+6+\frac{6+\lambda\mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto x^2+3x+6+\tfrac{6+\lambda\mathrm{e}^x}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Resolución de (E) sobre $\mathbb{R}$. Si f es una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$, necesariamente existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2\mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x + \lambda_1 x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2\mathrm{e}^x}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Recíprocamente, tal función es solución en $\mathbb{R}$ si y solo si es derivable en 0. Cuando x tiende a 0 para valores superiores, $f(x) = -x + o(x) + \lambda_1 x(1+o(1)) = (\lambda_1 - 1)x + o(x)$. Así, f es derivable a la derecha en 0, para toda escogencia de λ_1 y $f'_d(0) = \lambda_1 - 1$. Cuando x tiende a 0 para valores inferiores,

$$f(x) = 6+3x+o(x) + \frac{6+\lambda_2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = \frac{6+\lambda_2}{x} + 6 + \lambda_2 + \left(3+\frac{\lambda_2}{2}\right)x + o(x)$$

Así, f es derivable a la izquierda en 0 si y solo si $\lambda_2 = -6$. En este caso, cuando x tiende a 0 para valores inferiores, $f(x) = o(x)$ y $f'_g(0) = 0$. Ahora, f es derivable en 0 si y solo si f es derivable a la derecha y a la izquierda en 0 y $f'_d(0) = f'_g(0)$. Esto es equivalente a $\lambda_2 = -6$ y $\lambda_1 = 1$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+6+\frac{6(1-\mathrm{e}^x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}\right\}.}$$

Solución del ejercicio 4885 ▲005878

• Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $a_n = (-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}$. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no se anula y por $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Así, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 4$ y de acuerdo con la regla de ALEMBERT, $R_a = \frac{1}{4}$. Para x tal que la serie converge, se establece $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$.

• Sea $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Para $n \in \mathbb{N}$, se tiene $(n+1)a_{n+1} + 4na_n = 2a_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se multiplica los dos miembros de esta igualdad por x^n, luego se suma en n. Se obtiene $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ o aún $(1+4x)f'(x) = 2f(x)$. Además, $f(0) = a_0 = 1$. Pero entonces

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ (1+4x)f'(x) = 2f(x) &\Rightarrow \forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)} f'(x) - \frac{2}{1+4x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)} f(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}}\right)'(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}} = \frac{f(0)}{\sqrt{1+0}} \\
&\Rightarrow \forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\ f(x) = \sqrt{1+4x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n = \sqrt{1+4x}.}$$

• Para $n \in \mathbb{N}$, se escribe $u_n = \dfrac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$. La sucesión u es estrictamente positiva a parir del rango 1 y para $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n-1)}{4(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2} < 1.$$

Así, la sucesión u es decreciente a partir del rango 1. Además, según la fórmula de STIRLING,

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}(2\pi n)(2n)4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Así, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. En resumen, la sucesión u es positiva y decreciente a partir del rango 1 y $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Se deduce que la serie numérica de término general $(-1)^{n-1}\dfrac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = (-1)^{n-1}u_n$ converge en virtud del criterio especial a series alternadas (teorema de LEIBNIZ).

• La función f por lo tanto, se define en $\frac{1}{4}$. Verificar que f es continua en $\frac{1}{4}$. Para $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ y $n \in \mathbb{N}$, se escribe $f_n(x) = a_n x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$. Para cada x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no se anula y la sucesión $((-1)^{n-1}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es positiva a partir del rango 1. Luego, para $n \geqslant 1$ y $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| x = \frac{2(2n-1)}{n+1}x \leqslant \frac{2(2n-1)}{n+1} \times \frac{1}{4} = \frac{4n-2}{4n+4} < 1.$$

Se deduce que para cada x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la sucesión digital $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece de rango 1. Según una mayoración clásica del resto a de orden n de una serie alternada, para $n \geqslant 1$ y $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = |a_{n+1}|x^{n+1} \leqslant \frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}} = u_{n+1},$$

y entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\left\{\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|,\ x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]\right\} \leqslant u_{n+1}$. Porque la sucesión (u_n) tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, se ha demostrado que la serie de funciones de término general f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a f sobre $\left]0, \frac{1}{4}\right]$. Dado que cada función f_n es continua en $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, f es continua en $\left]0, \frac{1}{4}\right]$ y en particular en $\frac{1}{4}$. Pero entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\ x<\frac{1}{4}}} \sqrt{1+4x} = \sqrt{1+4\times\frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = \sqrt{2}.}$$

Solución del ejercicio 4886 ▲005879

1. Se define $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$, luego $A = PDP^{-1}$, donde $D = \text{diag}(2,3)$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pongamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, luego $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x' = 4x-2y \\ y' = x+y \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \Leftrightarrow X_1' = DX_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ y_1' = 3y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1(t) = ae^{2t} \\ y_1(t) = be^{3t} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{3t} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} ae^{2t} + 2be^{3t} \\ ae^{2t} + be^{3t} \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2. Porque la función $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$ es continua en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, las soluciones reales en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ del sistema propuesto constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2.

Resolución de sistema homogéneo asociado. Se define $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ y, en particular A es diagonalizable en $\mathbb{C}$.

Un vector propio de A asociada al valor propio i es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ y un vector propio de A asociada al valor propio $-i$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Entonces se sabe que las soluciones complejas en $\mathbb{R}$ del sistema homogéneo asociado son las funciones de la forma $X:\ t \mapsto ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Determinar entonces las soluciones reales del sistema homogéneo.

$$X \text{ real} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \overline{b}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow b = \overline{a} \text{ (porque la familia de funciones } (e^{it}, e^{-it}) \text{ es libre.)}$$

Las soluciones reales sobre $\mathbb{R}$ del sistema homogéneo son las funciones de la forma

$$X:\ t \mapsto a\mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} + \overline{a}\mathrm{e}^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix} = 2\mathrm{Re}\left(a\mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Planteando $a = \lambda + i\mu$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}\left(a\mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}\right) &= 2\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix}(\lambda+i\mu)(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)\\(\lambda+i\mu)(1-i)(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)\end{pmatrix}\right)\\ &= 2\begin{pmatrix}\lambda\cos t - \mu\,\mathrm{sen}\,t\\ \lambda(\cos t + \mathrm{sen}\,t) + \mu(\cos t - \mathrm{sen}\,t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora, el par (λ,μ) recorre $\mathbb{R}^2$ si y solo si el par $(2\lambda,2\mu)$ recorre $\mathbb{R}^2$ y renombrando las constantes λ y μ, se obtiene las soluciones reales del sistema homogéneo :

$$t \mapsto \lambda\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,t\\ \cos t - \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Resolución del sistema. Según el método de variación de constantes, existe una solución particular del sistema de la forma $t \mapsto \lambda(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,t\\ \cos t - \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix}$, donde λ y μ son dos funciones derivables en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tales que para todo real t de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\lambda'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,t\\ \cos t - \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Las fórmulas de CRAMER proporcionan

$$\lambda'(t) = \frac{1}{\cos t}(\cos t - \mathrm{sen}\,t) = 1 - \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t} \ \text{ y } \ \mu'(t) = -\frac{1}{\cos t}(\cos t + \mathrm{sen}\,t) = -1 - \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t}.$$

Se puede tomar $\lambda(t) = t + \ln(\cos t)$ y $\mu(t) = -t + \ln(\cos t)$ y se obtiene la solución particular

$$\begin{aligned}x(t) &= (t + \ln(\cos t))\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t + \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix} + (-t + \ln(\cos t))\begin{pmatrix}-\mathrm{sen}\,t\\ \cos t - \mathrm{sen}\,t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}t(\cos t + \mathrm{sen}\,t) + \ln(\cos t)(\cos t - \mathrm{sen}\,t)\\ 2t\,\mathrm{sen}\,t + 2\cos t\ln(\cos t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} = \left\{t \mapsto \begin{pmatrix}t(\cos t + \mathrm{sen}\,t) + \ln(\cos t)(\cos t - \mathrm{sen}\,t) + \lambda\cos t - \mu\,\mathrm{sen}\,t\\ 2t\,\mathrm{sen}\,t + 2\cos t\ln(\cos t) + \lambda(\cos t + \mathrm{sen}\,t) + \mu(\cos t - \mathrm{sen}\,t)\end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

3. Porque la función $t \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\ t\end{pmatrix}$ es continua en $\mathbb{R}$, las soluciones en $\mathbb{R}$ del sistema propuesto constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2.

   Resolución de sistema homogéneo asociado. Se define $A = \begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 6\end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda-4)(\lambda-7)$. Un vector propio de ${}^tA$ asociada al valor propio 4 es $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y un vector propio de

${}^tA$ asociada al valor propio 7 es $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Estos vectores proporcionan interesantes combinaciones lineales de las ecuaciones :

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)' = 4(x+y) + \mathrm{e}^t + t \\ (x-2y)' = 7(x-2y) + \mathrm{e}^t - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x(t) + y(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + \lambda \mathrm{e}^{4t} \\ x(t) - 2y(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{6} + \frac{2t}{7} + \frac{2}{49} + \mu \mathrm{e}^{7t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x(t) = -\frac{5\mathrm{e}^t}{6} - \frac{3t}{14} - \frac{33}{392} + +2\lambda \mathrm{e}^{4t} + \mu \mathrm{e}^{4t} \\ y(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{6}\frac{15t}{28} - \frac{81}{784} + \lambda \mathrm{e}^{4t} - \mu \mathrm{e}^{7t}. \end{cases}$$

4. Se define $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) - 2(-\lambda) + (-\lambda + 2) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 26\lambda + 12$$

$$= -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = -(\lambda - 6)(\lambda - 2 + \sqrt{2})(\lambda - 2 - \sqrt{2}),$$

y, en particular A es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

$$(x,y,z) \in \ker(A - 6I) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \ \text{ y } \ x = y.$$

$\ker(A - 6I)$ es la recta vectorial generada por el vector $(1,1,0)$.

$$(x,y,z) \in \ker(A - (2+\sqrt{2})I) \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{2})x + y - z = 0 \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2z = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \\ x - y - (1+\sqrt{2})((3-\sqrt{2})x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ (-4+2\sqrt{2})x - \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x - (2+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = (3-\sqrt{2})x + y \\ y = (-2\sqrt{2}+2)x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (-2\sqrt{2}+2)x \\ z = (5-3\sqrt{2})x. \end{cases}$$

$\ker(A - (2+\sqrt{2})I)$ es la recta vectorial generada por el vector $(1, 2-2\sqrt{2}, 5-3\sqrt{2})$.
Un cálculo conjugado muestra que $\ker(A - (2-\sqrt{2})I)$ es la recta vectorial generada por el vector $(1, 2+2\sqrt{2}, 5+3\sqrt{2})$. Entonces se sabe que las soluciones de sistema homogéneo $t \mapsto a\mathrm{e}^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$ $b\mathrm{e}^{(2+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2\sqrt{2} \\ 5-3\sqrt{2} \end{pmatrix} + c\mathrm{e}^{(2-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+2\sqrt{2} \\ 5+3\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

5. Se define $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)^3$.

El teorema de CAYLEY-HAMILTON permite entonces afirmar que $(A-I)^3 = 0$. Se sabe que las soluciones de sistema $X' = AX$ son las funciones de la forma $t \mapsto e^{tA}X_0$, donde $X_0 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Por tanto, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{t(A-I)} \times e^{tI} \text{ (porque las matrices } t(A-I) \text{ y } tI \text{ conmutan)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right) \times e^t I = e^t \left(\sum_{n=0}^{2} \frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right) \\
&= e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son las funciones de la forma $t \mapsto e^{tA}X_0 = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} (a+(a+b)t)e^t \\ (b-(a+b)t)e^t \\ ((a+b)t+c)e^t \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Ahora,

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1. \end{cases}$$

La solución buscada es $t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ (1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4887 ▲005880

Sea $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Para $t \in \mathbb{R}$, se escribe $g(t) = \|X(t)\|_2^2 = (X(t)|X(t))$. La función g es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real t

$$g'(t) = 2\,(X(t)|X'(t)) = 2\,(X(t)|AX(t)) = 2^tX(t)AX(t) \geqslant 0.$$

Así, la función g es creciente en $\mathbb{R}$ y lo mismo ocurre con la función $\sqrt{g}:\ t \mapsto \|X(t)\|_2$.

Solución del ejercicio 4888 ▲005881

1. Dado que las funciones $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$ y $t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ son continuas en $]0,+\infty[$, el conjunto de soluciones sobre $]0,+\infty[$ del sistema propuesto es un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2.

Resolución de sistema homogéneo asociado. El par de funciones $(x,y) = (1,t)$ es solución del sistema homogéneo asociado en $]0,+\infty[$. Para cada real estrictamente positivo t, ambos vectores

$\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ constituyen una base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, pues $\begin{vmatrix}1&0\\t&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Busquemos las soluciones del sistema homogéneo en la forma $t\mapsto \alpha(t)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}+\beta(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(t)\\t\alpha(t)+\beta(t)\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}x'=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2t^2}y\\y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2t}y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha'=-\frac{1}{2t}\alpha+\frac{1}{2t^2}(t\alpha+\beta)\\t\alpha'+\alpha+\beta'=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2t}(t\alpha+\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha'=\frac{\beta}{2t^2}\\t\alpha'+\beta'=\frac{\beta}{2t}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha'=\frac{\beta}{2t^2}\\\frac{\beta}{2t}+\beta'=\frac{\beta}{2t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta'=0\\\alpha'=\frac{\beta}{2t^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]0,+\infty[,\ \begin{cases}\beta(t)=\lambda\\\alpha'(t)=\frac{\lambda}{2t^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]0,+\infty[,\ \begin{cases}\beta(t)=\lambda\\\alpha(t)=-\frac{\lambda}{2t}+\mu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]0,+\infty[,\ \begin{cases}x(t)=-\frac{\lambda}{2t}+\mu\\y(t)=\frac{\lambda}{2}+\mu t\end{cases}$$

Ahora, para todo real estrictamente positivo t, $w(t)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2t}&1\\\frac{1}{2}&t\end{vmatrix}=-1\neq 0$ y por lo tanto, las dos funciones $t\mapsto\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $t\mapsto\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ son dos soluciones independientes del sistema homogéneo en $]0,+\infty[$. Las soluciones sobre $]0,+\infty[$ del sistema homogéneo son las funciones de la forma $t\mapsto \lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$.

Búsqueda de una solución particular del sistema por el método de variaciones de constantes.

Existe una solución particular del sistema de la forma $t\mapsto\lambda(t)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\mu(t)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$, donde λ y μ son dos funciones derivables en $]0,+\infty[$ tal que para todo real estrictamente positivo t, $\lambda'(t)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\mu'(t)\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t\\t^2\end{pmatrix}$. Las fórmulas de CRAMER proporcionan $\lambda'(t)=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}2t&1\\t^2&t\end{vmatrix}=-t^2$ y $\mu'(t)=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2t}&2t\\\frac{1}{2}&t^2\end{vmatrix}=\frac{3t}{2}$. Se puede tomar $\lambda(t)=-\frac{t^3}{3}$ y $\mu(t)=\frac{3t^2}{4}$ y se obtiene la solución particular

$$X(t)=-\frac{t^3}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2t}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{3t^2}{4}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11t^2/12\\7t^3/12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{11t^2}{12} - \frac{\lambda}{2t} + \mu \\ \frac{7t^3}{12} + \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2. Dado que las funciones $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ y $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$ son continuas en $\mathbb{R}$, el conjunto de soluciones sobre $\mathbb{R}$ del sistema propuesto es un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2.
Resolución de sistema homogéneo asociado. Pares de funciones $X_1 = (x,y) = (t,-1)$ y $(x,y) = (1,t)$ son soluciones del sistema homogéneo asociado en $\mathbb{R}$. Además, por cada real t, $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2+1 \neq 0$. El par de funciones (X_1, X_2) es, por lo tanto un sistema fundamental de soluciones en $\mathbb{R}$ del sistema homogéneo $X' = AX$. Las funciones solución del sistema homogéneo $X' = AX$ son las funciones de la forma $t \mapsto \lambda\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Búsqueda de una solución particular del sistema por el método de variación de constantes. Existe una solución particular del sistema de la forma $t \mapsto \lambda(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, donde λ y μ son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que para todo real t, $\lambda'(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$.
Las fórmulas de CRAMER proporcionan $\lambda'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ 3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$ y $\mu'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & 3t/(t^2+1) \end{vmatrix} = \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}$. Se puede tomar $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$. Entonces, $\int \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt = 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 6\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$, luego

$$\begin{aligned} l\int \frac{1}{t^2+1}\,dt &= \frac{t}{t^2+1} - \int t \times \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt, \end{aligned}$$

y entonces $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right) + C$. Se puede tomar $\mu(t) = \frac{2t}{t^2+1} - 3\arctan t$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t}{t^2+1} - 3\arctan t + \lambda t + \mu \\ -\frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t^2}{t^2+1} - 3t\arctan t - \lambda + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Si además $y = \frac{1}{x}$, el sistema se escribe $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ -\operatorname{sh}(2t)\frac{x'}{x^2} = -x + \operatorname{ch}(2t)\frac{1}{x} \end{cases}$ o aún $\begin{cases} \operatorname{sh}(2t)x' = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ \operatorname{sh}(2t)x' = x^3 - \operatorname{ch}(2t)x \end{cases}$.
Se obtiene $x^3 - \operatorname{ch}(2t)x = \operatorname{ch}(2t)x - \frac{1}{x}$ o aún $x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} x^4 - 2\operatorname{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \operatorname{ch}(2t))^2 - \operatorname{sh}^2(2t) = (x^2 - \mathrm{e}^{2t})(x^2 - \mathrm{e}^{-2t}) = \\ (x - \mathrm{e}^t)(x + \mathrm{e}^t)(x - \mathrm{e}^{-t})(x + \mathrm{e}^{-t}). \end{aligned}$$

Así, necesariamente $(x,y) \in \{(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}), (\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t), (-\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^{-t}), (-\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t)\}$.
Recíprocamente, si $(x,y) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$,

$$\operatorname{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}) - \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})\mathrm{e}^t = \operatorname{sh}(2t)\mathrm{e}^t = \operatorname{sh}(2t)x'$$

y

$-x+\text{ch}(2t)y = -\text{e}^t + \frac{1}{2}(\text{e}^t+\text{e}^{-3t}) = \frac{1}{2}(-\text{e}^t+\text{e}^{-3t}) = -\frac{1}{2}(\text{e}^{2t}-\text{e}^{-2t})\text{e}^{-t} = -\text{sh}(2t)\text{e}^{-t} = \text{sh}(2t)y'$.

Entonces el par $X_1 = (x,y) = (\text{e}^t,\text{e}^{-t})$ es una solución no nula del sistema. Igualmente, si $(x,y) = (\text{e}^{-t},\text{e}^t)$,

$$\text{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(\text{e}^t+\text{e}^{-3t}) - \text{e}^t = \frac{1}{2}(-\text{e}^t-\text{e}^{-3t}) = -\frac{1}{2}(\text{e}^{2t}-\text{e}^{-2t})\text{e}^{-t} = -\text{sh}(2t)\text{e}^{-t} = \text{sh}(2t)x'$$

y

$$-x+\text{ch}(2t)y = -\text{e}^{-t} + \frac{1}{2}(\text{e}^{3t}+\text{e}^{-t}) = \frac{1}{2}(\text{e}^{3t}-\text{e}^{-t}) = \frac{1}{2}(\text{e}^{2t}-\text{e}^{-2t})\text{e}^{t} = \text{sh}(2t)\text{e}^{t} = \text{sh}(2t)y'.$$

Entonces el par $X_2 = (x,y) = (\text{e}^{-t},\text{e}^t)$ es una solución no nula del sistema.

En fin, $w(t) = \begin{vmatrix} \text{e}^t & \text{e}^{-t} \\ \text{e}^{-t} & \text{e}^t \end{vmatrix} = \text{e}^{2t} - \text{e}^{-2t} = 2\,\text{sh}(2t) \neq 0$ y el par (X_1,X_2) es un sistema fundamental de soluciones en $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\text{e}^t + \mu\text{e}^{-t} \\ \lambda\text{e}^{-t} + \mu\text{e}^t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Solución del ejercicio 4889 ▲005882

1. Sobre $I = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, (E) se escribe $y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0$. Porque los dos funciones $x \mapsto \frac{4x-2}{2x+1}$ y $x \mapsto -\frac{8}{2x+1}$ son continuas en I, las soluciones de (E) sobre I forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2.

   Búsqueda de una solución polinomial no nula de (E)**.** Sea P un posible polinomio no nulo, solución de (E). Se denota n su grado. El polinomio $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ es de grado a lo sumo n. Además, el coeficiente de X^n en Q es $(4n-8)\text{dom}(P)$.

   Si P es solución de (E), se tiene necesariamente $(4n-8)\text{dom}(P) = 0$ y entonces $n = 2$. Pongamos entonces $P = aX^2 + bX + c$.

   $$(2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P = (2X+1)(2a) + (4X-2)(2aX+b) - 8(aX^2+bX+c) = -4bX + 2a - 2b - 8c$$

   Así, P es solución de (E) sobre I si y solo si $-4b = 2a - 2b - 8c = 0$, lo que equivale a $b = 0$ y $a = 4c$. La función $f_1 :\ x \mapsto 4x^2+1$ es, por lo tanto una solución no nula de (E) sobre I.

   Búsqueda de una solución particular de la forma $f_\alpha :\ x \mapsto \text{e}^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

   $$(2x+1)(\text{e}^{\alpha x})'' + (4x-2)(\text{e}^{\alpha x})' - 8\text{e}^{\alpha x} = \left(\alpha^2(2x+1) + \alpha(4x-2) - 8\right)\text{e}^{\alpha x} = \left(2\alpha(\alpha+2)x + \alpha^2 - 2\alpha - 8\right)\text{e}^{\alpha x}$$

   Así, f_α es solución de (E) sobre I si y solo si $2\alpha(\alpha+2) = \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$, lo que equivale a $\alpha = -2$. Así, la función $f_2 :\ x \mapsto \text{e}^{-2x}$ es solución de (E) sobre I.

   Resolución de (E) sobre $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Verificar que el par (f_1,f_2) es un sistema fundamental de solución de (E) sobre $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Para $x > -\frac{1}{2}$,

   $$w(x) = \begin{vmatrix} 4x^2+1 & \text{e}^{-2x} \\ 8x & -2\text{e}^{-2x} \end{vmatrix} = (-8x^2 - 8x - 2)\text{e}^{-2x} = -2(2x+1)^2\text{e}^{-2x} \neq 0.$$

   Entonces el par (f_1,f_2) es un sistema fundamental de solución de (E) sobre $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ y

   $$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[} = \left\{ x \mapsto \lambda(4x^2+1) + \mu\text{e}^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Resolución de (E) sobre $\mathbb{R}$. También se tiene $\mathscr{S}_{]-\infty,-\frac{1}{2}[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Sea f una solución de (E) sobre $\mathbb{R}$.

Necesariamente, existe $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^4$ tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\lambda_1(4x^2+1)+\mu_1 e^{-2x} & \text{si } x\leqslant -\frac{1}{2}\\ \lambda_2(4x^2+1)+\mu_2 e^{-2x} & \text{si } x> -\frac{1}{2}\end{cases}$ (por continuidad a la izquierda en $-\frac{1}{2}$). f así definida es dos veces derivable en $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ y en $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, solución de (E) en cada uno de estos dos intervalos y verifica aún (E) en $x=-\frac{1}{2}$ si además f es dos veces derivable en $-\frac{1}{2}$.

En resumen, f es solución de (E) sobre $\mathbb{R}$ si y solo si f es dos veces derivable en $-\frac{1}{2}$. f es ya dos veces derivable a la derecha y a la izquierda en $-\frac{1}{2}$. Además, poniendo $h=x+\frac{1}{2}$ o aún $x=-\frac{1}{2}+h$, se obtiene cuando x tiende a $-\frac{1}{2}$ para valores inferiores

$$f(x)=\lambda_1(2-4h+4h^2)+\mu_1 e e^{-2h}=(2\lambda_1+e\mu_1)+(-4\lambda_1-2e\mu_1)h+(4\lambda_1+2e\mu_1)h^2+o(h^2),$$

e igualmente cuando x tiende a $-\frac{1}{2}$ para valores superiores,

$$f(x)=(2\lambda_2+e\mu_2)+(-4\lambda_2-2e\mu_2)h+(4\lambda_2+2e\mu_2)h^2+o(h^2).$$

Así, f es dos veces derivable en $-\frac{1}{2}$ si y solo si $2\lambda_1+e\mu_1=2\lambda_2+e\mu_2$ o aún $\mu_2=\frac{2}{e}(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1$. Así, las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma

$$x\mapsto\begin{cases}a(4x^2+1)+be^{-2x} & \text{si } x\leqslant -\frac{1}{2}\\ c(4x^2+1)+\left(\frac{2}{e}(a+c)-b\right)e^{-2x} & \text{si } x>-\frac{1}{2},\end{cases}\quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Así, el espacio de soluciones en $\mathbb{R}$ es de dimensión 3 y una base de este espacio es por ejemplo (f_1,f_2,f_3), donde

$$f_1:\ x\mapsto\begin{cases}4x^2+1 & \text{si } x\leqslant-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{e}e^{-2x} & \text{si } x>-\frac{1}{2}\end{cases}\qquad f_2:\ x\mapsto\begin{cases}e^{-2x} & \text{si } x\leqslant-\frac{1}{2}\\ -e^{-2x} & \text{si } x>-\frac{1}{2}\end{cases}\quad \text{y}$$

$$f_3:\ x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant-\frac{1}{2}\\ 4x^2+1+\frac{2}{e}e^{-2x} & \text{si } x>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

2. Sobre $I=]0,+\infty[$, la ecuación (E) se escribe $y''-\frac{2}{x+1}y'+\frac{2}{x(x+1)}y=0$. Porque los dos funciones $x\mapsto-\frac{2}{x+1}$ y $x\mapsto\frac{2}{x(x+1)}$ son continuas en I, las soluciones de (E) sobre I forman un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2. La función $f_1:\ x\mapsto x$ es solución de (E) sobre I. Se define entonces $y=f_1z$. Porque la función f_1 no se anula en I, la función y es dos veces derivable en I si y solo si la función z es dos veces derivable en I. Además, según la fórmula de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned}(x^2+x)y''-2y'+2y&=(x^2+x)(f_1''z+2f_1'z'+f_1z'')-2x(f_1'z+f_1z')+2f_1z\\&=(x^2+x)f_1z''+(2(x^2+x)f_1'-2xf_1)z'+((x^2+x)f_1''-2f_1'+2f_1)z\\&=(x^3+x^2)z''+2xz'.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
y \text{ solución de } (E) \text{ sobre } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x^3+x^2)z''(x)+2xz'(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ z''(x)+\frac{2}{x(x+1)}z'(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(\mathrm{e}^{2\ln|x|-2\ln|x+1|}z'\right)'(x)=0\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ z'(x)=\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in I,\ z(x)=\lambda\left(x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)+\mu\\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x \in I,\ y(x)=\lambda(x^2+2x\ln|x|-1)+\mu x.
\end{aligned}
$$

3. Busquemos soluciones que se puedan desarrollar en series enteras. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ una serie entera cuyo radio R se supone a priori que es estrictamente positivo. Para $x \in]-R,R[$,

$$
\begin{aligned}
4xf''(x)-2f'(x)+9x^2f(x) &= 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+9x^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= 4\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3}x^{n-1}\\
&= -a_1+4a_2x+\sum_{n=3}^{+\infty}(2n(2n-3)a_n+9a_{n-3})x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Así, f es solución de (E) sobre $]-R,R[$ si y solo si $a_1=a_2=0$ y $\forall n \geqslant 3$, $2n(2n-3)a_n+9a_{n-3}=0$, lo que se escribe aún

$$a_1=a_2=0 \text{ y } \forall n \geqslant 3,\ a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Las condiciones $a_1=0$ y $\forall n \geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ son equivalentes a $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1}=0$ y las condiciones $a_2=0$ y $\forall n \geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ son equivalentes a $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+2}=0$.

Finalmente, las condiciones $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{3p}=-\frac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3}=-\frac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ son equivalentes para $p \geqslant 1$ a

$$a_{3p}=-\frac{1}{2p(2p-1)}\times-\frac{1}{(2p-2)(2p-3)}\times\cdots\times-\frac{1}{2\times 1}a_0=\frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

En resumen, bajo la hipótesis $R>0$, f es solución de (E) sobre $]-R,R[$ si y solo si $\forall x \in]-R,R[$, $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}$.

Recíprocamente, porque para todo real x, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}=0$ de acuerdo con un teorema de crecimientos comparados, $R=+\infty$, para todo escogencias de a_0 que valida los cálculos anteriores sobre $\mathbb{R}$. Las soluciones de (E) desarrollables en series enteras son las funciones de la forma $x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n}$, $x \in \mathbb{R}$. Luego, para $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^{3/2})^{2n} = \cos\left(x^{3/2}\right).$$

Entonces la función $x \mapsto \cos\left(x^{3/2}\right)$ es una solución de (E) sobre $]0,+\infty[$. La forma de esta solución nos invita a cambiar de variable poniendo $t = x^{3/2}$. Más precisamente, para $x > 0$, se escribe $y(x) = z(x^{3/2}) = z(t)$. Porque la aplicación $\varphi :\ x \mapsto x^{3/2}$ es un C^2-difeomorfismo de $]0,+\infty[$ en sí mismo, la función y es dos veces derivable en $]0,+\infty[$ si y solo si la función es dos veces derivable en $]0,+\infty[$. Para $x > 0$, se tiene $y(x) = z(x^{3/2})$, luego $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})$, luego $y''(x) = \frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}xz''(x^{3/2})$ y entonces

$$\begin{aligned} 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) &= 4x\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2}) + \frac{9}{4}xz''(x^{3/2})\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})\right) + 9x^2z(x^{3/2}) \\ &= 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} y \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ 9x^2(z''(x^{3/2}) + z(x^{3/2})) = 0 \Leftrightarrow \forall t > 0,\ z''(t) + z(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda \cos t + \mu \operatorname{sen} t \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x > 0,\ y(x) = \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \operatorname{sen}(x^{3/2}). \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda \cos(x^{3/2}) + \mu \operatorname{sen}(x^{3/2}),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

4. Dado que las funciones $x \mapsto -\frac{2}{1+x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ y $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1+x}$ son continuas en $]-1,+\infty[$, las soluciones de (E) sobre $]-1,+\infty[$ constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2.
Resolución de la ecuación homogénea.
La función $f_1 :\ x \mapsto e^x$ es solución en $]-1,+\infty[$ de la ecuación $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$. Se define entonces $y = f_1z$. Porque la función f_1 no se anula en $]-1,+\infty[$, la función y es dos veces derivable en $]-1,+\infty[$ si y solo si la función z es dos veces derivable en $]-1,+\infty[$. Además, la fórmula de LEIBNIZ permite escribir para $x > -1$

$$\begin{aligned} (1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) &= (1+x)(f_1''z(x) + 2f_1'(x)z'(x) + f_1(x)z''(x)) \\ &\quad - 2(f_1'(x)z(x) + f_1(x)z'(x)) + (1-x)f_1(x)z(x) \\ &= (1+x)f_1(x)z''(x) + (2(1+x)f_1'(x) - 2f_1(x))z'(x) \\ &= ((1+x)z''(x) + 2xz'(x))e^x. \end{aligned}$$

Por consiguiente, y es solución de (E_H) sobre $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ (1+x)z''(x) + 2xz'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ e^{2x-2\ln(1+x)}z''(x) + \left(2 - \frac{2}{1+x}\right)e^{2x-2\ln(1+x)}z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1,\ \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}z'\right)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda (x+1)^2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\int (x+1)^2 \mathrm{e}^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x} + \int (x+1)\mathrm{e}^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)^2\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\,dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x} + C \\ &= \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x} + C = -\frac{1}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-2x} + C\end{aligned}$$

Se deduce que :

$$\begin{aligned} y \text{ solución de } (E_H) \text{ sobre }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > -1,\ z'(x) = \lambda (x+1)^2 \mathrm{e}^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > -1,\ z(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-2x} + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > -1,\ y(x) = -\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{x}.\end{aligned}$$

Ahora, λ recorre $\mathbb{R}$ si y solo si $-\frac{\lambda}{4}$ recorre $\mathbb{R}$ y renombrando la constante λ, las soluciones de (E_H) sobre $]-1,+\infty[$ son las funciones de la forma $x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Búsqueda de una solución particular (E). En vista del segundo miembro, se puede buscar una solución particular de la forma $f_0 :\ x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}&(1+x)((ax+b)\mathrm{e}^{-x})'' - 2((ax+b)\mathrm{e}^{-x})' + (1-x)(ax+b)\mathrm{e}^{-x} = \\ &((1+x)((ax+b)-2a) - 2(-(ax+b)+a) + (1-x)(ax+b))\mathrm{e}^{-x} = (2bx + (4b-4a))\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

Así, f_0 es solución de (E) sobre $]-1,+\infty[$ si y solo si $2b = 1$ y $4b - 4a = 0$, lo que equivale a $a = b = \frac{1}{2}$. Una solución de (E) sobre $]-1,+\infty[$ es $x \mapsto \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda(2x^2+6x+5)\mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{x} + \tfrac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

5. Porque la función $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ es continua en $\mathbb{R}$, las soluciones de (E) sobre $\mathbb{R}$ constituyen un $\mathbb{R}$-espacio afín de dimensión 2. La ecuación característica de la ecuación homogénea es $z^2+4z+4 = 0$. Como esta ecuación admite -2 por raíz doble, las soluciones de la ecuación homogénea asociada son las funciones de la forma $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2x} + \mu x \mathrm{e}^{-2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. De acuerdo al método de variación de constantes, existe una solución particular de (E) sobre $\mathbb{R}$ de la forma $x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-2x} + \mu(x)x\mathrm{e}^{-2x}$, donde λ y μ son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \lambda'(x)\mathrm{e}^{-2x} + \mu'(x)x\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ -2\lambda'(x)\mathrm{e}^{-2x} + \mu'(x)(-2x+1)\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}.$$

Las fórmulas de CRAMER proporcionan $\lambda'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-4x}}\begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^{-2x} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $\mu'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-4x}}\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Se puede tomar $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ y $\mu(x) = \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, luego $f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\lambda + \mu x + \left(-\sqrt{x^2+1} + x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Solución del ejercicio 4890 ▲005883

Sea f una posible solución. f es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x, $f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x$. Se deduce que f' es derivable en $\mathbb{R}$ o aún que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Derivando la igualdad inicial, se tiene para todo real x

$$f''(x) = f'(-x) + \mathrm{e}^x = -f(x) + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x,$$

y entonces f es solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}(x)$. Así, existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}(x) + \lambda\cos(x) + \mu\,\mathrm{sen}(x)$.
Recíprocamente, sea f una tal función. f es derivable en $\mathbb{R}$ y para todo real x,

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= (\mathrm{sh}(x) - \lambda\,\mathrm{sen}(x) + \mu\cos(x)) + (\mathrm{ch}(x) + \lambda\cos(x) - \mu\,\mathrm{sen}(x)) \\ &= \mathrm{e}^x + (\lambda+\mu)(\cos(x) - \mathrm{sen}(x)), \end{aligned}$$

y f es solución si y solo si $\lambda + \mu = 0$. Las funciones solución son las funciones de la forma $x \mapsto \mathrm{ch}(x) + \lambda(\cos(x) - \mathrm{sen}(x))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4891 ▲005884

Sea f una posible solución. f es derivable en $]0,+\infty[$ y para todo real $x>0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$. Se deduce que f' es derivable en $]0,+\infty[$ o aún que f es dos veces derivable en $]0,+\infty[$. Derivando la igualdad inicial, se obtiene para todo real x

$$f''(x) = -\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f(x),$$

y entonces f es solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial $x^2y'' + \frac{3}{16}y = 0$ (E).
Las soluciones de (E) sobre $]0,+\infty[$ constituyen un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2.
Encontrar una solución particular de (E) sobre $]0,+\infty[$ de la forma $g_\alpha :\ x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solución de } (E) \text{ sobre }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \frac{3}{16}x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{3}{16} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ o } \alpha = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Las dos funciones $f_1 :\ x\mapsto x^{1/4}$ y $f_2 :\ x\mapsto x^{3/4}$ son soluciones de (E) sobre $]0,+\infty[$. El wronskiano de estas soluciones es $w(x) = \begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4} \\ \frac{1}{4}x^{-3/4} & \frac{3}{4}x^{-1/4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$ y entonces (f_1,f_2) es un sistema fundamental de soluciones de (E) sobre $]0,+\infty[$. Así, si f es la solución del problema, necesariamente $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\forall x>0$, $f(x) = \lambda_1x^{1/4} + \lambda_2x^{3/4}$.
Recíprocamente, sea f una tal función. Para todo real $x>0$,

$$f'(x) = \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4} + \frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4} \text{ y } f\left(\frac{3}{16x}\right) = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4} + \frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}.$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
f \text{ solución} &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{1/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{3/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{3/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{1/4} \text{ (por la multiplicación por } x)\\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{4}=\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8} \text{ y } \frac{3\lambda_2}{4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}\Leftrightarrow \lambda_2=\frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1.
\end{aligned}$$

Las funciones solución son las funciones de la forma $x\mapsto\lambda\left(x^{1/4}+2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/4}\right)$.

Solución del ejercicio 4892 ▲005885

La función nula es una solución. De ahora en adelante, f es una eventual solución no nula. Existe por lo tanto $x_0\in\mathbb{R}$ tal que $f(x_0)\neq 0$.

• La igualdad $f(x_0)f(0)=\int_{x_0-0}^{x_0+0}f(t)\,dt=0$ proporciona $f(0)=0$.

• Para todo real y, $\int_{-y}^{y}f(t)\,dt=f(0)f(y)=0$. Ahora, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, la función $y\mapsto\int_{-y}^{y}f(t)\,dt$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$. Derivando, se obtiene para todo real y, $f(y)+f(-y)=0$ y entonces f es impar.

• Para todo real y, se tiene entonces $f(y)=\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$. Porque f es continua en $\mathbb{R}$, la función $x\mapsto\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}$ y es lo mismo con f. Pero entonces la función $x\mapsto\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$ es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$ y es lo mismo con f.

$$f \text{ es de clase } C^2 \text{ sobre } \mathbb{R}.$$

• Derivando a y fijo o x fija la igualdad $f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt$, se obtiene para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y)=f(x+y)-f(x-y)$ y $f(x)f'(y)=f(x+y)+f(x-y)$. Derivando la primera igualdad a y fijo y el segundo a x fijo, se obtiene para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y)=f'(x+y)-f'(x-y)=f(x)f''(y)$. En particular, para todo real x, $f''(x)f(x_0)-f(x)f''(x_0)=0$ o aún $f''(x)-kf(x)=0$, donde $f=\frac{f''(x_0)}{f(x_0}$.

$$f \text{ es la solución de una ecuación diferencial del tipo } y''-ky=0.$$

• f es, por lo tanto uno de los siguientes tipos : $x\mapsto\lambda\cos(\omega x)+\mu\,\mathrm{sen}(\omega x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ y $\omega>0$ o $x\mapsto ax+b$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ o $x\mapsto\lambda\,\mathrm{ch}(\omega x)+\mu\,\mathrm{sh}(\omega x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ y $\omega>0$ (dependiendo de que $k>0$, $k=0$ o $k<0$). Además, f es impar, f es necesariamente uno de los siguientes tipos :

$$x\mapsto\lambda\,\mathrm{sen}(\omega x),\ \lambda\in\mathbb{R}^* \text{ y } \omega>0 \quad\text{o}\quad x\mapsto ax,\ a\in\mathbb{R}* \quad\text{o}\quad x\mapsto\lambda\,\mathrm{sh}(\omega x),\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ y } \omega>0.$$

Recíprocamente, – si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}^*$, entonces $f(x)f(y)=a^2xy$ y $\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\frac{a}{2}((x+y)^2-(x-y)^2)=2axy$. Entonces f es solución si y solo si $a=2$. Se obtiene la función solución $x\mapsto 2x$.

– Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \operatorname{sen}(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $\omega > 0$, entonces $f(x)f(y) = \lambda^2 \operatorname{sen}(\omega x)\operatorname{sen}(\omega y)$ y $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y)) - \cos(\omega(x+y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\operatorname{sen}(\omega x)\operatorname{sen}(\omega y)$. Entonces f es solución si y solo si $\lambda = \frac{2}{\omega}$. Se obtienen las funciones solución $x \mapsto \frac{2}{\omega}\operatorname{sen}(\omega x)$, $\omega > 0$.

– Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \operatorname{sh}(\omega x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $\omega > 0$, entonces $f(x)f(y) = \lambda^2 \operatorname{sh}(\omega x)\operatorname{sh}(\omega y)$ y $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{\lambda}{\omega}(\operatorname{ch}(\omega(x+y)) - \operatorname{ch}(\omega(x-y))) = \frac{2\lambda}{\omega}\operatorname{sh}(\omega x)\operatorname{sh}(\omega y)$.
Entonces f es solución si y solo si $\lambda = \frac{2}{\omega}$. Se obtienen las funciones solución $x \mapsto \frac{2}{\omega}\operatorname{sh}(\omega x)$, $\omega > 0$.

Solución del ejercicio 4893 ▲005886

Existencia de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Sea $x > 0$. La función $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ es continua en $[0,+\infty[$ y está dominada por $\frac{1}{t^2}$, cuando t tiende a $+\infty$. Entonces la función $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ es integrable en $[0,+\infty[$. Se deduce que

$$F \text{ se define en }]0,+\infty[.$$

Derivadas de F. Sean $a > 0$, luego $\Phi : \begin{array}{ccl} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Para todo real $x \in [a,+\infty[$, la función $t \mapsto \Phi(x,t)$ es continua e integrable en $[0,+\infty[$.
• La función Φ admite en $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ derivadas parciales de orden 1 y 2, con respecto a su primera variable x y para todo $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ y } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

Además :
– para todo $x \in [a,+\infty[$, las funciones $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ y $t \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ son continuas a trozos en $[0,+\infty[$.
– para todo $t \in [0,+\infty[$, las funciones $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ y $x \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ son continuas en $[0,+\infty[$.
– para todo $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ y $\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$, donde las funciones φ_1 y φ_2 son continuas a trozos e integrables en $[0,+\infty[$ porque están dominadas en $+\infty$ por $\frac{1}{t^2}$.
Por el teorema de derivación de integrales con parámetros (teorema de LEIBNIZ), F es dos veces derivable en $[a,+\infty[$ y las derivadas de F se obtienen por derivación bajo el signo de la suma. Siendo esto cierto para todo real $a > 0$, F es dos veces derivable en $]0,+\infty[$ y para $x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

$$\forall x > 0,\quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

Ecuación diferencial verificada por F. Para $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

$$\forall x > 0,\quad F''(x) + F(x) = \tfrac{1}{x}.$$

Existencia de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt$. Sea $a > 0$. Demostrar la existencia de $\int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$ y $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.
Sea $A > a$. Una integración por partes proporciona $\int_a^{A} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = -\frac{\cos a}{a} + \frac{\cos A}{A} - \int_a^{A} \frac{\cos u}{u^2}\,du$.
Porque $\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$, se tiene $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$. Por otra parte, ya que $\forall u \geqslant a$, $\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$, la función $u \mapsto \frac{\cos u}{u^2}$ es integrable en $[a, +\infty[$ y en particular, $\int_a^{A} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ tiene un límite cuando A tiende a $+\infty$.
Se deduce que $\int_a^{A} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$ tiene un límite cuando A tiende a $+\infty$ o aún que la integral $\int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. Igualmente, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. Pero entonces, para $x > 0$,

$$\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du - \operatorname{sen} x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(u-x)}{u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt = G(x) \text{ existe.}$$

G se define en $]0, +\infty[$.
Ecuación diferencial verificada por G. Porque la función $u \mapsto \frac{\operatorname{sen} u}{u}$ es continua en $]0, +\infty[$, la función $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du - \int_1^{x} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$ es de clase C^1 sobre $]0, +\infty[$. Igualmente, la función $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ es de clase C^1 sobre $]0, +\infty[$, luego G es de clase C^1 sobre $]0, +\infty[$. Además, para todo real $x > 0$,

$$G'(x) = -\operatorname{sen} x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du - \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{x} =$$
$$-\operatorname{sen} x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du,$$

luego volviendo a derivar

$$G''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} + \operatorname{sen} x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x} = -G(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0,\ G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

Límites de F y G en $+\infty$. Porque $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$ y $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ son dos integrales convergentes, se tiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$. Como las funciones seno y coseno son acotadas en $\mathbb{R}$, se deduce que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. Para todo real $x > 0$, $|F(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$ y entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Igualdad de F y G. De acuerdo con lo anterior, $(F-G)'' + (F-G) = 0$ y por lo tanto, existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $x > 0$, $F(x) - G(x) = \lambda \cos x + \mu \operatorname{sen} x$.
Si $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, entonces $\lambda \cos x + \mu \operatorname{sen} x = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \cos(x - x_0)$ no tiende a 0, cuando x tiende a $+\infty$. Porque $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = 0$, se tiene necesariamente $\lambda = \mu = 0$ y entonces $F - G = 0$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t+x}\,dt.}$$

Observación. Se puede demostrar que la igualdad persiste si $x=0$ (extensión por continuidad) y se obtiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 4894 ▲004110

1. $y=-1+\frac{1}{1-\lambda e^x}$ o $y=-1$.
2. $y\equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x})-\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.
3. $y=\pm\sqrt{1+(\sqrt{x}+\lambda)^2}$ o $y=\pm 1$.
4. $y=-\ln\big(1-x(1-1/e)\big)$.
5. $y=\left(\lambda+\frac{x}{2}\right)\left|\lambda+\frac{x}{2}\right|$ o $y=0$.

Solución del ejercicio 4895 ▲004111

1. $y=\frac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda>0$.
2. $y=-x\pm\sqrt{2x^2-\lambda}$ o $y=x(-1\pm\sqrt{2})$.
3. $y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ o $y=\pm x$ o $y=0$.
4. $y=-x\pm\sqrt{\lambda+3x^2}$ y $y=x(-1\pm\sqrt{3})$.

Solución del ejercicio 4896 ▲004112

1. $y=\frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ o $y=0$.
2. $y=\pm\sqrt[4]{x^2+\frac{\lambda}{x^2}}$.
3. $y=((\sqrt{x}+2)^2+\lambda e^{\sqrt{x}})^2$.
4. $y=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{\lambda-x}\right)^2$ o $y=0$.
5. $y=\pm\frac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda-x^4}}$ o $y=0$.

Solución del ejercicio 4897 ▲004113

$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ o $y=\frac{1}{x}$.

Solución del ejercicio 4898 ▲004114

$y=\lambda\pm\sqrt{\lambda^2+1-x^2}$ o $y=0$.

Solución del ejercicio 4899 ▲004115

1. $\gamma_1(t)=(-x(t),y(t))$ y $\gamma_2(t)=(x(-t),-y(-t))$ también son soluciones de (S). Por otro lado, la teoría de Cauchy–Lipschitz se aplica, en particular si existe t_0 tal que $x(t_0)=0$, entonces $x(t)=0$, para todo t. Igualmente si existe t_0 tal que $x(t_0)=y(t_0)=0$, entonces $x(t)=y(t)=0$, para todo t. Para λ,μ no nulos y x no se anula, $t\mapsto(\lambda x(\mu t),\lambda y(\mu t))$ es solución de (S) si y solo si $\mu=\lambda$. El conjunto de trayectorias maximales es pues estable por las simetrías con respecto a los dos ejes y por la homotecia de centro $(0,0)$. Además, toda trayectoria máxima que toca el eje de las x es simétrica con respecto a este eje.
2. $x'(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=0$ o $y(t_0)=0$. En el primer caso, se tiene $x(t)=0$, para todo t y $y(t)$ es arbitrario (solución de $y'=y^2$). En el segundo caso, $x(t_0)$ es arbitrario (Cauchy-Lipschitz) por lo tanto el

conjunto de puntos con tangente vertical es la unión de los dos ejes privados de $(0,0)$ (donde no existe tangente). $y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0) = \pm y(t_0)$, cantidad arbitraria, por lo que el conjunto de puntos con tangente horizontal es la unión de los dos bisectrices de los ejes, privada de $(0,0)$.
Soluciones particulares : $x(t) = 0, y(t) = \frac{1}{\lambda - t}$.

3. Suponiendo Φ de clase $\mathscr{C}^1$ se obtiene la ecuación $\frac{2}{n}x\Phi\Phi' = \Phi^2 - x^2$, o sea $\frac{2}{n}x\psi' = \psi - x^2$, con $\psi = \Phi^2$. Se obtiene $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ y $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.
Una curva integral (de hecho una trayectoria) que no toca ninguno de los dos ejes verifica la hipótesis $y =$ función de x, pues x' no puede anularse por lo tanto x es una función inyectiva de t. Una trayectoria que toca el eje de las y está incluido en este eje (ya visto) y una trayectoria que toca el eje de las x fuera de $(0,0)$ lo atraviesa ($y' \neq 0$), así es la unión de sub-arcos localmente en un solo lado del eje de x, de la forma $y = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}$.

Solución del ejercicio 4900 ▲004116

Método de Euler :

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1.000	0.900	0.810	0.729	0.656	0.590	0.531	0.478	0.430	0.387	0.348
z	0.000	0.100	0.180	0.243	0.292	0.328	0.354	0.372	0.383	0.387	0.387

Solución teórica : $y = \mathrm{e}^{-x}$, $z = x\mathrm{e}^{-x}$.

Solución del ejercicio 4901 ▲004117

1. $y = 4\arctan((\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^x)$.
2. $y = 2a - (\lambda x + \mu)^{2/3}$.
3. $y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)$.

Solución del ejercicio 4903 ▲004119

Si $a > 0$, $y'(0) = a^3$, si $a = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 6$. Entonces y es creciente en un vecindario de 0.
Si $y' > 0$ sobre $]0,\gamma[$, entonces $y(\gamma) > 0$, por lo tanto $y'(\gamma) > 0$ y $y' > 0$ sobre $[\gamma, \gamma+\varepsilon[$, por lo tanto, por conexidad, $y' > 0$ sobre $]0,\beta[$. $y' \geqslant y^3 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{y'}{y^3} \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2y^2} \leqslant \frac{1}{2a^2}$.

Solución del ejercicio 4904 ▲004120

1. ....
2. idem.
3. Para $x < 0$, $y' < -\mathrm{e}^y \Rightarrow -y'\mathrm{e}^{-y} > 1 \Rightarrow x > \mathrm{e}^{-y} + C > C$.

Solución del ejercicio 4906 ▲004122

Se supone $t > t_0$ tal que $x^2(t) - t \geqslant 0$. Se puede entonces escribir $t_1 = \min\{t > t_0 \,|\, x^2(t) - t > 0\}$. Se tiene entonces $x^2(t_1) - t_1 = 0$. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, se estudia la función $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$.
Se tiene $y'(t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1}} < 0$. Esto contradice el hecho de que, para todo $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) < 0$.

Del mismo modo si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, se estudia la función $z(t) = x(t) + \sqrt{t}$ y llegamos a una contradicción. Por lo tanto, la curva integral permanece en D_0. Si la solución maximal (a la derecha) se define en $[t_0, \beta[$, con $\beta \in \mathbb{R}$, así como para todo $t \in [t_0, \beta[$, $-\beta \leqslant x'(t) \leqslant 0$. Se deduce que x' es integrable en $[t_0, \beta[$ y así como $x(t)$ admite un límite finito cuando t tiende a β. Se extiende la función a β y la función extendida verifica (E) sobre $[t_0, \beta]$, lo que es imposible. Se deduce que $\beta = +\infty$. Se tiene, para todo $t \geqslant t_0$, $x'(t) < 0$, por lo tanto x es decreciente. Si $x(t)$ tiene un límite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, entonces $x'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -t$, lo que es imposible.
En consecuencia $x(t) \to -\infty$ (cuando $t \to +\infty$). En particular, para t bastante grande, $x(t) \leqslant 0$. Derivando (E) se tiene $x''(t) = 2x(t)(x^2(t) - t) - 1$. Si, a partir de un cierto rango, para todo t, $x''(t) \geqslant 0$, entonces x' es creciente y acotada superiormente. Solo puede tender a 0 porque si no $x'(t) \sim \ell$, luego $x(t) \sim \ell t$ y $x'(t) \sim \ell^2 t^2$. Si no existe t_1 tal que $x''(t_1) < 0$. Si existe $t_2 > t_1$ tal que $x''(t_2) = 0$ (con t_2 minimal) entonces $x'''(t_2) = 2x + \frac{1}{2x^2}$ que es negativo para t bastante grande. Esto es imposible y por lo tanto, en este caso $x''(t)$ queda negativo cuando t tiende a $+\infty$, se tiene entonces $0 < t - x^2(t) \leqslant \frac{-1}{2x(t)}$. En consecuencia $x^2(t) - t \to 0$, cuando $t \to +\infty$, se deduce que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Solución del ejercicio 4910 ▲004126

Sean y, z dos soluciones distintas. Según Cauchy-Lipschitz, $y'(a) \neq z'(a)$, así por ejemplo $y'(a) > z'(a)$. Sea $c > a$ maximal tal que : $\forall x \in \,]a, c[$, $y(x) > z(x)$. Entonces $y - z$ es estrictamente positiva convexa en $[a, c]$, y se anula en a y c, lo que es imposible.

Solución del ejercicio 4914 ▲004130

1. Si no $d(0, f'(\mathbb{R})) > 0$ y f no puede ser minorada.
2. Se supone que para todo $a \in \mathbb{R}^p$ se tiene $\nabla f(a) \neq 0$. Se considera la ecuación diferencial autónoma : $x' = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Para $x(0)$ dado existe una solución maximal, y está definida en $\mathbb{R}$, pues x' es acotada. Entonces la función : $t \mapsto f(x(t))$ es $\mathscr{C}^1$ minorada en $\mathbb{R}$, entonces existe una sucesión de reales (t_n) tal que $\frac{d}{dt}(f(x(t_n))) = \|\nabla f(x(t_n))\| \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 4915 ▲004131

$f_u : p \mapsto p + u \wedge p$ es inyectiva lineal porque $f_u(p) = 0 \Rightarrow p \perp p$, por lo tanto biyectiva. La aplicación $u \mapsto f_u$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ es $\mathscr{C}^\infty$, por lo que es lo mismo para la aplicación inversa : $u \mapsto (f_u)^{-1}$ y la ecuación diferencial dada equivale a $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ que cae bajo la teoría de Cauchy-Lipschitz : existe una única solución maximal definida en un intervalo abierto I. De acuerdo a la ecuación diferencial, $(u' \mid u) = 0$, de donde $\|u\|$ es constante. Entonces $u' = (f_u)^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$ es acotado, por lo tanto u tiene un límite finito en todo punto finito por continuidad uniforme, esto prueba que $I = \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4916 ▲004132

1. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (f_n - f_{n-1})(t - t^2)\, dt$, entonces por recurrencia $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$. Además, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant x\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$, de donde $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leqslant \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \int_0^x (t - t^2)\, dt \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ y $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$, lo que prueba que la serie telescópica $\sum(f_{n+1} - f_n)$ es normalmente convergente.

2. Pasando al límite uniforme bajo el signo integral se tiene $f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt$, de donde f es $\mathscr{C}^1$ y $f'(x) = f(x-x^2)$, lo que conduce al carácter $\mathscr{C}^\infty$ de f por recurrencia. $f'(0) = f'(1) = f(0) = 1$.
3. f' es positiva según la ecuación diferencial verificada por f y $f''(x) = (1-2x)f'(x-x^2)$ es del signo de $1-2x$, es decir que f es convexa en $[0, \frac{1}{2}]$ y cóncava en $[\frac{1}{2}, 1]$.
4. $1 + x = f_1(x) \leqslant f(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$. Además, $f'(x) = f(x-x^2) \leqslant f(x)$, de donde $x \mapsto f(x)e^{-x}$ es decreciente y vale 1 en 0, lo que prueba que $f(x) \leqslant e^x$.

Solución del ejercicio 4917 ▲004133

1. Si existe es un único máximo, su intervalo de definición es abierto.
2. Sea $(]\alpha,\beta[,x)$ una solución maximal. Si $t_0 \in]\alpha,\beta[$ es tal que $x(t_0) = a$, entonces $x'(t_0) > 0$, por lo tanto $x(t) - a$ es del signo de $t - t_0$ en un vecindario de t_0. Esto demuestra que t_0 (eventual) es único, y, en particular $t_0 < 0$. Igualmente, existe a lo sumo uno real t_1 tal que $x(t_1) = b$ y $t_1 < 0$. Además, la existencia de uno de los dos reales t_0 o t_1 excluye al otro. En fin, $a \leqslant x(t) \leqslant b$, para todo $t \in [0,\beta[$ por lo que según el teorema de los extremos se tiene $\beta = +\infty$.
3. Sea $\varphi : [a,b] \to [a,b], y \mapsto x(T)$. Como dos curvas integrales maximales distintas no tienen punto común, φ es inyectiva y por disyunción de casos demostramos que φ es estrictamente creciente y satisface la propiedad de los valores intermedios. En particular φ es continua y $\varphi(y) - y$ toma un valor positivo en a, negativa en b por lo tanto se anula para un cierto $y \in [a,b]$. Para esto y, la solución correspondiente es T-periódica.

Solución del ejercicio 4918 ▲004134

Observación : la sola continuidad solo de f implica la existencia de una solución maximal en la condición inicial dada (teorema de Cauchy-Arzela, HP), pero no su unicidad.
Teorema de los extremos : se supone que y es solución, definida en $[t_0,\alpha[$, con $\alpha < \sup J$.
Se tiene $\frac{d}{dt}(\|y\|^2) = 2(y' \mid y) = 2(f(t,y) \mid y) \leqslant 2a\|y\|^2 + 2b$, lo que se escribe $z' = 2az + 2b - c$, con $z = \|y\|^2$ y c función continua positiva. Entonces $z(t) = \exp(2A(t) - 2A(t_0))z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(2A(t) - 2A(s))(2b(s) - c(s))\,ds$, donde A es una primitiva de a sobre J. Se deduce que z es mayorada en $[t_0,\alpha[$, pues A y b son continuas en $[t_0,\alpha]$ y $c \geqslant 0$, por lo tanto $\|y'\| = \|f(t,y)\|$ es también mayorada, y $\int_{t_0}^{\alpha} y'(s)ds$ es absolutamente convergente. Así y admite un límite finito en α^-, y se puede extender y más allá de α, con el teorema de Cauchy-Arzela ; y no es maximal.

Solución del ejercicio 4919 ▲004135

1. $\frac{d}{dt}f(x,y) = x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}$, por lo tanto f sirve si $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x(y-1)$ (condición suficiente). No existe tal función (teorema de Schwarz), pero se puede aceptar f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(x,y)y(x-1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda(x,y)x(y-1)$, donde λ es una función bien elegida (llamó *factor integrante*). Se ve inmediatamente, que $\lambda(x,y) = \frac{1}{xy}$ sirve, de donde $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$.
2. Por el teorema de unicidad de Cauchy-Lipschitz, si existe t_0 tal que $x(t_0) = 0$, entonces $x(t) = 0$, para todo t, e igualmente para y. Así, si se fija una condición inicial $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, entonces

$x(t) > 0$ y $y(t) > 0$, para todo t. Además, por el mismo razonamiento, si $(x(0), y(0)) \neq (1,1)$, entonces $(x(t), y(t)) \neq (1,1)$, para todo t. Ahora supongamos que estas condiciones se cumplen. Sea $k = f(x(0), y(0)) = x(0) + y(0) - \ln(x(0)y(0))$. Estudiando la función, se ve que $k \neq 2$ y la curva C_k de ecuación $f(x,y) = k$ es una curva cerrada de clase $\mathscr{C}^1$ alrededor del punto $(1,1)$. El punto $M_t = (x(t), y(t))$ se desplaza en C_k, con velocidad digital $ds/dt = \sqrt{x^2(1-y)^2 + y^2(x-1)^2} \geqslant \alpha_k > 0$, donde α_k solo depende de k. Se deduce que una abscisa curvilínea de M_t recorre $\mathbb{R}$, cuando t recorre $\mathbb{R}$. En particular existe $t_0 > 0$ tal que $s(t_0) - s(0) = \text{longitud}(C_k)$, lo que implica $M_{t_0} = M_0$ y el movimiento es t_0-periódica.

Solución del ejercicio 4920 ▲004201

$f(x,y) = (3x - 2y)\mathrm{e}^{4(x-y)}$.

Solución del ejercicio 4921 ▲004202

$f(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + g(x+y)$.

Solución del ejercicio 4922 ▲004203

$f(x,y) = g(xy)$.

Solución del ejercicio 4923 ▲004204

$f(x,y) = \ln|xy| + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Solución del ejercicio 4924 ▲004205

$f(x,y) = g(\theta)$.

Solución del ejercicio 4925 ▲004206

1. $g(\rho, \theta) = \lambda(\rho)\mathrm{e}^{-2\theta}$.
2. g es 2π-periódica, por lo tanto $\lambda = 0$, y $f = 0$.

Solución del ejercicio 4926 ▲004207

$f(x,y) = g\left(\frac{1+y^2}{x}\right)$.

Solución del ejercicio 4928 ▲004209

$f(x,y) = \rho^\alpha A(\theta) + \rho^{1-\alpha} B(\theta)$.

Solución del ejercicio 4929 ▲004210

1. $(a + b\alpha + c\alpha^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2a + b(\alpha+\beta) + 2c\alpha\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (a + b\beta + c\beta^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.
2.

Solución del ejercicio 4930 ▲004211

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial g}{\partial u}=0 \Rightarrow f(x,y)=A\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy}+B\left(\frac{x}{y}\right).$

Solución del ejercicio 4931 ▲004212

$2tg'(t)+(1+t^2)g''(t)=t \Rightarrow g(t)=\frac{t}{2}+\lambda\arctan t+\mu.$

Solución del ejercicio 4932 ▲004213

1. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
2. $f(x,y)=\frac{xy}{16}+h(x)+k(y)$.

Solución del ejercicio 4933 ▲004214

$2u\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}=0 \Rightarrow f(x,y)=g\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy}+h(xy).$

Solución del ejercicio 4934 ▲004215

$(1-t^2)f''-2tf'=0 \Rightarrow f(t)=\lambda\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\mu.$

Solución del ejercicio 4935 ▲004216

$\Delta f=4(x^2+y^2)\Delta F.$

Solución del ejercicio 4936 ▲004217

1. $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=uv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}$.
2. $f(x,y)=\frac{xy}{2}+h(u)+k(v)$, con $u+v=y$, $uv=x$.

Solución del ejercicio 4937 ▲004218

$f(r)=A\cos r+B\operatorname{sen} r.$

Solución del ejercicio 4938 ▲004219

1. Existe G tal que $\frac{\partial G}{\partial u}=g+u\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial(ug)}{\partial u}$ y $\frac{\partial G}{\partial v}=g+v\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial(vg)}{\partial v}$.

   Entonces $G=ug+\varphi(v)=vg+\psi(u)$, de donde $g=\frac{\varphi(v)-\psi(u)}{v-u}$. El recíproco es inmediato.
2. $f(x,y)=x\left(\varphi\left(y-\frac{1}{x}\right)+\psi\left(y+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Solución del ejercicio 4939 ▲005898

1. Sea f una aplicación de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$. Se define $f(x,y)=g(u,v)$, donde $u=x+y$ y $v=x+2y$. La aplicación $(x,y)\mapsto(x+y,x+2y)=(u,v)$ es un automorfismo de $\mathbb{R}^2$ y en particular un C^1-difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v))=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}.$$
Igualmente, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}$ y entonces
$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}.$$
Por consiguiente, $2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial u}=0\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v)\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x+2y)$.
$$\boxed{\text{Las soluciones son las } (x,y)\mapsto h(x+2y)\text{, donde } h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$
Por ejemplo, la función $(x,y)\mapsto\cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ es solución.
2. Sea f una aplicación de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Se define $f(x,y)=g(r,\theta)$, donde $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$. La aplicación $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)=(x,y)$ es un C^1-difeomorfismo de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Además,
$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$
y
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial y}=-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}.$$
Entonces
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial\theta}=0&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta)=h_1(r)\\&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\&\Leftrightarrow\exists h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h(x^2+y^2).\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Las soluciones son las } (x,y)\mapsto h(x^2+y^2)\text{, donde } h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$
3. Sea f una función de clase C^2 sobre $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Por el teorema de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.
Sea $\begin{array}{rcl}\varphi:]0,+\infty[\times\mathbb{R}&\to&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\(u,v)&\mapsto&(u,uv)=(x,y).\end{array}$ Entonces si ponemos $f(x,y)=g(u,v)$, se tiene $g=f\circ\varphi$.
Sea $(x,y,u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
$$\varphi(u,v)=(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}u=x\\uv=y\end{cases}\begin{cases}u=x\\v=\frac{y}{x}.\end{cases}$$
Así, φ es una biyección de $]0,+\infty[$ en sí mismo y su recíproco es la aplicación
$$\begin{array}{rcl}\varphi^{-1}:]0,+\infty[\times\mathbb{R}&\to&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&\left(x,\frac{y}{x}\right)=(u,v).\end{array}$$

Además, φ es de clase C^2 sobre $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ y su jacobiano $J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$ no se anula en $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Entonces se sabe que φ es un C^2-difeomorfismo de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en sí mismo.
Porque $g = f\circ\varphi$ y que φ es un C^2-difeomorfismo de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en sí mismo, f es de clase C^2 sobre $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si y solo si g es de clase C^2 sobre $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$
$= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Luego,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} \\ &\quad - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\forall (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\, x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v) \\ &\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v) = uh(v) + k(v) \\ &\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Las funciones soluciones son los $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$, donde h y k son dos funciones de clase C^2 sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 4967 ▲002616

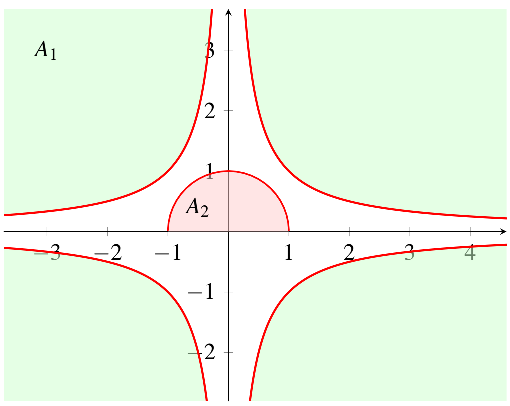
1. El gráfico es de hecho un paraboloide de revolución que tiene el origen por vértice, de eje de revolución el eje z, y cuya concavidad se vuelve hacia arriba. Las líneas de nivel son los círculos $x^2+y^2 = z_0$, $z_0 = c$, $c > 0$ es una constante ; para $c = 0$ es el vértice, es decir el origen.
2. El gráfico de la función f es un paraboloide de revolución que tiene el punto $(0,0,25)$, por vértice y limitado por el plano de los x y y, de eje de revolución el eje z, y cuya concavidad se vuelve hacia abajo. Las líneas de nivel son los círculos $x^2+y^2 = 25-z_0$, $z_0 = c$, $c < 25$ es una constante que degeneran en un punto, el vértice, para $c = 25$. El gráfico de la función g es un semi-cono de revolución que tiene el punto $(0,0,5)$, por vértice y coronado por el plano de los x y y, de eje de revolución el eje z, y cuya concavidad se vuelve hacia abajo. Las líneas de nivel son los círculos

$x^2+y^2=(5-z_0)^2$, $z_0=c$ es una constante tal que $0\leqslant c\leqslant 5$ que degeneran en un punto, el vértice, para $c=5$.

3. En $\mathbb{R}^3$, con coordenadas (x,y,z), con $f(x)=(y,z)$, el gráfico en discusión es una hélice en el cono de revolución $y2+z^2=x^2$.
4. El soporte de esta curva paramétrica es una espiral plana que se encuentra con el origen y cuya pendiente en el origen es cero.
5. Para que $f(x,y,z)=\exp(x+y^2-z^2)$ sea constante es necesario y suficiente que $x+y^2-z^2$ sea constante. Las superficies de nivel en discusión son, por lo tanto las superficies $x+y^2-z^2=c$. Estos son paraboloides hiperbólicos.
6. El gráfico de la aplicación f en discusión es una superficie en $\mathbb{R}^4$, y la dimensión 4 es muy grande para representar, en una hoja de papel, este gráfico está inmerso en $\mathbb{R}^4$. La aplicación f es un campo vectorial en el plano, sin embargo. De manera general, se puede representar gráficamente el campo vectorial $X\colon U\to\mathbb{R}^2$ en el abierto U del plano dibujando, en el punto (u_1,u_2) de U, el vector $X(u_1,u_2)=(x_1(u_1,u_2),x_2(u_1,u_2))$.

   N.B. Al representar una superficie en el espacio dimensional 3 ordinario por un dibujo en una hoja de papel, en verdad solo dibujamos una proyección del espacio dimensional 3 en un plano.

Solución del ejercicio 4968 ▲002617



1. La parte A_1 es abierta. Porque la curva $x^2y^2=1$ tiene cuatro ramas, las dos ramas de $xy=1$ y las dos ramas de $xy=-1$; estas cuatro ramas cortan el plano en cinco partes, una de las cuales contiene el origen.

   La curva $x^2y^2=1$ es una parte cerrada, el complemento es un abierto que es la unión de cinco conjuntos abiertos. La parte A_1 es la unión de las cuatro partes que no contienen el origen. Porque A_1 es abierto, A_1 coincide con su interior. La adherencia de A_1 es la unión de A_1, con las cuatro ramas de la curva $x^2y^2=1$.
2. La parte A_2 es el semicírculo de radio 1 teniendo el origen como un centro formado por los ángulos $0<\varphi<\pi$ en radianes y no es ni abierto ni cerrado.

   La parte A_2 no es abierto porque no existe ningún disco de radio positivo en A_2; no es cerrada porque los puntos $(\pm1,0)$ son puntos de adherencia que no pertenecen a A_2. La adherencia de A_2 es la parte del plano

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1,y\geqslant 0\}.$$

Solución del ejercicio 4969 ▲002618

1. Sean q_1 un punto de B_1 y q_2 un punto de B_2, sean d_1 resp. d_2 la distancia de q_1 al borde de B_1 resp. La distancia de q_2 al borde de B_2, y sea $0<d\leqslant\min(d_1,d_2)$. Entonces la bola abierta en $\mathbb{R}^{n+m}$ centrada en (q_1,q_2) y de radio d está en $B_1\times B_2$.
2. Sean p un punto de A, q un punto de B, sea B_1 un disco abierto en A conteniendo p, y sea B_2 un intervalo abierto en B conteniendo q. De acuerdo a (1.), $B_1\times B_2$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que $B_1\times B_2\subseteq A\times B$ y (p,q) pertenece a $B_1\times B_2$. En consecuencia, $A\times B$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 4970 ▲002619

1. La unión $\bigcup_n A_n$ de una sucesión de partes abiertas A_n de $\mathbb{R}^2$ es una parte abierta de $\mathbb{R}^2$. En efecto, sea q un punto de $\bigcup_n A_n$. Entonces existe n_0 tal que q pertenece a A_{n_0}. Porque A_{n_0} es abierto, existe un disco abierto D en A_{n_0} tal que q pertenece a D. En consecuencia, existe un disco abierto D en $\bigcup_n A_n$ tal que q pertenece a D. La intersección $\bigcap_n A_n$ de una sucesión de partes abiertas A_n de $\mathbb{R}^2$ no es necesariamente abierta. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$, la intersección de los intervalos abiertos $]-1/n, 1/n[$ es la parte $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ que no es abierto.
2. La unión $\bigcup_n B_n$ de una sucesión de partes cerradas B_n de $\mathbb{R}^2$ no es necesariamente una parte cerrada de $\mathbb{R}^2$. Porque el complemento $\mathscr{C}(\bigcup_n B_n)$ de $\bigcup_n B_n$ es la intersección $\bigcap_n \mathscr{C}B_n$ de los complementos y es, por lo tanto la intersección de una sucesión $(\mathscr{C}B_n)$ de partes abiertas de $\mathbb{R}^2$ que, de acuerdo a 1.), no es necesariamente una parte abierta de $\mathbb{R}^2$. Igualmente, la intersección $\bigcap_n B_n$ de una sucesión de partes cerradas B_n de $\mathbb{R}^2$ es una parte cerrada de $\mathbb{R}^2$. Porque el complemento $\mathscr{C}(\bigcap_n B_n)$ de $\bigcap_n B_n$ es la unión $\bigcup_n \mathscr{C}B_n$ de los complementos y es, por lo tanto la unión de una sucesión $(\mathscr{C}B_n)$ de partes abiertas de $\mathbb{R}^2$ quién, de acuerdo a 1.), es una parte abierta de $\mathbb{R}^2$.

Solución del ejercicio 4971 ▲002620

La parte A del plano no es abierta porque no contiene ningún disco abierto. Este parte A no es cerrada tampoco : El origen es un punto de adherencia : Cualquiera que sea el disco abierto B centrado en el origen, existe un punto de B que pertenece a A. Pero el origen no pertenece a A, de donde A no es cerrado. La adherencia $\overline{A}$ de A es la unión $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Porque cualquiera que sea la sucesión (x_n) de puntos de $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$ tal que esta sucesión converge en el plano, el límite pertenece a $A \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Solución del ejercicio 4973 ▲005844

1. Sea A una parte de E. $\overline{A}$ es cerrado y entonces $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\overset{\circ}{A}$ es abierto y por lo tanto, $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
2. Sean A y B dos partes de E tales que $A \subset B$.
   • Para todo $x \in E$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}$. Entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   • Para todo $x \in E$, $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow B \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$. Entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3. Sean A y B dos partes de E. $\overline{A} \cup \overline{B}$ es una parte cerrada de E conteniendo $A \cup B$. Entonces $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (ya que $\overline{A \cup B}$ es el más pequeño cerrado de E en el sentido de la inclusión conteniendo $A \cup B$). Recíprocamente, $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Finalmente, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ es un abierto contenido en $A \cap B$ y entonces $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.
   Recíprocamente, $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ y $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
   Finalmente, $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overline{A} \cap \overline{B}$ es un cerrado conteniendo $A \cap B$ y entonces $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. No se tiene necesariamente la igualdad. Si $A = [0,1[$ y $B =]1,2]$, $A \cap B = \varnothing$, luego $\overline{A \cap B} = \varnothing$, pero $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\} \neq \varnothing$.

$\mathring{A} \cup \mathring{B}$ es un abierto contenido en $A \cup B$ y entonces $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$. No se tiene necesariamente la igualdad. Si $A = [0,1]$ y $B = [1,2]$, $A \cup B = [0,2]$, luego $\overset{\circ}{A \cup B} =]0,2[$, pero $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[\neq]0,2[$.

5. Sean A y B dos partes de E. Sea $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in A \overset{\circ}{\setminus} B &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathscr{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ bola abierta de centro } x \text{ tal que } \mathscr{B} \subset A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ bola abierta de centro } x \text{ tal que } \mathscr{B} \subset A \text{ y } \mathscr{B} \subset {}^cB \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x) \text{ y } {}^cB \in \mathscr{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ y } x \in \overset{\circ}{({}^cB)} \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ y } x \in {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \cap {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \setminus \overline{B}. \end{aligned}$$

Así $A \overset{\circ}{\setminus} B = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.

6. Sea A una parte de E. $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$. Por otra parte $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Finalmente, $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\mathring{\overline{A}}} = \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. Por otra parte $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}}$. Finalmente, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Solución del ejercicio 4974 ▲005845

El ejercicio 4973 demuestra que no se puede hacer mejor.
Sea $A = ([0,1[\cup]1,2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5])$.

- $\mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[$.
- $\overline{\mathring{A}} = [0,2]$.
- $\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[$.
- $\overline{A} = [0,2]] \cup \{3\} \cup [4,5]$.
- $\mathring{\overline{A}} =]0,2[\cup]4,5[$.
- $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,2] \cup [4,5]$. Los 7 conjuntos considerados son dos a dos distintos.

Solución del ejercicio 4975 ▲005846

Sea $f \in E$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, sea g_n la aplicación definida por $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\left|x - \frac{1}{2}\right|$. Cada función g_n es continua en $[0,1]$, pero no derivable en $\frac{1}{2}$ o aún $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in E \setminus D$. Además, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f - g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$. Se deduce que la sucesión $(g_n)_{n \geqslant 1}$ tiende a f en el espacio vectorial normado $(E, \| \ \|_\infty)$. f es, por lo tanto límite de una sucesión de elementos de ${}^cD$ y entonces está en la adherencia de ${}^cD$. Esto demuestra que $\overline{{}^cD} = E$ o aún ${}^c(\mathring{D}) = E$ o finalmente $\mathring{D} = \varnothing$. En fin, ya que $P \subset D$, se tiene también $\mathring{P} = \varnothing$.

Solución del ejercicio 4976 ▲005848

1. Sea $x \in E$. Porque D es denso en E, existe una sucesión $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de D convergiendo hacia x y desde f y g son continuas y coinciden en D y por lo tanto, en x

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} d_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(d_n) = \lim_{n \to +\infty} g(d_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} d_n\right) = g(x).$$

Se ha demostrado que $f = g$.

2. Sea $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Se supone que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Sea $a = f(1)$.
   • $x = y = 0$ proporciona $f(0) = 0 = a \times 0$.
   • Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \mathbb{R}$. $f(nx) = f(x+\cdots+x) = f(x)+\cdots+f(x) = nf(x)$. Esto queda verdadero para $n = 0$.
   • En particular $x = 1$ proporciona para todo entero natural no nulo n, $f(n) = nf(1) = an$, luego $x = \frac{1}{n}$ proporciona $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = a$ y entonces $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.
   • Luego, $\forall (p,q) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.
   • Sea $x \in \mathbb{R}$. La igualdad $f(x)+f(-x) = f(0) = 0$ proporciona $f(-x) = -f(x)$.
   • En particular, $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -a\frac{p}{q}$.
   En resumen, si f es morfismo del grupo $(\mathbb{R},+)$ en sí mismo, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$, donde $a = f(1)$. Si además f es continua en $\mathbb{R}$, ambas aplicaciones $f:\ x \mapsto f(x)$ y $g:\ x \mapsto ax$ son continuas en $\mathbb{R}$ y coinciden en $\mathbb{Q}$ que es denso en $\mathbb{R}$. De acuerdo con el 1), $f = g$ o aún $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, donde $a = f(1)$.
   Recíprocamente, toda aplicación lineal $x \mapsto ax$ es en particular un morfismo del grupo $(\mathbb{R},+)$ en sí mismo, continuo sobre $\mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{Los morfismos continuos del grupo } (\mathbb{R},+) \text{ en sí mismo son las aplicaciones lineales } x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}.}$

Solución del ejercicio 4977 ▲005849

Sea $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada del espacio normado $(E, \| \ \|)$ teniendo un único valor de adherencia que se denota ℓ. Demostrar que la sucesión u converge a ℓ. Se supone por reducción al absurdo que la sucesión u no converge a ℓ. Entonces

$$\exists \varepsilon > 0 / \ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0 / \ \|u_n - \ell\| \geqslant \varepsilon \quad (*).$$

ε es así de ahora en adelante fijo. Aplicando $(*)$ a $n_0 = 0$, existe un rango $\varphi(0) \geqslant n_0 = 0$ tal que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$. Luego tomando $n_0 = \varphi(0)+1$, existe un rango $\varphi(1) > \varphi(0)$ tal que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$... Y se construye así por recurrencia una sucesión extraída $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$. Ahora, la sucesión u es acotada y también lo es la sucesión $(u_{\varphi(n)})$. Porque E es de dimensión finita, el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS permite afirmar que existe una sucesión $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraída de $(u_{\varphi(n)})$ y por lo tanto, de u convergiendo hacia un cierto $\ell' \in E$. ℓ' es, por lo tanto un valor de adherencia de la sucesión u. Pero cuando n tiende a $+\infty$ en la desigualdad $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$, se obtiene $\|\ell' - \ell\| \geqslant \varepsilon$ y entonces $\ell \neq \ell'$. Esto constituye una contradicción y entonces u converge a ℓ.

Solución del ejercicio 4985 ▲004828

1.
2. $d(x_n, a)$ decrece, por lo tanto tiende a d. Existe una sub-sucesión (x_{n_k}) convergiendo hacia ℓ y $d(\ell, a) = d$. La sucesión $(f(x_{n_k}))$ converge a $f(\ell)$ y se tiene $d(f(\ell), a) = d$, por lo tanto $\ell = a$. Hay una solo valor de adherencia, por lo tanto la sucesión converge.

Solución del ejercicio 4986 ▲004829

C es estable por f_n que es $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-lipschitziana. Entonces existe $x_n \in C$ tal que $f_n(x_n) = x_n$; todo valor de adherencia de (x_n) es punto fijo de f.

Solución del ejercicio 4990 ▲004833

1.
2.
3. Sea $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \delta(K_n)$. Existe $x_n, y_n \in K_n$ tales que $d(x_n, y_n) = \delta(K_n)$. Por extracción de sub-sucesiones, se puede asumir que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Para $\varepsilon > 0$, $(\overline{B}(x,\varepsilon) \cap K_n)$ y $(\overline{B}(y,\varepsilon) \cap K_n)$ forman sucesiones decrecientes de compactos no vacíos, por lo tanto $\overline{B}(x,\varepsilon) \cap K$ y $\overline{B}(y,\varepsilon) \cap K$ no son vacíos. En consecuencia, $\delta(K) \geqslant \ell - 2\varepsilon$.

Solución del ejercicio 4992 ▲004835

$U_{i,n} = \{x \in E \text{ tal que } \overline{B}(x, 1/n) \subset O_i\}$ es abierto y los $U_{i,n}$ recubren E. Se extrae un recubrimiento finito $\Rightarrow r = \min(1/n)$.

Solución del ejercicio 4993 ▲004836

Sea (u^n) una sucesión de sucesiones elementos de A : $u^n = (u_k^n)$. Se puede encontrar una sub-sucesión $(u^{n_{p_0}})$ tal que $(u_0^{n_{p_0}})$ converge a $u_0 \in [0,1]$, luego una sub-sucesión $(u^{n_{p_1}})$ tal que $(u_0^{n_{p_1}}, u_1^{n_{p_1}})$ converge a $(u_0, u_1) \in [0,1]^2$, etc. Entonces la sucesión $(u^{n_{p_k}})_k$ converge en A hacia $(u_0, u_1, \dots)$.

Solución del ejercicio 4996 ▲004839

Se escoge $a \in K$ y se considera para $n \geqslant 1$ la función $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1-\frac{1}{n}\right)f(x)$. f_n es una $\left(1-\frac{1}{n}\right)$-contracción de K, por lo tanto admite un punto fijo x_n. Si x es un valor adherente de la sucesión (x_n), entonces $f(x) = x$.

Solución del ejercicio 5002 ▲005850

Para $\alpha \in]0,\pi[$, se escribe $f(\alpha) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\operatorname{sen}(n\alpha)| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\operatorname{sen}(n\alpha)|$.

• En primer lugar, $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\operatorname{sen}(n(\pi-\alpha))| = |\operatorname{sen}(n\alpha)|$ y entonces $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$. Se deduce que $\inf\limits_{\alpha\in]0,\pi[} f(\alpha) = \inf\limits_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]} f(\alpha)$.

• $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Luego, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant \operatorname{sen}(\alpha) \geqslant \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Por consiguiente $\inf\limits_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]} f(\alpha) = \inf\limits_{\alpha\in]0,\frac{\pi}{3}]} f(\alpha)$.

• Sea entonces $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$. Demostrar que existe un entero natural no nulo n_0 tal que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Existe un único entero natural n_1 tal que $n_1\alpha \leqslant \frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha$ a saber $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$. Pero entonces, $\frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha = n\alpha + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ y el entero $n_0 = n_1 + 1$ sirve. Esto demuestra que $f(\alpha) \geqslant \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Finalmente, $\forall\alpha\in]0,\pi[$, $f(\alpha)\geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ y entonces $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\operatorname{sen}(n\alpha)|\right\}=\operatorname{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\operatorname{sen}(n\alpha)|\right\}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\inf_{\alpha\in]0,\pi[}\left\{\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\operatorname{sen}(n\alpha)|\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Solución del ejercicio 5003 ▲004717

1. $A\backslash]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}[$ es finito.
2.

Solución del ejercicio 5005 ▲004719

Sean $x<y$: existe $a\in\mathbb{N}$ tal que $n\geqslant a\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<y-x$.
Existe $b\in\mathbb{N}$ tal que $\sqrt{a}-\sqrt{b}<x$.
Entonces existe $c\geqslant a$ tal que $x<\sqrt{c}-\sqrt{b}<y$.

Solución del ejercicio 5006 ▲004720

$n+p\sqrt{2}>1\Rightarrow n>0,\ p>0$, por lo tanto $A\cap]1,+\infty[$ admite un elemento más pequeño : $3+2\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 5007 ▲004721

Se construye un conjunto de tipo Cantor cuyos agujeros tienen por longitud 1, $\frac{1}{2^a}$, $\frac{1}{4^a},\dots$, y se reparten los x_k a ambos lados de los agujeros en función de la escritura decimal de k ($0\to$ a la izquierda, $1\to$ a la derecha).

Solución del ejercicio 5009 ▲004723

El conjunto de los valores de adherencia es un intervalo constituido de puntos fijos de $f\Rightarrow$ la sucesión (u_n) tiene un solo valor de adherencia.

Solución del ejercicio 5013 ▲004727

Sea $\ell=\liminf\frac{u_n}{n}$ y $\varepsilon>0$. Existe p tal que $(\ell-\varepsilon)p\leqslant u_p\leqslant(\ell+\varepsilon)p$.
Entonces, para $n\in\mathbb{N}$ y $0\leqslant k<p$: $u_k+(\ell-\varepsilon)np\leqslant u_{np+k}\leqslant u_k+(\ell+\varepsilon)np$.

Solución del ejercicio 5014 ▲004728

1. Se supone conocido (y puede demostrarse) el hecho siguiente : *si G es un subgrupo de $\mathbb{R}$, entonces ya sea G es monogénico, o ya sea $\overline{G}=\mathbb{R}$.* En el caso de la pregunta, el grupo G de los periodos de f contiene 1 y $\sqrt{2}$, por lo tanto no es monogénico pues $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (la demostración fue solicitada al el alumno). Además, G es cerrado por continuidad de f, de donde f es constante.
2. De acuerdo a la primera pregunta, para todo $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ la aplicación $x\mapsto f(x,y)$ es constante y lo mismo ocurre si $y\in\mathbb{Q}$ por continuidad de f. Entonces f es de la forma $(x,y)\mapsto g(y)$, donde g es 1-periódica.

Recíprocamente, toda función f de esta forma sirve.

Solución del ejercicio 5015 ▲005843

1a solución.

• Demostrar qu'entre dos reales distintos, existe un racional. Sean x y y dos reales tales que $x<y$. Sean $d=y-x$, luego n un entero natural no nulo tal que $\frac{1}{n}<d$ (por ejemplo, $n=E\left(\frac{1}{d}\right)+1$). Sean en fin $k=E(nx)$ y $r=\frac{k+1}{n}$. r es un racional y además

$$x=\frac{nx}{n}<\frac{k+1}{n}=r\leqslant\frac{nx+1}{n}=x+\frac{1}{n}<x+d=x+y-x=y.$$

En resumen, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x<y\Rightarrow\exists r\in\mathbb{Q}/\ x<r<y)$. Esto demuestra que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

2a solución. Se sabe que todo real es límite de una sucesión de decimales y, en particular todo real es límite de una sucesión de racionales. Entonces $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{Q}\text{ es denso en }\mathbb{R}.}$$

Solución del ejercicio 5016 ▲005851

Sea f una aplicación uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$. $\exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant 1)$. Sea $x\in\mathbb{R}^+$ (el trabajo es análogo si $x\in\mathbb{R}^-$). Para $n\in\mathbb{N}$

$$|x-n\alpha|\leqslant\alpha\Leftrightarrow-\alpha\leqslant x-n\alpha\leqslant\alpha\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}-1\leqslant n\leqslant\frac{x}{\alpha}+1\Leftarrow n=E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Se establece $n_0=E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(x)-f(x-\alpha)|+|f(x-\alpha)-f(x-2\alpha)|+\cdots+|f(x-(n_0-1)\alpha)-f(x-n_0\alpha)|\\&\quad+|f(x-n_0\alpha)-f(0)|+|f(0)|\\&\leqslant n_0+1+|f(0)|\text{ (pues }|x-n_0\alpha-0|\leqslant\alpha)\\&\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|.\end{aligned}$$

Así, $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $|f(x)|\leqslant\frac{x}{\alpha}+2+|f(0)|$. Por simetría de los cálculos, $\forall x\in\mathbb{R}^-$, $|f(x)|\leqslant\frac{-x}{\alpha}+2+|f(0)|$ y entonces $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leqslant\frac{|x|}{\alpha}+2+|f(0)|$.

$$\boxed{f\text{ uniformemente continua en }\mathbb{R}\Rightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)\leqslant a|x|+b.}$$

Solución del ejercicio 5017 ▲004729

Sea $a\in\mathring{\overline{U}}\cap\mathring{\overline{V}}$: existe $B(a,r)\subset\overline{U}\cap\overline{V}$.
Sea $b\in B(a,r)\cap U$: existe $B(b,r')\subset B(a,r)\cap U$. Entonces $b\notin\overline{V}$, contradicción.

Solución del ejercicio 5019 ▲004731

$\mathring{\overline{U}}\subset\overline{U}\Rightarrow\overline{\mathring{\overline{U}}}\subset\overline{U}$.
$U\subset\overline{U}\Rightarrow U\subset\mathring{\overline{U}}\Rightarrow\overline{U}\subset\overline{\mathring{\overline{U}}}$.

Solución del ejercicio 5020 ▲004732

Sea a interior a $\mathrm{Fr}(U)$: existe $B(a,r) \subset \overline{U} \setminus U$. $B(a,r) \cap U = \varnothing \Rightarrow a \notin \overline{U}$, contradicción.

Solución del ejercicio 5022 ▲004734

Pasando al límite, $\delta(A) = \delta(\overline{A}) \geqslant \delta(\mathrm{Fr}(A))$.
Sean $x, y \in A$ distintos y D la recta que pasa por x y y. D corta A a lo largo de un conjunto acotado cuyos extremos pertenecen a $\mathrm{Fr}(A)$. Entonces $\delta(\mathrm{Fr}(A)) \geqslant \delta(A)$.

Solución del ejercicio 5024 ▲004736

Si f es continua : sea $x \in \overline{A}$: $x = \lim a_n \Rightarrow f(x) = \lim f(a_n) \in \overline{f(A)}$.
Sea $x \in \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$: $f(x) \in \mathring{B} \Rightarrow \exists\ B(f(x),r) \subset B, \exists\ \delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),r) \Rightarrow B(x,\delta) \subset f^{-1}(B)$.
Si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$: sea $B \subset F$ cerrado y $A = f^{-1}(B)$: $f(\overline{A}) \subset B$, por lo tanto $\overline{A} \subset A$.
Si $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$: sea $B \subset F$ abierto y $A = f^{-1}(B)$: $\mathring{A} \supset f^{-1}(\mathring{B}) = A$.

Solución del ejercicio 5029 ▲004741

1. Para $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y $y \in A$ se tiene $d_A(x) \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x-x'\| + \|x'-y\|$. Tomado la cota inferior sobre y se obtiene $d_A(x) \leqslant \|x-x'\| + d_A(x')$. Por simetría se tiene también $d_A(x') \leqslant \|x-x'\| + d_A(x)$, de donde $|d_A(x) - d_A(x') \leqslant \|x-x'\|$.
2. Se sabe que $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $d_A(x) = 0\}$. Entonces $d_A = d_B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$ y el recíproco resulta de la propiedad fácil $d_A = d_{\overline{A}}$.
3. Se denota : $M = \sup\{|d_A(y) - d_B(y)|,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, $\alpha = \sup\{d_B(x), x \in A\}$ y $\beta = \sup\{d_A(x),\ x \in B\}$. Por restricción de y a $A \cup B$ se obtiene $M \geqslant \max(\alpha, \beta)$. Por otro lado, para $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $\|y-a\| - \|y-b\| \leqslant \|a-b\|$, de donde $d_A(y) - \|y-b\| \leqslant d_A(b)$, luego $d_A(y) - d_B(y) \leqslant \beta$. Por simetría se tiene también $d_B(y) - d_A(y) \leqslant \alpha$, por lo tanto $|d_A(y) - d_B(y)| \leqslant \max(\alpha,\beta)$ y finalmente $M \leqslant \max(\alpha, \beta)$.

Solución del ejercicio 5032 ▲004744

1. Para $\theta \in \mathbb{R}$, la semi-recta de origen O y ángulo polar θ corta K según un intervalo no trivial (K es convexo y O es interior a K), cerrado acotado (K es compacto). Se denota $f(\theta)$ el largo de este intervalo, que define $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ 2π-periódica tal que $K = \{M(\rho,\theta)$ tal que $0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}$.

   Continuidad de f : sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $M(\rho_0, \theta_0)$ tal que $f(\theta_0) - \varepsilon < \rho_0 < f(\theta_0)$. Entonces $M \in \mathring{K}$ y existe $\alpha > 0$ tal que la bola de centro M y de radio α está incluida en K (hacer un diseño). Así, para todo θ suficientemente cerca de θ_0 se tiene $f(\theta) \geqslant OM > f(\theta_0) - \varepsilon$. Se considera entonces una hipotética sucesión (θ_k) real convergiendo hacia θ_0 tal que la sucesión $(f(\theta_k))$ no converge a $f(\theta_0)$. Como la sucesión $(f(\theta_k))$ es acotada se puede, aunque tengamos que extraer una sub-sucesión, suponer que converge a un real ℓ y el razonamiento precedente demuestra que $\ell > f(\theta_0)$.

   Si M_k designa el punto de K a la distancia $f(\theta_k)$ en la dirección de ángulo polar θ_k, entonces la sucesión (M_k) converge al punto $M(\ell, \theta_0)$ que debe pertenecer a K por compacidad, pero que contradice la definición de $f(\theta_0)$.

2. Si g no se anula entonces $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{sen}(x)\,dx \neq 0$. Si g no se anula que en $\alpha \in [0,\pi]$, entonces g es de signo constante en $[0,\alpha]$ y en $[\alpha,\pi]$, los signos son opuestos, y se obtiene todavía una contradicción considerando $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{sen}(x-\alpha)\,dx$ que vale 0 (desarrollar el seno).

3. Se escoge $O = G$. Se tiene $\iint_{M\in K} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$, sea $\int_0^{2\pi} f^3(\theta)\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} f^3(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 0$, sea aún : $\int_0^\pi (f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\cos\theta\,d\theta = \int_0^\pi (f^3(\theta) - f^3(\theta+\pi))\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 0$.
Según la pregunta anterior, existen $\alpha \neq \beta \in]0,\pi[$ tales que $f(\alpha) = f(\alpha+\pi)$ y $f(\beta) = f(\beta+\pi)$, lo que prueba que y tiene al menos dos diámetros de K cuyo $O = G$ es el medio. Se prueba la existencia de un tercer diámetro desplazando el origen de los ángulos polares de manera a tener $f(0) = f(\pi)$, lo que es posible dada la existencia de α, β.

Solución del ejercicio 5033 ▲004745

Para $\|x\| \leqslant 1$ y $\|y\| \leqslant 1$ se tiene $\|f(x) - f(y)\| = \|x-y\|$.
Para $\|x\| \leqslant 1 < \|y\|$ se tiene $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\| + \left\|y - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \|x-y\| + \|y\| - 1 \leqslant \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \leqslant 2\|x-y\|$.
Para $1 < \|x\| \leqslant \|y\|$ se tiene $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \frac{\|x-y\| + \|y\| - \|x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\|x\|}$.
Observación : en el caso donde la norma es euclidiana, $f(x)$ es la proyección de x sobre la bola unidad, es decir el punto de la bola unidad más cercano a x. En este caso, f es 1-lipschitziana. En el caso de una norma no euclidiana se puede tener $\|f(x)-f(y)\| > \|x-y\|$, por ejemplo con $x = (1,1)$ y $y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ en $\mathbb{R}^2$, para $\|\ \|_\infty$.

Solución del ejercicio 5043 ▲004755

Se construye (s_k) paso a paso de modo que para todo n fijo la sucesión $(y_n^{s_k})$ sea convergente hacia z_n. Como $\sum_{n\leqslant N} (y_n^{s_k})^2$ es acotada independientemente de N y k la serie $\sum_n z_n^2$ tiene sus sumas parciales acotadas por lo tanto converge. Se tiene entonces $(x \mid y^{s_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x \mid z)$, para toda sucesión x de soporte finito, luego para toda sucesión cuadrado sumable por inversión de límites.

Solución del ejercicio 5044 ▲004756

1. Sea $(e_1,\dots,e_p)$ una base de E. Se reemplaza la norma sobre E por la norma infinita asociada a $(e_1,\dots,e_p)$. Entonces $|||u^n||| \leqslant \sum_{i=1}^p \|u^n(e_i)\|$.
2. Trigonalizar fuertemente u (o su extensión al complejizado de E). Como (u^n) es acotado, los valores propios de u son de módulo inferior o igual a 1, y para los de módulo 1 el bloque triangular asociada es de hecho diagonal. Se encuentra $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n u^i \xrightarrow[n\to\infty]{}$ proyección sobre $\ker(u - \mathrm{Id})$, paralelamente a $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$.

Solución del ejercicio 5048 ▲004760

1. 2. 3.

4. (P_n) converge a 0, para $a \in]-2,2[$ y hacia 1, para $a=2$. La sucesión es no acotado si $|a|>2$; es acotada divergente para $a=-2$.
5. $(X/b)^n$ converge a 1, para N_b y hacia 0, para N_a.

Solución del ejercicio 5050 ▲004762

1. 2.

3. $f(x)=\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)(f(t)+f''(((t))\,dt,\ f''(x)=(f(x)+f''(x))-f(x)$.

Solución del ejercicio 5051 ▲004763

$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \leqslant \sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \times \sum_{k=1}^n B_{kj}^2$.

Solución del ejercicio 5052 ▲004764

Si A es una matriz de rango $r>0$ tal que $p(A)=0$, entonces para toda matriz M de rango $<r$ se pueden encontrar P y Q tales que $M=PAQ$, de donde $P(M)=0$. Entonces p es nula en toda matriz de rango 1 y por desigualdad triangular en toda matriz.

Solución del ejercicio 5059 ▲004771

1. $2^n\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.
2. Se supone que existe una norma euclidiana $\|\ \|$ y dos reales $\alpha,\beta>0$ tales que $\alpha\|u\|_\infty \leqslant \|u\| \leqslant \beta\|u\|_\infty$, para todo $u\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Se establece $u(x)=1-2|x|$, para $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ y $u(x)=0$ si no. Sea $n\in\mathbb{N}$ y para $1\leqslant i\leqslant n: u_i(x)=u((n+1)x-i)$. Entonces $\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2 \leqslant 2^n\beta^2$ y $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2 \geqslant 2^n n\alpha^2$, por lo tanto estas dos sumas no pueden permanecer iguales cuando $n\to\infty$.
3. La misma construcción. Se encuentra
$$\sum_\sigma \left\|\sum_{i=1}^n \sigma(i)u_i\right\|^2 \leqslant 2^n\beta^2\|u\|_p^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/p}$$
y $2^n\sum_{i=1}^n\|u_i\|^2 \geqslant 2^n\alpha^2\|u\|_p^2\frac{n}{(n+1)^{2/p}}$.

Solución del ejercicio 5061 ▲004773

1.

2. Se prueba la convexidad de B. Sean $x,y \in B$, $t \in [0,1]$ y $z = (1-t)x + ty$. Se tiene $N^2(z) \leqslant 2t^2 + 2(1-t)^2$, de donde $N(z) \leqslant 1$ si $t = \frac{1}{2}$. Esto prueba que B es estable en el medio, y se deduce por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que $z \in B$ si t es de la forma $a/2^n$, con $a \in [\![0, 2^n]\!]$.
   Si t no es de esta forma, se escribe t como baricentro de dos números diádicos $t = u\frac{a}{2^n} + (1-u)\frac{b}{2^n}$ haciendo de modo que u esté, arbitrariamente cerca de $\frac{1}{2}$. Si es posible, se obtiene que z es el baricentro de dos elementos de B, con los coeficientes u y $1-u$, de donde $N^2(z) \leqslant 2u^2 + 2(1-u)^2 \xrightarrow[u \to \frac{1}{2}]{}$. Queda así por elegir n, a, b : para n dado, se escoge $a = [2^n] - n$ y $b = [2^n] + n$. Es posible porque $[2^n t] \sim 2^n t$ y estamos en el caso $0 < t < 1$, entonces se tiene $a, b \in [\![0, 2^n]\!]$ si n es suficientemente grande. El resultado $u = \dfrac{b - 2^n t}{b - a}$, una cantidad comprendida entre $\frac{n-1}{2n}$ y $\frac{1}{2}$ y por lo tanto, que tiende a $\frac{1}{2}$.
   Observación : la condición (iii) es también necesaria, por lo tanto una norma es una aplicación que verifica (i), (ii) y (iii).

Solución del ejercicio 5067 ▲004779

1. Se procede por inducción en n. Para $n = 1$, la aplicación $[0, +\infty[\ni \lambda_1 \mapsto \|x - \lambda_1 a_1\|$ es continua, constante si $a_1 = 0$ y tiende a $+\infty$, cuando $\lambda_1 \to +\infty$ si $a_1 \neq 0$. En ambos casos admite un mínimo. Para $n \geqslant 2$, sea $C' = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i, \lambda_i \geqslant 0 \right\}$. Sea para $\lambda_n \in [0, +\infty[$: $\varphi(\lambda_n) = d(x - \lambda_n a_n, C')$. La distancia a C' es 1-lipschitziana por lo tanto $\varphi(\lambda_n) \geqslant d(-\lambda_n a_n, C') - \|x\| = \lambda_n d(-a_n, C') - \|x\| \xrightarrow[\lambda_n \to +\infty]{} +\infty$. Siendo continua, φ admite un mínimo en $[0, +\infty[$ y se aplica la hipótesis de inducción a $x - \lambda_n a_n$.
2.

Solución del ejercicio 5068 ▲004780

Se procede por inducción en $n = \dim E$. Para $n = 1$, confundiendo E y $\mathbb{R}$, C es un intervalo denso, es $\mathbb{R}$. Para $n \geqslant 2$, sea $E = H \oplus \langle a \rangle$, donde H es un hiperplano de E. Demostrar a continuación que $C' = C \cap H$ es una parte de H convexa y densa, por lo tanto igual a H, de donde $H \subset C$ y esto para todo H. Así $C = E$.
Densidad de C' : sea $x \in H$, y (y_k), (z_k) sucesiones de elementos de C convergiendo respectivamente hacia $x + a$ y $x - a$. Se escribe $y_k = y'_k + \lambda_k a$ y $z_k = z'_k + \mu_k a$, con $y'_k, z'_k \in H$ y $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$. Por equivalencia de normas en dimensión finita, se tiene $\lambda_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$ y $\mu_k \xrightarrow[k \to \infty]{} -1$, entonces el punto $x_k = \dfrac{\lambda_k z_k - \mu_k y_k}{\lambda_k - \mu_k}$ está bien definido y pertenece a C', para k bastante grande, y converge a x.
Observación : Si E es de dimensión infinita, entonces contiene hiperplanos no cerrados, entonces de partes estrictas, convexas densas.

Solución del ejercicio 5070 ▲004782

1. $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \{$funciones estrictamente positivas$\}$.
2. $\overline{P} = P$, $\mathring{P} = \varnothing$.

Solución del ejercicio 5071 ▲004783

$\overline{F} = F$, $\mathring{F} = \varnothing$.

Solución del ejercicio 5072 ▲004784

Sí para $\pm \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, no para los otros (las simetrías no triviales).
$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ es aislado porque si $u \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, entonces -1 es valor propio de u y $\|u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\| \geqslant 2$. Igualmente para $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
Si u es una simetría no trivial, sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base propia de u, con $u(e_1) = e_1$ y $u(e_2) = -e_2$. Para $p \in \mathbb{N}^*$ sea $u_p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ definida por $u_p(e_1) = e_1 + e_2/p$ y $u_p(e_i) = u(e_i)$, para $i \geqslant 2$. Se tiene $u_p^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, $u_p \neq u$ y $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{} u$.

Solución del ejercicio 5075 ▲004787

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ es abierto. Es denso porque $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ cualquiera es límite de las matrices $A - \frac{1}{p}I$ invertibles para casi todo entero p (A tiene un número finito de valores propios).
2. Toda matriz triangular es límite de matrices triangulares con distintos coeficientes diagonales.
3. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lim_{p\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, entonces una matriz triangular con valores propios no distintos es límite de matrices no diagonalizables. Por conjugación, la frontera de $D_n(\mathbb{C})$ contiene el conjunto de matrices que tienen al menos un valor propio múltiple. Recíprocamente, sea (A_k) una sucesión de matrices no diagonalizables convergente a una matriz A. Las matrices A_k todos tienen al menos un valor propio múltiple, y estos valores propios son acotados (porque si λ es un valor propio de M, entonces $|\lambda| \leqslant \|M\|$ tomando una norma sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sujeto a una norma sobre $\mathbb{C}^n$) para que podamos encontrar una sucesión (z_k) de complejos convergiendo a un complejo z tal que $\chi'_{A_k}(z_k) = 0$. En el límite se tiene $\chi_A(z) = 0$, lo que prueba que A tiene al menos un valor propio múltiple.

   Conclusión : la frontera de $D_n(\mathbb{C})$ es exactamente el conjunto de matrices diagonalizables que tienen al menos un valor propio múltiple y el interior de $D_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de matrices de valores propios distintos.

Solución del ejercicio 5076 ▲004788

Si N es nilpotente, se puede volver al caso donde N es triangular superior estricta.
Sea entonces $P = \mathrm{diag}(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, con $\alpha \in \mathbb{C}^*$. El coeficiente general de $P^{-1}NP$ es $\alpha^{j-i}N_{ij} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.
Recíprocamente, si existe una sucesión (N_k) de matrices semejantes à N convergiendo a la matriz nula, entonces por continuidad del polinomio característico, se tiene $\chi_N = (-X)^n$ y N es nilpotente.

Solución del ejercicio 5077 ▲004789

1. Ω es abierto : si P tiene n raíces distintas $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ se escogen $b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n$. La sucesión $(P(b_0), \ldots, P(b_n))$ consta de términos no nulos de signos alternos, es lo mismo para la sucesión $(Q(b_0), \ldots, Q(b_n))$, donde Q es un polinomio mónico arbitrario suficientemente cerca de P (para cualquier norma). Ω no es cerrado porque $\varnothing \neq \Omega \neq \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es conexo.
2. Si se provee $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}_n[X]$ de normas convenientes, f es una isometría bicontinua por lo que $f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$. Demostrar que $\overline{f(\Omega)}$ es el conjunto $\mathscr{S}$ de polinomios de $\mathbb{R}_n[X]$ unitarios y divididos en $\mathbb{R}$. Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, se denota $M(P)$ la matriz compañera de P. Si $P \in \mathscr{S}$, entonces $M(P)$ es $\mathbb{R}$-trigonalizable, por lo tanto, límite de matrices con valores propios reales distintos. Los

polinomios característicos de estas matrices, al signo más cercano, perteneciendo a $f(\Omega)$ y convergen hacia P, de donde $\mathscr{S} \subset \overline{f(\Omega)}$.

Si (P_k) es una sucesión de polinomios de $f(\Omega)$ convergiendo hacia P, entonces existe una sucesión (O_k) de matrices ortogonales tales que ${}^tO_kM(P_k)O_k$ es triangular superior (método de Schmidt). Si se extrae una sub-sucesión, se puede asumir que O_k converge a una matriz ortogonal O y entonces ${}^tOM(P)O$ es también triangular superior lo que implica que $P \in \mathscr{S}$.

Solución del ejercicio 5079 ▲004791

Se observa que la restricción de f a toda parte compacta, es uniformemente continua.

Solución del ejercicio 5086 ▲004798

1.
2. Sea F un cerrado, y $a \in F$. Se toma $f(x) = x + d(x,F)$ si $0 \leqslant x \leqslant a$ y $f(x) = x - d(x,F)$ si $a \leqslant x \leqslant 1$.

Solución del ejercicio 5087 ▲004799

1. Para simplificar, se supone $z = 0$ (si no, colocarse en la base $(1, X-z, \dots, (X-z)^d)$ e invocar la equivalencia de normas de dimensión finita).

   Sea $P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \cdots + a_{n,d}x^d$. La sucesión (P_n) siendo convergente es acotada por lo que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_{n,k}| \leqslant M$, para todo n,k. Además, $a_{n,0} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0 = 0$ y $a_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1 \neq 0$.

   Se define entonces $Q_n(x) = -\dfrac{a_{n,0} + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,d}x^d}{a_{n,1}}$ (bien definido si n es bastante grande). Se va a demostrar que Q_n verifica las hipótesis del teorema del punto fijo en $\overline{B(0,\delta)}$, para todo n lo suficientemente grande si δ se elige lo suficientemente pequeño, lo que implica la existencia y unicidad de una raíz para P_n en $\overline{B(0,\delta)}$. $Q_n(\overline{B(0,\delta)}) \subset \overline{B(0,\delta)}$?

   Sea $x \in \overline{B(0,\delta)}$: se tiene

   $$|Q_n(x)| \leqslant \frac{|a_{n,0}| + M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_{n,1}|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_1|}.$$

   Se escoge $\delta > 0$ tal que $\frac{M(\delta + \cdots + \delta^{d-1})}{|a_1|} \leqslant \frac{1}{2}$. Existe entonces $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n,0}| + M(\delta^2 + \cdots + \delta^d)}{|a_{n,1}|} \leqslant \delta$, para todo $n \geqslant N_1$. Q_n es contractante en $\overline{B(0,\delta)}$?

   Sean $x, y \in \overline{B(0,\delta)}$. Se tiene :

   $$\begin{aligned}|Q_n(x) - Q_n(y)| &\leqslant \frac{|a_{n,2}||x^2 - y^2| + \cdots + |a_{n,d}||x^d - y^d|}{|a_n, 1|} \\ &\leqslant |x-y| \frac{|a_{n,2}||x+y| + \cdots + |a_{n,d}||x^{d-1} + \cdots + y^{d-1}|}{|a_{n,1}|} \\ &\leqslant |x-y| \frac{M(2\delta + \cdots + d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|}.\end{aligned}$$

   Incluso, si se disminuye δ se puede imponer $\frac{M(2\delta + \cdots + d\delta^{d-1})}{|a_1|} \leqslant \frac{1}{2}$ y así $\frac{M(2\delta + \cdots + d\delta^{d-1})}{|a_{n,1}|} \leqslant \frac{2}{3}$, $\forall n \geqslant N_2$ y Q_n es $\frac{2}{3}$-lipschitziana.

2. Ver la respuesta anterior. ¿Hay una respuesta más simple para 1) ?
3. Si z es cero de orden k de P, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo n bastante grande, P_n tiene exactamente k raíces contadas con su orden de multiplicidad en $\overline{B(0,\delta)}$. Esta es una consecuencia de *teorema de residuos*,que queda fuera de nuestro programa...

Solución del ejercicio 5088 ▲004800

Si f es constante es obvio. Si no, se tiene fácilmente $|f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$. Se considera un cerrado F y una sucesión $(f(z_n))$ de elementos de $f(F)$ convergiendo hacia $Z \in \mathbb{C}$. Según la observación, la sucesión (z_n) es acotada, admite un valor de adherencia $z \in F$ y $Z = f(z) \in f(F)$.
Observación : este resultado es falso para una función polinómica en $\mathbb{C}^p$, con $p \geqslant 2$, tomar por ejemplo $f(x,y) = x$ sobre $\mathbb{C}^2$ y $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $xy = 1\}$.

Solución del ejercicio 5089 ▲004801

Se supone P no constante, de lo contrario el resultado es trivial. Sea $S(X) = \sup(|P(x)|,\ x \in X)$. Se tiene por inclusión y continuidad : $S(\mathrm{Fr}(U)) \leqslant S(\overline{U}) = S(U)$.
Sea $x \in \overline{U}$ tal que $|P(x)| = S(\overline{U})$. Demostrar por reducción al absurdo que $x \in \mathrm{Fr}(U)$, lo que conduce a la igualdad requerida. Entonces se supone $x \in U$ y sea $n = \mathrm{grad}(P)$. Para $\rho > 0$ suficientemente pequeño, y $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene $x + \rho e^{i\theta} \in U$ y :

$$P(x+\rho e^{i\theta}) = P(x) + \rho e^{i\theta} P'(X) + \cdots + \frac{\rho^n e^{en\theta}}{n!} P^{(n)}(x).$$

con $P^{(n)}(x) = P^{(n)} \neq 0$. Así :

$$2\pi|P(x)| = \left|\int_0^{2\pi} P(x+\rho e^{i\theta})\,d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |P(x+\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant 2\pi S(U) = 2\pi|P(x)|.$$

Se deduce que las desigualdades son igualdades, y en particular que la cantidad $|P(x+\rho e^{i\theta})|$ es independiente de ρ y θ. Hay una contradicción porque $|P(x+\rho e^{i\theta})|^2$ es un polinomio de grado $2n$ en ρ.

Solución del ejercicio 5090 ▲004802

1. $f(rx) = rf(x)$, para todo $r \in \mathbb{N}$ por recurrencia, luego para todo $r \in \mathbb{Z}$ por diferencia, para todo $r \in \mathbb{Q}$ por cociente y finalmente para todo $r \in \mathbb{R}$ por densidad. En el caso de $\mathbb{C}$-ev f es $\mathbb{R}$-lineal pero no necesariamente $\mathbb{C}$-lineal, ctr.ej. : $z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.
2. $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leqslant M2^{-n-1}$ por lo que la serie telescópica $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ es uniformemente convergente.
3. $\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant M2^{-n}$, por lo tanto $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leqslant 0$ y g es continua (límite uniforme de los f_n) de donde g es lineal continua. $\|f(x) - g(x)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\| \leqslant 2M$, por lo tanto $f - g$ es acotada. Si h es una aplicación lineal tal que $f - h$ es acotada entonces $g - h$ es también acotada lo que conduce a $g = h$ por linealidad.

Solución del ejercicio 5093 ▲004805

1.

2. Si $c \neq 0$, entonces P_c es continua para todas las normas N_p y $|||P_c|||_{N_p} = |c|^{-p}\mathrm{e}^{|c|}$. Sin embargo, P_0 solo es continua para N_0 porque si $p > 0$, entonces $N_p(x \mapsto \mathrm{e}^{-n|x|}) = \dfrac{p^p\mathrm{e}^{-p}}{(n+1)^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, por lo tanto la sucesión $(x \mapsto \mathrm{e}^{-n|x|})$ converge a la función nula para N_p, pero $P_0(x \mapsto \mathrm{e}^{-n|x|}) = 1 \not\to 0$.
3. Si $p < q$, entonces $N_p(x \mapsto \mathrm{e}^{-n|x|})/N_q(x \mapsto \mathrm{e}^{-n|x|}) \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Solución del ejercicio 5098 ▲004810

Tomar una base.

Solución del ejercicio 5099 ▲004811

$\dfrac{1}{1-X^n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1-\omega_k X}$, $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$. Así $1 = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1-X^n}{n(1-\omega_k X)}$.

Se trata de polinomios, se puede reemplazar X por u, de donde : $(\mathrm{Id}_E - u^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{Id}_E - \mathrm{e}^{2ik\pi/n}u\right)^{-1}$.

Solución del ejercicio 5100 ▲004812

$\|X+iY\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$, $\|A(X+iY)\|^2 = \|AX\|^2 + \|AY\|^2 \leqslant |||A|||_{\mathbb{R}}^2(\|X^2\| + \|Y\|^2)$, por lo tanto $|||A|||_{\mathbb{C}} \leqslant |||A|||_{\mathbb{R}}$.

Solución del ejercicio 5101 ▲004813

1. No : $\|(x^2+1)^n\| = 2^n$.
2. Sí : $\|\psi\| = \|A\|$.
3. $\|\phi\| = e$, $\|\psi(x^n)\|/\|x^n\|$ si $mn \Rightarrow \psi$ es discontinua.

Solución del ejercicio 5102 ▲004814

1. nv^{n-1}.
2. Si u y v son continuos, $n\|v^{n-1}\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^n\| \leqslant 2\|u\|\,\|v^{n-1}\|\,\|v\|$.
   Si existe k tal que $v^k = 0$, se puede volver a $v = 0$, absurdo. Si no, se tiene así una contradicción.

Solución del ejercicio 5103 ▲004815

1.
2. $\|P\| = N(P) + N(P') + N(P'') + \cdots$, donde N es una norma cualquiera en F.

Solución del ejercicio 5104 ▲004816

Las formas lineales $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$ y $P \mapsto P(2)$ constituyen una base de E_2^* por lo tanto generan las formas lineales $P \mapsto P'(1)$, $P \mapsto P'(2)$ y $P \mapsto P'(3)$. Después de los cálculos, se encuentra :

$$\forall P \in E_2, \quad \begin{cases} 2P'(1) = P(2) - P(0) \\ 2P'(2) = 3P(2) - 4P(1) + P(0) \\ 2P'(3) = 5P(2) - 8P(1) + 3P(0). \end{cases}$$

denotando $P(0)=a$, $P(1)=b$ y $P(2)=c$ así se debe buscar :

$$|||\varphi||| = \frac{1}{2}\sup\{|c-a|+4|3c-4b+a|+9|5c-8b+3a|,\ \text{tal que } |a|+|b|+|c|\leqslant 1\}.$$

La función $f:(a,b,c)\mapsto |c-a|+4|3c-4b+a|+9|5c-8b+3a|$ es convexo por lo que su máximo sobre el *icosaedro* $I=\{(a,b,c)$ tal que $|a|+|b|+|c|\leqslant 1\}$ se alcanza en uno de los vértices $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$.
Finalmente, $|||\varphi||| = \frac{1}{2}f(0,1,0)=44$.

Solución del ejercicio 5106 ▲004818

1.
2. Si $x\notin\ker f: \forall y\in\ker f,\ |f(x)|=|f(x-y)|\leqslant\|f\|\,\|x-y\|$, por lo tanto $|f(x)|\leqslant\|f\|d(x,\ker f)$.
   Sea $z\in E: z=\alpha x+y$, con $y\in\ker f$. Entonces $|f(z)|=|\alpha||f(x)|$ y $\|z\|\geqslant|\alpha|d(x,\ker f)$
   por lo tanto, $\dfrac{|f(z)|}{\|z\|}\leqslant\dfrac{|f(x)|}{d(x,\ker f)}$.

Solución del ejercicio 5107 ▲004819

1. $f(x_1)+f(x_2)\leqslant|||f|||\ \|x_1+x_2\|\leqslant|||f|||\ (\|x_1-\varepsilon\|+\|x_2+\varepsilon\|)$.
2. Tomar α comprendido entre el sup del primer miembro y el inf del tercero. El sup y el inf están en este orden según la pregunta anterior.
3. Observación : φ está mal definida, hay que añadir "φ es lineal". Se tiene obviamente $|||\varphi|||\geqslant|||f|||$ ya que φ prolonga f, y queda por demostrar :

   $$\forall x\in F,\ \forall t\in\mathbb{R},\ |f(x)+t\alpha|\leqslant|||f|||\ \|x+t\varepsilon\|.$$

   Para $t=0$ es un hecho conocido. Para $t>0$, esto resulta del encuadramiento de α tomando $x_1=-x/t$ y $x_2=x/t$. Para $t<0$, tomar $x_1=x/t$ y $x_2=-x/t$.
4. Si $u^k=(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ y $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, así como para todo $n\in\mathbb{N}$, la sucesión real $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto converge a un real ℓ_n. Además, la sucesión $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en E, por lo tanto la sucesión (ℓ_n) así puesta en evidencia es sumable (las sumas parciales de $\sum|\ell_n|$ son mayoradas), y se demuestra que $\|u^k-\ell\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ por inversión de límites.
5. Tomar $F_n=\{u\in E$ tal que $u_k=0$ si $k\geqslant n\}$.
6. Según la pregunta 3) se puede construir f_n, forma lineal en $F+F_n$ tal que f_{n+1} prolonga f_n y tienen la misma norma que f_n (por lo tanto $|||f_n|||=|||f|||$). Sea $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F+F_n)$ y g la forma lineal en G coincidente con cada f_n sobre $F+F_n$. G es denso en E así se puede extender g en $\varphi:E\to\mathbb{R}$ por continuidad uniforme. Entonces es claro que φ es una forma lineal prolongando f y tiene la misma norma que f.

Solución del ejercicio 5109 ▲004821

1. Si ν está subordinado a $\|\ \|$: se tiene $|\lambda|\leqslant\nu(f^p)^{1/p}$, para todo valor propio λ y todo $p\geqslant1$, por lo que basta probar que la sucesión $(x_p=\nu(f^p)^{1/p})$ es convergente. Sea $\ell=\inf\{x_p,\ p\geqslant1\}$, $\varepsilon>0$ y

$p \geqslant 1$ tal que $x_p \leqslant \ell + \varepsilon$. Para $n > p$ se denota $n-1 = pq + r$ la división euclidiana de $n-1$ por p y se tiene :

$$\nu(f^n) = \nu((f^p)^q \circ f^{r+1}) \leqslant \nu(f^p)^q \nu(f^{r+1}),$$

de donde :

$$\ell \leqslant x_n \leqslant x_p^{pq/n} x_{r+1}^{(r+1)/n} \leqslant (\ell+\varepsilon)^{pq/n} \max(x_1,\dots,x_p)^{(r+1)/n}.$$

El mayorante tiende a $\ell+\varepsilon$, cuando n tiende a infinito, por lo tanto para n lo suficientemente grande se tiene $\ell \leqslant x_n \leqslant \ell + 2\varepsilon$, lo que prueba la convergencia requerida.

En el caso donde ν es una norma cualquiera en $\mathscr{L}(E)$, existe una norma subordinada μ y dos reales $a, b > 0$ tales que $a\mu \leqslant \nu \leqslant b\mu$ y por lo tanto, las sucesiones $(\nu(f^p)^{1/p})$ y $(\mu(f^p)^{1/p})$ tienen el mismo límite por el teorema de los gendarmes.

Observación : de esto se sigue que $\lim\limits_{p\to\infty}(\nu(f^p)^{1/p})$ es independiente de ν.

2. Considerar la matriz de f^p en una base propia para f.
3. Se sabe que $f^p = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{spec}(f)} \lambda^p P_\lambda(p)$, donde P_λ es un polinomio. De donde $\rho(f) \leqslant \nu(f^p)^{1/p} \leqslant \rho(f) + o(1)$ y entonces $\nu(f^p)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \rho(f)$ (teorema del radio espectral).

Solución del ejercicio 5110 ▲004822

Si $u(\mathring{B}(0,1))$ es abierto entonces genera $\mathbb{R}^m$, por lo tanto u es sobreyectiva.
Si u es sobreyectiva, sea $A = u(\mathring{B}(0,1))$. A es convexo, acotado, simétrica con respecto a 0 y la unión de las homotéticas de A es igual a $\mathbb{R}^m$; el grosor asociado a A es una norma en $\mathbb{R}^m$ equivalente a una de las normas usuales, por lo tanto A contiene una bola de centro 0 y, por homotecia-traslación, todo abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene una imagen abierta en $\mathbb{R}^m$.

Solución del ejercicio 5113 ▲004825

$E \setminus B$ es conexo por arcos y contiene al menos un punto $a \in A$. Sea $x \in E \setminus B$ y $\varphi : [0,1] \to E \setminus B$ un arco continuo uniendo a a x en $E \setminus B$. Entonces $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(A \cup B)$ es no vacío, relativamente abierto y relativamente cerrado en $[0,1]$, entonces es $[0,1]$, lo que prueba que $x \in A$.

Solución del ejercicio 5114 ▲004826

El sentido H es cerrado $\Rightarrow E \setminus H$ no es conexo (por arcos) es evidente. Recíprocamente, si H, entonces no es cerrado $\overline{H} = E$. Sean $a, b \in E \setminus H$ y (x_n) una sucesión de elementos de H tal que $x_0 = 0$ y $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$. Se define un arco continuo $\varphi : [0,1] \to E \setminus H$ conectando a a b por : φ es afín a $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$, $\varphi(\frac{1}{n+1}) = b + x_n$ y $\varphi(0) = a$.

Solución del ejercicio 5115 ▲005839

Caso de la bola cerrada.
Sea $B = \{u \in E / \|u\| \leqslant 1\}$. Sean $(x,y) \in B^2$ y $\lambda \in [0,1]$.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Así, $\forall (x,y) \in B^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$ y entonces B es convexo.
Caso de la bola abierta. Sea $B = \{u \in E / \|u\| < 1\}$. Sean $(x,y) \in B^2$ y $\lambda \in [0,1]$. Porque $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ y $0 \leqslant \|x\| < 1$, se deduce que $\lambda\|x\| < 1$. Como $(1-\lambda)\|y\| \leqslant 1$ (e incluso < 1) y entonces

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| < 1.$$

La bola de unidad cerrada (o abierta) del espacio vectorial normado $(E, \| \ \|)$ es convexa en el espacio vectorial E.

Solución del ejercicio 5116 ▲005840

1. Porque $p>0$ y $q>0$, $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{p}$ y entonces $p>1$. Igualmente, $q>1$. Por otra parte, $q=\frac{p}{p-1}$.
   (a) La desigualdad es inmediata cuando $y=0$. Sea $y>0$ fijo.
   Para $x\geqslant 0$, se establece $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy$. Porque $p>1$, la función f es derivable en $[0,+\infty[$ y $\forall x\geqslant 0$, $f'(x)=x^{p-1}-y$. f admite así un mínimo en $x_0=y^{1/(p-1)}$ igual a
   $$f\left(y^{1/(p-1)}\right)=\frac{y^{p(p-1)}}{p}+\frac{y^{p/(p-1)}}{q}-y^{1/(p-1)}y=y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)=0.$$
   Finalmente, f es positiva en $[0,+\infty[$ y entonces
   $$\boxed{\forall x\geqslant 0, \forall y\geqslant 0, xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.}$$
   (b) Se define $A=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p$ y $B=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q$. Si A (o B) es nulo, todos los a_k (o todos los b_k) son nulos y la desigualdad es verdadera.
   Se supone de ahora en adelante que $A>0$ y $B>0$. Según la pregunta a),
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{A^{1/p}}\cdot\frac{|b_k|}{B^{1/q}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^p}{pA}+\frac{|b_k|^q}{qB}\right)=\frac{1}{pA}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p+\frac{1}{qB}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q=\frac{1}{pA}\cdot A+\frac{1}{qB}\cdot B=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$
   y entonces $\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|\leqslant A^{1/p}B^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$.
   Como $\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|$, se ha demostrado que
   $$\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$$
   (Desigualdad de HÖLDER).

   Observación. Cuando $p=q=2$, se tiene $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y la desigualdad de HÖLDER se escribe
   $$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{1/2}\text{ (desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ).}$$
   (c) Sea $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$. Por la desigualdad de HÖLDER, se tiene
   $$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=\sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\Leftrightarrow$$
   $$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\times\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}=$$
   $$\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

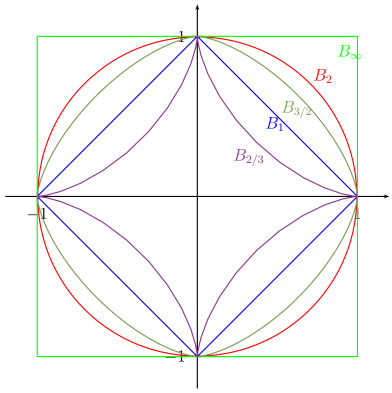
Si $\sum\limits_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p=0$, todos los a_k y los b_k son nulos y la desigualdad es clara. Si no $\sum\limits_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p>0$ y tras simplificar los dos lados de la desigualdad anterior por el número real estrictamente positivo $\sum k=1^n(|a_k|+|b_k|)^p$, se obtiene $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\ \text{(Desigualdad de MINKOWSKI).}}$$

2. (a) Se sabe ya que N_1 es una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea $\alpha>1$.
(1) N_α es de hecho una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^+$.
(2) Sea $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x)=0\Rightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ |x_k|=0\Rightarrow x=0$.
(3) Sean $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}=(|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha}N_\alpha(x)=|\lambda|N_\alpha(x)$.
(4) La desigualdad triangular es la desigualdad de MINKOWSKI.

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R}^n,\ N_\alpha \text{ es una norma en } \mathbb{R}^n.}$$

(b) Algunas « bolas unitarias » en $\mathbb{R}^2$.



Observación. Toda bola unidad es simétrica con respecto a O ya que $\forall x\in E$, $N(x)=N(-x)$ y entonces

$$\forall x\in E,\ N(x)\leqslant 1\Leftrightarrow N(-x)\leqslant 1.$$

(c) Sean $\alpha>0$ y $x\in E$. Se tiene

$$N_\infty(x)\leqslant N_\alpha(x)\leqslant n^{1/\alpha}N_\infty(x),$$

y el teorema de los gendarmes proporciona $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}N_\alpha(x)=N_\infty(x)$.

$$B=\{x\in\mathbb{R}^n/\ N_\alpha(x)\leqslant 1\}.$$

Los vectores $x=(1,0,0,\dots,0)$ y $y=(0,1,0,\dots,0)$ son los elementos de B.
El medio del segmento $[xy]$ es $z=\frac{1}{2}(1,1,0,\dots,0)$.

$$N_\alpha(z)=\tfrac{1}{2}(1^\alpha+1^\alpha)^{1/\alpha}=2^{\frac{1}{\alpha}-1}>1,\ \text{pues}\ \frac{1}{\alpha}-1>0$$

y entonces $z \notin B$. Así, B no es convexo y por lo tanto, N_α no es una norma según el ejercicio 5115. Se puede notar que para $n = 1$, los N_α coinciden todas con el valor absoluto.

Solución del ejercicio 5117 ▲005841

• Se sabe que N es una norma en E.
• Demostrar que N' es una norma en E. (1) N' es una aplicación de E en $\mathbb{R}^+$ porque para f en E, f' es continua en el segmento $[0,1]$ y entonces f' es integrable en el segmento $[0,1]$.
(2) Sea $f \in E$. Si $N'(f) = 0$, entonces $f(0) = 0$ y $f' = 0$ (función continua positiva de integral nula). Así, f es un polinomio de grado menor o igual que 0 tal que $f(0) = 0$ y se deduce que $f = 0$.
(3) $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\, dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \right) = |\lambda| N'(f)$.
(4) Sea $(f,g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Entonces N' es una norma en E.
• Demostrar que N'' es una norma en E. Se observa que $\forall f \in E, N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ y todo es inmediato.

$$\boxed{N,\ N' \text{ y } N'' \text{ son normas en } E.}$$

• Sea $f \in E$ y $t \in [0,1]$. Porque la función f' es continua en $[0,1]$

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(u)\, du| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| del \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\, du = N'(f),$$

y entonces $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 N'(f)\, dt = N'(f)$. Luego aplicando el resultado precedente a f', se obtiene

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalmente,

$$\boxed{\forall f \in E, N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f).}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$, se establece $f_n(t) = t^n$. $N(f_n) = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$ y así la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 en el espacio vectorial normado (E,N). Sin embargo, para $n \geqslant 1$, $N'(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1}\, dt = 1$ y la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a 0 en el espacio vectorial normado (E,N'). Se deduce que

$$\boxed{\text{Las normas } N \text{ y } N' \text{ no son normas equivalentes.}}$$

Del mismo modo utilizando $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, se demuestra que las normas N' y N'' no son equivalentes.

Solución del ejercicio 5118 ▲005847

1. Sea $x \in E$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ es una parte no vacía y minorada (por 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ por lo tanto admite una cota inferior en $\mathbb{R}$. Se deduce la existencia de $d_A(x)$.

2. (a) Sea A una parte cerrada y no vacía de E. Sea $x \in E$.

   • Se supone que $x \in A$. Entonces $0 \leqslant f(x) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\} \leqslant \|x-x\| = 0$ y entonces $d_A(x) = 0$.

   • Se supone que $d_A(x) = 0$. Por definición de una cota inferior, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_\varepsilon \in A/\ \|x-a_\varepsilon\| < \varepsilon$. Sea V un vecindario de x. V contiene una bola abierta de centro x y de radio $\varepsilon > 0$, luego de acuerdo a lo anterior, V contiene un elemento de A. Finalmente, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$ y entonces $x \in \overline{A} = A$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ es cerrada}, \forall x \in E,\ (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A).}$$

   (b) Se define $d = d_A(x)$. Para cada entero natural n, existe $a_n \in A$ tal que $d \leqslant \|x-a_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}$. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. En efecto, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_n\| \leqslant \|a_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \frac{1}{n} + \|x\| \leqslant d + \|x\| + 1$.

   Porque E es de dimensión finita, de acuerdo con teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS, se puede extraer de la sucesión $(a_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergiendo a algún elemento a de E. Ya que A es cerrada, se deduce que $a \in A$. Luego, como

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d \leqslant \|x - a_{\varphi(n)}\| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

   y como $\varphi(n)$ tiende a infinito cuando n tiende a $+\infty$, se obtiene cuando n tiende a infinito, $d = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$. Ahora se sabe que la aplicación $y \mapsto \|y\|$ es continua en el espacio normado $(E, \|\ \|)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|x - a_{\varphi(n)}\right\| = \left\|x - \lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)}\right\| = \|x-a\|.$$

   Se ha demostrado que existe $a \in A$ tal que $d_A(x) = \|x-a\|$.

3. Sea $x \in E$. Porque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ es una cota inferior de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$. Como $d_A(x)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$, por lo tanto se tiene $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.

   Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe $y \in \overline{A}$ tal que $\|x-y\| < d(x,\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ y luego existe $a \in A$ tal que $\||y-a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se deduce que

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

   Así, $\forall \varepsilon > 0$, $d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Cuando ε tiende a 0, se obtiene $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Finalmente,

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).}$$

4. Demostrar que la aplicación d_A es lipschitziana.

   Sea $(x,y) \in E^2$. Sea $a \in A$. $d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$. Entonces, $\forall a \in A$, $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$ o aún $d_A(x) - \|x-y\|$ es una cota inferior de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$.

   Porque $d_A(y)$ es la mayor de las cotas inferiores de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$, se tiene $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant d_A(y)$. En resumen, $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x-y\|$.

   Intercambiando los roles de x y y, se obtiene $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x-y\|$ y finalmente

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x-y\|.$$

   Así la aplicación $d_A : \begin{array}{l}(E, \|\ \|) \to (\mathbb{R}, |\ |) \\ x \mapsto d_A(x)\end{array}$ es 1-lipschitziana y, en particular d_A es continua en el espacio vectorial normado $(E, \|\ \|)$.

5. Sean A y B dos partes cerradas y no vacías de E tales que $d_A = d_B$. Sea $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (de acuerdo a 2)) y entonces $a \in B$ (de acuerdo a 2)). Así $A \subset B$, por simetría de los roles, $B \subset A$ y finalmente $A = B$.

6. (A no es un subespacio vectorial de E.)

Sea $f \in A$. $1 \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty$. Así, $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty \geqslant 1$ y entonces $d_A(0) \geqslant 1$.

Para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in [0,1]$, se establece $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1+\frac{1}{n} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$.

Para cada entero natural no nulo n, la función f_n es continua en $[0,1]$ y

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant 1.$$

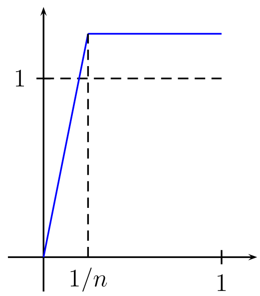
Entonces, la sucesión $(f_n)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de elementos de A. Se deduce que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_A(0) \leqslant \|f_n\|_\infty = 1+\frac{1}{n}$. En resumen, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant d_A(0) \leqslant 1+\frac{1}{n}$ y finalmente

$$\boxed{d_A(0) = 1.}$$

Observación. A es cerrada pero la distancia a A todavía no se alcanza. En efecto :

• Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de A convergiendo en el espacio vectorial normado $(E, \|\ \|_\infty)$ a un cierto elemento f de E. La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre $[0,1]$ y por lo tanto, por un lado, $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ y por otro lado $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 1$. Entonces $f \in A$ y se ha demostrado que A es cerrada.

• Se supone que existe $f \in A$ tal que $\|f\|_\infty = 1$. Entonces el encuadramiento $1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \|f\|_\infty = 1$ proporciona $\int_0^1 f(x)\,dx = \|f\|_\infty = 1$, luego $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f(x))\,dx = 0$ y entonces $\|f\|_\infty - f = 0$ (función continua positiva de integral nula) o aún $f = 1$, lo que contradice $f(0) = 0$. Entonces no se puede encontrar $f \in A$ tal que $d_A(0) = d(0, f)$.



Solución del ejercicio 5119 ▲004841

Sean F_1, F_2 cerrados no vacíos disjuntos tales que $F_1 \cup F_2 = A$: Entonces $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(F_1) \cup \mathrm{Fr}(F_2)$.

Solución del ejercicio 5121 ▲004843

Sean F_1, F_2 cerrados no vacíos disjuntos tales que $F_1 \cup F_2 = \{\text{pda de } u_n\}$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(F_1, F_2) > \varepsilon$. Entonces, a partir de cierto rango todos los términos de la sucesión están en uno de los F_i.

Solución del ejercicio 5127 ▲004848

Sea $r = \lim r_n$: $\|a_n - a_{n+k}\| \leqslant r_n - r_{n+k}$, por lo tanto la sucesión (a_n) es de Cauchy, y converge a a. Se tiene $\|a_n - a\| \leqslant r_n - r$, o sea $B(a,r) \subset B_n$.
Recíprocamente, si $x \in \bigcap_n B_n$, entonces $\|x - a_n\| \leqslant r_n$, por lo tanto $\|x - a\| \leqslant r$.

Solución del ejercicio 5129 ▲004850

Sea $a \in \mathring{F}$ y $B(a,r) \subset \bigcup_n F_n$: $B \setminus F_1$ es un abierto no vacío por lo tanto contiene una bola $B_1(a_1,r_1)$. Igualmente, $B_1 \setminus F_2$ contiene una bola $B_2(a_2,r_2)$ etc. Se puede imponer $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces existe $c \in \bigcap_n B_n$, es decir $c \in B$, pero para todo n, $c \notin F_n$. Contradicción.

Solución del ejercicio 5130 ▲004851

Sea (a_n) definida por $a_{n+1} = f(a_n)$: las sub-sucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) convergen en el punto fijo de $f \circ f$.

Solución del ejercicio 5131 ▲004852

Se supone que existe una familia $(\mathscr{C}_i = \mathscr{C}(a_i,R_i))_{i\in I}$ de círculos disjuntos cuya unión es igual al plano P. Se denota D_i el disco de borde cerrado $\mathscr{C}_i$. Sea $i_0 \in I$ elegido arbitrariamente, i_1 tal que $a_{i_0} \in \mathscr{C}_{i_1}$, i_2 tal que $a_{i_1} \in \mathscr{C}_{i_2}$ etc. Se tiene $R_{i_k} < \frac{1}{2}R_{i_{k-1}}$, por lo tanto la sucesión (D_{i_k}) verifica el teorema de los cerrados anidados, la intersección de los D_{i_k} se reduce a un punto x por el cual no pasa ningún círculo $\mathscr{C}_j$.

Solución del ejercicio 5132 ▲004853

1.
2. Semicírculo unidad $\Rightarrow x = 0$, $y = \frac{2}{\pi}$.
3. Sumas de Riemann + la envolvente convexa de un compacto es compacta.
4. $\overrightarrow{N}'(t) = \overrightarrow{\sigma}(\overrightarrow{M}'(t)) \Rightarrow \|\overrightarrow{N}'(t)\| = \|\overrightarrow{M}'(t))\|$.
   $\int_a^b \overrightarrow{GN_t}\|\overrightarrow{N}'(t)\|\,dt = \overrightarrow{0} = \int_a^b \overrightarrow{\sigma(G)N_t}\|\overrightarrow{M}'(t)\|\,dt$, por lo tanto $\sigma(G) = G$.
5.

Solución del ejercicio 5133 ▲004854

1.
2.
3. $\overrightarrow{e}_i'' = \overrightarrow{\Omega}' \wedge \overrightarrow{e}_i + (\overrightarrow{\Omega}|\overrightarrow{e}_i)\overrightarrow{\Omega} - \|\overrightarrow{\Omega}\|^2\overrightarrow{e}_i$.

Solución del ejercicio 5136 ▲004857

1. No : $f(t) = (t,t^2)$, $g(t) = (1,t)$.
2. No : $f(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, $g(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$.

Solución del ejercicio 5138 ▲005854

1. • Sea $P \in E$. Si se escribe $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Entonces

$$\|P\|_\infty = \sup\left\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} = \max\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$$

existe en $\mathbb{R}$.

• $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.
• Sea $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.
• Sean $P \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \max\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \max\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.
• Sean $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ y $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ dos polinomios. Para $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ y entonces $\|P+Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ es una norma en } E.}$$

2. $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ y entonces $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$.

   Se deduce que $\sup\left\{\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty},\ P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$. Esto demuestra simultáneamente que f es continua en $(E, \|\ \|_\infty)$ y $|||f||| = 1$.

$$\boxed{f \text{ es continua en } (E, \|\ \|_\infty) \text{ y } |||f||| = 1.}$$

Solución del ejercicio 5139 ▲005855

(La linealidad de Δ es clara y además Δ es un endomorfismo de E porque si u es una sucesión acotada, $\Delta(u)$ lo es aún. Más precisamente,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ y entonces } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Esto demuestra que Δ es continua en E y $|||\Delta||| \leqslant 2$. Luego, si u es la sucesión definida por $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, entonces u es un elemento no nulo de E tal que $\|u\|_\infty = 1$ y $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En resumen, • $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$, • $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$. Se deduce que

$$\boxed{\Delta \text{ es continua en } (E, \|\ \|_\infty) \text{ y } |||\Delta||| = 2.}$$

(La linealidad de C es clara y C es un endomorfismo de E porque si u es acotada, $C(u)$ lo es aún. Más precisamente,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ y entonces } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Así T es continua en E y $|||T||| \leqslant 1$. Luego, si u es la sucesión definida por $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, entonces u es un elemento no nulo de E tal que $\|u\|_\infty = 1$ y $\|C(u)\|_\infty = 1$. En resumen, • $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$, • $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$. Se deduce que

$$\boxed{C \text{ es continua en } (E, \|\ \|_\infty) \text{ y } |||C||| = 1.}$$

Solución del ejercicio 5140 ▲005856

1. Sea $f \in E$.

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |Tf(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx$$
$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1.$$

Esto demuestra que $\forall f\in E\setminus\{0\}$, $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1}\leqslant 1$. Además, demuestra que T es continua en $(E,\|\ \|_1)$ y que $|||T|||\leqslant 1$. Para $n\in\mathbb{N}$ y $x\in[0,1]$, se escribe $f_n(x)=(1-x)^n$. Para $n\in\mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1=\int_0^1(1-x)^n\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1},$$

luego para $x\in[0,1]$, $Tf_n(x)=\int_0^x(1-t)^n\,dt=\frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ y entonces

$$\|Tf_n\|_1=\int_0^1|Tf_n(x)|\,dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1(1-(1-x)^{n+1})\,dx=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}.$$

Se deduce que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|||T|||\geqslant\frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1}=\frac{n+1}{n+2}$. En resumen, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2}\leqslant|||T|||\leqslant 1$ y entonces $|||T|||=1$.

$$\boxed{T \text{ es continua en } (E,\|\ \|_1) \text{ y } |||T|||=1.}$$

2. Se supone que existe $f\in E\setminus\{0\}$ tal que $\|Tf\|_1=\|f\|_1$. Se deduce que cada desigualdad escrita al principio de la pregunta 1) es una igualdad y además $\int_0^1\left(\int_0^x|f(t)|\,dt\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1|f(t)|\,dt\right)dx$ o aún $\int_0^1\left(\int_0^1|f(t)|\,dt-\int_0^x|f(t)|\,dt\right)dx=0$. Así, $\forall x\in[0,1]$, $\int_0^1|f(t)|\,dt-\int_0^x|f(t)|\,dt=0$ (función continua, positiva, de integral nula), luego derivando la última desigualdad, $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)|=0$ y finalmente $f=0$. Esto es una contradicción y por lo tanto, $|||T|||$ no se alcanza.

Solución del ejercicio 5141 ▲005857

La aplicación f es lineal de (E,N) en $(\mathbb{R},|\ |)$. Sea $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.

$$|f(A)|=|\mathrm{tr}(A)|\leqslant\sum_{i=1}^n|a_{i,i}|\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\right)\leqslant\sum_{i=1}^n N(A)=nN(A).$$

Esto ya demuestra que f es continua en (E,N) y que $|||f|||\leqslant n$. Además, si $A=I_n\neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)}=\frac{n}{1}=n$. Así

$$\boxed{f \text{ es continua en } (E,N) \text{ y } |||f|||=n.}$$

Solución del ejercicio 5142 ▲005858

• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty=\max\{|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i,j\leqslant n\}$. Sean $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ y $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Se define $AB=(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, donde $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$. Para $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_{i,k}||b_{k,j}|\leqslant\sum_{k=1}^n\|A\|_\infty\|B\|_\infty=n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

y por lo tanto, $\|AB\|_\infty\leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Así, $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty}\leqslant n$. Además, para $A_0=B_0=(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0$, $\|A_0\|_\infty=\|B_0\|_\infty=1$, luego $\|A_0B_0\|_\infty=\|nA_0\|_\infty=n$ y entonces $\frac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty}=n$. Esto demuestra que

$$\boxed{\sup\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=n.}$$

En particular, $\|\ \|_\infty$ no es una norma sub multiplicativa.
• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$. Con las notaciones anteriores,

$$\begin{aligned}\|AB\|_1&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|c_{i,j}|=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n|a_{i,k}||b_{k,j}|\right)=\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}|a_{i,k}||b_{k,j}|\\&=\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}|a_{i,j}||b_{k,l}|=\|A\|_1\|B\|_1.\end{aligned}$$

Entonces $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1}\leqslant 1$. Además, para $A_0=B_0=E_{1,1}$, se tiene $A_0B_=E_{1,1}$ y entonces $\frac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1}=1$. Esto demuestra que

$$\boxed{\sup\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1.}$$

En particular, $\|\ \|_1$ es una norma sub-multiplicativa.
• $\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}^2}$. Con las notaciones anteriores,

$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}c_{i,j}^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\&\leqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\ \text{(desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ)}\\&=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right)=\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n}a_{i,k}^2b_{l,j}^2=\left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n}a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n}b_{l,j}^2\right)=\|A\|_2\|B\|_2\end{aligned}$$

Entonces $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2}\leqslant 1$. Además, para $A_0=B_0=E_{1,1}$, se tiene $A_0B_=E_{1,1}$ y entonces $\frac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2}=1$. Esto demuestra que

$$\boxed{\sup\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}=1}$$

En particular, $\|\ \|_2$ es una norma sub-multiplicativa.

Solución del ejercicio 5143 ▲005859

Una « norma tres barras » sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es necesariamente sub multiplicativa. El ejercicio anterior muestra que existen normas sobre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que no son sub-multiplicativas (por ejemplo $\|\ \|_\infty$). Así una norma en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ no es necesariamente una « norma de tres barras ».

Solución del ejercicio 5144 ▲005860

Sea N una norma en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Según el ejercicio 5142, $\|\ \|_1$ es una norma sub-multiplicativa. Porque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión finita en $\mathbb{R}$, N y $\|\ \|_1$ son normas equivalentes. Así, existen dos números reales estrictamente positivos α y β tales que $\alpha\|\ \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\|\ \|_1$. Para $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

y el real $k = \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ es un real estrictamente positivo tal que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.

Observación. El resultado anterior significa que $N' = \frac{1}{K}N$ es una norma sub-multiplicativa porque para $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \frac{1}{k^2}N(AB) \leqslant \frac{1}{k^2}N(A)N(B) = \frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

Solución del ejercicio 5145 ▲005861

No, porque si $A = E_{1,1} \neq 0$ y $B = E_{2,2} \neq 0$, entonces $AB = 0$, luego $N(AB) < N(A)N(B)$.

Solución del ejercicio 5146 ▲005862

• Para $\|\ \|_1$. Sean $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, luego $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\max\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\} = \max\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,\end{aligned}$$

denotando $C_1,\dots,C_n$ las columnas de la matriz A. Entonces, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 \leqslant \max\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. Sea entonces $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tal que $\|C_{j_0}\|_1 = \max\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. Se denota X_0 el vector columna cuyas componentes son todas nulas excepto la j_0-ésima que es igual a 1. X_0 es un vector no nulo tal que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}| = \max\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}\times\|X_0\|_1.$$

En resumen, (1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \max\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$, (2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\dfrac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \max\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.

Se deduce que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \max\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.

• Para $\|\ \|_\infty$. Sean $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, luego $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Para $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty\\ &\leqslant \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \max\{\|L_k\|_1,\ 1\leqslant k\leqslant n\}\times\|X\|_\infty,\end{aligned}$$

denotando $L_1,\dots,L_n$ las filas de la matriz A. Entonces, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty \leqslant \max\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. Sea entonces $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tal que $\|L_{i_0}\|_1 = \max\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. Se define $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, donde $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ε_j

es un elemento de $\{-1,1\}$ tal que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j |a_{i_0,j}|$ (por ejemplo, $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ y $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 1$).

$$\begin{aligned}\|AX_0\|_\infty &= \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}\\ &\geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \max\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \times \|X_0\|_\infty.\end{aligned}$$

En resumen, (1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant \max\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geqslant \max\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
Se deduce que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty = \max\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Así, denotando $C_1,\dots,C_n$ y $L_1,\dots,L_n$ respectivamente las columnas y las filas de una matriz A,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1 = \max\{\|C_j\|_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \text{ y } |||A|||_\infty = \max\{\|L_i\|_1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.}$$

Solución del ejercicio 5147 ▲005863

Sea $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Para $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

Además, si λ es un valor propio de D tal que $|\lambda| = \rho(D)$ y X_0 es un vector propio asociado, entonces

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En resumen
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,

(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.
Se deduce que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $|||D|||_2 = \rho(D)$.
Sea entonces $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Por el teorema espectral, existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ y $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = PD{}^tP$. Además, $\rho(A) = \rho(D)$. Para $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD{}^tPX\|_2\\ &= \|D({}^tPX)\|_2 \text{ (pues } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2)\\ &= \|DX'\|_2 \text{ donde se ha puesto } X' = {}^tPX.\end{aligned}$$

Ahora la aplicación $X \mapsto {}^tPX = X'$ es una permutación de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ porque la matriz ${}^tP$ es invertible y por lo tanto, X recorre $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si y solo si X' recorre $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Además, para todo vector columna X, $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$.
Se deduce que $\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ y, en particular,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \sup\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

Observación. La aplicación $A \mapsto \rho(A)$ es, por lo tanto una norma sobre $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ y además esta norma es sub multiplicativa.

Solución del ejercicio 5157 ▲005842

1. Sea $d : \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{array}$. Se sabe que la aplicación d es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (dotada con cualquier norma) y que $\mathbb{R}^*$ es un abierto de $\mathbb{R}$ en tanto que unión de dos intervalos abiertos. Así, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ es un abierto de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ como una imagen inversa de un abierto por una aplicación continua.
   Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. El polinomio $\det(A - xI)$ solo tiene un número finito de raíces (eventualmente nulo) por lo tanto para p entero natural mayor o igual que cierto p_0, $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La sucesión $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p \geqslant p_0}$ es una sucesión de elementos de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ convergente de límite A. Esto demuestra que la adherencia de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ o aún $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es denso en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   $$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ es un abierto de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ denso en } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es cerrado como el complemento de un abierto. Sea $n \geqslant 2$. Las matrices $A_p = pE_{1,1}$, $p \in \mathbb{N}$, son no invertibles y la sucesión $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ es no acotado. Así $Mn(R) \setminus GLn(R)$ es no acotado y por lo tanto, no compacto.

   $$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ es cerrado pero no compacto.}}$$

3. • Demostrar que $O_n(\mathbb{R})$ es cerrado.
   Se define $g : \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M \mapsto (M, {}^tM) \end{array}$, $h : \begin{array}{l} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) \mapsto MN \end{array}$, $f : \begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(R) \\ M \mapsto M^tM \end{array}$. g es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ porque es lineal en un espacio de dimensión finita. h es continua en $(M_n(\mathbb{R}))^2$ porque es bilineal en un espacio de dimensión finita. Se deduce que $f = h \circ g$ es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Finalmente, $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ es cerrado como imagen inversa de un cerrado por una aplicación continua.
   • Demostrar que $O_n(\mathbb{R})$ es acotado.
   $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{i,j}| \leqslant 1$ y entonces $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty \leqslant 1$. Por el teorema de BOREL-Lebesgue, ya que $O_n(\mathbb{R})$ es un cerrado acotado del espacio de dimensión finita $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ es un compacto de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $O_n(\mathbb{R})$ no es convexo. En efecto, las dos matrices I_n y $-I_n$ son ortogonales pero el punto medio del segmento que une estas dos matrices es 0 que no es una matriz ortogonal.

   $$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ es compacto pero no convexo.}}$$

4. $S_n(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial del espacio de dimensión finita $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y por lo tanto, es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   $$\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ es cerrado.}}$$

5. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y p un elemento fijo de $[\![1, n-1]\!]$ (el resultado es claro si $p = 0$ o $p = n$). A es de rango menor o igual a p si y solo si todos sus menores de tamaño $p+1$ son nulos (fuera de programa). Sean I y J dos subconjuntos dados de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$ y $A_{I,J}$ la matriz extraída de A de tamaño $p+1$ cuyos números de líneas están en I y los números de columna están en J. Para I y J dados, la aplicación $A \mapsto A_{I,J}$ es continua porque es lineal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Así, la aplicación $f_{I,J} :\ A \mapsto \det(A_{I,J})$ es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. El conjunto de las matrices A tales que $\det(A_{I,J}) = 0$ es,

por lo tanto un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (imagen inversa del cerrado $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ por la aplicación continua $f_{I,J}$) y el conjunto de matrices de rango menor o igual a p es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ como intersección de cerrados.

6. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Se define $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Se sabe que toda matriz es triangulizable en $\mathbb{C}$ y por lo tanto, existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$, con $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$ tal que $A = PTP^{-1}$. Se provee ahora $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de una norma multiplicativa denotada $\| \ \|$. Porque todas las normas son equivalentes en dimensión finita, existe un real estrictamente positivo K tal que para toda matriz M, $\|M\| \leqslant K\|M\|_\infty$.
Sea $\varepsilon > 0$. Existe un n-tuple real $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tales que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \varepsilon_k < \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$ y los $\lambda_k+\varepsilon_k$ son dos a dos distintos. (Se toma $\varepsilon_1 = 0$, luego ε_2 en $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tal que $\lambda_2+\varepsilon_2 \neq \lambda_1+\varepsilon_1$, lo que es posible ya que $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ es infinito, luego ε_3 en $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tal que $\lambda_3+\varepsilon_3$ sea diferente de $\lambda_1+\varepsilon_1$ y $\lambda_2+\varepsilon_2$, lo que es posible ya que $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ es infinito...)
Se define $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, luego $T' = T + D$ y en fin $A' = PT'P^{-1}$. En primer lugar, los valores propios de A' son dos a dos distintas (son los $\lambda_i+\varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$) y entonces A' es diagonalizable. Luego
$$\|A'-A\| = \|PDP^{-1}\| \leqslant \|P\|\|D\|\|P^{-1}\| \leqslant K\|P\|\|P^{-1}\|\|D\|_\infty < \varepsilon.$$
En resumen, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) / \ \|A'-A\| < \varepsilon$ y A' diagonalizable. Se ha demostrado que
$$\boxed{\text{El conjunto de matrices complejas diagonalizables en } \mathbb{C} \text{ es denso en } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$
No se puede reemplazar $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ por $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} a-X & c-1 \\ b+1 & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) + (b-c) + 1.$$
El discriminante de χ_{A+E} es $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4$. Se supone además que $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$. Entonces
$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4 \leqslant \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$
Así, ninguna de las matrices $A+E$, con $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$ tiene valores propios reales y por lo tanto, ninguna es diagonalizable en $\mathbb{R}$. Se ha demostrado que el conjunto de matrices reales diagonalizables en $\mathbb{R}$ no es denso en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7. La matriz de la forma cuadrática $Q: \ (x,y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ en la base canónica es $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Los valores propios de esta matriz son estrictamente positivos si y solo si $a+c > 0$ y $ac-b^2 > 0$. La aplicación $(a,b,c) \mapsto a+c$ es continua en $\mathbb{R}^3$ porque es lineal en $\mathbb{R}^3$ que es de dimensión finita y la aplicación $(a,b,c) \mapsto ac-b^2$ es continua en $\mathbb{R}^3$ en tanto que polinomio. El conjunto de los tripletes considerado es la intersección de los images réciproques por estas aplicaciones del abierto $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ y por lo tanto, es un abierto de $\mathbb{R}^3$.

8. Denotemos $\mathscr{S}$ el conjunto de matrices estocásticas.
• Verificar que $\mathscr{S}$ es acotado. Sea $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ y entonces $\|A\|_\infty \leqslant 1$. Así, $\forall A/in\mathscr{S}$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$ y entonces $\mathscr{S}$ es acotado.

• Verificar que $\mathscr{S}$ es cerrado. Sea $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. La aplicación $f_{i,j}:\ A\mapsto a_{i,j}$ es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, con valores en $\mathbb{R}$, porque es lineal en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que es de dimensión finita. $[0,+\infty[$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ porque es complemento $]-\infty,0[$ es un abierto de $\mathbb{R}$. Así, $\left\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ a_{i,j}\geqslant 0\right\}=f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ como una imagen inversa de un cerrado por una aplicación continua. Sea $i\in[\![1,n]\!]$. La aplicación $g_i:\ A\mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ es continua en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, con valores en $\mathbb{R}$ porque es lineal en $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que es de dimensión finita.

El punto aislado $\{1\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}$. Así, $\left\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1\right\}=g_i^{-1}(\{1\})$ es un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ como una imagen inversa de un cerrado por una aplicación continua. $\mathscr{S}$ es, por lo tanto un cerrado de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ como intersección de cerrados de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En resumen, $\mathscr{S}$ es un cerrado acotado del espacio $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que es de dimensión finita y por lo tanto, $\mathscr{S}$ es un compacto de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de acuerdo con teorema de BOREL-LEBESGUE.

• Verificar que $\mathscr{S}$ es convexo. Sean $(A,B)\in(\mathscr{S})^2$ y $\lambda\in[0,1]$. Por una parte, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j}\geqslant 0$ y por otro lado, para $i\in[\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n}((1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j})=(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}+\lambda\sum_{j=1}^{n}b_{i,j}=(1-\lambda)+\lambda=1,$$

lo que demuestra que $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$.

Se ha demostrado que $\forall(A,B)\in\mathscr{S}^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$ y entonces $\mathscr{S}$ es convexo.

$$\boxed{\text{El conjunto de matrices estocásticas es un compacto convexo de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

9. Sean A y B dos matrices reales diagonalizables.

Sean $\gamma_1:[0,1]\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t\mapsto(1-t)A+t0=(1-t)A$ y $\gamma_2:[0,1]\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t\mapsto tB$.

Sea finalmente $\gamma:[0,1]\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $t\mapsto\begin{cases}\gamma_1(2t) & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$. γ_1 es un camino continuo que une la matriz A a la matriz nula y γ_2 es un camino continuo que une la matriz nula a la matriz B. Entonces γ es un camino continuo que une la matriz A a la matriz B. Además, para todo real $t\in[0,1]$, la matriz $\gamma_1(t)=(1-t)A$ es diagonalizable (por ejemplo, si $A=P\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$, entonces $(1-t)A=P\mathrm{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1})$ e igualmente, para todo real $t\in[0,1]$, la matriz $\gamma_2(t)=tB$ es diagonalizable. Finalmente, γ es un camino continuo que une las dos matrices A y B diagonalizables en $\mathbb{R}$, contenida en el conjunto de matrices diagonalizables en $\mathbb{R}$. Se ha demostrado que

$$\boxed{\text{El conjunto de matrices diagonalizables en } \mathbb{R} \text{ es conexo por arcos.}}$$

Solución del ejercicio 5158 ▲001956

1. (a) Un vector director es $\overrightarrow{AB}$ cuyas coordenadas son $(x_B-x_A,y_B-y_A)=(-3,1)$. Para todo vector directeur $\overrightarrow{v}=(x_v,y_v)$ la pendiente es el real $p=\frac{y_v}{x_v}$. La pendiente es independiente de la escogencia del vector directeur. Se encuentra aquí $p=-\frac{1}{3}$. Una ecuación paramétrica de la recta del vector director $\overrightarrow{v}$ pasando por $A=(x_A,y_A)$ es dada por $\begin{cases}x=x_vt+x_A\\ y=y_vt+y_A\end{cases}$.

Así aquí para el vector del director $\overrightarrow{AB}$ se encuentra la ecuación paramétrica $\begin{cases}x=-3t+2\\ y=t+3.\end{cases}$

Hay varias formas obtener una ecuación cartesiana $ax+by+c=0$.

Primer método. Se sabe que $A=(x_A,y_A)$ pertenece a la recta por lo que sus coordenadas satisfacen la ecuación $ax_A+by_A+c=0$, idem con B. Se deduce el sistema $\begin{cases} 2a+3b+c=0 \\ -a+4b+c=0. \end{cases}$

Las soluciones se obtienen salvo una constante multiplicativa, se puede fijar $a=1$ y se encuentra entonces $b=3$ y $c=-11$. La ecuación es, por lo tanto $x+3y-11=0$.

(b) Se encuentra $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=(5,-3)$, $p=-\frac{3}{5}$ y $\begin{cases} x=5t-7 \\ y=-3t-2. \end{cases}$

Segundo método.

Para encontrar la ecuación cartesiana se parte de la ecuación paramétrica reescrita así $\begin{cases} \frac{x+7}{5}=t \\ -\frac{y+2}{3}=t. \end{cases}$

Se deduce $\frac{x+7}{5}=-\frac{y+2}{3}$; de ahí la ecuación $3x+5y+31=0$.

(c) Se encuentra $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=(0,3)$, la recta es así vertical (su pendiente es infinita) una ecuación paramétrica es $\begin{cases} x=3 \\ y=3t+6. \end{cases}$ Una ecuación cartesiana es simplemente $(x=3)$.

2. (a) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=-t+1. \end{cases}$

Tercer método. Para una recta de ecuación cartesiana $ax+by+c=0$, se sabe que $\overrightarrow{n}=(a,b)$ es un vector normal a la recta y, por lo tanto $\overrightarrow{v}=(-b,a)$ es un vector director (porque entonces $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=0$). Recíprocamente, si $\overrightarrow{v}=(-b,a)$ es un vector director entonces una ecuación es de la forma $ax+by+c=0$ para cierta constante c por determinar. Aquí se nos da el vector director $\overrightarrow{v}=(-3,-1)$, entonces se busca una ecuación bajo la forma $-x+3y+c=0$. Para encontrar c, se utiliza que A pertenece a la recta entonces $-x_A+3y_A+c=0$, lo que conduce a $c=-1$. Así una ecuación de la recta es $-x+3y=1$.

(b) Se encuentra $2x-y+1=0$.

(c) Recta horizontal de ecuación $(y=1)$.

3. Aquí están justo los resultados :

(a) $y=3x+4$,

(b) $y=-3$,

(c) $8x+4y=4$ (rectas paralelas a $8x+4y=3$ son de la forma $8x+4y=c$).

Solución del ejercicio 5162 ▲001960

1. El punto A es la intersección de las rectas (AB) y (AC). Las coordenadas (x,y) de A son, por lo tanto soluciones del sistema : $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=2, \end{cases}$ dado por las ecuaciones de las dos rectas. La única solución es $(x,y)=(1,1)$. Se tiene entonces $A=(1,1)$. Se hace lo mismo para obtener el punto $B=(-1,2)$ y $C=(2,0)$.
2. Denotemos A' la mitad de $[BC]$, entonces las coordenadas se encuentran mediante la siguiente fórmula $A'=(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2})=(\frac{1}{2},1)$. Igualmente se encuentra $B'=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ y $C'=(0,\frac{3}{2})$.
3. (a) Las medianas tienen por ecuaciones : (AA') : $(y=1)$; (BB') : $(3x+5y=7)$; (CC') : $(3x+4y=6)$.

(b) Verificar que las tres medianas son concurrentes (lo cual es cierto cualquiera que sea el triángulo). Se calcula primero la intersección $I = (AA') \cap (BB')$, las coordenadas del punto I de intersección verificando por lo tanto el sistema $\begin{cases} y = 1 \\ 3x+5y = 7. \end{cases}$ Se encuentra $I = (\frac{2}{3}, 1)$. No queda más que verificar que I pertenece a la recta (CC') de ecuación $3x+4y = 6$.
En efecto, $3x_I + 4y_I = 6$, por lo tanto $I \in (CC')$.
Conclusión : las medianas son concurrentes en el punto $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

Solución del ejercicio 5202 ▲002009

Sea $z \mapsto \alpha z + \beta$ la representación en coordenadas complejas de la similitud directa enviando A sobre C y B sobre D. Se tiene entonces

$$\begin{cases} \alpha a + \beta &= c \\ \alpha b + \beta &= d, \end{cases}$$

lo que da $\alpha = \frac{c-d}{a-b}$ y $\beta = \frac{ad-bc}{a-b}$. De acuerdo a la condición fijada por el enunciado, se tiene $\alpha \neq 1$, por lo tanto esta similitud admite un único punto fijo Ω de afijo

$$\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Se observa que la expresión de ω no cambia permutando b y c. Esto significa que al hacer los mismos cálculos para determinar la representación compleja de la similitud envía A sobre B y C sobre D, se obtiene el mismo punto fijo.

Solución del ejercicio 5204 ▲002011

1. (a) Una ecuación de un plano es $ax+by+cz+d = 0$. Si un punto pertenece a un plano, esto da una condición lineal en a,b,c,d. Si se dan tres puntos, esto da un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas (porque la ecuación es única salvo un factor multiplicativo no nulo). Se encuentra :
      i. $x+y+z-1 = 0$
      ii. $3x+3y+z-7 = 0$.
   (b) $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ es normal al plano. Si $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$, entonces una ecuación del plano es $ax+by+cz+d = 0$. Se encuentra :
      i. $-9x+7y+12z-17 = 0$
      ii. $17x+13y-7z-3 = 0$.
   (c) Encontrar dos puntos B,C de la recta D. El vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ son vectores directores de P. Luego se procede como la pregunta anterior. Se obtiene :
      i. Por ejemplo, $B = (0,-6,-3)$ y $C = (-1,0,2)$ pertenecen a D. Se encuentra la ecuación $4x-y+2z = 0$.
      ii. Por ejemplo, $B = (0,-1,1)$ (para $t = 0$) y $C = (1,1,-2)$ (para $t = 1$) pertenecen a D. Se encuentra la ecuación $2x-y-1 = 0$.
   (d) Encontrar un punto A de D y dos puntos B,C de la recta D'. El vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ son vectores directores de P. Luego se procede como antes.

2. Los planos se definen paramétricamente por $(P) : (2,2,1)+s(1,2,-1)+t(2,1,-1)$, entonces dos de los vectores directores son $\overrightarrow{u}=(1,2,-1)$ y $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$. Un vector normal a (P) es entonces $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=(-1,-1,-3)$.

   El plano (P') definido por $(1,3,1)+s'(3,3,-2)+t'(-1,1,0)$, tiene por vectores de director $\overrightarrow{u'}=(3,3,-2)$ y $\overrightarrow{v'}=(-1,1,0)$. Un vector normal a (P') es entonces $\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{u'}\wedge\overrightarrow{v'}=(2,2,6)$. Los vectores normales $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{n'}$ son colineales, por lo que los planos (P) y (P') son paralelas (o coinciden).

   Ahora el punto $A=(2,2,1)$ pertenece a (P) (se ha hecho $s=0$ y $t=0$). Pertenece también a (P') (tomando $s'=0$ y $t'=-1$).

   Resumen. (P) y (P') son paralelas y tienen un punto en común : son iguales !

Solución del ejercicio 5213 ▲002020

1. (a) Un punto A pertenece a un plano de ecuación $ax+by+cz+d=0$ si y solo si $ax_A+by_A+cz_A+d=0$. Entonces $A(1,1,1)\in P_m$ si y solo si $m^2+(2m-1)+m=3$. Lo que equivale a $m^2+3m-4=0$.

   Las dos soluciones son $m=1$ y $m=-4$. Entonces A pertenece a los planos P_1 y P_{-4} y no a los otros.

   (b) Un plano de ecuación $ax+by+cz+d=0$ tiene como vector normal $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$. Entonces si $\overrightarrow{n}=(2,-\frac{5}{2},-1)$ es un vector normal a P_m una ecuación cartesiana es de la forma $2x-\frac{5}{2}y-z+d=0$. Pero una ecuación de P_m es $m^2x+(2m-1)y+mz-3=0$. Estas dos ecuaciones son iguales salvo un factor multiplicativo $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $2x-\frac{5}{2}y-z+d=\lambda\big(m^2x+(2m-1)y+mz-3\big)$. Se deduce que $2=\lambda m^2$, $-\frac{5}{2}=\lambda(2m-1)$ y $-1=\lambda m$. Dividiendo la primera igualdad por la tercera se encuentra : $m=-2$. De donde $\lambda=\frac{1}{2}$. La segunda igualdad se verifica. El único plano que tiene $\overrightarrow{n}$ por vector normal es P_{-2}.

   (c) Un vector es director del plano P si y solo si el producto escalar $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=0$. Aquí $\overrightarrow{n}=(m^2,2m-1,m)$. Entonces $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$ es un vector director si y solo si $m^2+2m-1+m=0$. Lo que equivale a $m^2+3m-1=0$. Los dos planos que tienen por vector director $\overrightarrow{v}$ son los planos con el parámetro $m=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Tomar tres planos de la familia (P_m), calcular su punto de intersección y finalmente demostrar que este punto pertenece a los otros planos. Tomemos tres parámetros "al azar" $m=0$, $m=1$, $m=-1$. Un punto que pertenece a estos tres planos debe satisfacer las tres ecuaciones :

$$\begin{cases} y=-3 \\ x+y+z=3 \\ x-3y-z=3. \end{cases}$$

   Se resuelve este sistema para encontrar que la intersección de los tres planos P_0, P_1 y P_{-1} es el punto $Q=(0,-3,6)$. No queda más que verificar que este punto pertenece a todos los planos P_m : es el caso porque $m^2\cdot 0+(2m-1)\cdot(-3)+m\cdot 6-3=0$.

   Otro método. Se busca un punto $Q=(x_0,y_0,z_0)$ que verifica la igualdad $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3=0$, para todo m. Considerando que es una igualdad polinomial en m (x_0,y_0,z_0 son fijos) se deduce que $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3$ es el polinomio nulo : $x_0m^2+(2y_0+z_0)m-y_0-3=0$. Estos coeficientes son nulos : $x_0=0$ (el coeficiente de m^2), $2y_0+z_0=0$ (el coeficiente de m), $-y_0-3=0$ (el término constante). Se encuentra claramente el mismo punto de intersección de todos los planos : $Q=(0,-3,6)$.

Solución del ejercicio 5214 ▲002021

1. La distancia de un punto $A=(x_0,y_0,z_0)$ a un plano P de ecuación $ax+by+cz+d=0$ es dada por la fórmula :
$$d(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
Se encuentra por lo tanto
   (a) $d(A,P)=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2+4|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.
   (b) $d(A,P)=\frac{2}{\sqrt{42}}$.
2. Primero encontrar una ecuación paramétrica de la recta D. Se define por ejemplo $z=t$ y se expresa x y y en función de t. Partiendo del sistema $\begin{cases}-2x+y-3z=1\\ x+z=1,\end{cases}$ se encuentra $x=1-t$ y $y=3+t$. La recta D es, por lo tanto el conjunto de puntos $M_t=(1-t,3+t,t)$ (t recorriendo $\mathbb{R}$). La distancia AM_t verifica así
$$AM_t^2=\|\overrightarrow{AM_t}\|^2=\|(1-t-1,3+t-2,t-3)\|^2=t^2+(t+1)^2+(t-3)^2=3t^2-4t+10.$$
Minimizar esta distancia es encontrar el mínimo de la función $\delta(t)=3t^2-4t+10$. Es por lo tanto alcanzado por t_0 verificando $\delta'(t_0)=0$, por lo tanto para $t_0=\frac{2}{3}$. La distancia entre A y la recta D es, por lo tanto la longitud $AM_{t_0}=\sqrt{\delta(t_0)}=\sqrt{\frac{26}{3}}$. Se ha obtenido la perpendicular a D pasando por A, es la recta (AM_{t_0}).

   Otro método.
   Existe una fórmula para calcular directamente la distancia. Si $\overrightarrow{v}$ es un vector director de D y M_0 un punto de D, entonces
$$d(A,D)=\frac{\|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$
Se ha parametrizado la recta D por los puntos $M_t=(1,3,0)+t(-1,1,1)$. Entonces $M_0=(1,3,0)\in D$ y $\overrightarrow{v}=(-1,1,1)$ es un vector director de D. Se tiene entonces $\overrightarrow{AM_0}=(0,1,-3)$ y $\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{AM_0}=(-4,-3,-1)$: se obtiene :
$$d(A,D)=\frac{\|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{AM_0}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.$$

Solución del ejercicio 5225 ▲005195

1. Sea G el isobaricentro del triángulo (ABC). Se tiene entonces $G=\mathrm{bar}(A(1),B(1),C(1))$. Denotemos A', B' y C' los respectivos puntos medios de los lados $[B,C]$, $[C,A]$ y $[A,B]$. Por el teorema del baricentro parcial, $G=\mathrm{bar}(A(1),A'(2))$. En particular, G está en la mediana (AA'). Igualmente, G está en la mediana (BB') y en la mediana (CC'). Finalmente, G está en las tres medianas. Las tres medianas son, por lo tanto concurrentes en G.

2. Las rectas (BC) y (CA) no son paralelas. Así, las respectivas mediatrices de los lados $[B,C]$ y $[C,A]$ no son paralelas. Por lo tanto, son secantes en un punto que denotamos O.

   Por definición de O, se tiene $OA = OB = OC$. O es, por lo tanto equidistante de A y B y es así en la bisectriz de $[A,B]$.

   Finalmente, las tres mediatrices son concurrentes en O. Además, O estando a igual distancia de A, B y C, el círculo de centro O y de radio OA pasa por B y C.

   Recíprocamente, un círculo que pasa A, B y C tiene como centro un punto a igual distancia de estos puntos y por lo tanto, necesariamente de centro O y de radio OA. Esto prueba la existencia y unicidad del círculo circunscrito al triángulo (ABC) : es el círculo de centro O y de radio OA.

3. Las alturas desde A y B no son paralelas (porque es perpendicular a dos rectas no paralelas). Admiten así uno y solo un punto de intersección. Esto asegura la unicidad de un punto común a las tres alturas. Sea h la homotecia de centro G y de cociente -2. Porque $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA}$, se tiene $h(A') = A$ e igualmente $h(B') = B$ y $h(C') = C$.

   Por h, la imagen de la mediatriz de $[B,C]$, es decir de la recta que pasa por A' y perpendicular a (BC) es la recta que pasa por $h(A') = A$ y perpendicular a (BC) (porque es paralela a la mediatriz de $[B,C]$). Esta recta es la altura resultante de A del triángulo (ABC). Igualmente, las imágenes de las mediatrices de $[C,A]$ y $[A,B]$ son respectivamente las alturas resultantes de B y C.

   El punto O está en las tres mediatrices. Su imagen por h está, por lo tanto en las tres alturas (de ahí la existencia de un punto común a las tres alturas). Estas tres alturas son, por lo tanto concurrentes en un punto denotado H y llamado el ortocentro del triángulo (ABC). Además, la igualdad $h(O) = H$ se escribe $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ o aún $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ o finalmente,

$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}\ \text{EULER}.}$$

   Los tres puntos O, G y H, si son dos a dos distintos, están en particular alineados en una recta llamada **recta de**EULER del triángulo (ABC).

4. Dos bisectrices interiores no son paralelas (demostrarlo) y por lo tanto, son secantes en un punto I a igual distancia de los tres lados y en el interior del triángulo (ABC). Este punto es equidistante de los tres lados es centro del círculo tangente interiormente a los tres lados, el círculo inscrito.

Solución del ejercicio 5226 ▲005196

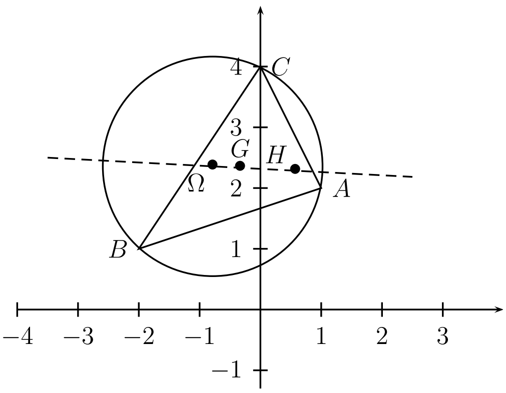
(Notar la alineación de los puntos G, H y Ω).1. Se tiene $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ y $AC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Así,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC} = \frac{(-3)(-1)+(-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, $\widehat{BAC} = 81°$ aproximadamente

2. $\text{área}(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\text{abs}(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) = \frac{7}{2}$.

3. Denotemos G el isobaricentro del triángulo (ABC).
$z_G = \frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C) = \frac{1}{3}(1+2i-2+i+4i) = \frac{1}{3}(-1+7i)$, y entonces $\boxed{G(-\frac{1}{3},\frac{7}{3}).}$



Denotemos (x,y) las coordenadas de Ω, el centro del círculo circunscrito en el triángulo (ABC) (en este ejercicio, la letra O designa ciertamente el origen del sistema de referencia).

$$\begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \Omega A=\Omega C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-1)^2\\ (x-1)^2+(y-2)^{=}x^2+(y-4)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=0\\ 2x-4y=-11\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=-\frac{11}{14}\text{ y } y=\frac{33}{14}\text{ (según las fórmulas de CRAMER),}$$

y entonces $\boxed{\Omega(-\frac{11}{14},\frac{33}{14}).}$

Denotemos (x,y) las coordenadas del ortocentro H del triángulo (ABC).

1a solución.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(x-1)+3(y-2)=0\\ -(x+2)+2(y-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=8\\ -x+2y=4\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=\frac{4}{7}\text{ y } y=\frac{16}{7}\text{ (según las fórmulas de CRAMER),}$$

y por lo tanto, $\boxed{H(\frac{4}{7},\frac{16}{7}).}$

2a solución. Es mucho mejor conocer la relación de EULER $\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}$ y utilízalo.

$$H=\Omega+3\overrightarrow{\Omega G}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{14}\\ \frac{33}{14}\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}+\frac{11}{14}\\ \frac{7}{3}-\frac{33}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ \frac{16}{7}\end{pmatrix}.$$

Para hallar el círculo circunscrito al triángulo (ABC), se tiene ya el centro Ω y el radio

$$\Omega A=\sqrt{(1+\frac{11}{14})^2+(2-\frac{33}{14})^2}=\frac{1}{14}\sqrt{25^2+5^2}=\frac{5}{14}\sqrt{5^2+1}=\frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Todo lo que hay que hacer es escribir la ecuación deseada :

$$(x+\frac{11}{14})^2+(y-\frac{33}{14})^2=\frac{325}{98}\text{ o aún } x^2+y^2+\frac{11}{7}x-\frac{33}{7}y+\frac{20}{7}=0.$$

Sin embargo, se puede encontrar directamente una ecuación de este círculo. Los puntos A, B y C no están alineados, se sabe que el círculo circunscrito existe y es único. Sean entonces $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ y $\mathscr{C}$ el círculo de ecuación $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

$$(A,B,C)\in\mathscr{C}^3\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=-5\\ -2a+b+c=-5\\ 4b+c=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4b-16a-2b=11\\ -2a-3b=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{11}{7}\quad\text{(CRAMER)}\\ b=-\frac{33}{7}\\ c=\frac{20}{7}.\end{cases}$$

4. Las bisectrices de ángulo A son las dos rectas formadas por puntos equidistantes de las rectas (AB) y (AC). Estas dos rectas admiten por respectivos vectores normales $\overrightarrow{n}_1(1,-3)$ y $\overrightarrow{n}_2(2,1)$. Sea $M(x,y)$ un punto del plano.

$$\begin{aligned}d(M,(AB))=d(M,(AC))&\Leftrightarrow\frac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}_1)^2}{||\overrightarrow{n_1}||^2}=\frac{(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}_2)^2}{||\overrightarrow{n_2}||^2}\\
&\Leftrightarrow\frac{((x-1)-3(y-2))^2}{10}=\frac{(2(x-1)+(y-2))^2}{5}\Leftrightarrow(x-3y+5)^2=2(2x+y-4)^2\\
&\Leftrightarrow[(x-3y+5)+\sqrt{2}(2x+y-4)]\cdot[(x-3y+5)-\sqrt{2}(2x+y-4)]=0\\
&\Leftrightarrow(1+2\sqrt{2})x+(-3+\sqrt{2})y+5-4\sqrt{2}=0\text{ o }(1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2}=0\\
&\Leftrightarrow y=(1+\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}\text{ o }y=(1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

La bisectriz interior δ_A de ángulo $\widehat{A}$ es la recta (para algunos, esta bisectriz es una semirrecta) pasando por $A(2,1)$ y dirigida por el vector $\overrightarrow{u} = -\sqrt{10}\cdot(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC})$. Este vector tiene coordenadas $(3+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$. Sea $M(x,y)$ un punto del plano.

$$M\in\delta_A \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})(x-1)-(3+\sqrt{2})(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y=(1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}.$$

Solución del ejercicio 5227 ▲005199

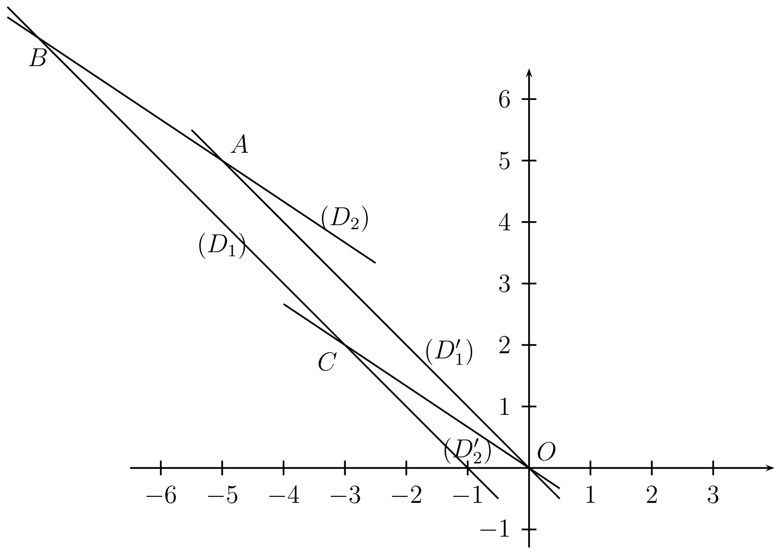
Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 &= 2x^2+x(5y-3)+3y^2-2y-5\\ &= 2(x+\frac{1}{4}(5y-3))^2-\frac{1}{8}(5y-3)^2+3y^2-2y-5\\ &= \frac{1}{8}(4x+5y-3)^2-\frac{1}{8}y^2+\frac{14}{8}y-\frac{49}{8}\\ &= \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y^2-14y+49)] = \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y-7)^2]\\ &= \frac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5).\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0 \Leftrightarrow (x+y+1=0 \text{ o } 2x+3y-5=0.$$

(E) es la unión de la recta (D_1) de ecuación $x+y+1=0$ y de la recta (D_2) de ecuación $2x+3y-5=0$.



La paralela a (D_1) pasando por O es la recta (D'_1) de ecuación $x+y=0$ y la paralela a (D_2) pasando por O es la recta (D'_2) de ecuación $2x+3y=0$. Estas rectas se cortan en los cuatro puntos $O(0,0)$, $A(-5,5)$, $B(-8,7)$ y $C(-3,2)$. El área de este paralelogramo es $\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\right| = 5$.

Solución del ejercicio 5228 ▲005200

Denotemos (D_1), (D_2) y (D_3) las rectas de las respectivas ecuaciones $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ y $y = -\frac{1}{2}x$. Sea $\mathscr{C}$ un círculo.
Las rectas (D_1) y (D_2) son paralelas. Entonces, $\mathscr{C}$ es un círculo tangente a (D_1) y (D_2) si y solo si su centro está en el conjunto de puntos equidistantes de (D_1) y (D_2), es decir la recta de la ecuación $y = 2x+4$ y su radio es la mitad de la distancia de (D_1) a (D_2), o incluso la mitad de la distancia desde un punto de (D_1), por ejemplo $(0,1)$, a (D_2). Esta distancia vale $\frac{|2.0-1+7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.
Finalmente, $\mathscr{C}$ es un círculo tangente a (D_1) y (D_2) si y solo si su centro Ω tiene coordenadas de la forma $(a, 2a+4)$, $a \in \mathbb{R}$, y su radio es $\frac{3}{\sqrt{5}}$. un círculo de centro Ω y de radio $\frac{3}{\sqrt{5}}$ es tangente a (D_3) si y solo si la distancia de Ω a (D_3) es el radio $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Entonces,

$$\mathscr{C} \text{ solución} \Leftrightarrow d(\Omega,(D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+2(2a+4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a+8| = 3$$
$$\Leftrightarrow 5a+8 = 3 \text{ o } 5a+8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ o } a = -\frac{11}{5}.$$

Se encuentran dos círculos de soluciones, el círculo $\mathscr{C}_1$ de centro $\Omega_1(-1,2)$ y de radio $\frac{3}{\sqrt{5}}$ y el círculo $\mathscr{C}_2$ de centro $\Omega_2(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$ y de radio $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Solución del ejercicio 5229 ▲005202

Para $1 \leqslant i \leqslant n$, se denota s_i la simetría central de centro A_i. El problema es encontrar n puntos $B_1, \dots, B_n$ tales que $B_2 = s_1(B_1)$, $B_3 = s_2(B_2), \dots, B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1 = s_n(B_n)$. Esto es equivalente a

$$\forall i \in \{2,\dots,n\},\ B_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ \dots \circ s_1(B_1) \ \text{ y } \ B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1). \quad (*)$$

Se define entonces $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1$. f es una composición de simetrías centrales. Hay entonces dos casos. Si n es par, se puede agrupar las simetrías de dos en dos. f es entonces (de acuerdo al ejercicio 5415) una composición de traslaciones y por lo tanto, f es una traslación. Si n es impar, $n-1$ es par y por lo tanto, la composición de las $n-1$ primeras simetrías es una traslación. Así, f es la composición de una traslación y una simetría central y, por lo tanto, es una simetría central (de acuerdo al ejercicio 5415). Ahora, $(*)$ tiene solución si y solo si f tiene un punto invariante.

1er caso. Si n es impar, f es una simetría central, f tiene un solo punto invariante : su centro. Así existe uno y solo un punto B_1 verificando $B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_1(B_1)$ y finalmente, uno y solo un n-tuple $(B_1, \dots, B_n)$ solución del problema planteado.

2o caso. Si n es par, f es una traslación. Si su vector es no nulo, f no tiene punto invariante y el problema no tiene solución. si su vector es nulo, f es la identidad y todo punto es invariante por f. Determinar el vector de f. Se define $n = 2p$. Se tiene entonces

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \dots s_2 \circ s_1 = t_{2\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}} \circ \dots \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} = t_{2(\overrightarrow{A_1A_2}+\dots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Cuando $n = 2p$ es par, el problema dado tiene solución si y solo si $\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \vec{0}$.

Solución del ejercicio 5230 ▲005203

En primer lugar, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-2x+4y+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 = 4$ y $\mathscr{C}$ es el círculo de centro $\Omega(1,-2)$ y de radio 2.

1. El punto $A(2,-2+\sqrt{3})$ está efectivamente en $\mathscr{C}$, pues $(2-1)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2=1+3=4$. La tangente (T) en A a $\mathscr{C}$ es la recta que pasa por A y de vector normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

$$M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow(x-2)+\sqrt{3}(y+2-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-5+2\sqrt{3}=0.$$

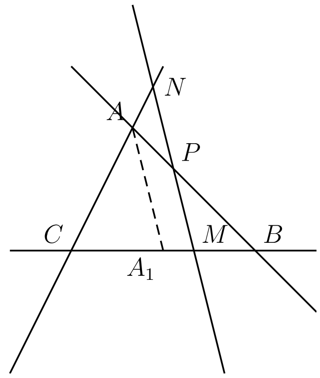
2. Sea $\mathscr{C}'$ el círculo de centro $(1,0)$ y de radio 2. Una ecuación de este círculo es $x^2+y^2-2x-3=0$. Así,

$$M(x,y)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y+1=0\\x^2+y^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y+4=0 \quad ((1)-(2))\\x^2+y^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x^2-2x-2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=1+\sqrt{3} \text{ o } x=1-\sqrt{3}.\end{cases}$$

Por lo tanto hay dos puntos de intersección : $(1+\sqrt{3},-1)$ y $(1-\sqrt{3},-1)$.

Solución del ejercicio 5231 ▲005204

Demostrar primero que si M, N y P están alineados, entonces $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$ $(*)$. Por lo tanto, se supone que M, N y P están alineados y denotamos (Δ) la recta que contiene M, N y P.



1a solución. Sea A_1 el proyectado de A en la recta (BC), paralelamente a la derecha (Δ). Por el teorema de TALES, se tiene

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \text{ y } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

y por lo tanto,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}\cdot\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}=1.$$

2a solución. Sea h_1 la homotecia de centro M y de cociente $k_1=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de manera que $h_1(C)=B$. Sea h_2 la homotecia de centro N y de cociente $k_2=\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, de manera que $h_2(A)=C$. Ahora, el producto k_1k_2 ¿puede ser igual a 1? Si es el caso, se tiene $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=1$ y entonces, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. El recíproco del teorema de TALES permite entonces afirmar que (MN) y (AB) son paralelas, lo que no es. Entonces, $k_1k_2\neq1$ y según el ejercicio 5415, $h_1\circ h_2$ es una homotecia. Porque $h_1\circ h_2$ transformar A en B, su centro está en la recta (AB). Pero, por otra parte, su centro está en la recta de los centros (MN). Finalmente, el centro de $h_1\circ h_2$ es el punto de intersección de (MN) y (AB), es decir el punto P. Pero entonces, el cociente de $h_1\circ h_2$ vale igualmente $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Así, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ y finalmente, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

3a solución. Se sitúa en el sistema de referencia $\mathscr{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. En este sistema de referencia, las coordenadas de los diferentes puntos son : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m,1-m)$, $N(0,n)$ y $P(p,0)$, donde m, n y p son distintos de 0 y de 1. Las coordenadas de $\overrightarrow{MB}$ son $(1-m,m-1)$ y las de $\overrightarrow{MC}$ son $(-m,m)$. Así, $m\overrightarrow{MB}=(m-1)\overrightarrow{MC}$ y finalmente, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{m-1}{m}$. Se encuentra de mismo $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{n-1}{n}$ y $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{p}{p-1}$. Finalmente,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
M,\ N \text{ y } P \text{ alineados} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1)-(p-m)(m+n-1)=0 \\
&\Leftrightarrow -pm-pn+p+mn=0 \Leftrightarrow mn=p(m+n-1) \\
&\Leftrightarrow mn=-p(m-1)(n-1)+pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1)=mn(p-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}=1.
\end{aligned}$$

Demostrar ahora que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$, entonces los puntos M, N y P están alineados. Por esto, verificar primero que (MN) no es paralela a (AB). En caso contrario, el teorema de TALES proporciona $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=1$ y entonces $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$, luego $\overline{PA}=\overline{PB}$ y finalmente $\overline{AB}=0$, lo que no es. Así, la recta (MN) corta la recta (AB) en un punto P_1 verificando luego del comienzo del ejercicio $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}}=1$. Se deduce que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Denotemos k el valor común de esta relación. Se tiene ya que $k\neq 1$, o aún $1-k\neq 0$. Así, $P_1=\text{bar}\{A(1),B(-k)\}=P$, lo que demuestra que los puntos M, N y P están alineados.

Solución del ejercicio 5232 ▲005208

1. El hecho que (D) y (D') sean secantes es equivalente a $ab'-a'b\neq 0$.
   Sea $A(x_A,y_A)$ el punto de intersección de (D) y (D').
   Si (Δ) es una recta con una ecuación de la forma $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$, entonces, ya que
   $$\lambda(ax_A+by_A+c)+\mu(a'x_A+b'y_A+c')=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0,$$
   el punto A pertenece a (Δ).
   Recíprocamente, sea (Δ) una recta de ecuación $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Sea $\overrightarrow{v}$ el vector de coordenadas (α,β). Porque $ab'-a'b\neq 0$, ambos vectores $\overrightarrow{u}(a,b)$ y $\overrightarrow{u}'(a',b')$ no son colineales. Pero entonces, la familia $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}')$ es una base del plano (vectorial). Así, existe $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ (pues $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$) tal que $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{u}'$, o incluso tal que $\alpha=\lambda a+\mu a'$ y $\beta=\lambda b+\mu b'$. Toda recta (Δ) por lo tanto admite una ecuación cartesiana de la forma $\lambda(ax+by)+\mu(a'x+b'y)+\gamma=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
   Ahora, si $A\in(\Delta)$, entonces
   $$\gamma=-\lambda(ax_A+by_A)+\mu(a'x_A+b'y_A)=-\lambda(-c)-\mu(-c')=\lambda c+\mu c'.$$
   Finalmente, si $A\in(\Delta)$, (Δ) admite una ecuación de la forma $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
2. Las dos rectas (D) y (D') consideradas son secantes porque $5.2-7(-3)=31\neq 0$. Denotemos A su punto de intersección y B un punto de coordenadas $(1,0)$. B no está en ninguna de las dos rectas consideradas por lo que existe una única recta, denotada (Δ), solución del problema planteado. Porque (Δ) pasa por A, (Δ) tiene una ecuación de la forma $\lambda(5x+7y+1)+\mu(-3x+2y+1)=0$. Está claro que no podemos tener $\lambda=0$ (pues (Δ) no es (D')) y después de la división por λ, la ecuación se escribe en la forma $(5x+7y+1)+k(-3x+2y+1)=0$, donde k es un real. Ahora, (Δ) pasa por B si y solo si $6-2k=0$ o aún $k=3$. Una ecuación cartesiana de (Δ) es, por lo tanto $(5x+7y+1)+3(-3x+2y+1)=0$ o aún $-4x+13y+4=0$.

3. Sea $M(x,y)$ un punto del plano.

$$\begin{aligned}\forall m\in\mathbb{R},\ M\in(D_m) &\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R},\ (2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0\\ &\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R},\ m(2x+y-4)-x+y-1=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-4=0\\ -x+y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ y } y=2.\end{aligned}$$

Todas las rectas (D_m) pasan por el punto $A(1,2)$.
La recta (D_{-1}) pasa por A y es paralela a (Oy). Luego, para $m\neq-1$, (D_m) es la recta que pasa por A y de coeficiente director $f(m)=\frac{-2m+1}{m+1}=-2+\frac{3}{m+1}$. Cuando m recorre $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(m)$ toma todos los valores reales excepto -2. La recta que pasa por A de coeficiente director -2 (y por lo tanto, de ecuación $y=-2x+4$) no es una recta (D_m). Cualquier otra recta que pasa por A es una recta (D_m).

Solución del ejercicio 5233 ▲005510

• **Marco de referencia de (D).**

$$\begin{cases}x-z-a=0\\ y+3z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+z\\ y=-1-3z.\end{cases}$$

(D) es la recta que pasa por $A(a,-1,0)$ y dirigida por $u(1,-3,1)$.
• **Marco de referencia de (D').**

$$\begin{cases}x+2y+z-2b=0\\ 3x+3y+2z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+z=2b-x\\ 3y+2z=7-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4b-7+x\\ z=14-6b-3x.\end{cases}$$

(D') es la recta que pasa por $A'(0,4b-7,-6b+14)$ y dirigida por $u'(1,1,-3)$.
• Los vectores u y u' no son colineales y por lo tanto, (D) y (D') no son paralelas.
• Plan (P) conteniendo (D) y paralela a (D') es el plano de referencia (A,u,u'). Determinar una ecuación de este plano.

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-a&1&1\\ y+1&-3&1\\ z&1&-3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z=0\Leftrightarrow 2x+y+z=2a-1.$$

• En fin, (D) y (D') son secantes si y solo si (D') está contenido en (P). Como (D') es ya paralela a (P), se tiene

$$(D)\text{ y }(D')\text{ secantes}\Leftrightarrow A'\in(P)\Leftrightarrow(4b-7)+(-6b+14)=2a-1\Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) y (D') son secantes si y solo si $b=-a+4$ y en este caso, una ecuación del plano que contiene (D) y (D') es $2x+y+z=2a-1$.

Solución del ejercicio 5234 ▲005511

• (Δ) es paralela a (D) si y solo si (Δ) es dirigida por el vector $u(3,2,1)$ o aún (Δ) admite un sistema de ecuaciones paramétricas de la forma $\begin{cases}x=a+3\lambda\\ y=b+2\lambda\\ z=c+\lambda.\end{cases}$

Luego, (Δ) es secante a (D_1) si y solo si se puede elegir el punto (a,b,c) sobre (D_1) o aún si y solo si (Δ) admite un sistema de ecuaciones paramétricas de la forma $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = 4+\lambda. \end{cases}$

En fin,

$$(\Delta) \text{ y } (D_2) \text{ secantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ b+2\lambda = 4+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow b+2\times(-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Esto demuestra la existencia y unicidad de (Δ) : un sistema de ecuaciones paramétricas de (δ) es $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 16+2\lambda \\ z = 4+\lambda. \end{cases}$

Un sistema de ecuaciones cartesianas de (Δ) es $\begin{cases} x = 3(z-4) \\ y = 16+2(z-4) \end{cases}$ o aún

$$\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x-3z+12 = 0 \\ y-2z-8 = 0. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 5235 ▲005512

Denotemos (Δ) una eventual recta solución.

• (Δ) es secante a (D_1) y (D_2) si y solo si (Δ) pasa por un punto de la forma $(1,0,a)$ y por un punto de la forma $(b,1,0)$ o aún si y solo si (Δ) pasa por un punto de la forma $(1,0,a)$ y está dirigida por un vector de la forma $(b-1,1,-a)$.

Así, (Δ) es secante a (D_1) y (D_2) si y solo si (Δ) admite un sistema de ecuaciones paramétricas de la forma $\begin{cases} x = 1+\lambda(b-1) \\ y = \lambda \\ z = a-\lambda a \end{cases}$ o aún un sistema de ecuaciones cartesianas de la forma $\begin{cases} x-(b-1)y = 1 \\ ay+z = a. \end{cases}$

• Luego, (Δ) y (D_3) secantes $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \begin{cases} -(b-1)y = 1 \\ ay+1 = a \end{cases} \Leftrightarrow b \neq 1$ y $-\frac{a}{b-1}+1 = a \Leftrightarrow b \neq 0$ y $b \neq 1$ y $a = 1-\frac{1}{b}$. En resumen, rectas secantes en (D_1), (D_2) y (D_3) son las rectas cuyo sistema de ecuaciones cartesianas es

$$\begin{cases} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z = 1-\frac{1}{b},\ b \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

En fin,

$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ y } (D) \text{ secantes} &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z = 1-\frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -6z+6(b-1)z = 1 \\ -6\left(1-\frac{1}{b}\right)z+z = 1-\frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ y } -6\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b-2)}+\frac{1}{6(b-2)} = 1-\frac{1}{b} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ y } -6(b-1)+b = 6(b-1)(b-2) \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ y } 6b^2-13b+6 = 0 \\
&\Leftrightarrow b \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Las rectas de solución son } (\Delta_1) : \begin{cases} 3x+y=3 \\ y-2z=1 \end{cases} \text{ y } (\Delta_2) : \begin{cases} 2x-y=2 \\ y+3z=1. \end{cases}}$$

Solución del ejercicio 5236 ▲005513

• Determinar el centro de gravedad G.

$$G = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C = \tfrac{1}{3}(2,-2,0) + \tfrac{1}{3}(4,2,6) + \tfrac{1}{3}(-1,-3,0) = \left(\tfrac{5}{3},-1,2\right).$$

• Determinar el centro del círculo circunscrito O. Una ecuación del plano (ABC) es $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ o aún $6(x-2)-18(y+2)+10z=0$ o finalmente $3x-9y+5z=24$. Se define entonces $O(a,b,c)$. Luego, $OA=OB \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(c-6)^2 \Leftrightarrow 4a+8b+12c=48 \Leftrightarrow a+2b+3c=16$ y $OA=OC \Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+c^2=(a+1)^2+(b+3)^2+c^2 \Leftrightarrow -6a-2b=2 \Leftrightarrow 3a+b=-1$. De ahí el sistema

$$\begin{cases} 3a-9b+5c=24 \\ a+2b+3c=16 \\ 3a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a-1 \\ 3a-9(-3a-1)+5c=24 \\ a+2(-3a-1)+3c=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a-1 \\ 6a+c=3 \\ -5a+3c=18 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-3a-1 \\ c=3-6a \\ -5a+3(3-6a)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{9}{23} \\ b=\frac{4}{23} \\ c=\frac{123}{23}. \end{cases}$$

Entonces $O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right)$.

• Determinar el ortocentro H. Según la relación de EULER,

$$H = O+3\overrightarrow{OG} = \left(-\tfrac{9}{23},\tfrac{4}{23},\tfrac{123}{23}\right)+3\left(-\tfrac{9}{23}-\tfrac{5}{3},\tfrac{4}{23}+1,\tfrac{123}{23}-2\right) = \left(\tfrac{-151}{23},\tfrac{85}{23},\tfrac{354}{23}\right).$$

• Determinar el centro del círculo inscrito I.

Se sabe que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$, donde $a=BC=\sqrt{5^2+5^2+6^2}=\sqrt{86}$, $b=AC=\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$ y $c=AB=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{54}$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}A+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}B+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}C \\ &= \left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right). \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^3$ euclidiana referida a un marco ortonormado, se da $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ y $C(-1,-3,0)$. Determinar el ortocentro, el centro de gravedad, los centros de los círculos circunscritos e inscritos en el triángulo (A,B,C).

$$\boxed{\begin{array}{c} G\left(\frac{5}{3},-1,2\right), O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right) \text{ y } H\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right), \text{ luego} \\ I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right). \end{array}}$$

Solución del ejercicio 5237 ▲005514

• Determinar un sistema de referencia de (D).

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-4z \\ y=-4+3z. \end{cases}$$

Un marco de referencia (D) es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(3,-4,0)$ y $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$.
• Sea $M(x,y,z)$ un punto del plano. Se sabe que

$$d(A,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\sqrt{(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}.$$

• Denotemos $\mathscr{C}$ el cilindro de revolución de eje (D) y de radio 2.

$$M(x,y,z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow d(A,(D)) = 2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2 = 104.$$

Una ecuación cartesiana del cilindro de revolución de eje (D) y de radio 2 es
$(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2 = 104$.

Solución del ejercicio 5238 ▲005515

• Determinar un sistema de referencia de (D).

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+3 \\ y=3z-4. \end{cases}$$

Un sistema de referencia de (D) es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(3,-4,0)$ y $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$.
• Determinar un sistema de referencia de (D').

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6z+1 \\ y=-7z+1. \end{cases}$$

Un sistema de referencia de (D') es $\left(A', \overrightarrow{u'}\right)$, donde $A'(1,1,0)$ y $\overrightarrow{u'}(6,-7,1)$.

• $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Porque $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ no son colineales, las rectas (D) y (D') no son paralelas. Esto asegura la unicidad de la perpendicular común a (D) y (D').
• Se sabe que la distancia d de (D) a (D') es dada por

$$d = \frac{\text{abs}\left(\left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right)}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\|},$$

con $[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times (-2) + 10 \times 5 = 30$ y entonces $d = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{d((D),(D')) = \sqrt{3}.}$$

• Un sistema de ecuaciones de la perpendicular común es $\begin{cases} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \\ \left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0. \end{cases}$

Por tanto,

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1 \\ y+4 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-3)+5(y+4)-7z = 2x+5y-7z+14,$$

y

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1 \\ y-1 & -7 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8(x-1)-5(y-1)+13z = -8x-5y+13z+13.$$

Entonces

Un sistema de ecuaciones cartesianas de la perpendicular común a (D) y (D') es
$$\begin{cases} 2x+5y-7z = -14 \\ 8x+5y-13z = 13. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 5239 ▲005516

$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2} \cap \overrightarrow{P_3} \Leftrightarrow \begin{cases} z-2y = 0 \\ 2x-3z = 0 \\ 3y-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y. \end{cases}$ Así, los planos (P_1), (P_2) y (P_3) son las tres paralelas a la recta afín (D) de ecuaciones $\begin{cases} x = 3y \\ z = 2y, \end{cases}$ Estos planos, por lo tanto definen un prisma. Determinar entonces el área de una sección recta. Plan (P) de ecuación $3x+y+2z = 0$ es perpendicular a la recta (D). Su intersección con los planos (P_1), (P_2) y (P_3) define, por lo tanto una sección recta del prisma.

• Sea $M(x,y,z)$ un punto del espacio.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z-2y = 5 \\ 2x-3z = 0 \\ 3x+y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-5}{2} \\ x = \frac{3}{2}z \\ \frac{9}{2}z + \frac{z-5}{2} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{14} \\ y = -\frac{65}{28} \\ x = \frac{15}{28}. \end{cases}$$

Denotemos $A\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$.

• Sea $M(x,y,z)$ un punto del espacio.

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z-2y = 5 \\ 3y-x = 0 \\ 3x+y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y+5 \\ x = 3y \\ 9y+y+2(2y+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{25}{7}. \end{cases}$$

Denotemos $B\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$.

• Sea $M(x,y,z)$ un punto del espacio.

$$M \in (P_2)\cap(P_3)\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3z=0 \\ 3y-x=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Una sección recta es OAB, donde $A\left(\frac{15}{28},-\frac{65}{28},\frac{5}{14}\right)$ y $B\left(-\frac{15}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$. Además

$$\text{área de}(OAB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\left\|\begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\sqrt{63^2+21^2+42^2}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{28}\times\frac{5}{7}\times 21\sqrt{3^2+1^2+2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}}.$$

$$\boxed{\text{El área de una sección transversal es } \frac{75}{4\sqrt{14}}.}$$

Solución del ejercicio 5240 ▲005517

Sean (P) el plano de ecuación $x+2y+2z=3$ y (P') el plano de ecuación $x+y=0$. El ángulo entre (P) y (P') es el ángulo entre los vectores normales $\overrightarrow{n}(1,2,2)$ y $\overrightarrow{n'}(1,1,0)$:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}}\right) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}}{\|\overrightarrow{n}\|\|\overrightarrow{n'}\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Solución del ejercicio 5241 ▲005518

Sea $M(x,y,z)$ un punto del espacio. Se tiene

$$d(M,(P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ y } d(M,(P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Por consiguiente,

$$d(M,(P_1)) = d(M,(P_2)) \Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Leftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2$$
$$\Leftrightarrow ((4x+4y-7z-1)-(8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1)+(8x-4y+z+7)) = 0$$
$$\Leftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \Leftrightarrow x-2y+2z+2=0 \text{ o } 2x-z+1=0.$$

$$\boxed{\text{Los planos bisectores de } (P_1) \text{ y } (P_2) \text{ admite por ecuación cartesiana } x-2y+2z+2=0 \text{ y } 2x-z+1=0.}$$

Solución del ejercicio 5242 ▲005519

• Determinar un sistema de referencia de (D).

$$\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3z=-x-4 \\ z=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5x-1 \\ z=2x+1. \end{cases}$$

Un sistema de referencia de (D) es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(0,-1,1)$ y $\overrightarrow{u}(1,5,2)$.

• Porque un sistema de ecuaciones de (D') es $\left\{\begin{array}{l} x = z-1 \\ y = z-1, \end{array}\right.$ un sistema de referencia de (D') es $\left(A', \overrightarrow{u'}\right)$, donde $A'(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{u'}(1,1,1)$.

• $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Porque $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u'}$ no son colineales, las rectas (D) y (D') no son paralelas. Esto asegura la unicidad de la perpendicular común a (D) y (D').

• Un sistema de ecuaciones de la perpendicular común es $\left\{\begin{array}{l} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \\ \left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0. \end{array}\right.$

Por tanto :

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -22x + 10(y+1) - 14(z-1) = -22x + 10y - 14z + 24,$$

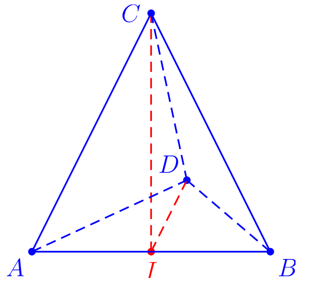
y

$$\left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5(x+1) + 7(y+1) - 2z = -5x + 7y - 2z + 2.$$

Entonces

Un sistema de ecuaciones cartesianas de la perpendicular común a (D) y (D') es
$$\left\{\begin{array}{l} 11x - 5y + 7z = 12 \\ 5x - 7y + 2z = 2. \end{array}\right.$$

Solución del ejercicio 5243 ▲005521



Ángulo entre dos bordes. Las caras del tetraedro $ABCD$ son triángulos equiláteros y por lo tanto, el ángulo entre dos aristas es $60°$.

Ángulo entre una arista y una cara. Es el ángulo $\widehat{CDI}$ de la figura de arriba.

$$\widehat{CDI} = \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\ldots°.$$

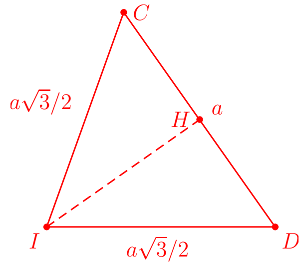
Ángulo entre dos caras. Es el ángulo $\widehat{CID}$ de la figura de arriba.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\ldots°.$$

Solución del ejercicio 5244 ▲005522

Determinar un sistema de referencia de (D).

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=y \\ y+2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{10}{3} \\ z=x-\frac{10}{3}. \end{cases}$$



Un marco de referencia (D) es $(A,\overrightarrow{u})$, donde $A\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},0\right)$ y $\overrightarrow{u}(1,0,1)$. Entonces se sabe que

$$d(O,(D))=\frac{\|\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{10}{3}\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(O,(D))=\frac{10}{\sqrt{6}}.}$$

Solución del ejercicio 5245 ▲006884

(D) es una recta vectorial normal $\overrightarrow{n}=(2,-3)$. La proyección ortogonal $p(M_0)$ de M_0 sobre (D) es de la forma $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$, donde λ es un real a determinar. El punto $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$ tiene coordenadas $(x_0+2\lambda,y_0-3\lambda)$.

$$M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}\in(D)\iff 2(x_0+2\lambda)-3(y_0-3\lambda)=5\iff\lambda=\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}.$$

La proyección ortogonal $p(M_0)$ tiene coordenadas $\left(x_0+2\frac{-2x_0+3y_0+5}{13},y_0-3\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ o aún $p(M_0)=\left(\frac{9x_0+6y_0+10}{13},\frac{6x_0+4y_0-15}{13}\right)$.

El simétrico ortogonal $s(M_0)$ verifica : $s(M_0)=M_0+2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$ (pues $p(M_0)$ es el punto medio del segmento $[M_0,s(M_0)]$) dicho de otro modo $s(M_0)=M_0+2\lambda\cdot\overrightarrow{n}$ (para el λ obtenido antes). Sus coordenadas son, por lo tanto $s(M_0)=\left(x_0+4\frac{-2x_0+3y_0+5}{13},y_0-6\frac{-2x_0+3y_0+5}{13}\right)$ o aún $\left(\frac{5x_0+12y_0+20}{13},\frac{12x_0-5y_0-30}{13}\right)$.

Solución del ejercicio 5304 ▲004859

$\det(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ})+\det(\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK})+\det(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MI})=\det(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK})$.

Solución del ejercicio 5305 ▲004860

El sistema P,P',Q debe ser ld.

Solución del ejercicio 5306 ▲004861

$11x+2y-13z=-4$.

Solución del ejercicio 5307 ▲004862

1. $a=-4$
2. $x-5y+3z=-9$

Solución del ejercicio 5308 ▲004863

1. El plano que pasa A y D' no es paralela a D''.
2. Deber ser posible salir adelante con un sistema de referencia adecuado...

Solución del ejercicio 5310 ▲004865

Marco de referencia $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

Solución del ejercicio 5311 ▲004866

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 5312 ▲004867

$\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})$ si $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\varnothing$. $\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathscr{F})+\dim(\mathscr{G})-\dim(\mathscr{F}\cap\mathscr{G})+1$ si no.

Solución del ejercicio 5314 ▲004869

1. $ux+vy+h=\lambda^2(ua+v)+\lambda(u+va)+h$. Esto es nulo para todo λ si y solo si $ua+v=0$, $u+va=0$, $h=0$ sea $(u,v,a,h)=(u,-u,1,0)$ o $(u,v,a,h)=(u,u,-1,0)$.
2. $x-y+(\lambda-\lambda^2)(z-1)=0$ y $x+y-(\lambda+\lambda^2)(z+1)=0$.
3.

Solución del ejercicio 5315 ▲005505

Porque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1$, se escoge expresar x y z en función de y.

Sea $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. De acuerdo a las fórmulas de CRAMER, se tiene

$$M\in(D)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2z+7=0\\2x+2y+3z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2z=y-7\\-2x-3z=2y-5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ y } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=31-7y\\z=-19+4y\end{cases}.$$

$\boxed{(D) \text{ es la recta que pasa por } A(31,0,-19) \text{ dirigida por el vector } u(-7,1,4).}$

Solución del ejercicio 5316 ▲005506

Sea $M(2+\lambda,3-\lambda,7)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, un punto cualquiera de (D).

$$M\in(P)\Leftrightarrow(2+\lambda)+3(3-\lambda)-5\times7+2=0\Leftrightarrow\lambda=12.$$

$(P)\cap(D)$ es, por lo tanto un punto aislado. Para $\lambda=12$, se obtienen las coordenadas del punto de intersección

$$\boxed{(P)\cap(D)=\{(14,-9,7)\}.}$$

Solución del ejercicio 5317 ▲005507

• **Marco de referencia de** (D)**.**

$$\begin{cases}x+2=-2z\\ y=3x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2-2z\\ y=3(-2-2z)+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2-2z\\ y=-6-5z.\end{cases}$$

(D) es la recta que pasa por $A(0,-1,-1)$ y dirigida por $u(2,5,-1)$.

• **Marco de referencia de** (D')**.**

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y-z=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y=z-1\\ 2x+y=z+a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z+a-1\\ y=2-a-3z.\end{cases}$$

(D') es la recta que pasa por $A'(a-1,2-a,0)$ y dirigida por $u'(2,-3,1)$.

• u y u' no son colineales y por lo tanto, (D) y (D') son secantes en un punto y en este caso coplanares o no coplanares.

• Plan (P) conteniendo (D) y paralela a (D') es el plano de referencia (A,u,u'). Determinar una ecuación de este plano.

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x&2&2\\ y+1&5&-3\\ z+1&-1&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2x-4(y+1)-16(z+1)=0\Leftrightarrow -x+2y+8z=-10.$$

• En fin, (D) y (D') son coplanares si y solo si (D') está contenido en (P). Como (D') es ya paralela a (P), se tiene

$$(D)\text{ y }(D')\text{ coplanares}\Leftrightarrow A'\in(P)\Leftrightarrow -(a-1)+2(2-a)=-10\Leftrightarrow a=\tfrac{5}{3}.$$

$$\boxed{\text{(D) y (D') son coplanares si y solo si $a=\tfrac{5}{3}$ y en este caso, una ecuación del plano que contiene (D) y (D') es $-x+2y+8z=-10$.}}$$

Solución del ejercicio 5318 ▲005508

Porque P, paralela a la derecha (Oy), el vector $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$ está en $\overrightarrow{P}$. Igualmente, el vector $\overrightarrow{AB}=(-1,3,1)$ está en $\overrightarrow{P}$. P es, por lo tanto necesariamente el plano que pasa por $A(0,-1,2)$ y de vector normal $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$. Recíprocamente, este plano es apropiado. Una ecuación de P es, por lo tanto $(x-0)+(z-2)=0$ o aún $x+z=2$.

$$\boxed{\text{Una ecuación del plano paralelo a la recta (Oy) y pasando por $A(0,-1,2)$ y $B(-1,2,3)$ es $x+z=2$.}}$$

Solución del ejercicio 5321 ▲004872

1. $\begin{cases} 2x' = x-2y-z+1 \\ 2y' = -x-z+1 \\ 2z' = -x-2y+z+1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x' = -5x-3y+2z-3 \\ 2y' = 3x+y-2z-1 \\ z' = -3x-3y+z-3. \end{cases}$

Solución del ejercicio 5322 ▲004873

Afinidad de base $\mathscr{P} : x+2y+z=2$, de dirección $\mathrm{vect}(\overrightarrow{e}_1-\overrightarrow{e}_2+2\overrightarrow{e}_3)$, reportando 3.

Solución del ejercicio 5323 ▲004874

Si tres puntos no están alineados, $ABCD$ debe ser un paralelogramo. Si dos puntos son distintos y A,B,C,D están alineados, se debe tener $A=C$, $B=D$.

Solución del ejercicio 5325 ▲004876

Afinidad de cociente $\lambda\mu$ si $\lambda\mu\neq 1$, transvección o Id si no.

Solución del ejercicio 5327 ▲004878

5. $\mathscr{B} = \{3(x+y+z)=1\}$, $\quad\overrightarrow{\mathscr{F}} = \mathrm{vect}(\overrightarrow{e}_1+\overrightarrow{e}_2+\overrightarrow{e}_3)$, $\quad 9\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_1+4\overrightarrow{e}_2-5\overrightarrow{e}_3$.

Solución del ejercicio 5328 ▲004879

Sí si y solo si $\overrightarrow{P'Q'}$ es colineal a $\overrightarrow{PQ}$. En este caso, f es único.

Solución del ejercicio 5329 ▲004880

Existe una homotecia de centro O transformando A en A', B en B', y C en C', y la homotecia de centro G, $-\frac{1}{2}$ transforma A en α, B en β, C en γ.

Solución del ejercicio 5348 ▲004885

Marco de referencia $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) \Rightarrow$ los planos (ABC) y $(A'B'C')$ son paralelas.

Solución del ejercicio 5349 ▲004886

$$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k}\sum_{l\equiv j \pmod n} C_k^{|l-i|}\right).$$

Solución del ejercicio 5350 ▲004887

$$\overrightarrow{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1}\overrightarrow{GA_i^{(k)}}.$$

Solución del ejercicio 5351 ▲004888

$A_k = \mathrm{Bar}(A_0:\alpha_k, A_1:\beta_k, A_2:\gamma_k)$, donde α_k, β_k, γ_k verifican : $x_k = x_{k-1}+x_{k-2}+2x_{k-3}$.
Las raíces de la ecuación característica son $2, j, j^2$, por lo tanto $x_k \sim \lambda 2^k$, con $\lambda = \frac{x_0+x_1+x_2}{7} = \frac{1}{7}$.

Entonces $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, y $A_k \to G$, isobaricentro de $A_0A_1A_2$.

Solución del ejercicio 5355 ▲004892

$\frac{1}{7}$.

Solución del ejercicio 5356 ▲004893

1.
2. $N = \mathrm{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.
3.
4. Homotecia de centro G, de razón $-\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 5357 ▲004894

Sistema de referencia $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Solución del ejercicio 5358 ▲004895

$M_1 \mapsto M_4$ es afín, e intercambiar A y B. $\Rightarrow$ involutivo.

Solución del ejercicio 5359 ▲004896

1.
2. G y la simetría de A, B, C, con respecto a los puntos medios de los lados opuestos.

Solución del ejercicio 5361 ▲004898

1. Sea $\alpha' = \overline{(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B})} : \dfrac{A'B}{\mathrm{sen}(\alpha/2)} = \dfrac{AB}{\mathrm{sen}(\alpha')}, \dfrac{A'C}{\mathrm{sen}(\alpha/2)} = \dfrac{AC}{\mathrm{sen}(\pi-\alpha')}$.
2. $I = \mathrm{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Solución del ejercicio 5348 ▲004885

Marco de referencia $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \Rightarrow$ los planos (ABC) y $(A'B'C')$ son paralelos.

Solución del ejercicio 5349 ▲004886

$$A_i^{(k)} = \mathrm{Bar}\left(A_j : \frac{1}{2^k} \sum_{l \equiv j \,(\mathrm{mod}\, n)} C_k^{|l-i|}\right).$$

Solución del ejercicio 5350 ▲004887

$$\overrightarrow{GA_i^{(k+1)}} = -\frac{1}{n-1}\overrightarrow{GA_i^{(k)}}.$$

Solución del ejercicio 5351 ▲004888

$A_k = \text{Bar}(A_0 : \alpha_k, A_1 : \beta_k, A_2 : \gamma_k)$, donde α_k, β_k, γ_k verifican : $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + 2x_{k-3}$.
Las raíces de la ecuación característica son $2, j, j^2$, por lo tanto $x_k \sim \lambda 2^k$, con $\lambda = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{7} = \frac{1}{7}$.
Entonces $\alpha_k \sim \beta_k \sim \gamma_k$, y $A_k \to G$, isobaricentro de $A_0A_1A_2$.

Solución del ejercicio 5355 ▲004892

$\frac{1}{7}$.

Solución del ejercicio 5356 ▲004893

1.
2. $N = \text{Bar}(A : 1-\alpha, B : 1-\beta, C : 1-\gamma)$.
3.
4. Homotecia de centro G, de razón $-\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 5357 ▲004894

Sistema de referencia $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Solución del ejercicio 5358 ▲004895

$M_1 \mapsto M_4$ es afín, e intercambiar A y B. $\Rightarrow$ involutivo.

Solución del ejercicio 5359 ▲004896

1.
2. G y la simetría de A, B, C, con respecto a los puntos medios de los lados opuestos.

Solución del ejercicio 5361 ▲004898

1. Sea $\alpha' = \overline{(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B})}$: $\frac{A'B}{\text{sen}(\alpha/2)} = \frac{AB}{\text{sen}(\alpha')}$, $\frac{A'C}{\text{sen}(\alpha/2)} = \frac{AC}{\text{sen}(\pi - \alpha')}$.
2. $I = \text{Bar}(A : a, B : b, C : c)$.

Solución del ejercicio 5362 ▲004899

1. $-\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$.
2. $H = \text{Bar}(A : \tan\alpha, B : \tan\beta, C : \tan\gamma) = \text{Bar}\left(A : \frac{a}{\cos\alpha}, B : \frac{b}{\cos\beta}, C : \frac{c}{\cos\gamma}\right)$.

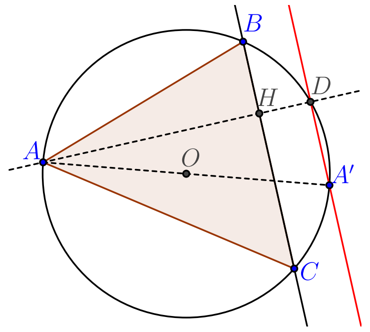
Solución del ejercicio 5363 ▲005206

Es lo mismo demostrar que, si el plano está relacionado a un marco ortonormado, no existe un triángulo equilátero cuyos vértices tengan coordenadas enteras.
El plan es dotado de un sistema de referencia ortonormado directo. Sean A, B y C tres puntos dos a dos distintos, sin alineados y con coordenadas enteras.

Se sabe que $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}$ y $\mathrm{sen}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{||\overrightarrow{AB}||\cdot||\overrightarrow{AC}||}$. Así, o bien el triángulo (ABC) es rectangular en A (y por lo tanto, no es equilátero), o bien $\tan(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$. En este último caso, $\tan(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ es cociente de dos enteros, y por lo tanto, es un racional. Desgraciadamente, para un triángulo equilátero, la tangente de cada uno de sus ángulos es $\sqrt{3}$ que no es racional.
Cuando el sistema de referencia es ortonormado, no existe un triángulo equilátero cuyos vértices tengan coordenadas enteras.

Solución del ejercicio 5364 ▲007059

Según las hipótesis, la recta (BC) es perpendicular a la recta (AH) y ADA' es rectangular en D. Entonces, las rectas (AH) y $(A'D)$ son perpendiculares. Ahora, dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas.

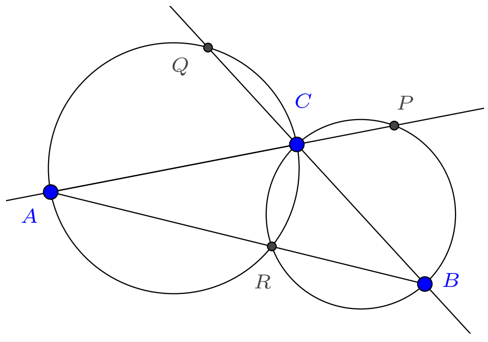


Solución del ejercicio 5365 ▲007060

El punto A es el ortocentro de PQB. El ángulo es así recto.

Solución del ejercicio 5366 ▲007061

Un triángulo cuyo lado es el diámetro del círculo circunscrito es rectángulo. Se deduce que las tres rectas son las alturas de ABC. Son, por lo tanto, concurrentes.



Solución del ejercicio 5367 ▲007062

Tomar un segundo punto N en el círculo de tal manera que (AM) y (BN) se cruzan en un punto C. Se puede entonces construir el ortocentro de ABC. La tercera altura proporciona una recta ortogonal a (AB), cortando el círculo en dos puntos P y Q. Se puede entonces completar MPQ en un trapecio (isósceles) $MPQR$, usando las diagonales de tal trapecio. La recta (MR) es ortogonal a (AB).

Solución del ejercicio 5368 ▲007063

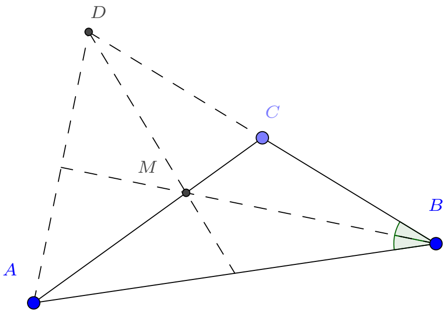
1. Por definición, (IA) y (IB) son tangentes al círculo $\mathscr{C}$, por lo tanto $IA = IB$. Se tiene igualmente $IA = IC$ y entonces I es el punto medio de $[BC]$. El triángulo ABC es, por lo tanto un triángulo y es rectángulo en A.

Solución del ejercicio 5372 ▲007067

El ejercicio se resuelve de forma bastante sencilla utilizando tres triángulos isósceles, pero se puede observar que las tres tangentes son los tres ejes radicales, que se cortan los tres en el centro radical de los tres círculos.

Solución del ejercicio 5373 ▲007068

Sea D el simétrico de B, con respecto a C. Entonces $[AC]$ es una mediana de ABD y M es su centro de gravedad. Como $BA = 2BC = BD$, el triángulo ABD es isósceles en B. Se deduce que la mediana resultante de B es igualmente la bisectriz de B. Ángulos $\widehat{ABM}$ y $\widehat{MBC}$ por lo tanto son iguales.



Solución del ejercicio 5376 ▲007071

Para demostrar $CA = CP$, se va a demostrar que el triángulo CAP es, por lo tanto isósceles en C. Se tienen las igualdades de ángulos :

$$\begin{aligned}\widehat{CAP} &= \widehat{OAB} \text{ porque los ángulos son opuestos por el vértice}\\ &= \pi/2 - \widehat{ABO}\\ &= \pi/2 - \widehat{OPB}, \text{ pues } POB \text{ es isósceles en } O\\ &= \widehat{APC}\end{aligned}$$

El triángulo CAP es, por lo tanto isósceles en C, y entonces $CA = CP$.

Solución del ejercicio 5377 ▲007072

Segunda indicación : uno de los ángulos del triángulo tiene una medida $\geqslant \pi/3$, y otro tiene una medida $\leqslant \pi/3$.

Solución del ejercicio 5381 ▲007076

Para el círculo de centro P, es suficiente demostrar que P es el centro del círculo inscrito del triángulo MAB. Por esto, denotando C el proyectado ortogonal de P sobre (MA), es suficiente demostrar que $PC = PH$, o demostrar que $AC = AH$. Por tanto, se tiene $AC = AH = \cos(\widehat{AMO})/OA$. Otras soluciones son posibles, por ejemplo con homotecias.

Solución del ejercicio 5391 ▲005207

Sea f la transformación considerada.

1. f es la traslación de vector $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f es la homotecia de la razón 2 y de centro $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Como $i = e^{i\pi/2}$, f es la rotación del ángulo $\frac{\pi}{2}$ y de centro $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$. Como $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f es la similitud de centro $\Omega(1,-2)$, de razón $\sqrt{2}$ y de ángulo $-\frac{\pi}{4}$.

Solución del ejercicio 5404 ▲004949

Círculo circunscrito al triángulo $A'BC$ simétrico de ABC, con respecto a (BC).

Solución del ejercicio 5405 ▲004950

$xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = r^2 - OM^2$, con $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,r)$.
$xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = xAM^2 + yBM^2 + zCM^2$.

Solución del ejercicio 5407 ▲004952

Se sabe que la distancia desde un punto $M_0(x_0,y_0)$ a una recta D de ecuación $ax+by+c=0$ es dada por la fórmula $d(M_0,D) = \frac{|ax_0+by_0+c_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Para una recta D_λ la fórmula da :

$$d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}}.$$

Análisis.
Se busca un punto $M_0 = (x_0,y_0)$ tal que para todo λ, $d(M_0,D_\lambda) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante. La igualdad $d(M_0,D_\lambda)^2 = k^2$ conduce a

$$\Big((1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda+2)\Big)^2 = k^2\Big((1-\lambda^2)^2+4\lambda^2\Big)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Las incógnitas son x_0,y_0,k. Se ve la igualdad como una igualdad de dos polinomios en la variable λ.
Para no tener que desarrollar todo se afina un poco : se identifican los términos de mayor grado en λ^4 : $x_0^2\lambda^4 = k^2\lambda^4$, por lo tanto $x_0^2 = k^2$. Evaluando la igualdad para $\lambda = 0$ esto da $(x_0-2)^2 = k^2$. Se deduce $(x_0-2)^2 = x_0^2$ cuya única solución es $x_0 = 1$. Así $k = 1$ (pues $k > 0$). La igualdad para $\lambda = +1$ da $(2y_0-6)^2 = 4k^2$ y para $\lambda = -1$ da $(-2y_0+2)^2 = 4k^2$. La única solución es $y_0 = 2$.
Síntesis.
Verificar que el punto de coordenadas $M_0 = (1,2)$ se encuentra a una distancia $k = 1$ de todas las rectas D_λ. Para $(x_0,y_0) = (1,2)$, se encuentra : $d(M_0,D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)+4\lambda-(4\lambda+2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{\sqrt{(\lambda^2+1)^2}} = \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda^2+1|} = 1$.
Entonces $M_0 = (1,2)$ es equidistante a todas las rectas D_λ.

Solución del ejercicio 5409 ▲004954

Descomponer las rotaciones en simetrías.

Solución del ejercicio 5410 ▲004955

La simetría central ($\alpha+\beta+\gamma=\pi$) alrededor de K, punto de contacto del círculo inscrito y de (AC).

Solución del ejercicio 5412 ▲004957

$x'=\dfrac{ay^2}{x^2+y^2-ax}$, $y'=\dfrac{-axy}{x^2+y^2-ax}$, M' está bien definida si y solo si M no pertenece al círculo de diámetro $[AO]$. Sea D el semi-disco superior de diámetro $[AO]$, D se caracteriza por las desigualdades $x^2+y^2-ax<0$, $y>0$, de donde $x'<0$ y $y'>0$. El recíproco se trata (penosamente) observando que solo los puntos de D tienen una imagen en este cuarto de plano y que f es cuasi-involutivo.

Solución del ejercicio 5413 ▲005197

(D) es una recta vectorial normal $(1,3)$. La proyección ortogonal $p(M_0)$ de M_0 sobre (D) es de la forma $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$, donde λ es un real a determinar. El punto $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$ tiene coordenadas $(x_0+\lambda, y_0+3\lambda)$.

$$M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}\in(D)\Leftrightarrow(x_0+\lambda)+3(y_0+3\lambda)-5=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{-x_0-3y_0+5}{10}.$$

$p(M_0)$ tiene coordenadas $(x_0+\frac{-x_0-3y_0+5}{10}, y_0+3\frac{-x_0-3y_0+5}{10})$ o aún $(\frac{9x_0-3y_0+5}{10},\frac{-3x_0+y_0+15}{10})$.
El simétrico ortogonal $s(M_0)$ verifica : $s(M_0)=M_0+2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.
Sus coordenadas son, por lo tanto :
$(x_0+2(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}-x_0), y0+2(\frac{-3x_0+y_0+15}{10}-y_0)$ o aún $(\frac{4x_0-3y_0+5}{5},\frac{-3x_0-4y_0+15}{5})$.
(Observación. Si no se tiene ya $p(M_0)$ se busca la simétrica en la forma $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$, λ es enteramente determinada por la condición : el punto medio del segmento $[M_0, s(M_0)]$ pertenece a (D).)

Solución del ejercicio 5414 ▲005198

Porque $(ABDC)$ un paralelogramo, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Los datos de contacto de D en el sistema de referencia $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ son, por lo tanto $(1,1)$.

Solución del ejercicio 5415 ▲005201

1. Sean k y k' dos reales no nulos, Ω y Ω' dos puntos (no necesariamente distintos), luego h (resp. h') la homotecia de centro Ω (resp. Ω') y de cociente k (resp. k'). Sean M un punto del plano, luego $M'=h(M)$ y $M''=h'(M')$.

$$M''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'M'}=\Omega'+k'(\overrightarrow{\Omega'\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'})=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}\quad(*)$$

Busquemos entonces los puntos invariantes por $h'\circ h$.

$$h'\circ h(M)=M\Leftrightarrow\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=M\Leftrightarrow-\overrightarrow{\Omega'M}+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow(kk'-1)\overrightarrow{\Omega M}=(k'-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}\quad(**)$$

1er caso. Si $kk'\neq1$, $(**)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=\frac{k'-1}{kk'-1}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, lo que significa que la ecuación $(**)$ tiene una y solo una solución que se denota Ω'', o aún $h'\circ h$ tiene un solo punto invariante, el punto Ω'' tal que $\Omega''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}$. Pero entonces, la igualdad $(*)$ se escribe para todo punto M

$$M''=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}=\Omega'+k'\overrightarrow{\Omega'\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}+kk'\overrightarrow{\Omega''M}=\Omega''+kk'\overrightarrow{\Omega''M}.$$

$h' \circ h$ es, por lo tanto la homotecia del cociente kk' y de centro Ω''. Cabe señalar que el centro Ω'' está en la recta $(\Omega\Omega')$.

$$\boxed{\text{Si } kk' \neq 1,\ h' \circ h \text{ es una homotecia de razón } kk'.}$$

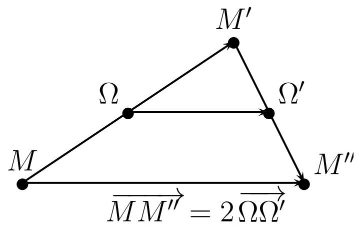
2o caso. Si $kk' = 1$, la igualdad $(*)$ se escribe para todo punto M, $M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ y entonces

$$\overrightarrow{MM''} = \Omega' + k'(\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

En este caso, $h' \circ h$ es la traslación de vector $(1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

En resumen, **la composición de dos homotecias de razones respectivas k y k' ambos no nulos es una homotecia de razón kk' si $kk' \neq 1$ y una traslación si $kk' = 1$** (este resultado se debe conocer).

2. Este es un caso particular de la pregunta anterior. Una simetría central es una homotecia de razón -1. Porque $(-1)(-1) = 1$, $s' \circ s$ es una traslación. Su vector es $\overrightarrow{\Omega s' \circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composición de dos simetrías centrales es una traslación.

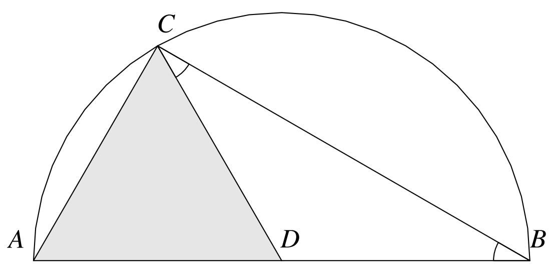
3. Sea Ω' el punto tal que $\vec{u} = 2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, es decir $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2}\vec{u}$. Sea s' la simetría central de centro Ω'. De acuerdo a 2), $s \circ s'$ es la traslación de vector $2\overrightarrow{\Omega'\Omega} = \vec{u}$. Así, $s \circ t = s \circ s \circ s' = s'$.
La composición de una simetría central y una traslación es una simetría central.

Solución del ejercicio 5418 ▲007049

Se conectan los puntos A y B. Se construye el punto medio I de $[AB]$. Se tiene entonces $AI = \frac{1}{2}AB$. Se traza el círculo $\mathscr{C}$ de centro A y de radio AI. Hecho esto, se traza el círculo $\mathscr{C}'$ centrado en I de diámetro AB. Se denomina C uno de los dos puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. Se trata de una de las dos posibles soluciones. En efecto, por construcción $AC = \frac{1}{2}AB$, ya que C pertenece a $\mathscr{C}$. Además, ACB es rectángulo en C. En efecto, ACB está inscrito en el círculo $\mathscr{C}'$ y AB es un diámetro de $\mathscr{C}'$.

Solución del ejercicio 5419 ▲007050

Según la hipótesis $DA = DC = DB$, los puntos A, B y C están ubicados en el círculo central A y de diámetro AB. Entonces, ACB es rectangular en C.



Porque ADC es equilátero, $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = 60°$. Como ACB es rectangular en C, por lo tanto $\widehat{ACB} = 90°$. De la relación $180° = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA}$ se tiene $\widehat{CBA} = 30°$.

Solución del ejercicio 5421 ▲007052

1. Sea G el isobaricentro. Se tiene
$$G = \frac{A+B+C+D}{4} = \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}}{2}.$$
Entonces si I y J son los puntos medios de $[AB]$ y $[CD]$, se ha demostrado que G es el punto medio de $[IJ]$. Se construye I y J, luego su punto medio G.
2. Sea H el segundo baricentro. Por definición,
$$H = \frac{A+B+3C+3D}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{C+D}{2}\right).$$
Entonces se construye I y J los círculos de $[AB]$ y $[CD]$, luego se construye el baricentro de $(I, 1/4)$ y $(J, 3/4)$.
3. Misma técnica : trazar los puntos medios I y J de $[AB]$ y $[CD]$, luego dibuja el punto medio K de $[IJ]$. El isobaricentro del pentágono es el baricentro de $(K, 4/5)$ y $(E, 1/5)$.

Solución del ejercicio 5423 ▲007054

1. Las rectas son perpendiculares.
2. Para las tangentes comunes exteriores, el círculo de centro O' y de radio $r' - r$ interseca el círculo de diámetro $[OO']$ en dos puntos C y D. Las rectas $(O'C)$ y $(O'D)$ cortan $\mathscr{C}'$ en dos puntos A' y B'. Las tangentes exteriores son las paralelas a (OC) y (OD) pasando por A' y B'. Para las tangentes interiores, utilizar el círculo de centro O' y de radio $r' + r$.

Solución del ejercicio 5427 ▲007058

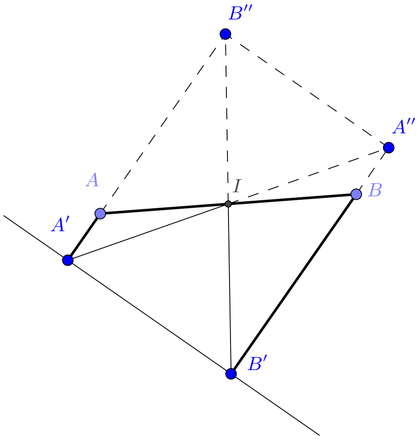
Trazar el lugar geométrico de los puntos a distancia R de los círculos y rectas presentes. Sus posibles puntos de intersección aportan soluciones.

Solución del ejercicio 5431 ▲007080

Si n es impar, la composición definida en la indicación es una simetría central, y su centro (que se puede construir considerando las imágenes de varios puntos) es un vértice del polígono. Se recuperan luego los otros vértices aplicando las otras simetrías centrales una tras otra.
Observación : este ejercicio también se puede resolver con números complejos, escribiendo que el punto medio de dos puntos tiene el afijo $(a+b)/2$. Se obtiene un sistema lineal, de los cuales se discute la existencia de soluciones.

Solución del ejercicio 5432 ▲007081

Se completa el trapecio rectangular $ABB'A'$ en un rectángulo como se recomienda, usando la simetría de centro I.



El resultado requerido es entonces una consecuencia del hecho de que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en su punto medio.

Solución del ejercicio 5433 ▲007082

Solución del ejercicio 5434 ▲007083

Dibujar rayos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$, paralelas entre sí.

Solución del ejercicio 5436 ▲007085

Análisis. Trazar como se sugiere una figura con el cuadrado ya construido : se traza un cuadrado y luego se traza un triángulo adecuado alrededor. Se constata que uno de los lados del cuadrado, se denota $[IJ]$, es paralelo a $[BC]$. Hay una homotecia h de centro A que envía $[IJ]$ sobre $[BC]$. Entonces, la imagen del cuadrado $IJKL$ por h es un cuadrado en el que uno de sus lados es $[BC]$. Denotemos $BCDE$ este cuadrado y dibujarlo. Se constata que $h(K) = D$ y $h(L) = E$, es decir $K = h^{-1}(D)$ y $L = h^{-1}(E)$. Todo lo que queda hacer la síntesis.

Solución del ejercicio 5437 ▲007086

1. El triángulo del punto medio es la imagen de ABC por la homotecia de centro G y de cociente $-1/2$. Se deduce que $\mathscr{C}$ es la imagen del círculo circunscrito por esta homotecia, y por lo tanto, que su centro es la imagen de Ω por esta homotecia : así que está sobre la recta $(G\Omega)$.
2. Demostrar que $\mathscr{C}'$ es la imagen de $\mathscr{C}$ por la homotecia de centro H y de cociente $1/2$. Se considera la composición de la homotecia de centro G y de cociente $-1/2$, con homotecia de razón -1 y de centro J. Es una homotecia de razón $1/2$ que envía $\mathscr{C}$ sobre $\mathscr{C}'$. A medida que ella envía más Ω sobre J, su centro es el punto M tal que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M\Omega}$. Pero ya se sabe, por ejemplo, considerando la homotecia de centro G y de cociente $-\frac{1}{2}$, que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Se deduce que $M = H$.

Solución del ejercicio 5445 ▲007094

Sea O el punto de intersección. Se denota ϕ la homotecia que envía A sobre B, y ψ la que envía B sobre C. Entonces $\phi\psi = \psi\phi$. La imagen de A es C y la imagen de A' es C', de ahí el paralelismo requerido. Si las rectas son paralelas, se reemplazan homotecias por traslaciones.

Solución del ejercicio 5447 ▲007096

La parte lineal de $f \circ g^{-1}$ es la identidad. Entonces es una traslación. Observando la imagen de uno de los centros, se encuentra que el vector es $(1-\lambda)O_1O_2$.

Solución del ejercicio 5448 ▲007097

Aplicar la traslación al círculo. (Si no se da el centro del círculo, comenzar por construir el centro.)
Los puntos de intersección de los dos círculos proporcionan las (o la) soluciones de problemas.

Solución del ejercicio 5449 ▲007098

Después de seguir la indicación, trasladar este círculo para que contenga el punto A.

Solución del ejercicio 5450 ▲007099

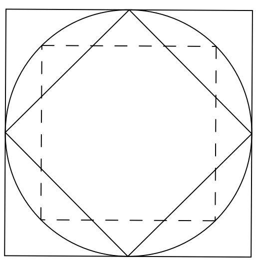
Comenzar dibujando la bisectriz, luego (OA). Luego, trazar un círculo cualquiera tangente a las dos rectas (en el mismo sector angular), y usar una homotecia.
Nota : los ejercicios que involucran homotecias se resuelven más fácilmente « partiendo del final », es decir procediendo por análisis-síntesis y haciendo una figura aproximada de lo que será la solución.

Solución del ejercicio 5452 ▲007101

Se tiene y $MM' = 2IJ$ y por otro lado I y J son los proyectados de O y O' en la recta D, por lo tanto $IJ \leqslant OO'$, con igualdad si y solo si $(OO')||(IJ)$, en este caso el máximo es, por lo tanto $2OO'$.

Solución del ejercicio 5453 ▲007102

Siguiendo la indicación entendemos que un cuadrado inscrito en un círculo inscrito en el cuadrado inicial $ABCD$ tiene una área dos veces más pequeña que $ABCD$.



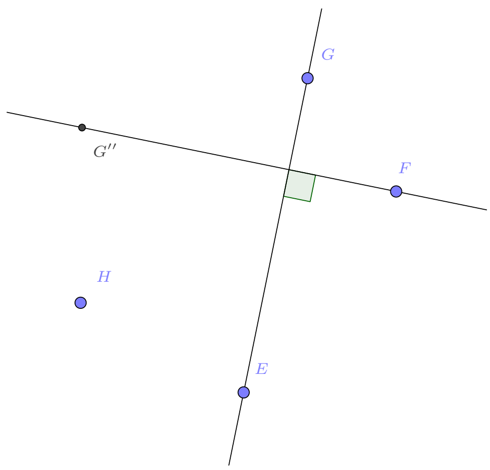
Se deduce una construcción del pequeño cuadrado : sus vértices son los puntos de intersección de las diagonales con el círculo inscrito.

Solución del ejercicio 5454 ▲007103

Se construye la imagen del cuadrado por una rotación de ángulo $\pi/4$. Los puntos de intersección de los dos cuadrados forman un octágono regular que responde a la pregunta.

Solución del ejercicio 5455 ▲007104

Aquí hay una solución en una configuración « genérica ».



Comenzar analizando el problema. Se supone que $ABCD$ es directo y que $E \in [AB]$, $F \in [BC]$ etc.

Se considera la rotación de centro O (el centro del cuadrado), y de ángulo $\pi/4$. La imagen del segmento $[EG]$ es un segmento $[E'G']$, que se supone distinto de $[FH]$. En hecho, se supone por simplicidad $E' \neq F$. Se considera entonces la traslación vectorial $\overrightarrow{E'F}$. Envía G' en un punto G'' perteneciendo a la recta (DA). Si se supone que este punto es diferente de H, entonces se tiene $(DA) = (G''H)$.

Así es como se puede obtener el punto G''. Se construye la perpendicular a (EG) pasando por F, y en esta recta, se coloca el punto G'' tal que $FG'' = EG$ y $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{FG''}) = \pi/2$. Esto permite trazar la recta (HG''), es decir (AD).

Luego se proyectan los puntos E y G en esta recta, lo que da A y D. Se puede entonces terminar la construcción del cuadrado. Hay otras soluciones que usan el teorema del ángulo central.

Solución del ejercicio 5456 ▲007105

La rotación de centro O (el centro del cuadrado) y de ángulo $\pi/2$ envía el triángulo DAM sobre ABN. Se deduce que $(DM) \perp (AN)$ y así como (AN) es una altura de DMN. Se procede de la misma manera para la segunda altura.

Solución del ejercicio 5457 ▲007106

Trazar una figura extendiendo los segmentos $[OP]$ y $[OR]$, y considerar una rotación de centro O y de ángulo $\pi/2$.

Solución del ejercicio 5463 ▲007112

Dos cuadrados son siempre semejantes, y una similitud que no es una traslación admite siempre un punto fijo, su centro.

Solución del ejercicio 5465 ▲007114

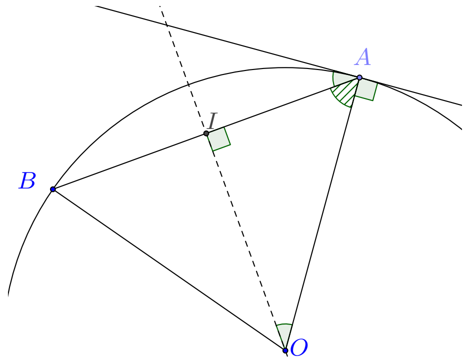
Los triángulos $AA'I$ y $BB'C$ son semejantes, por una similitud de ángulo $\pi/2$. La imagen de (AJ) por esta similitud es (BI).

Solución del ejercicio 5467 ▲007116

La composición es una traslación, se deduce que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$.

Solución del ejercicio 5469 ▲007118

Trazar la figura, donde se coloca I la mitad de $[AB]$, de tal manera que $\frac{1}{2}(OA,OB) = (OA,OI)$.



Ángulos $(AO,\mathscr{T})$ y (AI,IO) son rectos. Se tiene por un lado :

$$0 = (\mathscr{T},\mathscr{T}) = (\mathscr{T},AI) + (AI,AO) + \pi/2,$$

y por otro lado, en el triángulo AIO :

$$0 = (AI,AO) + (IO,IA) + (OA,OI) = (AI,AO) + \pi/2 + (OA,OI).$$

Finalmente, por lo tanto se tiene :

$$(\mathscr{T},AB) = (\mathscr{T},AI) = -(AI,AO) - \pi/2 = (OA,OI) = \frac{1}{2}(OA,OB),$$

lo que faltaba demostrar. $\square$

Solución del ejercicio 5470 ▲007119

Por el teorema del ángulo inscrito, es un arco de círculo, cuyo centro está sobre la mediatriz de $[AB]$. Por el caso límite del teorema del ángulo inscrito, se sabe también que si $\mathscr{T}$ es la tangente a este círculo en A, entonces $(\mathscr{T},AB) = \alpha$. Se traza, por lo tanto la recta $\mathscr{T}$ que forma un ángulo α, con (AB) en A, luego la perpendicular a $\mathscr{T}$ pasando por A. Este recta corta la mediatriz en un punto O que es el centro del círculo buscado.

Solución del ejercicio 5471 ▲007120

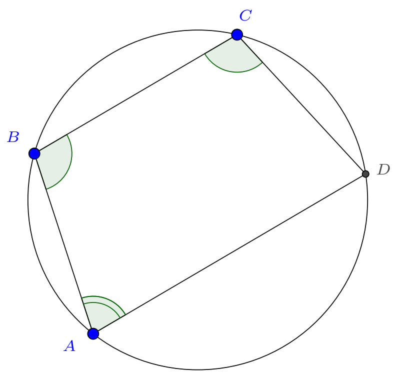
Construir un triángulo AIB isósceles rectángulo en I y el círculo de centro I y de radio IA. Este círculo interseca la mediatriz de $[AB]$ en un punto O que verifica $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$, por el teorema del ángulo central. Es entonces el centro de un octágono situado sobre $[AB]$. Trazando el círculo de centro O y de radio OA, se puede completar la construcción de este octágono.

Solución del ejercicio 5472 ▲007121

Comenzar por recordar dos puntos :

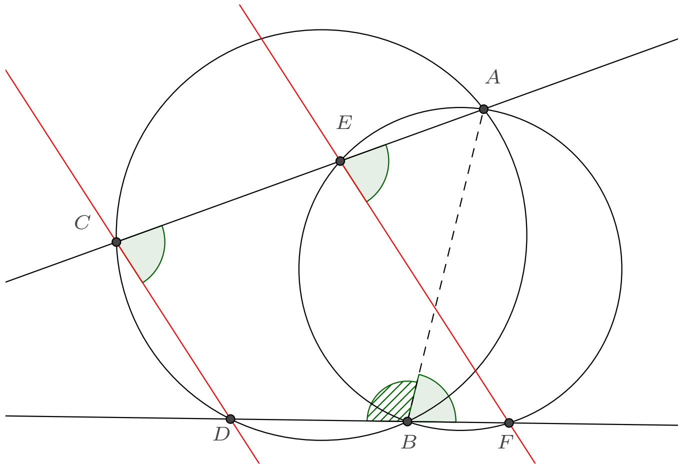
1. en un trapecio, dos ángulos no adyacentes en una misma base son suplementarios, ya que los dos bases son paralelas.
2. un cuadrilátero no cruzado es inscribible si y solo si los ángulos opuestos son suplementarios.

Un trapecio es isósceles si y solo si los ángulos adyacentes en una misma base son iguales, por lo tanto (por el primero punto arriba) si y solo si los ángulos opuestos son suplementarios, por lo tanto (por el segundo punto) si y solo si es inscribible.

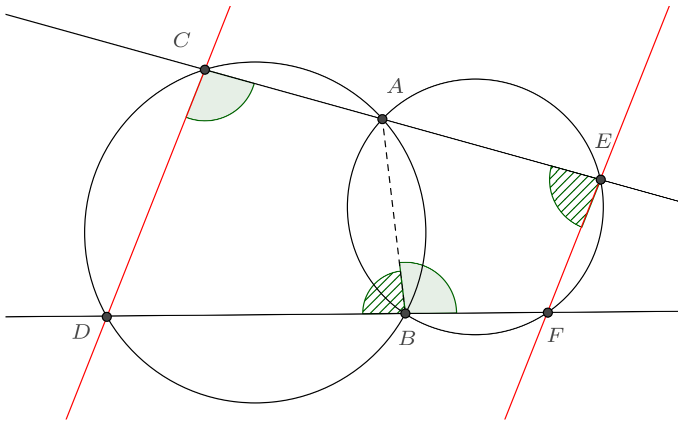


Solución del ejercicio 5474 ▲007123

Trazar una figura. *Se marcan algunas igualdades de ángulos obtenidos por el teorema del ángulo inscrito :*



Las igualdades de ángulos marcados en la figura permiten ver la solución, al menos en la configuración particular diseñada. Se ve en efecto, que los ángulos $\widehat{ECD}$ y $\widehat{AEF}$ son iguales. Cuidado sin embargo, los ángulos geométricos son engañosos y las igualdades que se ven sobre una figura pueden depender de la manera de trazar la figura. En la figura abajo por ejemplo, los ángulos en la pregunta no son iguales si no suplementarios.



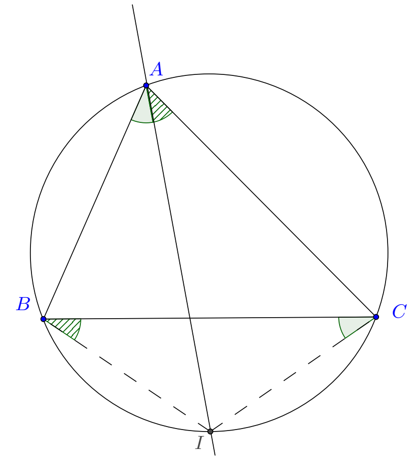
No queda más que escribir rigurosamente la solución con de los ángulos de las rectas, apoyándose en la intuición dada por la figura.

Para demostrar que (CD) y (EF) son paralelas, es suficiente por ejemplo demostrar que forman el mismo ángulo con la recta (CA). Pero se tiene la sucesión de igualdades de ángulos de rectas :

$$\begin{aligned}
(CD,CA) &= (BD,BA) \text{ pues } CDAB \text{ se puede inscribible}\\
&= (BF,BA) \text{ pues } (BD) = (BF)\\
&= (EF,EA) \text{ pues } BFAE \text{ se puede inscribible}\\
&= (EF,CA) \text{ pues } (EA) = (CA).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5475 ▲007124

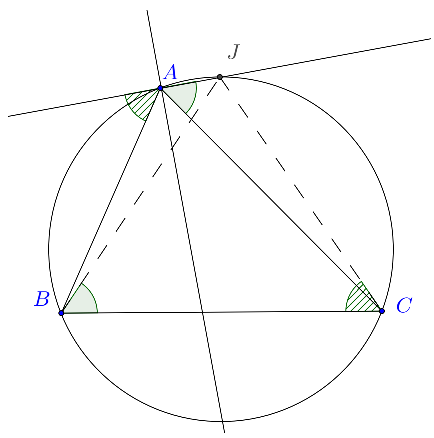
Para demostrar el resultado, es suficiente demostrar que IBC y JBC son isósceles en I y J. Se comienza por demostrar el resultado para I :



Para demostrar que BCI es isósceles en I, es suficiente demostrar que $(BC,BI) = (CI,CB)$. Por tanto, se tiene

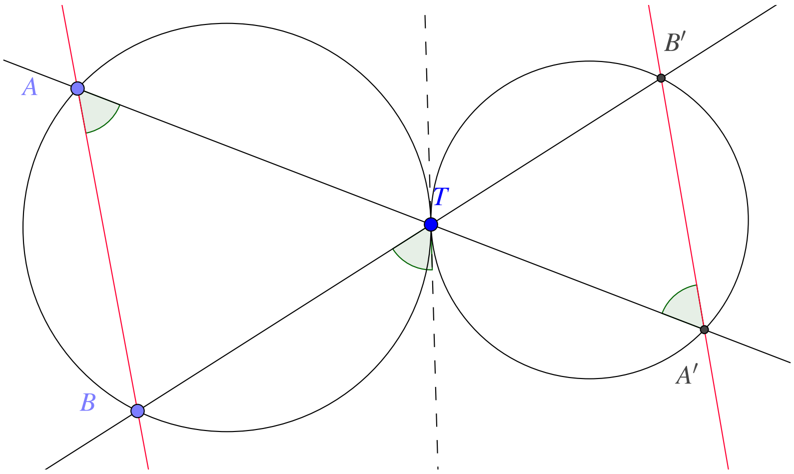
$$\begin{aligned}(BC,BI) &= (AC,AI) \text{ pues } ABIC \text{ es inscribible}\\ &= (AI,AB) \text{ pues } (AI) \text{ es una bisectriz de } (AC) \text{ y } (AB)\\ &= (CI,CB) \text{ pues } ABIC \text{ es inscribible.}\end{aligned}$$

Se observa que al escribir con los ángulos de rectas, no se tiene necesidad (ni de hecho la posibilidad) de precisar si la bisectriz es interior o exterior, lo que implica que la demostración será especificar si la bisectriz era interior o exterior, lo que implica que la demostración será la misma para J. Tracemos una figura para visualizar la segunda situación.



Solución del ejercicio 5476 ▲007125

Sea $\mathscr{T}$ la tangente común a los dos círculos.



Por el caso límite del teorema de ángulos inscritos, se tiene

$$(AB, AT) = (BT, \mathscr{T}) = (B'T, \mathscr{T}) = (A'B', A'T)$$

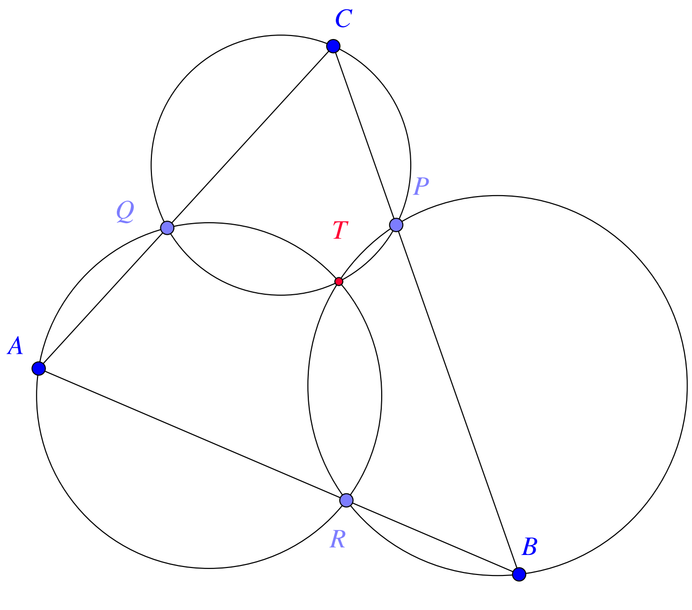
Como $(AT) = (A'T)$, se deduce que

$$(AB, AT) = (A'B', AT),$$

y de modo que $(AB)||(A'B')$.
Otra prueba : Considerar una homotecia de centro T que envía un círculo sobre el otro.

Solución del ejercicio 5477 ▲007126

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ los círculos circunscritos a ARQ y BPR. Tratar el primer caso, en el que se cortan en R y en un segundo punto T.

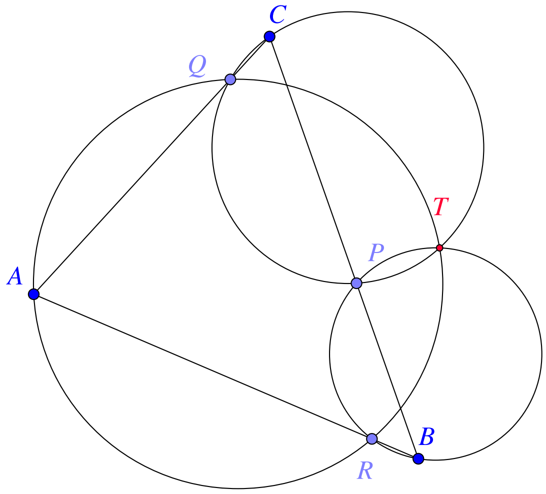


Se trata de demostrar que T, P, C, Q son cocíclicos.

Por el curso, es suficiente demostrar la igualdad de los ángulos de las rectas $(QT,QC) = (PT,PC)$. Pero se tiene :

$$\begin{aligned}(QT,QC) &= (QT,QA) \text{ pues } (QC) = (QA)\\ &= (RT,RA) \text{ pues } AQTR \text{ es inscribible}\\ &= (RT,RB) \text{ pues } (RA) = (RB)\\ &= (PT,PB) \text{ pues } PTRB \text{ es inscribible}\\ &= (PT,PC) \text{ pues } (PB) = (PC).\end{aligned}$$

Cuidado, si se utilizan ángulos geométricos en lugar de ángulos de rectas para escribir la solución, puede que haya que distinguir entre varias configuraciones posibles por ejemplo la siguiente :



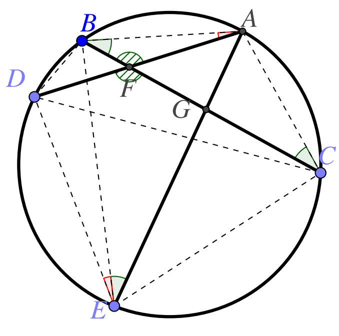
(Los ángulos $\widehat{BRT}$ y $\widehat{BPT}$ son suplementarios en la primera figura, e iguales en la segunda.)
El segundo caso, donde los dos primeros círculos son tangentes en R, se trata usando el caso límite del teorema del ángulo en el centro.

Solución del ejercicio 5478 ▲007127

Las dos partes tienen la misma área.

Solución del ejercicio 5479 ▲007128

Trazar una figura :



[En la figura, se ve que los ángulos $\widehat{GFD}$ y $\widehat{GED}$ son suplementarios, pues $\widehat{GFD} = \widehat{BFA}$ y $\widehat{GED} = \widehat{GEB} + \widehat{BED} = \widehat{FBA} + \widehat{BAF}$. Solo queda escribir esta prueba un poco más rigurosamente con ángulos de rectas.]
Demostrar que $(FD, FG) = (ED, EG)$, lo que prueba que $EDFG$ es inscribible. En primer lugar, como $(FD) = (FA)$ y $(FG) = (FB)$, se tiene

$$(FD, FG) = (FA, FB).$$

entonces, la suma de los ángulos del triángulo ABF vale π, entonces en términos de ángulos de rectas se tiene la relación $(FA, FB) + (AB, AF) + (BF, BA) = 0$, es decir :

$$(FA, FB) = (AF, AB) + (BA, BF).$$

Calculemos cada uno de estas dos ángulos. Por un lado se tiene :

$$\begin{aligned}(AF, AB) &= (AD, AB) \text{ pues } (AD) = (AF)\\ &= (ED, EB) \text{ pues } ABDE \text{ es inscribible.}\end{aligned}$$

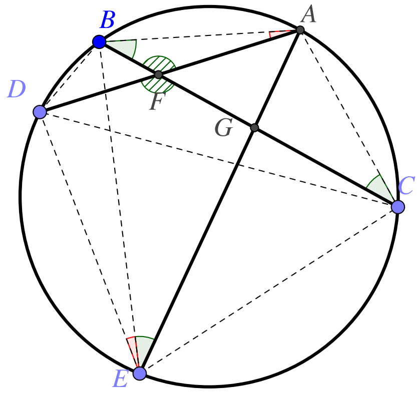
Y por otro lado :

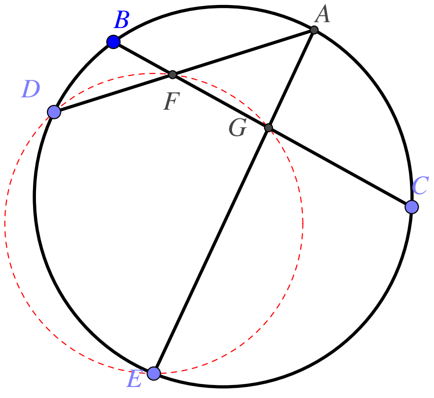
$$\begin{aligned}(BA, BF) &= (BA, BC) \text{ pues } (BF) = (BC)\\ &= (CB, CA) \text{ pues } ABC \text{ es isósceles en } A\\ &= (EB, EA) \text{ pues } ABCE \text{ es inscribible.}\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene por lo tanto :

$$\begin{aligned}(FD, FG) &= (FA, FB)\\ &= (AF, AB) + (BA, BF)\\ &= (ED, EB) + (EB, EA)\\ &= (ED, EA)\\ &= (ED, EG) \text{ pues } (EG) = (EA),\end{aligned}$$

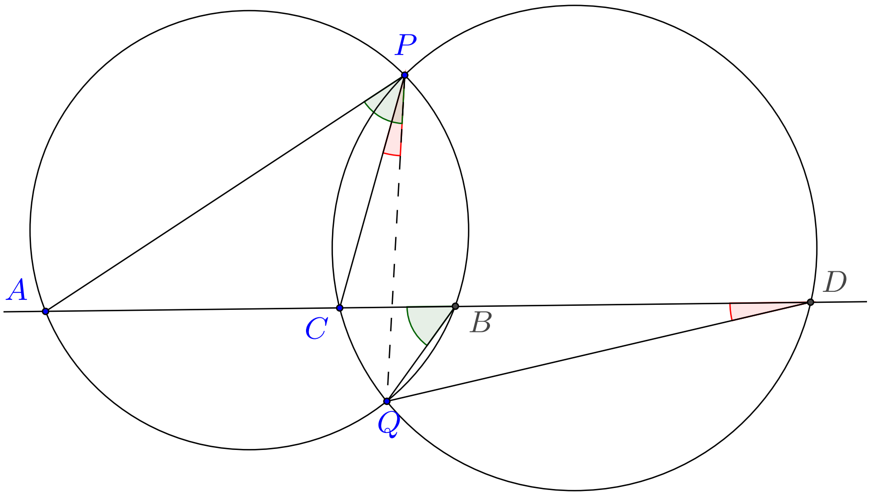
lo que faltaba demostrar.





Solución del ejercicio 5480 ▲007129

Trazar una figura. *[Marcar todas las igualdades de ángulo disponibles produce el resultado. En la figura, solo se marcan los utilizados en la redacción propuesta.]*



Demostrar que $(PA,PC) = (DQ,BQ)$. Se tiene :

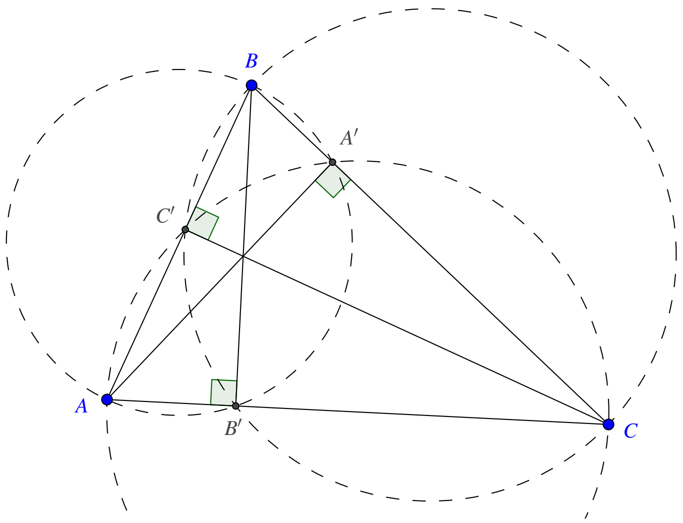
$$\begin{aligned}(PA,PC) &= (PA,PQ)+(PQ,PC)\\ &= (BA,BQ)+(DQ,DC) \text{ por cociclicidad en cada círculo}\\ &= (BA,BQ)+(DQ,BA) \text{ pues } (DC)=(BA)\\ &= (DQ,BQ).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5481 ▲007130

1. Sea θ el ángulo de la similitud. La parte lineal $\overrightarrow{\phi}$ de ϕ es una similitud vectorial de ángulo θ. Se tiene entonces $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\phi}\overrightarrow{AB}} = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}$.
2. Se tiene $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}} = (\widehat{\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{CQ}}$ y por otro lado θ : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\phi(A)}} = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}$. Entonces $AQCO$ es inscribible.
3. Igualmente $BQDO$ es inscribible. Entonces O pertenece a la intersección de los círculos circunscritos a ACQ y BDQ.
4. Si los segmentos son paralelos, la similitud es una homotecia. Si son además del mismo largo, es una traslación o una simetría central.

Solución del ejercicio 5482 ▲007131

El cuadrilátero $ABA'B'$ es inscribible en un círculo de diámetro $[AB]$. En efecto, los triángulos ABA' y ABB' son por definición rectángulos en A' y B', y tienen la misma hipotenusa $[AB]$.
Igualmente, cuadriláteros $BCB'C'$ y $CAC'A'$ son inscribibles en círculos de diámetro $[BC]$ y $[CA]$.

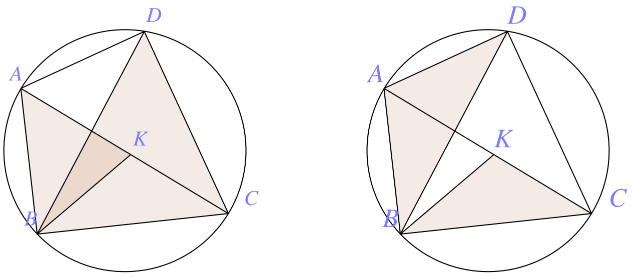


Demostrar que la altura (BB') es una bisectriz de las rectas $(B'C')$ y $(B'A')$. Por esto, se demuestra que $(B'C', B'B) = (B'B, B'A')$. Se tiene :

$$\begin{aligned}
(B'C', B'B) &= (CC', CB) \text{ (pues } BCB'C' \text{ es inscribible)}\\
&= (CC', CA') \text{ (mismas rectas)}\\
&= (AC'AA') \text{ (pues } ACA'C' \text{ es inscribible)}\\
&= (AB, AA') \text{ (mismas rectas)}\\
&= (B'B, B'A') \text{ (pues } ABA'B' \text{ es inscribible)}
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5483 ▲007132

El teorema del ángulo inscrito en el arco BC da la igualdad $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. La consideración de otros arcos CD, DA y AB da las igualdades $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ y $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.



Considerar el enunciado. Sea K el punto de la diagonal $[AC]$ tal que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Entonces, ABK y DBC son semejantes (primera figura) porque sus ángulos son iguales : $\widehat{BAK} = \widehat{BDC}$ y $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Se tiene una similitud de razón :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BK} = \frac{DC}{AK},$$

enviando ABK sobre DBC.

Igualmente, ABD y KBC son semejantes (segundo figura) porque sus ángulos son iguales : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{KCB}$ y $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$. La similitud enviando ABD sobre KBC a para respecto

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}.$$

Se tiene $AC = AK + KC$, por lo tanto $AC \cdot BD = AK \cdot BD + KC \cdot BD$, por lo que, $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ (primera similitud), y $KC \cdot BD = AD \cdot BC$ (segunda similitud), de ahí el resultado :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Solución del ejercicio 5487 ▲007136

La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es 2π :

$$\begin{aligned} 2\pi &= \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} \\ &= 2\widehat{ABI} + 2\widehat{KCD} + 2\widehat{CDK} + 2\widehat{IAB} \end{aligned}$$

de donde

$$\widehat{ABI} + \widehat{KCD} + \widehat{CDK} + \widehat{IAB} = \pi,$$

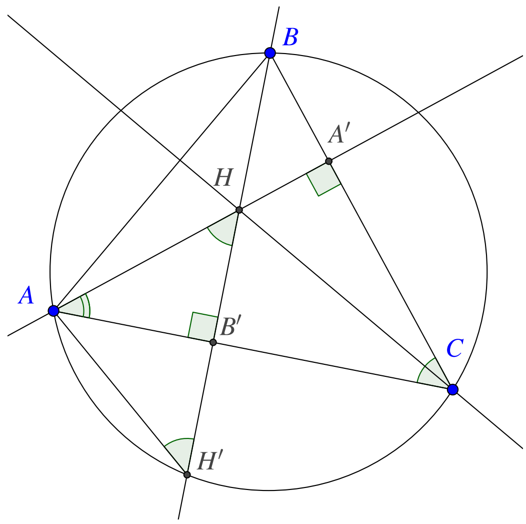
dicho de otro modo la suma de los demi-ángulos vale π.
Se termina entonces la prueba utilizando el criterio de cociclicidad.

Solución del ejercicio 5488 ▲007137

Se encuentra un paralelogramo cuyos ángulos son los suplementarios de los de $ABCD$.

Solución del ejercicio 5490 ▲007139

Si ABC es rectangular, el ortocentro coincide con uno de los vértices y la verificación de la afirmación es relativamente fácil. En lo que sigue se asume que no es así.
Por definición, H' es la simétrica de H, con respecto a (AC) si (AC) es la mediatriz de $[HH']$.
Esto es esto que se debe demostrar.
Por otra parte, por definición, se tiene $(AC) \perp (HH')$, por lo tanto (AC) es la altura de AHH' saliendo de A.
Así, si AHH' es isósceles en A, entonces esta altura de AHH' es también la mediana saliendo de A y es aún la mediatriz del lado opuesto a A, es decir $[HH']$.
Por lo tanto, es suficiente demostrar que AHH' es isósceles en A. Para esto, es suficiente demostrar que los ángulos adyacentes en la base son iguales, dicho de otro modo $\widehat{AHH'} = \widehat{AH'H}$, con de los ángulos geométricos no orientados, o más precisamente con los ángulos orientados $(H'A, H'H) = (HH', AH)$.



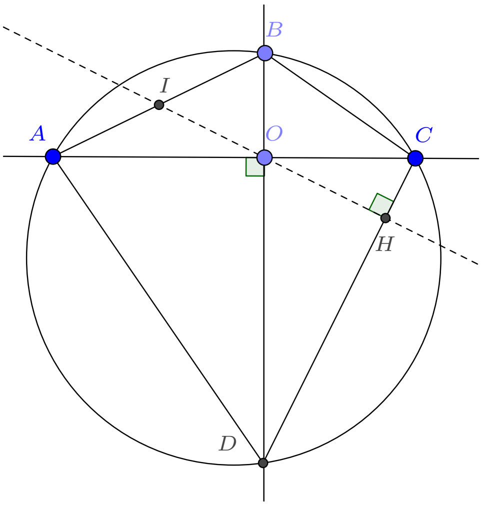
Siguiendo la metodología habitual, se marcan de manera sistemática los ángulos iguales (o complementarios, suplementarios, etc.) sobre la figura. Esto indica el procedimiento a seguir para la prueba.

Demostrar que $(H'A, H'H) = (HH', AH)$. Se tiene :

$$\begin{aligned}(H'A, H'H) &= (H'A, H'B) \text{ (pues } (H'H) = (HB)\text{)}\\ &= (CA, CB) \text{ (pues } ABCH' \text{ es inscribible)}\\ &= (CA, AH) + (AH, CB) \text{ (por Chasles)}\\ &= (CA, AH) + \pi/2 \text{ (pues } (AH) \text{ es una altura de } ABC\text{)}\\ &= (CA, AH) + (HH', CA)\\ &= (HH', AH) \text{ (por Chasles)}\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5491 ▲007140

Recordar la figura :



1. Se recuerda que la mitad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el centro de su círculo circunscrito (otra manera de decirlo es que la hipotenusa es un diámetro del círculo circunscrito).

   Si $IO = IA$, eso significa que I está sobre la mediatriz de $[OA]$. Por otra parte, AOB es rectangular en O e I es por definición sobre la hipotenusa $[AB]$. Entonces I es la intersección de la hipotenusa y de una mediatriz de un autre lado, es, por lo tanto la mitad de la hipotenusa por la propiedad rappelée más haut. Es por lo tanto suficiente de demostrar que $IO = IA$.
2. Para demostrar que $IO = IA$, es suficiente demostrar que IOA es isósceles en I, es decir que $(AI, AO) = (OA, OI)$. Por tanto, se tiene :

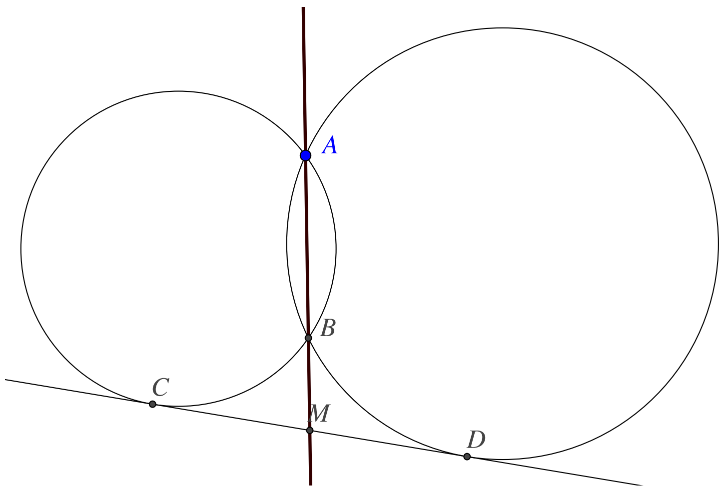
$$\begin{aligned}(AI, AO) &= (AB, AC) \text{ (mismas rectas)}\\ &= (DB, DC) \text{ (pues } ABCD \text{ es inscribible}\\ &= (DO, DH) \text{ (mismas rectas)}\\ &= (DO, OH) + (OH, DH) \text{ (por Chasles)}\\ &= (DO, OH) + \pi/2 \text{ (por definición de } H\text{)}\\ &= (OB, OI) + \pi/2 \text{ (mismas rectas)}\\ &= (OB, OI) + (OA, OB) \text{ (pues } (OA)\perp(OB) \text{ de acuerdo al enunciado)}\\ &= (OA, OI) \text{ (por Chasles).}\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5492 ▲007141

1. Sea $\mathscr{D}'$ otra recta que pasa por P y cortando el círculo en dos puntos A' y B'. Las cantidades $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ y $\overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$ tienen forzosamente mismo signo, por lo tanto es suficiente demostrar que $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.
   Como $ABA'B'$ es inscribible, el teorema del ángulo inscrito da
   $$(BA, BA') = (B'A, B'A').$$
   Se deduce que los triángulos PAB' y $PA'B$ por lo tanto tienen dos de sus ángulos iguales, por lo que todos sus ángulos son iguales, por lo tanto son semejantes. Se deduce que :
   $$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB},$$
   por lo tanto
   $$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$
2. Se procede de la misma manera, usando la versión tangencial del teorema del ángulo inscrito.
3. Con las anotaciones de la pregunta anterior, se tiene por el teorema de Pitágoras $PT^2 + r^2 = PO^2$, de ahí el resultado.
4. El conjunto es, por lo tanto $\{P \in \mathscr{P}, : ||\overrightarrow{OP}|| = \lambda + r^2\}$.
   Si $\lambda < -r^2$, el conjunto es vacío. Si $\lambda = -r^2$, es el centro del círculo, y si $\lambda > -r^2$, es un círculo de centro O y de radio $\sqrt{\lambda + r^2}$.
5. Si los dos productos son nulos, entonces P coincide con uno de los dos puntos A y B, así como con uno de los dos puntos C y D. Se deduce que $ABCD$ es de hecho un triángulo y por lo tanto, es inscribible. Si los dos productos no son nulos, se obtiene
   $$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$
   por lo tanto los triángulos PAD y PBC son semejantes, por lo que tienen mismos ángulos. Se concluye utilizando la recíproca del teorema del ángulo inscrito.

Solución del ejercicio 5493 ▲007142

Recoremos la figura :



Sea M un punto de (AB). Su potencia con respecto a los dos círculos es la misma y vale $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.
Por otro lado, si M está además en la tangente común (CD), entonces su potencia con respecto al primero círculo es MC^2, y con respecto al segundo círculo es MD^2. Se deduce que $MC = MD$, por lo tanto M es el punto medio de $[CD]$.

Solución del ejercicio 5494 ▲007143

Sea A' el simétrico de A, con respecto a $[BC]$. Entonces, $BACA'$ es inscribible, y la potencia de H, con respecto a su círculo circunscrito es

$$p_{\mathscr{C}}(H) = HB\cdot HC = HA\cdot HA' = HA^2.$$

Segunda solución, no usa la potencia de un punto con respecto a un círculo :
Los triángulos ABC, ABH y ACH son semejantes porque cada uno de ellos tiene dos (por lo tanto tres) ángulos idénticos. Por lo tanto, las proporciones de las longitudes de los lados homólogos son iguales, lo que da

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$$

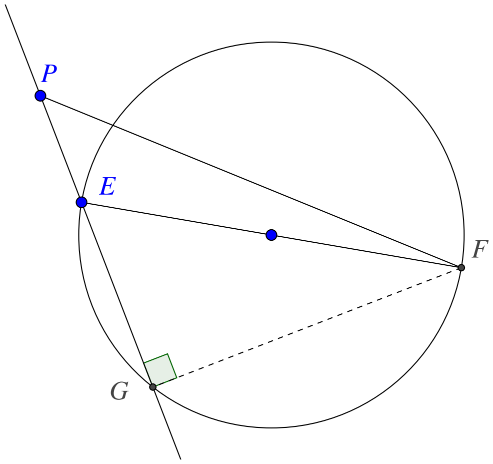
de donde se tiene $HA^2 = HB\cdot HC$, lo que faltaba demostrar.

Solución del ejercicio 5495 ▲007144

Sea G el proyectado ortogonal de F sobre $\mathscr{D}$.

$$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PG}$$

Distingamos dos casos $G = E$ y $G \neq E$. En el primer caso, significa que el diámetro (EF) es ortogonal a la recta $\mathscr{D}$, por lo que es tangente al círculo. En este caso, $PE\cdot PG = PE^2$ es la potencia de P respecto al círculo.
En el segundo caso, EFG es rectángulo en G, por lo tanto G está en el círculo de diámetro $[EF]$. Se deduce que G es el segundo punto de intersección de (PE), con el círculo, y así como $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PG}$ es là también la potencia de P, con respecto al círculo.



Solución del ejercicio 5496 ▲007152

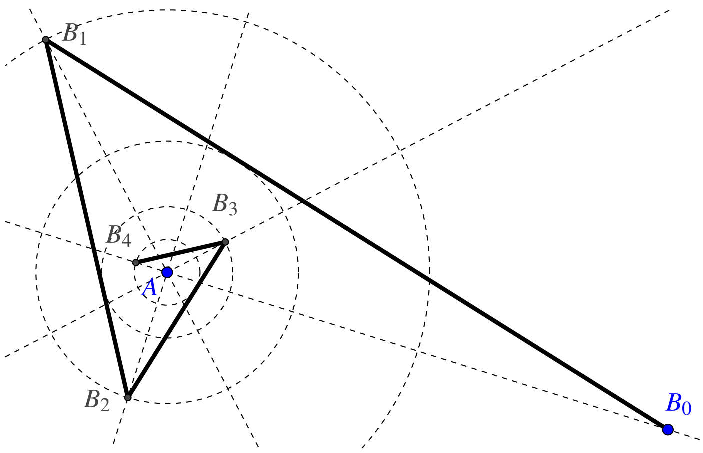
Existe una único similitud directa s que envía $[AE]$ sobre $[CB]$. Son respecto es $1/l$ y su ángulo $-\pi/2$.
Sea $D' = s(D)$. Entonces $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD'}) = (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{s(A)s(D)}) = -\pi/2$ y $CD' = \frac{1}{l}AD = \frac{1}{l}$.
Este similitud envía por lo tanto D y F si y solo si $CF = CD'$, es decir si y solo si $1/l = l-1$. Como $l \neq 0$, esta ecuación es equivalente a $1 = l^2 - l$. Ella admite una única solución positiva : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución del ejercicio 5497 ▲007153

Existe una único similitud directa que envía el par (B,D) en el par (C,E). Como $BD = CE$, es una isometría por lo tanto una rotación, y como $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CE}) = \pi/2$, su ángulo es $\pi/2$. Por tanto, solo hay una rotación de ángulo $\pi/2$ que envía B sobre C : su centro es I. Se deduce que IDE es un rectángulo isósceles en I.

Solución del ejercicio 5498 ▲007154

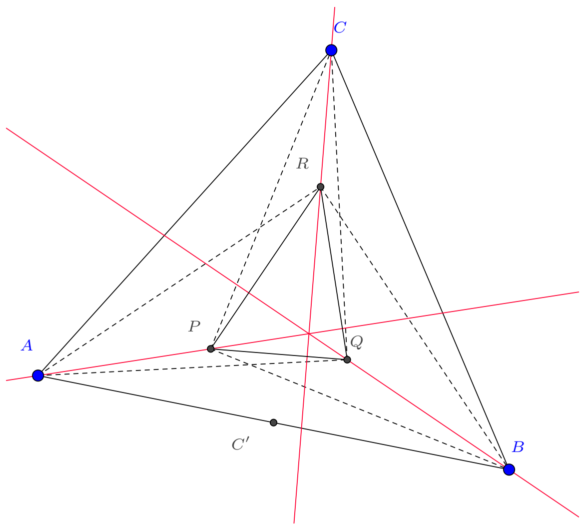
1. Para hacer la figura se puede
   (a) Trazar la recta (AB_0), su perpendicular pasando por A, luego las dos bisectrices de estas dos rectas.
   (b) Trazar los círculos de centro A y de radios 8, 4, 2 y más generalmente $8 \cdot 2^{-k}$. Los puntos de la sucesión (B_n) están en las intersecciones de estas rectas y círculos.



2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene $AB_{n+1}B_{n+2} = s(A)s(B_n)s(B_{n+1})$.
3. Para todo natural n, se define $l_n = B_nB_{n+1}$. La longitud (finita o infinita) de la spirale es la suma de la serie $\sum l_n$.
   Según la pregunta precedente, $B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1}$. Dicho de otra manera, la sucesión $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es geométrico de razón $\frac{1}{2}$, y así para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot l_0$. Se deduce que la serie $\sum l_n$ converge absolutamente, y que su suma es $l_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2l_0 = 2B_0B_1$.

Solución del ejercicio 5499 ▲007155

Completar la figura :



1. Sigamos la indicación. Sea $s = s_2 \circ s_1$. Es una similitud directa de razón 1 y de ángulo $\pi/2$. Se verifica igualmente que $s(C') = C'$, por lo tanto es la rotación de centro C' y de ángulo $\pi/2$. Por un lado se tiene $s(R) = A$, y por otro lado $s_1(Q) = C$ y $s_2(C) = P$, por lo que $s(Q) = P$. Se deduce que $\overrightarrow{AP}$ es la imagen de $\overrightarrow{RQ}$ por una rotación de $\pi/2$. Los vectores tienen por lo tanto la misma norma y son ortogonales.
2. Las rectas (AP), (BQ) y (CE) son las alturas de PQR, por lo que son concurrentes en el ortocentro de PQR. Este punto es el *punto interior de Vecten* de ABC.

Solución del ejercicio 5500 ▲007156

Sean H_{12}, H_{34}, H_{13} y H_{24} las proyecciones ortogonales de M en las rectas (M_1M_2), (M_3M_4), (M_1M_3) y (M_2M_4). Sea s la similitud directa de centro M que envía M_2 sobre M_3. La imagen por s de la recta (M_1M_2) es una recta $\mathscr{D}$ pasando por M_3 y tal que

$$(M_1M_2, \mathscr{D}) = (MM_2, MM_3).$$

Por tanto, se tiene $(MM_2, MM_3) = (M_1M_2, M_1M_3)$ porque los cuatro puntos son cocíclicos. Se deduce que $\mathscr{D} = (M_1M_3)$, y así como s envía la recta (M_1M_2) en la recta (M_1M_3). Se prueba de la misma manera que s envía la recta (M_2M_4) en la recta (M_3M_4). Como $s(M) = M$ y que las similitudes conservan los ángulos orientados y en particular la ortogonalidad, se deduce que $s(H_{12}) = H_{13}$ y que $s(H_{24}) = H_{34}$. Como una similitud conserva los cocientes de largos, finalmente se tiene $\frac{MH_{13}}{MH_{34}} = \frac{MH_{12}}{MH_{24}}$, es decir :

$$MH_{12} \cdot MH_{34} = MH_{13} \cdot MH_{24}.$$

Solución del ejercicio 5501 ▲007157

1. Sea ϕ un movimiento que preserva $\mathscr{S}$. Es una traslación o una rotación.
   (a) Si ϕ es una traslación de vector $\overrightarrow{v}$, entonces $\overrightarrow{v}$ es horizontal (si se tiene una componente vertical, entonces para n grande y $s \in \mathscr{S}$, el punto $\phi^n(s)$ tendría una ordenada que no pertenece a $[-1;1]$, lo que es imposible. Si $\overrightarrow{v}$ es horizontal, se deduce que $||\overrightarrow{v}||$ debe ser un período de seno, entonces un múltiplo de 2π. Recíprocamente, toda traslación horizontal de un múltiplo de 2π es una isometría de $\mathscr{S}$.

(b) Si ϕ es una rotación, entonces su centro es un punto de la forma $(n\pi, 0)$ para cierto $n \in \mathbb{Z}$, y el ángulo es π, dicho de otro modo ϕ es una simetría central.

Recíprocamente, las simetrías centrales de centros los puntos $(n\pi, 0)$, para $n \in \mathbb{Z}$ están en G. La composición de dos de estas simetrías es una de las traslaciones encontradas arriba.

Determinar ahora los anti-desplazamientos que conservan $\mathscr{A}$. Un anti-desplazamiento es una reflexión o una reflexión deslizada.

(a) Si ϕ es una reflexión, su eje es necesariamente vertical por un argumento similar al anterior. Entonces se deduce que el eje debe ser una recta de ecuación $x = \pi/2 + n\pi$, con n cierto entero relativo.

(b) Si ϕ es una reflexión deslizante, la dirección de deslizamiento debe ser horizontal (idem), y se deduce que la longitud de la traslación debe ser un múltiplo de π.

2. Se encuentran las traslaciones vectoriales horizontales de norma múltiplo de π y las simetrías centrales cuyo centro es de la forma $(k\pi, 0)$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 5502 ▲007158

Como una isometría es afín, conserva los baricentros. Sea P un vértice del triángulo. Como no es un baricentro de otros puntos del triángulo, su imagen por una isometría que fija el triángulo tampoco, es decir su imagen es un vértice. Se deduce que los vértices se envían a los vértices.
Por preservación del baricentro una isometría de $\mathscr{T}$ fija su isobaricentro. Como tiene al menos un punto fijo, no puede ser una traslación o una simetría deslizante.

Solución del ejercicio 5503 ▲007159

1. Las tres reflexiones a lo largo de las mediatrices del triángulo sirven, así como la identidad, y las rotaciones angulares $\pm 2\pi/3$ de centro O. Esto da seis isometrías, tres directas y tres indirectas. Se observa en al componerlas no se tiene otras isometrías. Este conjunto de seis isometrías es, por lo tanto, estable por composición, y es también estable para la inversa, es, por lo tanto un subgrupo de G. En lo que sigue, se va a demostrar que es G entero.
2. Como una isometría es afín, conserva los baricentros. Sea P un vértice del triángulo. Como no es un baricentro de otros puntos del triángulo, su imagen por una isometría que fija el triángulo tampoco, es decir su imagen es un vértice. Se deduce que los vértices se envían a los vértices.
3. De acuerdo con lo anterior, una isometría de $\mathscr{T}$ permuta los vértices. Así en toda isometría $f \in G$ se puede asociar la biyección en $\mathrm{Bij}(\{A, B, C\})$ que le corresponde. Este grupo de biyecciones es isomorfo a $\mathfrak{S}_3$, numerando los vértices de 1 a 3 (A es el primer vértice, B el segundo, etc.). Entonces se obtiene una aplicación
$$G \to \mathfrak{S}_3.$$
Es inyectiva porque una aplicación afín está completamente determinada por la imagen de tres puntos no alineados : por lo que especificar la permutación en los vértices del triángulo determina completamente la isometría del plano. Es un morfismo de grupos por construcción : componiendo las isometrías se componen las permutaciones de los vértices.
4. Para demostrar que el morfismo de la pregunta anterior es sobreyectivo, se va a utilizar la primera pregunta. Aparte de la identidad que se envía en la identidad, las dos rotaciones se envían al 3-ciclos (123) y (132). Las tres reflexiones se envían sobre las tres transposiciones, por ejemplo, la reflexión siguiendo la mediatriz de $[BC]$ se envía a la transposición (23). Se observa que una isometría es directa si y solo si la permutación asociada es par.

5. Según la pregunta anterior, H se compone de la identidad y las dos rotaciones descritas anteriormente. Este subgrupo se envía al grupo de permutaciones pares $\mathfrak{A}_3$. Es isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ por la aplicación que envía $[0]$ sobre la identidad, $[1]$ sobre (123) y $[2]$ sobre (132), y que es un morfismo de grupo biyectivo.

Solución del ejercicio 5504 ▲007160

Como una isometría es afín, conserva los baricentros. Sea P un vértice del triángulo. Como no es un baricentro de otros puntos del triángulo, su imagen por una isometría que fija el triángulo, es decir su imagen es un vértice. Se deduce que los vértices se envían a los vértices.
En lo que sigue se supone que ABC es isósceles en A. Sea f una isometría de ABC. Dado que una isometría mantiene los ángulos sin dirección y el triángulo es isósceles en A y no equilátero, se deduce que B y C son enviados ya sea a B, ya sea a C. El punto A es, por lo tanto fijo. Como una aplicación afín es determinada por la imagen de tres puntos no alineados, se concluye que el triángulo ABC solo admite dos isometrías : la identidad, y la reflexión σ siguiendo la mediatriz de $[BC]$.
El grupo $\mathrm{Isom}(\mathscr{T})$ es, por lo tanto de cardinal dos, por lo tanto isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(Un isomorfismo está dado por $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Isom}(\mathscr{T})$ la aplicación que envía $[0] = 2\mathbb{Z}$ sobre la identidad y $[1] = 1 + 2\mathbb{Z}$ sobre σ. Es una biyección, y se verifica que es un isomorfismo de grupos.)

Solución del ejercicio 5505 ▲007161

1. Demostrar primero que una isometría del cuadrado permuta los vértices.
   (a) Primera prueba : Se considera una diagonal, por ejemplo $[AC]$. Como g es una isometría, la distancia entre A y C es la misma que entre sus imágenes. Por tanto, dos puntos del cuadrado a distancia AC son necesariamente dos vértices de una diagonal del cuadrado. La isometría g permuta así los vértices.
   (b) Segunda prueba : una isometría es afín, por lo tanto conserva los baricentros, así como envía los puntos extremos (los que no son baricentros de otros puntos del cuadrado) en otros puntos extremos, y así intercambia los vértices.

   El centro O es el isobaricentro de los vértices, y una isometría que conserva los baricentros, se deduce que $g(O) = O$. No es una traslación o una reflexión deslizante, ya que estos últimos no tienen puntos fijos. Por lo tanto, es una rotación (cuyo centro es forzosamente O, pues O es fijo), o bien una reflexión (cuyo eje contiene O).
2. Sea f una isometría del cuadrado : ella envía un vértice P en uno de los otros vértices.
   (a) Si es una reflexión, su eje es la mediatriz del segmento $[Pf(P)]$, entonces el eje es necesariamente una diagonal, o bien una mediatriz de un lado del cuadrado.
   Recíprocamente, se comprueba que las reflexiones cuyos ejes son las dos diagonales o las dos mediatrices de los lados son efectivamente isometrías del cuadrado.
   (b) Si es una rotación, su centro es O, y como P se envía a otro vértice, los ángulos posibles son múltiplos de $\pi/2$. Recíprocamente, se comprueba que las rotaciones de centro O y de ángulos 0, $\pi/2$, π y $3\pi/2$ son isometrías del cuadrado.

   El grupo de las isometrías del cuadrado por lo tanto tiene ocho elementos : cuatro reflexiones y cuatro rotaciones (incluida la identidad).
3. El grupo H se compone de las cuatro rotaciones descritas anteriormente. La aplicación que a un entero n asocia la rotación de centro O y de ángulo $n\pi/2$ es un morfismo de grupos, denotado

$\phi : (\mathbb{Z},+) \to (H,\circ)$. Es sobreyectiva. Determinar su núcleo. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene :

$$n \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(n) = \mathrm{Id} \Leftrightarrow n\pi/2 \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow n \equiv 0[4] \Leftrightarrow n \in 4\mathbb{Z}.$$

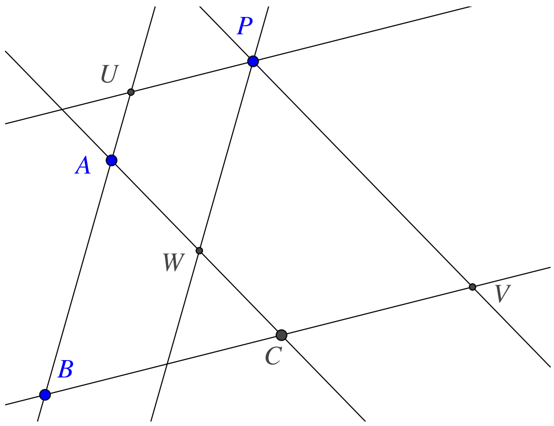
Se deduce $\ker(\phi) = 4\mathbb{Z}$. Este morfismo de grupo pasa por lo tanto al cociente por $4\mathbb{Z}$ e induce un morfismo inyectivo $\overline{\phi} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to H$ que es, por lo tanto un isomorfismo de grupos.

Solución del ejercicio 5506 ▲007162

En el rectángulo, los puntos más alejados son los vértices de las diagonales. Como una isometría conserva las distancias, se deduce que una isometría del rectángulo debe enviar una diagonal sobre otra, y así permuta los vértices. Se fija así el centro, que es el isobaricentro de los vértices, y también es una rotación o una reflexión, porque las traslaciones y las reflexiones de deslizamiento no tienen puntos fijos.
Sea P un vértice y Q su imagen por una isometría del rectángulo. Si es una reflexión, su eje es así la mediatriz de $[PQ]$, por lo que el eje puede ser una de las dos mediatrices de los lados del rectángulo (y no una mediatriz de una diagonal, porque el rectángulo no es cuadrado).
Recíprocamente, estas dos reflexiones, se denotan σ y σ', son isometrías del rectángulo.
Si es una rotación, su ángulo es 0 o bien π, porque el rectángulo no es cuadrado. Recíprocamente, estas dos rotaciones (Id y $-$Id) sirven.
El grupo de isometrías del rectángulo es isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, un isomorfismo posible es el que envía $(1,0)$ a σ y $(0,1)$ a σ' (y entonces $(1,1) = (0,1)+(1,0)$ a $\sigma \circ \sigma' = -\mathrm{Id}$.

Solución del ejercicio 5507 ▲007165

1. Basta con demostrar que $(AU,AW) = (PU,PW)$.



Por tanto, se tiene :

$$\begin{aligned}(AU,AW) &= (AB,AC) \text{ (mismas rectas)}\\ &= \pi/3 \text{ (porque es equilátero directo)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(PU,PW) &= (BC,BA) \text{ (rectas paralelas por lo tanto de ángulos iguales)}\\ &= \pi/3 \text{ (porque es equilátero directo).}\end{aligned}$$

Entonces $(AU,AW) = (PU,PW)$ y entonces $APUW$ es inscribible.
Se procede igualmente para el otro cuadrilátero.

2. Para cada cuadrilátero inscrito, se puede reducir seis igualdades de ángulos inscritos, porque existen $6 = \binom{4}{2}$ formas de elegir una cuerda. Si $APUW$ es inscribible, se tiene así las igualdades de los ángulos de rectas :

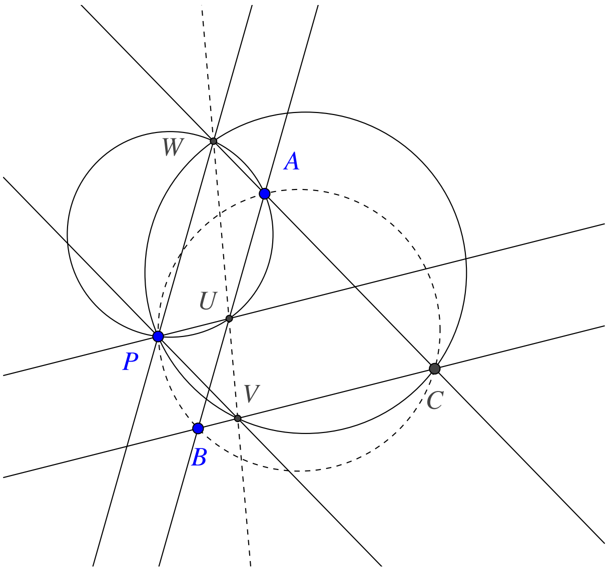
$$(UA, UP) = (WA, WP), \quad (AU, AW) = (PU, PW),$$

y sobre todo :

$$(WA, WU) = (PA, PU), \quad (AU, AP) = (WU, WP),$$
$$(UP, UW) = (AP, AW), \quad (PW, PA) = (UW, UA).$$

Los cuatro últimos son los más interesantes (y útiles para lo que sigue).
Se sigue el mismo procedimiento para el otro cuadrilátero

3. Basta con demostrar que $ABCP$ es inscribible si y solo si $(WU, WP) = (WV, WP)$. Esta última afirmación dice en efecto, que las rectas (WU) y (WV) forman el mismo ángulo con WP así son paralelos, y por lo tanto, iguales porque tienen el punto W en común.



Se tiene :

$$\begin{aligned}(WU, WP) &= (AU, AP) \text{ (pues } AUWP \text{ es inscribible)}\\ &= (AB, AP) \text{ (las mismas rectas porque } U \in (AB)\text{)}\\ &= (CB, CP) \ \underline{\text{si y solo si } ABPC \text{ es inscribible}}\end{aligned}$$

y por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}(CB, CP) &= (CV, CP) \text{ (las mismas rectas porque } V \in (BC)\text{)}\\ &= (WV, WP) \text{ (pues } PWCV \text{ es inscribible)}\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5508 ▲007167

1. Sea ρ la rotación de centro O y de ángulo $\pi/2$. Según el enunciado, se tiene $\rho(B) = A$ y $\rho(D) = C$. Entonces $[AC]$ es la imagen de $[AD]$ por ρ, de lo que se deduce que $(AC) \perp (BD)$ y que $AC = BD$.

2. El cuadrilátero $IJKL$ es siempre un paralelogramo, incluso sin hipótesis en $ABCD$ (es el teorema de Varignon). En efecto, por el teorema de Tales (o simplemente el teorema del punto medio) :

$$\overrightarrow{IL} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}.$$

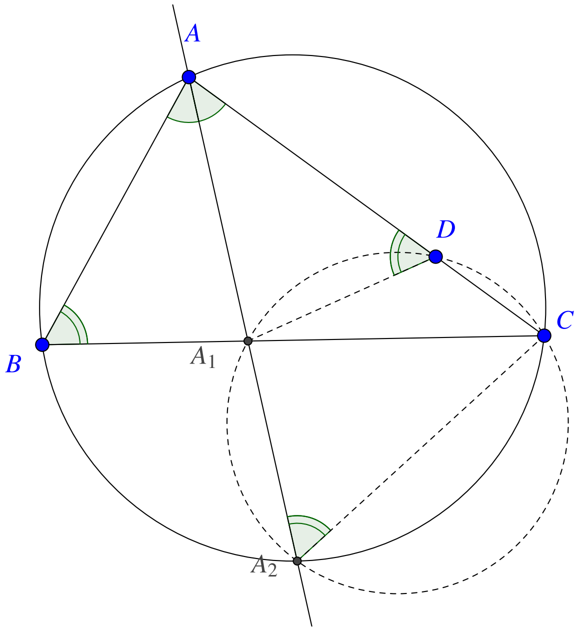
Esto significa que los lados $[IL]$ y $[JK]$ tienen la misma longitud y son paralelos, por lo tanto $IJKL$ es un paralelogramo. Para ver que es un cuadrado, observar que se demuestra igualmente que

$$\overrightarrow{IJ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK},$$

y de acuerdo a la primera pregunta, $(AC)\perp(BD)$ y que $AC = BD$, por lo tanto $IJKL$ es un paralelogramo con un ángulo recto y lados consecutivos de igual longitud. Es entonces un cuadrado.

Solución del ejercicio 5509 ▲007168

1. Por construcción, la recta Δ es la altura y la mediana de ABD. Por lo tanto, el triángulo es isósceles en A y Δ es igualmente su bisectriz, lo que demuestra que $\widehat{BAA_1} = \widehat{A_1AD}$ y así como $D \in (AC)$.
2. Es suficiente probar que $(A_2A_1, A_2C) = (DA_1, DC)$.



Por lo tanto se tiene :

$$\begin{aligned}
(A_2A_1, A_2C) &= (A_2A, A_2C)\\
&= (BA, BC) \text{ (pues } ABCA_2 \text{ es inscribible)}\\
&= (BA, BA_1) \text{ (mismas rectas)}\\
&= (DA, DA_1) \text{ (por reflexión según } \Delta)\\
&= (DC, DA_1) \text{ (mismas rectas)},
\end{aligned}$$

lo que faltaba demostrar.

3. Se observa que $AB = AD$. Por otra parte, es suficiente demostrar que
$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$
La cuestión precedente demuestra que los triángulos ADA_1 y AA_2C son (inversamente) semejantes, porque tienen dos (y así tres) ángulos comunes. Por lo tanto, las proporciones entre los lados son iguales, es decir precisamente
$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$
Observación : si se conoce la noción de potencia de un punto con respecto a un círculo, se puede concluir más rápido : los dos productos iguales son la potencia de A, con respecto al círculo A_1A_2CD.

Solución del ejercicio 5562 ▲007505

1. Como la suma de las masas $2+1$ es no nula, el baricentro está bien definido. La abscisa de G es $\frac{2\times(-2)+1\times 4}{2+1} = 0$ y la ordenada $\frac{2\times 1+1\times 4}{2+1} = 2$.
2. $2GA^2 + GB^2 = 2((-2)^2 + (1-2)^2) + (4^2 + (4-2)^2) = 30$.
3. Sea M un punto del plano P.
$$\begin{aligned}2MA^2 + MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \left\langle \overrightarrow{MG}, 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} \right\rangle + 2\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 \\ &= 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2.\end{aligned}$$
4. Sea M un punto del plano P.
$$\begin{aligned}M \in \mathscr{L} &\iff 2MA^2 + MB^2 = 42 \iff 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2 = 42 \\ &\iff 3MG^2 + 30 = 42 \iff MG^2 = 4.\end{aligned}$$
El conjunto $\mathscr{L}$ es, por lo tanto el círculo de centro G y de radio 2.

Solución del ejercicio 5563 ▲007506

a. $z \mapsto 3z+4$ no representa una isometría debido al factor 3.

b. $z \mapsto 3\bar{z}+4$ no representa una isometría debido al factor 3.

c. $z \mapsto \bar{z}+4$ representa una isometría, indirecta (presencia de la conjugación). Se trata de la reflexión con respecto al eje de las abscisas $z \mapsto \bar{z}$ compuesto por la traslación vectorial $4\overrightarrow{i}$ en la dirección del eje de abscisas. Entonces es una simetría deslizada.

d. $z \mapsto i\bar{z}+4$ representa una isometría, indirecta (presencia de la conjugación). Se trata de la reflexión s, con respecto al eje de abscisas $z \mapsto \bar{z}$ compuesto por $z \mapsto iz$, la rotación r de centro O y de ángulo $+\frac{\pi}{2}$, luego por la traslación t de vector $4\overrightarrow{i}$. Se puede escribir $r \circ s = (s' \circ s) \circ s = s'$, donde s' es la reflexión con respecto a la recta d' de ecuación $y = x$. Luego se descompone $4\overrightarrow{i} = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + 2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ como suma de un vector $\overrightarrow{v}_2 := 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ director de d' y de un vector $\overrightarrow{v}_1 := 2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ normal a d'. Se deduce $t \circ s' = t_{\overrightarrow{v}_2} \circ t_{\overrightarrow{v}_1} \circ s' = t_{\overrightarrow{v}_2} \circ s''$, donde s'' es la reflexión con respecto a la recta $d'' = d' + \frac{\overrightarrow{v}_1}{2}$, paralelo a d'. Ahora, $t \circ r \circ s = t \circ s' = t_{\overrightarrow{v}_2} \circ s''$. Como $\overrightarrow{v}_2$ es paralela a d'', Se trata de una simetría deslizante.

Solución del ejercicio 5564 ▲007507

1. Sea A, B, C son tres puntos distintos de un plano euclidiano afín $\mathscr{P}$. La suma de los ángulos de vectores se reescribe por simetría central con respecto a C como

$$((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))+((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}))+((\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}))=((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))+((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}))+((-\overrightarrow{CA},-\overrightarrow{CB}))=$$
$$((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))+((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}))+((\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}))=((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}))+((\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}))+((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}))=((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}))$$

es decir, el ángulo plano.

2. Sea $\mathscr{C}$ un círculo de $\mathscr{P}$ y A un punto de $\mathscr{C}$. Sea $\mathscr{C}'$ la imagen por una rotación r de centro A del círculo $\mathscr{C}$. Sea B el otro punto de intersección de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$. Sea D un punto de $\mathscr{C}$ diametralmente opuesto a A sobre $\mathscr{C}$. Sea $D' = r(D)$ su imagen por r. Sea O el centro de $\mathscr{C}$ y O' el centro de $\mathscr{C}'$. Como D pertenece a (AO), el punto $D' = r(D)$ pertenece a $r((AO)) = (A'O')$. Entonces $[A'D']$ es un diámetro de $\mathscr{C}'$. Como B pertenece a $\mathscr{C}$ y como $[AD]$ es un diámetro de $\mathscr{C}$, la recta (BD) es ortogonal a (AB). Igualmente, como B pertenece a $\mathscr{C}'$ y como $[AD']$ es un diámetro de $\mathscr{C}$, la recta (BD') es ortogonal a (AB). En consecuencia, las rectas (BD) y (BD') son coincidentes y D, D' y B están alineados.

3. Sea M un punto cualquiera de $\mathscr{C}$. En los triángulos BAM' y BAM

$$((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BA}))+((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}))+((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})) \quad \text{y} \quad ((\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}))+((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}))+((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}))$$

son dos ángulos planos. La suma,

$$((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BM}))+((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}))+((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}))+((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}))$$

es un ángulo plano.

Por la propiedad de los ángulos inscritos, $((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}))=((\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'B}))$ y $((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}))=((\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}))$. En el triángulo ADD', se encuentra que

$$((\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'B}))+((\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}))$$

y la diferencia de un ángulo plano y de $((\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}))=((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}))$ el ángulo de rotación. En consecuencia, $((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BM}))$ es un ángulo plano y M, $M'=r(M)$ y B están alineados.

Solución del ejercicio 5565 ▲007508

1. La matriz A de la forma bilineal simétrica dada en coordenadas por

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y$$

es

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$$

2. Se encuentra que $e_1 + 2e_2$ es un vector propio de A de valor propio 25 y $2e_1 - e_2$ es un vector propio de A de valor propio -5.

3. Como la matriz A es invertible, la cónica de ecuación
$$x^2+19y^2+24xy+5y=0$$
es una cónica con centro. Como los valores propios de A son de signo opuesto, se trata de una hipérbola.

Solución del ejercicio 5566 ▲007512

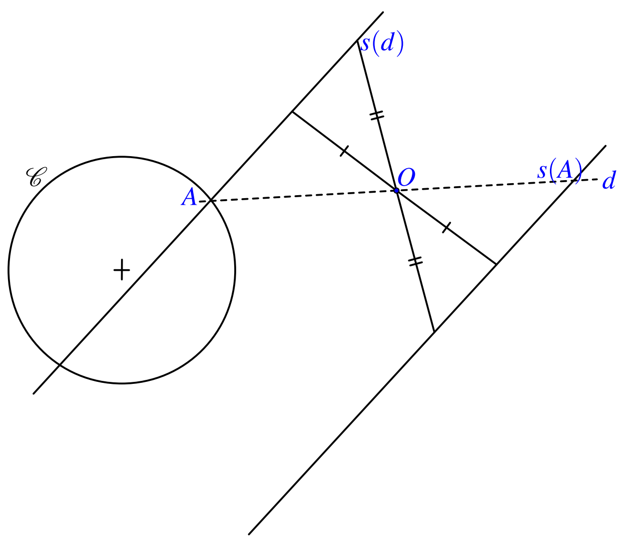
1. Como A tiene por coordenadas baricéntricas $(1,0,0)$ y el punto medio A' de $[BC]$ $(0,1,1)$, la mediana (AA') de ABC tiene por ecuación baricéntrica
$$\det\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&1&c\end{pmatrix}=c-b=0.$$
Así mismo la mediana (BB') tiene por ecuación baricéntrica $a=c$ y (CC') $a=b$.
2. Las medianas del triángulo ABC son concurrentes en el punto de coordenadas baricéntricas $(1,1,1)$.

Solución del ejercicio 5567 ▲007513

1. Los elementos del grupo de isometrías del plano que conservan un cuadrado tienen todos el centro O del cuadrado como puntos fijos. Estos son, además de la identidad, de reflexiones del eje que pasan por O y las rotaciones de centro O. Hay cuatro rotaciones Id, r, r^2, r^3, donde r es la rotación de centro O y de ángulo $+\pi/2$. Hay así cuatro reflexiones s, rs, r^2s, r^3s.
2. Dado que compuesta de reflexiones depende del orden, $(rs)s=r$ y $s(rs)=r^{-1}$, este grupo no es conmutativo.
3. El grupo de desplazamientos del plano que conservan un cuadrado es un subgrupo del grupo conmutativo de rotaciones de centro O. Por lo tanto es conmutativo.

Solución del ejercicio 5568 ▲007514

Se construye la simétrica $s(d)$, con respecto a O de la recta d. Como el simétrico de A debe estar en d, A debe estar en $s(d)$ y en el círculo $\mathscr{C}$.



---

1. Denotemos $\mathscr{R}$ el sistema de referencia inicial $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Decir que un punto M del plano tiene por coordenadas (x,y,z) en $\mathscr{R}$ significa $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
   Si $\mathscr{R}'$ designa otro sistema de referencia $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, entonces el mismo punto M tiene coordenadas (x',y',z') en $\mathscr{R}'$ significa $\overrightarrow{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$.
   La fórmula para el cambio es simplemente escribir las coordenadas de la igualdad $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ 4\\ 1\end{pmatrix} + x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}.$$
   Pero se conocen las coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en $\mathscr{R}$:
$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ 4\\ 1\end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ -4\end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$
   De donde la igualdad de cambio de sistema de referencia :
$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} x = -2 + x' + 2y' + 3z' \\ y = 4 + x' + 2y' - z' \\ z = 1 + x' - 4y' + z'. \end{cases}$$
2. En la ecuación de la recta (D) $\begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}$ se reemplaza x,y,z por la fórmula $(\mathscr{S})$ obtenida en la pregunta anterior. Se obtiene :
$$\begin{cases} \left(4 + x' + 2y' - z'\right) - \left(1 + x' - 4y' + z'\right) = 3 \\ \left(-2 + x' + 2y' + 3z'\right) + \left(4 + x' + 2y' - z'\right) = 2. \end{cases}$$
   Lo que da una ecuación de (D) en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$:
$$\begin{cases} 6y' - 2z' = 0 \\ 2x' + 4y' + 2z' = 0 \end{cases} \quad \text{o aún} \quad \begin{cases} 3y' - z' = 0 \\ x' + 2y' + z' = 0. \end{cases}$$
   En particular haciendo $(x',y',z') = (0,0,0)$ se observa que esta recta pasa por A.
3. Se obtiene la igualdad $(\mathscr{S})$ de cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ hacia $\mathscr{R}$ que se escribe :
$$\begin{cases} x + 2 = x' + 2y' + 3z' \\ y - 4 = x' + 2y' - z' \\ z - 1 = x' - 4y' + z' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} X = x' + 2y' + 3z' \\ Y = x' + 2y' - z' \\ Z = x' - 4y' + z'. \end{cases}$$
   Donde se ha denotado $X = x + 2$, $Y = y - 4$, $Z = z - 1$. Se invierte el sistema por el método de Gauss para obtener luego de los cálculos :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}\left(X + 7Y + 4Z\right) \\ y' = \frac{1}{12}\left(X + Y - 2Z\right) \\ z' = \frac{1}{12}\left(3X - 3Y\right). \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}\left(x+7y+4z-30\right) \\ y' = \frac{1}{12}\left(x+y-2z\right) \\ z' = \frac{1}{12}\left(3x-3y+18\right) \end{cases}$$

Con las matrices se hace así : el sistema $(\mathscr{S})$ se convierte en

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 5574 ▲002039

1. Denotemos P el plano de ecuación $2x+2y-z=1$. Y sea $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto cualquiera. $\overrightarrow{n}=(2,2,-1)$ es un vector normal en el plano. Se busca $p(M_0)$ perteneciendo al plano de la forma $M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned} p(M_0)\in P &\iff M_0+\lambda\cdot\overrightarrow{n}\in P \\ &\iff (x_0,y_0,z_0)+\lambda(2,2,-1)\in P \\ &\iff (x_0+2\lambda,y_0+2\lambda,z_0-\lambda)\in P \\ &\iff 2(x_0+2\lambda)+2(y_0+2\lambda)-(z_0-\lambda)=1 \\ &\iff \lambda=\frac{1-2x_0-2y_0+z_0}{9} \end{aligned}$$

Poniendo $\lambda_0=\frac{1-2x_0-2y_0+z_0}{9}$, la proyección ortogonal de M_0 sobre P es definida por $p(M_0)=(x_0+2\lambda_0,y_0+2\lambda_0,z_0-\lambda_0)$.

2. Denotemos D la recta de ecuación $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$ y sea $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto cualquiera.

Se necesitan dos vectores normales : por ejemplo $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,0,-1)$ (quién son los vectores normales en los dos planos definiendo D). Se busca el proyectado ortogonal $\pi(M_0)$ en la recta D bajo la forma $M_0+\lambda_1\overrightarrow{n_1}+\lambda_2\overrightarrow{n_2}$. Se va determinar $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ de manera que este punto pertenece a D.

$$\begin{aligned} \pi(M_0)\in D &\iff M_0+\lambda_1\overrightarrow{n_1}+\lambda_2\overrightarrow{n_2}\in D \\ &\iff (x_0,y_0,z_0)+\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(2,0,-1)\in D \\ &\iff (x_0+\lambda_1+2\lambda_2,y_0+\lambda_1,z_0+\lambda_1-\lambda_2)\in D \\ &\iff \begin{cases} (x_0+\lambda_1+2\lambda_2)+(y_0+\lambda_1)+(z_0+\lambda_1-\lambda_2)=1 \\ 2(x_0+\lambda_1+2\lambda_2)-(z_0+\lambda_1-\lambda_2)=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda_1+\lambda_2=1-x_0-y_0-z_0 \\ \lambda_1+5\lambda_2=2-2x_0+z_0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1=\frac{1}{14}\left(3-3x_0-5y_0-6z_0\right) \text{ y } \lambda_2=\frac{1}{14}\left(5-5x_0+y_0+4z_0\right) \end{aligned}$$

Así $\pi(M_0)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(2,0,-1)$, con los valores de λ_1,λ_2 obtenidos.

3. El principio es similar, veamos las etapas :

   (a) Encontrar una ecuación del plano. Un vector normal en el plano es $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = (-1,-2,-2)$. Entonces el plano es de ecuación $x+2y+2z-2=0$.

   (b) Determinar el proyectado de un punto $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ bajo la forma $M_0 + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Encontrar λ_0 de manera que $M_0 + \lambda_0 \cdot \overrightarrow{AB}$ pertenece al plano.

   (c) Se encuentra $\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)$ y $\lambda_0 = -\frac{1}{5}(x_0+2y_0+2z_0-2)$ y por lo tanto, el proyectado buscado es $p(M_0) = (x_0-\lambda_0, y_0, z_0+3\lambda_0)$.

Solución del ejercicio 5579 ▲004958

Recta paralela a (AC) pasando por $D = \mathrm{Bar}(A:1, B:-\frac{1}{3})$.

Solución del ejercicio 5580 ▲004959

Para $k=-1,-5$: plano mediador de $G = \mathrm{Bar}(A:1, B:2, C:k)$ y $I = \mathrm{Bar}(D:1, E:1)$.
Para $k \neq -1,-3,-5$: esfera de centro $O = \mathrm{Bar}(G:(3+k)^2, I:-4)$.
Para $k=-3$: esfera de centro I.

Solución del ejercicio 5581 ▲004960

$221C_1 = (949, 149, -615)$, $93C_2 = (128, -71, 397)$.

Solución del ejercicio 5582 ▲004961

$A_P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda)$, $A_Q = (1, 1-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$, $A_R = (1-\frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2})$, $A_S = (\frac{7-\lambda}{11}, -\frac{1+3\lambda}{11}, \frac{10\lambda-4}{11})$.
Coplanares $\Leftrightarrow 8\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Solución del ejercicio 5583 ▲004962

1. $\Omega : (1,1,1)$, $R = \sqrt{5}$.
2. $(ABC) : x+y+z=6$. $(ABD) : 4x-2y+z=3$. quad $(ACD) : x+4y-2z=3$. $(BCD) : 7x+y-5z=12$.
3. $$I:(a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-a-b-c = r\sqrt{3} \\ 4a-2b+c-3 = r\sqrt{21} \\ a+4b-2c-3 = r\sqrt{21} \\ 12-7a-b+5c = r\sqrt{75} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 9-2\sqrt{7} \\ 2b = 6-\sqrt{7} \\ 2c = 3 \\ 2r = \sqrt{21}-2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 5584 ▲004963

$H : (-18/54, 8/54, -28/54)$, $K : (7/54, 13/54, -33/54)$.

Solución del ejercicio 5585 ▲004964

$H : (-2/19, 28/19, 35/19)$, $K : (-6/19, 40/19, 23/19)$, $d = 4\sqrt{19}$.

Solución del ejercicio 5586 ▲004965

— Sean B', C' las proyecciones ortogonales de C, D sobre (AB). El triángulo ABC tiene por área $\frac{1}{2}AB \cdot CC'$. El triángulo ABD tiene por área $\frac{1}{2}AB \cdot DD'$. Como estos triángulos tienen la misma área entonces $CC' = DD'$.

— Denotemos I la mitad de $[C,D]$ y I' su proyectado ortogonal sobre (AB). Por definición la recta (II') es perpendicular a (AB). Demostrar que es también perpendicular a (CD). Por Pitágoras en $I'CC'$: $I'C^2 = I'C'^2 + CC'^2$. Por Pitágoras en IDD' : $I'D^2 = I'D'^2 + DD'^2$. Como I es el punto medio de $[C,D]$, luego por proyección ortogonal, I' es el punto medio de $[C',D']$, por lo tanto $I'C' = I'D'$. Por otra parte $CC' = DD'$ y así $I'C = I'D$. El triángulo $I'CD$ es isósceles en I', entonces (II') es perpendicular a (CD). Balance : se ha demostrado que la perpendicular común a (AB) y (CD) es (II') y por lo tanto, pasa por el punto medio de $[C,D]$.

— Se repite el mismo razonamiento, esta vez proyectando sobre (CD), para encontrar que la perpendicular común a (AB) y (CD) pasa por el medio J de $[A,B]$. Como la perpendicular común es única e interseca (AB) y I' y en J, entonces $I' = J$.
Balance : la perpendicular común a (AB) y (CD) es la recta (IJ), donde I es el punto medio de $[C,D]$ y J la mitad de $[A,B]$.

— Se considera la rotación de eje (IJ) (rotación de ángulo π). Entonces A se envía en B, C se envía en D. El segmento $[A,C]$ se envía en $[B,D]$. Una rotación conserva las longitudes, por lo tanto $AC = BD$. Conclusión : los dos lados opuestos AC y BD tienen la misma longitud.

Solución del ejercicio 5587 ▲004966

$a/\sqrt{2}$.

Solución del ejercicio 5588 ▲004967

$d^2 = \frac{(x+2y-z+3)^2}{6} + \frac{(3x+3z+11)^2}{9}$.

Solución del ejercicio 5589 ▲004968

$$\begin{cases} 14x' = 13x - 2y - 3z + 4 \\ 14y' = -2x + 10y - 6z + 8 \\ 14z' = -3x - 6y + 5z + 12. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 5590 ▲004969

$D' : (9/53, 40/53, -117/53)$, $E' : (-14/53, 32/53, 23/53)$, $\overrightarrow{u} : (23, 8, -140)$.

Solución del ejercicio 5591 ▲004970

$2x - 7y - z = -1$.

Solución del ejercicio 5594 ▲004973

$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2(\pi/5)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Solución del ejercicio 5595 ▲004974

$x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 9$.

Solución del ejercicio 5596 ▲004975

Sean A, B dos puntos de S distintos. Intersección de S, con un plano que pasa A y $B \Rightarrow S$ es la unión de círculos que pasan por A y B. Se considera el plano mediador de $[A, B]$, P que corta S siguiendo un círculo $\mathscr{C}$ de centro O. El plano $Q = (OAB)$ corta S siguiendo un círculo $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ tienen en común los puntos C, D. (CD) es mediatriz de $[A, B]$ en Q así es un diámetro de $\mathscr{C}'$ y pasa por O, así es también diámetro de $\mathscr{C}$. Por lo tanto, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ son dos circunferencias con el mismo centro y el mismo radio en planos perpendiculares. Considerando los planos cortando P y Q en ángulos rectos, se obtiene que S es una esfera de centro O.

Solución del ejercicio 5597 ▲004976

Sean $D, \overrightarrow{u}, \alpha$ el eje, el vector, y el ángulo de g. Entonces $f \circ g \circ f^{-1}$ es el tornillo del eje $f(D)$, de vector $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$, y de ángulo α.
Se quiere que este sea g, por lo tanto D es invariante por f, lo que implica D sea el eje de f.
Recíprocamente, si f y g tienen el mismo eje, entonces conmutan.

Solución del ejercicio 5598 ▲004977

Sea $v = \sigma_1 \circ \sigma_2$. (tornillo alrededor de la perpendicular común a D_1 y D_2)
$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ es un $\frac{1}{2}$-vuelta $\Rightarrow v \circ \sigma_3 \circ v \circ \sigma_3 = \mathrm{Id}$, por lo tanto $\sigma_3 \circ v \circ \sigma_3^{-1} = v^{-1}$.
El eje de v es, por lo tanto invariante por σ_3, entonces paralelo o perpendicular a D_3. Si es paralelo, entonces $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ es aún un tornillo $\Rightarrow$ no sirve.

Solución del ejercicio 5599 ▲004978

$d_{AD}(D) = D, \quad d_{AC}(D) = D'$ tal que $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DC}$.
La recta (AD') es paralela a (DC) que es perpendicular a (AB).
Así $f(D) = d_{AB}(D') = D''$ tal que $\overrightarrow{AD''} = \overrightarrow{CD}$.
$d_{AD}(D'') = C, \quad d_{AC}(C) = C, \quad f(D'') = d_{AB}(C) = C'$ tal que $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB}$.
$d_{AD}(C') = C''$ tal que $\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{BC}, \quad d_{AC}(C'') = B, \quad f(C') = d_{AB}(B) = B$.
$d_{AD}(B) = B'$ tal que $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BD}, \quad d_{AC}(B') = B''$ tal que $\overrightarrow{AB''} = \overrightarrow{DB}, \quad f(B) = d_{AB}(B'') = D$.
Sea E el simétrico de C, con respecto a (BD) : f es el $\frac{1}{4}$-vuelta alrededor de (AE) enviando D sobre B.

Solución del ejercicio 5600 ▲004979

ABC equilátero : 12, $\quad ABC$ isósceles : 4, $\quad ABC$ escaleno : 2.

Solución del ejercicio 5601 ▲004980

1. 24 elementos :

identidad	(1)
rotaciones alrededor del eje de una cara	(8)
simetrías % plano mediador de una arista	(6)

$\frac{1}{2}$-vuelta alrededor de la perpendicular común a dos aristas opuestas		(3)
$\frac{1}{4}$-vuelta alrededor de la perpendicular $\cdots +$ simetría % plano médian		(6)

2. 48 elementos :

identidad		(1)
simetrías	% plano mediano de una cara	(3)
	% plano diagonal de una cara	(6)
	% eje de una cara	(3)
	% eje de una arista	(6)
	% dentro del cubo	(1)
rotación	$\pm 2\pi/3$ alrededor de una diagonal	(8)
	$\pm\pi/2$ alrededor del eje de una cara	(6)
simetrías-rotaciones	$\pm\pi/2$ % eje cara	(6)
	$\pm\pi/3$ % diagonal	(8)

3. Si las rectas no son perpendiculares :

identidad	(1)
$\frac{1}{2}$-vuelta alrededor de la perpendicular común	(1)
$\frac{1}{2}$-vuelta alrededor de una bisectriz	(2)

Si son perpendiculares, también existe :

simetría % plano que contiene una recta y la perpendicular común	(2)
simetría-$\frac{1}{4}$-vuelta alrededor de la perpendicular común	(2)

Solución del ejercicio 5602 ▲004981

La aplicación $M_1 \mapsto M_4$ es afín por lo tanto es una homotecia-traslación (dim 1) y el coeficiente de homotecia es estrictamente menor que 1.

Solución del ejercicio 5603 ▲005501

• $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ tiene coordenadas $(2,-3,-4)$. Este vector no es nulo. Así, los puntos O, A y B no están alineados y el plano (OAB) está bien definido. Este es el plano que pasa por O y de vector normal $\overrightarrow{n}(2,-3,-4)$. Una ecuación cartesiana del plano (OAB) es, por lo tanto $2x-3y-4z=0$.
• $\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ tiene coordenadas $(4,-9,-1)$. Este vector no es nulo. Así, los puntos O, C y D no están alineados y el plano (OCD) está bien definido. Este es el plano que pasa por O y de vector normal $\overrightarrow{n}'(4,-9,-1)$. Una ecuación cartesiana del plano (OAB) es, por lo tanto $4x-9y-z=0$.
•$-\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ tiene coordenadas $(33,14,6)$. Este vector no es nulo y se sabe que los planos (OAB) y (OCD) son secantes en una recta, es decir la recta que pasa por $O(0,0,0)$ y de vector director $(33,14,6)$. Un sistema de ecuaciones cartesianas de esta recta es $\begin{cases} 2x-3y-4z=0 \\ 4x-9y-z=0. \end{cases}$

Solución del ejercicio 5604 ▲005502

Los vectores $(2,-3,1)$ y $(1,2,0)$ no son colineales, de manera que (P) es un plano. Encontrar entonces una ecuación cartesiana de (P)

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}x=1+2\lambda+\mu\\y=-1-3\lambda+2\mu\\z=1+\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}\lambda=z-1\\x=1+2(z-1)+\mu\\y=-1-3(z-1)+2\mu\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}\lambda=z-1\\\mu=x-2z+1\\y=-1-3(z-1)+2(x-2z+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2x+y+7z-4=0.$$

Sea entonces $M(2+3t,-t,1+t)$, $t\in\mathbb{R}$, un punto de (D)

$$M\in(P)\Leftrightarrow -2(2+3t)+(-t)+7(1+t)-4=0\Leftrightarrow 0\times t-1=-1=0.$$

Este último sistema no tiene solución y por lo tanto, $(D)\cap(P)=\varnothing$. La recta (D) es estrictamente paralela al plano (P).

$$M(x,y,z)\in(P)\cap(P')\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\eta\\z=\nu+\eta\\-2x+y+7z-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\eta\\z=\nu+\eta\\-2(-5-\nu)+(3+\nu+3\eta)+7(\nu+\eta)-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(\nu,\eta)\in\mathbb{R}^2/\begin{cases}\eta=-\nu-\frac{9}{10}\\x=-5-\nu\\y=3+\nu+3\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\\z=\nu+\left(-\nu-\frac{9}{10}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\exists\nu\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-\nu-5\\y=-2\nu+\frac{3}{10}\\z=-\frac{9}{10}.\end{cases}$$

(P) y (P') son, por lo tanto, secantes en la recta que pasa por el punto $\left(-5,\frac{3}{10},-\frac{9}{10}\right)$ y de vector director $(1,2,0)$.

Solución del ejercicio 5605 ▲005503

Sea r la rotación deseada. Denotemos u el vector $\frac{1}{3}(1,2,2)$ (u es unitario) y θ el ángulo de r. r es la rotación del ángulo θ alrededor del vector unitario u. Se sabe que para todo vector v de $\mathbb{R}^3$

$$r(v)=(\cos\theta)v+(1-\cos\theta)(v\cdot u)u+(\operatorname{sen}\theta)u\wedge v \qquad (*)$$

y en particular que $[v,r(v),u]=\operatorname{sen}\theta\|v\wedge u\|^2$. La igualdad $r(j)=k$ proporciona

$$\operatorname{sen}\theta\|j\wedge u\|^2=[j,r(j),u]=[u,j,k]=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

Como $u\wedge j=\frac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j=-\frac{2}{3}j+\frac{1}{3}k$, se tiene $\|j\wedge u\|^2=\frac{5}{9}$ y entonces $\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{5}$. La igualdad $r(j)=k$ proporciona enseguida

$$k=(\cos\theta)j+(1-\cos\theta)\times\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{3}(i+2j+2k)+\tfrac{3}{5}\times\tfrac{1}{3}(i+2j+2k)\wedge j$$

analizando la componente en i, se deduce que $\frac{2}{9}(1-\cos\theta)-\frac{2}{5}=0$ y entonces $\cos\theta=-\frac{4}{5}$. Así, para todo vector $v=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, la igualdad $(*)$ se escribe

$$\begin{aligned}
r(v)&=-\frac{4}{5}(x,y,z)+\frac{9}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(x+2y+2z)(1,2,2)+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}(2z-2y,2x-z,-2x+y)\\
&=\frac{1}{5}(-4x+(x+2y+2z)+(2z-2y),-4y+2(x+2y+2z)+(2x-z),-4z+2(x+2y+2z)+(-2x+y))\\
&=\frac{1}{5}(-3x+4z,4x+3z,5y)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&0&4\\4&0&3\\0&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matriz buscada es

$$\boxed{\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&0&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&0&\frac{3}{5}\\0&1&0\end{pmatrix}.}$$

Solución del ejercicio 5616 ▲007516

Se considera el isobaricentro G de puntos A,B,C,D. Por asociatividad, G es el baricentro de los baricentros I de $(A,1),(B,1)$ y J de $(C,1),(D,1)$ afectada por las masas $(I,1+1)$ y $(J,1+1)$. En consecuencia, G está en medio de I,J. En particular, las rectas que unen los puntos medios de las caras opuestas del tetraedro son concurrentes en G.

Solución del ejercicio 5617 ▲007517

Una base ortonormada del subespacio $\text{vect}(e_1,e_1+e_2+e_3)$ es $f_1=e_1,f_2=\frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}$. Para completarlo en una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$, es suficiente considerar $f_3=f_1\wedge f_2=\frac{e_3-e_2}{\sqrt{2}}$.

Solución del ejercicio 5618 ▲005540

Se denota $\mathscr{C}$ la curva considerada.

1. (a) $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice O, de eje focal (Ox), parámetro $p=\frac{1}{2}$ giro hacia los x positivos. Su foco es el punto $F\left(\frac{1}{4},0\right)$ y su directriz es $\mathscr{D}:\ x=-\frac{1}{4}$.

   (b) $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice O, de eje focal (Ox), parámetro $p=\frac{1}{2}$ giro hacia los x negativos. Su foco es el punto $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ y su directriz es $\mathscr{D}:\ x=\frac{1}{4}$.

   (c) $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice O, de eje focal (Oy), parámetro $p=\frac{1}{2}$ giro hacia los y positivos. Su foco es el punto $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ y su directriz es $\mathscr{D}:\ y=-\frac{1}{4}$.

   (d) $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice O, de eje focal (Oy), parámetro $p=\frac{1}{2}$ giro hacia los y negativos. Su foco es el punto $F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ y su directriz es $\mathscr{D}:\ y=\frac{1}{4}$.

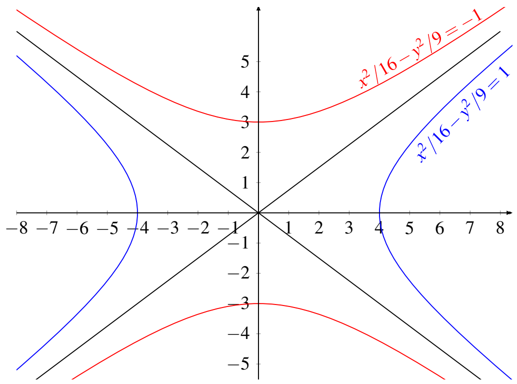
2. (a) $\mathscr{C}$ es una elipse, de centro O, con $a=5>3=b$ y por lo tanto, de eje focal (Ox). Sus vértices son $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ y $B'(0,-3)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$ y por lo tanto, los focos son $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$. La excentricidad e vale $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$. La directriz tiene para las respectivas ecuaciones $x=\frac{a}{e}=\frac{25}{4}$ y $x=-\frac{25}{4}$.

   (b) $\mathscr{C}$ es una elipse, de centro O, con $a=3<5=b$ y por lo tanto, de eje focal (Oy). Sus vértices son $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B(0,5)$ y $B'(0,-5)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=4$ y por lo tanto, los focos son $F(0,4)$ y $F'(0,-4)$. La excentricidad e vale $e=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}$. La directriz tiene para las respectivas ecuaciones $y=\frac{b}{e}=\frac{25}{4}$ y $y=-\frac{25}{4}$.

   (c) $x^2+2y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ es una elipse, de centro O, con $a=1>\frac{1}{\sqrt{2}}=b$ y por lo tanto, de eje focal (Ox). vértices son $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $B'\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y por lo tanto, los focos son $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$. La excentricidad e vale $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. La directriz tiene para las respectivas ecuaciones $x=\frac{a}{e}=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$.

3. (a) $\mathscr{C}$ es una hipérbola de centro O y de eje focal (Ox), con $a=4$ y $b=3$ y entonces $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, luego $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Los vértices son $A(4,0)$ y $A'(-4,0)$ y los focos son $F(5,0)$ y $F(-5,0)$. Las directrices son las rectas de las respectivas ecuaciones $x=\frac{a}{e}=\frac{16}{5}$ y $x=-\frac{16}{5}$. Las asíntotas son las rectas de las respectivas ecuaciones $y=\frac{3}{4}x$ y $y=-\frac{3}{4}x$.

   (b) $\mathscr{C}$ es una hipérbola de centro O y de eje focal (Oy), con $a=4$ y $b=3$ y entonces $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, luego $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{3}$. Los vértices son $B(0,3)$ y $B'(0,-3)$ y los focos son $F(0,5)$ y $F(0,-5)$. Las directrices son las rectas de las respectivas ecuaciones $y=\frac{b}{e}=\frac{9}{5}$ y $y=-\frac{9}{5}$. Las asíntotas son las rectas de las respectivas ecuaciones $y=\frac{3}{4}x$ y $y=-\frac{3}{4}x$.



   (c) $\mathscr{C}$ es una hipérbola de centro O y de eje focal (Ox), con $a=b=1$ y entonces $c=\sqrt{2}$, luego $e=\sqrt{2}$. Los vértices son $A(1,0)$ y $A'(-1,0)$ y los focos son $F(\sqrt{2},0)$ y $F(-\sqrt{2},0)$. Las directrices son las rectas de las respectivas ecuaciones $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Las asíntotas son las rectas de las respectivas ecuaciones $y=x$ y $y=-x$.

Solución del ejercicio 5619 ▲005541

---

1. (a) $y=x^2+x+1 \Leftrightarrow y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice $S\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$,

de eje focal la recta de ecuación $x=-\frac{1}{2}$, parámetro $p=\frac{1}{2}$ y por lo tanto, de foco $F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2},1\right)$ y directriz de ecuación $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

(b) $y^2+y-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2x=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{1}{8}\right)$. $\mathscr{C}$ es la parábola de vértice $S\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, de eje focal la recta de ecuación $y=-\frac{1}{2}$, parámetro $p=1$ y por lo tanto, de foco $F\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{8},-\frac{1}{2}\right)$ y directriz de ecuación $x=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$.

(c) $y=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ y $y\geqslant 0$. $\mathscr{C}$ es una semi-parábola de vértice $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, de eje focal (Ox), parámetro $p=1$ y por lo tanto, de foco $F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},0\right)=(-1,0)$ y directriz de ecuación $x=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$.

2. (a) $x^2+x+2y^2+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2}+\dfrac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=1$. $\mathscr{C}$ es una elipse.

Centro : $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. $a=\sqrt{\frac{3}{8}}>\frac{\sqrt{3}}{4}=b$. Eje focal : $y=-\frac{1}{4}$. Vértices : $A\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Focos : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ y $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$. Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $y=-2\sqrt{-x^2+x} \Leftrightarrow y^2=4(-x^2+x)$ y $y\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+y^2=1$ y $y\leqslant 0$. $\mathscr{C}$ es una semi-elipse. Centro : $\left(\frac{1}{2},0\right)$. $a=\frac{1}{2}<1=b$. Eje focal : $x=0$. Vértices : $A(1,0)$, $A'(0,0)$ y $B'\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Focos : $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $x^2-y^2+x+y+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-1$. $\mathscr{C}$ es una hipérbola de centro $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y de eje focal la recta de ecuación $x=-\frac{1}{2}$. $a=b=1$. Vértices : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, luego $e=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Focos : $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$ y $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Asíntotas : $y=x+1$ y $y=-x$.

Solución del ejercicio 5620 ▲005542

1. Se denota $\mathscr{H}$ la hipérbola considerada. Se gira $\frac{\pi}{4}$. Por esto, se establece $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y). \end{cases}$

Se tiene entonces

$$y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow xy=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}(X-Y)(X+Y)=1\Leftrightarrow\frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Así, si $\mathscr{R}$ es el sistema de referencia ortonormado inicial $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ y $\mathscr{R}'$ es el sistema de referencia $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, donde $\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ y $\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$, una ecuación de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{R}$ es $xy=1$ y una ecuación de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{R}'$ es $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. Se obtiene $a=b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$ y $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. Las fórmulas de cambio de sistema de referencia se escriben $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{cases}$ y las fórmulas inversas se escriben

$\begin{cases}X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\end{cases}$ (en lo que sigue, las coordenadas de un punto en $\mathscr{R}'$ se denotan con $\mathscr{R}'$ en índice mientras que las coordenadas en $\mathscr{R}$ se denotan sin escribir $\mathscr{R}$ en índice).

$\boxed{\text{Centro O(0,0)}}$.

Asíntotas : bien sûr, los ejes (Ox) y (Oy).

Eje focal : el eje (OX) o incluso la recta de ecuación $y=x$ (en $\mathscr{R}$).

Vértices : $A(\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$, $A'(-\sqrt{2},0)_{\mathscr{R}'}$ y entonces $\boxed{\text{Vértices A(1,1) y A'(-1,-1)}}$.

Focos : $F(2,0)_{\mathscr{R}'}$, $F'(-2,0)_{\mathscr{R}'}$ y entonces $\boxed{\text{Focos } F(\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ y } F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2}).}$

Directrices : las rectas de ecuaciones $X=\pm\frac{a}{e}=\pm1$ y por lo tanto, en $\mathscr{R}$, las rectas de las respectivas ecuaciones $x+y=\pm\sqrt{2}$.

2. El discriminante de esta cónica vale $41\times34-12^2=1250>0$. Es por lo tanto una cónica del género elipse. Se establece $\begin{cases}x=\cos(\theta)X-\operatorname{sen}(\theta)Y\\ y=\operatorname{sen}(\theta)X+\cos(\theta)Y\end{cases}$ y se determina θ (o mejor $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$) de manera que el término en XY desaparece. Pero, el coeficiente de XY en

$$\begin{aligned}41x^2-24xy+34y^2=&\,41(\cos(\theta)X-\operatorname{sen}(\theta)Y)^2-24(\cos(\theta)X-\operatorname{sen}(\theta)Y)(\operatorname{sen}(\theta)X+\cos(\theta)Y)\\&+34(\operatorname{sen}(\theta)X+\cos(\theta)Y)^2,\end{aligned}$$

vale

$$-82\cos\theta\operatorname{sen}\theta-24(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)+68\cos\theta\operatorname{sen}\theta=-24(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)-14\cos\theta\operatorname{sen}\theta.$$

Este coeficiente es cero si y solo si $-12\cos^2\theta+12\operatorname{sen}^2\theta-7\cos\theta\operatorname{sen}\theta=0$ o aún, después de dividir por $\cos^2\theta$, $12\tan^2\theta-7\tan\theta-12=0$. Se puede entonces tomar $\tan\theta=\frac{4}{3}$, luego se puede tomar $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen}\theta=\cos\theta\tan\theta=\frac{3}{5}\frac{4}{3}=\frac{4}{5}$.

Pongamos por lo tanto $\begin{cases}x=\frac{3X-4Y}{5}\\ y=\frac{4X+3Y}{5}\end{cases}\quad(*)$.

Se tiene entonces

$$\begin{aligned}41x^2-24xy+34y^2-106x+92y+74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2-24(3X-4Y)(4X+3Y)+34(4X+3Y)^2\\ &\quad -530(3X-4Y)+460(4X+3Y)+1850)\\ &= \frac{1}{25}(625X^2+1250Y^2+250X+3500Y+1850)\\ &= 25\left(X^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25}\right).\end{aligned}$$

Una ecuación de la curva en el sistema de referencia definido por $(*)$ es, por lo tanto $x^2+2Y^2+\frac{2}{5}X+\frac{28}{5}Y+\frac{74}{25}=0$. Luego,

$$X^2+2Y^2+\tfrac{2}{5}X+\tfrac{28}{5}Y+\tfrac{74}{25}=0 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+2\left(Y+\tfrac{7}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(X+\tfrac{1}{5}\right)^2+\frac{\left(Y+\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

$\mathscr{C}$ es una elipse. Se encuentra $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$ $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$, luego Centro $\Omega(1,-1)$.
Eje focal : $3x+4y+1=0$ y eje no focal : $-4x+3y+7=0$.
Vértices : $A\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5},-\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{5},-1+\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ y $B'\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{5},-1-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.
Focos : $F\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ y $F'\left(\frac{9}{5},-\frac{8}{5}\right)$.
Directrices : $4x-3y+3=0$ y $4x-3y+17=0$.

3. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. Se define así $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\\ Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\end{cases}$ o aún $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)\end{cases}$.

$$\begin{aligned}x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0 &\Leftrightarrow 2Y^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X+Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(-X+Y)+1=0\\ &\Leftrightarrow 2\left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2+\frac{5}{\sqrt{2}}X+\frac{15}{16}=0\\ &\Leftrightarrow \left(Y+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X+\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ es una parábola con parámetro $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$.
Vértice : $S\left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)$.
Eje focal : $x+y+\frac{1}{4}=0$.
Foco : $F\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$.
Directriz : $x-y-\frac{1}{4}=0$.

4. $\mathscr{C}$ es el punto de intersección de las rectas de ecuación $x-y+1=0$ y $x+y-1=0$, es decir el punto de coordenadas $(0,1)$.
5. $x^2+y^2-3x-y+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ y entonces $\mathscr{C}$ es vacío.
6. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$ es una ecuación del círculo de diámetro $[AB]$, donde $A(0,2)$ y $B(1,3)$.

7. Si se escribe $\begin{cases} X = x+y+1 \\ Y = x-y+3 \end{cases}$, se efectúa un cambio de sistema de referencia no ortonormado. En el nuevo sistema de referencia, $\mathscr{C}$ admite por ecuación cartesiana $XY = 3$ y entonces $\mathscr{C}$ es una hipérbola. Con el cambio de sistema de referencia realizado, se obtienen directamente los elementos afines de esta hipérbola pero no sus elementos métricos : hipérbola de asíntotas las rectas de ecuaciones $x+y+1=0$ y $x-y+3=0$ y por lo tanto, de centro $(-2,1)$. Para obtener el eje focal, l'excentricidad, los focos y la directriz es necesario hacer un cambio de referencia ortonormada.

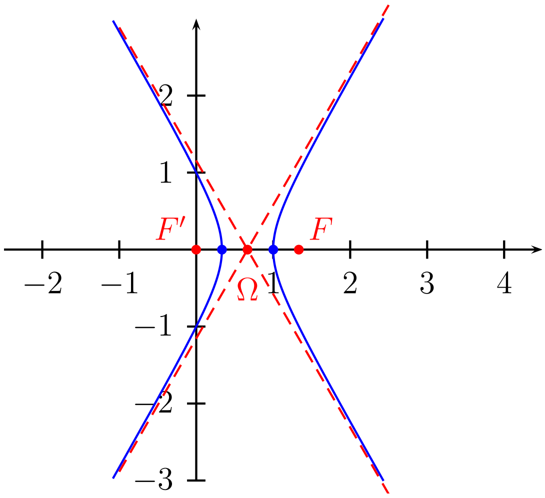
8. Si se escribe $\begin{cases} X = 2x+y+1 \\ Y = 3x+3y \end{cases}$, $\mathscr{C}$ admite por ecuación cartesiana en el nuevo marco $Y = X^2$ y entonces $\mathscr{C}$ es una parábola. Para obtener estos elementos métricos, es necesario un cambio de referencia ortonormado.

Solución del ejercicio 5621 ▲005543

Estudiar las curvas de ecuación polar (en un sistema de referencia ortonormado directo) es

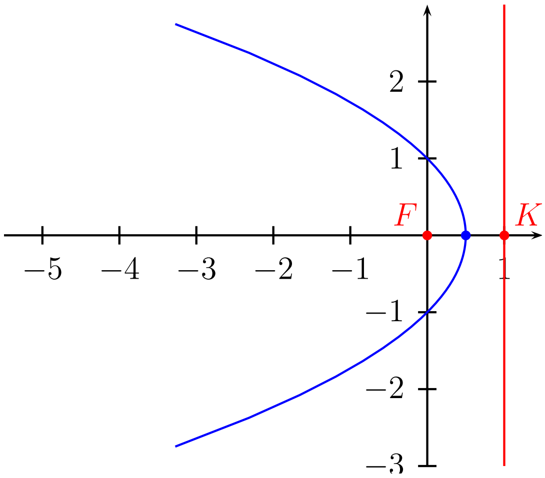
$$1)\ r = \frac{1}{1+2\cos\theta} \quad 2)\ r = \frac{1}{1+\cos\theta} \quad 3)\ r = \frac{1}{2+\cos\theta} \quad 4)\ r = \frac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} \quad 5)\ r = \frac{1}{2-\cos\theta}.$$

1. $\mathscr{C}$ es una cónica de excentricidad 2 y por lo tanto, una hipérbola.



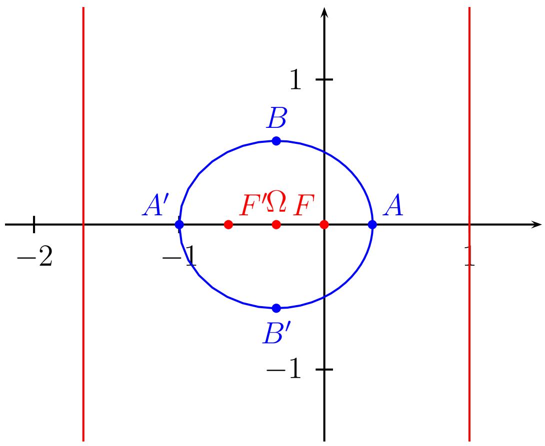
El eje focal es (Ox). Los vértices son los puntos de intersección de $\mathscr{C}$ y (Ox), es decir los puntos $M(0)$ y $M(\pi)$ de las respectivas coordenadas cartesianas $A'\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $A(1,0)$. El centro Ω es el punto medio de $[AA']$, es decir $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$. Uno de los focos es $F' = O$ y la otra es la simétrica de F', con respecto a Ω : es el punto $F\left(\frac{4}{3},0\right)$. Porque $a = \frac{1}{3}$ y $e = 2$, las directrices son las rectas de ecuación $x = x_\Omega - \frac{a}{e} = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{5}{6}$. Se obtienen infinitas ramas para $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Las asíntotas son, por lo tanto, las rectas que pasan por Ω de ángulo polar $\pm\frac{2\pi}{3}$. Estas son las rectas de ecuaciones cartesianas $y = \pm\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

2. $\mathscr{C}$ es una cónica de excentricidad 1 y por lo tanto, una parábola.



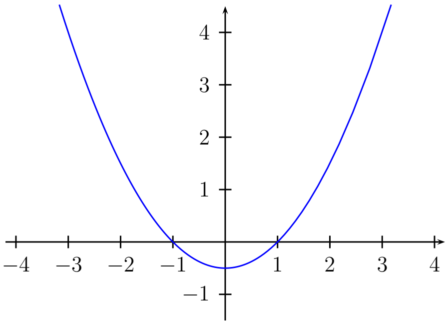
El eje focal es (Ox). El vértice es el punto $M(0)$ de coordenadas cartesianas $S\left(\frac{1}{2},0\right)$. El foco es $F=O$. El punto K es la simétrica de F, con respecto a S y tiene las coordenadas $(1,0)$. La directriz tiene así la ecuación $x=1$.

3. $\mathscr{C}$ es una cónica de excentricidad $e=\frac{1}{2}$ y por lo tanto, una elipse.

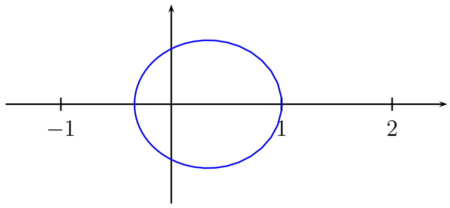


El eje focal es (Ox). Los vértices de este eje son $A=M(0)$ de coordenadas $\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $A'=M(\pi)$ de coordenadas $(-1,0)$. El centro Ω es el punto medio de $[AA']$ y tiene las coordenadas $\left(-\frac{1}{3},0\right)$. Uno de los focos es $F=O$. La otra es la simétrica de F, con respecto a Ω : es el punto F' de coordenadas $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. Así, $c=\frac{1}{3}$ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. De ahí los vértices $B\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $B'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Las directrices son las rectas de ecuaciones $x=x_\Omega+\frac{a}{e}=1$ y $x=-\frac{5}{3}$.

4. $M\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\left[r\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta-\frac{\pi}{2}\right]=\mathrm{rot}_{O,-\pi/2}\left(\left[\frac{1}{1+\cos\theta},\theta\right]\right)$. Entonces $\mathscr{C}$ es la imagen de la parábola de ecuación polar $r=\frac{1}{1+\cos\theta}$ por el cuarto de vuelta indirecto de centro O.



5. $M(\theta+\pi) = [r(\theta+\pi), \theta+\pi] = \left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta+\pi\right] = s_O\left(\left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Entonces $\mathscr{C}$ es la imagen de la elipse de ecuación polar $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$ por la simetría central de centro O.



Solución del ejercicio 5622 ▲005544

Un punto del plano está en el centro del círculo O y de radio 1 si y solo si su afijo z es de módulo 1 o incluso si y solo si existe un real θ tal que $z = e^{i\theta}$. Por tanto, para θ real,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+1+e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1+2\cos\theta}\right)}.$$

El conjunto buscado es, por lo tanto el simétrico con respecto a (Ox) de la curva de ecuación polar $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$. Esta última es una elipse, simétrica con respecto a $(0x)$. Entonces el conjunto buscado es la elipse de ecuación polar $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ (ver el ejercicio 5621, 1)).

Solución del ejercicio 5623 ▲005546

1. Sea M un punto del plano.
   1er caso. Se supone que $M \notin (AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

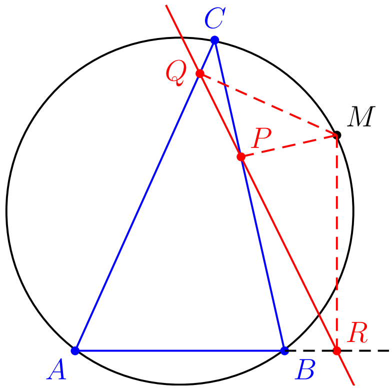
$$P,\ Q\ \text{ y }\ R \text{ alineados} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

   Ahora, porque los triángulos MPC y MQC son rectangulares en P y Q respectivamente, los puntos P y Q están en el círculo de diámetro $[MC]$. Se deduce que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. Igualmente, $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Así,

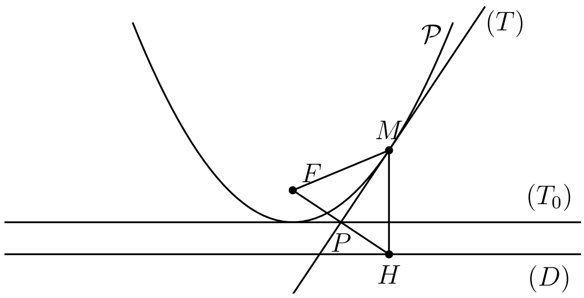
$$\begin{aligned} P,\ Q\ \text{ y }\ R \text{ alineados} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ pertenece al círculo circunscrito al triángulo } ABC \\ &\quad\ (\text{privado de los puntos } A,\ B\ \text{ y }\ C). \end{aligned}$$

2o caso. Se supone por ejemplo que $M \in (AB)$. En este caso, $M = R$. Si además M no es ni A, ni B, entonces $M \neq P$ y $M \neq Q$, luego las rectas (MP) y (MQ) son perpendiculares a las rectas (BC) y (AC) respectivamente. Si por reducción al absurdo, los puntos P, Q y R están alineados, se tiene $(MP) = (MQ)$ y entonces $(AB)||(AC)$. Esto es una contradicción. Así, si los puntos P, Q y R están alineados, M es uno de los tres puntos A, B o C. El recíproco es inmediato. Resumiendo los dos casos,

$\boxed{P, Q \text{ y } R \text{ están alineados si y solo si } M \text{ está en el círculo circunscrito al triángulo } ABC.}$



2. **Parábola tangente a tres lados de un triángulo.** Comenzar recordando una construcción usual de la tangente en un punto de una parábola : el triángulo FMH es isósceles en M y la tangente en M a $\mathscr{P}$ es la mediatriz del segmento $[FH]$. Así, el proyectado ortogonal P de F en la tangente (T) está sobre $T_0)$ la tangente en el vértice de la parábola $\mathscr{P}$.



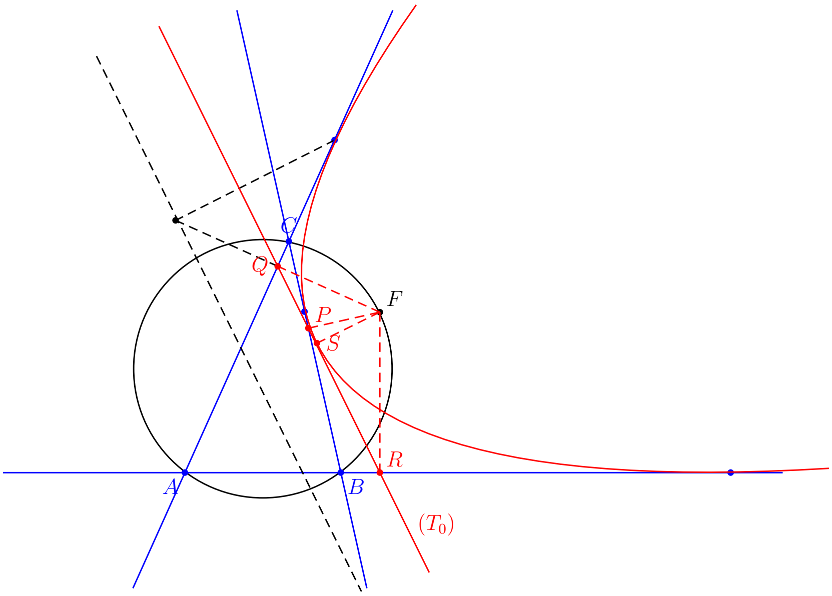
Sean A, B y C tres puntos no alineados. Si $\mathscr{P}$ es una parábola tangente a las rectas (BC), (CA) y (AB), proyecciones ortogonales P, Q y R de su foco F en las rectas (BC), (CA) y (AB) están alineados sobre la tangente en el vértice de la parábola $\mathscr{P}$.

De acuerdo a 1), el punto F está necesariamente en el círculo circunscrito al triángulo ABC.

Recíprocamente, si F es uno de los tres puntos A, B o C, F no es una solución porque una tangente a una parábola nunca pasa por su foco. Sea así F un punto del círculo circunscrito al triángulo ABC y distinto de los puntos A, B y C. Demostrar entonces que existe una parábola de foco F, tangente a las rectas (BC), (CA) y (AB).

Se construyen las proyecciones ortogonales P, Q y R de F en las rectas (BC), (CA) y (AB). Están alineados a la recta de SIMSON (T_0) de F relativamente al triángulo ABC. La parábola de foco F y de tangente en el vértice (T_0) es la solución del problema planteado.

La construcción de los puntos de contacto se proporciona en el gráfico de la página anterior : Se construye la simetría de F, con respecto a los puntos P, Q y R (estas simetrías están en la directriz) luego se vuelve perpendicularmente a (T_0) hasta la parábola.



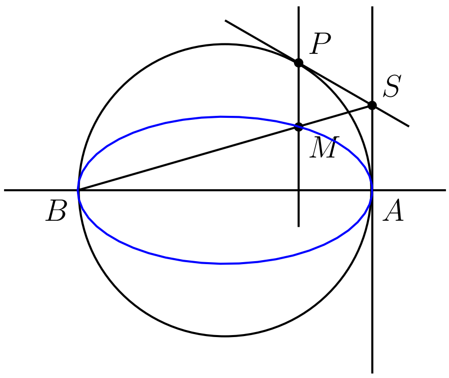
Solución del **ejercicio 5624** ▲005547

Se escoge un marco ortonormado en el que A tiene coordenadas $(R,0)$ y $(\mathscr{C})$ tiene la representación paramétrica $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. Sea $P(R\cos t, R\operatorname{sen} t)$ un punto de $(\mathscr{C})$. La tangente (D) a $(\mathscr{C})$ en A es la recta de ecuación $x = R$ y la tangente (T) a $(\mathscr{C})$ en P es la recta de ecuación $x\cos t + y\operatorname{sen} t = R$. Cuando $t \notin \pi\mathbb{Z}$, (T) interseca (D) en el punto S de coordenadas $\left(R, R\frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)$ o aún $\left(R, R\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

Una ecuación de la recta (BS) es $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x+R)+2y = 0$. La abscisa de M es $R\cos t$ y entonces

$$y_M = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x_M+R) = \frac{1}{2}R\tan\left(\frac{t}{2}\right)(\cos t+1) = R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}R\operatorname{sen} t.$$

El conjunto de puntos M es, por lo tanto el soporte del arco $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = \frac{1}{2}R\operatorname{sen} t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. Es la imagen del círculo $\mathscr{C}$ en afinidad de base (AB), de dirección (D) y de cociente $\frac{1}{2}$ y por lo tanto, una elipse con eje mayor $[AB]$.



Solución del ejercicio 5625 ▲005815

En todo el ejercicio, se establece $\mathscr{R}=(O,i,j)$ y (Γ) el conjunto considerado, de ecuación $f(x,y)=0$.

1. Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se escribe $f(x,y)=2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1$ y $Q((x,y))=2x^2+6xy+5y^2$. El discriminante de esta cónica es $\Delta=2\times5-3^2=1>0$ y la curva (Γ) es del género elipse, es decir una elipse, eventualmente un círculo, sea un punto, ya sea el conjunto vacío.

   Punto crítico.
   $$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6y+4=0\\ 6x+10y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\ \text{ y }\ y=0.$$
   Se denota Ω un punto de coordenadas $(-1,0)$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}$.

   Reducción de Q en la base ortonormada. La matriz de Q en la base (i,j) es $\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $\chi_A=X^2-7X+1$ y los valores propios de A son $\alpha=\frac{7+3\sqrt5}{2}$ y $\beta=\frac{7-3\sqrt5}{2}$. $\ker(A-\alpha I_2)$ es la recta de ecuación $-(1+\sqrt5)x+2y=0$ y es generado por el vector unitario $e_1=\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt5}}(2,1+\sqrt5)$. Así $\ker(A-\alpha I_2)$ es la recta de ecuación $-(1-\sqrt5)x+2y=0$ y es generada por el vector unitario $e_2=\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt5}}(2,1-\sqrt5)$.

   Ecuación reducida de (Γ) en $\mathscr{R}'=(\Omega,e_1,e_2)$. Los términos de grado 1 desaparecen porque Ω es el origen de $\mathscr{R}'$ y por otro lado, $Q(xi+yj)=Q(Xe_1+Ye_2)=\alpha X^2+\beta Y^2$.
   Falta simplemente la constante, pero si se efectúa el cambio de variables $x=x_0+aX+bY$ y $y=y_0+cX+dY$, la constante es por supuesto $f((x_0,y_0))$. Entonces una ecuación cartesiana de (Γ) en $\mathscr{R}'$ es $\alpha X^2+\beta Y^2+f((-1,0))=0$, lo que se escribe aún
   $$\frac{7+3\sqrt5}{2}X^2+\frac{7-3\sqrt5}{2}Y^2=1.$$

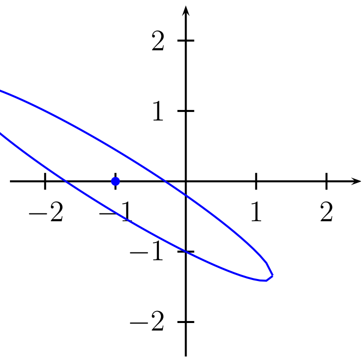
   Elementos característicos de la curva (Γ) en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$.
   (Γ) es una elipse de centro Ω, de eje focal (ΩY), pues $a=\frac{1}{\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}}}=b$ y de eje no focal (ΩX).
   - *Centro* $\Omega(0,0)_{\mathscr{R}'}$.
   - *Excentricidad* $c^2=b^2-a^2=\frac{2}{7-3\sqrt5}-\frac{2}{7+3\sqrt5}=3\sqrt5$, luego $\mathrm{e}^2=\left(\frac{c}{b}\right)^2=\frac{3\sqrt5}{7+3\sqrt5}=\frac{-45+21\sqrt5}{4}$ y $e=\frac12\sqrt{-45+21\sqrt5}=0,69...$
   - *Vértices* $A\left(\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $A'\left(-\sqrt{\frac{7-3\sqrt5}{2}},0\right)_{\mathscr{R}'}$ $B\left(0,\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ $B'\left(0,-\sqrt{\frac{7+3\sqrt5}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.
   - *Focos* $\Omega F=\Omega F'=c=\sqrt{3\sqrt5}$ y desde (ΩY) es el eje focal, $F(0,\sqrt{3\sqrt5})$ y $F'(0,-\sqrt{3\sqrt5})$.
   - *Directrices* $\Omega K=\Omega K'=\frac{b}{e}=2\sqrt{\frac{2}{(7-3\sqrt5)(-45+21\sqrt5)}}=\frac{2}{7-3\sqrt5}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt5}}=\frac{7+3\sqrt5}{\sqrt{6\sqrt5}}$ y entonces $(D):Y=\frac{7+3\sqrt5}{\sqrt{6\sqrt5}}$ y $(D'):Y=-\frac{7+3\sqrt5}{\sqrt{6\sqrt5}}$.

   Elementos característicos de (Γ) en $\mathscr{R}$.

Las fórmulas de cambio de sistema de referencia se escriben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- *Centro* $\Omega(-1,0)_{\mathscr{R}}$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45+21\sqrt{5}} = 0,69...$
- *Vértices* $A\left(-1+\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ y $A'\left(-1-\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$
luego $B\left(-1+\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ y $B'\left(-1-\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$
- *Focos* $F\left(-1+\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, \sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$ y $F'\left(-1-\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, -\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$.
-*Directrices* $(D) : \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ y $(D') : \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.



2. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se escribe $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+3x-2y+1$, luego $Q((x,y)) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Q es de rango 1 y entonces (Γ) es del género parábola, es decir una parábola, ya sea una unión de dos rectas paralelas eventualmente fusionadas, ya sea el conjunto vacío.

   Si (Γ) es no vacío, (Γ) es una cónica, con dirección asintótica de ecuación $y = -x$ (proporcionado por $Q(x,y) = 0$).

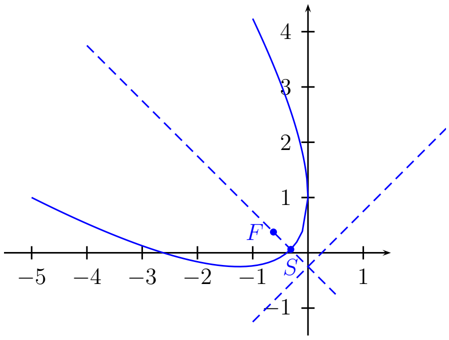
   1er estudio. Se estudia la intersección de (Γ), con cualquier perpendicular a su dirección. Sea (D_k) la recta de ecuación $y = x+k$, $k \in \mathbb{R}$. La ecuación en las abscisas de puntos de intersección de (Γ) y de (D_k) es $x^2+2x(x+k)+(x+k)^2+3x-2(x+k)+1 = 0$ o aún

$$4x^2+(4k+1)x+k^2-2k+1 = 0.$$

   El discriminante de esta ecuación es $\Delta = (4k+1)^2-16(k^2-2k+1) = 40k-15$. Como este discriminante cambia de signo, (Γ) es una parábola. El discriminante es nulo para $k = \frac{3}{8}$, lo que proporciona la tangente en el vértice $(T) : y = x+\frac{3}{8}$ y también el vértice :

$$x_S = -\frac{4\times\frac{3}{8}+1}{2\times 4} = -\frac{5}{16} \quad \text{y} \quad y_S = x_S+\frac{3}{8} = \frac{1}{16}.$$

El vértice de la parábola (Γ) es el punto $S\left(-\frac{5}{16},\frac{1}{16}\right)$. El eje focal es la perpendicular a la recta (T) en S. Una ecuación de eje focal (Δ) es $y+\frac{5}{16}=-\left(x-\frac{1}{16}\right)$ o aún $y=-x-\frac{1}{4}$. Para obtener el parámetro, el foco y el director, se constata en primer lugar en vista del signo del discriminante calculado anteriormente que $F=S+\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $K=S-\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Falta solo el parámetro p.



Sea M uno de los dos puntos de (Γ) situado en la paralela a la tangente en el vértice que pasa por F. La construcción usual de una parábola punto por punto demuestra que el cuadrilátero (M,F,K,H) es un cuadrado. El parámetro p buscado es entonces $p=FK=FM$. En este caso, la recta (MK) es la tangente a (Γ) en M y la bisectriz del ángulo de las rectas (D) y (Δ). Esta tangente es, por lo tanto, paralela a uno de los ejes de coordenadas.

La ecuación general de la tangente en un punto (x_0,y_0) de (Γ) es provista por la regla de duplicación de términos : $xx_0+xy_0+x_0y+yy_0+\frac{3}{2}(x+x_0)-(y+y_0)+1=0$ o aún $x\left(x_0+y_0+\frac{3}{2}\right)+y(x_0+y_0-1)+x_0-y_0+1=0$. Esta tangente es paralela a uno de los ejes de coordenadas si y solo si $x_0+y_0+\frac{3}{2}=0$ o $x_0+y_0-1=0$.

M está, por lo tanto en una de las dos rectas $(\Delta_1): x+y+\frac{3}{2}=0$ o $(\Delta_2): x+y-1=0$ que los dos son paralelos al eje focal $(\Delta): x+y+\frac{1}{4}=0$. p es, por lo tanto también la distancia de (Δ) a cualquiera de estas dos rectas o la distancia de un punto cualquiera (Δ) a la derecha (Δ_1). Como el punto de coordenadas $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ está sobre (Δ),

$$p=\frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

luego $F=S+\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}-\frac{5}{16},\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\right)=\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$ y $K=S-\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}+\frac{5}{16},\frac{1}{16}-\frac{5}{16}\right)=\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ de manera que la directriz (D) tiene la ecuación $y=x-\frac{1}{4}$.

2o estudio. Se define $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ y $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ o aún $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ y $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ que corresponde al cambio de bases ortonormales de la matriz $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Se denota (e_1,e_2) la familia de matriz P en la base (i,j). Determinar una ecuación de (Γ) en el sistema de referencia $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2)$.

$$(x+y)^2+3x-2y+1=0\Leftrightarrow 2X^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X-Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(X+Y)+1=0\Leftrightarrow 2X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0\Leftrightarrow\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(Y-\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).$$

Elementos de (Γ) en $\mathscr{R}'$.

- (Γ) es una parábola de *vértice* $S\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.

- *Parametrizada* $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$. El eje focal de (Γ) es el eje (SY) y el foco tiene una ordenada estrictamente mayor que Y_S.

- *Foco* $F = S + \frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.

- *Directriz* $K = S - \frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ y entonces $(D) : Y = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Elementos de la parábola (Γ) en el sistema de referencia $\mathscr{R}$.

- *Parametrizada* $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$.

Vértice $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_S - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_S, \frac{1}{\sqrt{2}}X_S + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_S\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)_{\mathscr{R}}$.

- El *foyer* F tiene coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_F - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_F, \frac{1}{\sqrt{2}}X_F + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_F\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)_{\mathscr{R}}$.

- La *directriz* (D) tiene la ecuación $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ y entonces $y = x - \frac{1}{4}$.

3. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se escribe $f(x,y) = 2x^2 - 4xy - 3x + 3y + 1$, luego $Q((x,y)) = 2x^2 - 4xy = 0$. El discriminante de esta cónica es $\Delta = 2 \times 0 - (-2)^2 = -4 < 0$ y la curva es del tipo hipérbola, es decir ya sea una hipérbola, sea una unión de dos rectas que se cortan. En los dos casos, las dos direcciones asintóticas admiten para la ecuación respectiva $x = 0$ y $x = 2y$ (proporcionado por $Q(x,y) = 0$)

Punto crítico.

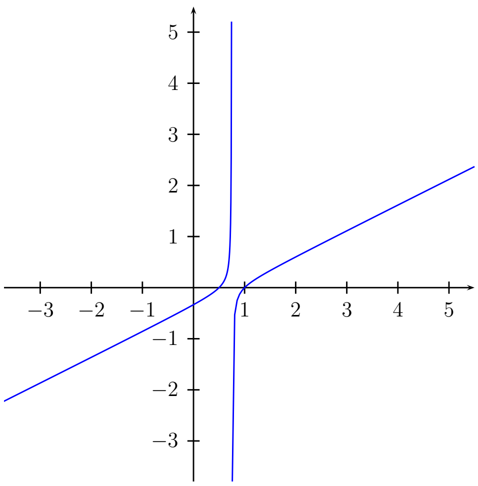
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y - 3 = 0 \\ -4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ y } y = 0.$$

Se denota Ω un punto de coordenadas $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}$.

Asíntotas. Estas son las rectas que pasan por Ω de direcciones de ecuaciones $x = 0$ y $x = 2y$. Las asíntotas son las rectas $(D_1) : x = \frac{3}{4}$ y $(D_2) : x - \frac{3}{4} = 2y$. La unión de estas dos rectas tiene por ecuación $\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} - 2y\right) = 0$ o aún $2x^2 - 4xy - 3x + 3y + \frac{9}{2} = 0$. (Γ) no es $(D_1) \cup (D_2)$ y entonces (Γ) es una hipérbola.

Eje focal y eje transversal.

Estas son las dos bisectrices del par de rectas $((D_1), (D_2))$ o aún el conjunto de puntos equidistantes de estas dos rectas o el conjunto de puntos de coordenadas (x,y) en $\mathscr{R}$ tales que $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right)^2$. Son por lo tanto las rectas de las respectivas ecuaciones $\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right) = 0$ y $\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right) = 0$ o aún $y = -\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$ y $y = \frac{\sqrt{5}+1}{8}(4x-3)$. Solo una de sus dos rectas tiene una intersección no vacía con (Γ), es decir el eje focal y los dos puntos de intersección son los vértices de la hipérbola. La ecuación en las abscisas de puntos de intersección de (Γ) y (D_1) es



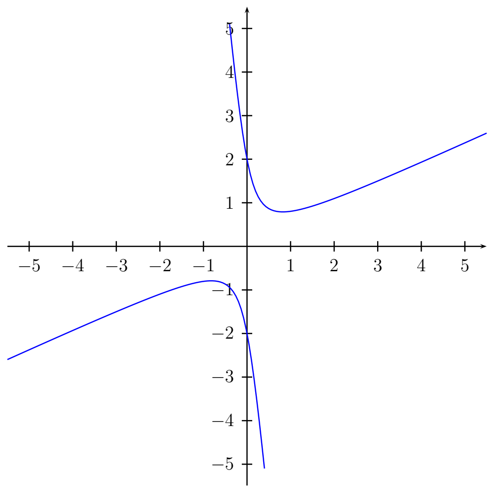
$$2x^2 - 4x\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right) - 3x + 3\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right) + 1 = 0,$$

o aún $2\sqrt{5}x^2 - 3\sqrt{5}x + \frac{9\sqrt{5}-1}{8} = 0$ o finalmente $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{1}{16\sqrt{5}} = 0$, cuyo discriminante es $\frac{1}{4\sqrt{5}} > 0$.

El eje focal es, por lo tanto la recta de ecuación $y = -\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$. Las soluciones de la ecuación anterior proporcionan las abscisas de los vértices.

4. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se escribe $Q(x,y) = -5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2$. El discriminante de (Γ) vale $-5-27 = -32 < 0$. La cónica es del género hipérbola y de centro O. Como $O \notin (\Gamma)$, (Γ) es más precisamente una hipérbola de centro O. Las asíntotas son provistas por la igualdad $Q(x,y) = 0$ y son, por lo tanto las rectas de ecuaciones $y = (-3\sqrt{3} \pm 4\sqrt{2})x$. La matriz de Q en la base canónica es $M = \begin{pmatrix} -5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $\chi_M = X^2 + 4X - 32 = (X-4)(X+8)$. Luego, $M = PD^tP$, donde $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $D = \mathrm{diag}(-8,4)$. Las fórmulas de cambio de referencia se escriben $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y) \\ y = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y) \end{cases}$ o también $\begin{cases} X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \\ Y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \end{cases}$. En $\mathscr{R}'(O,e_1,e_2)$, (Γ) tiene la ecuación $-8X^2 + 4Y^2 - 4 = 0$ o aún $-\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2} + Y^2 = 1$. Entonces $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Elementos de la hipérbola en $\mathscr{R}'$, luego $\mathscr{R}$.



El eje focal es (O,e_2), es decir la recta de ecuación $X = 0$ en $\mathscr{R}'$ o aún $y = \sqrt{3}x$ en $\mathscr{R}$.

- los *vértices* son los puntos B y B' de coordenadas $(1,0)$ y $(-1,0)$ en $\mathscr{R}'$ y por lo tanto, de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en $\mathscr{R}$.

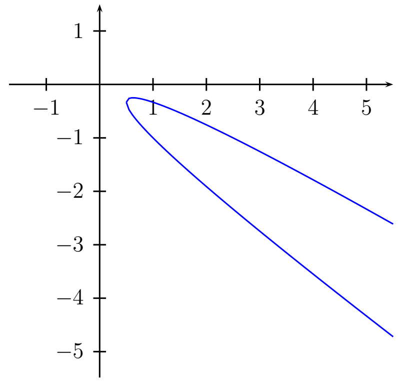
- *Excentricidad, focos, directrices.* $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$, luego $e = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Los focos F y F' tienen por coordenadas $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y $\left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ en $\mathscr{R}'$ y entonces $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ en $\mathscr{R}$. En lo que concierne los directrices, $K = O + \frac{1}{e}\overrightarrow{OB} = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\mathscr{R}'}$.

Las directrices son las rectas de las respectivas ecuaciones $Y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $Y = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ en $\mathscr{R}'$ o aún de respectivas ecuaciones $x + \sqrt{3}y = \frac{4}{\sqrt{6}}$ y $x + \sqrt{3}y = -\frac{4}{\sqrt{6}}$.

5. La ecuación propuesta se escribe $(2x+3y)^2 - 2x + 1 = 0$. Se trata de una sección cónica en forma de parábola con dirección asintótica eventual $2x + 3y = 0$.
Se define $X = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y)$ y $Y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y)$ o aún $x = \frac{1}{\sqrt{13}}(2X+3Y)$ y $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(3X-2Y)$.
En $\mathscr{R}' = (O,X,Y)$, (Γ) admite por ecuación cartesiana :

$$13X^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}(2X+3Y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 13\left(X - \frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{6}{\sqrt{13}}Y + \frac{165}{169} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(X - \frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{6}{13\sqrt{13}}\left(Y - \frac{55}{26\sqrt{13}}\right).$$

Esto demuestra que (Γ) es una parábola, proporciona el parámetro $p = \frac{6}{13\sqrt{13}}$, luego los elementos de (Γ) en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$: $S = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{55}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$, luego $F = S + \frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{61}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ y $K = S - \frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'} = \left(\frac{2}{13\sqrt{13}}, \frac{49}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ y entonces (D) : $Y = \frac{49}{26\sqrt{13}}$.



Elementos de (Γ) en el sistema de referencia $\mathscr{R}$.
$S\left(\frac{173}{338}, -\frac{49}{169}\right)_{\mathscr{R}}$, luego $F\left(\frac{191}{338}, -\frac{55}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ y $(D) : 3x - 2y = \frac{49}{26}$.

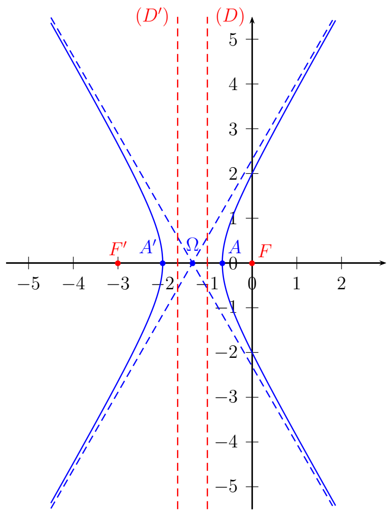
6. (Γ) es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones respectivas $x - y + 1 = 0$ y $x + y - 1 = 0$, es decir el punto de coordenadas $(0,1)$.
7. La ecuación se escribe $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. (Γ) es el círculo de centro $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
8. Se reconoce una ecuación del círculo de diámetro $[AB]$, donde $A(0,2)$ y $B(1,3)$.
9. Si se escribe $X = x + 2y - 4$ y $Y = x - y - 1$, la ecuación se escribe $XY = 3$, lo que inmediatamente, demuestra que la curva es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas de ecuaciones respectivas $x + 2y - 4 = 0$ y $x - y - 1 = 0$ y por lo tanto, de centro el punto de intersección de estas dos rectas $\Omega(2,1)$. Este cambio de sistema de referencia no ortonormado no puede aportar más y si queremos los elementos métricos de la hipérbola, es necesario volver a los métodos de 3) o 4).
10. De nuevo, si se establece $X = 2x + y - 1$ y $Y = x + y$ (o incluso $Y = 3(x + y)$), la ecuación se escribe $X^2 = 3Y$. La nueva referencia es arbitraria, pero igualmente podemos afirmar que la curva es una parábola de dirección asintótica $2x + y = 0$. Con esta ecuación, sin embargo, ninguno de los elementos métricos del mismo se lee.

Solución del ejercicio 5626 ▲005816

Las tres curvas propuestas son cónicas propias (ecuación polar de una cónica propia en un sistema de referencia cuyo eje x es el eje focal, de origen un foco : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$, donde $p = ed = eFK$).

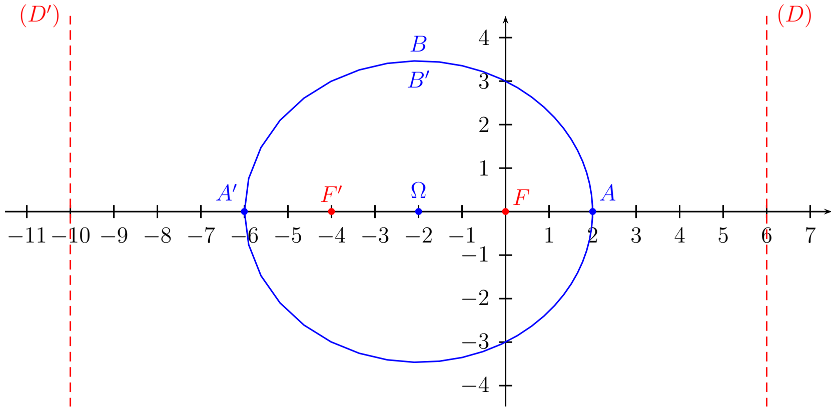
1. $e = 2$. Se trata de una hipérbola en la que uno de los focos es el origen.

El eje focal es (Ox) y por lo tanto, los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección de la curva con el eje (Ox). Estos son los puntos A y A' de coordenadas cartesianas $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ y $(-2,0)$ obtenidos para $\theta = \pi$ y $\theta = 0$ respectivamente. El centro es el punto medio del segmento $[AA']$ a saber, el punto $\Omega\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$. Las direcciones asintóticas son proporcionadas por : $2\cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$. Las asíntotas son las rectas del ángulo polar $\pm\frac{\pi}{3}$ pasando por Ω. Estas son las rectas de ecuaciones respectivas $y = \sqrt{3}\left(x + \frac{4}{3}\right)$ y $y = -\sqrt{3}\left(x + \frac{4}{3}\right)$. Uno de los focos F es el origen. La otra es la simétrica de F, con respecto a Ω a saber, el punto F' de coordenadas $(-3,0)$. Las directrices son provistas por los puntos $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-1,0)$ y $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.



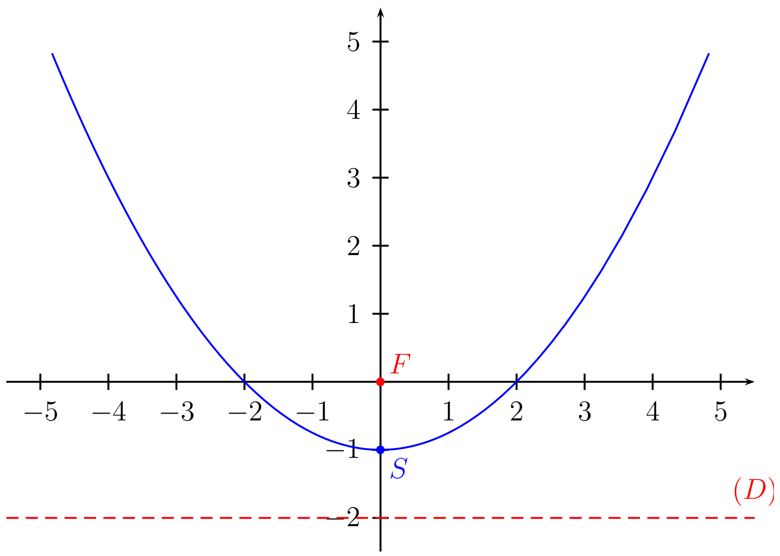
Las pautas son las rectas (D) y (D') de ecuaciones respectivas $x = -1$ y $x = -\frac{5}{3}$.

2. La ecuación se escribe $r = \dfrac{3}{\dfrac{1}{2} + \cos\theta}$. Entonces $e = \frac{1}{2}$ y la curva es una elipse.



Los vértices del eje grande son los puntos $A(2,0)$ y $A'(-6,0)$ obtenidos para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. El centro es el medio Ω de $[AA']$ de coordenadas $(-2,0)$. El primer foco F es el origen y el segundo es el simétrico del punto F, con respecto a Ω a saber, el punto $F'(-4,0)$. Los puntos K y K' están definidos por : $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (6,0)$ y $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-10,0)$. Las pautas son las rectas (D) y (D') de ecuaciones respectivas $x = 6$ y $x = -10$. Los vértices del eje menor están determinados por $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$, luego $B = \Omega + b\overrightarrow{j} = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ y $B = \Omega - b\overrightarrow{j} = \left(-2, -2\sqrt{3}\right)$

3. La ecuación $r = \dfrac{2}{1 + \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)}$. Se reconoce una parábola en una presentación no tradicional. El foco es siempre el origen y como la dirección asintótico es obtenido para $\theta = \frac{\pi}{2}$ (y por lo tanto, tiene el ángulo polar $\frac{\pi}{2}$), el eje focal es, por lo tanto la recta que pasa por el origen F y ángulo polar $\frac{\pi}{2}$, es decir el eje de ordenadas. El vértice es la intersección de la curva con el eje (Oy) obtenido para $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Para $\theta = -\frac{\pi}{2}$, se obtiene $r = 1$ y entonces $S(-1,0)$. Luego $K = s_S(F) = (-2,0)$ y la directriz (D) es la recta de ecuación $y = -2$. En fin, $p = FK = 2$.



Observación. Si no se siente cómodo en polares, siempre se puede volver a cartesianas, pero es una gran pérdida de tiempo :

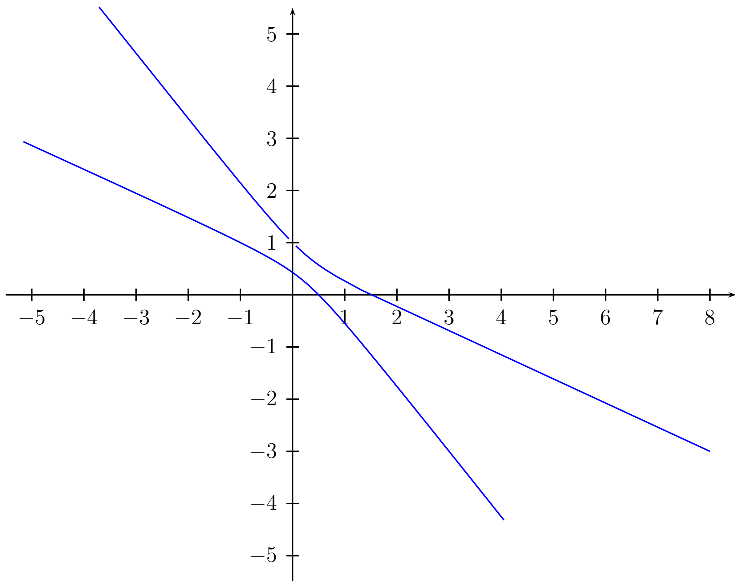
en 1), $r(1-2\cos\theta)=2$ se escribe $r-2x=2$, luego $x^2+y^2=(2x+2)^2$.
En 2), $r(2+\cos\theta)=6$ se escribe $2r+x=6$ y entonces $4(x^2+y^2)=(-x+6)^2$.
En 3), $r(1-\operatorname{sen}\theta)=2$ se escribe $r-y=2$, luego $x^2+y^2=(y+2)^2$ y entonces $y=\frac{x^2}{4}-1$.

Solución del ejercicio 5627 ▲005817

---

1. Una elipse (privada de un punto) admite una representación paramétrica de la forma $\begin{cases} a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ b\frac{2t}{1+t^2}, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, en un punto de referencia adaptado. Una rama hipérbola admite una representación paramétrica de la forma $\begin{cases} a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ b\frac{2t}{1-t^2}, \end{cases}$ $t\in]-1,1[$, en un punto de referencia adaptado. Una parábola admite una representación paramétrica de la forma $\begin{cases} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{cases}$, en un punto de referencia adaptado... Recíprocamente, si la curva admite una parametrización del tipo del enunciado, los seis polinomios P^2, PQ, Q^2, PR, QR y R^2 están en $\mathbb{R}_4[X]$ que es de dimensión 5 y por lo tanto, son linealmente dependientes. Se deduce que existe $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$ tal que $aP^2+2bPQ+cQ^2+2dPR+2eQR+fR^2=0$ o aún para todo real t tal que $R(t)\neq 0$,
$$a\left(\frac{P(t)}{R(t)}\right)^2+2b\frac{P(t)}{R(t)}\times\frac{Q(t)}{R(t)}+c\left(\frac{Q(t)}{R(t)}\right)^2+2d\frac{P(t)}{R(t)}+2e\frac{Q(t)}{R(t)}+f=0.$$
El soporte del arco está, por lo tanto contenido en la curva de ecuación $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$, donde $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$).

2. Construcción de la curva $\begin{cases} x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{cases}$.



Solución del ejercicio 5630 ▲004912

Sean P, P' los simétricos de F, con respecto a las tangentes. Así $F'P = F'P' = 2a$.
El triángulo FPP' es rectangular, por lo tanto T es el punto medio de $[P,P']$, y $TF = TP = TP'$.
Entonces, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.
$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$, por lo tanto T pertenece al círculo de centro O y de radio $\sqrt{a^2+b^2}$.

Solución del ejercicio 5631 ▲004913

1. $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.
2. $M : \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$, $P : \begin{pmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2a\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$: (MP) es tangente a $\mathscr{E}' \Leftrightarrow \theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Solución del ejercicio 5632 ▲004914

1. $\dfrac{x^2}{(1-\alpha)^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = d^2$.

Solución del ejercicio 5633 ▲004915

$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow T : \begin{pmatrix} a/e \\ b^2(e-X)/d \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0.$

Solución del ejercicio 5636 ▲005550

Denotemos $\mathscr{C}$ el conjunto de puntos considerados. Para x real, se escribe $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)((x^2+xy+y^2) + A(x+y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ o } x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0. \end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ es, por lo tanto la unión de la recta de ecuación $y = x$ y de la curva $\mathscr{E}$ de ecuación $x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0$. Para determinar la naturaleza de $\mathscr{E}$, se hace un cambio de marco ortonormado estableciendo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y). \end{cases}$$

Se obtiene

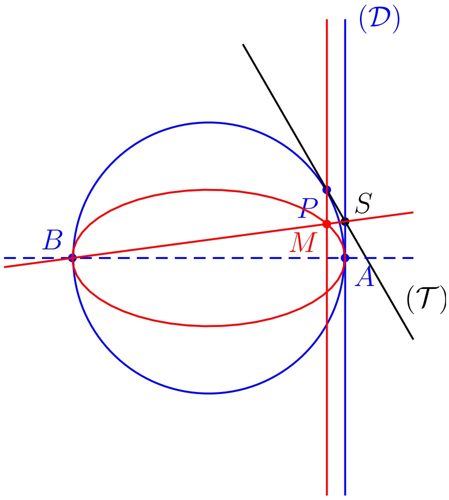
$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + A(x+y) + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X-Y)^2 + (X-Y)(X+Y) + (X+Y)^2) + \frac{A}{\sqrt{2}}X + B = 0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2 + Y^2 + \sqrt{2}AX + 2B = 0 \Leftrightarrow 3\left(X + \frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{A^2 - 12B}{6}\ (*) \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ es una elipse si y solo si $A^2 - 12B > 0$ (si no $\mathscr{E}$ es un punto o es vacío). En este caso, ya que $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 = b$,

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Solución del ejercicio 5637 ▲005820

Se escoge un marco ortonormado $\mathscr{R}$ en la cual el punto A tiene coordenadas $(1,0)$ y el punto B tiene coordenadas $(-1,0)$. En el sistema de referencia $\mathscr{R}$, la recta $(\mathscr{D})$ tiene la ecuación $x=1$. Luego, existe un real θ tal que el punto P tiene para coordenadas $(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$. La tangente $(\mathscr{T})$ tiene la ecuación $x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta=1$. Para $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, el punto S tiene coordenadas $\left(1,\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ o aún $\left(1,\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.



La perpendicular a la recta (AB) pasando P admite por ecuación $x=\cos\theta$. La recta (BS) admite por ecuación $-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(x+1)+2y=0$. Estas dos rectas se cortan en el punto M de coordenadas $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\cos\theta)\right)$ o aún $\left(\cos\theta,\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ o finalmente $(\cos\theta,\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta)$.

El conjunto de puntos M es, por lo tanto el conjunto de puntos de coordenadas $\left(\cos\theta,\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$, cuando θ recorre $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ o aún la elipse de ecuación $x^2+4y^2=1$ privada de los puntos A y B.

Solución del ejercicio 5638 ▲005822

Pongamos $P=X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$.

$$\begin{aligned}P(x)=P(y)&\Leftrightarrow(y^3-x^3)+\alpha(y^2-x^2)+\beta(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)(x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta)=0\\&\Leftrightarrow y-x=0\text{ o }x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0.\end{aligned}$$

El conjunto buscado es la unión de la recta (D) de ecuación $y=x$ y de la curva (Γ) de ecuación $x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0$. Para estudiar la curva (Γ) que es del tipo elipse, se escribe $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ y $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, luego se denota $\mathscr{R}'$ el sistema de referencia (OXY).

$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0&\Leftrightarrow\frac{1}{2}((X+Y)^2+(X+Y)(X-Y)+(X-Y)^2)+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(X+Y+X-Y)+\beta=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{2}(3X^2+Y^2)+\alpha\sqrt{2}X+\beta=0\Leftrightarrow 3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta).\end{aligned}$$

(Γ) es una elipse si y solo si $\alpha^2 - 3\beta > 0$ (si no (Γ) es un punto o es vacío). En este caso, $3\left(X + \frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{2}{3}(\alpha^2 - 3\beta) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = \frac{2}{9}(\alpha^2 - 3\beta) < \frac{2}{3}(\alpha^2 - 3\beta) = b^2$. Así,

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Solución del ejercicio 5642 ▲004903

1. Sea O este punto medio. La tangente en M es paralela a (FH'), y pasa por en medio de $[F,H]$, así como por el punto medio de $[H,H']$.
2. Cálculo de ángulo. $\overline{(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MF})} \equiv \overline{(\overrightarrow{FH'},\overrightarrow{FM'})}$.

Solución del ejercicio 5643 ▲004904

Sea O' este centro. Los triángulos MPQ y MAB son semejantes, por lo tanto O' es la imagen de O por la homotecia de centro M que transforma A en P.
Sea $(A'B')$ la simetría de (AB), con respecto a O. De acuerdo a la homotecia,

$$\frac{O'M}{d(O',\Delta)} = \frac{OM}{d(O,(AB))} = (\text{cte}) = \frac{OM - O'M}{d(O,(AB)) - d(O',\Delta)} = \frac{OO'}{d(O',(A'B'))}.$$

Entonces O' recorre parte de una cónica de foco O y de directriz $(A'B')$.

Solución del ejercicio 5644 ▲004905

Marco de referencia $(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{R}, \vec{j}) \Rightarrow$ parábola $\rho = \frac{R}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Solución del ejercicio 5645 ▲004906

Arcos de parábolas de foco F y directrices Δ, Δ', paralelas a D a la distancia $2a$ de D.

Solución del ejercicio 5647 ▲004908

$A : (t^2/2p, t)$, $B : (u^2/2p, u)$, con $t(t+u) = -2p^2$. AB es minimal para $t^2 = 2p^2$ y luego vale $3p\sqrt{3}$.

Solución del ejercicio 5648 ▲004909

1. Parábola : $y^2 = 2px \Rightarrow x = 2pt^2, y = 2pt$. Cuerda : $\begin{vmatrix} 2pa^2 & 2pb^2 & x \\ 2pa & 2pb & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
2. $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.
3. $c = -\frac{a^2 + ab + 1}{a + b}$.
   $(BC) : (2pa + y)b^2 + (2pa^2 + 2p - x)b - (ax + a^2 y + y) = 0$.
   Punto fijo : $y = -2pa$, $x = 2p(a^2 + 1)$.

4. Parábola trasladada de $\mathscr{P}$ de $(2p,0)$.

Solución del ejercicio 5649 ▲004910

1. $M=(2pt^2,2pt)\Rightarrow 2t^2+2tt_0+1=0$. Hay dos soluciones si $|t_0|>\sqrt{2}$, una sola si $|t_0|=\sqrt{2}$ y ninguna si $|t_0|<\sqrt{2}$.
2. $t_1+t_2=-t_0$, $t_1^2+t_2^2=t_0^2-1$. Centro : $(4pt_0^2-2p,0)$ (1/2-recta).

Solución del ejercicio 5650 ▲004911

1. $x_C-x_A=2p\pm\sqrt{4p^2+8pxA}$.
2. $x_{n+1}=x_n+\sqrt{8px_n+4p^2}+2p=x_n\left(1+\sqrt{\frac{8p}{x_n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)\right)$, por lo tanto $\sqrt{x_{n+1}}=\sqrt{x_n}+\sqrt{2p}+o(1)$ y $x_n\sim 2pn^2$.

Solución del ejercicio 5651 ▲005545

En un cierto sistema de referencia ortonormado, la parábola $\mathscr{P}$ admite una ecuación cartesiana de la forma $x^2=2py$. Según la regla de la duplicación de términos, una ecuación de la tangente $\mathscr{T}_{x_0}$ en un punto $(x_0,y_0)=\left(x_0,\frac{x_0^2}{2p}\right)$ de $\mathscr{P}$ es

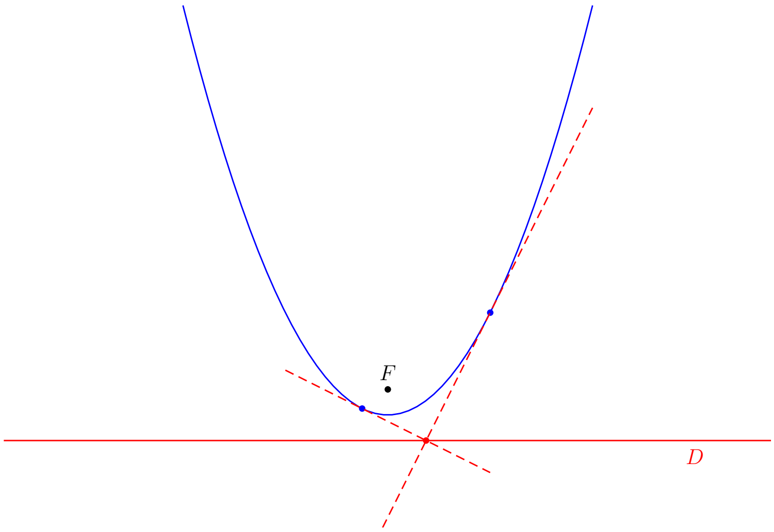
$$xx_0=p(y+y_0).$$

Las tangentes en $M_0(x_0,y_0)$ y $M_1(x_1,y_1)$ son perpendiculares si y solo si $x_0x_1+p^2=0$. La ortóptica $\mathscr{C}$ es, por lo tanto el conjunto de puntos de intersección de $\mathscr{T}_{x_0}$ y $\mathscr{T}_{-p^2/x_0}$, donde x_0 recorre $\mathbb{R}^*$.

$$M(x,y)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l}xx_0=p\left(y+\frac{x_0^2}{2p}\right)\\-x\frac{p^2}{x_0}=p\left(y+\frac{p^3}{2x_0^2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l}tx-py=\frac{t^2}{2}\\px+ty=-\frac{p^3}{2t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{t^2+p^2}\left(\frac{t^3}{2}-\frac{p^4}{2t}\right)\\y=\frac{1}{t^2+p^2}\left(-\frac{p^3}{2}-\frac{pt^2}{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l}x=\frac{t^2-p^2}{2t}\\y=-\frac{p}{2}.\end{array}\right.$$

Ahora, $\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-p^2}{2t}=-\infty$ y $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-p^2}{2t}=+\infty$. Como la función $t\mapsto\frac{t^2-p^2}{2t}$ es continua en $]0,+\infty[$, cuando t recorre $]0,+\infty[$, $x=\frac{t^2-p^2}{2t}$ recorre $\mathbb{R}$. Finalmente, la ortóptica $\mathscr{C}$ es la recta de ecuación $y=-\frac{p}{2}$ o aún

$\boxed{\text{la ortóptica de una parábola es su directriz.}}$



Solución del ejercicio 5652 ▲005548

Se escoge un marco ortonormado $\mathscr{R}_1 = \left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tal que el plano de ecuaciones $x+y+z=1$ en $\mathscr{R}$ sea el plano de ecuación $Z=0$ en $\mathscr{R}_1$. Se toma $O'=(1,0,0)$, luego $\overrightarrow{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y en fin $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Las fórmulas de cambio de referencia se escriben

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

entonces, sea M un punto del espacio cuyas coordenadas en $\mathscr{R}$ se denotan (x,y,z) y las coordenadas en $\mathscr{R}_1$ se denotan (X,Y,Z).

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2+x+1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{cases}.$$

Se trabaja ahora en dimensión 2 y se denota aún $\mathscr{R}_1$ el sistema de referencia $\left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Una ecuación de (Γ) en $\mathscr{R}_1$ es $\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$ o aún $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$. Se establece

$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{cases}$ o aún $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$ y se denota $\mathscr{R}' = \left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ el nuevo punto de referencia definido por estas fórmulas.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right).$$

(Γ) es una parábola con parámetro $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.
Elementos de (Γ) en $\mathscr{R}'$:
vértice $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, eje : $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foco $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$, directriz : $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Elementos de (Γ) en $\mathscr{R}_1$ volviendo a tres coordenadas :
vértice $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$, eje : $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z = 0 \end{cases}$, foco $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathscr{R}_1}$,
directriz : $\begin{cases} -X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = 0. \end{cases}$

Elementos de (Γ) en $\mathscr{R}$: vértice $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathscr{R}}$, eje : $\begin{cases} 8x - 4y - 4z + 21 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, foco $F\left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathscr{R}}$,
directriz : $\begin{cases} 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Solución del ejercicio 5653 ▲005552

Se busca la ecuación de tal parábola $\mathscr{P}$ bajo la forma $(ax+by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, $a^2 + b^2 = 1$, $a > 0$.

$$(1,0) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{a^2 + 2c + e = 0} \text{ y } (0,2) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \boxed{4b^2 + 4d + e = 0}.$$

Según la regla de la duplicación de términos, una ecuación cartesiana de la tangente a $\mathscr{P}$ en $(1,0)$ es $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$ o aún $(a^2 + c)x + (ab + d)y + c + e = 0$.
Esta tangente es el eje (Ox) si y solo si $\boxed{a^2 + c = c + e = 0 \text{ y } ab + d \neq 0.}$

Una ecuación cartesiana de la tangente a $\mathscr{P}$ en $(0,2)$ es $2abx + 2b^2y + cx + d(y+2) + e = 0$ o aún $(2ab + c)x + (2b^2 + d)y + 2d + e = 0$.
Esta tangente es el eje (Oy) si y solo si $\boxed{2b^2 + d = 2d + e = 0 \text{ y } 2ab + c \neq 0.}$

En resumen, $\mathscr{P}$ es solución si y solo si

$$c = -a^2, \quad d = -2b^2, \quad e = a^2 = 4b^2, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad ab + d \neq 0, \quad 2ab + c \neq 0, \quad a > 0.$$

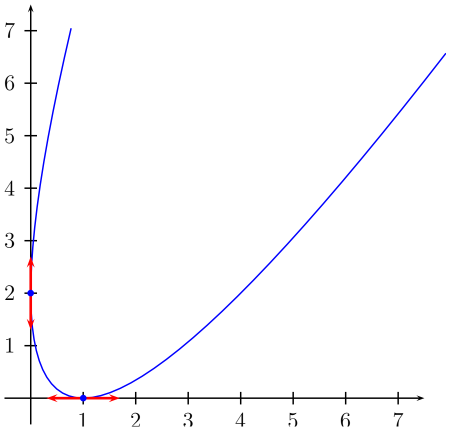
Ahora, $\left(a^2 = 4b^2,\ a^2 + b^2 = 1 \text{ y } a > 0\right) \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $b = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. El caso $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ proporciona $d = -\frac{2}{5}$, luego $ab + d = 0$, lo que está excluido. Entonces, necesariamente $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, luego $c = -\frac{4}{5}$, $d = -\frac{2}{5}$ y $e = \frac{4}{5}$ que en realidad son solución del sistema.
Se obtiene así una y una sola curva de segundo grado solución, a saber, la curva de la ecuación cartesiana

$$\boxed{(2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$

Queda por comprobar que esta curva es efectivamente una parábola. Se establece $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x-2y) \\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \end{cases}$ o aún $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2X-Y). \end{cases}$

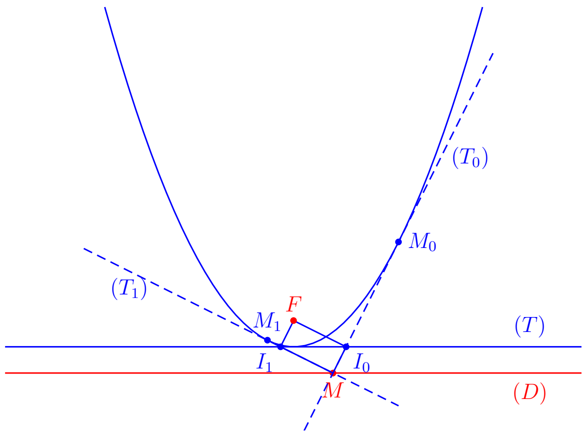
$$\begin{aligned}(2x-y)^2-8x-4y+4=0 &\Leftrightarrow 5Y^2-\frac{8}{\sqrt{5}}(-X+2Y)-\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X-Y)+4=0\\ &\Leftrightarrow 5Y^2-\frac{12}{\sqrt{5}}Y+\frac{16}{\sqrt{5}}X+4=0\\ &\Leftrightarrow 5\left(Y-\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X+\frac{4}{5\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ es de hecho una parábola.



Solución del **ejercicio 5654** ▲005818

Solución geométrica.



Sea M un punto de la ortóptica. M está en la tangente (T_0) y (T_1) a la parábola en dos puntos distintos M_0 y M_1 y claramente distintos del vértice S. Sean I_0 y I_1 los puntos de intersección de las rectas (T_0) y (T_1) respectivamente con la tangente (T) en el vértice de la parábola.

Se sabe (construcción usual de la parábola por puntos y tangentes) que las rectas (T_0) y (T_1) son perpendiculares a las rectas (FI_0) y (FI_1) respectivamente. Entonces el cuadrilátero FI_0MI_1 es un rectángulo (3 ángulos rectos conocidos). Así, la mitad de $[FM]$ que es también el punto medio de $[I_0I_1]$ está en la tangente en el vértice (T) y M es la imagen de un punto de la tangente (T) por la homotecia de centro F y de cociente 2.

Finalmente, el punto M está en la directriz de la parábola.

Recíprocamente, sea M un punto de la directriz e I la mitad de $[FM]$. Se reconstruye el rectángulo anterior colocando primero sobre la tangente al vértice (T) los puntos I_0 y I_1 tales que I ya sea el punto medio de $[I_0I_1]$ y tales que $I_0I_1 = MI$. Las rectas (MI_0) y (MI_1) son efectivamente tangentes a la parábola que son perpendiculares entre sí.

$$\boxed{\text{La ortóptica de una parábola es su directriz.}}$$

Solución analítica. Se elige un marco ortonormado en el que la parábola tiene la ecuación cartesiana $y^2 = 2px$. Una ecuación de la tangente (T_0) a la parábola en un punto $M_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ es $-px_0 + yy_0 = px_0$. Dos tangentes (T_0) y (T_1) son perpendiculares si y solo si $p^2 + y_0y_1 = 0$ (en particular $y_0y_1 \neq 0$). El punto de intersección de las tangentes (T_0) y (T1) en dos puntos distintos es la solución del sistema $\begin{cases} -px + yy_0 = px_0 \\ -px + yy_1 = px_1 \end{cases}$ y por lo tanto, tiene las coordenadas $\left(\frac{p(x_0y_1 - y_0x_1)}{p(y_0 - y_1)}, \frac{p^2(x_0 - x_1)}{p(y_0 - y_1)}\right) = \left(-\frac{y_0y_1}{2p}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)\right)$. En resumen, un punto $M(x,y)$ está en la ortóptica si y solo si existe $y_0 \neq 0$ tal que $\begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right) \end{cases}$, lo que ya demuestra que un punto de la ortóptica está en la recta de ecuación $x = -\frac{p}{2}$, es decir en la directriz de la parábola.

Recíprocamente, la función $y_0 \mapsto \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ es continua en $]0, +\infty[$, tiende a $-\infty$, cuando y_0 tiende a 0 para valores superiores y tiende a $+\infty$, cuando y_0 tiende a $+\infty$. Entonces $\frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ recorre $\mathbb{R}$, cuando y_0 recorre $]0, +\infty[$, lo que demuestra que se tiene la totalidad de la directriz.

Solución del ejercicio 5655 ▲005819

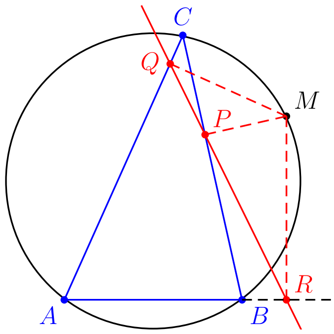
1. Sea M un punto del plano.
   1er caso. Se supone que $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$.
   $$P,\ Q\ \text{y}\ R\ \text{alineados} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$
   Ahora, porque los triángulos MPC y MQC son rectangulares en P y Q respectivamente, los puntos P y Q están en el círculo de diámetro $[MC]$. Se deduce que $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. Igualmente, $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Así,
   $$\begin{aligned} P,\ Q\ \text{y}\ R\ \text{alineados} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ pertenece al círculo circunscrito al triángulo } ABC \\ &\quad (\text{privado de los puntos } A,\ B\ \text{y}\ C). \end{aligned}$$

2o caso. Se supone por ejemplo que $M \in (AB)$. En este caso, $M = R$. Si además M no es ni A, ni B, entonces $M \neq P$ y $M \neq Q$, luego las rectas (MP) y (MQ) son perpendiculares a las rectas (BC) y (AC) respectivamente. Si por reducción al absurdo, los puntos P, Q y R están alineados, se tiene $(MP) = (MQ)$ y entonces $(AB)||(AC)$. Esto es una contradicción.

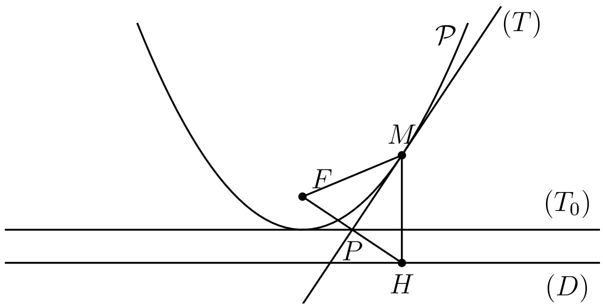
Entonces, si los puntos P, Q y R están alineados, M es uno de los tres puntos A, B o C. El recíproco es inmediato.

Resumiendo los dos casos,

P, Q y R están alineados si y solo si M está en el círculo circunscrito al triángulo ABC.



2. **Parábola tangente a tres lados de un triángulo.** Comenzar recordando una construcción usual de la tangente en un punto de una parábola : el triángulo FMH es isósceles en M y la tangente en M a $\mathscr{P}$ es la mediatriz del segmento $[FH]$. Así, el proyectado ortogonal P de F en la tangente (T) está sobre (T_0) la tangente en el vértice de la parábola $\mathscr{P}$.

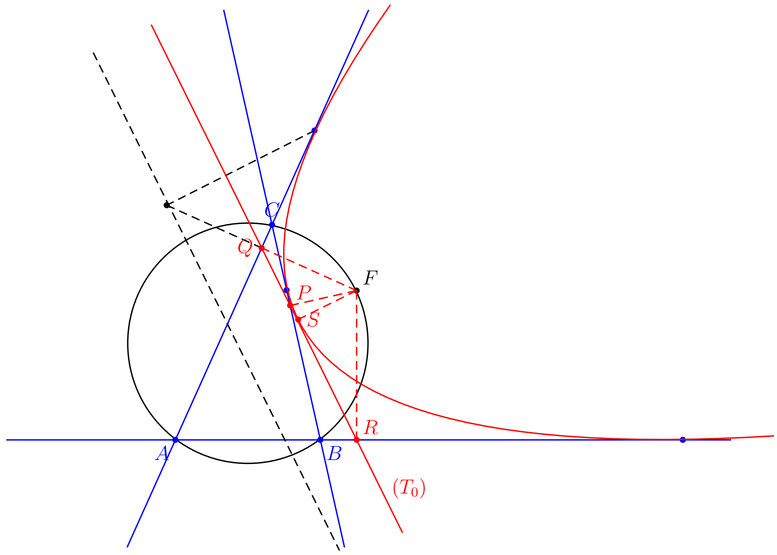


Sean A, B y C tres puntos no alineados. Si $\mathscr{P}$ es una parábola tangente a las rectas (BC), (CA) y (AB), proyecciones ortogonales P, Q y R de su foco F en las rectas (BC), (CA) y (AB) están alineadas sobre la tangente en el vértice de la parábola $\mathscr{P}$. De acuerdo a 1), el punto F está necesariamente en el círculo circunscrito al triángulo ABC.

Recíprocamente, si F es uno de los tres puntos A, B o C, F no es una solución porque una tangente a una parábola nunca pasa por su foco. Sea así F un punto del círculo circunscrito al triángulo ABC y distinto de los puntos A, B y C. Demostrar entonces que existe una parábola de foco F, tangente a las rectas (BC), (CA) y (AB).

Se construyen las proyecciones ortogonales P, Q y R de F en las rectas (BC), (CA) y (AB). Están alineados sobre la recta de SIMSON (T_0) de F relativamente al triángulo ABC. La parábola de foco F y de tangente en el vértice (T_0) es la solución del problema planteado.

La construcción de los puntos de contacto se proporciona en el gráfico de la página anterior : Se construye la simetría de F, con respecto a los puntos P, Q y R (estas simetrías están en la directriz) luego se vuelve perpendicularmente a (T_0) hasta la parábola.



Solución del **ejercicio 5656** ▲005821

(Γ) es la intersección de un cilindro parabólico de dirección (Oz) y de un plano no perpendicular a la dirección de este cilindro. Se escoge un marco ortonormado $\mathscr{R}' = (\Omega, X, Y, Z)$ en la que el plano de ecuación $x+y+z-1=0$ en el sistema de referencia $\mathscr{R} = (O,x,y,z)$ sea el plano (Ω, X, Y) o aún el plano de ecuaciones $Z=0$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$. Se define así $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1)$, luego por ejemplo $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ y $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$, lo que se escribe

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

o aún

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En el sistema de referencia $\mathscr{R}'$, la curva (Γ) admite por sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases}$$

o aún

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0. \end{cases}$$

Continuamos en dos coordenadas X y Y en el plano (Ω, X, Y).

$$
\begin{aligned}
M(X,Y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X + Y)^2 + \frac{2}{3\sqrt{6}}(\sqrt{3}X + Y) + \frac{1}{9} + \sqrt{2}X + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X + Y)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}X + \frac{2}{3\sqrt{6}}Y + \frac{10}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{3}X + Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0.
\end{aligned}
$$

Se encuentra una cónica del tipo parábola. Se define ahora $x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y)$ y $y' = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y)$ correspondiente a las fórmulas de cambio de referencia $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y) \\ y' = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y) \end{cases}$ o aún $\begin{cases} X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ Y = \frac{1}{2}(x' + \sqrt{3}y'). \end{cases}$
En el sistema de referencia (Ω, x', y'), una ecuación de la curva (Γ) es

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3}X + Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0 &\Leftrightarrow 4x'^2 + 4\sqrt{2}(\sqrt{3}x' - y') + \frac{\sqrt{6}}{3}(x' + \sqrt{3}y') + \frac{20}{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow x'^2 + \frac{13}{2\sqrt{6}}x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} - \frac{169}{96} \\
&= 0 \Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

(Γ) es la parábola de parámetro $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ y cuyos elementos característicos en el sistema de referencia (Ω, x', y') son

$$
S\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right),\ F = S + \frac{p}{2}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right),
$$

luego $K = S - \frac{p}{2}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1) = \left(-\frac{13}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ y entonces $(D) : y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Ahora volvemos al sistema de referencia (Ω, X, Y).
S tiene coordenadas $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{13}{4\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{16\sqrt{2}} \\ -\frac{29}{16\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,
F tiene coordenadas $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{13}{4\sqrt{6}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, luego (D) tiene la ecuación $-X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Por último, volvemos a la referencia (O, x, y, z).
El punto S tiene coordenadas $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{25}{16\sqrt{2}} \\ -\frac{29}{16\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{13}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix}$, luego el punto F

tiene coordenadas $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{4\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ y en fin

$(D) : \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x+y-2z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x+y+z-1=0. \end{cases}$

> (Γ) es la parábola de parámetro $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, de vértice $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)$, de foco $F\left(-\frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}\right)$ y de directriz $(D) : \begin{cases} -y+z = \frac{1}{2} \\ x+y+z-1=0. \end{cases}$

Solución del ejercicio 5657 ▲005824

Se busca una ecuación de la forma $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0$, con $a^2+b^2=1$ y $a>0$.

• $(1,0) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow a^2+2c+e=0$ y $(0,2) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 4b^2+4d+e=0$.

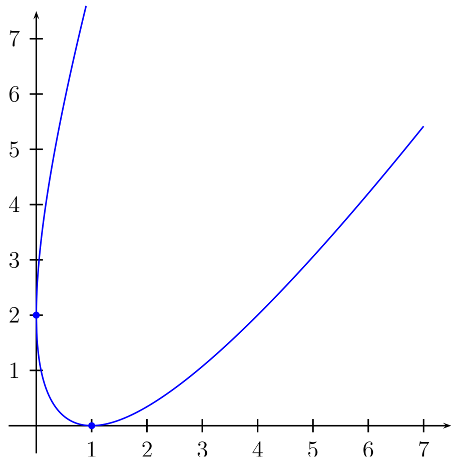
• Según la regla de la duplicación de términos, la tangente en $(1,0)$ a $(\mathscr{P})$ admite por ecuación cartesiana $a^2x+aby+c(x+1)+dy+e=0$ o aún $(a^2+c)x+(ab+d)y+c+e=0$. Esta tangente es el eje (Ox) si y solo si $a^2+c=0$ y $c+e=0$ y $ab+d \neq 0$.

• La tangente en $(0,2)$ a $(\mathscr{P})$ admite por ecuación cartesiana $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ o aún $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Esta tangente es el eje (Oy) si y solo si $2b^2+d=0$ y $2d+e=0$ y $2ab+c \neq 0$.

En resumen, $(\mathscr{P})$ es solución si y solo si $c=-a^2$, $d=-2b^2$, $e=a^2=4b^2$, $a^2+b^2=1$, $ab+d \neq 0$, $2ab+c \neq 0$ y $a>0$.

$a>0$, $a^2=4b^2$ y $a^2+b^2=1 \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ y $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Las igualdades $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ y $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ proporcionan $ab+d=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$, lo que no es adecuado. Queda $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $b=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ y $e=\frac{4}{5}$ que proporciona una solución. Se encuentra una y solo una parábola.

> La parábola $(\mathscr{P})$ admite por ecuación cartesiana $(2x-y)^2-8x-4y+4=0$.



Solución del ejercicio 5658 ▲004918

Hipérbola de excentricidad $\frac{1}{\cos\alpha}$, con $\overline{(\vec{D},\vec{\Delta})} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Solución del ejercicio 5659 ▲004919

1. $xy = \frac{a^2}{2}$.

Solución del ejercicio 5661 ▲004921

1. $MH = \frac{1}{2}MF \Rightarrow IMH, IMN$, y INF son semejantes.

Solución del ejercicio 5662 ▲004922

Sea $\alpha \equiv \overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})}$.
$\frac{OM}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AM}{\operatorname{sen}(2\alpha)} \Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{AM}{OM}$.
Al-Khâshi $\Rightarrow \frac{AM^2}{OM}(OM - OA) = (OM - OA)(OM + OA)$.
$OM = OA \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}$.
$OM \neq OA \Rightarrow OM = 2d(M, \Delta)$, donde Δ es la mediatriz de $[O, A]$, y M está del lado de O.

Solución del ejercicio 5663 ▲004923

$M : \begin{pmatrix} 1/\cos\theta \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$ hipérbola.

Solución del ejercicio 5664 ▲004924

Se llega a una hipérbola de ecuación $xy = 1$. Sean $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c, \frac{1}{c}\right)$. Entonces $H = \left(-\frac{1}{abc}, -abc\right) \in \mathscr{H}$.
La ecuación del circuncírculo de ABC es : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ y puntos en común en el círculo y a $\mathscr{H}$ verifican así : $x^4 + \alpha x^3 + \gamma x^2 + \beta x + 1 = 0$. Se sabe de tres raíces : $x = a, b, c$, entonces la cuarta es $q = \frac{1}{abc}$, lo que prueba que Q y H son simétricos por respecto a O.

Solución del ejercicio 5665 ▲005549

Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola. Existe un marco ortonormado en el que $\mathscr{H}$ admite una ecuación cartesiana de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0,\ b > 0)$. En este sistema de referencia, las asíntotas tienen ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$. Ellas son perpendiculares si y solo si $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = -1$ o aún si y solo si $a = b$. La excentricidad de $\mathscr{H}$ es entonces

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

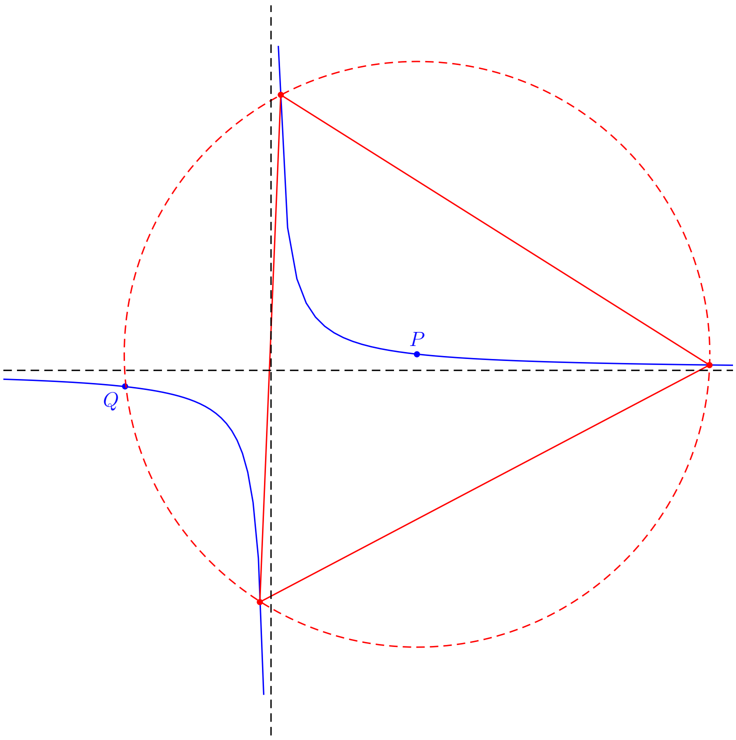
$$\boxed{\text{La excentricidad de la hipérbola equilátera es } \sqrt{2}.}$$

Solución del **ejercicio 5666** ▲005551

Se escoge un marco ortonormado en el que P tiene coordenadas (a,b), $a>0$, $b>0$ y la hipérbola $\mathscr{H}$ tiene la ecuación $xy=ab$. El círculo $\mathscr{C}$ de centro P y de radio PQ admite por representación paramétrica $\begin{cases} x=a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t \\ y=b+2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen} t, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Sea así $M\left(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t, b+2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen} t\right)$ un punto de $\mathscr{C}$.

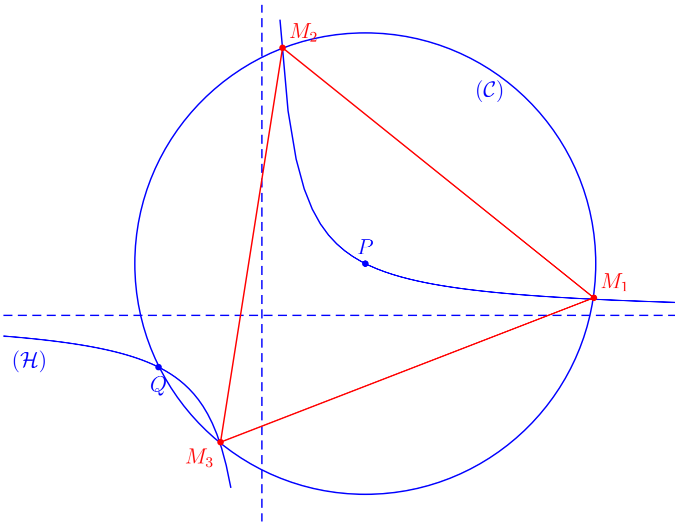
$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C} &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos t)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen} t)=ab\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos t+a\operatorname{sen} t)+4(a^2+b^2)\cos t\operatorname{sen} t=0\\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} t+\operatorname{sen}(2t)=0\right)\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2t)+\operatorname{sen}(t+t_0)+0,\text{ donde } \cos(t_0)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ y } \operatorname{sen}(t_0)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2t=-t-t_0+2k\pi \text{ o } \exists k\in\mathbb{Z}/\ 2t=\pi+t+t_0+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ t=-\frac{t_0}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ o } \exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\pi+t_0+2k\pi.
\end{aligned}$$

$t=\pi+t_0+2k\pi$ proporciona el punto de coordenadas $(-a,-b)$, es decir el punto Q. Si no, se obtienen tres puntos más los puntos $M\left(-\frac{t_0}{3}\right)$, $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ y $M\left(-\frac{t_0}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$. Se denotan A, B y C estos tres puntos. Dado que estos tres puntos están en un círculo de centro P y que $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right)=\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)=\left(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA}\right)=\frac{2\pi}{3}$, el triángulo ABC es equilátero.



Solución del ejercicio 5667 ▲005823

Se puede elegir un marco ortonormado en el que $(\mathscr{H})$ admite por ecuación cartesiana $xy = ab$ y P tiene coordenadas (a,b), donde a y b son dos números reales estrictamente positivos.



El círculo $(\mathscr{C})$ de centro P y de radio $PQ = 2OP$ admite la parametrización $\begin{cases} x = a + 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta \\ y = b + 2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$

Sea $M(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, b+2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, un punto del círculo $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (\mathscr{H}) &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}\theta) = ab \\ &\Leftrightarrow (a^2+b^2)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos\theta + a\operatorname{sen}\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\theta) + \operatorname{sen}(\theta+\theta_0) = 0 \text{ donde } \theta_0 = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta+\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi) \text{ o } \theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Las igualdades $\theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi)$ proporcionan el punto Q. Las igualdades $\theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$ proporcionan tres valores dos a dos distintos de θ módulo 2π y por lo tanto, tres puntos dos a dos distintos M_1, M_2 y M_3 de la hipérbola tal que los tres ángulos centrales P del triángulo $M_1M_2M_3$ sean iguales a $\frac{2\pi}{3}$. Porque P es el centro del círculo circunscrito de este triángulo, este triángulo es equilátero de centro P.

Solución del ejercicio 5668 ▲004925

1. vp $= 1, 1\pm\sqrt{2}$. Ec : $X^2 + (1+\sqrt{2})Y^2 + (1-\sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow$ hiperboloide de dos mantos.
2. vp $= -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0$. Ec : $-\frac{3}{2}(X^2+Y^2) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$ cilindro de revolución.
3. vp $= 0, 0, 14$. Ec : $14Z^2 + 4 = 0 \Rightarrow \varnothing$.
4. vp $= 0, -1\pm\sqrt{7}$. Ec : $-(1+\sqrt{7})Y^2 + (-1+\sqrt{7})Z^2 + 3 = 0 \Rightarrow$ cilindro hiperbólico.
5. vp $= 0, 2, 3$. Ec : $2Y^2 + 3Z^2 - \frac{8X}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$ paraboloide elíptico.

6. $\text{vp} = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$. Ec : $-\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} + Z^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ hiperboloide de revolución de una hoja.
7. $\text{vp} = 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$. Ec : $\frac{9Y^2}{2} - \frac{3Z^2}{2} = 0 \Rightarrow$ dos planos secantes.
8. $\text{vp} = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ec : $Y^2 - Z^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$ cilindro hiperbólico.
9. $\text{vp} = 1, 1, 0$. Ec : $X^2 + Y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$ cilindro de revolución.

Solución del ejercicio 5671 ▲004928

1. $\frac{(xz_0 - x_0z)^2}{a^2} + \frac{(yz_0 - y_0z)^2}{b^2} = (z - z_0)^2$.
2. $y_0 = 0$, $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{b^2} = 1$.

Solución del ejercicio 5672 ▲004929

1.
2.
3. No cuando el valor propio mediano es nulo (paraboloide hiperbólico, cilindro hiperbólico, cilindro parabólico, planos).

Solución del ejercicio 5673 ▲004930

1. $x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 z^2$.
2.

Solución del ejercicio 5675 ▲004932

1. Hipérbola equilátera de asíntotas : $\begin{cases} x - z - 1 = \pm y\sqrt{2} \\ x + z = 1. \end{cases}$
2. $x^2 + y^2 = 2z^2$, cono de revolución.

Solución del ejercicio 5676 ▲004933

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V = \frac{8\pi}{3}$.

Solución del ejercicio 5677 ▲004934

$\lambda = 0 : S = (0, 0, 0)$, cono de revolución.

$\lambda = \frac{4}{3} : S = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, cono de revolución.

Solución del ejercicio 5679 ▲004936

$\frac{\overrightarrow{MP}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{MQ}}{b^2} = \frac{\overrightarrow{MR}}{c^2}$.

Solución del ejercicio 5682 ▲004939

$e < 1$: elipsoide de revolución, $e = 1$: cilindro parabólico, $e > 1$: hiperboloide de revolución.

Solución del ejercicio 5683 ▲004940

Elipsoide.

Solución del ejercicio 5684 ▲004941

$x^2\cos^2\theta + y^2 - 2xz\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - z^2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow$ cono elíptico.

Solución del ejercicio 5685 ▲004942

Sea r el radio de S y h la distancia del centro I de S a P. Se escoge un sistema de referencia tal que $P = Oxy$ y $I = (0,0,h)$. Sea S' una esfera de centro $M(x,y,z)$:
Para $z > 0$: S y S' exteriores $\Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$.
S al interior de $S' \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h > r$.
S' al interior de $S \Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
Para $z < 0$: S y S' exteriores $\Leftrightarrow 2(h-r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.
S' al interior de $S \Leftrightarrow 2(h+r)z = h^2 - r^2 + x^2 + y^2$ si $h < r$.

Solución del ejercicio 5687 ▲005825

1. Para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se establece $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.
   Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2+y^2+z^2-2yz = x^2+(y-z)^2 = X^2+2Y^2$ poniendo $X = x$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$ y $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ correspondiente al cambio de bases ortonormadas de matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
   Denotemos $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ el sistema de referencia ortonormado así definido. La superficie $(\mathscr{S})$ admite por ecuación en $\mathscr{R}$? $X^2 + 2Y^2 - 4X + 2\sqrt{2}(Y+Z) - 1 = 0$ o aún
   $$(X-2)^2 + 2\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$
   La superficie $(\mathscr{S})$ es un paraboloide elíptico con vértice S de coordenadas $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ en $\mathscr{R}'$ y entonces $(2,2,1)$ en $\mathscr{R}$.
2. Usando $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ y $Z = z$, se obtiene : $2X^2 + Z^2 = 1$. La superficie $(\mathscr{S})$ es un cilindro elíptico de eje (OY) o incluso de eje la recta de ecuaciones $\begin{cases} y = -x \\ z = 0. \end{cases}$
3. Para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se escribe $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$. La matriz de Q en la base canónica (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   $$\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (X-1) + (X-1) = (1-X)((1-X)^2 - 2)$$
   $$= (1-X)(1+\sqrt{2}-X)(1+\sqrt{2}-X).$$

Q es de rango 3 y de signatura $(2,1)$. La superficie $(\mathscr{S})$ puede ser un hiperboloide de una o dos hojas o un cono de revolución. $\ker(A-I_3)=\mathrm{vect}(e_1)$, donde $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$. $\ker(A-(1+\sqrt{2})I_3)=\mathrm{vect}(e_2)$, donde $e_2=\frac{1}{2}(\sqrt{2},-1,1)$ y $\ker(A-(1-\sqrt{2})I_3)=\mathrm{vect}(e_3)$, donde $e_3=\frac{1}{2}(\sqrt{2},1,-1)$

La matriz de pasaje correspondiente es la matriz $P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Determinar una ecuación reducida de la superficie $(\mathscr{S})$ en el sistema de referencia (O,e_1,e_2,e_3).

$$X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(Y+Z)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}X-Y+Z)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}X+Y-Z)+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y^2+\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}Y\right)+(1-\sqrt{2})\left(Z^2-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}Z\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+\frac{3+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3+\sqrt{2})^2}{8(1+\sqrt{2})}+(1-\sqrt{2})\left(Z-\frac{3-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3-\sqrt{2})^2}{8(1-\sqrt{2})}+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{11+6\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{2})}+\frac{11-6\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})}-1$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2-\frac{4(1+\sqrt{2})}{3}\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=1.$$

La superficie $(\mathscr{S})$ es un hiperboloide de dos hojas de centro de coordenadas $\left(0,-1+\frac{\sqrt{2}}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$.

4. Se define $X=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y)$ y $Z=z$.
   En el sistema de referencia $\mathscr{R}'$ así definido, la superficie $(\mathscr{S})$ admite por ecuación $5X^2+5Z^2-\frac{2}{\sqrt{5}}(X+2Y)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X+Y)=0$ o aún $5\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5Z^2=1$. La superficie $(\mathscr{S})$ es un cilindro de revolución con eje la recta de ecuaciones $\begin{cases} X=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ Z=0 \end{cases}$ en $\mathscr{R}'$ y de radio $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
5. $x^2-4x-3y-2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=3(y+2)$. La superficie $(\mathscr{S})$ es un cilindro parabólico de dirección (Oz).
6. Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, se escribe $Q(x,y,z)=7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz$. La matriz de Q en la base canónica (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ es $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 \\ 2 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A=\begin{vmatrix} 7-X & 2 & 10 \\ 2 & -2-X & 8 \\ 10 & 8 & 4-X \end{vmatrix}=(7-X)(X^2-2X-72)-2(-2X-72)+10(10X+36)$$
$$=-X^3+9X^2+162X=-X(X+9)(X-18).$$

Entonces Q es de rango 2 y de signo $(1,1)$.

$$(x,y,z)\in\ker(A)\Leftrightarrow\begin{cases}7x+2y+10z=0\\2x-2y+4z=0\\10x+8y+4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-4z\\5x+4y=-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2z\\y=2z\end{cases}\text{ y }\ker(A)=\text{vect}(e_1),$$

donde $e_1=\frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$(x,y,z)\in\ker(A+9I_3)\Leftrightarrow\begin{cases}16x+2y+10z=0\\2x+7y+8z=0\\10x+8y+13z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-8x-5z\\z=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\z=-2x\end{cases}$ y $\ker(A+9I_3)=$ $\text{vect}(e_2)$, donde $e_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)$. $\ker(A-18I_3)=\text{vect}(e_3)$, donde $e3=-e_1\wedge e_2=\frac{1}{3}(2,1,2)$.

La matriz de pasaje del cambio de bases así definido es $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$. Determinar una ecuación reducida de la superficie $(\mathscr{S})$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$

$$\begin{aligned}&7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0\\&\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2-12(-2X+Y+2Z)+24(2X+2Y+Z)-36(X-2Y+2Z)+36=0\\&\Leftrightarrow -9Y^2+18Z^2+36X+108Y-72Z+36=0\Leftrightarrow -Y^2+2Z^2+4X+12Y-8Z+4=0\\&\Leftrightarrow 4(X+8)=(Y-6)^2-2(Z-2)^2.\end{aligned}$$

La superficie $(\mathscr{S})$ es un paraboloide hiperbólico. Su punto de silla es el punto de coordenadas $(-8,6,2)$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$.

7. La superficie $(\mathscr{S})$ admite por ecuación cartesiana : $x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx-x+y=0$.
Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, se escribe $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-zx$.
La matriz de Q en la base canónica (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ es $A=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$. $\text{Sp}(A)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$.
Una base ortonormada (e_1,e_2,e_3) de vectores propios es la familia de matrices

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

En el sistema de referencia $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$, la superficie $(\mathscr{S})$ admite por ecuación cartesiana

$$\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{6}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)=0$$

o aún $\frac{3}{2}(X^2+Y^2)-\sqrt{2}X=0$ o finalmente $\left(X-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{9}$.

La superficie $(\mathscr{S})$ es un cilindro de revolución con eje la recta de ecuación $\begin{cases}X=\frac{\sqrt{2}}{3}\\Y=0\end{cases}$ en el sistema de referencia $\mathscr{R}'$ y de radio $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8. Usando$X=y$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ y $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z)$, $xy+yz=0 \Leftrightarrow XY=\sqrt{2}$. La superficie $(\mathscr{S})$ es un cilindro hiperbólico.
9. Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, se escribe $Q(x,y,z)=xy+yz+zx$. La matriz de Q en la base canónica (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ es $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$ y por lo tanto, la superficie $(\mathscr{S})$ es ya sea un hiperboloide de una o dos hojas, sea un cono de segundo grado y en todos los casos una superficie de revolución (ya que los dos valores propios negativos son iguales) eje de dirección $\ker(A-I_3)=\mathrm{vect}(1,1,1)$ y pasando por el punto crítico $\Omega(-1,1,-1)$.
   Cuando nos situamos en el sistema de referencia (Ω,i,j,k), la superficie $(\mathscr{S})$ admite por ecuación $XY+YZ+ZX+2=0$, (pues $f(-1,1,-1)=2$), luego en el sistema de referencia (Ω,e_1,e_2,e_3), $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+Z^2+2=0$ o aún $\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}Y^2-\frac{1}{2}Z^2=1$.
   La superficie $(\mathscr{S})$ es un hiperboloide de revolución de una hoja.

Solución del ejercicio 5688 ▲005826

Se busca $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j)\neq(0,\dots,0)$ tal que la superficie $(\mathscr{S})$ de ecuación $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx+2gx+2hy+2iz+j=0$ contiene la parábola $(\mathscr{P})$ con la representación paramétrica dada por $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\y=t\\z=0,\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, la parábola $(\mathscr{P}')$ de representación paramétrica $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=\frac{t^2}{2},\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ y el punto $A(2,3,2)$.

$$(\mathscr{P})\subset(\mathscr{S})\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+bt^2+dt^3+gt^2+2ht+j=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+dt^3+(b+g)t^2+2ht+j=0$$
$$\Leftrightarrow a=d=h=j=0\ \text{ y }\ g=-b.$$

Entonces $(\mathscr{P})$ está contenido en $(\mathscr{S})$ si y solo si $(\mathscr{S})$ tiene una ecuación de la forma $by^2+cz^2+2eyz+2fzx-2bx+2iz=0$, con $(b,c,e,f,i)\neq(0,0,0,0,0)$.

$$(\mathscr{P}')\subset(\mathscr{S})\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ bt^2+\frac{c}{4}t^4+et^3+it^2=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{c}{4}t^4+et^3+(b+i)t^2=0\Leftrightarrow c=e=0 \text{ e } i=-b.$$

Entonces $(\mathscr{P})$ y $(\mathscr{P}')$ están contenidos en $(\mathscr{S})$ si y solo si $(\mathscr{S})$ tiene una ecuación de la forma $by^2+2fzx-2bx-2bz=0$, con $(b,f)\neq(0,0)$.
En fin, $A\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 9b+8f-4b-4b=0\Leftrightarrow b=-8f$ y $f\neq0$. Por tanto, se encuentra una y solo una cuádrica, a saber, la superficie $(\mathscr{S})$ de ecuación $-4y2+zx+8x+8z=0$. Planteando $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y=y$ y $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, se obtiene

$$-4y2+zx+8x+8z=-4Y^2+\frac{1}{2}(X+Z)(X-Z)+8\sqrt{2}X=\frac{1}{2}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-4Y^2+\frac{1}{2}Z^2-64.$$

En el nuevo sistema de referencia así definido, una ecuación cartesiana de la superficie $(\mathscr{S})$ es $\frac{1}{128}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{16}Y^2+\frac{1}{128}Z^2=1$ y $(\mathscr{S})$ es un hiperboloide de dos hojas.

Solución del ejercicio 5689 ▲005827

Sea $(\mathscr{S})$ una superficie de segundo grado de ecuación $f(x,y,z)=0$, donde f es simétrica en x, y y z. Sean σ_1, σ_2 y σ_3 las tres funciones simétricas elementales en x, y y z.

Dado que f es simétrica en x, y y z, f es un polinomio en σ_1, σ_2 y σ_3. f es por otro lado un polinomio de grado 2 en x, y y z y entonces

$$\text{existe } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \text{ con } (a,b) \neq (0,0) \text{ tal que } f = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d.$$

Recíprocamente, si f es de la forma anterior, entonces f es simétrica en x, y y z.
Dado que $\sigma_2 = xy+yz+zx = \frac{1}{2}((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2))$, $(\mathscr{S})$ admite una ecuación cartesiana de la forma :

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)(x+y+z)^2 - b(x^2+y^2+z^2) + c(x+y+z) + d = 0, \text{ donde } (a,b) \neq (0,0).$$

Sea $(\mathscr{D})$ la recta que pasa por O dirigida por $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{n}$ es un vector normal a todo plano de ecuación $x+y+z=k$, $k \in \mathbb{R}$) y sea r una rotación cualquiera de eje $(\mathscr{D})$.
Si M es un punto de coordenadas (x,y,z) y $M' = r(M)$ tiene coordenadas (x',y',z'), entonces $x+y+z = x'+y'+z'$, pues M y M' están en un plano perpendicular a $(\mathscr{D})$ y $x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ porque una rotación es una isometría y porque $r(O) = O$. Finalmente, para toda rotación r de eje $(\mathscr{D})$, $M \in (\mathscr{S}) \Leftrightarrow r(M) \in (\mathscr{S})$ y por lo tanto, la superficie $(\mathscr{S})$ es una superficie de revolución de eje $(\mathscr{D})$.

Solución del ejercicio 5690 ▲005828

Sea $A(a,b,c)$ un punto cualquiera en el espacio E_3. Determinar un sistema de ecuación del círculo (C_A) de eje (Δ) de ecuaciones $x=y=z$ pasando por A. El círculo es por ejemplo la intersección del plano pasando por A de vector normal $(1,1,1)$ y la esfera de centro O y de radio OA.

Un sistema de ecuaciones de (C_A) es $\begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2. \end{cases}$

Determinar entonces una ecuación cartesiana de la superficie $\mathscr{S}$. Una condición necesaria y suficiente para que un punto $M(x,y,z)$ sea un punto de $(\mathscr{S})$ es $(C_M) \cap (\mathscr{D}) \neq \varnothing$. Entonces

$$\begin{aligned}
M \in (\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x+y+z = \alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ x+y+z = \gamma+2+2\gamma+1+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ \gamma = \frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2 + \left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2 \\
&\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z+5)^2 + 4(x+y+z-1)^2 + (x+y+z-3)^2 \\
&\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = 6(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 38 \\
&\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Una ecuación cartesiana de } (\mathscr{S}) \text{ es } 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0.}$$

La matriz de la forma cuadrática $(x,y,z)\mapsto 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3\\ -3 & 5 & -3\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$. Sus valores propios son 8, valor propio de orden 2 asociada al plano de ecuación $x+y+z=0$ y -1 valor propio de orden 1 asociada a la recta de ecuación. En el sistema de referencia $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, donde $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ y $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 8x'^2+8y'^2-z'^2-\sqrt{3}z'-19=0\Leftrightarrow 8\left(x'-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 8y'^2-z'^2=19+\frac{3}{32}.$$

La superficie $(\mathscr{S})$ es un hiperboloide de una hoja.

Solución del ejercicio 5691 ▲005829

---

1. Se denota $(\mathscr{S})$ el cono de vértice S y de directriz $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{O\}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ O+\lambda\overrightarrow{OM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\ \begin{cases}\lambda x=t\\ \lambda y=t^2\\ \lambda z=t^3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\ \begin{cases}t=\lambda x\\ y=\lambda x^2\\ z=\lambda^2x^3\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 0\ \text{ y }\ y\neq 0\ \text{ y }\ z=\left(\frac{y}{x^2}\right)^2x^3$$
$$\Leftrightarrow x\neq 0\ \text{ y }\ y\neq 0\ \text{ y }\ z=y^2x.$$

Si se recupera el punto O, $M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow(x=y=0 \text{ o } xy\neq 0)$ y $z=y^2x$. Se puede notar que la superficie de ecuación $z=y^2x$ es la unión del cono, vértice O comprendido, y los ejes (Ox) y (Oy) que no forman parte del cono (excepto por el punto O).

2. Se denota $(\mathscr{S})$ el cono de vértice S y de directriz $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{S\}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ S+\lambda\overrightarrow{SM}\in(\mathscr{C})$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ (1+\lambda(x-1),-1+\lambda(y+1),\lambda z)\in(\mathscr{C})$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ \begin{cases}-1+\lambda(y+1)+\lambda z=1\\ (1+\lambda(x-1))^2+(-1+\lambda(y+1))^2=\lambda z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2+\left(-1+\frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2=\frac{2}{y+z+1}z$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z\ \text{ y }\ y+z+1\neq 0.$$

En resumen, $M(x,y,z)$ está en $(\mathscr{S})$ si y solo si $M=S$ o $M\neq S$ y $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ y $y+z+1\neq 0$.
Ahora el punto $S(1,-1,0)$ está en el plano (P) de ecuación $y+z+1=0$ y la curva $(\mathscr{C})$ no tiene puntos en este plano. Entonces la superficie $(\mathscr{S})$ contiene uno y solo un punto de este plano.
Se denota entonces $(\mathscr{S}')$ la superficie de ecuación $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z$ y verificar que la intersección de $(\mathscr{S}')$ y de (P) es $\{S\}$. Esto demuestra que $(\mathscr{S}')=(\mathscr{S})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\cap(P)\Leftrightarrow\begin{cases}y+z+1=0\\ (2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2=2(y+z+1)z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+z+1=0\\ 2x+y+z-1=0\\ y-z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ z=0\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow M=S.$$

Finalmente, $(\mathscr{S}') = (\mathscr{S})$. Una ecuación de $(\mathscr{S})$ es, por lo tanto $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$ o aún $4x^2+2y^2+4xy+4xz-2yz-4x+2y-6z+2=0$. $(\mathscr{S})$ es, por lo tanto un cono cuadrático.

Solución del ejercicio 5692 ▲005830

Denotemos (C) el cono de vértice S circunscrito a la superficie $(\mathscr{S})$.

1. Aquí $(\mathscr{S})$ es la esfera de centro O y de radio 3 y el punto S es exterior a esta esfera. Entonces

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (C) &\Leftrightarrow M = S \text{ o } M \neq S \text{ y } d(O,(SM)) = 3 \Leftrightarrow M = S \text{ o } M \neq S \text{ y } \|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \Leftrightarrow \|(0,5,0)\wedge(x,y-5,z)\| = 3\|(x,y-5,z)\| \\ &\Leftrightarrow (5z)^2+(5x)^2 = 9(x^2+(y-5)^2+z^2) \Leftrightarrow 16x^2-9(y-5)^2+16z^2 = 0. \end{aligned}$$

2. Sea $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punto de $(\mathscr{S})$ (es decir, tal que $x_0^2+x_0y_0+z_0-1=0$). $(\mathscr{S})$ es una superficie cuadrática. Una ecuación del plano tangente en $(\mathscr{S})$ en M_0 es provista por la regla de duplicación de términos :

$$xx_0+\frac{1}{2}(y_0x+x_0y)+\frac{1}{2}(z+z_0)-1=0.$$

Este plano tangente contiene el punto $S(0,0,0)$ si y solo si $z_0=2$, lo que demuestra que la curva de contacto admite para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+xy+z-1=0 \\ z=2 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x^2+xy+1=0 \\ z=2. \end{cases}$

Es una hipérbola del plano de ecuación $z=2$.

El cono de vértice S circunscrito a $(\mathscr{S})$ es entonces el cono de vértice S y de directriz $(\mathscr{C})$ de ecuaciones $\begin{cases} x^2+xy+1=0 \\ z=2. \end{cases}$

Se encuentra la superficie de la ecuación $4x^2+4xy+z^2=0$. Es un cono de segundo grado.

Solución del ejercicio 5693 ▲005831

Una ecuación de $(\mathscr{S})$ es aún $xy+yz+zx-\lambda x-\lambda y-\lambda z+\lambda=0$.

La matriz de la forma cuadrática $Q:\ (x,y,z)\mapsto xy+yz+zx$ en la base (i,j,k) es $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0 \end{pmatrix}$ los valores propios de esta matriz son $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y 1. El rango de Q es 3 y su signatura es $(1,2)$. La superficie $(\mathscr{S})$ es a priori un hiperboloide, o un cono de segundo grado. Entonces $(\mathscr{S})$ es un cono de segundo grado si y solo si su (único) centro de simetría que es también el único punto crítico de la función $f:\ (x,y,z)\mapsto x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda$ pertenece a $(\mathscr{S})$.

Punto crítico.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=\lambda \\ z+x=\lambda \\ x+y=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}.$$

Se denota entonces Ω un punto de coordenadas $\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$. $(\mathscr{S})$ es un cono $\Leftrightarrow \Omega\in(\mathscr{S}) \Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4}-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\in\left\{0,\frac{4}{3}\right\}$.

• Si $\lambda = 0$, $(\mathscr{S})$ admite por ecuación $xy + yz + zx = 0$. En el sistema de referencia (O, X, Y, Z), donde $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z)$ y $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$, $(\mathscr{S})$ admite por ecuación cartesiana $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 = 0$ o aún $(\mathscr{S})$ es el cono de revolución de vértice O y de sección recta el círculo de ecuaciones $\begin{cases} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \end{cases}$ en (O, X, Y, Z) o aún $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ en (O, x, y, z).
Dado que $(\mathscr{S})$ es un cono de revolución con vértice O y de eje la recta de ecuaciones $x = y = z$, es más interesante proporcionar el semi ángulo en el vértice θ. El punto $A(1,1,1)$ está en el eje y el punto $M(2, 2-1)$ esta en el cono. Entonces $\theta = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}|}{OA \times OM}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

• Si $\lambda = \frac{4}{3}$, $(\mathscr{S})$ admite por ecuación $xy + yz + zx - \frac{4}{3}(x + y + z) + \frac{4}{3} = 0$ en $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ o aún $xY + XZ + YZ = 0$ en (Ω, i, j, k), lo que nos lleva al caso anterior.

Solución del ejercicio 5694 ▲005832

Para todo real t, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \frac{1}{4}e^{2t}((\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t + \operatorname{sen} t)^2) = \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(z(t))^2$ y el soporte del arco considerado está contenido en el cono de revolución de la ecuación $z^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Solución del ejercicio 5695 ▲005833

1.

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C) /\ M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a\cos t + \lambda \\ y = b \operatorname{sen} t \\ z = a\cos t \operatorname{sen} t + \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} \lambda = x - a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \\ z = a\cos t \operatorname{sen} t + x - a\cos t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b\operatorname{sen} t \\ z = a\cos t \operatorname{sen} t + x - a\cos t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b\operatorname{sen} t \\ z - x = a\cos t(\operatorname{sen} t - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b\operatorname{sen} t \\ b(z - x) = a\cos t(y - b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^4(z - x)^2 + y^2a^2(y - b)^2 = a^2b^2(y - b)^2.$$

En efecto, • $(\Rightarrow)$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $y = b\operatorname{sen} t$ y $b(z - x) = a\cos t(y - b)$, entonces

$$\begin{aligned} b^4(z - x)^2 + y^2a^2(y - b)^2 &= b^2a^2\cos^2 t(y - b)^2 + b^2\operatorname{sen}^2 t a^2(y - b)^2 = a^2b^2(y - b)^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \\ &= a^2b^2(y - b)^2. \end{aligned}$$

• $(\Leftarrow)$ Recíprocamente, si $b^4(z - x)^2 + y^2a^2(y - b)^2 = a^2b^2(y - b)^2$, entonces $b^4(z - x)^2 = a^2(y - b)^2(b^2 - y^2)$ y entonces o bien $y = b$, o bien $b^2 - y^2 \geqslant 0$. Así, existe un real t tal que $y = b\operatorname{sen} t = b\operatorname{sen}(\pi - t)$, luego

$$\begin{aligned} b^4(z - x)^2 = a^2(y - b)^2(b^2 - y^2) &\Rightarrow b^4(z - x)^2 = a^2(b\operatorname{sen} t - b)^2b^2\cos^2 t \\ &\Rightarrow b(z - x) = \pm a\cos t(b\operatorname{sen} t - b) \\ &\Rightarrow b(z - x) = a\cos t(y - b) \text{ o } b(z - x) = a\cos(\pi - t)(y - b) \end{aligned}$$

y existe un real t' tal que $y = b\operatorname{sen} t'$ y $b(z - x) = a\cos t'(y - b)$.

2.

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/\ \begin{cases} x = X \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + \lambda \\ Y + Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (y-\lambda) + (z-\lambda) = 1 \\ x^2 + (y-\lambda)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y+z-1)\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (y-z+1)^2 = 4.$$

Solución del ejercicio 5696 ▲005834

La dirección del cilindro es ortogonal al plano de ecuación $z = x$ y por lo tanto, es generado por el vector $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$.

$$M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists m \in (C)/\ M = m + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3/\ \begin{cases} x = X - \lambda \\ y = Y \\ z = Z + \lambda \\ Z = X \\ 2X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \begin{cases} z - \lambda = x + \lambda \\ 2(x+\lambda)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}(z-x)\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+z)^2 + 2y^2 = 2.$$

Solución del ejercicio 5697 ▲005835

Un marco de referencia $(\mathscr{D})$ es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(2,1,0)$ y $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

$$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D})) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|^2 = R^2 \|\overrightarrow{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x-2,y-1,z) \wedge (1,1,1)\|^2 = R^2 \|(1,1,1)\|^2$$
$$\Leftrightarrow (y-z-1)^2 + (x-z-2)^2 + (x-y-1)^2 = 3R^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6z + 6 - 3R^2 = 0.$$

La recta (Oz) es tangente a $(\mathscr{C})$ si y solo si $d((Oz),(\mathscr{D})) = R$.

$$(Oz) \text{ es tangente a } (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \frac{\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{u}\right]^2}{\left\|\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right\|^2} = R^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 = \|(-1,1,0\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Solución del ejercicio 5698 ▲005836

En un punto $M_0(x_0,y_0,z_0)$ del elipsoide la regla de división de términos proporciona una ecuación del plano tangente : $xx_0 + 2yy_0 + 3zz_0 = 21$. Este plano es paralelo al plano de ecuación $x + 4y + 6z = 0$ si y solo si el vector $(x_0, 2y_0, 3z_0)$ es colineal con el vector $(1,4,6)$ o aún si y solo si $2x_0 = y_0 = z_0$. Finalmente, el punto $(x_0, 2x_0, 2x_0)$ está en el elipsoide si y solo si $x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21$, lo que equivale a $x_0^2 = 1$. Los planos buscados son los dos planos de ecuaciones respectivas $x + 4y + 6z = 21$ y $x + 4y + 6z = -21$.

Solución del ejercicio 5699 ▲005837

El plano tangente (P_0) en (x_0, y_0, z_0) tal que $x_0 - 8y_0z_0 = 0$ admite por ecuación $(x + x_0) - 8(z_0y + y_0z) = 0$ o aún $x - 8z_0y - 8y_0z + 8y_0z_0 = 0$. Un sistema de referencia de $(\mathscr{D})$ es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(-2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u}(4, 0, -1)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}) \subset (P_0) &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (-2 + 4\lambda) - 8z_0 + 8y_0\lambda + 8y_0z_0 = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (8y_0 + 4)\lambda + 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y_0 + 4 = 0 \text{ y } 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2} \text{ y } z_0 = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Se encuentra uno y solo un plano tangente conteniendo la recta $(\mathscr{D})$, es decir el plano tangente a $(\mathscr{S})$ en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ de ecuación $3x + 4y + 12z + 2 = 0$.

Solución del ejercicio 5700 ▲005838

1. Un marco de referencia $(\mathscr{D})$ es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{u}(3, 3, 1)$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathscr{D})) = 3 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|^2 = 9\|\overrightarrow{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x, y+1, z-2) \wedge (3,3,1)\|^2 = 9 \times 19 \\ &\Leftrightarrow (y - 3z + 7)^2 + (x - 3z + 6)^2 + 9(x - y - 1)^2 = 171.\end{aligned}$$

2. Un marco de referencia $(\mathscr{D})$ es $(A, \overrightarrow{u})$, donde $A(0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{u}(3, 3, 1)$. Además, $S = A$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z) \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow M = A \text{ o } M \neq A \text{ y } \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}\right|}{AM \times \|\overrightarrow{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}\right)^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\overrightarrow{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3(y+1) + (z-2))^2 = 19(x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2) \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3y + z + 1)^2 - 19(x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 - 15z^2 + 72xy + 24xz + 24yz + 24x - 14y + 84z - 91 = 0.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5703 ▲004900

1. Parábola. ejes = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. vértice : $X = -\frac{4}{5}, Y = -\frac{16}{5}$.
2. Elipse. $\Omega = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, ejes a $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.
3. Elipse. $\Omega = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ejes a $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
4.
5. Centro $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 0 < m < 1/2 \Rightarrow \text{hipérbola verticale.} \\ 1/2 < m < 1 \Rightarrow \text{hipérbola horizontale.} \\ 1 < m \Rightarrow \text{elipse verticale.} \end{cases}$$

Solución del ejercicio 5704 ▲004901

Ejes de ángulo $-\frac{1}{2}\arctan 2\ [\pi/2]$, excentricidad $= \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$.

Solución del ejercicio 5705 ▲004902

$\mathscr{C} : x^2(1-\mathrm{e}^2)+y^2+2\mathrm{e}^2dx-\mathrm{e}^2d^2=0$ $\qquad T_u,v : x(u(1-\mathrm{e}^2)+\mathrm{e}^2d)+vy=\mathrm{e}^2d(d-u)$

$uv'-u'v=0 \Rightarrow x=d$.

Solución del ejercicio 5727 ▲004984

1.
2.
3. $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{2t(t^2-t-1)}{(t-1)^2} \Rightarrow t = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
4. $\det(M',M'') = \frac{3}{2}\operatorname{sen}4t+3\operatorname{sen}2t \Rightarrow t = k\pi$.

Solución del ejercicio 5728 ▲004985

1.
2. $\frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{-2(t-1)(t^2+t+1)(t^3-3t-1)}{t(2t^3+1)(t^3+2+3t)}$.

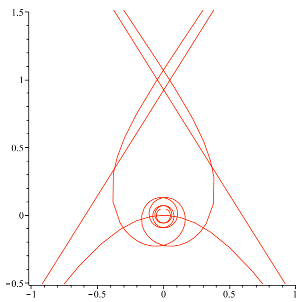
Solución del ejercicio 5733 ▲004990

1.
2. Marco de referencia $(0,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$, con θ constante $\Rightarrow$ punto de concurso : $X=\cos\theta$, $Y=\operatorname{sen}\theta$.

Solución del ejercicio 5734 ▲004991

Coordenadas polares : $\rho = \frac{a}{2}\left(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)$ con $A=(a,0)$.

Solución del ejercicio 5735 ▲004992



La curva es simétrica con respecto a Oy. $M(\rho,\theta)=M_1(\rho_1,\theta_1)$ si y solo si $\begin{cases}\theta_1\equiv\theta\ [2\pi]\\ \rho_1=\rho\end{cases}$ o $\begin{cases}\theta_1\equiv\theta+\pi\ [2\pi]\\ \rho_1=-\rho.\end{cases}$

En el primer caso, $\rho = \rho_1 \Leftrightarrow \theta\theta_1 = -1$, para $\theta \neq \theta_1$ que da la ecuación en θ :

$$\theta^2 + 2k\pi\theta + 1 = 0$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Esta ecuación con k fijo no nulo admite dos raíces, que da dos familias de puntos dobles. Igualmente, el segundo caso conduce a otras dos familias definidas por la ecuación :

$$\theta^2 + (2k+1)\pi\theta + 1 = 0.$$

Solución del ejercicio 5736 ▲005523

(Los grandes clásicos)

1. **El astroide.**

   (a) **Dominio de estudio.**

   • Para todo real t, $M(t)$ existe.

   • Para todo real t, $M(t+2\pi) = M(t)$. Así, la curva completa se obtiene cuando t describe un segmento de longitud 2π como por ejemplo $[-\pi, \pi]$.

   • Para todo real t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \cos^3(-t) \\ \operatorname{sen}^3(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ -\operatorname{sen}^3 t \end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

   Se estudia y se construye la curva para $t \in [0, \pi]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox).

   • Para todo real t,

$$M(t+\pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t+\pi) \\ \operatorname{sen}^3(t+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\operatorname{sen}^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

   La parte de la curva obtenida cuando t recorre $[-\pi, 0]$ es, por lo tanto también la simétrica con respecto a O de la porción de curva obtenida cuando t recorre $[0, \pi]$. Sin embargo, esta constatación no nos permite reducir más el dominio de estudio.

   • Para todo real t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \operatorname{sen}^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \operatorname{sen}^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

   Se estudia y se construye la curva para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Oy), luego por reflexión del eje (Ox).

   • Para todo real t,

$$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

   Se estudia y se construye la curva para $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje la recta de ecuación $y = x$, luego de eje (Oy) y finalmente de eje (Ox).

Variaciones conjuntas de x y y. La función $t \mapsto x(t)$ es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y la función $t \mapsto y(t)$ es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Estudio de puntos singulares. Para $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t \\ 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a\cos t \operatorname{sen} t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Para todo real t, el vector $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es unitario y por lo tanto, no nulo. Así,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3a\cos t \operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ o } \operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Los puntos singulares son, por lo tanto los $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ es un punto regular y la tangente en $M(t)$ es dirigida por el vector $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$.

Estudiar entonces el punto singular $M(0)$. Para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$,

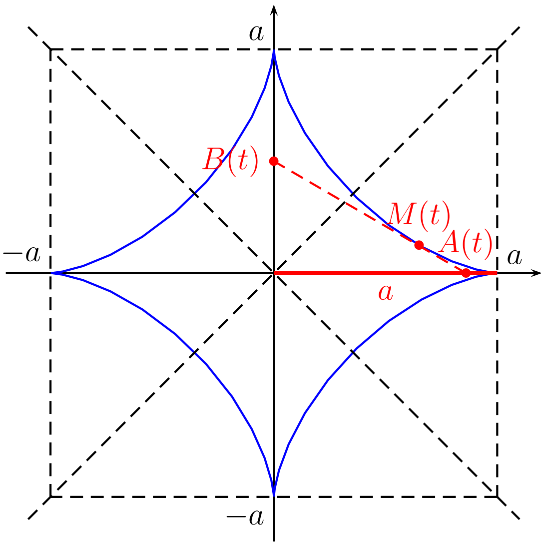
$$\begin{aligned} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} &= \frac{a\operatorname{sen}^3 t}{a\cos^3 t - a} = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \\ &= \frac{8\operatorname{sen}^3 \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{-2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}(\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4\operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1}, \end{aligned}$$

y por tanto, $\lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$.

(Si ya se saben las equivalencias, es más corto : $\frac{\operatorname{sen}^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2} \times 3} = -\frac{2t}{3} \to 0$). La curva admite en $M(0)$ una tangente dirigida por el vector $(1,0)$. Por simetría, la curva admite también una tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $M(\pi)$, dirigida respectivamente por $(0,1)$, $(0,1)$ y $(1,0)$. Siempre por simetría, estos cuatro puntos son puntos de retroceso de primera especie.

Resulta así que para todo real t, la tangente en $M(t)$ es dirigida por el vector $(-\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Se deduce la curva.



(b) Sea $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sea ha visto que la tangente (T_t) en $M(t)$ es dirigida por el vector $(-\cos t, \operatorname{sen} t)$. Una ecuación cartesiana de T_t es, por lo tanto : $-\operatorname{sen} t(x - a\cos^3 t) - \cos t(y - a\operatorname{sen}^3 t) = 0$, o aún

$$x\operatorname{sen} t + y\cos t = a\operatorname{sen} t\cos t. \quad (T_t)$$

Inmediatamente, se deduce que $A(t)$ tiene coordenadas $(a\cos t, 0)$ y que $B(t)$ tiene por coordenadas $(0, b\operatorname{sen} t)$ ya que

$$\boxed{\forall t \in]0, \tfrac{\pi}{2}[,\ A(t)B(t) = a.}$$

2. **La cicloide.**

(a) La condición de rodadura antideslizante se traduce por $\overline{OI} = MI$ o aún $x_\Omega = Rt$. Se deduce que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overrightarrow{\Omega M}} = Rt + R\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R\operatorname{sen} t = R(t - \operatorname{sen} t)$$

y

$$y_M = y_\Omega + y_{\overrightarrow{\Omega M}} = R + R\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$

(b) **Dominio de estudio.**

• Para todo real t, $M(t)$ existe.

• Para todo real t, $M(t + 2\pi) = M(t) + \overrightarrow{u}$, donde $\overrightarrow{u}(2\pi R, 0)$. Así, se traza la curva cuando t recorre $[0, 2\pi]$ y la curva completa se obtiene por traslaciones de vectores $k\overrightarrow{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Para todo real t, $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. Se traza la curva cuando t recorre $[0, \pi]$, luego se completa por reflexión de eje (Oy), luego por traslaciones.

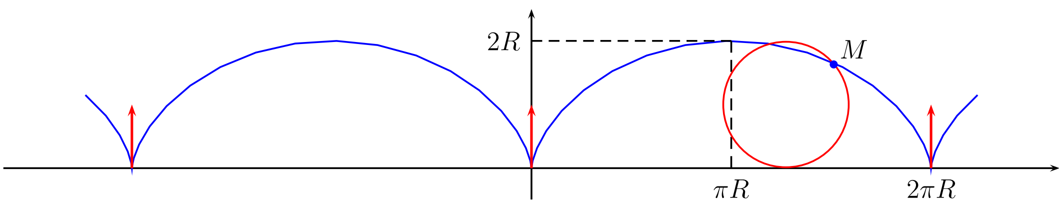
Estudio de puntos singulares. Para $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$ y $y'(t) = R\operatorname{sen} t = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. El punto $M(t)$ es regular si y solo si $t \in]0, \pi]$. En este caso, la tangente en $M(t)$ es dirigida por $\begin{pmatrix} 2R\operatorname{sen}^2(t/2) \\ 2R\operatorname{sen}(t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix}$ o aún por $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$.

Estudiar igualmente el punto singular $M(0)$. Para $t \in]0, \pi]$,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{R(1 - \cos t)}{R(t - \operatorname{sen} t)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Así, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = +\infty$ y la tangente en $M(0)$ es dirigida por $(0, 1)$. Así, en todos los casos, la tangente en $M(t)$ es dirigida por el vector $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Por simetría, $M(0)$ es un punto de retroceso de primera especie.

Si no, x y y son funciones crecientes en $[0, \pi]$.



3. **Una curva de Lissajous. Dominio de estudio.**

• Para todo real t, $M(t)$ existe.

• Para todo real t, $M(t+2\pi) = M(t)$ y la curva completa se obtiene cuando t recorre $[-\pi, \pi]$.
• Para todo real t,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(-2t) \\ \operatorname{sen}(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

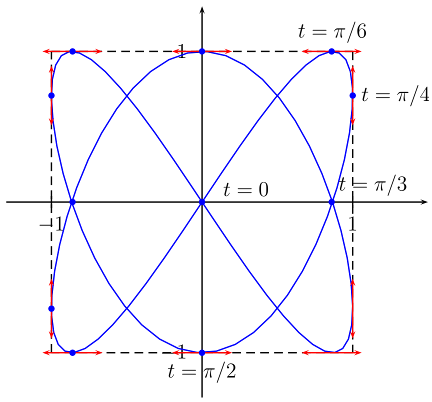
Se estudia y se construye la curva para $t \in [0, \pi]$, luego se tiene la curva completa por simetría central de centro O.
• Para todo real t,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2\pi - 2t) \\ \operatorname{sen}(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

Se estudia y se construye la curva para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Oy) luego por simetría central de centro O.
• Se observa así que $M(t+\pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, pero esta observación no permite reducir más el dominio de estudio.
Variaciones conjuntas de x y y. Para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ y $y'(t) = 3\cos(3t)$. Inmediatamente, se deduce la siguiente tabla :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$+$		0	$-$
x	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1 ↘	0
y	0 ↗	1 ↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	-1
$y'(t)$	$+$	0		$-$

luego se deduce la curva



Puntos múltiples. En primer lugar, todo punto del arco es múltiple, porque la curva se recorre una infinidad de veces. Hay esencialmente « dos puntos verdaderos » múltiples por determinar, los demás se deducen por simetría. Uno de los dos es el punto de (Ox) de abscisas estrictamente positivas obtenidas para cierto número real t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Sea $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \tfrac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \tfrac{\pi}{3}.$$

El punto de la curva que está en (Ox) y que tiene una abscisa estrictamente positiva es el punto $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
Si no, se busca $t_1 \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ y $t_2 \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right[$ tales que $M(t_1) = M(t_2)$.

$$M(t_1) = M(t_2) \Rightarrow x(t_1) = x(t_2) \Leftrightarrow t_2 \in t_1 + \pi\mathbb{Z} \text{ o } t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\, zz \Rightarrow t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 - \pi \Rightarrow t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1.$$

Recíprocamente, si $t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1$, entonces $x(t_1) = x(t_2)$ y entonces,

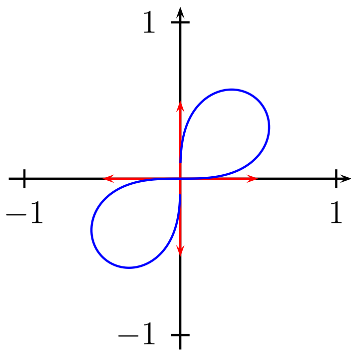
$$M(t_1)=M(t_2)\Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)=y(t_1)\Leftrightarrow \text{sen}\left(3\left(-\frac{\pi}{2}-t_1\right)\right)=\text{sen}(3t_1)$$
$$\Leftrightarrow 3t_1\in-\frac{3\pi}{2}-3t_1+2\pi\mathbb{Z}\text{ o }3t_1\in\pi+\frac{3\pi}{2}+3t_1+2\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 6t_1\in-\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow t_1\in-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\Leftrightarrow t_1=\frac{\pi}{12}.$$

El punto $M\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto múltiplo de abscisas y ordenadas estrictamente positivas.

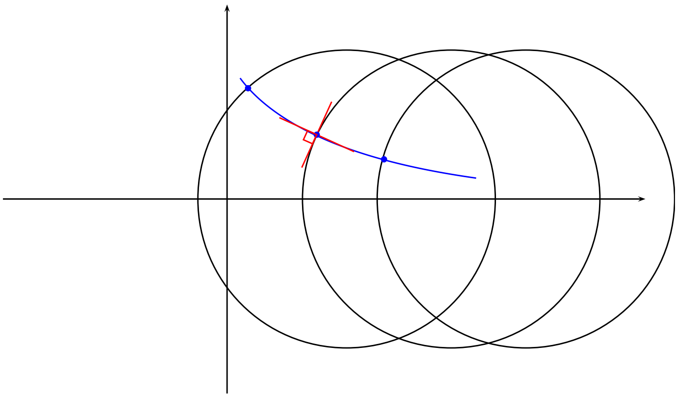
4. **La lemniscata de BERNOULLI. Dominio de estudio.**
• Para todo real t, $M(t)$ existe.
• Para todo real t, $M(-t)=s_O(M(t))$. Se estudia y se construye la curva cuando t recorre $\mathbb{R}^+$ y se obtiene la curva completo por simetría central de centro O.
• Para $t>0$,
$$M\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^4}},\frac{\frac{1}{t^3}}{1+\frac{1}{t^4}}\right)=\left(\frac{t^3}{1+t^4},\frac{t}{1+t^4}\right)=s_{y=x}(M(t)).$$
Se estudia y se construye la curva cuando t recorre $[0,1]$ y se obtiene la curva completa por reflexión de eje la recta de ecuación $y=x$ luego por simetría central de centro O.
Variaciones conjuntas de x y y. Las funciones x y y son derivables en $[0,1]$ y para $t\in[0,1]$,
$$x'(t)=\frac{(1+t^4)-t(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}\text{ y }y'(t)=\frac{3t^2(1+t^4)-t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2}=\frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$
Inmediatamente, se deduce la tabla :

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0		$\nearrow$		$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0		$+$		

La tangente en $M(0)$ es dirigida por el vector $(1,0)$. Por simetría, la tangente en « $M(+\infty)$ » es dirigida por el vector $(0,1)$.



5. **Las tractrices**
(a) Busquemos los arcos soluciones de la forma $\begin{cases}x=f(t)+R\cos t\\ y=R\,\text{sen}\,t,\end{cases}$ donde f es una función derivable en un cierto intervalo I (de manera que el punto $M(t)$ está en el círculo $\mathscr{C}(t)$ de centro $\begin{pmatrix}f(t)\\0\end{pmatrix}$ y de radio R). La trayectoria buscada es ortogonal a cada círculo $\mathscr{C}(t)$ si y solo si la tangente a esta trayectoria en $M(t)$ es ortogonal a la tangente en el círculo $\mathscr{C}(t)$ en $M(t)$ o incluso « si y solo si » los vectores $(f'(t)-R\,\text{sen}\,t,R\cos t)$ y $(-\text{sen}\,t,\cos t)$ son ortogonales. Esta última condición se escribe $-f'(t)\,\text{sen}\,t+R(\text{sen}^2 t+\cos^2 t)=0$ o aún $f'(t)=\frac{R}{\text{sen}\,t}$ o finalmente, $f(t)=R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C$. Los arcos solución son los arcos de la forma $t\mapsto\begin{pmatrix}R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+\cos t\right)+C\\ R\,\text{sen}\,t\end{pmatrix}$, donde $C\in\mathbb{R}$.



Las curvas solución se deducen de la curva $t \mapsto \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ R\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ por traslaciones de vectores colineales a $\overrightarrow{i}$. Podemos demostrar que la curva obtenida es la trayectoria de la rueda trasera de un automóvil cuando estaciona en marcha adelante, la rueda delantera está pegada al pavimento.

(b) **Dominio de estudio.** La función $t \mapsto M(t)$ es 2π-periódica y por lo tanto, se estudia en $[-\pi,\pi]$. Para $t \in [-\pi,\pi]$, $M(t)$ existe si y solo si $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$.
Para $t \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ después

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R\left(\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)\right| + \cos(\pi - t)\right) \\ R\operatorname{sen}(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\left(-\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| - \cos t\right) \\ R\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

Se estudia y se construye la curva cuando t recorre $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, y se obtiene la curva completa por reflexión de eje (Oy) luego por reflexión del eje (Ox).

Derivada. Estudio de puntos singulares. Para $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R\left(\frac{1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t\right) \\ R\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} \\ R\cos t \end{pmatrix} = R\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Así, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. El punto $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es un punto singular.

Cuando t tiende a $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\operatorname{sen} t - 1) = -R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) \sim -\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. Por otra parte, se escribe $h = \frac{\pi}{2} - t$ o aún $t = \frac{\pi}{2} - h$. Cuando t tiende a $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = R\frac{\operatorname{sen}^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

y por lo tanto, por integración,

$$x(t) - x(\frac{\pi}{2}) = \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

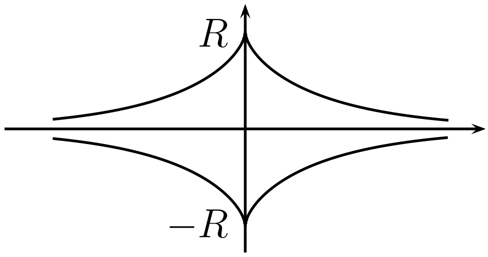
Como, por otro lado, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R(1 - \operatorname{sen} t) = -R(1 - \cos h) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$, se deduce que

$$\frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

y por tanto $\lim\limits_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}} \dfrac{y(t)-y(\frac{\pi}{2})}{x(t)-x(\frac{\pi}{2})} = +\infty$. Por simetría de eje (Oy), la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es dirigida por $\overrightarrow{j}$ y $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es un punto de retroceso de primera especie.

Si no, x' y y' son estrictamente positivos en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Se deduce que x y y son estrictamente crecientes en este intervalo. Cuando t tiende a 0 por valores superiores, $x(t)$ tiende a $-\infty$ y $y(t)$ tiende a 0. Se deduce que la recta de ecuación $x=0$ es asíntota a la curva. Por otra parte, x crece en $-\infty$ à 0 mientras que y crece en 0 à 1.

Curva.



Solución del ejercicio 5737 ▲005524

1. **Dominio de estudio.** $M(t)$ existe si y solo si $t\notin\{-1,1\}$. Si no, no existe una simetría particular (la función y es efectivamente par, pero x no es ni par ni impar).
   Derivada. Para $t\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$x'(t) = x(t)(3\ln|t|-2\ln|t+1|-\ln|t-1|)' = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}(\frac{3}{t}-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t-1})$$
$$= \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}\frac{3(t^2-1)-2(t^2-t)-(t^2+t)}{t(t+1)(t-1)} = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2},$$

y

$$y'(t) = \frac{2t(t^2-1)-2t(t^2)}{(t^2-1)^2} = \frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

que es aún cierto por la continuidad de x y y en 0.

Estudio de puntos singulares. Para $t\in]-1,1[$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow t=0$. $M(0)=(0,0)$ es el único punto singular. Para $t\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{t^2}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3} = \frac{t+1}{t}.$$

Así, $\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$ tiende a $+\infty$, cuando t tiende a 0 para valores superiores y hacia $-\infty$, cuando t tiende a 0 para valores inferiores. La tangente en $M(0)$ es dirigida por $\overrightarrow{j}$ y por otro lado, $M(0)$ es un punto de retroceso de primera especie.

Estudio cuando t tiende a $\pm\infty$. Cuando t tiende a $\pm\infty$, $M(t)$ tiende al punto $(1,1)$. Se extiende la curva considerando $M(\infty)=(1,1)$. Se tiene entonces

$$\frac{y(t)-y(\infty)}{x(t)-x(\infty)} = (\frac{t^2}{t^2-1}-1)(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)}-1)^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2+t+1} = \frac{t+1}{-t^2+t+1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Esta expresión por lo tanto tiende a 0, cuando t tiende a $\pm\infty$ y la tangente en $M(\infty)$ es dirigida por $\overrightarrow{i}$.
Estudio cuando t tiende a 1. Cuando t tiende a 1, $x(t) \sim 14(t-1)$ y $y(t) \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Entonces, x y y tienden al infinito y existe una rama infinita. Además, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$. Luego,

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2}{t^2-1} - 2\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{t^2(t+1)-2t^3}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

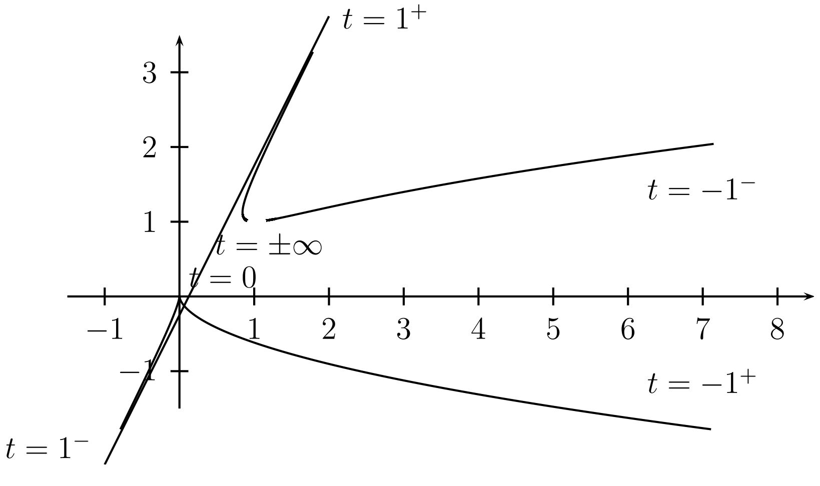
Esta última expresión tiende a $-\frac{1}{4}$ y la recta (Δ) de ecuación $y = 2x - \frac{1}{4}$ es asíntota a la curva.
Estudio cuando t tiende a -1. Cuando t tiende a 1, $x(t) \sim 12(t+1)^2$ y $|y(t) \sim \frac{-1}{2(t+1)}$. Entonces, x y y tienden al infinito y existe una rama infinita. Además, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t+1)$. Así, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tiende a 0, cuando t tiende a -1. La curva admite una rama parabólica de dirección (Ox).
Variaciones conjuntas de x y y. Se recuerda que para $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2} \quad \text{y} \quad y'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}.$$

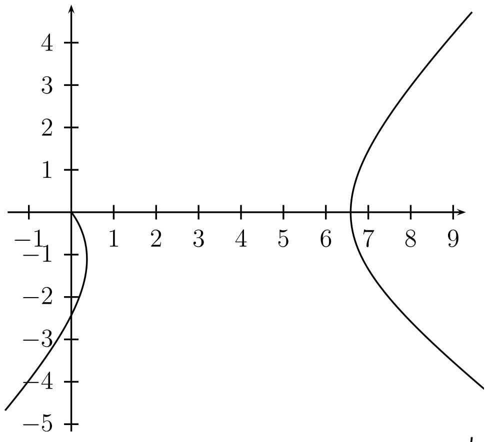
Se deduce la siguiente tabla :

t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{32}$	$\nearrow$	1
y	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1
$y'(t)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	

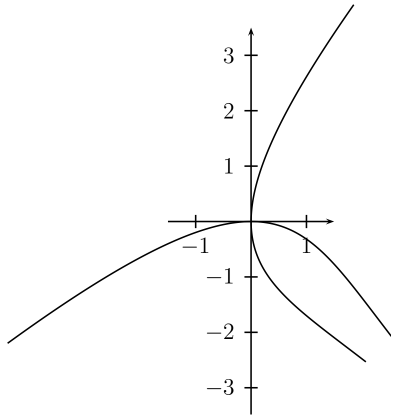
Se puede notar que la tangente en $M(3)$ es dirigida por el vector $\overrightarrow{j}$. Ver el gráfico siguiente.



En lo que sigue de este ejercicio, se detalla muy poco o nada el estudio de la curva.

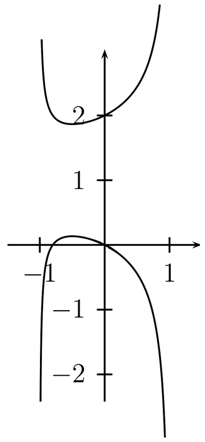


2.

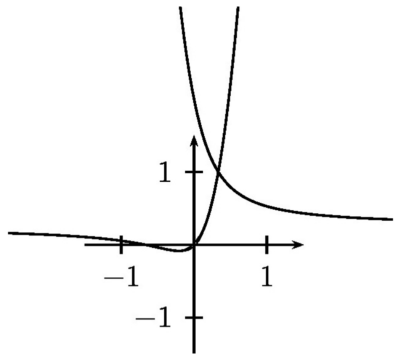


3.

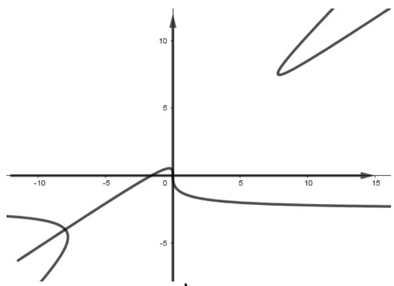
4. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t+2}{1-t^2} \end{cases}$



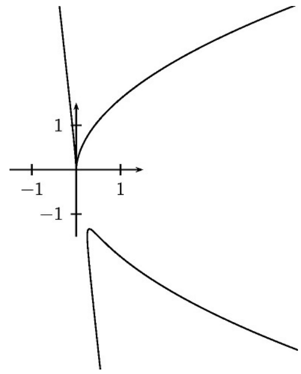
5.



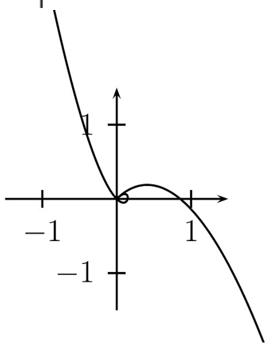
6. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y = \dfrac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$



7. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+3t} \end{cases}$



8. $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{cases}$



Solución del ejercicio 5738 ▲005525

---

1. Sea ha visto en el ejercicio 5736, que la tangente (T_t) en $M(t)$ siempre está dirigida por el vector

$\overrightarrow{u}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$. Una ecuación de la tangente en $M(t)$ es, por lo tanto $\operatorname{sen} t(x - a\cos^3 t) + \cos t(y - a\operatorname{sen}^3 t) = 0$ o aún

$$x\operatorname{sen} t + y\cos t = a\operatorname{sen} t\cos t. \quad (T_t)$$

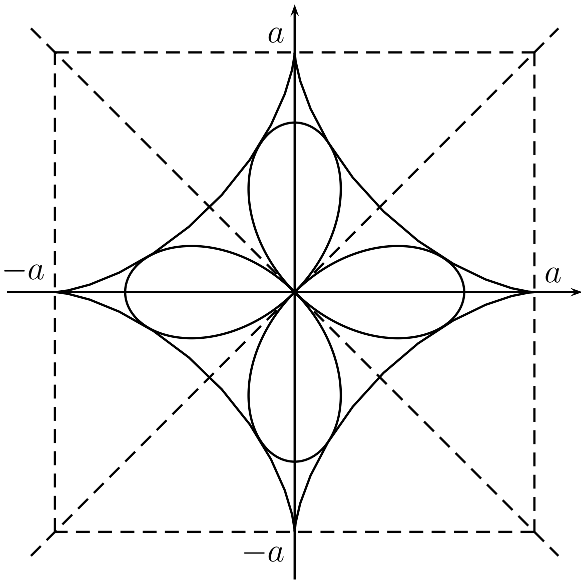
Sea $(t,u) \in [-\pi,\pi]^2$.

$$(T_t)\perp(T_u) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(t)|\overrightarrow{u}(u) = 0 \Leftrightarrow \cos t\cos u + \operatorname{sen} t\operatorname{sen} u = 0 \Leftrightarrow \cos(t-u) = 0 \Leftrightarrow u \in t + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Es entonces claro que la ortóptica es el conjunto de los puntos de intersección de las tangentes (T_t) y $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$, cuando t recorre $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M(x,y)\ (T_t) \cap (T_{t+\frac{\pi}{2}}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x\operatorname{sen} t + y\cos t = a\operatorname{sen} t\cos t \\ x\cos t - y\operatorname{sen} t = -a\operatorname{sen} t\cos t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -\begin{vmatrix} a\operatorname{sen} t\cos t & \cos t \\ -a\operatorname{sen} t\cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} \text{ y } y = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & a\operatorname{sen} t\cos t \\ \cos t & -a\operatorname{sen} t\cos t \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = a\operatorname{sen} t\cos t(-\cos t + \operatorname{sen} t) \ \text{ y } \ y = a\operatorname{sen} t\cos t(\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

La ortóptica buscada es la curva $t \mapsto \begin{pmatrix} a\operatorname{sen} t\cos t(-\cos t + \operatorname{sen} t) \\ a\operatorname{sen} t\cos t(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$.



Solución del ejercicio 5742 ▲006981

1. Para $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$, el dominio de la definición de f es $\mathbb{R}$, y f es de clase $\mathscr{C}^\infty$. Se observa que f es 2π-periódica y par, así como basta con estudiar f en el intervalo $[0;\pi]$.
   — Variaciones de f
   Para $x \in [0;\pi]$, $f'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x(2\cos x - 1)$ y entonces $f'(x) = 0$ si y solo si $x \in \{0; \frac{\pi}{3}; \pi\}$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ si $x \in]0;\pi[$, para estudiar el signo de $f'(x)$, basta con estudiar el

signo de $(2\cos x - 1)$, y se obtiene

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
f			$\frac{5}{4}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	1				-1

— tangentes horizontales
El gráfico de f tiene una tangente horizontal donde f' se anula, es decir en los puntos de coordenados $(0,1)$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4})$ y $(\pi, -1)$. En particular, la tangente en el punto de abscisas 0 es horizontal y tiene la ecuación $y = 1$. Para determinar la posición de la curva relativa a su tangente en este punto, se estudia el signo de $f(x) - 1$, para x cerca de 0 :

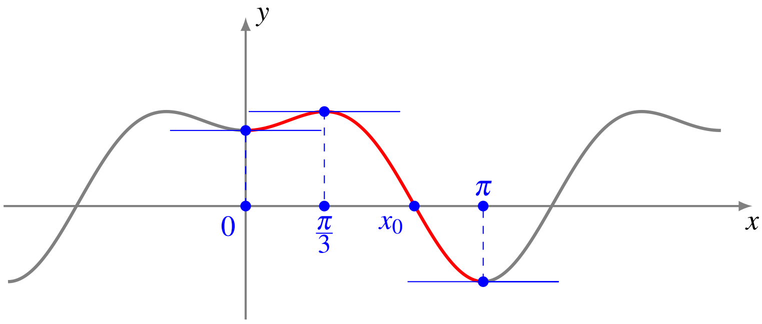
$$f(x) - 1 = \operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos x = -\cos^2 x + \cos x = \cos x(1 - \cos x)$$

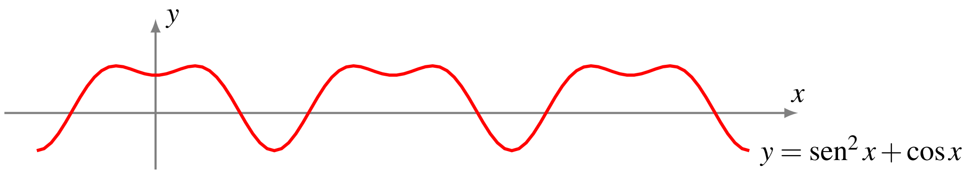
Esta expresión es positiva en un vecindario de 0 (e incluso > 0, para $x \neq 0$ cerca de 0). La curva está así por encima de su tangente.

— Puntos particulares
El gráfico de f corta el eje de abscisas entre 0 y π en un solo punto x_0, que se determina resolviendo

$$f(x) = 0 \iff 1 - \cos^2 x + \cos x = 0 \iff X^2 - X - 1 = 0 \ (X = \cos x)$$

que da dos soluciones para X, pero solo una en $[-1;1]$: $X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y entonces $x_0 = \arccos(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
El gráfico de f se obtiene en $[-\pi;\pi]$ por simetría con respecto al eje de ordenadas, luego en $\mathbb{R}$ por 2π-periodicidad.





2. Para $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$, el dominio de la definición de f es $\mathbb{R}$ y f es de clase $\mathscr{C}^\infty$.
— Variaciones de f
Como $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{1+e^x}$, para todo x, $f'(x) > 1$. En particular f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
— Forma del gráfico en $+\infty$
Se tiene $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ y

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln\left(e^x(e^{-x}+1)\right)}{x} = 1 + \frac{x + \ln(e^{-x}+1)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$$

luego $f(x)-2x=\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^+$. Así la gráfica de f tiene en $+\infty$ una asíntota, de ecuación $y=2x$, y se mantiene por encima de esta asíntota.

— Forma del gráfico en $-\infty$

Se tiene $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ y

$$\frac{f(x)}{x}=1+\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}\xrightarrow[x\to-\infty]{}1$$

luego $f(x)-x=\ln(1+\mathrm{e}^x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0^+$. Así la gráfica de f tiene en $-\infty$ una asíntota, de ecuación $y=x$, y se mantiene por encima de esta asíntota.

— Tangente en el punto de abscisas 0

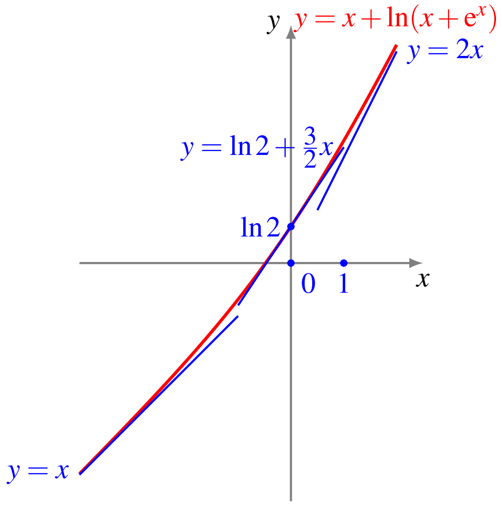
La ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0, y la posición de la gráfica con respecto a esta tangente, pueden ser obtenidas simultáneamente a partir del desarrollo limitado de f en x_0. Para la ecuación de la tangente, un desarrollo limitado de orden 1 es suficiente, pero para tener la posición es necesario empujar el desarrollo limitado al orden 2 (o de orden 3 si el término de orden 2 es nulo, o más aún...) :

$$\begin{aligned}f(x)&=x+\ln(1+\mathrm{e}^x)=x+\ln\left(1+1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=x+\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)\\&=x+\ln 2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)^2+o(x^2)=\ln 2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

La ecuación de la tangente en el punto de abscisas 0 (dada por el DL de orden 1) es, por lo tanto

$$y=\ln 2+\frac{3}{2}x$$

Además, $f(x)-\left(\ln 2+\frac{3}{2}x\right)=\frac{1}{8}x^2+o(x^2)=\frac{1}{8}x^2(1+o(1))$, donde $o(1)$ es un término que tiende a 0, cuando $x\to 0$. Así $(1+o(1))$ tiene el mismo signo que 1, para x cerca de 0, y $f(x)-\left(\ln 2+\frac{3}{2}x\right)$ es positivo en un vecindario de 0 : la curva permanece localmente por encima de su tangente.



Solución del ejercicio 5743 ▲006982

---

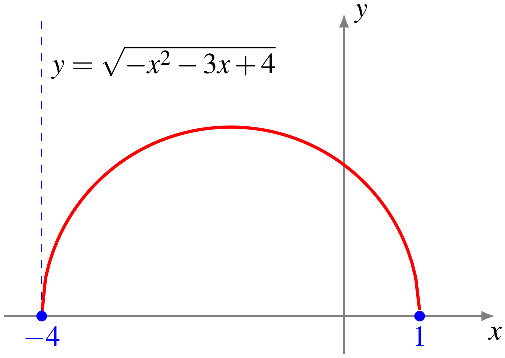
1. Para transformar una ecuación cartesiana $y = f(x)$ en paramétricas, es suficiente escribir $x = t$ y $y = f(t)$, haciendo que el parámetro describa t el dominio de la definición de f. Aquí, $f(x) = \sqrt{-x^2-3x+4}$ está bien definida para los $x \in \mathbb{R}$ tales que $-x^2-3x+4 \geqslant 0$ *i.e.* $x \in [-4;-1]$. Entonces se obtiene la siguiente parametrización :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{-t^2-3t+4} \end{cases} \quad (t \in [-4;1])$$

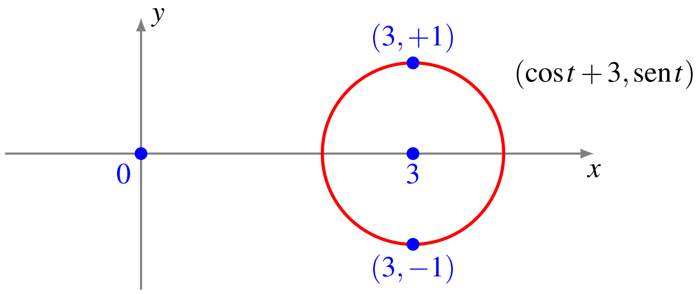
lo que significa

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathscr{C} &\iff \begin{cases} x \in [-4;1] \\ y = \sqrt{-x^2-3x+4} \end{cases} \\ &\iff \exists t \in [-4;1] \mid \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{-t^2-3t+4} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\mathscr{C}$ es la curva estudiada.



2. Si siempre es posible representar la gráfica de una función como una curva paramétrica, el recíproco no es cierto. Aquí, la curva considerada es el círculo de radio 1 centrado en el punto $(3,0)$. Entonces no es un gráfico de función, ya que varios puntos de la curva tienen la misma abscisa : conocer x no da y ! Por ejemplo, para $t = \pm\frac{\pi}{2}$, se obtienen los dos puntos de la curva $(3,-1)$ y $(3,+1)$.



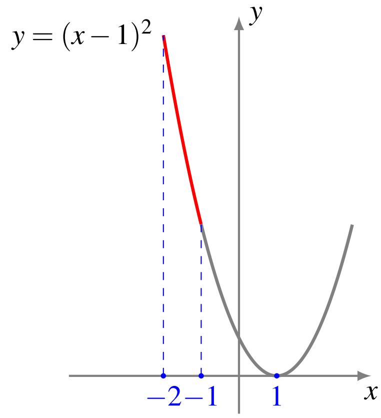
3. Se constata, usando la fórmula $\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = -1 - x(t)$, que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{sen}^4 t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4 = (-1-x(t))^2 + 4(-1-x(t)) + 4 \\ &= x(t)^2 - 2x(t) + 1 = (x(t)-1)^2. \end{aligned}$$

Así los puntos (x,y) de la curva verificando la ecuación $y = (x-1)^2$. Además, cuando el parámetro t recorre $\mathbb{R}$, $x(t) = \cos^2 t - 2$ recorre el intervalo $[-2;-1]$. Finalmente,

$$(x,y) \in \mathscr{C} \iff \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 2 \\ y(t) = \operatorname{sen}^4 t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-2;-1] \\ y = (x-1)^2, \end{cases}$$

y la curva es, por lo tanto la gráfica de la función $\begin{aligned} f : [-2;-1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-1)^2. \end{aligned}$



Solución del ejercicio 5744 ▲006983

---

1. Las expresiones $x(t) = \cos^3 t$ y $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$ están bien definidos para todo $t \in \mathbb{R}$.
   — Reducción del intervalo de estudio
   Las funciones x y y es 2π-periódicas, es suficiente restringir el estudio a un intervalo de longitud 2π, para obtener la integralidad del soporte de la curva.
   La función x es par, la función y es impar : se hace así el estudio en $[0;\pi]$, luego la curva completa se obtendrá por simetría con respecto al eje (Ox).
   Se constata que $x(\pi - t) = -x(t)$ y que $y(\pi - t) = y(t)$, por lo tanto los puntos $M(\frac{\pi}{2} - t)$ y $M(\frac{\pi}{2} + t)$ son simétricos respecto al eje (Oy) : por lo que se restringe el estudio a $[0; \frac{\pi}{2}]$, luego se completa por simetría con respecto a (Oy).
   $\boxed{\text{Finalmente, se estudia en } [0; \frac{\pi}{2}]}$ luego se completa usando sucesivamente las simetrías con respecto a (Oy) y (Ox).
   — Tabla de variaciones conjuntas
   Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$. Sea $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$x(t) = \cos^3 t$ | $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$
$x'(t) = -3\operatorname{sen} t \cos^2 t$ | $y'(t) = 3\cos t \operatorname{sen}^2 t$
$x'(t) < 0 \iff t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ | $y'(t) > 0 \iff t \in]0; \frac{\pi}{2}[$
$x'(t) = 0 \iff t \in \{0; \frac{\pi}{2}\}$ | $y'(t) = 0 \iff t \in \{0; \frac{\pi}{2}\}$

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0
x	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1
$y'(t)$	0	$+$	0

   Esto significa que cuando t varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$ la curva va a la izquierda (pues $x(t)$ decrece) subiendo (pues $y(t)$ crece) del punto $(1,0)$ a $(0,1)$.
   — Puntos particulares

   — $M(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{8}) = (0.64\ldots, 0.125)$; la tangente está dirigida por $\left(x'(\frac{\pi}{6}), y'(\frac{\pi}{6})\right) = \left(-\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = (-1.125, 0.64\ldots)$.

— $M(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}) = (0.35\ldots, 0.35\ldots)$; la tangente está dirigida por $\left(x'(\frac{\pi}{4}), y'(\frac{\pi}{4})\right) = (-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}) = (-1.06\ldots, 1.06\ldots)$.

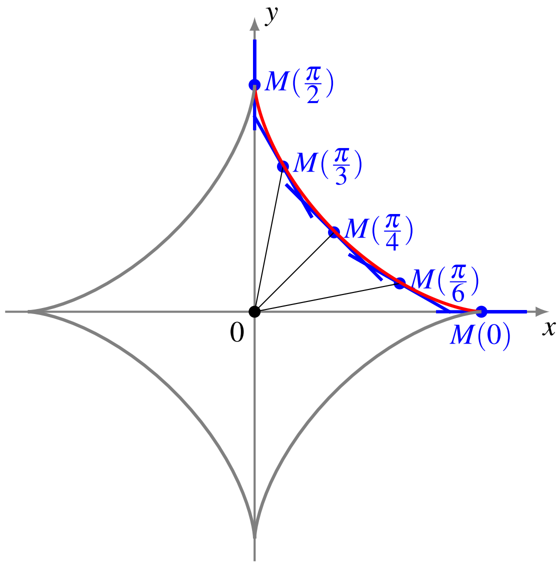
— $M(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}) = (0.125, 0.64\ldots)$; la tangente está dirigida por $\left(x'(\frac{\pi}{3}), y'(\frac{\pi}{3})\right) = (-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{9}{8}) = (-0.64\ldots, 1.125)$.

— Estudio de puntos singulares

El punto $M(t)$ es singular si $x'(t) = y'(t) = 0$, que es el caso en el campo de estudio $[0; \frac{\pi}{2}]$ únicamente para $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$. Para determinar la tangente en el punto $M(0)$ (de coordenadas cartesianas $(1,0)$), se estudia el límite en 0 de

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^3 t - 1}.$$

Por lo tanto $\operatorname{sen}^3 t \underset{0}{\sim} t^3$ y $\cos^3 t - 1 = (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2))^3 - 1 \underset{0}{\sim} -3\frac{t^2}{2}$, entonces el cociente es equivalente a $-\frac{2}{3}t$ y tiende a 0 en 0. Así, $\mathscr{C}$ admite en el punto $M(0)$ una tangente, pendiente cero, es decir horizontal.



2. Las expresiones $x(t) = t - \operatorname{th} t$ y $y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$ están bien definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

— Reducción del campo de estudio

Como x es impar y y par, $\boxed{\text{se restringe el estudio a } \mathbb{R}^+}$ luego se completa por simetría con respecto al eje (Oy).

— Tabla de variaciones conjuntas

Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$. Para $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{ll}
x(t) = t - \operatorname{th} t & y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\
x'(t) = \operatorname{th}^2 t & y'(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \\
x'(t) > 0 \Longleftrightarrow t > 0 & y'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > 0 \\
x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 & y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0
\end{array}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	

Esto significa que la curva va hacia la derecha y hacia abajo cuando t va de 0 a $+\infty$.

— Estudio de puntos singulares

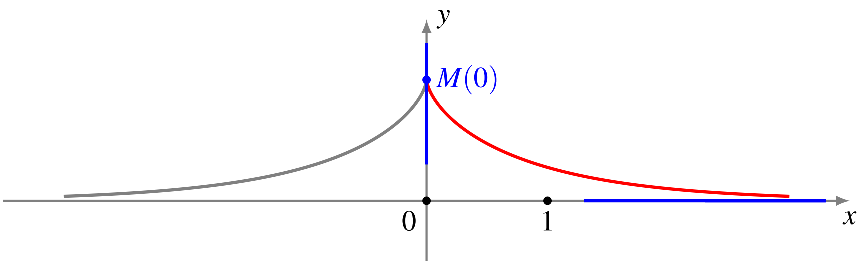
El solo punto singular es $M(0)$, por lo que $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{1-\operatorname{ch} t}{t\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}$ y

$$\frac{1-\operatorname{ch} t}{t\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t} = \frac{-t^2/2+o(t^2)}{t(1+t^2/2+o(t^2))-(t+t^3/6+o(t^3))} \underset{0}{\sim} \frac{-t^2/2}{t^3/3},$$

y por lo tanto, $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$. Así $\mathscr{C}$ tiene una tangente vertical en el punto $M(0)$ de coordenadas cartesianas $(0,1)$.

— Estudio de ramas infinitas

Como $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ y $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, el eje de abscisas es asíntota de $\mathscr{C}$.



3. Las expresiones $x(t) = t - \operatorname{sen} t$ y $y(t) = 1 - \cos t$ están bien definidas para $t \in \mathbb{R}$.

— Reducción del campo de estudio

Se observa que $x(t+2\pi) = 2\pi + x(t)$ y $y(t+2\pi) = y(t)$: el punto $M(t+2\pi)$ se deduce de $M(t)$ por traslación del vector $2\pi\cdot\overrightarrow{i}$. Es suficiente por lo tanto estudiar la curva en el intervalo $[-\pi;\pi]$. La función x es impar y y par, se restringe el estudio a $[0;\pi]$, luego se completa por simetría con respecto al eje (Oy).

$\boxed{\text{Finalmente, se estudia en } [0;\pi]}$ luego se completa usando sucesivamente la simetría con respecto a (Oy), luego de traslaciones sucesivas de vector $2\pi\cdot\overrightarrow{i}$.

— Tabla de variaciones conjuntas

Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$. Sea $t \in [0;\pi]$:

$x(t) = t - \operatorname{sen} t$ $\qquad$ $y(t) = 1 - \cos t$

$x'(t) = 1 - \cos t$ $\qquad$ $y'(t) = \operatorname{sen} t$

$x'(t) > 0 \iff t > 0$ $\qquad$ $y'(t) > 0 \iff 0 < t < \pi$

$x'(t) = 0 \iff t = 0$ $\qquad$ $y'(t) = 0 \iff t \in \{0;\pi\}$

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	2
x	0	$\nearrow$	π
y	0	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$+$	0

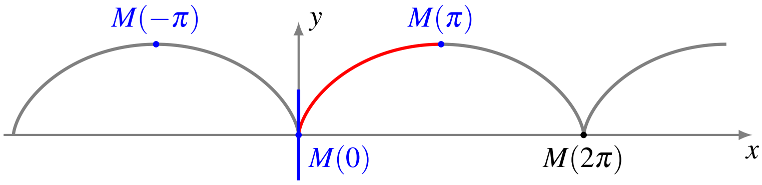
La curva va hacia la recta hacia arriba cuando t varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

— Estudio de puntos singulares

El punto $M(0)$, que es el origen, es singular. Para estudiar la existencia de una tangente en este punto, se considera

$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{1-\cos t}{t-\operatorname{sen} t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6}.$$

y entonces $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$. En consecuencia, la curva tiene una pendiente vertical tangente en el punto $M(0)$.



Solución del ejercicio 5745 ▲006984

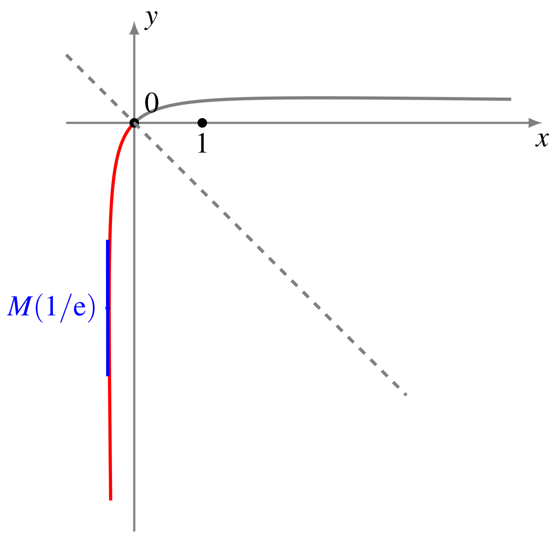
1. Sea $t>0$: $\begin{cases} x(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\ln(\frac{1}{t}) = -y(t) \\ y(\frac{1}{t}) = t\ln(\frac{1}{t}) = -x(t) \end{cases}$ y por lo tanto, el punto $M(\frac{1}{t})$ es la simétrica de $M(t)$, con respecto a la recta de ecuación $y=-x$. $\boxed{\text{Se restringe el estudio al intervalo }]0;1]}$, luego se obtiene toda la curva por simetría con respecto a la segunda bisectriz.
2. Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $]0;1]$.
   — Tabla de variaciones conjuntas. Para $t\in]0;1]$:

$$x(t) = t\ln t \qquad y(t) = \frac{\ln t}{t}$$
$$x'(t) = 1+\ln t \qquad y'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$$
$$x'(t)>0 \iff t>1/\mathrm{e} \qquad y'(t)>0$$
$$x'(t)=0 \iff t=1/\mathrm{e} \qquad y'(t)\neq 0$$

ya que $\frac{1}{\mathrm{e}}<1<\mathrm{e}$. Así se obtiene la siguiente tabla :

t	0		$1/\mathrm{e}$		1
$x'(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
x	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	$+\infty$	$+$	$2\mathrm{e}^2$	$+$	1

   No hay puntos singulares.
   — Estudio de ramas infinitas
   Como $x(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ y $y(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$, el eje y es asíntota de $\mathscr{C}$.



Solución del ejercicio 5746 ▲006985

Las expresiones $x(t) = \frac{1}{t^2-t}$ y $y(t) = \frac{t}{t^2-1}$ están bien definidos, y de clase $\mathscr{C}^1$ fuera de $t=0$ y $t=\pm 1$. El dominio de definición es, por lo tanto $\mathscr{D} =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.
La curva tiene un punto doble si se vuelve a cortar : Se buscan así dos parámetros $t_1, t_2 \in \mathscr{D}$ tales que $t_1 \neq t_2$ y $M = M(t_1) = M(t_2)$, *i.e.*

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1^2-t_1} = \frac{1}{t_2^2-t_2} \\ \frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} \end{cases} \iff \begin{cases} t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ t_1(t_2^2-1) - t_2(t_1^2-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (t_1-t_2)(t_1+t_2-1) = 0 \\ (t_2-t_1)(t_1t_2+1) = 0. \end{cases}$$

Como se busca $t_1 \neq t_2$, el sistema obtenido es equivalente a $\begin{cases} t_1+t_2 = 1 \\ t_1t_2 = -1, \end{cases}$ en otras palabras a un sistema del tipo suma-producto : eso significa que t_1 y t_2 deben ser las dos raíces (distintas) de $X^2 - X - 1$, es decir $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (que están bien en $\mathscr{D}$). Se tiene por lo tanto un solo punto doble, es

$$M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = M\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

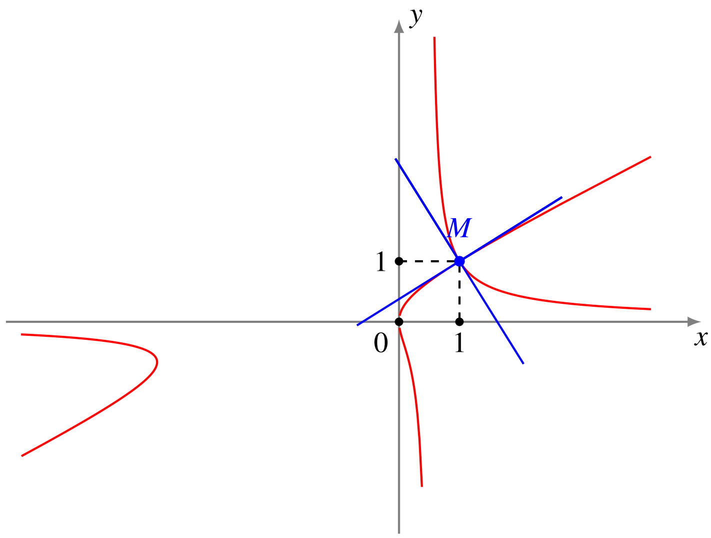
de coordenadas cartesianas $(1,1)$. Para determinar las tangentes en este punto, se calcula el vector derivada :

$$\overrightarrow{V}(t) = \begin{cases} x'(t) = \frac{1-2t}{(t^2-t)^2} \\ y'(t) = \frac{-1-t^2}{(t^2-1)^2} \end{cases}$$

Reemplazando, se obtiene

$$\overrightarrow{V}(t_1) = \begin{pmatrix} x'(t_1) \\ y'(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{V}(t_2) = \begin{pmatrix} x'(t_2) \\ y'(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Las dos tangentes a la curva en el punto de coordenadas $(1,1)$ son, por lo tanto dirigidos respectivamente por los vectores $\overrightarrow{V}(t_1)$ y $\overrightarrow{V}(t_2)$, que verificamos haciendo el producto escalar $\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2 = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2) = 0$ que son ortogonales.



Solución del ejercicio 5747 ▲006986

Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$. Un punto $M(t)$ de la curva es singular si $x'(t) = y'(t) = 0$, por lo que

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{4(t^2+1) - 2t(4t-3)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{-2(2t^2-3t-2)}{(t^2+1)^2} \\ y'(t) = \dfrac{2(t^2+2) - 2t(2t-1)}{(t^2+2)^2} = \dfrac{-2(t^2-t-2)}{(t^2+2)^2}. \end{cases}$$

Así $M(t)$ es singular si y solo si $\begin{cases} 2t^2-3t-2=0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases}$ El sistema admite una única solución $t=2$, correspondiente en el punto $M(2)$ de coordenadas $(1, \frac{1}{2})$. El vector derivada es nulo en el punto $M(2)$; para obtener la forma de la curva en un vecindario de este punto, es necesario por lo tanto efectuar un desarrollo limitado a un orden lo suficientemente grande como para encontrar dos términos no constantes no nulos. Aquí el orden 3 basta, se establece $t = 2+h$, para simplificar (así "t cerca de 2" se convierte en "h cerca de 0") :

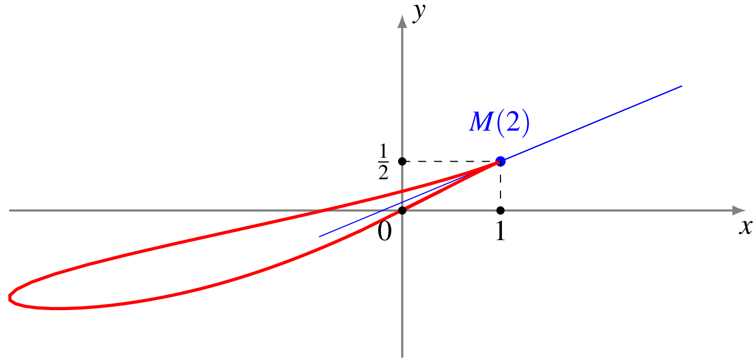
$$\begin{aligned} x(2+h) &= \frac{4(2+h)-3}{(2+h)^2+1} = \frac{5+4h}{5+4h+h^2} = 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4h+h^2}{5}} \\ &= 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4h+h^2}{5}\right) + o\left(\frac{4h+h^2}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{5}h^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}h + o(h)\right) = 1 - \frac{1}{5}h^2 + \frac{4}{25}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2+h) &= \frac{2(2+h)-1}{(2+h)^2+2} = \frac{3+2h}{6+4h+h^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4h+h^2}{6}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{4h+h^2}{6}\right) + o\left(\frac{4h+h^2}{6}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}h + o(h)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{18}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente desarrollo limitado vectorial :

$$M(2+h) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot h^2 + \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix} \cdot h^3 + o(h^3).$$

Se verifica que el término constante del desarrollo limitado corresponde a $\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix}$ y que el término lineal, que vale $\begin{pmatrix} x'(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} \cdot h$, es nulo. Los coeficientes de h^2 y h^3 son vectores no nulos, $M(2)$ es, por lo tanto un punto retroceso de primera especie ($p=2$, $q=3$). La tangente es dirigida por el primer vector no nulo, coeficiente de h^k (con $k \geqslant 1$), aquí el coeficiente de h^2 ; y la tangente en $M(2)$ es dirigida por $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.



Solución del **ejercicio 5748** ▲006987

Las expresiones $x(t) = t + \frac{4}{t}$ y $y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}$ están bien definidas para $t \in \mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

1. Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathscr{D}$. Sea $t \in \mathscr{D}$:

$$\begin{array}{ll} x(t) = t + \frac{4}{t} & y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1} \\ x'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} & y'(t) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(t+1)^2} \\ x'(t) > 0 \iff |t| > 2 & y'(t) > 0 \iff |t+1| > 3 \iff \begin{cases} t > 2 \\ \text{o} \\ t < -4 \end{cases} \\ x'(t) = 0 \iff t \in \{-2; 2\} & y'(t) = 0 \iff t \in \{-4; 2\} \end{array}$$

t	$-\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-5	↗	-4	↘	-5	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{5}{3}$	↘	$-\infty \mid +\infty$	↘	5	↘	$\frac{11}{3}$	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

2. La tabla de variaciones conjuntas indica :
   — $t = -4$: tangente horizontal, en el punto de coordenadas $(-5, -\frac{1}{3})$;
   — $t = -2$: tangente vertical, en el punto de coordenadas $(-4, -\frac{5}{3})$;
   — $t = -1$: una asíntota vertical, de ecuación $x = -5$;
   — $t = 0$: una asíntota horizontal, de ecuación $y = 5$;
   — $t = 2$: existe un punto singular en $(4, \frac{11}{3})$ (ver después).
   Queda por estudiar el comportamiento cuando $t \to \pm\infty$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3 + 16t^2 + 6t}{3(t^3 + t^2 + 4t + 4)} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \frac{1}{3}$$

   luego $y(t) - \frac{1}{3}x(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 2$. La curva tiene así por asíntota, cuando $t \to -\infty$ y cuando $t \to +\infty$, la misma recta de ecuación $y = \frac{1}{3}x + 2$.

3. Se constata en la tabla de variación que solo existe un punto singular, correspondiente al parámetro $t = 2$. Para averiguar la forma de la curva en un vecindario del punto $M(2)$, se hace un desarrollo limitado de x y y en un vecindario de $t = 2$. Como aquí x y y son de clase $\mathscr{C}^\infty$ y de expresiones bastante simples, se puede aplicar directamente la fórmula de Taylor-Young :

$$\begin{cases} x(t) = x(2) + x'(2)\cdot(t-2) + \frac{1}{2}x''(2)\cdot(t-2)^2 + \frac{1}{6}x'''(2)\cdot(t-2)^3 + o((t-2)^3) \\ y(t) = y(2) + y'(2)\cdot(t-2) + \frac{1}{2}y''(2)\cdot(t-2)^2 + \frac{1}{6}y'''(2)\cdot(t-2)^3 + o((t-2)^3) \end{cases}$$

Se sabe que $x(2) = 4$, $y(2) = \frac{11}{3}$ y $x'(2) = y'(2) = 0$. Además, $x''(t) = \frac{8}{t^3}$, $x'''(t) = \frac{-24}{t^4}$ y $y''(t) = \frac{6}{(t+1)^3}$, $y'''(t) = \frac{-18}{(t+1)^4}$, lo que da

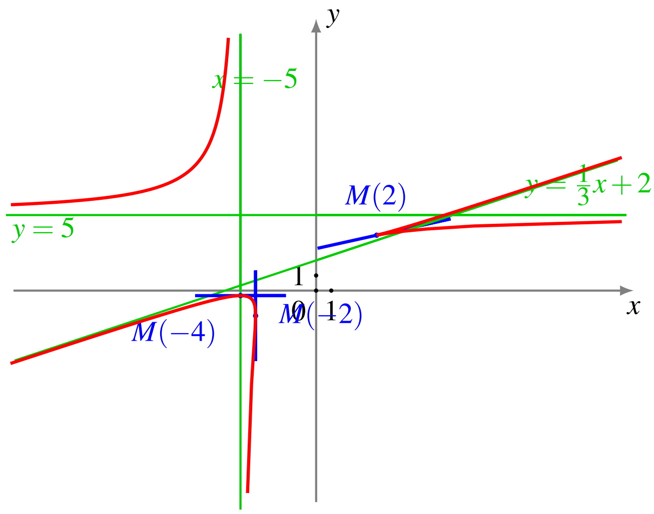
$$M(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}\cdot(t-2)^2 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{-1}{27} \end{pmatrix}\cdot(t-2)^3 + o((t-2)^3).$$

Es un punto de retroceso de primera especie. La ecuación (en forma parametrizada) de la tangente $T_{M(2)}$ se obtiene truncando el desarrollo limitado :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T_{M(2)} \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, stla4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}\cdot\lambda$$

eliminando el parámetro λ, se obtiene una ecuación cartesiana

$$T_{M(2)} :\ y = \frac{11}{3} + \frac{1}{9}\cdot 2(x-4) = \frac{2}{9}x + \frac{25}{9}.$$



Solución del ejercicio 5749 ▲006988

---

1. Comenzar por encontrar el vector tangente a la curva en el punto $M(t)$. Las funciones x y y son de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$, y $x'(t) = 6t$, $y'(t) = 12t^2$. Si $t \neq 0$, el vector tangente a la curva en el punto $M(t)$ es, por lo tanto el vector derivada $\begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix}$. Si $t = 0$, el vector derivada es nulo y es necesario derivar

una vez más para obtener un vector no nulo $\begin{pmatrix} x''(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es, por lo tanto un vector director de la tangente en el punto $M(0)$. Finalmente, para todo t, la tangente en el punto $M(t)$ es dirigida por el vector

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix}.$$

2. — Una recta D es tangente a $\mathscr{C}$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $M(t) \in D$ y $\overrightarrow{V}(t)$ es un vector director de D.
   — Una recta D es ortogonal a $\mathscr{C}$ si existe $t' \in \mathbb{R}$ tal que $M(t') \in D$ y $\overrightarrow{V}(t')$ es un vector ortogonal a la recta D.
3. Se busca así la condición $\overrightarrow{V}(t)$ y $\overrightarrow{V}(t')$ son ortogonales :

$$\overrightarrow{V}(t) \cdot \overrightarrow{V}(t') = 0 \Longleftrightarrow 36 + 144tt' = 0 \Longleftrightarrow tt' = -\tfrac{1}{4}$$

   que excluye el parámetro $t = 0$.
4. Sea así $t \neq 0$, y $T(t)$ la tangente a $\mathscr{C}$ en $M(t)$:

$$T(t) = \left\{M(t) + \lambda \overrightarrow{V}(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left| \begin{array}{l} x = 3t^2 + 6\lambda \\ y = 4t^3 + 12\lambda t \end{array} \right. \right\}$$

   eliminando λ, se encuentra que $T(t)$ tiene ecuación cartesiana

$$y = 4t^3 + 2t(x - 3t^2) = 2tx - 2t^3$$

5. Se sabe ya que $T(t)$ y $T(-\frac{1}{4t})$ son perpendiculares. Queda por ver si $T(t)$ corta bien $\mathscr{C}$ en el punto $M(-\frac{1}{4t})$:

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{1}{4t}\right) \in T(t) &\Longleftrightarrow 4\left(-\frac{1}{4t}\right)^3 = 2t \cdot 3\left(-\frac{1}{4t}\right)^2 - 2t^3 \\ &\Longleftrightarrow 32t^6 - 6t^2 - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow X = t^2 \quad \text{y} \quad X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32} = 0. \end{aligned}$$

   El estudio de las variaciones del polinomio $X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32}$ demuestra que admite $-\frac{1}{4}$ como raíz (doble), por lo tanto, se factoriza en la forma $X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32} = (X + \frac{1}{4})^2(X - \frac{1}{2})$ y su única raíz positiva es $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{1}{4t}\right) \in T(t) &\Longleftrightarrow X = t^2 \quad \text{y} \quad X \in \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\} \\ &\Longleftrightarrow t^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

6. Así $T(\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $T(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ son las únicas rectas que son tangentes y ortogonales a $\mathscr{C}$:
   — La recta

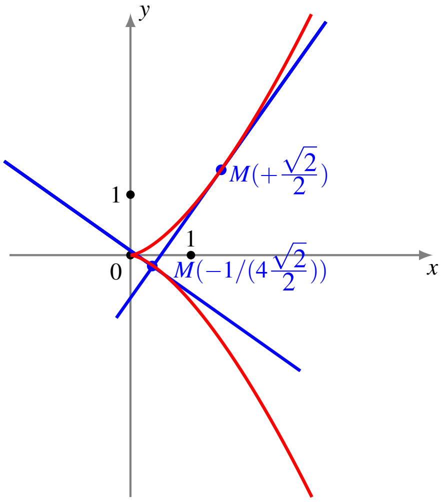
$$T(\frac{\sqrt{2}}{2}) : \ y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

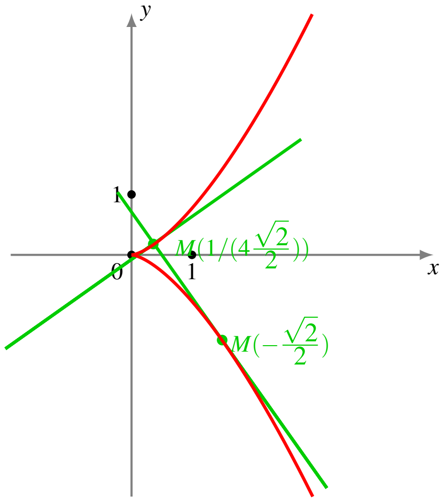
   es tangente en el punto $M(\frac{\sqrt{2}}{2})$ y ortogonal en el punto $M(-1/(4\frac{\sqrt{2}}{2}))$.

— La recta

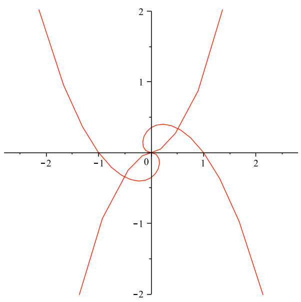
$$T(-\frac{\sqrt{2}}{2}) : \ y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

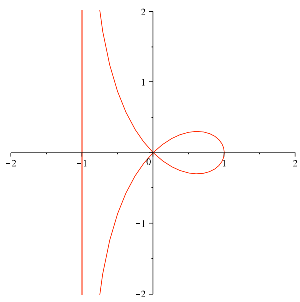
es tangente en el punto $M(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ y ortogonal en el punto $M(1/(4\frac{\sqrt{2}}{2}))$.

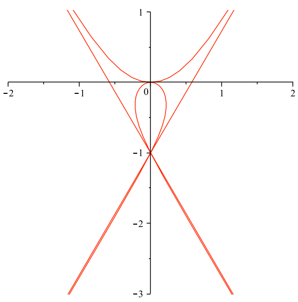


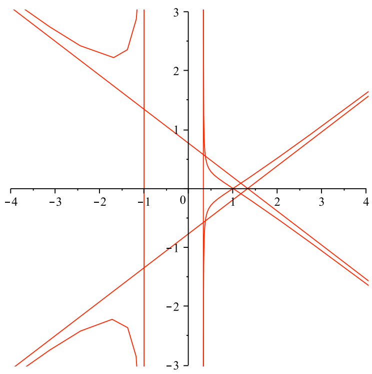


Solución del **ejercicio 5761** ▲004993

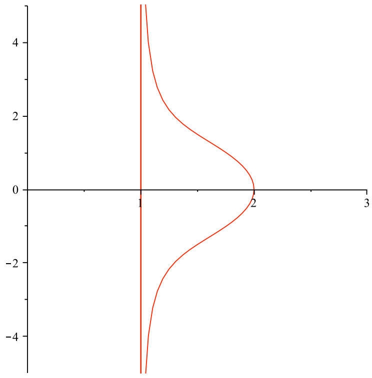
1. 

2. área del bucle : $2 - \frac{\pi}{2}$ 

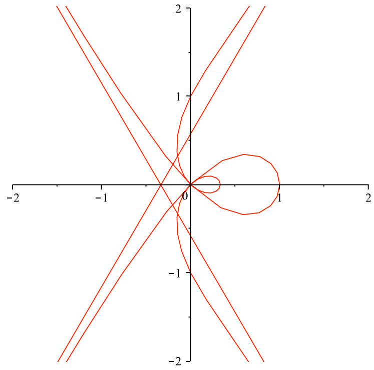
3. asíntotas : $y = \pm x\sqrt{3} - 1$ la curva cruza sus asíntotas en el punto de intersección 

4. 

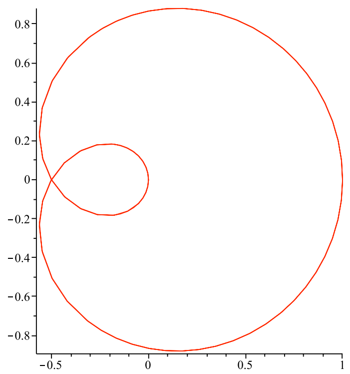
5. asíntotas : $x \pm y\sqrt{3} = \dfrac{4}{3}$



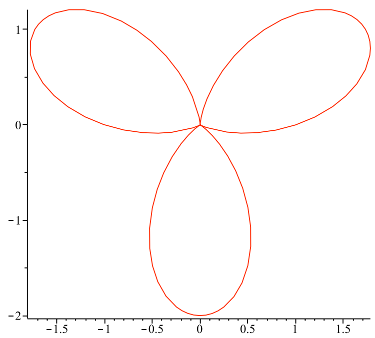
6. asíntotas : $3x \pm y\sqrt{3} = -1$



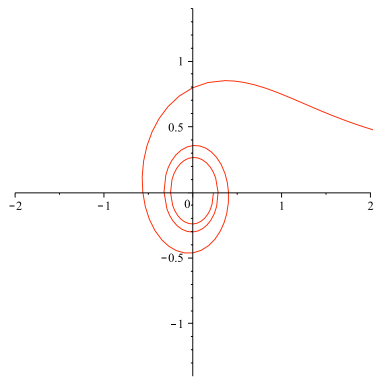
7.



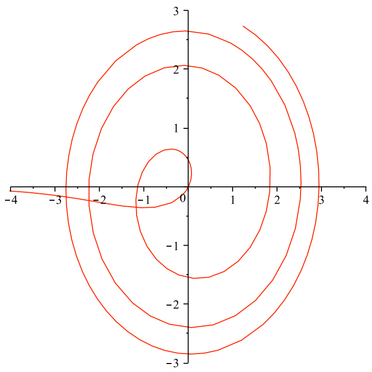
8.



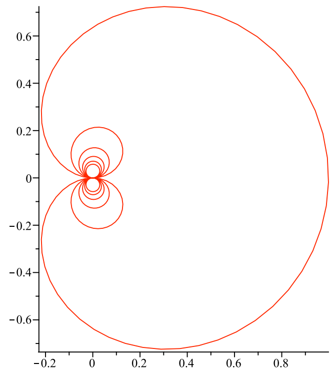
9.



10.



11.



Solución del ejercicio 5762 ▲005205

Denotemos $\mathscr{E}$ el conjunto buscado. En primer lugar, para todo real θ, $1+\operatorname{sen}(2\theta) \geqslant 0$, $1-\operatorname{sen}(2\theta) \geqslant 0$, luego $\sqrt{1+\operatorname{sen}(2\theta)}+\sqrt{1-\operatorname{sen}(2\theta)} > 0$, pues $\operatorname{sen}(2\theta)$ no puede valer simultáneamente 1 y -1. La función $r \mapsto r(\theta)$ por lo tanto, se define en $\mathbb{R}$, es claramente 2π-periódica. Así,

$$M(\theta+2\pi) = [r(\theta+2\pi), \theta+2\pi] = [r(\theta), \theta+2\pi] = M(\theta).$$

Por lo tanto, se obtiene el conjunto completo cuando θ recorre un intervalo de longitud 2π como $[-\pi, \pi]$ por ejemplo. La función $r \mapsto r(\theta)$ es además par. Así,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

Se construye el conjunto de puntos correspondientes a $\theta \in [0, \pi]$ y se obtiene el conjunto completo por simetría ortogonal de eje (Ox). Para $\theta \in [0, \pi]$, se tiene claramente $r(\pi-\theta) = r(\theta)$. Así,

$$M(\pi-\theta) = [r(\pi-\theta), \pi-\theta] = [r(\theta), \pi-\theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

Se construye el conjunto de puntos correspondientes a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y se obtiene el conjunto completo por simetría ortogonal de eje (Oy), luego por simetría ortogonal de eje (Ox). Para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, se tiene claramente $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = r(\theta)$. Así, denotando (Δ) la recta de ecuación $y = x$,

$$M(\frac{\pi}{2} - \theta) = [r(\frac{\pi}{2} - \theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

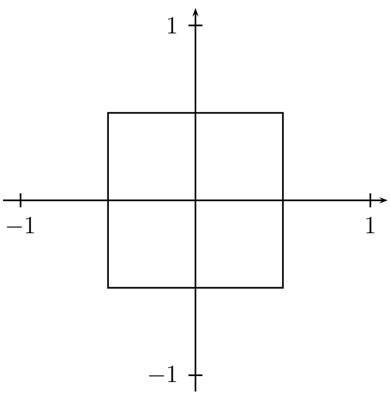
Se construye el conjunto de puntos correspondientes a $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ y se obtiene el conjunto completo por simetría ortogonal de eje (Δ), luego por simetría ortogonal de eje (Oy) y finalmente por simetría ortogonal del eje (Ox). Ahora, para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(2\theta)}+\sqrt{1-\operatorname{sen}(2\theta)}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}+\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\sqrt{2\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+\sqrt{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}-\theta)} \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta))} = \frac{1}{2\cos\theta}.\end{aligned}$$

Denotando x y y las coordenadas de un punto M, se tiene entonces

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

De donde el gráfico :



Solución del ejercicio 5763 ▲005530

1. **(Lemniscata de Bernoulli.)** Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación polar $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$.
   Dominio de estudio. Denotemos D el dominio de definición de la función $r : \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$.
   • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ y para $\theta \in D$,

   $$M(\theta+2\pi) = [r(\theta+2\pi), \theta+2\pi] = [r(\theta), \theta+2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

   Por lo tanto, se obtiene la curva completa cuando θ recorre un intervalo de longitud 2π como $[-\pi, \pi]$.
   • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ y para $\theta \in D$,

   $$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in [0, \pi]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox).
• $\theta \in D \Leftrightarrow \pi - \theta \in D$ y para $\theta \in D$,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Oy), luego de eje (Ox). Para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in D \Leftrightarrow \cos(2\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Se estudia así la curva de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

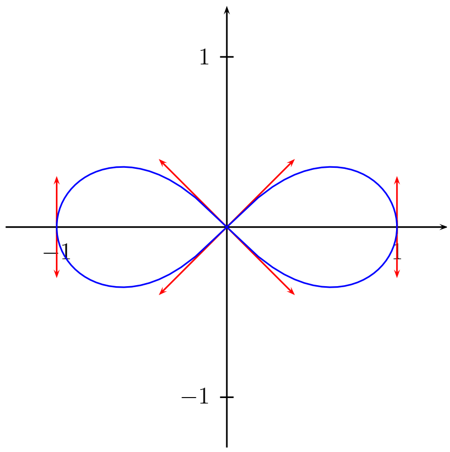
Variaciones y signo de r. La función r es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, estrictamente positiva sobre $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ y se anula en $\frac{\pi}{4}$.

Estudio en $\frac{\pi}{4}$. $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = O$ y por lo tanto, la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es la recta que pasa por O y ángulo polar $\frac{\pi}{4}$ o incluso la recta de ecuación $y = x$.

Estudio en 0. $M(0)$ es el punto de coordenadas cartesianas $(1,0)$. Para $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = -\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}_\theta + \sqrt{\cos(2\theta)}\overrightarrow{v}_\theta \text{ y entonces } \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(0) = \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{j}.$$

$M(0)$ es el punto de coordenadas cartesianas $(1,0)$ y la tangente en $M(0)$ es dirigida por $\overrightarrow{j}$



2. Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación polar $r = \operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.
   Dominio de estudio. • Para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 6\pi) = [r(\theta + 6\pi), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

Por lo tanto, se obtiene la curva completa cuando θ recorre un intervalo de longitud 6π como $[-3\pi, 3\pi]$. • Para $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in [0, 3\pi]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Oy).
• Para $\theta \in [0, 3\pi]$, $M(3\pi - \theta) = [r(3\pi - \theta), 3\pi - \theta] = [-r(\theta), 3\pi - \theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$.
Se estudia y se construye la porción de curva correspondiente a $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox), luego de eje (Oy).

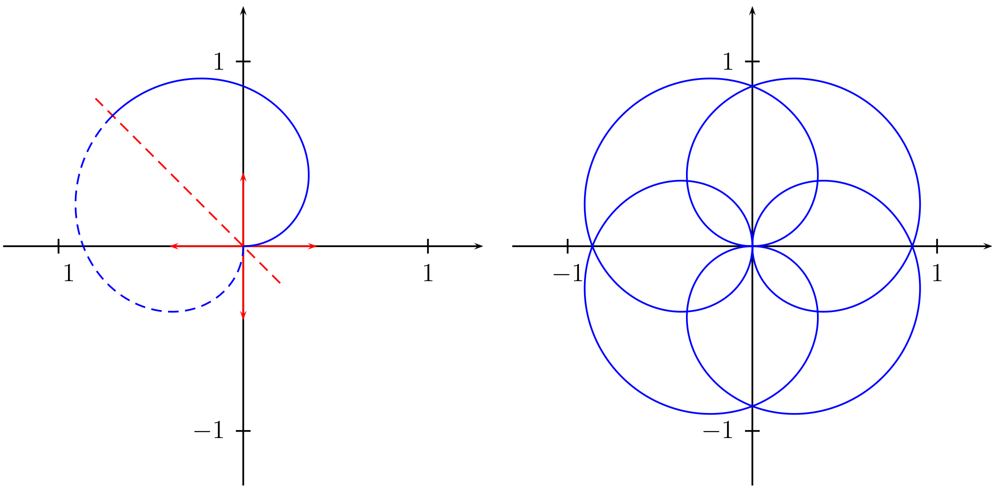
• Para $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[r\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=-x}(M(\theta))$. Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexiones sucesivas de ejes la recta de ecuación $y = -x$, luego de eje (Ox) y finalmente de eje (Oy).

• **Observación.** La función r admite 3π, para el más pequeño período estrictamente positivo. Por lo tanto, no se tiene la curva completa cuando θ recorre $[0, 3\pi]$, pues 3π no proporciona un número entero de vueltas. Más precisamente,

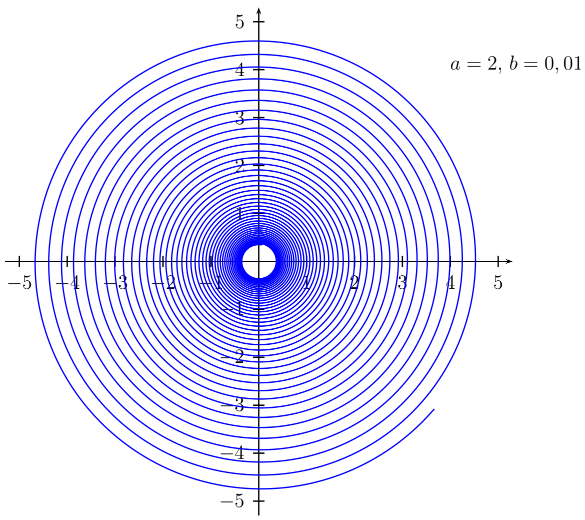
$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

Variaciones y signo de r. La función r es estrictamente positiva en $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right]$ y se anula en 0. La función r es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

• $M(0)$ es el punto O. La tangente en $M(0)$ es la recta que pasa por O de ángulo polar 0, es decir el eje (Ox).



3. Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación polar $r = ae^{b\theta}$. El estudio es muy corto. La función $r: \theta \mapsto ae^{b\theta}$ es estrictamente positiva y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Al girar, no cesa de alejarse del origen : la curva es una espiral.



4. Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación polar $r = 2\cos(\theta) + 1$.

Dominio de estudio.

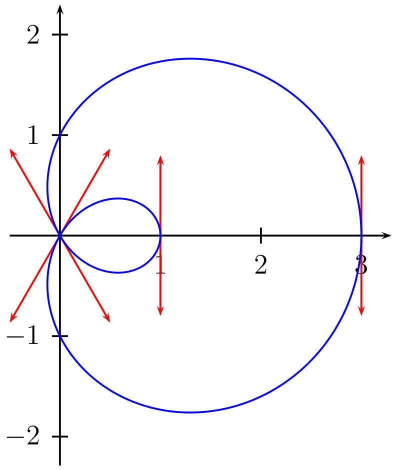
• Para $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. Por lo tanto, se obtiene la curva completa cuando θ recorre un intervalo de longitud 2π como $[-\pi, \pi]$.

• Para $\theta \in [-\pi, \pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in [0, \pi]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox).

Variaciones y signo de r. La función r es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$. La función r es estrictamente positiva en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right[$, estrictamente negativo en $\left]\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ y se anula en $\frac{2\pi}{3}$. Entonces la función $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ es estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

• $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es el punto O. La tangente en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es la recta que pasa por O de ángulo polar $\frac{2\pi}{3}$, es decir la recta de ecuación $y = -\sqrt{3}x$.

• Por simetría con respecto a (Ox), las tangentes en $M(0)$ y $M(\pi)$ son paralelas a (Oy).



5. Sea $\mathscr{C}$ la curva de ecuación polar $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Dominio de estudio. Denotemos D el dominio de definición de la función $r: \ \theta \mapsto \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$ y $M(\theta + 6\pi) = M(\theta)$. Por lo tanto, se obtiene la curva completa cuando θ recorre un intervalo de longitud 6π como $[-3\pi, 3\pi]$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ y $M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in [0, 3\pi]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Oy).

• $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$ y $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox), luego por reflexión del eje (Oy).

• $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta \in D$ y

$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

Se estudia y se construye la porción de la curva correspondiente a $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, luego se obtiene la curva completa por reflexiones sucesivas del eje la recta de ecuación $y = x$, luego de eje (Ox) y finalmente de eje (Oy).

• Para $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $r(\theta)$ existe si y solo si $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$. Se estudia así en $\theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

Variaciones y signo de r. La función r es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right[$, estrictamente positiva sobre $\left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$ y se anula en 0.

• La tangente en $M(0) = O$ es la recta que pasa por O y ángulo polar 0, es decir el eje (Ox).

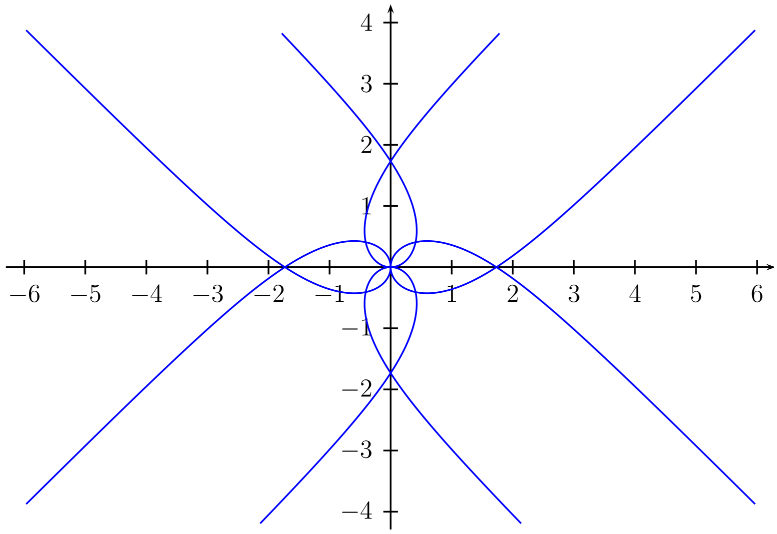
• **Estudio cuando $\boldsymbol{\theta}$ tiende a $\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$.** Cuando θ tiende a $\frac{3\pi}{4}$ para valores inferiores, $r(\theta)$ tiende a $+\infty$. La curva admite así una dirección asintótica de ángulo polar $\frac{3\pi}{4}$ o incluso una ecuación $y = -x$.

Se busca una eventual recta asíntota. Para esto, se estudia $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta)\,\mathrm{sen}\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Se define $h = \frac{3\pi}{4} - \theta$ o aún $\theta = \frac{3\pi}{4} - h$.

$$r(\theta)\,\mathrm{sen}\left(\theta - \tfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2h}{3}\right)\mathrm{sen}(-h) = -\mathrm{cotan}\,h\,\mathrm{sen}\,h = -\cos h \to -1.$$

Así, $\mathscr{C}$ admite una recta asíntota (D), cuando θ tiende a $\frac{3\pi}{4}$. Además,

$$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



Solución del ejercicio 5764 ▲005531

Dominio de estudio.

Denotemos D el dominio de definición de la función $r:\ \theta \mapsto \frac{2\cos\theta + 1}{2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ y $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. Por lo tanto, se obtiene la curva completa cuando θ recorre un intervalo de longitud 2π como $[-\pi, \pi]$.

Para $\theta \in [-\pi, \pi]$, $2\,\mathrm{sen}\,\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$. Se estudia así la curva de $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$.

Signo de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos\theta + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2\sin\theta + 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de r		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Variaciones de r. La función r es derivable en $[-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ y para $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

$$r'(\theta)=\frac{-2\operatorname{sen}\theta(2\operatorname{sen}\theta+1)-2\cos\theta(2\cos\theta+1)}{(2\operatorname{sen}\theta+1)^2}=\frac{-4-2\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta}{(2\operatorname{sen}\theta+1)^2}=\frac{-4-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\operatorname{sen}\theta+1)^2}<0.$$

La función r es estrictamente decreciente en $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right[$, sobre $\left]-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right[$ y en $\left]-\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

Estudio cuando θ tiende a $-\frac{5\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ \theta<-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ y $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ \theta>-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Entonces la curva $\mathscr{C}$ admite una dirección asintótica de ángulo polar $-\frac{5\pi}{6}$ o incluso una ecuación $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Estudiar ahora la existencia de una posible recta asíntota y para esto analizar $\lim\limits_{\theta\to-\frac{5\pi}{6}} r(\theta)\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)$. Se define $h=\theta+\frac{5\pi}{6}$ o aún $\theta=-\frac{5\pi}{6}+h$ de manera que θ tiende a $-\frac{5\pi}{6}$ si y solo si h tiende a 0. Cuando h tiende a 0

$$r(\theta)\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}{2\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}\operatorname{sen}h=\frac{(1-\sqrt{3}\cos h)+\operatorname{sen}h}{-\sqrt{3}\operatorname{sen}h+(1-\cos h)}\operatorname{sen}h\sim\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}h}\times h=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Así, $\mathscr{C}$ admite una recta asíntota (D_1), cuando θ tiende a $-\frac{5\pi}{6}$. Además

$$M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{v}_{-\frac{5\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Estudio cuando θ tiende a $-\frac{\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ \theta<-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ y $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ \theta>-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Entonces la curva $\mathscr{C}$ admite una dirección asintótica de ángulo polar $-\frac{\pi}{6}$ o incluso una ecuación $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Se define entonces $h=\theta+\frac{\pi}{6}$. Cuando h tiende a 0

$$r(\theta)\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}{2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}\operatorname{sen}h=\frac{(1+\sqrt{3}\cos h)+\operatorname{sen}h}{\sqrt{3}\operatorname{sen}h+(1-\cos h)}\operatorname{sen}h\sim\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}h}\times h=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Así, $\mathscr{C}$ admite una recta asíntota (D_2), cuando θ tiende a $-\frac{\pi}{6}$. Además

$$M(x,y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{v}_{-\frac{\pi}{6}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tabla de variación de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
r	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

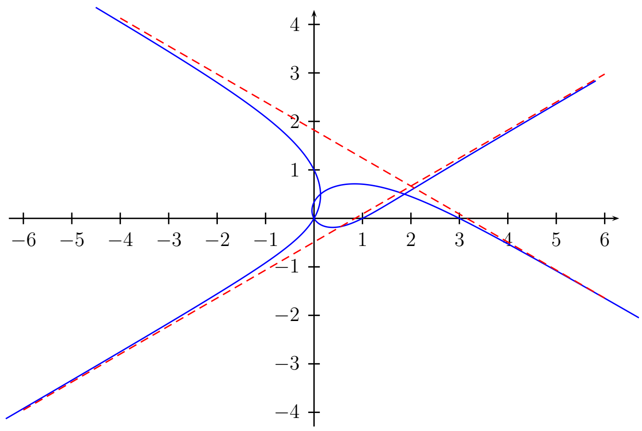
Búsqueda de puntos múltiples. Sea $(\theta_1,\theta_2)\in\left([-\pi,\pi]\setminus\left\{-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right\}\right)^2$ tal que $\theta_1<\theta_2$. Se supone además que $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ y $\theta_1\notin\left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ de manera que $M(\theta_1)\neq O$ y $M(\theta_2)\neq O$.

$$\begin{aligned}M(\theta_1)=M(\theta_2)&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+2k\pi\ \text{ y }\ r(\theta_2)=r(\theta_1))\text{ o }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ \theta_2=\theta_1+\pi+2k\pi\ \text{ y }\ r(\theta_2)=-r(\theta_1))\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\ \text{ y }\ r(\theta_2)=-r(\theta_1)\\&\Leftrightarrow\theta_1\in[-\pi,0],\ \theta_2=\theta_1+\pi\ \text{ y }\ \frac{-2\cos(\theta_1)+1}{-2\operatorname{sen}(\theta_1)+1}=-\frac{2\cos(\theta_1)+1}{2\operatorname{sen}(\theta_1)+1}.\end{aligned}$$

Ahora, para $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

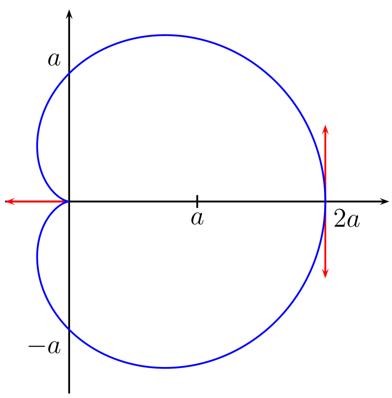
$$\frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\operatorname{sen}(\theta)+1} = -\frac{2\cos(\theta)+1}{2\operatorname{sen}(\theta)+1} \Leftrightarrow -4\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+1 = 4\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)-1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \text{ o } 2\theta \in \frac{5\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12}+\pi\mathbb{Z} \text{ o } \theta \in \frac{5\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.$$

Así, los distintos puntos dobles del origen son $M\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right)$ y $M\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = M\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Si no, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = O$.



Solución del ejercicio 5765 ▲005532

1. **Dominio de estudio.**
   La función r es 2π-periódica y par. Entonces se estudia y se construye la curva cuando θ recorre $[0, \pi]$ y se obtiene la curva completa por reflexión de eje (Ox).
   Variaciones y signo de r. La función r es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$, estrictamente positiva sobre $]0, \pi]$ y se anula en π.
   Estudio para $\theta = \pi$. La tangente en $M(\pi) = O$ es la recta que pasa por O de ángulo polar π, es decir el eje (Ox). Por simetría con respecto a (Ox), el punto $M(\pi)$ es un punto de retroceso de primera especie.



2. Sean $\theta \in [-\pi, \pi]$, luego $M = O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta$ un punto de $\mathscr{C}$ parámetro θ.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\operatorname{sen}\theta\overrightarrow{u}_\theta + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right)\\ &= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Longitud ℓ del cardioide. Se tiene $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (para $\theta \in [-\pi, \pi]$) y entonces

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| d\theta = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta/2)\,d\theta = 4a\left[\operatorname{sen}(\theta/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{\text{La cardioide de ecuación polar } r = a(1+\cos\theta),\ a > 0, \text{ tiene longitud } 8a.}$$

Evoluta. El punto $M(\theta)$ es regular si y solo si $\theta \neq \pm\pi$. En este caso,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ y también } \overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.$$

Denotando $\alpha(\theta)$ una medida del ángulo $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}(\theta)\right)$, se puede tomar $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$.
Denotando $R(\theta)$ el radio de curvatura en el punto $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

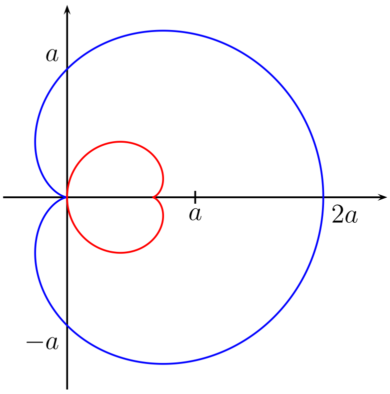
entonces, $\overrightarrow{n}(\theta) = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{\tau}(\theta)\right) = -\overrightarrow{u}_{3\theta/2}$ y entonces, denotando $\Omega(\theta)$ el centro de curvatura en el punto $M(\theta)$,

$$\begin{aligned}\Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta)\\ &= O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta - \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{3\theta/2}\\ &= O + a(1+\cos\theta)\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \operatorname{sen}(\theta)\overrightarrow{j}\right) - \frac{4}{3}a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{j}\right)\\ &= O + a\Bigg[\left(\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta) + \cos(2\theta))\right)\overrightarrow{i} +\\ &\qquad\left(\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - \frac{2}{3}(\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(2\theta))\right)\overrightarrow{j}\Bigg]\\ &= O + a\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{j}\right]\\ &= O + \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta.\end{aligned}$$

Denotemos Γ la evoluta deseada. Se tiene $\Gamma = t \circ h(\mathscr{C}_1)$, donde t es la traslación de vector $\frac{2a}{3}\overrightarrow{i}$, h es la homotecia de centro O y de cociente $\frac{1}{3}$ y $\mathscr{C}_1$ la curva de ecuación polar $r = a(1-\cos\theta)$. Ahora, denotando r la función $\theta \mapsto a(1+\cos\theta)$ y r_1 la función $\theta \mapsto a(1-\cos\theta)$,

$$[r_1(\theta+\pi), \theta+\pi)] = [a(1+\cos\theta), \theta+\pi] = s_O([r(\theta), \theta)]).$$

La curva $\mathscr{C}_1$ es, por lo tanto la simétrica con respecto a O de la curva $\mathscr{C}$. En resumen, la evoluta de $\mathscr{C}$ es la imagen de $\mathscr{C}$ por la transformación $t \circ h \circ s_O$: es aún un cardioide.



Solución del ejercicio 5766 ▲005533

Sean $(R, \theta) \in \mathbb{R}^2$, luego M el punto del plano cuyo par de coordenadas polares es $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow x^2(x^2+y^2)-(y-x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta \times r^2 - (r\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2[r^2\cos^2\theta - (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \text{ o } r^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \quad (\cos\theta = 0 \text{ no proporciona solución}) \\ &\Leftrightarrow r = 0 \text{ o } r = \tan\theta - 1 \text{ o } r = 1 - \tan\theta. \end{aligned}$$

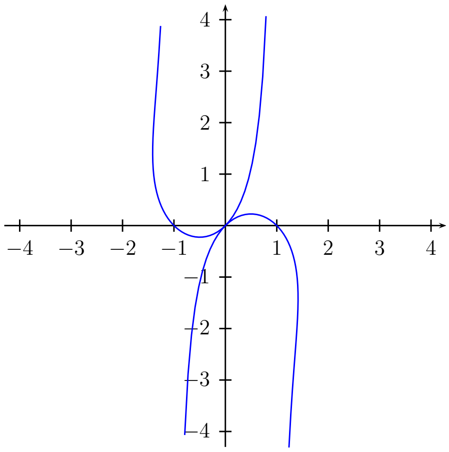
$\mathscr{C}$ es, por lo tanto la unión de la curva $(\mathscr{C}_1)$ de ecuación polar $r = \tan\theta - 1$, $(\mathscr{C}_2)$ de ecuación polar $r = 1 - \tan\theta$ y $\{O\}$. Se observa que el punto O pertenece a $(\mathscr{C}_1)$, pues $\theta = \frac{\pi}{4}$ proporciona $r = 0$. Entonces $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \{O\} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$. Luego, denotando r_1 y r_2 respectivamente la función $\theta \mapsto \tan\theta - 1$ y $r_2 = -r_1$,

$$M[\theta+\pi, r_2(\theta+\pi)] = M[\theta+\pi, r_2(\theta)] = M[\theta+\pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

y como $\theta + \pi$ recorre $\mathbb{R}$ si y solo si θ recorre $\mathbb{R}$, las curvas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son una y la misma curva.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ es la curva de ecuación polar } r = \tan\theta - 1.}$

Construcción de $\mathscr{C}$.



Solución del ejercicio 5767 ▲005534

Evoluta. $M(\theta) = O + a\mathrm{e}^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta}$, luego

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = a\mathrm{e}^{\theta}(\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u}_{\theta} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{v}_{\theta}\right) = a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

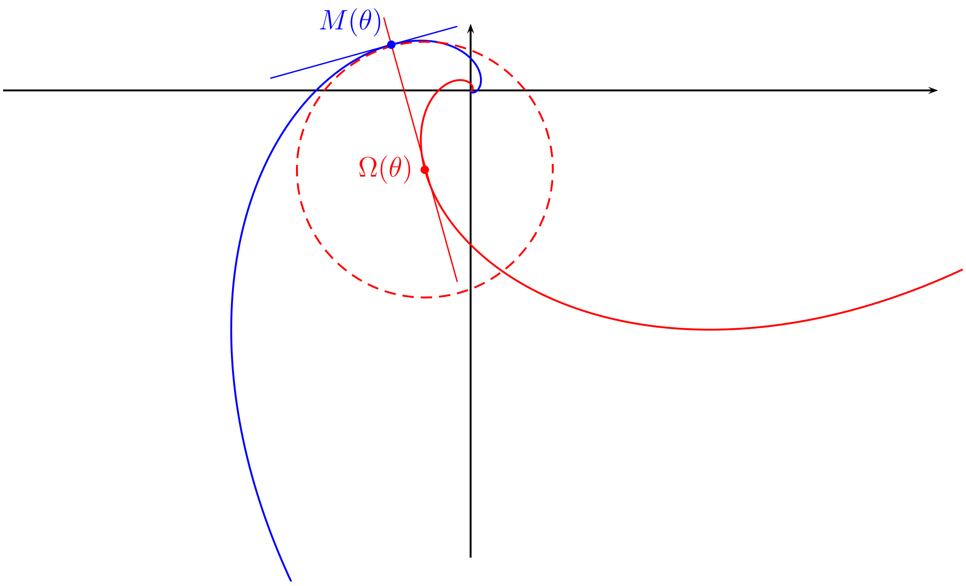
Se deduce $\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}$ y $\overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. Se puede entonces tomar $\alpha(\theta) = \theta + \frac{\pi}{4}$ y entonces $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$. Así

$$R(\theta) = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}}{1} = a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}.$$

Por otra parte, $\overrightarrow{n}(\theta) = \overrightarrow{\tau}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta})$ y entonces

$$\Omega(\theta) = M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta) = O + a\mathrm{e}^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta} + a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\theta}.\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_{\theta} + \overrightarrow{v}_{\theta}) = O + a\mathrm{e}^{\theta}\overrightarrow{v}_{\theta} = r_{O,\frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La evoluta de la espiral logarítmica de ecuación polar $r = a\mathrm{e}^{\theta}$ es la imagen de esta espiral por el cuarto de vuelta directo de centro O.



Solución del ejercicio 5768 ▲006989

1. La expresión $r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\tan(2\theta)}}$ está bien definida en $\mathscr{D} =]0, \frac{\pi}{4}[$ (es necesario que $\tan(2\theta)$ bien definida y sea estrictamente positiva).
   — Pasadas por el origen
   Porque r no se anula, la curva no pasa por el origen. Pero admite el origen como punto límite : $r(\theta) \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{4}^-]{} 0^+$.

— Variaciones y signo de la función r

La función r es estrictamente decreciente, y estrictamente positivo, sobre $]0;\frac{\pi}{4}[$:

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & & \frac{\pi}{4} \\ \hline r & +\infty & \searrow & 0 \end{array}$$

Esto significa que la curva gira (en el sentido trigonométrico) acercándose al origen.

— Tangente en el origen

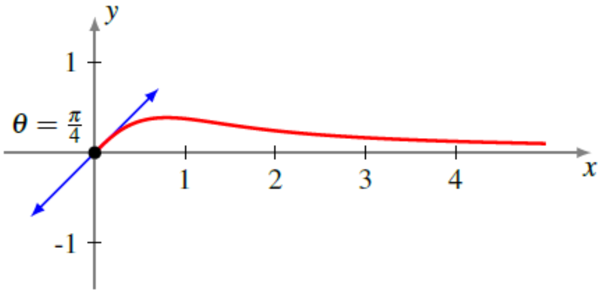
El punto $M(\frac{\pi}{4})$ está en el origen : la tangente en este punto está, por lo tanto dirigida por $\overrightarrow{u}_{\frac{\pi}{4}}$, es la primera bisectriz.

— Estudio de ramas infinitas

Cuando θ tiende a 0, $r(\theta)$ tiende a $+\infty$: hay por lo tanto, una rama infinita. Para estudiar su naturaleza, se pasa a coordenadas cartesianas :

$$x(\theta) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\tan(2\theta)}} \xrightarrow[\theta\to 0^+]{} +\infty, \quad y(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\tan(2\theta)}} \underset{0^+}{\sim} \frac{\theta}{\sqrt{2\theta}}.$$

Así $x(\theta) \xrightarrow[\theta\to 0^+]{} +\infty$, $y(\theta) \xrightarrow[\theta\to 0^+]{} 0$: la recta de ecuación $y=0$ es asíntota horizontal.



2. La expresión $r(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ está bien definida en $\mathscr{D} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

— Reducción del campo de estudio

Como r es par, es suficiente de hecho hacer el estudio para los $\theta > 0$, por lo tanto en $[0;\frac{\pi}{2}[$, luego de completar por reflexión del eje (Ox), en efecto, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. Por lo tanto, en lo que sigue se limita a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, luego se tiene la curva completa por reflexión de eje (Ox).

— Pasadas por el origen

La curva pasa por el origen si r se anula : para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $r(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0$.

— Variaciones y signo de la función r

La función r es estrictamente creciente en $]0, \frac{\pi}{2}[$, estrictamente positiva sobre $]0, \frac{\pi}{2}]$ y se anula en 0 :

$$\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & & \frac{\pi}{2} \\ \hline r & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Por lo tanto, la curva gira alejándose del origen.

— Tangente en el origen

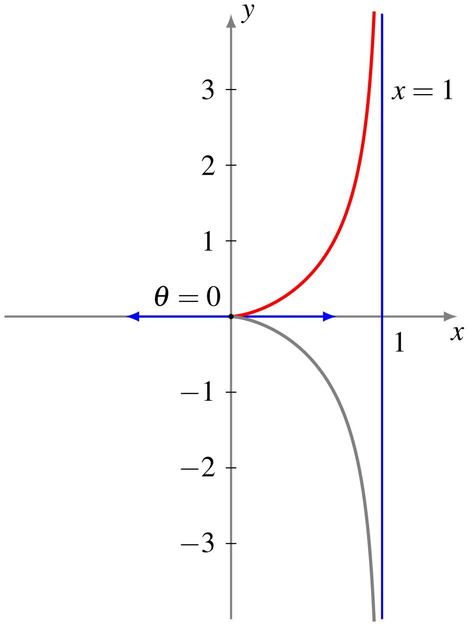
La curva pasa por el origen en $\theta = 0$. En consecuencia, la tangente en $O = M(0)$ es la recta que pasa por O y ángulo polar 0, es decir el eje (Ox).

— Estudio de ramas infinitas

Cuando θ tiende a $\frac{\pi}{2}$, $r(\theta)$ tiende a $+\infty$: hay por lo tanto, una rama infinita. Para estudiar su naturaleza, se pasa a coordenadas cartesianas :

$$x(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} 1, \quad y(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$$

Así la recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical.



3. La expresión $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$ está bien definida si $\cos(2\theta)$ es positivo, *i.e.* sobre $\mathscr{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi]$.
   - Reducción del campo de estudio
     La función r es π-periódica : se estudia en un intervalo de longitud π, por ejemplo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \cap \mathscr{D} = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$, luego se completa por rotación angular π. Además, r es par : $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$, y para $\theta \in D$ se tiene
     $$M(-\theta) = [r(-\theta) : -\theta] = [r(\theta) : -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$
     Finalmente, se estudia y se construye la porción de curva correspondiente a $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, luego se tiene la curva completa primero por reflexión del eje (Ox), luego por rotación de ángulo π (simetría central con respecto al origen).
   - Pasadas por el origen
     La curva pasa por el origen si r se anula : para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,
     $$r(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$
   - Variaciones y signo de la función r
     La función r es estrictamente decreciente en $[0, \frac{\pi}{4}]$, estrictamente positiva sobre $]0, \frac{\pi}{4}]$ y se anula en $\frac{\pi}{4}$:

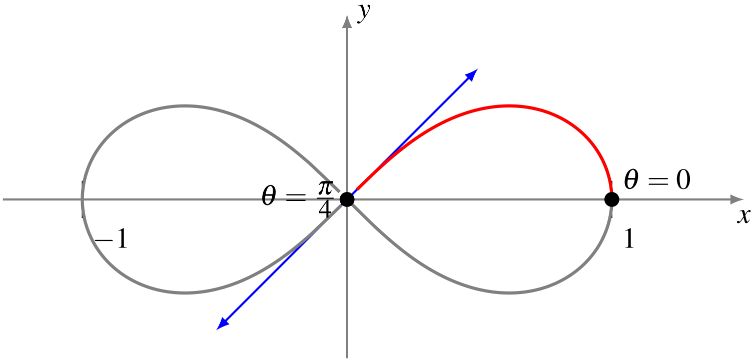
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r	1	$\searrow$	0

     Así la curva gira acercándose al origen.
   - Tangentes
     La curva pasa por el origen en $\theta = \frac{\pi}{4}$, y por lo tanto, la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es la recta que pasa por O y ángulo polar $\frac{\pi}{4}$, es decir la primera bisectriz. En $\theta = 0$, $r(0) = 1$ (y $r'(0) = 0$) y la

tangente está dirigida por el vector

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(0) = r'(0)\overrightarrow{u}_0 + r(0)\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{j}$$

y la tangente a la curva en el punto $M(0)$ de coordenadas cartesianas $(1,0)$ es, por lo tanto vertical.



Solución del ejercicio 5769 ▲006990

Las dos ecuaciones son 2π-periódicas en θ, sea por lo tanto $\theta \in [0;2\pi[$, encontrar para cada curva el vector tangente en el punto $M_i(\theta)$. Se ve que $\mathscr{C}_2$ no pasa por el polo pero $\mathscr{C}_1$ sí, para $\theta = \pi$: tiene entonces en $M_1(\pi)$ una tangente horizontal (dirigida por el vector $\overrightarrow{u}_\pi$) y $N_1(\pi)$ es el eje (Oy). En todos los otros casos, la tangente a $\mathscr{C}_i$ en el punto $M_i(\theta)$ es dirigida por el vector

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + r(\theta)\overrightarrow{v}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + (a_i + \cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta,$$

donde $a_1 = 1, a_2 = 3$. El vector director de $N_i(\theta)$ es, por lo tanto

$$\overrightarrow{n_i}(\theta) := (a_i + \cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{v}_\theta$$

y $M \in N_i(\theta) \iff \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_i(\theta)} + t\cdot\overrightarrow{n_i}(\theta)$. Finalmente,

$$\forall\theta \neq \pi,\ N_i(\theta) = \left\{(1+t)(a_i+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta + t\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{v}_\theta \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

y el resultado se extiende al caso $\theta = \pi$, para $i = 2$.

- Si $\theta = \pi$, $N_1(\pi) = (Oy)$ y $N_2(\pi) = \{2(1+t)\overrightarrow{u}_\pi \mid t \in \mathbb{R}\} = (Ox)$, estas dos rectas se cruzan en O.
- Si $\theta \neq \pi$, $N_1(\theta)$ y $N_2(\theta)$ son secantes si y solo si los vectores $\overrightarrow{n_1}(\theta)$ y $\overrightarrow{n_2}(\theta)$ no son colineales, es decir si y solo si $\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & 3+\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \neq 0$ *i.e.* $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. Así, para $\theta \neq 0$, las rectas $N_1(\theta)$ y $N_2(\theta)$ son secantes en un punto $P(\theta)$, que se puede determinar :

$$\begin{aligned} &(1+t_1)(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta + t_1\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{v}_\theta = (1+t_2)(3+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta + t_2\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{v}_\theta \\ \iff &\begin{cases} (1+t_1)(1+\cos\theta) = (1+t_2)(3+\cos\theta) \\ t_1\operatorname{sen}\theta = t_2\operatorname{sen}\theta \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_1 = t_2, \end{cases} \end{aligned}$$

porque aquí $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. Se obtiene entonces $\overrightarrow{OP(\theta)} = -\operatorname{sen}\theta\,\overrightarrow{v}_\theta$.

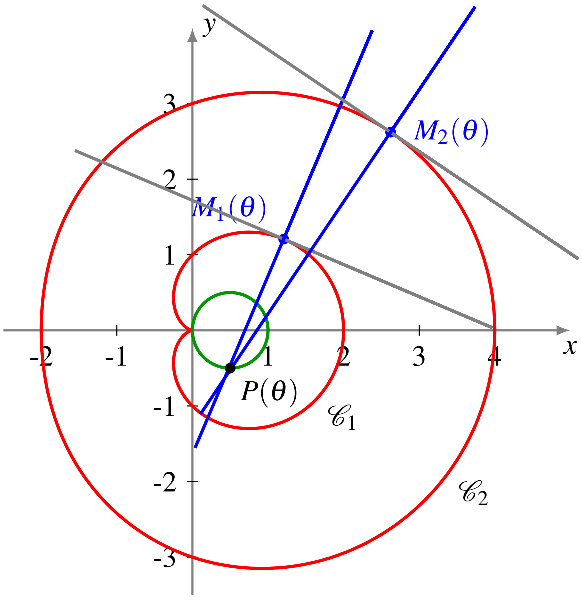
La fórmula dando $P(\theta)$, para $\theta \neq \pi$ de hecho, es aún válida en $\theta = \pi$, porque se encuentra en este caso $P(\pi) = O$. En coordenadas cartesianas, por lo tanto se tiene

$$\forall \theta \in]0;2\pi[,\ P(\theta) = (\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

Se observa que

$$(\operatorname{sen}^2\theta, -\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}, -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) - \frac{1}{2}\big(\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta)\big).$$

Cuando θ recorre $]0;2\pi[$, 2θ recorre $]0;4\pi[$ y $\big(\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta)\big)$ recorre (dos veces, excepto en $(1,0)$, donde solo se pasa una vez) el círculo unitario. En consecuencia $\{P(\theta) \mid \theta \in]0;2\pi[\}$ es el círculo de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y de radio $\frac{1}{2}$.



Solución del ejercicio 5770 ▲004994

1. $y = ae^{bx}$.
2. $y = \pm\sqrt{ax+b}$.
3. $(a-x)^2 + y^2 = b^2$.
4. $x = a\left(\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + b, \quad y = a\operatorname{sen} t$.
5. $y^2 = \frac{x^2}{2} + a^2\ln|x| + b$.

Solución del ejercicio 5771 ▲004995

1. $\rho = \frac{1}{a\theta+b}$.
2. $\rho = a\theta + b$. (Espiral de Arquímedes)

Solución del ejercicio 5772 ▲004996

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow 2x + y\left(t - \frac{1}{t}\right) = a$ (cte). Se deriva : $2x' + y'\left(t - \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0 \Rightarrow y'\left(t + \frac{1}{t}\right) + y\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = 0. \Rightarrow y = \frac{\lambda}{t}, x = b + \frac{\lambda}{2t^2}$ (Parábola)

Solución del ejercicio 5773 ▲004997

$D = Ox \Rightarrow x_T = x - \frac{x'y}{y'}$, $x_N = x + \frac{yy'}{x'} \Rightarrow y\left(t + \frac{1}{t}\right) = a$ (cte).

$y = \frac{at}{1+t^2}$ y $x' = ty' \Rightarrow x = a\left(\ln\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{1+t^2}\right) + b.$

Solución del ejercicio 5774 ▲004998

La tangente no debe ser paralela a Oy, así se puede parametrizar $\mathscr{C}$ bajo la forma : $y = f(x)$, que da la ecuación :

$$|x + yy'| = |y|\sqrt{1 + y'^2} \Leftrightarrow 2xyy' = y^2 - x^2.$$

(ecuación homogénea) se obtiene : $y = \pm\sqrt{\lambda x - x^2}$. Las curvas buscadas son arcos de círculos centrados en Ox pasando por O.

Solución del ejercicio 5775 ▲004999

Se supone que la recta es Ox y se parametriza la curva buscada, $\mathscr{C}$, por una abscisa curvilínea s. Sean $M = (x,y) \in \mathscr{C}$, $I = (x - R\frac{dy}{ds}, y + R\frac{dx}{ds})$ el centro de curvatura en M, donde R es el radio de curvatura. Se quiere $|R| = \left|y + R\frac{dx}{ds}\right| = |y + R\cos\varphi|$, de donde :

$$\pm\frac{dR}{ds} = \frac{dy}{ds} - R\operatorname{sen}\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dR}{ds}\cos\varphi = \frac{dR}{ds}\cos\varphi.$$

Esto implica $\frac{dR}{ds} = 0$, por lo tanto R es constante (círculo) o $\varphi \equiv 0 \bmod \pi$ (recta horizontal). El segundo caso es excluido (curva bi-regular) por lo que queda el caso de un círculo que sirve si es tangente a Ox.

Solución del ejercicio 5776 ▲005000

caso 1 : $R = \frac{K}{\operatorname{sen}\varphi/2}$, $x = 2K\ln\left|\tan\frac{\varphi}{4}\right| - 4K\cos\frac{\varphi}{2} + L$, $y = 4K\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$.

caso 2 : $R = \frac{K}{\cos\varphi/2}$, $x = -2K\ln\left|\tan\frac{\varphi+\pi}{4}\right| + 4K\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + L$, $y = -4K\cos\frac{\varphi}{2}$.

Solución del ejercicio 5777 ▲005001

$M + a\vec{t} \in Ox$ (tractrices) $x = a\cos\varphi + a\ln|\tan\varphi/2| + b$, $y = a\operatorname{sen}\varphi$.

Solución del ejercicio 5779 ▲005003

1. $x = \int^s \cos\ln|t|\,dt, \quad y = \int^s \operatorname{sen}\ln|t|\,dt, \quad \rho = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta+\pi/4}.$

2. $x = \int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du, \quad y = \int_0^s \operatorname{sen}\frac{u^2}{2}\,du$ (Clotoide o espiral de Cornu)

3. $x = a(\varphi\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi), \quad y = a(-\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)$.

4. $x = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y = \frac{1}{\cos\varphi} = \operatorname{ch} x$.

5. $x = \frac{a}{4}(\operatorname{sen}2\varphi + 2\varphi), \quad y = \frac{a}{4}\cos 2\varphi$ (cicloide).

Solución del ejercicio 5780 ▲005004

Involuta del círculo : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dR}{ds}\vec{N} \Rightarrow \frac{dR}{d\varphi} = r$.
$\Rightarrow x = x_0 + r(\cos\varphi - 1 + \varphi\operatorname{sen}\varphi), \quad y = y_0 + r(\operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

Solución del ejercicio 5781 ▲005005

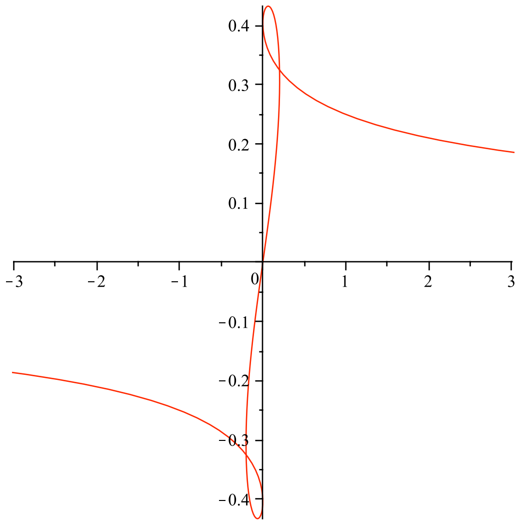
$y = \frac{s}{2}\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow s = a\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow x = \frac{a\operatorname{sen}2\varphi}{4} + \frac{a\varphi}{2} + b, \quad y = \frac{a\operatorname{sen}^2\varphi}{2}$. (Cicloide)

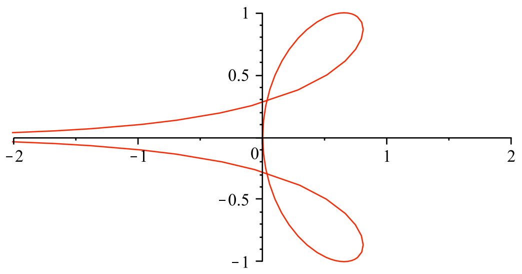
Solución del ejercicio 5782 ▲005006

Sea θ el ángulo polar de $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{MC} = \frac{ds}{d\varphi}\vec{n}$ y $\overrightarrow{MN} = \frac{ds}{d\theta}\vec{n}$. $\frac{ds}{d\theta} = k\frac{ds}{d\varphi} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{k} + b \Rightarrow V = a\theta + b$, con $a = \frac{1}{k} - 1$. $\frac{\rho}{\rho'} = \tan(a\theta + b) \Rightarrow \rho = \lambda\cos(a\theta + b)^{-1/a}$ si $a \neq 0$ o $\rho = \lambda e^{\mu\theta}$ si $a = 0$.

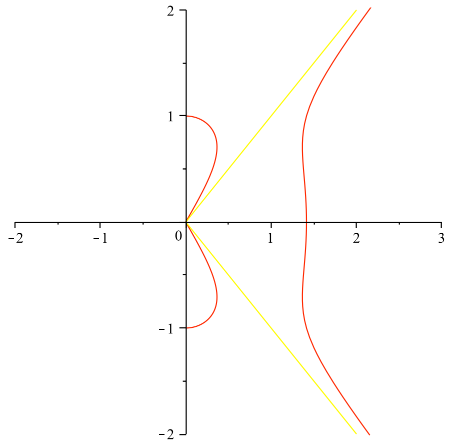
$k = 1 \quad \Rightarrow$ Espiral logarítmica.
$k = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow$ Parabola de foco O.
$k = 2 \quad \Rightarrow$ Cardioide.
$k = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$ hipérbola de centro O.
$k = -1 \quad \Rightarrow$ Lemniscata de Bernoulli.

Solución del ejercicio 5784 ▲005007

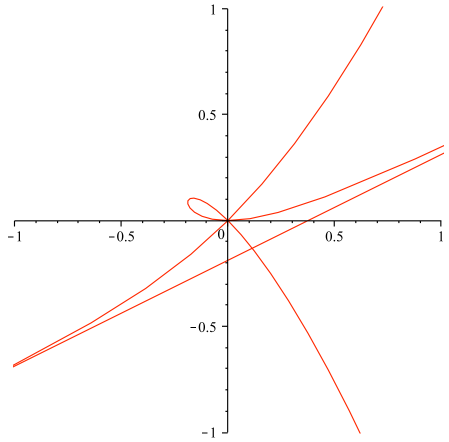
1.


2.


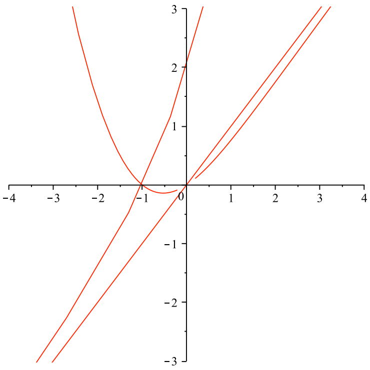
3. asíntotas : $y = \pm x$
$x - y \sim 1/(4x) \Rightarrow$ área infinita
$y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})/2$



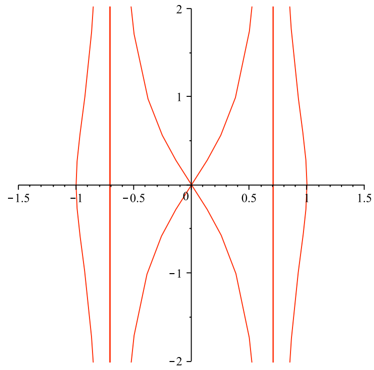
4. asíntota : $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{16}$
(cruzada)



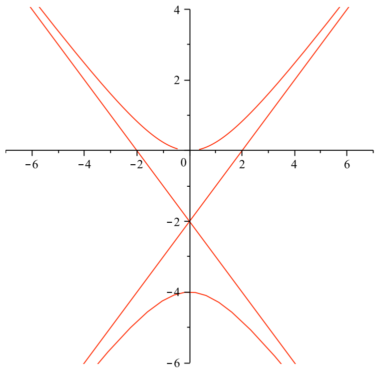
5. asíntota :
$y = x$



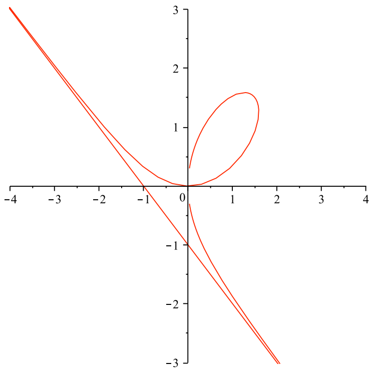
6. inflexiones :
$\tan \frac{t}{2} = 0, \pm 3$



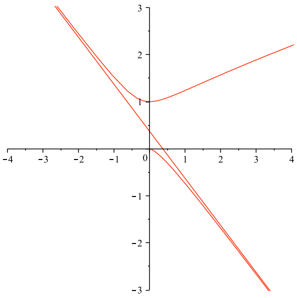
7. hipérbola :
$(y+2)^2 - x^2 = 4$



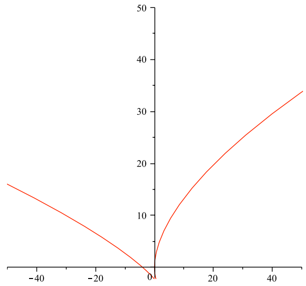
8. asíntota :
$x + y = -1$
ecuación
cartesiana :
$x^3 + y^3 = 3xy$



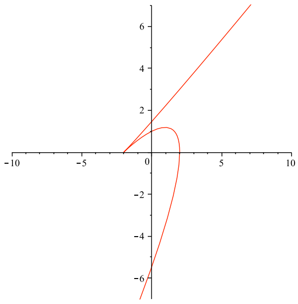
9. asíntota : $x+y=\mathrm{e}^{-1}$ rama parabólica horizontal



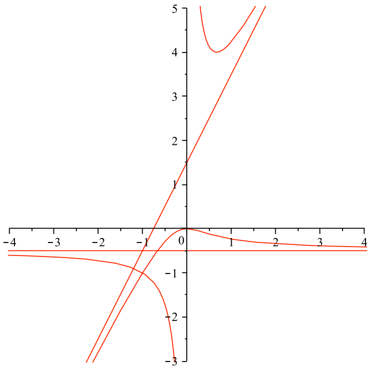
10. rama parabólica horizontal retroceso para $t=1$



11. rama parabólica de coeficiente 1



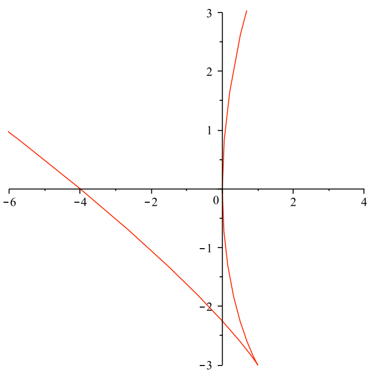
12. asíntota : $y=2x+\frac{3}{2}$ punto doble : $t^2+t=1$, $x=y=-1$ las tangentes son ortogonales



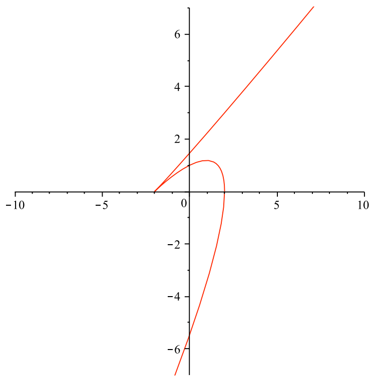
Solución del ejercicio 5785 ▲005008

---

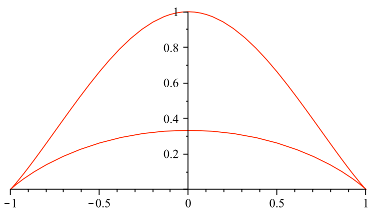
1. rama parabólica horizontal



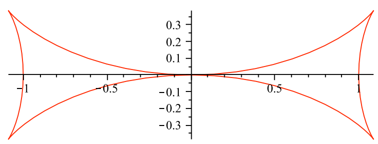
2. rama parabólica de coeficiente 1

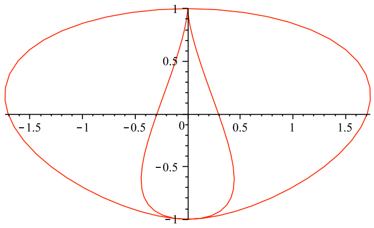


3. inflexión : $\cos t=\frac{2}{3}$



4. retroceso : $\cos^2 t=\frac{1}{3}$.



5. 

Solución del ejercicio 5786 ▲005009

$x=\dfrac{3\cos\theta-\cos 3\theta}{4}$, $y=\dfrac{3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta}{4}$.

Solución del ejercicio 5787 ▲005010

$M=(R\cos\theta,R\operatorname{sen}\theta)$, $S=(a,0)$:

Se obtiene las ecuaciones paramétricas : $x=\dfrac{R(R\cos\theta-a)}{R-a\cos\theta}$, $y=\dfrac{(R^2-a^2)\operatorname{sen}\theta}{R-a\cos\theta}$.

Para $R\neq a$, se trata de la cónica de centro O y de ecuación cartesiana : $\dfrac{x^2}{R^2}+\dfrac{y^2}{R^2-a^2}=1$.

Solución del ejercicio 5788 ▲005011

$$y_A=t\Rightarrow\begin{cases}2px=t^2+ht+h^2/2\\ y=t+h/2\end{cases}\Rightarrow \text{parábola } y^2+h^2/4=2px.$$

Solución del ejercicio 5789 ▲005012

$y_A=t, y_B=u\Rightarrow C:\left(\frac{ut}{2p},\frac{t+u}{2}\right)$; área $=\dfrac{|u-t|^3}{8p}$.
envolvente : $M=$ pto.med(A,B), parábola $y^2+a^2/4=2px$.

Solución del ejercicio 5790 ▲005013

1. F.
2. $M=(t^2/2p,t), M'=(t'^2/2p,t')\Rightarrow tt'=-p^2\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{p}{4}\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)\\ y=\frac{p}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right),\end{cases}$ con $u=\frac{t}{p}$. (Parábola pasando por F)
3. $\begin{cases}x=\frac{3p}{4}\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)\\ y=-\frac{p}{4}\left(u-\frac{1}{u}\right)^3\end{cases}$.

Solución del ejercicio 5791 ▲005014

1. Foco.

2. Punto de impacto : $\left(\frac{t^2}{2p},t\right)$ Punto característico : $\left(\frac{3t^2}{2p},\frac{t(3p^2-t^2)}{2p^2}\right)$.

Solución del ejercicio 5792 ▲005015

$M=(t^2/2p,t)\Rightarrow I=(3t^2/2p+p,-t^3/p^2)$. Sea $P=(u^2/2p,u)$:

$IP=IM\Leftrightarrow(u-t)^3(u+3t)=0\Rightarrow u=-3t$. Envolvente : $\begin{cases}x=-3t^2/2p\\ y=3t.\end{cases}$ (Parábola)

Solución del ejercicio 5793 ▲005016

ecuación polar : $\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{p(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}{2+e(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}\\ y=\frac{p(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{2+e(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)}\end{cases}$ cónica de excentricidad $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Solución del ejercicio 5794 ▲005017

$3x=\cos2\theta+2\cos\theta$, $3y=\operatorname{sen}2\theta+2\operatorname{sen}\theta$: cardioide con retroceso en $(-1/3,0)$.

Solución del ejercicio 5795 ▲005018

$D=Ox$, radio $=1$: $x=\theta-\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, $y=\operatorname{sen}^2\theta$. pt característico = proyección de I.

Solución del ejercicio 5796 ▲005019

$M=\begin{pmatrix}a(1+\cos t)\\ a\operatorname{sen}t\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}2a\cos t(1+\cos t)\\ 2a\operatorname{sen}t(1-\cos t)\end{pmatrix}$. Hipocicloide de tres cúspides.

Solución del ejercicio 5797 ▲005020

$x=a\cos4\theta$, $y=a\operatorname{sen}4\theta$.

Solución del ejercicio 5798 ▲005021

1. $x=\frac{\cos t}{a}(a^2+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2t)$, $y=\frac{\operatorname{sen}t}{b}(b^2-(a^2-b^2)\cos^2t)$.
2.
3. Punto estacionario si y solo si $a^2>2b^2$, obtenido para $\operatorname{sen}^2t=\frac{a^2-2b^2}{3(a^2-b^2)}$. Retroceso de 1ª especie.

Solución del ejercicio 5799 ▲005022

$D=Ox$, $A=(0,a)$,$M=(t,0)\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\ y=t^2/a.\end{cases}$ (Parábola)

Solución del ejercicio 5807 ▲005024

1. sh^2t.

2. $\theta - \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$.

Solución del ejercicio 5808 ▲005025

$2-\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2})$.

Solución del ejercicio 5809 ▲005026

1. $4\sqrt{2}+4\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}-\pi = 4\sqrt{2}+4\arctan\sqrt{2}-\pi$.
2. 4.

Solución del ejercicio 5810 ▲005027

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow 2\sqrt{xy}=1-x-y \Rightarrow (x-y)^2=2(x+y)-1$. La curva es un arco de parábola de eje la primera bisectriz y tangente en los ejes en $(1,0)$ y en $(0,1)$.
Longitud : $x-y=\operatorname{sh}t$, $2(x+y)=\operatorname{ch}^2 t \Rightarrow x=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t+\frac{1}{4}\operatorname{sh}t$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 t-\frac{1}{4}\operatorname{sh}t$, $\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$. $L=\int_{-\operatorname{argsh}1}^{\operatorname{argsh}1}\frac{\operatorname{ch}^2 t\,dt}{\sqrt{2}}=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}+1$.

Solución del ejercicio 5811 ▲005028

Sea (a_i) una subdivisión de $[a,b]$ y P la línea quebrada pasando por los puntos $(a_i, f(a_i))$. Demostrar a continuación que para toda curva rectificable L situada sobre P y teniendo los mismos extremos, se tiene $\operatorname{long}(L)\geqslant\operatorname{long}(P)$ (resultado intuitivamente evidente : colocar clavos en los puntos $(a_i, f(a_i))$ y atar una goma elástica en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, pasando por encima de estos clavos). Esto demuestra, la desigualdad requerida haciendo que el paso de la subdivisión tienda a cero.
Demostración del teorema de la banda elástica : por inducción en el número n de segmentos de P. Para $n=1$ es un hecho conocido. $n-1\Rightarrow n$: si L pasa por $(a_1, f(a_1))$, entonces la hipótesis de recurrencia se aplica. Si no, se denota D la semi-recta saliendo de $(a_0, f(a_0))$ y pasando por $(a_1, f(a_1))$. Por concavidad, P está debajo de D. L contiene un punto de abscisa a_1 estrictamente sobre D, y termina en $(b, f(b))$ por debajo de D, por lo tanto existe un punto (u,v) sobre $L\cap D$, con $u>a_1$. Reemplazando el arco $(a_0, f(a_0))-(u,v)$ de L por el segmento correspondiente se obtiene una línea L' más corta que L, todavía encima de P, y que cae e el primer caso.

Solución del ejercicio 5812 ▲005029

1. $x=-4t^3$, $y=\frac{3+6t^2-3t^4}{2}$.
2. $x=6\cos t-3\cos 2t$, $\quad y=6\operatorname{sen}t+3\operatorname{sen}2t$.
3. $x=t+\operatorname{sen}t$, $\quad y=-1+\cos t$, $I_t=M_{t-\pi}+(\pi,-2)$.
4. $x=a(\cos^3 t+3\cos t\operatorname{sen}^2 t)$, $\quad y=a(\operatorname{sen}^3 t+3\operatorname{sen}t\cos^2 t)$. $x\pm y=a(\cos t\pm\operatorname{sen}t)^3 \Rightarrow$ similitud de centro O, respecto 2, ángulo $\frac{\pi}{4}$.
5. $x_I=\frac{3x^4+1}{2x^3}$, $\quad y_I=\frac{x^4+3}{2x}$.
6. $x=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$, $\quad y=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\operatorname{sen}^3 t$.

7. $\rho = e^{\theta - \pi/2}$.
8. $x = \dfrac{2+\cos\theta - \cos^2\theta}{3}, \quad y = \dfrac{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)}{3}$, cardioide homotético.

Solución del ejercicio 5813 ▲005030

Cálculo.

Solución del ejercicio 5816 ▲005033

1.
2. Círculo de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y de radio $\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 5817 ▲005034

$R = \frac{1}{2}$ en los vértices principales $(0, \pm 1)$ y $R = \sqrt{2}$ en los vértices secundarios $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$.

Solución del ejercicio 5818 ▲005035

$-\dfrac{156}{125\sqrt{2}}$.

Solución del ejercicio 5819 ▲005036

$y'(0) = \lambda \Rightarrow I = (-\lambda - \lambda^3, 1 + \lambda^2)$.

Solución del ejercicio 5821 ▲005038

$c_i = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2c^2}}\left(\dfrac{ac'}{1+a^2c^2} \pm c\right)$, donde c es la curvatura en M y $c' = \dfrac{dc}{ds}$.
En el sistema de referencia de Frénet, las normales tienen para ecuaciones : $x = 0$, $\pm X = acY - a$, por lo tanto se cortan en C.

Solución del ejercicio 5822 ▲005039

1. Sea θ el ángulo polar de D. En el sistema de referencia $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, $\mathscr{P}$ tiene la ecuación : $Y = aX^2 + bX$. Se quiere que $\mathscr{P}$ sea tangente a Oy, sea $b = -\tan\theta$ y que el radio de curvatura sea R, sea $a = \dfrac{1}{2R\cos^3\theta}$.
   Ecuación en $0xy$: $x^2\operatorname{sen}^2\theta - 2xy\cos\theta\operatorname{sen}\theta + y^2\cos^2\theta - 2Rx\cos^2\theta = 0$.
2. O.

Solución del ejercicio 5823 ▲005040

1.
2. $x = \dfrac{4t^3 + a(1-t^2)}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{t^4 - 3t^2 + 2at}{1+t^2}$.

Solución del ejercicio 5824 ▲005041

$x = a\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad y = a\cos t.$

Solución del ejercicio 5825 ▲005535

1. El astroide completo es obtenido cuando t recorre $[-\pi,\pi]$ y por razones de simetría, $L = 4\int_0^{\pi} 2\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| dt$.
   Por lo tanto $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} -3a\operatorname{sen} t\cos^2 t \\ 3a\cos t\operatorname{sen}^2 t\end{pmatrix} = 3a\operatorname{sen} t\cos t\begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}$ y entonces $\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| = 3a|\operatorname{sen} t\cos t| = \frac{3a}{2}|\operatorname{sen}(2t)|$, luego
   $$L = 4\int_0^{\pi/2}\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| dt = 6a\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(2t)\,dt = 6a\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a.$$
   $$\boxed{L = 6a.}$$
2. $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\operatorname{sen} t\end{pmatrix} = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen} t\cos t\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(t/2) \\ \cos(t/2)\end{pmatrix}$ y entonces $\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| = 2R\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|$, luego
   $$L = \int_0^{2\pi}\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\| dt = 2R\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,dt = 4R\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8R.$$
   $$\boxed{L = 8R.}$$
3. Una representación paramétrica de Γ es $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p},\end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant a$ y entonces
   $$L = \int_0^a\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^a\sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt = p\int_0^{a/p}\sqrt{u^2+1}\,du$$
   $$= p\left(\left[u\sqrt{u^2+1}\right]_0^{a/p} - \int_0^{a/p}\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}\,du\right) = a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} - p\int_0^{a/p}\frac{u^2+1-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$
   $$= a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} - L + p\operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right),$$
   y entonces
   $$\boxed{L = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} + p\operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right)\right).}$$
4. La cardioide completa es obtenida cuando θ recorre $[-\pi,\pi]$.
   $$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = a((-\operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{u}_\theta + (1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right).$$
   Como el vector $-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta$ es unitario, $\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$, luego

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|dt=4a\int_{0}^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)dt=8a\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_{0}^{\pi}=8a.$$

$$\boxed{L=8a.}$$

Solución del ejercicio 5826 ▲005536

Se obtiene la curva completa cuando t recorre $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. Porque $M(-t)=s_{(Ox)}(M(t))$ y $M(\pi-t)=s_{(Oy)}(M(t))$, es suficiente estudiar y de construir la curva cuando $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, luego se obtiene la curva completa por reflexiones sucesivas de eje (Oy), luego de eje (Ox). Para $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}R(-\operatorname{sen}t+\frac{1}{\operatorname{sen}t})\\ R\cos t\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}t}\\ \cos t\end{pmatrix}=R\frac{\cos t}{\operatorname{sen}t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen}t\end{pmatrix}=R\operatorname{cotan}t\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen}t\end{pmatrix}.$$

Porque $R\operatorname{cotan}t>0$, para $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ y como el vector $\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen}t\end{pmatrix}$ es unitario, se tiene

$$\frac{ds}{dt}=R\operatorname{cotan}t,\text{ luego }\overrightarrow{\tau}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen}t\end{pmatrix}.$$

Se tiene por lo tanto $\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t\\ \cos t\end{pmatrix}$ y por otro lado, se puede tomar $\alpha(t)=t$. Denotando $\rho(t)$ el radio de curvatura en el punto $M(t)$,

$$\rho(t)=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}=R\operatorname{cotan}t,$$

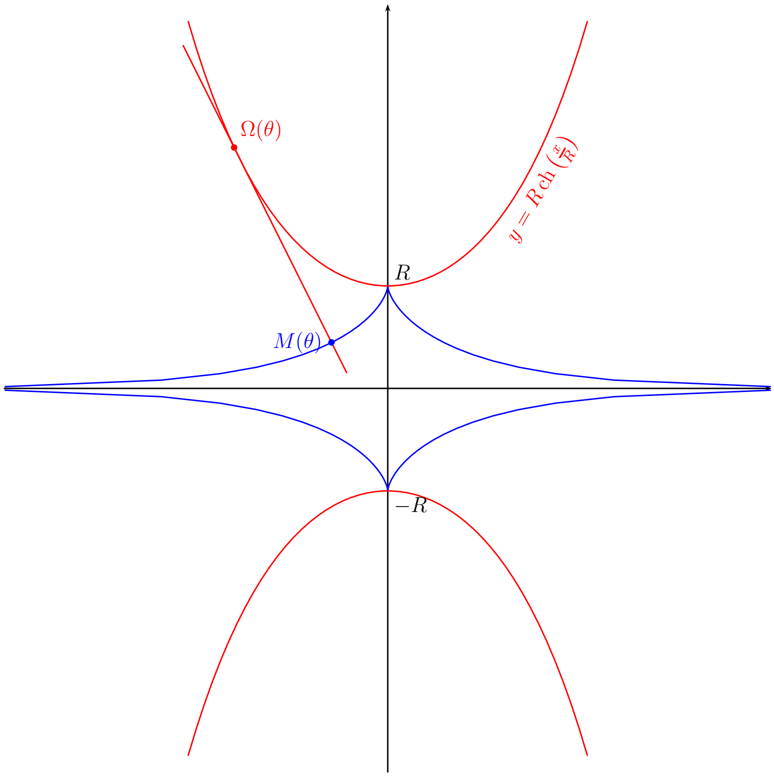
luego

$$\Omega(t)=M(t)+\rho(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix}R\left(\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right)\\ R\operatorname{sen}t\end{pmatrix}+R\operatorname{cotan}t\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t\\ \cos t\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\\ \frac{R}{\operatorname{sen}t}\end{pmatrix}.$$

La evoluta buscada es el arco $t\mapsto\begin{pmatrix}R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\\ \frac{R}{\operatorname{sen}t}\end{pmatrix}$, $t\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ (completando por simetría). Cuando t recorre $]0,\pi[$, se efectúa entonces el cambio de parámetros $t\mapsto R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|=u$ que es un C^1-difeomorfismo de $]0,\pi[$ sobre $\mathbb{R}$. Se obtiene $x=u$, luego

$$y=\frac{R}{\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}}=\frac{R}{2}\left(\tan\frac{t}{2}+\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right)=R\frac{e^{u/R}+e^{-u/R}}{2}=R\operatorname{ch}\left(\frac{u}{R}\right).$$

El soporte de la evoluta sobre $]0,\pi[$ es también el soporte del arco $u\mapsto\begin{pmatrix}u\\ R\operatorname{ch}\left(\frac{u}{R}\right)\end{pmatrix}$, $u\in\mathbb{R}$ o aún la cadena de ecuación cartesiana $y=R\operatorname{ch}\left(\frac{x}{R}\right)$.



Cuando t recorre $[0, 2\pi]$, se obtiene un arco de cicloide completo. Los otros arcos se deducen por traslaciones de vectores $2k\pi R\overrightarrow{i}$. Para $t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

El punto $M(t)$ es regular para $t \in]0, 2\pi[$ y para $t \in]0, 2\pi[$, $2R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Dado que el vector $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ es unitario, se tiene

$$\frac{ds}{dt} = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \text{ y } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Se deduce que $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ y por otro lado, se puede tomar $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. Denotando $\rho(t)$ el radio de curvatura en el punto $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)}{-\dfrac{1}{2}} = -4R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right),$$

y entonces

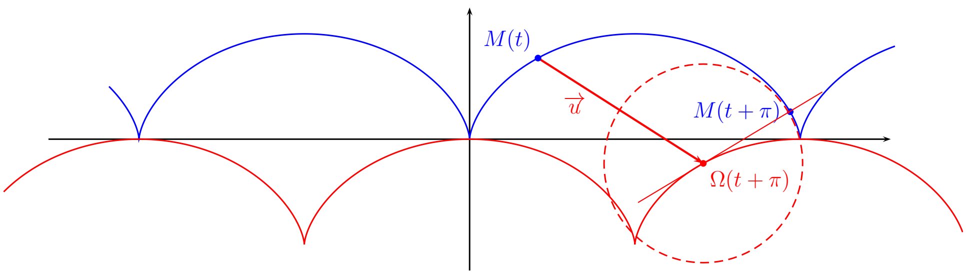
$$\Omega(t)=M(t)+\rho(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} R(t-\operatorname{sen} t)\\ R(1-\cos t)\end{pmatrix}-4R\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\ \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R(t-\operatorname{sen} t)+2R\operatorname{sen} t\\ R(1-\cos t)-2R(1-\cos t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} R(t+\operatorname{sen} t)\\ -R(1-\cos t)\end{pmatrix}.$$

La evoluta buscada es el arco $t\mapsto\begin{pmatrix} R(t+\operatorname{sen} t)\\ -R(1-\cos t)\end{pmatrix}$. Se continua.

$$\Omega(t+\pi)=\begin{pmatrix} R(t+\pi-\operatorname{sen} t)\\ -R(1+\cos t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R(t-\operatorname{sen} t)\\ R(1-\cos t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \pi R\\ -2R\end{pmatrix}=t_{\overrightarrow{u}}(M(t)) \text{ donde } \overrightarrow{u}=(\pi R,-2R).$$

Así, el centro de curvatura en el punto $M(t+\pi)$ es la traslación del punto $M(t)$ en traslación de vector $(\pi R,-2R)$ y por lo tanto, la evoluta de la cicloide es la traslación de la cicloide por la traslación del vector $(\pi R,-2R)$. En particular, es aún una cicloide.



$\mathscr{C}$ es el soporte de la curva parametrizada $t\mapsto M(t)=\begin{pmatrix} t\\ t^3\end{pmatrix}$. $M(t)$ es bi-regular si y solo si $t\neq 0$. Para $t\in\mathbb{R}$, $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix} 1\\ 3t^2\end{pmatrix}$. Así

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+9t^4} \text{ y } \overrightarrow{\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} 1\\ 3t^2\end{pmatrix}.$$

Entonces, por un lado $\overrightarrow{n}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} -3t^2\\ 1\end{pmatrix}$ y por otro lado, ya que las coordenadas de $\overrightarrow{\tau}(t)$ son positivas, se puede tomar $\alpha(t)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$. Así, para $t\neq 0$

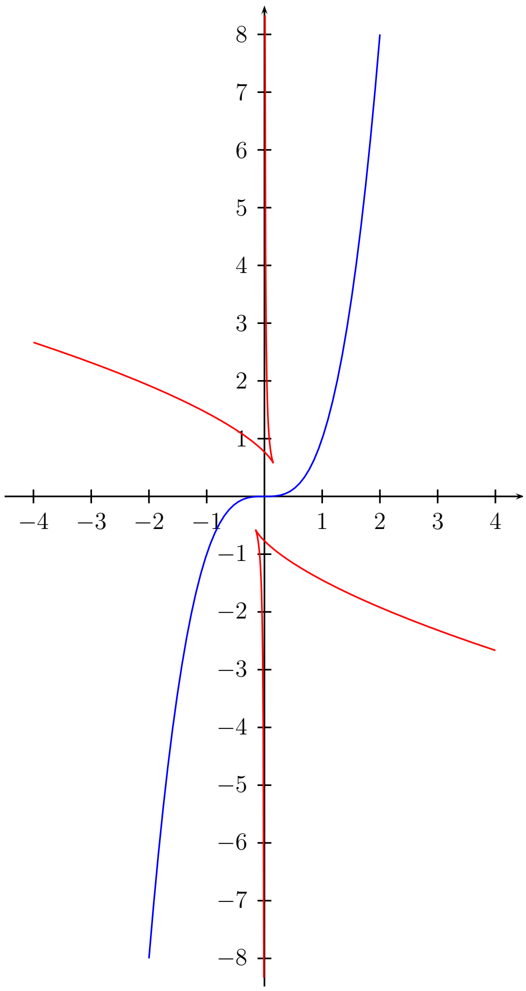
$$\frac{d\alpha}{dt}=-\left(-\frac{1}{2}\right)36t^3(1+9t^4)^{-3/2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}}=\frac{6t}{1+9t^4}$$

luego

$$R(t)=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}=\frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

y entonces

$$\Omega(t)=M(t)+R(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} t\\ t^3\end{pmatrix}+\frac{1+9t^4}{6t}\begin{pmatrix} -3t^2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{9t^5}{2}\\ \frac{5t^3}{2}+\frac{1}{6t}\end{pmatrix}.$$



Solución del **ejercicio 5827** ▲005537

$\mathscr{C}$ es el soporte del arco parametrizado $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \\ 1/\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ y se puede tomar $\alpha(t) = \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, luego

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

y finalmente

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Para $t > 0$, se escribe $f(t) = |R(t)| = \frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}$. f es derivable en $]0,+\infty[$ y para $t > 0$,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}(t^2+1)^{3/2} + 3(t^2+1)^{1/2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2+1)+3t^2) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2-1).$$

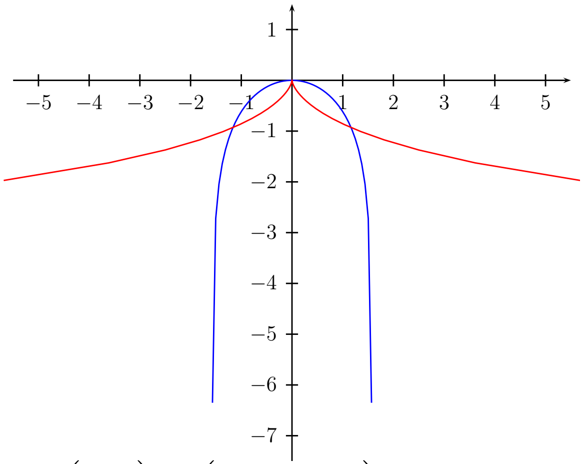
f admite un mínimo en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ igual a $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

El radio de curvatura mínimo es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ y es el radio de curvatura en $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 5828 ▲005538

$\mathscr{C}$ es el soporte del arco parametrizado $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix}$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\operatorname{sen} t / \cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$



Porque $\frac{1}{\cos t} > 0$ y que $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es unitario, se tiene sucesivamente $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = -t$, luego

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Entonces, si s es la abscisa curvilínea de origen 0 orientada en la dirección de t creciente,

$$s(t) = \int_0^t s'(u)\, du = \int_0^t \frac{1}{\cos u}\, du = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

En fin,

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 5829 ▲005539

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}_\lambda$ es el soporte del arco parametrizado $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$. $\mathscr{C}_0$ es el eje (Ox) y entonces C_0 no está definido, luego $\mathscr{C}_{-\lambda}$ es la simétrica de $\mathscr{C}_\lambda$, con respecto al eje (Ox) y entonces $C_{-\lambda}$ es la simétrica de C_λ, con respecto al eje (Ox). En lo que sigue, se supone $\lambda > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$,

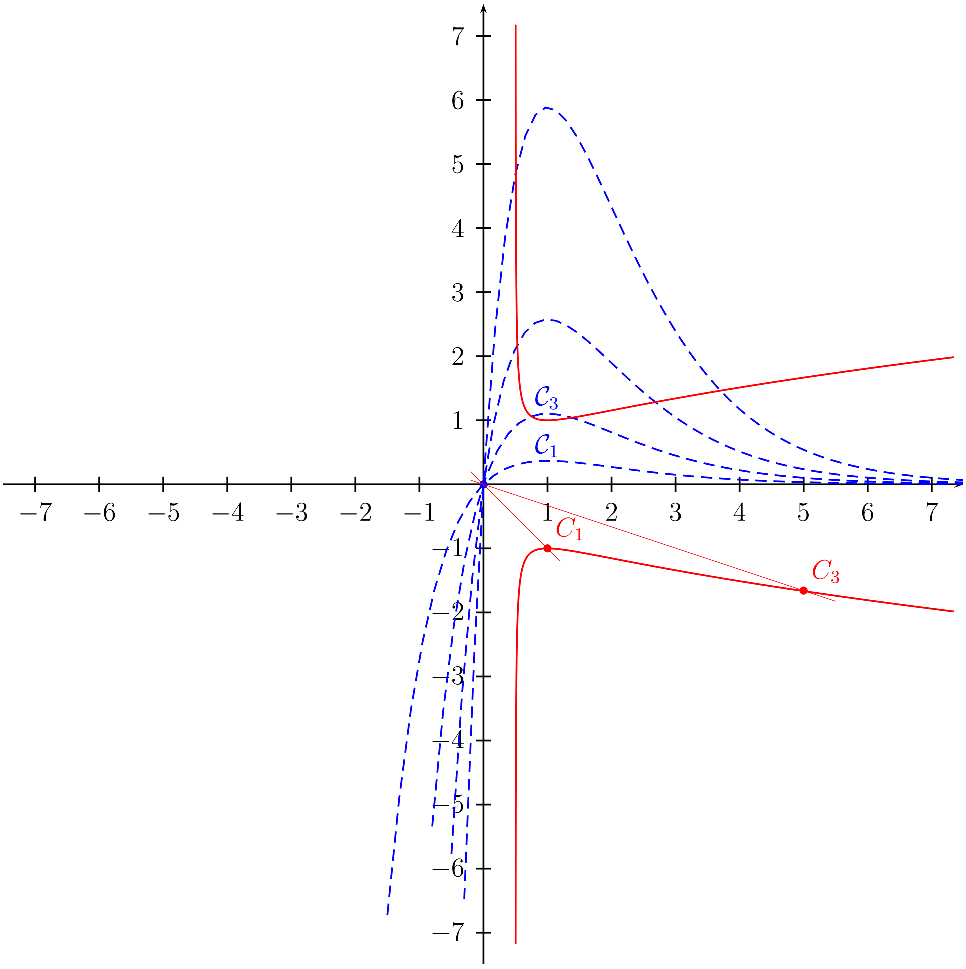
$\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ y se puede tomar $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\right)$ (pues $\overrightarrow{\tau}(t)$ tiene una abscisa estrictamente positiva). Luego,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)\mathrm{e}^{-2t}}{2(1+\lambda^2(1-t)^2\mathrm{e}^{-2t})^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2(1-t)^2\mathrm{e}^{-2t}}}}$$

y por lo tanto, $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{-4\lambda^2}{2(1+\lambda^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2}}} = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$, luego $R(0) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0) = -\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}$ y entonces

$$C_\lambda = \Omega(0) = M(0) + R(0)\overrightarrow{n}(0) = O - \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

El conjunto de los C_λ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, es el soporte del arco $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.



Solución del ejercicio 5830 ▲005042

M_1, M_2, M_3, M_4 son coplanares si y solo si existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tales que el plano P de ecuación $ax+by+cz-d=0$ pasa por estos puntos, lo que equivale a : t_1, t_2, t_3, t_4 son las raíces (distintas) del polinomio $at^4+bt^3+ct^2-d$. Tal polinomio existe si y solo si $t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4 = 0$, o sea : $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4} = 0$ si ninguno de los t_i es nulo.

Solución del ejercicio 5831 ▲005043

1. $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = -\frac{\tau}{c}\overrightarrow{B} \Rightarrow \overrightarrow{T}_1 = \overrightarrow{B}$, $\frac{ds_1}{ds} = -\frac{\tau}{c}$, $\overrightarrow{N}_1 = -\overrightarrow{N}$, $c_1 = c$.
2. $\tau_1 = -\frac{c^2}{\tau}$.

Solución del ejercicio 5832 ▲005044

$c_1 = \sqrt{1+\frac{\tau^2}{c^2}}$, $\tau_1 = \dfrac{c\tau' - \tau c'}{c(c^2+\tau^2)}$.

Solución del ejercicio 5833 ▲005045

Punto característico : $P = M + a(s)\overrightarrow{N} + b(s)\overrightarrow{B}$: CNS $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{c} \\ \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2} = \arctan(b/a)' = \tau. \end{cases}$

Observación : el punto característico se proyecta sobre I.

Solución del ejercicio 5834 ▲005046

$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} + 2\overrightarrow{k} \Rightarrow s^2\frac{d^2\overrightarrow{T}}{ds^2} + s\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} + \overrightarrow{T} = -\overrightarrow{k}$. Se establece $s = \mathrm{e}^u$: $\overrightarrow{OM} = \mathrm{e}^u\cos u\overrightarrow{A} + \mathrm{e}^u \operatorname{sen} u\overrightarrow{B} - \mathrm{e}^u\overrightarrow{k}$, donde $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k})$ es ortogonal y $\|\overrightarrow{A}\| = \|\overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{k}\|$. (Espiral logarítmica en un cono)

Solución del ejercicio 5868 ▲005897

1. Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se establece $P(x,y) = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} = Q(x,y)$. Las funciones P y Q son de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto estrellado de $\mathbb{R}^2$. Entonces, de acuerdo con teorema de SCHWARZ, ω es exacta en $\mathbb{R}^2$ si y solo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ y como $\frac{\partial P}{\partial y} = 2+\mathrm{e}^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forma diferencial ω es una forma diferencial exacta en $\mathbb{R}^2$. Sea f una función f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df = \omega \Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ & \begin{cases} f(x,y) = x^2+2xy+\mathrm{e}^{x+y}+g(y) \\ 2x+\mathrm{e}^{x+y}+g'(y) = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ & \begin{cases} f(x,y) = x^2+2xy+\mathrm{e}^{x+y}+g(y) \\ g(y) = y^2+\lambda \end{cases} \\
\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2/\ & f(x,y) = (x+y)^2+\mathrm{e}^{x+y}+\lambda.
\end{aligned}$$

Las primitivas de ω sobre $\mathbb{R}^2$ son las funciones de la forma $(x,y)\mapsto (x+y)^2+\mathrm{e}^{x+y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Observación. Se puede notar inmediatamente, que si $f(x,y) = (x+y)^2+\mathrm{e}^{x+y}$, entonces $df = \omega$.

2. La forma diferencial ω es de clase C^1 sobre $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y > x\}$ que es un abierto estrellado de $\mathbb{R}^2$ porque es convexo. Entonces, de acuerdo con teorema de SCHWARZ, ω es exacta en Ω si y solo

si ω es cerrada en Ω.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y}+y\frac{1}{(x-y)^2}\right) = -\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}\\ &= \frac{x+y}{(y-x)^3}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x}-x\frac{1}{(y-x)^2}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}+\frac{2x}{(y-x)^3}\\ &= \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right).\end{aligned}$$

Entonces ω es exacta en el abierto Ω. Sea f una función f de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}df=\omega &\Leftrightarrow \forall(x,y)\in\Omega,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{(x-y)^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{(x-y)^2}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ \begin{cases} f(x,y) = \frac{y}{x-y}+g(y)\\ \frac{x}{(x-y)^2}+g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ f(x,y) = \frac{y}{x-y}+\lambda.\end{aligned}$$

Los primitivos de ω sobre Ω son las funciones de la forma $(x,y)\mapsto\frac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3. ω es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$, pero no es estrellado. Se está ahora en $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in]-\infty,0]\}$ que es un abierto estrellado de $\mathbb{R}^2$. Sobre Ω, ω es exacta si y solo si ω es cerrada por el teorema de SCHWARZ.
   $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Entonces ω es exacta en Ω. Sea f una aplicación de clase C^1 sobre Ω.

$$\begin{aligned}df=\omega &\Leftrightarrow \forall(x,y)\in\Omega,\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}-y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)\\ \frac{y}{x^2+y^2}+g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}-y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ f(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda.\end{aligned}$$

   Las primitivas de ω sobre Ω son las funciones de la forma $(x,y)\mapsto\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Las funciones precedentes son aún primitivas de ω sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ y entonces ω es exacta en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

4. ω es de clase C^1 sobre $]0,+\infty[^2$ que es un abierto estrellado de $\mathbb{R}^2$. Entonces ω es exacta en $]0,+\infty[^2$ si y solo si ω es cerrada en $]0,+\infty[^2$ de acuerdo con teorema de SCHWARZ.
   $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}$ y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$. Entonces $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right)\neq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ y ω no es exacta en $]0,+\infty[^2$. Se busca un factor integrante de la forma $h:\ (x,y)\mapsto g(x^2+y^2)$, donde g es una función no nula de clase C^1 sobre $]0,+\infty[$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
h\omega \text{ es exacta en }]0,+\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2) = \\
&\qquad -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2) \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t > 0,\ -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t > 0,\ g(t) = \lambda t.
\end{aligned}$$

La forma diferencial $(x^2+y^2)\omega$ es exacta en $]0,+\infty[^2$. Además,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = (x^2+y^2)\omega.$$

Solución del ejercicio 5869 ▲005906

1. C es el arco parametrizado $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variando creciente de -1 a 1.

$$\int_C \omega = \int_{-1}^{1} \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt = 0 \text{ (función impar)}.$$

$$\boxed{\int_C \omega = 2\ln 2.}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \operatorname{sen}^3 t)(-\operatorname{sen} t) + \cos^3 t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t - \cos t \operatorname{sen} t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)^2 - 2\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t - \cos t \operatorname{sen} t)dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(2t)}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1 - \cos(4t))\right) dt = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \operatorname{sen} t \cos t \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen}^3 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \operatorname{sen} t + \cos^4 t \operatorname{sen} t)dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.}$$

Solución del ejercicio 5870 ▲005907

1. $\omega = x^2dx + y^2dy$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ que es un abierto estrellado de $\mathbb{R}^2$ y es cerrado porque $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Se deduce que ω es exacta en $\mathbb{R}^2$ de acuerdo con teorema de SCHWARZ. Así, la integral de ω a lo largo de todo círculo recorrido en sentido antihorario una vez es cero.
2. $\omega = y^2dx + x^2dy$ es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$ y no es cerrado porque $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Se deduce que ω no es exacto en $\mathbb{R}^2$. La integral de ω a lo largo de un círculo recorrido en sentido antihorario una vez ya no es necesariamente cero. Se recorre el círculo C el círculo de centro (a,b) y de radio $R > 0$ una vez en el sentido trigonométrico o se considera el arco parametrizado $\gamma:\ t \mapsto (a + R\cos t, b + R\operatorname{sen} t)$, t variando creciente de 0 a 2π.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left((b+R\operatorname{sen} t)^2(-R\operatorname{sen} t) + (a+R\cos t)^2(R\cos t)\right)\,dt\\
&= R\int_0^{2\pi} (a\cos t - b\operatorname{sen} t + 2aR\cos^2 t - 2bR\operatorname{sen}^2 t + R^2(\cos^3 t - \operatorname{sen}^3 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (2a\cos^2 t - 2b\operatorname{sen}^2 t + R(\cos^3 t - \operatorname{sen}^3 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a(1+\cos t) - b(1-\cos t) + R(\cos t - \operatorname{sen} t)(\cos^2 t + \cos t\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t))\,dt\\
&= R^2\int_0^{2\pi} (a - b + R(\cos t - \operatorname{sen} t)(1 + \cos t\operatorname{sen} t))\,dt\\
&= R^2\left(2\pi(b-a) + \int_0^{2\pi} R(\cos t - \operatorname{sen} t + \cos^2 t\operatorname{sen} t - \cos t\operatorname{sen}^2 t)\,dt\right)\\
&= 2\pi R^2(b-a).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5871 ▲005909

1. La forma diferencial ω es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Por el teorema de SCHWARZ, en todo abierto estrellado Ω contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la forma diferencial ω es exacta si y solo si la forma diferencial ω es cerrada. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se escribe $P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\operatorname{sen} x - y\cos x)$ y $Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\operatorname{sen} x)$. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\cos x + y\operatorname{sen} x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x\operatorname{sen} x + \cos x + y\cos x)\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x\cos x + y\operatorname{sen} x) + (x^2+y^2)(-x\operatorname{sen} x + \cos x + y\cos x))\\
&= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\operatorname{sen} x),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x\operatorname{sen}x - y\cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x\operatorname{sen}x - y\cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x\operatorname{sen}x - y\cos x) - 2y(x\operatorname{sen}x - y\cos x) - (x^2+y^2)\cos x)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3)\cos x + (-2xy - x^3 - xy^2)\operatorname{sen}x) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Finalmente, la forma diferencial ω es exacta en todo abierto estrellado Ω contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se escoge $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leqslant 0\}$. Ω es un abierto estrellado (en todo punto de la forma $(0,y)$, $y > 0$) de $\mathbb{R}^2$ conteniendo el contorno cerrado Γ. Porque ω es exacta en Ω, se sabe entonces que $\int_\Gamma \omega = 0$.

2. El contorno Γ está constituido de 4 arcos :
   • Γ_1 es el arco $t \mapsto (t,0)$, t variando creciente de r a R, • Γ_2 es el arco $t \mapsto (R\cos t, R\operatorname{sen}t)$, t variando creciente de 0 a π.
   • Γ_3 es el arco $t \mapsto (t,0)$, t variando creciente de $-R$ a $-r$, • Γ_4 es el arco $t \mapsto (r\cos t, r\operatorname{sen}t)$, t variable decreciente de π a 0.
   Según la pregunta 1), $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt = \int_r^R P(t,0)\,dt\\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2}\times t\operatorname{sen}t\,dt = \int_r^R \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Igualmente, $\int_{\Gamma_3}\omega = \int_{-R}^{-r}\frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = \int_r^R \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt$ (ya que la función $x \mapsto \frac{\operatorname{sen}x}{x}$ es par) y entonces se tiene que $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_3}\omega = 2\int_r^R \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx$, luego para todo $(r,R) \in]0,+\infty[^2$ tal que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_2}\omega + \int_{\Gamma_4}\omega\right).$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\omega &= \int_0^\pi (P(R\cos t, R\operatorname{sen}t)(-\operatorname{sen}t) + Q(R\cos t, \operatorname{sen}t)(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}t}((\cos t\operatorname{sen}(R\cos t) - \operatorname{sen}t\cos(R\cos t))(-\operatorname{sen}t)\\ &\quad + (\cos t\cos(R\cos t) + \operatorname{sen}t\operatorname{sen}(R\cos t))(\cos t))\,dt\\ &= \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}t}\cos(R\cos t)\,dt.\end{aligned}$$

Igualmente, $\int_{\Gamma_4}\omega = \int_\pi^0 e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt = -\int_0^\pi e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt$ y se ha demostrado que

$$\boxed{\forall (r,R) \in]0,+\infty[^2,\ r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt - \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}t}\cos(R\cos t)\,dt\right).}$$

3. • Estudiar $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}t}\cos(R\cos t)\,dt$. Para $R>0$,

$$\left|\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}t}\cos(R\cos t)\,dt\right| \leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}t}|\cos(R\cos t)|\,dt \leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\operatorname{sen}t}\,dt$$
$$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)}\,dt \text{ (la función seno es cóncava en } \left[0,\frac{\pi}{2}\right])$$
$$= \frac{\pi}{R}\left[-e^{-2Rt/\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{R}(1-e^{-2R})$$
$$\leqslant \frac{\pi}{R}.$$

Como $\frac{\pi}{R}$ tiende a 0, cuando R tiende a $+\infty$, $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}t}\cos(R\cos t)\,dt = 0$. Se deduce que para todo $r>0$, la integral $\int_r^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx$ converge en $+\infty$ y que

$$\boxed{\forall r>0,\ \int_r^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt.}$$

• Estudiar ahora $\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt$. Sea $F: \begin{array}{l}[0,+\infty[\times[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ (r,t)\mapsto e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\end{array}$,

– para todo real $r\in[0,+\infty[$, la función $t\mapsto F(r,t)$ es continua a trozos en $[0,\pi]$.
– para todo real $t\in[0,\pi]$, la función $r\mapsto F(r,t)$ es continua en $[0,+\infty[$.
– Para todo $(r,t)\in[0,+\infty[\times[0,\pi]$, $|F(r,t)|\leqslant 1=\varphi(t)$, donde φ es una función continua por pedazos e integrable en el segmento $[0,\pi]$.

Del teorema de continuidad de integrales con parámetros, la función $r\mapsto\int_0^{\pi} e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt$ es continua en $[0,+\infty[$. Se deduce que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{-r\operatorname{sen}t}\cos(r\cos t)\,dt = \int_0^{\pi} e^0\cos(0)\,dt = \pi,$$

y finalmente que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Solución del ejercicio 5872 ▲005913

Se supone primero que el soporte del arco γ es de longitud $L=2\pi$. Porque γ es un arco de clase C^1 regular, se puede elegir para γ una parametrización normal, es decir una parametrización de clase C^1 $t\mapsto(x(t),y(t))$, $t\in[0,2\pi]$, tal que $\forall t\in[0,2\pi]$, $x'^2(t)+y'^2(t)=1$. El arco es cerrado, se tiene además $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$. Esta última condición permite ampliar las funciones x y y en funciones continuas en $\mathbb{R}$ de clase C^1 a trozos y 2π-periódicas. Dado que las funciones x' y y' son continuas a trozos en $\mathbb{R}$, la fórmula de PARSEVAL permite escribir

$$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \int_0^{2\pi}(x'^2(t)+y'^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t)\,dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t)\,dt$$
$$= \pi\left(\frac{a_0^2(x')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(x')+b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(y')+b_n^2(y'))\right)$$

$$= \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x') + a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) (a_0(x') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'(t)\, dt = \frac{1}{\pi}(x(2\pi) - x(0)) = 0 = a_0(y'))$$
$$= \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2(x) + b_n^2(x) + a_n^2(y) + b_n^2(y)) \right).$$

Por otra parte, según la fórmula de GREEN-RIEMANN

$$\mathscr{A} = \int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t)\, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ((x(t) + y'(t))^2 - (x(t) - y'(t))^2)\, dt$$
$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_0^2(x+y')}{2} - \frac{a_0^2(x-y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x+y') - a_n^2(x-y') + b_n^2(x+y') - b_n^2(x-y')) \right)$$
$$= \pi \left(\frac{a_0(x)a_0(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x)a_n(y') + b_n(x)b_n(y')) \right) \text{ (por linealidad de los coeficientes de FOURIER)}$$
$$= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n(x)b_n(y) - b_n(x)a_n(y)) \leqslant \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) = \frac{\mathscr{L}}{2} \times \frac{\mathscr{L}}{\pi} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}.$$

Si se tiene la igualdad, entonces las desigualdades válidas para $n \geqslant 1$,

$$n(a_n(x)b_n(y) - b_n(x)a_n(y)) \leqslant n \times \tfrac{1}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) \leqslant \tfrac{n^2}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)),$$

son igualdades. En particular, para $n \geqslant 2$, se tiene $a_n(x) = a_n(y) = b_n(x) = b_n(y) = 0$.
Por otra parte, cuando $n = 1$, $a_1(x)b_1(y) - b_1(x)a_1(y) = \frac{1}{2}(a_1^2(x) + b_1^2(y) + b_1^2(x) + a_1^2(y))$ impone $(a_1(x) - b_1(y))^2 + (b_1(x) + a_1(y))^2 = 0$ y entonces $a_1(y) = -b_1(x)$ y $b_1(y) = a_1(x)$.
De acuerdo con el teorema de DIRICHLET, poniendo $\alpha = \frac{a_0(x)}{2}$, $\beta = \frac{a_0(y)}{2}$, $a = a_1(x)$ y $b = b_1(x)$,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \begin{cases} x(t) = \alpha + a\cos t + b\operatorname{sen} t = \alpha + \sqrt{a^2+b^2}\cos(t - t_0) \\ y(t) = \beta - b\cos t + a\operatorname{sen} t = \beta + \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(t - t_0), \end{cases}$$

donde $\cos(t_0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\operatorname{sen}(t_0) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. El soporte del arco γ es, por lo tanto un círculo. El recíproco es claro.
La desigualdad isoperimétrica por lo tanto, se demuestra en el caso donde $L = 2\pi$ y se tiene la igualdad si y solo si el soporte del arco γ es un círculo. En el caso donde la longitud de la curva C es un real estrictamente positivo $\mathscr{L}$ cualquiera, el homotético (C') de (C) en la homotecia de centro O y de cociente $\frac{2\pi}{\mathscr{L}}$ tiene una longitud $\mathscr{L}'$ igual a 2π y delimita un área $\mathscr{A}' = \left(\frac{2\pi}{\mathscr{L}}\right) \times \mathscr{A}$.
La desigualdad $\mathscr{A}' \leqslant \frac{\mathscr{L}'^2}{2\pi} = 2\pi$ se escribe aún $\mathscr{A} \leqslant 2\pi \times \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi^2} = \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}$. Además, se tiene la igualdad si y solo si la curva (C) es un círculo (en este caso, $\frac{\mathscr{L}^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2 = \mathscr{A}$).

$$\boxed{\mathscr{A} \leqslant \frac{\mathscr{L}^2}{4\pi}, \text{ con igualdad si y solo si la curva } (C) \text{ es un círculo.}}$$

(En un perímetro dado, el círculo es la curva cerrada que limita el área más grande)

Solución del ejercicio 5873 ▲006873

---

1. Para ω_1, se establece $P(x,y) = 2xy$ y $Q(x,y) = x^2$. Como ω_1 se define en el abierto estrellado $\mathbb{R}^2$ y que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, el teorema de Poincaré nos permite decir que ω_1 es exacta. Se busca f tal que $df = \omega_1$. Esto es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$$

integrando la primera fila con respecto a x, se encuentra $f(x,y) = x^2y + c(y)$. Derivando la expresión recién obtenida por respecto a y e identificando con la segunda línea del sistema, se encuentra

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2.$$

Se sigue que $c'(y) = 0$ y así como $c(y) = c \in \mathbb{R}$. Así, la función f buscado es :

$$f(x,y) = x^2y + c$$

donde c es una constante real.

2. Para ω_2, se establece $P(x,y,z) = xy$, $Q(x,y,z) = -z$ y $R(x,y,z) = xz$. Se constata que $\frac{\partial P}{\partial y} = x$, entonces que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. La forma ω_2 por lo tanto no es exacta.

3. Para ω_3, se establece $P(x,y) = 2xe^{x^2-y}$ y $Q(x,y) = -2e^{x^2-y}$. Ahí también, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ya que $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2-y}$, entonces que $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xe^{x^2-y}$; ω_3 por lo tanto no es exacta.

4. Para ω_4, se escribe $P(x,y,z) = yz^2$, $Q(x,y,z) = xz^2 + z$, $R(x,y,z) = 2xyz + 2z + y$. Se constata que
   (a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2$
   (b) $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2zy$
   (c) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2xz + 1.$

   La forma ω_4 está además definida en el abierto estrellado $\mathbb{R}^3$, por lo tanto, es exacta según el teorema de Poincaré. Encontrar ahora f tal que $df = \omega_4$, esto equivale a resolver el sistema :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y. \end{cases}$$

   Integrando la primera ecuación con respecto a x, se encuentra

$$f(x,y,z) = xyz^2 + \psi(y,z).$$

   Ahora, derivando la expresión obtenida sucesivamente por y y z e igualando con las dos últimas ecuaciones del sistema, se obtiene un nuevo sistema

$$\begin{cases} xz^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} = xz^2 + z \\ 2xyz + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \end{cases}$$

que equivale a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = z & (1) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 2z + y & (2) \end{cases}$$

Finalmente, integrando (1) con respecto a y, se tiene $\psi(y,z) = zy + c(z)$. Derivando esta expresión de ψ, con respecto a z e igualando con (2), se encuentra $y + c'(z) = 2z + y$, es decir $c'(z) = 2z$, por lo tanto $c(z) = z^2 + c$, donde $c \in \mathbb{R}$. Así, la función f tal que $\omega_4 = df$ es de la forma

$$f(x,y,z) = xyz^2 + zy + z^2 + c$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 5874 ▲006874

1. Se verifica que :
   (a) $dx = \cos\varphi \cos\theta dr - r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta d\varphi - r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi d\theta$
   (b) $dy = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta dr - r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta d\varphi + r \cos\theta \cos\varphi d\theta$
   (c) $dz = \operatorname{sen}\varphi dr + r \cos\varphi d\varphi$.

   Por consiguiente, se tiene :
   (a) $xdx = r\cos^2\varphi \cos^2\theta dr - r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \cos^2\theta d\varphi - r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos^2\varphi d\theta$
   (b) $ydy = r\cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta dr - r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}^2\theta d\varphi + r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \cos^2\varphi d\theta$
   (c) $zdz = r \operatorname{sen}^2\varphi dr + r^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi d\varphi$.
2. Añadiendo, se obtiene $xdx + ydy + zdz = rdr$. Se deduce que :

$$xdx + ydy + zdz = r\left(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz\right).$$

   Así
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Solución del ejercicio 5875 ▲006875

1. Se define $P(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ y $Q(x,y) = 2y$. Se ve fácilmente que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. La forma ω por lo tanto no es exacta.
2. Como ω se define en $\mathbb{R}^2$, es suficiente que $\psi\omega$ sea exacta para que f existe. Ahora, $\psi\omega$ es exacta si y solo si
$$\frac{\partial(\psi(x)(x^2 + y^2 + 2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\psi(x)2y)}{\partial x}.$$
   Esto es equivalente a $2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$. Así, $\psi(x) = \psi'(x)$, para todo x. Entonces $\psi(x) = ke^x$, con k constante. Se puede escoger $k = 1$. Así
$$\psi\omega = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

Se busca entonces f tal que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^x(x^2+y^2+2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^x(2y). \end{cases}$$

Integrando la segunda ecuación con respecto a y, se encuentra

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x y^2 + c(x).$$

Derivando esta expresión con respecto a x e igualando con la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$\mathrm{e}^x y^2 + c'(x) = \mathrm{e}^x(x^2+y^2+2x)$$

es decir

$$c'(x) = \mathrm{e}^x(x^2+2x).$$

Resulta que $c(x) = x^2\mathrm{e}^x + c$ y así como

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x(x^2+y^2) + c$$

con c en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 5876 ▲006876

En el campo $\overrightarrow{V}(x,y)$ está asociada la forma

$$\omega = (1+2xy)dx + (x^3-3)dy.$$

Esta forma no es exacta, ya que $\frac{\partial(1+2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^3-3)}{\partial x}$. Se sigue que $\overrightarrow{V}(x,y)$ no es un campo gradiente.

Solución del ejercicio 5877 ▲006877

El campo vectorial que se deriva del potencial U es

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}).$$

Se trata por lo tanto del campo vectorial de componentes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) = (1+y+yz, x+xz, xy).$$

Solución del ejercicio 5878 ▲006878

Sea $\omega = 3xdx + (x+y)dy$ la forma diferencial naturalmente asociada con $\overrightarrow{V}(x,y)$ y considerar $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ como una parametrización del círculo de centro O y de radio 1 (con $t \in [0;2\pi]$). De ello se deduce que la circulación $\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dl}$ no es otra cosa que :

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_C w = \int_0^{2\pi} (3\cos t(-\operatorname{sen} t) + (\cos t + \operatorname{sen} t)\cos t)dt.$$

Como $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, se obtiene :

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen} t \cos t + \frac{\cos(2t)+1}{2})dt = [\cos^2(t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = \pi.$$

Se observa que si la forma ω había sido exacta, se ha obtenido $\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$ como respuesta, porque la integral curvilínea de una forma exacta en una curva cerrada es nula.

Solución del ejercicio 5879 ▲006879

Denotemos $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ la forma diferencial asociada con $\overrightarrow{F}(x,y,z)$. Por definición de W, se tiene $W = \int_H \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = \int_H \omega$. Según la configuración dada para H, se tiene

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} yzdx + zxdy + xydz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\operatorname{sen} t)t(-\operatorname{sen} t) + t\cos^2 t + \cos t \operatorname{sen} t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t\cos(2t) + \cos t \operatorname{sen} t)dt.$$

Se ha utilizado aquí la fórmula trigonométrica : $\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$. Integrando por partes, se constata que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt = \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}dt.$$

Se deduce que

$$W = \frac{t\operatorname{sen}(2t)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\cos(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Se observa que $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ es exacta. Además, se verifica fácilmente que $\omega = d(xyz)$. Se puede entonces recuperar el resultado anterior haciendo :

$$W = f(B) - f(A)$$

donde se ha puesto $f(x,y,z) = xyz$,

$$B = (\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) \quad \text{y} \quad A = (\cos(0), \operatorname{sen}(0), 0) = (1,0,0).$$

Solución del ejercicio 5880 ▲006880

---

1. Se denota $P(x,y,z) = y^2\cos x$, $Q(x,y,z) = 2y\operatorname{sen} x + e^{2z}$ y $R(x,y,z) = 2ye^{2z}$. La forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, naturalmente asociado con el campo $\overrightarrow{V}(x,y,z)$, es exacta ya que está definida en $\mathbb{R}^3$ y
   (a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x$ (b) $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$ (c) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{2z}$.

   El campo $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ es, por lo tanto un campo gradiente.
2. Se busca U tal que $\omega = dU$. Esto nos lleva a resolver el sistema :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2\cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2y\operatorname{sen} x + e^{2z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 2ye^{2z}. \end{cases}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x, se encuentra :

$$U(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + \psi(y,z).$$

Ahora, utilizando las dos últimas ecuaciones, se es llevado a resolver el siguiente sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \mathrm{e}^{2z} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 2y\mathrm{e}^{2z}. \end{cases}$$

Así, se verifica que $\psi(y,z) = \mathrm{e}^{2z}y + c(z)$, con $c'(z) = 0$. Entonces $c(z) = c$, con c constante real y finalmente :

$$U(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + \mathrm{e}^{2z}y + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Por otro lado, se quiere que $U(0,0,0) = 1$, lo que da $c = 1$.

3. La circulación del campo de $A(0,1,0)$ a $B(\frac{\pi}{2},3,0)$ es

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega = U(B) - U(A) = U(\frac{\pi}{2},3,0) - U(0,1,0) = 11.$$

Se observa que cuando ω es exacta, para calcular la integral curvilínea de ω en un camino, es suficiente conocer el origen y el final del camino. Dicho de otra manera, la integral curvilínea de una forma exacta en $\overset{\frown}{AB}$ solo depende de A y de B, y no del camino elegido para ir de A a B.

Solución del ejercicio 5881 ▲006881

El plano se relaciona con un sistema de referencia ortonormada directa de origen O. Según la fórmula de Green-Riemann, escogiendo tomar $P = 0$ y $Q = x^2y$ de manera que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy$, se obtiene :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_T x^2ydy$$

donde denotamos T el triángulo OAB orientado en el sentido directo con $O(0,0)$, $A(1,0)$ y $B(1,1)$. Así

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\overset{\frown}{OA}} x^2ydy + \int_{\overset{\frown}{AB}} x^2ydy + \int_{\overset{\frown}{BO}} x^2ydy.$$

La integral curvilínea de una forma diferencial en un camino es independiente de la configuración elegida para este camino. Para el cálculo, se elige parametrizar $\overset{\frown}{OA}$ por $x = t$ y $y = 0$, con t variando de 0 a 1 y así $\int_{\overset{\frown}{OA}} x^2ydy = 0$. Igualmente, se elige parametrizar $\overset{\frown}{BO}$ por $x = 0$ y $y = t$, con t variando de 1 a 0 y así $\int_{\overset{\frown}{BO}} x^2ydy = 0$. En fin, se elige parametrizar $\overset{\frown}{AB}$ por $x = t$ y $y = 1-t$, con t yendo de 1 a 0 y entonces :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\overset{\frown}{AB}} x^2ydy = \int_1^0 \frac{t^2(1-t)}{2}(-dt) = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{2}dt = \frac{1}{24}.$$

Se observa que no habría sido más difícil aquí calcular directamente la integral doble sin usar la fórmula de Green-Riemann :

$$\iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{0^1} \left(\int_0^{1-x} xydy \right) dx = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}.$$

Solución del ejercicio 5882 ▲006882

---

1. La forma $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ se define en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Parametrar el círculo C por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, con $t \in [0; 2\pi]$. Se obtiene :

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi.$$

3. La forma ω no es exacto, si no su integral curvilínea sobre la curva cerrada C es cero y esto contradice el resultado de la pregunta anterior. Se observa sin embargo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

De hecho, con este ejemplo, se ve que en el teorema de Poincaré, la suposición de que el abierto debe ser estrellado, es esencial. Aquí $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no es estrellado, es un dominio con “agujeros”. Además, $\int_C \omega$ no es nula porque el círculo rodea el “agujero”.

Solución del ejercicio 5883 ▲004944

Recta ortogonal a $\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\mathscr{P}}$, o $\varnothing$ o $\mathscr{P}$.

Solución del ejercicio 5886 ▲004947

Sea $\mathscr{T}$ un torsor : se descompone $\mathscr{T}(A)$ en $\alpha\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}+\gamma\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CD}$, y $\overrightarrow{R}$ en $\alpha'\overrightarrow{AB}+\beta'\overrightarrow{AC}+\gamma'\overrightarrow{AD}$.
$\Rightarrow$ familia generatriz.

Solución del ejercicio 5888 ▲005915

1. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se escribe $f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$, luego para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se escribe $g(x,y,z) = z - f(x,y)$. $\mathscr{S}$ es la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ o aún $g(x,y,z) = 0$. La función g es de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^3$ y para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3+3x^2-y \\ -x+2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}.$$

Entonces, la superficie $\mathscr{S}$ es regular y en todo punto (x_0,y_0,z_0) de la superficie $\mathscr{S}$, el vector gradiente es un vector normal al plano tangente $\mathscr{P}_0$ en la superficie $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0). El plano

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_0 \text{ paralelo a } \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_0^3+3x_0^2-y_0 = 0 \\ -x_0+2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y_0 = 0 = x_0 \text{ o } (y_0 = \frac{1}{4} \text{ y } x_0 = \frac{1}{2}) \text{ o } (y_0 = \frac{1}{8} \text{ y } x_0 = \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Se obtiene así los tres puntos $O(0,0,0)$, $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$ y $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{256}\right)$.

2. La función f es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$ y

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = (12x^2 - 6x)(-2) - 1^2 = -24x^2 + 12x - 1$$

• En O, el plano tangente es el plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Además, $(rt - s^2)(0,0) = -1 < 0$. Entonces el punto O es un punto silla.

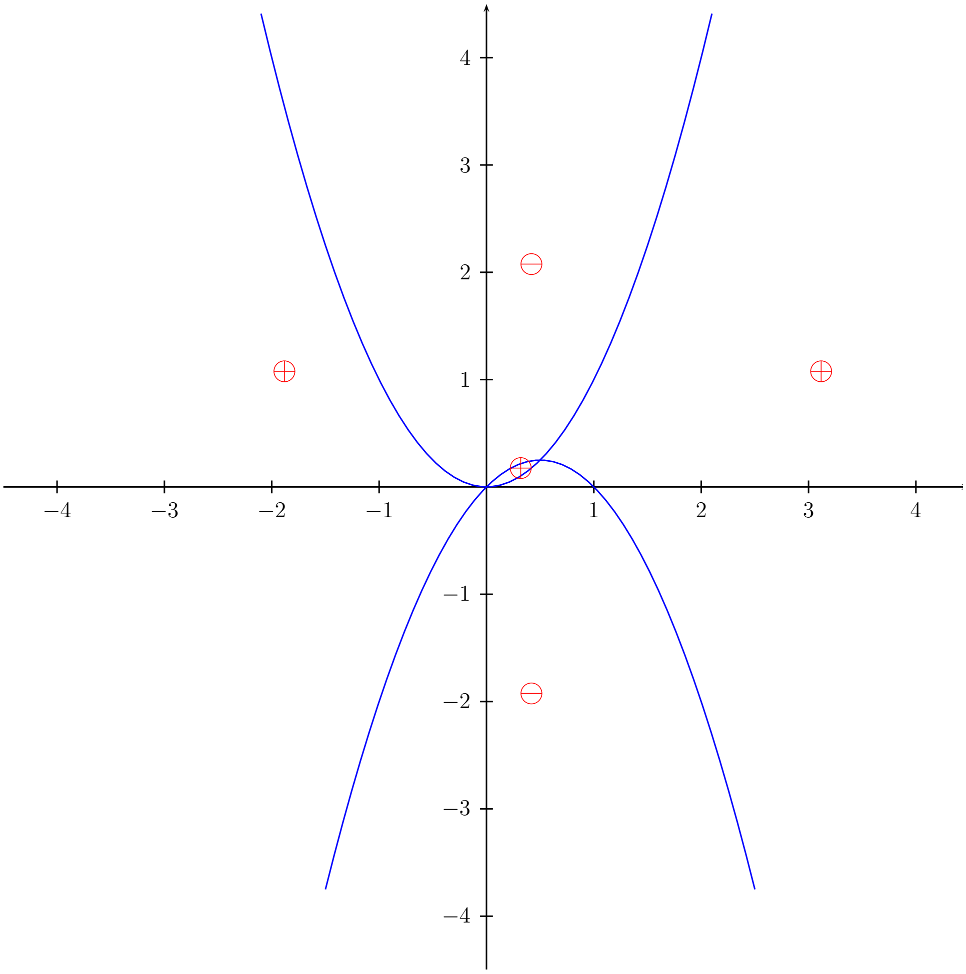
• En A, el plano tangente es también el plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Además, $(rt - s^2)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -1 < 0$. Entonces el punto A es un punto silla.

• En B, el plano tangente es el plano de ecuación $z = \frac{1}{256}$. Además, $(rt - s^2)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} > 0$. Entonces la superficie $\mathscr{S}$ tiene una configuración de globo en el punto B.

3. Se trata ahora de estudiar el signo de $z = f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2 = (x^4 - y^2) - x(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + y - x).$$

La intersección de la superficie $\mathscr{S}$, con el plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ es, por lo tanto la unión de las dos parábolas de ecuaciones respectivas $y = x^2$ y $y = -x^2 + x$ en el plano $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Representar esta intersección así como el signo de $f(x,y)$ $\oplus\ominus$.



Solución del ejercicio 5890 ▲005047

$4x^2 + 4y^2 - 3z^2 = a^2$.

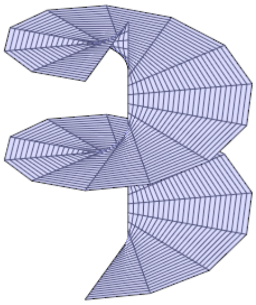
Solución del ejercicio 5891 ▲005048

(Γ) es la intersección de un cilindro hiperbólico y de un plano. Es una hipérbola en este plano.
Para $M(x,y,z) \in \Gamma$, se establece $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y se elimina x y y entre las ecuaciones :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ x^2-y^2-4x+2 = 0 \\ x+z = 1, \end{cases}$$

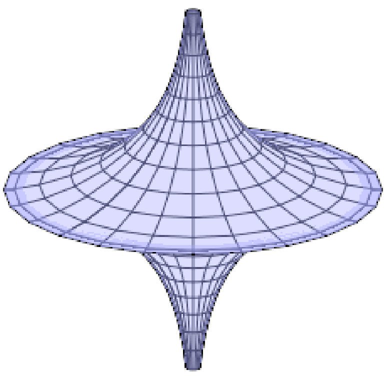
lo que da $2z^2 = r^2$, por lo tanto Γ está incluido en el hiperboloide de revolución de la ecuación $2z^2 = x^2+y^2$ y la superficie buscada también. El recíproco es obvio.

Solución del ejercicio 5892 ▲005049



1. $\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)x - \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \rho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)y + \rho z = \rho f - \rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}$.
2. $f - \rho\frac{\partial f}{\partial \rho} = a(\theta) \Rightarrow f(\rho,\theta) = a(\theta) + b(\theta)\rho$.
3.

Solución del ejercicio 5893 ▲005050



Solución del ejercicio 5894 ▲005051

La normal en M es paralela o secante a $Oz \Leftrightarrow y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow f = f(\rho)$.

Solución del ejercicio 5896 ▲005053

1. Hiperboloide de revolución de dos mantos. 2. $x = 2y$, $z^2 = 1 + 5y^2$.

Solución del ejercicio 5897 ▲005054

1. $z = x^2 + y^2$. 2. $x + y = \frac{1}{2}$. 3. $(x - y + \frac{1}{2})^2 = 2(z - y + \frac{1}{4})$.

Solución del ejercicio 5898 ▲005055

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z = 1$.

Solución del ejercicio 5901 ▲005058

1. $\begin{pmatrix} (x+2y)(y+2z) \\ -(2x+y)(y+2z) \\ (2x+y)(2y+z) \end{pmatrix}$ excepto para $M = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(1, -2, 1)$.
2. $(x - z)(x + y + z) = 0$.
3. segmento $x = z \in [-1, 1]$ y elipse $x^2 + z^2 + xz = 1$.

Solución del ejercicio 5902 ▲005059

$a^2y^2 = (x^2 + y^2)(r^2 - z^2)$.

Solución del ejercicio 5903 ▲005060

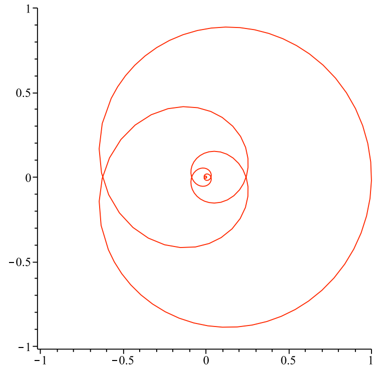
$y(x^2 + (y-1)^2 + z^2) = z^2$.

Solución del ejercicio 5904 ▲005061

$x = \frac{a}{2}(1 + \cos u)$, $y = \frac{v}{2}(1 + \cos u)$, $z = \dfrac{\sqrt{a^2 + v^2}}{2} \operatorname{sen} u$.

Solución del ejercicio 5905 ▲005062

1. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
2. Se parametriza (Σ) por : $\begin{cases} x = a\cos u / \operatorname{ch} v \\ y = a \operatorname{sen} u / \operatorname{sh} v \\ z = a \operatorname{th} v. \end{cases}$ La tangente al meridiano que pasa por $M(u, v)$ es dirigida por $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}$ y la tangente a (Γ) pasando por $M(t, mt)$ es dirigida por $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} + m\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}$. Después de los cálculos, el coseno de estos dos vectores es igual a $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, entonces es constante.
3. Una curva dibujada en (Σ) es definida dando u y v en función de un parámetro t. El coseno del ángulo entre esta curva y un meridiano de (Σ) vale $\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$, por lo tanto es constante si y solo si el cociente $\frac{v'}{u'}$ es constante. Denotando m esta constante y tomando $u(t) = t$, se encuentran las curvas deducidas de (Γ) por rotación alrededor de Oz.

4. 

Solución del ejercicio 5906 ▲005983

Clasificaciones posibles : sin empates, hay 20!. Con exactamente 2 ex-aequo, hay :

1. Escogencia de los dos ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ escogencias ;
2. Lugar de los ex-aequo : hay 19 posibilidades ;
3. Clasificaciones de las 18 otras personas, una vez colocados los ex-aequo : hay 18! escogencias. Existen en total : $19\binom{20}{2}(18!)$ escogencias posibles.

Solución del ejercicio 5907 ▲005984

– Un atuendo es un triplete (P,T,C) : hay $5 \times 6 \times 8 = 240$ atuendos diferentes ;
– «Es todo negro» : ¿de cuántas maneras diferentes ? respuesta : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ formas.
La probabilidad del evento «Todo es negro» es, por lo tanto : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.
– «Una sola pieza es negra en los tres» : denotar los eventos : N_1 la primera pieza (pantalones) es negro, N_2 la segunda pieza (camiseta) es negro, N_3 la tercera pieza (calcetín) es negro : el evento es representado por : $(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$. Estos tres eventos son disjuntos, sus probabilidades se suman. La probabilidad del evento «una sola pieza es negra de tres» es, por lo tanto : 0.325.

Solución del ejercicio 5908 ▲005985

Hay $\binom{30}{2}$ formas de elegir 2 personas entre 30 y entonces $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ besos.

Solución del ejercicio 5909 ▲005986

1. Una cuadrícula de respuestas es una sucesión ordenada de 10 respuestas, hay 4 escogencias posibles para cada una. Por lo tanto hay 4^{10} cuadrículas–respuestas posibles.
2. El evento E «responder al azar al menos 6 vez correctamente» se realiza si el candidato responde bien a 6 o 7 o 8 o 9 o 10 preguntas. Denotemos A_n el evento : «responder al azar exactamente n veces correctamente». Entonces, A_n es realizado si n respuestas son correctas y $10-n$ son incorrectos : 3 escogencias son posibles para cada uno de estos. Como hay $\binom{10}{n}$ escogencias de n objetos entre 10, y así hay : $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$ formas de lograr A_n, entonces :

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

para $n = 6,7,8,9,10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$, o sea de alrededor del 2%.

Solución del ejercicio 5910 ▲005987

Se considera en cambio, el evento complementario : el pájaro no es abatido si no es abatido ni por Amédée, ni por Bernabé, ni por Charles. Este evento tiene por probabilidad : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9) = 0.015$. La probabilidad que el pájaro sea abatido es, por lo tanto : $1 - 0.015 = 0.985$.

Solución del ejercicio 5911 ▲005988

El universo de posibilidades aquí es el conjunto de combinaciones de 10 boletos entre los 300; hay $\binom{300}{10}$. No se gana nada si los 10 boletos comprados están entre los 296 boletos perdidos, esto con la probabilidad :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilidad buscada es la del evento complementario :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilidad es aproximadamente 12.7% de ganar al menos un premio.

Solución del ejercicio 5912 ▲005989

$P(A \cap B) = pq$ porque las enfermedades son independientes. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq$

Solución del ejercicio 5913 ▲005990

Sea A : el evento «sacar un rey» y B : «sacar una pica». $P(A \cap B) = \frac{1}{52}; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y así los eventos A y B son independientes. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Solución del ejercicio 5914 ▲005991

Notemos, en el caso en que la familia Potter tenga 2 niños, el mundo de las posibilidades para los niños : $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, representa los posibles casos, equiprobable, de tener niño-niño, niño-niña etc... : Entonces $P(A) = \frac{2}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}, P(A \cap B) = \frac{2}{4}$. Se concluye que : $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ y así como los eventos A y B no son independientes.

Si ahora la familia Potter comprende 3 niños : Entonces $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{G,F\}, b \in \{G,F\}, c \in \{G,F\}\}$ representa los $2^3 = 8$ casos posibles, equiprobables. Esta vez, $P(A) = 1 - P(\{(G,G,G),(F,F,F)\}) = \frac{6}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}, P(A \cap B) = P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\} = \frac{3}{8}$. Se tiene $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$, y los eventos A y B son independientes

Con n niños, se puede generalizar sin dificultad : $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$, $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ Un pequeño cálculo muestra que $P(A)P(B) = P(A \cap B)$ si y solo si $n = 3$.

Solución del ejercicio 5917 ▲006891

Para ganar 10 euros, se debe haber sacado exactamente una bola roja y 4 bolas blancas, o 2 bolas verdes y 3 bolas blancas. Estos dos eventos, denotados A y B, son incompatibles. Aquí el universo Ω es el conjunto de combinaciones de 5 bolas, es decir el conjunto de partes con 5 elementos de un conjunto de 20 bolas. Las $\binom{20}{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = 15504$ combinaciones son equiprobables. Los elementos del evento A son las combinaciones formadas de la bola roja y una combinación de 4 bolas blancas. Hay $\binom{16}{4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4!} = 1820$. En consecuencia, $p(A) = \frac{1820}{15504}$. Los elementos del evento B son las combinaciones formadas de una combinación de dos bolas verdes y una combinación de 3 bolas blancas. Hay $\binom{3}{2}\binom{16}{3} = 3 \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{6!} = 1680$. En consecuencia, $p(B) = \frac{1680}{15504}$. La probabilidad de ganar 10 euros es, por lo tanto igual a $p(A) + p(B) = \frac{3500}{15504} \simeq 0.225\ldots$

Solución del ejercicio 5918 ▲006892

---

1. Dados no trucados significa que la probabilidad de sacar 3 (u otro número) en un dado es $1/6$. Los sorteos son independientes, la probabilidad de tener tres 3 es $(1/6)^3 = 1/216$.
2. Hay tres maneras de conseguir dos 2 y un 1, y 216 tirajes posibles, entonces la probabilidad deseada es $3/216 = 1/72$.
3. $6/216$
4. Un total de 9 se obtiene por una de las siguientes adiciones,
$$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3,$$
donde los resultados de un tiraje se ordenan de forma decreciente. Se encuentra con la adición $6+2+1$ en $3! = 6$ tirajes diferentes. Igualmente para $5+3+1$ y $4+3+2$. En cambio, $5+2+2$ y $4+4+1$ solo corresponde a tres tirajes y $3+3+3$ a un solo. Por lo tanto hay $6+6+6+3+3+1 = 25$ tirajes que dan una suma de 9. La probabilidad de que la suma sea 9 por lo tanto es $25/216$.
5. Un total de 10 se obtiene por una de las siguientes adiciones,
$$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3.$$
Se encuentra con las incorporaciones $6+3+1$, $5+4+1$, $5+3+2$ en $3! = 6$ tirajes diferentes. En cambio, $6+2+2$, $4+4+2$ y $4+3+3$ solo corresponde a tres tirajes. Por lo tanto hay $6+6+6+3+3+3 = 27$ tirajes que dan una suma de 9. La probabilidad de que la suma sea 9 por lo tanto es $27/216$.

Solución del ejercicio 5921 ▲006895

---

1. Sea X la variable aleatoria "número de errores cometidos durante la transmisión de 5 bits". Entonces X sigue una ley binomial $B(5;0.1)$. Recibir una mayoría de 1's cuando se ha emitido 00000 corresponde al evento $X \geqslant 3$. Su probabilidad es
$P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = \binom{5}{3}(0.1)^3(0.9)^2 + \binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1 + \binom{5}{5}(0.1)^5(0.9)^0 = 0.0081 + 0.00045 + 0.00001 = 0.00856$.

2. Recibir la mayoría de 1's cuando se ha emitido 11111 corresponde al evento $X \leqslant 2$, i.e. al complemento del precedente. Su probabilidad es, por lo tanto $1 - 0.00856 = 0.99144$. En consecuencia, a costa de multiplicar por 5 el tiempo de transmisión, se mejora significativamente la confiabilidad.

Solución del ejercicio 5922 ▲005992

Denotar los diferentes eventos : M : «ser mujer», L : «usar lentes», H : «ser mombre».
Entonces se tiene $P(M) = 0.6$, $P(L/M) = \frac{1}{3}$; el se trata de la probabilidad condicional «usar lentes» sabiendo que la persona es una mujer. Igualmente, se tiene $P(L/H) = 0.5$. Se busca la probabilidad condicional $P(M/L)$. De acuerdo a la fórmula de las probabilidades totales se tiene : $P(M/L)P(L) = P(L/M)P(M)$, con $P(L) = P(L/M)P(M) + P(L/H)P(H)$.
Aplicación numérica : $P(L) = 0.4$, por lo tanto $P(M/L) = \frac{P(L/M)P(M)}{P(L)} = 0.5$. Observación : las mismas respuestas se pueden encontrar razonando de forma elemental.

Solución del ejercicio 5923 ▲005993

Obviamente, es el mismo que el anterior (ejercicio **??**), solo el contexto es diferente : es suficiente adaptar los cálculos hechos. Al pronosticar un niño, el presentador tiene un chance sobre dos de no cometer un error.

Solución del ejercicio 5924 ▲005994

Fumadores
Se definen los eventos : F_n «Fumar el $n^{\text{ésimo}}$ día», y $\overline{F_n}$ el evento complementario. Entonces $\{\overline{F_n}, F_n\}$ constituye un sistema completo de eventos, $P_n = P(F_n)$; se puede por lo tanto escribir : $P(\overline{F_{n+1}}) = P(\overline{F_{n+1}}/F_n)P(F_n) + P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n})P(\overline{F_n})$.
Como $P(\overline{F_{n+1}}/F_n) = 0.9$ y $P(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}) = 0.3$, $1 - P_{n+1} = 0.9P_n + 0.3(1 - P_n)$, o sea $P_{n+1} = -0.6P_n + 0.7$. Denotemos (R) esta relación.
Para conocer el comportamiento a largo plazo, es necesario estudiar esta sucesión recurrente ; hay técnicas matemáticas para eso, es hora de usarla.
Busquemos la solución de la ecuación «$\ell = -0.6\ell + 0.7$», el límite eventual satisface necesariamente esta ecuación : hacer un pasaje al límite en la relación (R), o usar el teorema del punto fijo. Se encuentra $\ell = \frac{7}{16}$;, entonces, la sucesión $Q_n = (P_n - \ell)$ verifica : $Q_{n+1} = -0.6Q_n$, lo que nos permite concluir : $Q_{n+1} = (-0.6)^n Q_1$ y como $((-0.6)^n)$ es una sucesión que tiende a 0, se puede decir que la sub-sucesión (Q_n) tiende a 0 y así la sucesión (P_n) tiende a $\ell = \frac{7}{16}$.
Conclusión : la probabilidad P_n, para que fume durante el día J_n tiende a $\frac{7}{16} \simeq 0.4375$.

Solución del ejercicio 5925 ▲005995

$P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1}/E_n)P(E_n) + P(E_{n+1}/\overline{E_n})P(\overline{E_n}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. Así $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$.
La sucesión $(P_n - \ell)$ es geométrica, donde ℓ es solución de $\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell = \ell$ sea $\ell = \frac{4}{13}$. Así $P_n = \frac{4}{13} + a(-\frac{3}{10})^{n-1}$.

Solución del ejercicio 5926 ▲005996

La probabilidad de tener el Príncipe Azul en la barra B es $\frac{1}{5}$; si se compra n barras, la probabilidad de no tener la figura en ninguna de las n barras es $(\frac{4}{5})^n$, porque se trata n eventos independientes de la probabilidad $\frac{4}{5}$. Se busca entonces n tal que : $1-(\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. Se tiene fácilmente : $n \geqslant 8$.
Después, se busca m tal que : $1-(\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; es necesario al menos 11 barras para la probabilidad de exceder 90%. Para la probabilidad 99%, $n \geqslant 21$.

Solución del ejercicio 5927 ▲005997

1. La tasa global de personas aliviadas : $P(S) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilidad de que un paciente haya tomado aspirina sabiendo que se ha aliviado :

$$P(A/S) = P(A \cap S)/P(S) = P(A)P(S/A)/P(S) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$$

Solución del ejercicio 5928 ▲005998

1. Probabilidad condicional : si un individuo tiene los ojos marrones, de tener el pelo rubio. Esto es $P(CB/YB) = P(YB/CB)P(CB)/P(YB) = P(YB \cap CB)/P(YB) = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.
2. La probabilidad del evento : si un individuo tiene cabello rubio de tener los ojos cafés. Esto es $P(YB/CB) = P(YB \cap CB)/P(CB) = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilidad del evento : si un individuo tiene cabello rubio,no tener ojos marrones. Esto es $P(\text{no } YB/CB) = 1 - P(YB/CB) = 0.4$.

Solución del ejercicio 5929 ▲005999

Se obtiene por cálculo directo o el caso contrario la probabilidad de volar : $1-p+p(1-q)^2$.

Solución del ejercicio 5930 ▲006000

1. La probabilidad de que una persona se enferme si su prueba es positiva es

$$P(M/T^+) = P(T^+/M)P(M)/P(T^+)$$

por lo que $P(T^+) = P(T^+/M)P(M) + P(T^+/S)P(S) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.1 \cdot 0.97 = 0.1255$. De donde : $P(M/T^+) = 22.7\%$.
2. La probabilidad de que una persona esté sana si su prueba es positiva es $P(S/T^+) = 1 - P(M/T^+) = 77.3\%$.
3. La probabilidad de que una persona se enferme si su prueba es negativa es $P(M/T^-) = 0.0017$.
4. La probabilidad de que una persona esté sana si su prueba es negativa es $1 - P(M/T^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Solución del ejercicio 5931 ▲006001

Una forma de resolver el problema es la siguiente : porque existe 8 llaves y se descarta las llaves equivocadas una tras otra, se considera como conjunto de todas las posibilidades, todas las permutaciones de estas ocho llaves : hay $8\,!$. Entonces la solución de cada pregunta se basa en el mismo principio :

1. Permutaciones (ficticias) que traducen el caso (1) son aquellos que pueden ser representados por una sucesión : $BMMMMMMM$, la letra B designa la buena, M designa una mal. Hay 7! permutaciones de este tipo. Entonces $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$, ¡como se sospechaba !
2. Igualmente, las permutaciones (ficticias) son aquellos que pueden ser representados por una sucesión : $MBMMMMMM$: hay aún 7 !, y la probabilidad es la misma.
3. El razonamiento permite de hecho concluir que la probabilidad, antes de comenzar, para abrir la puerta es la mismo para el primero, segundo,. . ., octavo ensayo.

Solución del ejercicio 5932 ▲006002

1. El universo de posibilidades es el conjunto de los pares posibles : hay $6! = 720$ (imagina a las damas sentadas y los hombres eligiendo a su pareja). La probabilidad $P(A)$, para que cada uno de los 6 hombres bailando con su legítima esposa es, si cada uno elegido al azar, $\frac{1}{6!}$.
2. André baila con su esposa, los demás eligen al azar : hay 5! permutaciones para estos últimos : $P(B) = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$.
3. André y René bailan con su esposa, los 4 otros eligen al azar : hay 4! permutaciones para estos últimos : $P(C) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$.
4. André o René bailan con su mujer, los 4 otros hacen esto que quieren. Se consideran los eventos D_1 : «André baila con su esposa» ; D_2 : «René baila con su esposa». Entonces $D = D_1 \cup D_2$ y $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10}$.

Solución del ejercicio 5933 ▲006003

1. ¿Cuántas rejillas ? Hay $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$
2. ¿Cuántas rejillas con 2 números consecutivos ? Este problema se puede resolver con un truco : considerar los números ganadores como 6 lugares a «elegir» entre 49. Considerando las particiones que materializan los números ganadores, se trata de un problema de puntos y particiones. Por ejemplo :

   $$|\bullet\bullet||\bullet|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|$$

   los ganadores son : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. En nuestro caso no queremos particiones consecutivas. Las cinco particiones separan los números en 7 casillas. Como las 5 casillas interiores están vacías, se meten 5 puntos, luego $38(= 49 - 5 - 6)$ en 7 casillas. Hay $\frac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ secuencias sin incluir 2 números consecutivos. De ahí la probabilidad de tener una rejilla incluyendo dos números consecutivos : 0.4952.

Solución del ejercicio 5934 ▲006004

1. $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/Gn)P(Gn) + P(G_{n+1}/\overline{G_n})P(\overline{G_n}) = 0.6u_n + 0.3v_n$. $v_{n+1} = 0.4u_n + 0.7v_n$. Entonces $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
   Como $u_n + v_n = 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. La sucesión $(u_n - \ell)$ es geométrica, donde ℓ es solución de $0.3 + 0.3\ell = \ell$, por lo tanto $\ell = \frac{3}{7}$. Así $u_n = \frac{3}{7} + u_1(0.3)^{n-1} = \frac{3}{7} + 0.5(0.3)^{n-1}$.

Solución del ejercicio 5936 ▲006897

Se denota A el evento "el niño tiene la enfermedad M", A^c su complemento (evento "el niño no tiene la enfermedad M"), B el evento "el niño tiene una reacción positiva a la prueba", B^c su complemento (evento "el niño tiene una reacción negativa a la prueba"). Según el enunciado, $P(A) = 0,01$, $P(A^c) = 0,99$, $P(B^c|A^c) = 0,9$ y $P(B|A) = 0,95$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + (1 - P(B^c|A^c))P(A^c) = 0,0095 + 0,099 = 0,1085. \end{aligned}$$

La probabilidad que un niño menor de tres meses tomado al azar y que tenga una reacción positiva se vea afectado por M viene dado por $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{95}{1085} \simeq 0,088$. Tal prueba sería de utilidad cuestionable.

Solución del ejercicio 5939 ▲006900

El método más simple consiste en introducir la población total N y para contar a los daltónicos. Sea $d_H = 5\%$, $d_F = 0,25\%$ (tasa de daltonismo en hombres y mujeres), $p_H = 48\%$, $p_F = 52\%$ (proporciones de hombres y mujeres en la población). El número de hombres es Np_H, el número de daltónicos es Np_Hd_H. Igualmente, el número de mujeres daltónicas es Np_Fd_F. Por lo tanto, la proporción de daltónicos masculinos entre las personas daltónicas es

$$\frac{\text{número de daltónicos hombres}}{\text{número de daltónicos}} = \frac{Np_Hd_H}{Np_Hd_H + Np_Fd_F} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F} \approx 0,95.$$

La probabilidad para que un daltónico sea un hombre es de alrededor de 95%.

Una formulación más elaborada (pero estrictamente equivalente) consiste a utilizar la fórmula de Bayes. Sea H el evento "ser un hombre" y D el evento "ser daltónico". Se quiere calcular $P(H|D)$. Según la fórmula de Bayes, $P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}$. Utilizando que $P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)$ (fórmula de las probabilidades totales), se obtiene

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F}.$$

Solución del ejercicio 5940 ▲006901

Sea U_1 el evento "sacamos la bola en la primera urna" y U_2 el evento "sacamos la bola en la segunda urna". La elección de la urna es equiprobable, se tiene : $P(U_1) = P(U_2) = 0,5$. Sea B el evento "sacamos una bola blanca". El enunciado da las siguientes probabilidades condicionales :
$P(B|U_1) = 30/40 = 0,75$ y $P(B|U_2) = 20/40 = 0,5$. Se busca la probabilidad $P(U_1|B)$. La fórmula de Bayes, aplicada a la partitura (H_1, H_2), da :

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2)} = \frac{0,75 \times 0,5}{0,75 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5} = 0,6$$

(probabilidad a posteriori)

Interpretación : antes de mirar el color de la bola, la probabilidad de haber escogido la primera urna es una probabilidad a priori $P(U_1)$, o sea 50%.
Después de ver la bola, se revisa el resultado y se considera $P(U_1|B)$, o sea 60%.

Solución del ejercicio 5941 ▲006005

1. Se utiliza una distribución binomial, ley de la variable aleatoria :«número de cartas franqueadas con tarifa urgente entre 4 letras» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. Se obtiene $P(A) = 1-(\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La ley de probabilidad de X es una ley binomial, ley de la variable aleatoria : «número de cartas franqueadas con tarifa urgente entre 10 letras». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, su esperanza es $np = 6$, su varianza es $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Solución del ejercicio 5942 ▲006006

Se utiliza una ley hipergeométrica

$$P(A) = 1-\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.73626, \quad P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.1978\times 10^{-2}, \quad P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.49451.$$

Solución del ejercicio 5943 ▲006007

Sea X la variable aleatoria número de clientes que vienen luego de reservar entre 20. La ley de X es una ley binomial de parámetros $n = 20$, $p = 0.75$. Son esperanza es $np = 15$, su desviación estándar es $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15\cdot 0.25}$. La probabilidad de que X sea igual a 15 es $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5 = 0.20233$.

Solución del ejercicio 5944 ▲006008

La variable aleatoria asociada con este problema es X «número de temas revisados entre los tres» ; su soporte es el conjunto $\{0,1,2,3\}$. La ley de X es una ley hipergeométrica ya que el evento $[X = k]$, para k comprendido entre 0 y 3, ocurre si el concursante saca k temas entre los 60 revisados, y $3-k$ temas entre los 40 sin revisar. Entonces :

1. Los tres temas sorteados han sido revisados : $P[X=3] = \dfrac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Dos de los tres temas sorteados fueron revisados : $P[X=2] = \dfrac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Ninguno de los tres temas : $P[X=0] = \dfrac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La ley de probabilidad de X es dada en el soporte $\{0,1,2,3\}$ por :

$$P[X=k]=\frac{\binom{60}{k}\cdot\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}.$$

Resultados numéricos :
$k=0: P[X=0]\simeq 6.110\times 10^{-2}$
$k=1: P[X=1]\simeq 0.289$, $k=2: P[X=2]\simeq 0.438$
$k=3: P[X=3]\simeq 0.212$
L'esperanza es $E(X)=1.8$ (según la fórmula $E(X)=np$).

Solución del ejercicio 5945 ▲006009

Porque las respuestas se dan al azar, cada cuadrícula de respuestas es, de hecho, la repetición independiente de 20 eventos aleatorios (hay 4^{20} cuadrículas–respuestas).
Para cada pregunta la probabilidad de éxito es $\frac{1}{4}$ y el examinador cuenta los aciertos : la variable aleatoria X, número de respuestas correctas, obedece a una distribución binomial por lo que se tiene los resultados directamente. Para toda valor de k comprendida entre 0 y 20 : $P[X=k]=C_{20}^{k}(\frac{1}{4})^{k}(1-\frac{1}{4})^{20-k}$, que da la ley de esta variable aleatoria.
¿Cuál es la expectativa de un candidato a fumador ? Esto es $E(X)=np=5$.

Solución del ejercicio 5946 ▲006010

Una variable aleatoria adecuada para este problema es el número X de personas que viene al mostrador entre 10h y 11h. Teniendo en cuenta las hipótesis, se divide la hora en 60 minutos. Entonces X sigue una ley binomial de parámetros $n=60$ y $p=0.1$. Se está en el caso de un proceso de Poisson : se puede aproximar la ley de X por la ley de Poisson de parámetro $\lambda=60\times 0.1=6$. La esperanza de X es, por lo tanto $E(X)=6$; se puede entonces calcular las probabilidades requeridas : $P[X=k]=\frac{6^k e^{-6}}{k!}$. Valores leídos de una tabla o calculados : $P[X=3]\simeq 0.9\%$; $P[X=4]\simeq 13.4\%$; $P[X=5]=P[X=6]\simeq 16.1\%$; $P[X=7]\simeq 13.8\%; P[X=8]\simeq 10.3\%$.
Observación : de manera general si el parámetro λ de una distribución de Poisson es un entero K, se tiene : $P[X=K-1]=\frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!}=\frac{K^K e^{-K}}{K!}=P[X=K]$.
Calculemos ahora la probabilidad para que al menos 10 personas vengan al mostrador entre 10h y 11h : esto es $P[X\geqslant 10]=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{6^k e^{-6}}{k!}\simeq 8.392\times 10^{-2}$.

Solución del ejercicio 5947 ▲006011

La probabilidad $p=\frac{1}{100}$ es débil, se puede aplicar la ley de Poisson de esperanza $100p=1$ al número X de centenarios tomados entre cien personas. Se busca por lo tanto : $P[X\geqslant 1]=1-P[X=0]=1-e^{-1}\simeq 63\%$. Sobre un grupo de 200 personas : la esperanza es 2 por lo tanto : $P[X'\geqslant 1]=1-e^{-2}\simeq 86\%$. La probabilidad de los eventos : $[X'=1]$ y $[X'=2]$ son los mismos y valen : 0.14. Así, sobre 200 personas, la probabilidad de encontrar exactamente un centenario es 0.14, igual a la probabilidad de encontrar exactamente dos centenarios. Este valor corresponde a la probabilidad máxima para una ley de Poisson de esperanza 2 y generaliza. Si X obedece una ley de Poisson de esperanza K, entonces se obtiene la máxima probabilidad para los eventos $[X=K-1]$ y $[X=K]$.

Solución del ejercicio 5948 ▲006012

1. 30% es la probabilidad de que se produzca el fallo, denotado Fa; la probabilidad de que una máquina dada de más de cinco años, esté fuera de servicio es $P(HU) = P(HU/Fa)P(Fa) + P(HU/\text{no}Fa)P(\text{no}Fa) = 0.3\cdot 0.75 + 0.4\cdot 0.7 = 0.505$.
2. La probabilidad de una máquina fuera de servicio nunca se haya averiado antes es $P(\text{no}\,Fa/HU) = P(HU/\text{no}\,Fa)P(\text{no}\,Fa)/P(HU) = 0.4\cdot 0.7/0.505 = 0.55446$.
3. La ley de probabilidad de X es una ley binomial, $n = 10$, $p = 0.3$, esperanza 3.
4. $P[X=5] = \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 = 0.10292$

Solución del ejercicio 5949 ▲006013

El número X personas más altas de 1.90m entre 100 obedece a una distribución de Poisson con parámetro $\frac{100}{80}$. La probabilidad que se tenga al menos una persona midiendo más de 1.90m es, por lo tanto $1 - P[X = 0] = 1 - e^{-\frac{100}{80}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}} = 0.71350$. Entre 300 personas : la probabilidad que al menos una persona mida más de 1.90m es, por lo tanto $1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-\frac{300}{80}} = 0.97648$.

Solución del ejercicio 5952 ▲006904

1. Una lámpara extraída al azar tiene una probabilidad $0,2$ de tener una vida útil inferior a 3000 horas. El número X de lámparas que tienen una vida útil inferior a 3000 horas en una muestra de tamaño 15 extraída al azar es la suma de 15 variables de Bernoulli de parámetro $p = 0,2$. En consecuencia, sigue una distribución binomial $B(15;0,2)$. Su esperanza vale $E(X) = 15\times 0,2 = 3$.
2. Esto es $p(X=0) = \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} \sim 0,0352$.
3. Esto es $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2) = \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} + \binom{15}{1}(0,2)^1(0,8)^{14}$
$+\binom{15}{2}(0,2)^2(0,8)^{13} = 0,0352+0,1319+0,2309 \simeq 0,398$.

Solución del ejercicio 5953 ▲006905

1. La ley de X es una ley binomial de parámetros $n = 23$, $p = 0,75$: $P(X=k) = \binom{k}{n}p^k(1-p)^{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$. Su esperanza es $np = 17,25$.
2. $P(X \leqslant 20) = 1 - P(X \in \{21,22,23\}) \simeq 0,951$.

Solución del ejercicio 5954 ▲006906

1. $Y \sim B(10,1/2)$, $X = Y/10$.
2. $P(X > 0,5) = P(Y > 5) = P(Y = 6,7,8,9,10) \simeq 0,377$.
3. $P(0,4 \leqslant X \leqslant 0,6) = P(4 \leqslant Y \leqslant 6) = P(Y = 4,5,6) \simeq 0,656$

4. $P(3 \leqslant Y \leqslant 7) \simeq 0,891$. $P(2 \leqslant Y \leqslant 8) \simeq 0,978$. Entonces $a = 3$.
5. Sí. No.

Solución del ejercicio 5955 ▲006907

1. Es una ley de Poisson con parámetro 6 : $P(X = n) = \mathrm{e}^{-6}\frac{6^n}{n!}$. La probabilidad que no tenga ninguna llamada es $p(X = 0) = \mathrm{e}^{-6} \simeq 0,002$.
2. Sea Y la variable aleatoria "Número de llamadas recibidas en 2 minutos". Entonces Y sigue una ley de Poisson con parámetro 4. La probabilidad de que haya entre 0 y 4 llamadas es $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \simeq 0,629$. Entonces $P(Y \geqslant 5) = 1 - P(Y \leqslant 4) \simeq 0,371$.

Solución del ejercicio 5956 ▲006908

1. $P(X = k) = 0,5^k 0,5 = 0,5^{k+1}$ si $0 \leqslant k \leqslant 4$, $P(X = 5) = 0,5^5$.
2. $E(X) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 5} kP(X = k) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} + 5\frac{1}{32} = 0,96875$.

   Y = número de niños. Hay exactamente 1 niño a menos que haya 5 niñas. $P(Y = 0) = 0,5^5 = 1/32$. $E(Y) = P(Y = 1) \times 1 = 0,96875$.

   $E(X) = E(Y)$, entonces no eficaz para aumentar el número de niños.

Solución del ejercicio 5962 ▲006914

1. Sea A el evento "Charles no tiene perro" y B el evento "Sophie no tiene gato". El enunciado da $P(B|A) = 0,9$. En consecuencia, la probabilidad de que el hogar no tenga animales es $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$.
2. (a) Z solo puede tomar los valores 0, 1 y 2. El evento $\{Z = 0\}$ coincide con $A \cap B$, por lo tanto $P(Z = 0) = 0,72$. Se tiene $P(Z = 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - 0,72 - 0,1 = 0,18$.

   (b) $E(Z) = 0 \cdot P(Z = 0) + 1 \cdot P(Z = 1) + 2 \cdot P(Z = 2) = 0,1 + 0,36 = 0,46$. $E(Z^2) = 0^2 P(Z = 0) + 1^2 P(Z = 1) + 2^2 P(Z = 2) = 0,1 + 0,72 = 0,82$, de donde $\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 0,6084$, $\sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{Var}(Z)} = 0,78$.

   (c) Se calcula $P(X = 0 \text{ y } Y = 0) = P(Z = 0) = 0,72$, $P(X = 1 \text{ y } Y = 1) = P(Z = 2) = 0,18$, $P(X = 0 \text{ y } Y = 1) = P(A \cap B^c) = P(B^c|A)P(A) = (1 - P(B|A))P(A) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$. Se completa la tabla usando el hecho de que la suma de las probabilidades de los eventos elementales vale 1.

	$Y = 0$	$Y = 1$	Total
$x = 0$	0,72	0,08	0,8
$x = 1$	0,02	0,18	0,2
Total	0,74	0,26	1

   La última línea de la tabla da la ley de Y, $P(Y = 0) = 0,74$ y $P(Y = 1) = 0,26$.

   (d) Se constata que $P(X = 1 \text{ y } Y = 1) = 0,18$ no es igual a $P(X = 1)P(Y = 1) = 0,2 \times 0,26$, por lo tanto X y Y no son independientes.

Solución del ejercicio 5964 ▲006014

La probabilidad de que un balín sea rechazado es, denotando D la variable aleatoria «diámetro», $p = 1 - P[7.97 \leqslant D \leqslant 8.03]$. Así $P[7.97 \leqslant D \leqslant 8.03] = P[-\frac{0.03}{0.02} \leqslant \frac{D-8}{0.02} \leqslant \frac{0.03}{0.02}] = F(1.5) - F(-1.5) = 0.8664$. Por lo tanto, la proporción de balines rechazados es $p = 13.4\%$.

Solución del ejercicio 5965 ▲006015

1. La probabilidad de que X sea menor que 0.36mm es : $P[X \leqslant 0.36] = P[\frac{X-0.3}{0.1} \leqslant 0.6] = 0.726$, sea 72.6%. La probabilidad de que X está entre 0.25 y 0.35mm es $P[0.25 \leqslant X \leqslant 0.35] = 2F(0.5) - 1 = 0.383$, o sea 38.3%.
2. Para $n = 20$, la ley de $Z = \sum X_i$ es una ley normal de parámetros : de esperanza $E(Z) = 20m = 6$ y de varianza $\operatorname{Var} Z = 20\sigma^2 = 0.2$.

Solución del ejercicio 5966 ▲006016

Para $n = 2000$, la ley seguida por la variable aleatoria N«número de platos inservibles entre los 2000» es una ley de Poisson con parámetro 2 : entonces $P[N \leqslant 3] = 0.86$. Se observa que haciendo la aproximación por una ley normal y usando el teorema del límite central, se obtiene : $P[N \leqslant 3] \simeq 0.76$, y con la corrección de continuidad se tiene $P[N \leqslant 3] \simeq 0.85$.

Solución del ejercicio 5967 ▲006017

Por métodos análogos se encuentra que la probabilidad de que X está entre 6.3mm y 6.6 mm es 14.3.

Solución del ejercicio 5968 ▲006018

Si X es de media m y de desviación estándar σ, entonces $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ sigue una ley centrada reducida. Entonces si $P[X \leqslant 165]$, entonces $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{165-m}{\sigma}] = 0{,}56$. Por lo tanto se puede leer en la tabla de Gauss $F(0.15) = 0.5596$. Igualmente, si $P[X \geqslant 180]$, entonces $P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.1$. Así $P[\frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{180-m}{\sigma}] = 0.9$ y se puede leer $F(1.28) = 0.8997$.
Para encontrar m y σ es suficiente resolver el sistema de ecuaciones : $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$ y $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$, de donde $\sigma \simeq 13.27$, $m \simeq 163$ cg. Entonces, $P[X \geqslant 182] = P[\frac{X-m}{\sigma} \geqslant \frac{182-m}{\sigma}] = 1 - F(1.43) = 0.0764$.
Sobre 10 000 personas se estima que el número de personas a tratar del orden de 764 personas ; de hecho, la teoría de la estimación dará un rango.

Solución del ejercicio 5969 ▲006019

1. Ley binomial $B(365; \frac{4}{365})$, aproximado por la ley de Poisson del parámetro 4, esperanza y varianza 4.
2. Ley binomial $B(6; \frac{1}{2})$, de esperanza 3 y varianza $\frac{3}{2}$.
3. Ley hipergeométrica.

Solución del ejercicio 5970 ▲006020

1. la ley de X es la ley del binomio $B(1000;0.02)$, de esperanza 20, de desviación estándar $\sqrt{19.6}$.
2. Aproximando esta ley por la de una ley normal con parámetro $m = 20$, desviación estándar $\sqrt{19.6}$. $P[18 \leqslant X \leqslant 22] = P[(17.5-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22.5-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.428$.
   Sin corrección de continuidad, se encuentra $P[(17-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.348$. Aproximado por la ley de Poisson de parámetros : esperanza 20 y varianza 20, se encuentra $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.423$.
   Finalmente, por la verdadera ley binomial : se encuentra $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.427$.

Solución del ejercicio 5971 ▲006021

1. Sea F el evento «la moneda es falsa» ; sea U el evento «la moneda es un euro» ; sea D el evento «la moneda es dos euros». Entonces $P(F) = P(F/U)P(U) + P(F/D)P(D) = 2.9\%$.
2. Se busca $P(U/F) = (P(F/U)P(U))/P(F) = 51.7\%$.
3. X la variable aleatoria «número de monedas falsas entre 1000» obedece na ley binomial $B(1000;5\%)$. Esperanza : 50 ; desviación estándar : $\sigma = \sqrt{47.5}$.
   Aproximando esta ley por una ley normal $N(50;\sigma)$, la probabilidad de que X está entre 48 y 52 es : $P[(47.5-50)/\sigma \leqslant (X-50)/\sigma \leqslant (52.5-50)/\sigma] \simeq 28.3\%$.

Solución del ejercicio 5972 ▲006022

1. La ley de X es una ley binomial $B(180;\frac{1}{6})$ Esperanza : 30 ; desviación estándar : $\sigma = \sqrt{25} = 5$.
2. Aproximando esta ley por una ley normal $N(30;\sigma)$ la probabilidad para que X está entre 29 y 32 : $P[(28.5-30)/\sigma \leqslant (X-30)/\sigma \leqslant (32.5-30)/\sigma] \simeq 30.94\%$.
   Con la verdadera ley, se encuentra la probabilidad de que X está entre 29 y 32 es 30.86%.

Solución del ejercicio 5973 ▲006023

1. Cuando se extrae una boleta al azar, la probabilidad de que sea una boleta para A es de 0.2.
2. Hay suficientes papeletas en total para que se asimilen estos tirajes a tirajes con devolución ; entonces la ley de probabilidad de X es una ley binomial de parámetros $n = 200$ y $p = 0.2$; por lo que $np = 40$; se puede hacer la aproximación normal. La esperanza de X es, por lo tanto $m = 40$ y la desviación estándar : $\sqrt{40 \times 0.8} = 4\sqrt{2}$.
3. $P[X \geqslant 45] = 1 - P[X \leqslant 44] \simeq 1 - F(\frac{44.5-40}{4\sqrt{2}}) \simeq 21\%$, es la probabilidad de que el número de votos de A sea mayor que 45 en un lote de 200 papeletas. Igualmente, $P[30 \leqslant X \leqslant 50] \simeq F(\frac{50.5-m}{\sigma}) - F(\frac{29.5-m}{\sigma}) \simeq 93.6\%$.
4. Retomar el cálculo para el candidato B que solo obtuvo 2% de votos. Entonces, para $n = 100$ y $p = 0.02$ la aproximación por una ley de Poisson de esperanza $\lambda = 2$ es legítimo. Se puede decir que $P[Y \geqslant 5] = 1 - P[Y \leqslant 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!}$, del orden de 5%. Finalmente, $P[1 \leqslant Y \leqslant 4] = \sum_{k=1}^{4} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!} \simeq 0.812$.

Solución del ejercicio 5974 ▲006024

1. (a) Para calcular la probabilidad de que el señor A sea controlado entre 60 y 80 veces al año, se escribe el número de controles como una variable aleatoria. Obedece a una distribución binomial $B(700;0.1)$. Se puede aproximar por la ley normal $N(70;\sqrt{63})$.
   $P[60 \leqslant X \leqslant 80] = P[-10/\sqrt{63} \leqslant X \leqslant 10/\sqrt{63}] \simeq 2F(10.5/\sqrt{63}) - 1 = 0.814$. La probabilidad de ser controlado entre 60 y 80 veces al año es 81.4.

   (b) Calculemos el precio que debe pagar el viajero : $1,12 \times 700 = 784$ euros. Pierde si la multa supera este precio. Pero la multa es aX, si a es la multa fijada por la empresa.
   Se busca por lo tanto a, para que : $P[aX \geqslant 784] \geqslant 0.75$: Sea $P[aX \leqslant 784] \leqslant 0.25$: Por lectura de la tabla : $a = 784/64.642 = 12.128$. Es necesario que la multa exceda 13 euros.

2. Calculemos el precio que debe pagar el viajero : $1,12 \times 300 = 336$ euros. Pierde si la multa supera este precio. Pero la multa es bX, si b es la multa fijada por la empresa. x obedece a una distribución binomial $B(300;0.5)$. Se busca por lo tanto b, para que : $P[bX \geqslant 336] \geqslant 0.75$. Por un razonamiento similar, esta vez se obtiene el resultado : es suficiente que la multa supere 2 euros 30 !

Solución del ejercicio 5975 ▲006916

1. $E(X_1) = 3.5$, $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{35}{12} \simeq 2,92$.
2. X_1, X_2 son independientes de misma ley. De donde $E(S) = 2E(X_1) = 7$ y $\mathrm{Var}(S) = 2\mathrm{Var}(X_1) = \frac{35}{6}$.

Solución del ejercicio 5978 ▲006919

$E(X) = 2$, $E(Y) = 1/2$, $E(XY) = 3/2$, de donde $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1/2$. $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 1/2$, por lo que $\mathrm{Cor}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = 1/2$.

Solución del ejercicio 5979 ▲006920

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY)$, pues $E(X) = E(U) - E(V) = 0$ (U,V tienen incluso ley). $E(XY) = E((U-V)(U+V)) = E(U^2) - E(V^2) = 0$ (U,V tienen la misma ley). Así $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

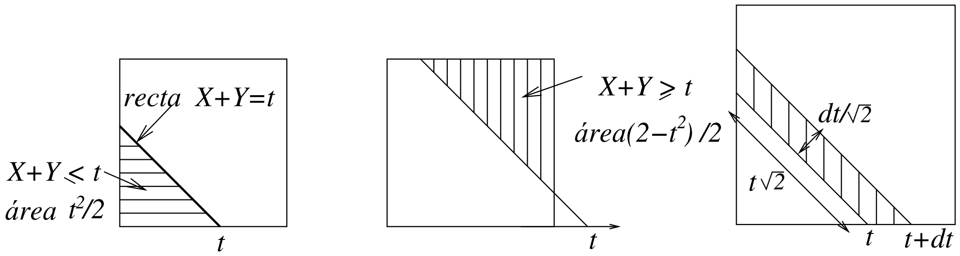
Solución del ejercicio 5980 ▲006924

La Sra Michel debe llegar entre 9h30 y 10h30. Intervalo de tiempo de 1h sobre 4h, por lo tanto proba $= 1/4$.

Solución del ejercicio 5981 ▲006925

Se dan dos métodos gráficos y un cálculo directo.
Se puede tomar como modelo $\Omega = [0,1]^2$, P la medida de Lebesgue en cuadrado, $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$.
Se puede entonces representar $Z = t$ por la recta de ecuación $x + y = t$ en el cuadrado (figura izquierda).
Si $0 \leqslant t \leqslant 1$, entonces $F_Z(t) = P(X+Y \leqslant t) = \frac{t^2}{2}$ (figura izquierda).
Si $1 \leqslant t \leqslant 2$, entonces $F_Z(t) = 1 - \dfrac{(2-t)^2}{2}$ (figura del medio). Si $t < 0$, entonces $F_Z(t) = 0$ y si $t > 2$, entonces $F_Z(t) = 1$.
F_Z es continua en $\mathbb{R}$, C^1 a trozos, por lo que se puede derivar para obtener f_Z la densidad de Z : $f_Z(t) = t$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_Z(t) = 2 - t$ si $1 \leqslant t \leqslant 2$, $f_Z(t) = 0$ si no.

También se puede calcular la densidad directamente, “a la física”, considerando dt como un pequeño crecimiento (se ha dibujado lo suficientemente grande para hacer dibujo legible). En la figura de la recta, se ha dibujado $X+Y \in [t, t+dt]$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$. El área de la parte sombreada es aproximadamente $t\sqrt{2} \times \frac{dt}{\sqrt{2}}$ (longitud $\times$ largo), así se tiene $P(t \leqslant X+Y \leqslant t+dt) = tdt$. Por lo tanto $P(t \leqslant Z \leqslant t+dt) = f_Z(t)dt$, que da la densidad $f_Z(t) = t$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Se hace lo mismo para $1 \leqslant t \leqslant 2$.



Cálculo directo : La densidad de X y Y es $f(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Por independencia, $Z = X+Y$ tiene una densidad numerable $f_Z(t) = f * f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)f(x)dx$ (resultado del curso, que se puede probar de nuevo por cambio de variable a partir de la definición de $P_X * P_Y$).

$f(t-x)f(x) = 1$ si $0 \leqslant t-x \leqslant 1$ y $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(t-x)f(x) = 0$ si no.

Sea $D_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t-x \leqslant 1 \text{ y } 0 \leqslant x \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid t-1 \leqslant x \leqslant t \text{ y } 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

$D_t = [\max(0, t-1), \min(t, 1)]$. Se tiene $f_Z(t) = \int_{D_t} 1\, dx$, entonces :

– si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $D_t = [0, t]$ y $f_Z(t) = t$,
– si $1 \leqslant t \leqslant 2$, $D_t = [t-1, 1]$ y $f_Z(t) = 2-t$,
– si $t < 0$ o $t > 2$, $D_t = \varnothing$ y $f_Z(t) = 0$.

Solución del ejercicio 5982 ▲006926

$P(Z > t) = P(X_1 > t, X_2 > T, \dots, X_n > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)\cdots P(X_n > t)$ por la independencia. Como $P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t)$, se tiene $1 - F_Z(t) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - F_{X_i}(t))$.

Como $F_{X_i}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ si $t \geqslant 0$ y $F_{X_i}(t) = 0$ si no, se encuentra que $F_Z(t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt}$ si $t \geqslant 0$ y $F_Z(t) = 0$ si no. La densidad de Z es, por lo tanto $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} n\mathrm{e}^{-nt}$. En consecuencia, Z es de ley exponencial de parámetro n.

Solución del ejercicio 5983 ▲006927

1. Desigualdad de Markov : $P(X \geqslant 75) \leqslant \frac{E(X)}{75} = \frac{2}{3}$.
2. Desigualdad de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X-50| \geqslant 25) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{25^2} = \frac{5^2}{25^2} = 0,04$. Entonces $P(X \geqslant 75) \leqslant 0,04$.

Solución del ejercicio 5984 ▲006928

Desigualdad de Bienaymé-Tchebychev : $P(|X - 10^2| \geqslant 10^3 - 10^2) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{(10^3 - 10^2)^2} \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{(10^3)^2} = 10^{-4}$. Entonces $P(X \geqslant 10^3) \leqslant 10^{-4}$.

Solución del ejercicio 5987 ▲006923

1. El enunciado sugiere que el peso en gramos de los paquetes es una variable aleatoria que sigue una ley normal de esperanza 500 y de desviación estándar 25. Sea X la variable aleatoria correspondiente, y $Y = (X-500)/25$.
2. $P(480 \leqslant X \leqslant 520) = P(|Y| \leqslant 0,8) = 0,576$. Por lo tanto, se espera que, sobre 1000 paquetes, hay 576 cuyo peso está entre 480g y 520g.
3. $P(480 \leqslant X \leqslant 490) = P(-0,8 \leqslant Y \leqslant -0,4) = P(0,4 \leqslant Y \leqslant 0,8) = p(Y \leqslant 0,8) - p(Y \leqslant 0,4) = 0,1327$.

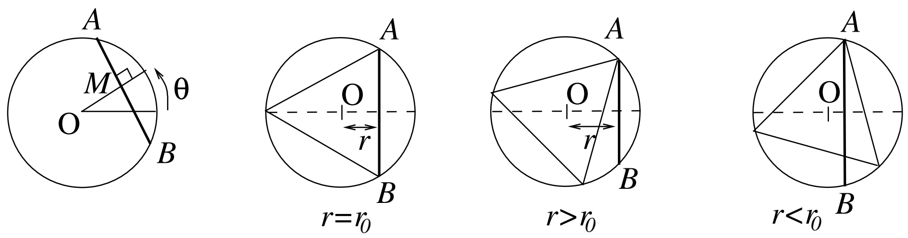
   Por lo tanto, se espera que, sobre 1000 paquetes, hay 132 cuyo peso está entre 480g y 490g.
4. $P(450 \leqslant X) = 0,5 + P(0 \leqslant Y \leqslant 2) = 0,5 + \frac{1}{2}P(-2 \leqslant Y \leqslant 2) = 0,5 + 0,4772 = 0,9772$. Por lo tanto, se espera que, sobre 1000 paquetes, hay 977 cuyo peso es mayor que 450g.
5. Es necesario encontrar t tal que $p(|Y| < t) = 0,9$. La tabla da $t = 1,645$, luego $a = 25t = 41$. En consecuencia, alrededor de 90% de la producción tiene un peso comprendido entre $500-41 = 459$g y $500+41 = 541$g.

Solución del ejercicio 5988 ▲006954

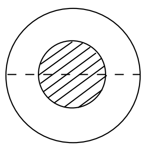
Aquí existen varias formas de definir una cuerda, que conducen a elegir un punto aleatorio en un espacio diferente. Incluso con la probabilidad “natural” (probabilidad uniforme), se obtienen diferentes resultados.

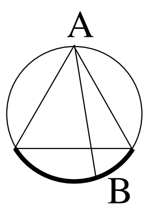
1. La cuerda $[AB]$ está determinada por su distancia al centro O, que es $r = OM$, donde M es el punto medio de $[AB]$, y por el ángulo θ entre la horizontal y la recta (OM) (ver la figura de la izquierda en (1) abajo). El problema es simétrico por rotación, el ángulo θ no interviene. Por lo tanto, se reduce a elegir una distancia r al azar en $[0,R]$, donde R es el radio del círculo. La cuerda está en el exterior si $r \geqslant r_0$, con $r_0 = \frac{1}{2}R$ (ver las figuras (1) abajo). Entonces la probabilidad buscada es $1/2$ (se toma la probabilidad uniforme en $[0,R]$).

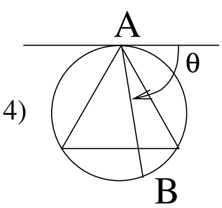
1)



2. La cuerda $[AB]$ está determinada por su centro M : es suficiente trazar la perpendicular a (OM) pasando por M (figura izquierda arriba, como para 1). Por lo tanto, se reduce a elegir un punto M al azar en el radio del disco R. La cuerda pasa al interior del triángulo si $|OM| \leqslant \frac{1}{2}R$ (como en 1), en otras palabras, si el punto M se encuentra en el disco de radio $R/2$, rayado en la figura (2) abajo. El área del dominio es $\pi(R/2)^2$ y el área total es πR^2, entonces la probabilidad deseada es $1/4$ (se toma la probabilidad uniforme en el disco de radio R).

2) 

3) 

4) 

3. Una cuerda está determinada por dos puntos A y B en el círculo (sus extremos). El problema es simétrico por rotación, se puede fijar el punto A y considerar la posición del punto B. Por lo tanto,

se reduce a elegir un punto B al azar en el círculo. La cuerda pasa al interior del triángulo para B perteneciendo a un arco de un círculo haciendo 1/3 del círculo (ver la figura (3) arriba). Entonces la probabilidad buscada es $1/3$ (se toma la probabilidad uniforme en el círculo, es decir la longitud de un arco dividido por la longitud del círculo entero).

4. Se puede determinar la cuerda por su extremo A y el ángulo θ que hace la cuerda con la tangente al círculo en A (ver la figura (4) arriba). Por lo tanto, se reduce a elegir un ángulo θ al azar en $[0,\pi]$. Se ve que la cuerda pasa en el triángulo si $\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$. Lo que da una probabilidad de $1/3$ (se toma la probabilidad uniforme en $[0,\pi]$).

Solución del ejercicio 5989 ▲006028

1. Se obtiene, en la muestra, la media $m_e = 214$, la desviación estándar $\sigma_e = 55.77$.
2. El promedio de la empresa se estima por m_e. La desviación estándar es estimada por : $\widehat{\sigma_e} = \sqrt{\frac{100}{99}}55.77 \simeq 56.05$.
3. Se deduce, en el umbral 95%, un intervalo de confianza para la media : $[m_e - y_\alpha \frac{\widehat{\sigma_e}}{\sqrt{n}}; m_e + y_\alpha \frac{\widehat{\sigma_e}}{\sqrt{n}}] = [203.01; 224.99]$. Así la taza media de colesterol está, con un nivel de confianza 95%, ubicada entre 203 y 225 cg.

Solución del ejercicio 5990 ▲006029

Se trata aquí de estimar una proporción, luego de una observación vale la pena : $f = \frac{13}{12000} \simeq 1.0833 \times 10^{-3}$. Se puede usar una aproximación normal para la media de la muestra. Se deduce un intervalo de confianza para la proporción, en el umbral 95% : $I_\alpha = [f - y_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}; p + y_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}] \simeq [4.7 \times 10^{-4}, 1.7 \times 10^{-3}]$. Se puede escoger I_α como intervalo de confianza, en el umbral 95%, de la proporción deseada. Por la desigualdad de Bienaymé-Tchebychev, se tiene el intervalo $I = [f-a, f+a]$, con : $P[|\overline{X} - p| \leqslant a] \geqslant 1 - (\frac{\mathrm{Var}\overline{X}}{a^2})$ y $P[|X-p| \leqslant a] \geqslant 0.95$ si $1 - \frac{\mathrm{Var}\overline{X}}{a^2} \geqslant 0.95$, o sea $a \geqslant 1.3979 \times 10^{-3}$. Se prefiere por lo tanto el primer método.

Solución del ejercicio 5991 ▲006025

Un intervalo en el que se está «seguro» al 95% para encontrar el número exacto de personas que deben ser atendidas en 10000 : $[p - y_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; fe + y_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$. Frecuencia entre 65,7% y 94,3%. Así entre 698 y 802 personas en 10000

Solución del ejercicio 5992 ▲006026

La ley exacta seguida por X es una ley binomial de parámetros : n, p. $E(X) = 0.75n$ y $\mathrm{Var}X = 0.25 \cdot 0.75n$. Como $n > 150$, se puede hacer la aproximación por la ley normal de esperanza $0,75n$ y de desviación estándar $\sigma = \sqrt{0.25 \cdot 0.75n}$. $P[X > 150] \leqslant 0.05$ si $P[X \leqslant 150] \geqslant 0.95$ si : $P[\frac{X - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}} \leqslant \frac{150 - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}}] \geqslant 0.95$. En la tabla de Gauss, se lee $F(1.645) = 0.95$. Solo se tiene que resolver la desigualdad : $\frac{150.5 - 0.75n}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75n}} \geqslant 1.645$, cuyas soluciones son :

$$0 \leqslant n \leqslant 187.$$

Así, vendiendo menos de 187 boletos, la empresa solo toma un riesgo inferior a 5% de tener que indemnizar el exceso de pasajeros. Haciendo variar los parámetros, Esto no es un problema :

$N=150,\ p=0.5.\ n$ es una solución de la desigualdad : $\frac{150.5-0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geqslant 1.645$. Solución : $n \leqslant 272$.
$N=300,\ p=0.75.\ n$ es una solución de la desigualdad : $\frac{300.5-0.75n}{\sqrt{0.25.0.75n}} \geqslant 1.645$. Solución : $n \leqslant 381$.
$N=300,\ p=0.5.\ n$ es una solución de la desigualdad : $\frac{300.5-0.5n}{\sqrt{0.5.0.5n}} \geqslant 1.645$. Solución : $n \leqslant 561$.

Solución del ejercicio 5993 ▲006027

1. La ley de X es la ley del binomio $n=30$, $p=0.2$.
2. Un intervalo de confianza en el umbral 95%, permite estimar el número de clientes que se espera : es por la frecuencia : 0.657 ; 0.943. Sea entre 20 y 28 personas. Es una amplia gama debido a n pequeño.

Solución del ejercicio 5994 ▲006030

1. Se puede estimar m por la media muestral : 68 kg, y σ por $\sigma_e\sqrt{\frac{300}{299}} = 7\sqrt{\frac{300}{299}} \simeq 7.0117$ kg. Se deduce un intervalo de confianza para la media m : $I_\alpha = [67.2; 68.8]$.
2. La cota superior del intervalo es de 69 kg, es razonable de tomar 70 kg como esperanza de la variable peso de un pasajero.
3. Se autoriza el despegue si el peso total de los viajeros y su equipaje no excede 26.2 toneladas. Para cada uno de 300 pasajeros, se denota : X_i su peso y Y_i el peso de sus valijas. Haciendo la hipótesis de independencia entre los variables X_i y Y_i. El peso total $Z = \sum_{i=1}^{300}(X_i+Y_i)$ es la suma de 600 variables aleatorias independientes ; el teorema del límite central se aplica bajo esta hipótesis. Como la esperanza total es $E(Z) = 300\cdot(70+15) = 25\,500$ y la varianza de Z es : $\operatorname{Var} Z = 300\cdot(\operatorname{Var} X_i + \operatorname{Var} Y_i)$. Entonces Z sigue aproximadamente una distribución normal de media $m = 25\,500$, de desviación estándar $\sigma = \sqrt{300\cdot(8^2+5^2)} = 163.4$. Entonces $Z' = \frac{Z-m}{\sigma}$ sigue aproximadamente una ley normal centrada reducida. El despegue es prohibido si : $Z > 26\,200$, es decir si $Z' > 4.284$. Se lee en la tabla de Gauss : para $t=4$, $F(t) = 0.999\,968 = P[Z' \leqslant 4]$. El despegue se prohíbe debido al exceso de peso con probabilidad inferior a $0.000\,04$.

Solución del ejercicio 5995 ▲006031

1. El intervalo de tiempo de 4 minutos es la repetición de 240 segundos, en el que las llamadas se producen de forma independiente, con la probabilidad de llamada de $\frac{1}{20}$; la ley de probabilidad del número de llamadas recibidas en 4 minutos es, por lo tanto una ley binomial, parámetros $n=240$ y $p=\frac{1}{20}$.
2. Como $n \geqslant 30$ y $np \leqslant 15$, es posible aproximar esta ley por una ley de Poisson con parámetro λ estimado por $np = 12$.
3. Una muestra de tamaño 200 ha sido realizado para estimar el promedio de llamadas por minuto ; es una muestra de tamaño 50, para la variable anterior (número de llamadas recibidas en 4 minutos) que sigue una ley de Poisson de esperanza y varianza 12. Un intervalo de confianza al nivel 95% para el promedio es $I_\alpha = [11; 13]$.

Solución del ejercicio 5996 ▲006032

Se define H_0 «los vertidos químicos no modifican el número de playas afectadas por algas».
Denotemos $p_0 = 0.1$ la proporción teórica de playas alcanzadas por las algas verdes antes de las descargas químicas; p la proporción teórica de playas alcanzadas por las algas verdes luego de las descargas químicas y f la frecuencia observada en la muestra.
Se considera entonces la variable aleatoria X_i, $i \leqslant 50$, que tiene dos modalidades : 1 si se alcanza el rango, 0 si no. Es una variable de Bernoulli, entonces el número total de playas alcanzadas en la muestra es una variable aleatoria que, bajo H_0, obedece a una ley binomial de parámetros $n = 50$, $p_0 = 0.1$.
Bajo H_0, «$p = p_0 = 0.1$» la variable «media de la muestra» :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=50} X_i}{n}$$

de la cual una realización es la frecuencia observada, o sea $\frac{10}{50}$, obedece a una ley que puede ser aproximada por una ley normal de parámetros : media p_0 y desviación estándar $\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{50}}$.
Usando la fórmula del curso, se determina el intervalo de confianza asociado : $I \simeq [0.017; 0.183]$. Se constata que la frecuencia observada está en la zona de rechazo (no química) : 0.2 no está dentro del intervalo de confianza en el umbral 95%. Por lo tanto, se puede rechazar H_0 y concluir, con un riesgo de 0.05, que los vertidos químicos modifican significativamente el número de playas afectadas por las algas.

Solución del ejercicio 5997 ▲006033

Implementación de la prueba :

1. Se define un riesgo : 5%. Para estudiar la dependencia de estos caracteres haciendo la hipótesis H_0 : «los dos caractères son independientes » y se veamos que pasa bajo este supuesto. Denotemos los eventos :
   — C : «tener un cancer en la population observada»
   — F : «ser fumador en la population observada»
   Si los eventos F y C son independientes, entonces : $P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C)$ e igualmente para las otras tres posibilidades : $P(\overline{C} \cap F)$, $P(\overline{C} \cap \overline{F})$,$P(C \cap \overline{F})$, cantidades que, por lo tanto, se pueden calcular bajo H_0 :
   $P(F) = \frac{600}{1000}$, $P(C) = \frac{500}{1000}$, $P(F) \cdot P(C) = \frac{3}{10}$, entonces el número teórico correspondiente a la categoría «fumador y paciente con cáncer» es 300.
2. Se deduce la tabla teórica bajo H_0 :

Teórico	cancer	no cancer	margen
fumador	300	300	600
no fumador	200	200	400
margen	500	500	1000

3. Se calcula así el valor de $s = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$: se obtiene : $s = 34.73$. Se ha precisado el riesgo de %, pero para $\alpha = 0,001$, se lee en la tabla chi-cuadrado con un grado de libertad : $P[\chi^2 \geqslant 10.83] = 0.001$ y el χ^2 calculado es 34.73 !
4. Se decide rechazar H_0. Así, al rechazar la hipótesis de la independencia de los caracteres «ser fumador» y «tener cáncer de garganta», se tiene menos de una oportunidad en 1000 de estar equivocada, ya que menos de una tabla posible en mil conduce a un cálculo de χ^2 más grande que 10.83 ; mucho menos probablemente, da lugar al cálculo de χ^2 más grande que 34.73.

Solución del ejercicio 5998 ▲006929

1. La mejor estimación de G es el valor medio medido, $g_1 = 1,364$. Para dar un intervalo de confianza, se hace la hipótesis que las medidas siguen una ley normal de esperanza G y de desviación estándar σ. La probabilidad de que el intervalo $[g_1 - 1,645\sigma_{pop}, g_1 + 1,645\sigma_{pop}]$ no contiene G_v es inferior a $0,1$. Se concluye que $[1,357; 1,371]$ es un intervalo de confianza relativo a G en el umbral de 90%.
2. La mejor estimación de G es el valor medio medido, $\bar{g} = \frac{1}{10}(g_1 + \cdots + g_5) = 1,365$.

   Sea $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(g_i - \bar{g})^2 \simeq 2,25.10^{-5}$. La mejor estimación de σ es $\bar{\sigma} \simeq 4,7.10^{-3}$. Como $\frac{1}{5}(X_1 + \cdots + X_5)$ sigue una ley normal de esperanza G y de varianza $\frac{1}{25}(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_5)) = \frac{1}{5}\sigma^2$, la probabilidad que el intervalo $[\bar{g} - 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{5}}, \bar{g} + 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{5}}]$ no contiene G es inferior a $0,1$. Si se estima σ por $\bar{\sigma}$, se encuentra que $[1,363; 1,367]$ es un intervalo de confianza relativo a G en el umbral de 90%.

Solución del ejercicio 5999 ▲006930

Se denota p la proporción desconocida. Sea X_i la variable que vale 1 si el i-ésimo votante interrogado declara que tiene la intención de votar por A, 0 si no. Los X_i son independientes y siguen una ley de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, entonces el número $Z = \sum_{i=1}^{1000}$ de electores favorables a A en una muestra de 1000 electores siguen una ley binomial $\mathscr{B}(p, 1000)$. Como p parece de orden de 0,5, se puede aproximar $\mathscr{B}(p, 1000)$ por $\mathscr{N}(1000p, \sqrt{1000p(1-p)})$. De nuevo, como $n = 1000$ es grande, se puede estimar p por la frecuencia $f = 0,521$ observado en la muestra, y suponer que la desviación típica de la variable frecuencia de la muestra $F = Z/1000$ vale $\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{1000} \simeq 0,0158$. Como la variable $\dfrac{F-p}{\sigma(F)}$ es normal estándar, la probabilidad que el intervalo $[f - 1,96 \times 0,0158, f + 1,96 \times 0,0158]$ no contiene p es inferior a 0,05. Se concluye que $[0,49, 0,55]$ (dicho de otro modo $52 \pm 3\%$) es el intervalo de confianza relativo a p en el umbral de 95%.

Solución del ejercicio 6000 ▲006931

Se supone que la variable $X =$ “vida útil de un dispositivo sigue una ley normal de esperanza m_{pop} y de desviación estándar $\sigma_{pop} = 100$h. Si se hacen n ensayos independientes, entonces $T = \sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - m_{pop}}{\sigma_{pop}}$ sigue una ley normal estándar, por lo tanto $p(|T| > 1,96) < 0,05$. A nivel de confianza 95%, se puede decir que el intervalo $[\bar{x} - 1,96\frac{100}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96\frac{100}{\sqrt{n}}]$ contiene la vida media buscada m_{pop}.

El margen de error no excede 50h desde que $1,96\frac{100}{\sqrt{n}} < 50$, i.e. si $n \geqslant 16$.

El margen de error no excede 20h desde que $1,96\frac{100}{\sqrt{n}} < 20$, i.e. si $n \geqslant 97$.

Solución del ejercicio 6002 ▲006933

Ley estimada $\mathscr{E}(\lambda)$ de esperanza $m = 1/\lambda$ y de desviación estándar $\sigma = 1/\lambda$. Estimador de m : $\bar{X}_n = 10$. Así se aproxima σ por 10. TCL : $P(\dfrac{|S_n - nm|}{\sigma\sqrt{n}} < c) \simeq P(|\mathscr{N}(0,1)| < c)$. Para tener un intervalo de confianza a 95%, se toma $c = 1,96$. El encuadramiento $-c < \frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{\sigma/\sqrt{n}} < c$ da

$$\frac{1}{\bar{X}_n + c\sigma/\sqrt{n}} < \lambda < \frac{1}{\bar{X}_n - c\sigma/\sqrt{n}}$$

de donde el intervalo de confianza $[0,091, 0,111]$.

Solución del ejercicio 6003 ▲006934

Se escoge comparar las frecuencias observadas en las dos muestras. Se hace la hipótesis H_0 : las dos muestras son los tirajes de variables de Bernoulli independiente teniendo la misma esperanza p_{pop}. Bajo la hipótesis H_0, el efectivo n_iF_i sigue una ley binomial $\mathscr{B}(p_{pop}, n_i)$. Las muestras son de gran tamaño (n_1, $n_2 \geqslant 30$), se puede asumir que F_i sigue una ley normal $\mathscr{N}(p_{pop}, \sqrt{p_{pop}(1-p_{pop})/n_i})$. Además, para el cálculo de la varianza, se puede estimar p_{pop} por medio del conjunto de los datos disponibles, i.e.

$$p_{pop} \sim \frac{300+125}{700+225} = 0,46.$$

La diferencia $D = F_1 - F_2$ sigue una ley normal de esperanza nula y de varianza $\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(F_1) + \mathrm{Var}(F_2) = p_{pop}(1-p_{pop})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) \sim 0,2484(\frac{1}{700} + \frac{1}{225}) = 0,00146$. En consecuencia, se escoge como función discriminante $T = D/\sqrt{0.00146} = D/0,0382$, que sigue una ley normal estándar. La tabla da $p(|T| > 1,96) = 0,05$. Por tanto, en la muestra medida, la variable T toma el valor $t = \frac{-0,127}{0,0382} = -3,324$. Como $|t| > 1,96$, se rechaza H_0. Se concluye, con al más 5% de error, que los dos lotes de pernos no proceden de la misma población.

Solución del ejercicio 6004 ▲006935

Denotemos X el resultado de un tiraje de un entero entre 0 y 9, con ayuda de este generador y $p = (p_0, \dots, p_9)$ su ley. Se busca probar la hipótesis H_0 : "p es la ley $\mathscr{U}_{\{0,\dots,9\}}$" contre la hipótesis H_1 : "p no es la ley $\mathscr{U}_{\{0,\dots,9\}}$" al nivel 5%. Denotemos $N^{(i)}$ el número de apariciones de la cifra i sobre 1000 tirajes de cifras con ayuda de este generador y $Z = \sum_{i=0}^{9} \frac{(N^{(i)} - 100)^2}{100}$.

Se rechaza la hipótesis H_0 al nivel 5% si el valor observado z_{obs} de Z es tal que $P_{H_0}(Z \geqslant z_{obs}) \leqslant 0,05$. Como para todo $i \in \{0, \dots, 9\}$, $1000p_i = 100$ es suficientemente grande, se puede aproximar la función de distribución de la Ley de Z bajo H_0 por ese del χ^2 a 9 grados de libertad. Entonces, se puede aproximar $P_{H_0}(Z \geqslant z_{obs})$ por $1 - F_{\chi_9^2}(z_{obs})$. A partir de los valores observados para las variables aleatorias $N^{(i)}$ que son dadas en la tabla, se obtiene $z_{obs} \simeq 21,86$. De acuerdo a la tabla de valores numéricos de la Ley del χ^2,

---

Solución del ejercicio 6008 ▲001435

Sea G subgrupo de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, entonces $\operatorname{card} G$ divide $\operatorname{card} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = 8$. Entonces $\operatorname{card} G \in \{1, 2, 4, 8\}$. Además, si G contiene la clase $\bar{n}$ de un número impar, entonces G contiene el subgrupo generado por $\bar{n}$ que es $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ porque entonces n y 8 son primos entre sí, por lo tanto $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
Estudio de los casos. Si $\operatorname{card} G = 8$, entonces $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si $\operatorname{card} G = 4$, entonces G solo puede contener clases de enteros pares de acuerdo a la nota precedente, pero como hay exactamente 4 clases de enteros pares entonces $G = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$.
Si $\operatorname{card} G = 2$, entonces $G = \{\bar{0}, x\}$ y x es un elemento de orden 2, el único elemento de orden 2 de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ es $\bar{4}$. Entonces $G = \{\bar{0}, \bar{4}\}$.
Finalmente, si $\operatorname{card} G = 1$, entonces $G = \{\bar{0}\}$.

Solución del ejercicio 6011 ▲001438

La relación de equivalencia asociada al cociente $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+$ es :

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} > 0.$$

Si $x > 0$, entonces $x \sim +1$, pues $x(1)^{-1} > 0$ (de hecho x es equivalente a todo real estrictamente positivo) ; si $x < 0$, entonces $x \sim -1$, pues $x(-1)^{-1} > 0$, en fin -1 y $+1$ no son equivalentes. Así existen dos clases de equivalencia : $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ = \{\overline{+1}, \overline{-1}\}$. La aplicación $\phi : \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definida por $\phi(\overline{+1}) = \tilde{0}$ y $\phi(\overline{-1}) = \tilde{1}$ es un isomorfismo entre los dos grupos.

Solución del ejercicio 6015 ▲001442

1. Es necesario demostrar que para $x \in G$ y $y \in D(G)$, $xyx^{-1} \in D(G)$. Comenzar por demostrar esto para y un generador de $D(G)$. Si $y = ghg^{-1}h^{-1}$, con $g,h \in G$. Se observa que :

$$xyx^{-1} = \left(xghx^{-1}(gh)^{-1}\right)\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)\left(hgx(hg)^{-1}x^{-1}\right)$$

   que es un producto de elementos de $D(G)$. Entonces xyx^{-1} es un elemento de $D(G)$. Sea ahora y un elemento cualquiera de $D(G)$, entonces se escribe como producto de generadores :

$$y = y_1y_2\cdots y_n, \qquad \text{con } y_i = g_ih_ig_i^{-1}h_i^{-1}.$$

   Escribir $xyx^{-1} = (xy_1x^{-1})(xy_2x^{-1})\cdots(xy_nx^{-1})$. Cada xy_ix^{-1} pertenece a $D(G)$. Y por lo tanto xyx^{-1}. Entonces $D(G)$ es un subgrupo normal de G.
2. Sea $\alpha, \beta \in G/D(G)$, entonces existe $a, b \in G$ tales que $\bar{a} = \alpha$ y $\bar{b} = \beta$. Se sabe que $aba^{-1}b^{-1} \in D(G)$ y entonces $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \varepsilon$, donde ε es el elemento neutro de $G/D(G)$. Pero

$$\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\overline{ba^{-1}b^{-1}} = \bar{a}\bar{b}\overline{a}^{-1}\overline{b}^{-1} = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

   Entonces $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \varepsilon$, dicho de otro modo $\alpha\beta = \beta\alpha$. Y esto cualquiera que sea α y β, por lo tanto $G/D(G)$ es conmutativo. Generalización : si H es un subgrupo normal.

   - Si $D(G) \subset H$, entonces $G/D(G)$ es un subgrupo de G/H, por lo tanto G/H es conmutativo porque $G/D(G)$ es.
   - Si G/H es conmutativo entonces para $g, h \in G$ la clase de $ghg^{-1}h{-}1$ en G/H verifica :

$$\overline{ghg^{-1}h{-}1} = \bar{g}\overline{hg^{-1}h^{-1}} = \bar{g}\overline{g}^{-1}\bar{h}\overline{h}^{-1} = \varepsilon.$$

     Pero los elementos cuya clase en G/H es el elemento neutro, son exactamente los elementos de H. Entonces $ghg^{-1}h^{-1}$ pertenece a H. Así todos los generadores de $D(G)$ están en H y entonces $D(G) \subset H$.

Solución del ejercicio 6019 ▲001446

Se denota $C = AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Un cálculo da $C^8 = I$ y para $1 \leqslant k \leqslant 7$, $C^k \neq I$. Entonces el grupo H generado por C es de orden 8. ¡Cuidado ! aunque si $A^2 = I$ y $B^2 = I$ se tiene $(AB)^2 \neq I$, pues $AB \neq BA$.

2. Para demostrar que H es normal basta con demostrar que ACA^{-1} y BCB^{-1} están en H. Pero $ACA^{-1} = ACA = AABA = BA = (AB)^{-1} \in H$. Igualmente $BCB^{-1} = (AB)^{-1}$. Entonces H es normal en H. Un elemento M de G se escribe

$$M = A^{a_1}B^{b_1}A^{a_2}\cdots A^{a_n}B^{b_n}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Pero en G/H todo término $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$ vale $\bar{I}$, entonces $G/H = \{\bar{I}, \bar{A}, \bar{A}^2, \bar{A}^3, \ldots, \bar{B}, \bar{B}^2, \bar{B}^3, \ldots\}$, pero como $A^2 = B^2 = I$ y $AB \in H$, entonces G/H se escribe simplemente :

$$G/H = \{\bar{I}, \bar{A}\}.$$

En fin, por la fórmula $|G| = |H| \times |G/H|$ se obtiene $|G| = 8 \times 2 = 16$.

Solución del ejercicio 6020 ▲001447

1. (a) $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = 3(x+x')+6(y+y') = 3x+6y+3x'+6y' = f(x,y)+f(x',y')$.

   (b) $\ker f = \{(x,y); f(x,y)=0\} = \{(x,y); 3x+6y=0\} = \{(x,y); x=-2y\} = \{(-2k,k); k \in \mathbb{Z}\}$. Si $\ker f = p\mathbb{Z}\times q\mathbb{Z}$, entonces $f(p,0)=0$, por lo tanto $3p=0$ sea $p=0$. Igualmente $f(0,q)=0$ implica $q=0$ y entonces $\ker f = \{(0,0)\}$, esto contradice el hecho de que $f(-2,1)=0$.

   (c) Se tiene $f(\mathbb{Z}^2) = 3\mathbb{Z}$, el morfismo $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ define pasando al cociente por el núcleo un morfismo inyectivo $\bar{f} : \mathbb{Z}^2/\ker f \longrightarrow 3\mathbb{Z}$ (es el teorema de factorización). Además, como f es sobreyectiva entonces $\bar{f}$ lo es también. Así $\bar{f}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}^2/\ker f = \mathbb{Z}^2/(-2,1)\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$.

2. Se define $g : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $g(x,y) = (\bar{x},\bar{y})$, donde $\bar{n}$ designa la clase de n en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. El núcleo de g es $2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z} = \langle(2,0);(0,2)\rangle = G$. El paso al cociente por el núcleo define el isomorfismo $\bar{g}$ buscado.

Solución del ejercicio 6024 ▲002102

(I) (a) $E \neq \varnothing$, pues $X \in E$. El conjunto $A_0 = \bigcap_{A\in E} A$ es obviamente el elemento más pequeño de E.

(b) Se tiene $\varphi(A_0) \subset A_0$ ya que $A_0 \in E$. Se deduce, por el crecimiento de φ, que $\varphi(\varphi(A_0)) \subset \varphi(A_0)$, lo que da $\varphi(A_0) \in E$ y entonces $A_0 \subset \varphi(A_0)$.

(II) (a) El crecimiento de φ es inmediata.

(b) Se considera la parte A_0 asociada a φ. De acuerdo con el (b) del (I), se tiene $X \setminus h(X \setminus g(A_0)) = A_0$. Dicho de otra manera, las partes A_0 y $h(X\setminus g(A_0))$ constituyen una partición de X. Se considera la aplicación $f : X \to X$ definida es g sobre A_0 y h^{-1} sobre $h(Y\setminus g(A_0))$. Se ve fácilmente que f es una biyección (notar que las imágenes respectivas de las dos restricciones anteriores son $g(A_0)$ y $Y\setminus g(A_0)$ y que constituyen una partición de Y).

Solución del ejercicio 6025 ▲002103

Para todo $x \in X$, se escribe $C(x) = \{y \in X \mid x \text{ y } y \text{ son comparables}\}$ y considerar $Y = \bigcap_{x\in X} C(x)$. La parte Y es totalmente ordenada ya que tan pronto $y, y' \in Y$, entonces $y' \in C(y)$ y entonces y y y' son comparables. Además, para todo $x \notin Y$, existe $y \in X$ tal que $x \notin C(y)$, es decir y y x no es comparable.

No existe unicidad del conjunto Y en general. En efecto, en un conjunto ordenado donde existe un elemento y que solo es comparable consigo mismo, se puede tomar $Y = C(y) = \{y\}$. Es fácil construir conjuntos ordenados que tengan varios de estos elementos y (pensar en la relación de igualdad, cuya gráfica es la diagonal).

Solución del ejercicio 6029 ▲002107

Para la última pregunta, verificar por inducción que $x^{\star n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^k$.

Solución del ejercicio 6030 ▲002108

(a) Designando por b el inverso a la izquierda de a y por c el inverso a la izquierda de b, se tiene $ab = (cb)(ab) = c(ba)b = cb = e$. El elemento b es, por lo tanto la inversa de a.

(b) Se sigue inmediatamente, de (a).

Solución del ejercicio 6031 ▲002109

(a) Para $x, y \in E$ cualesquiera, se denota x' y y' sus inversos a la izquierda respectivos. Si $xy = e$, se tiene también $yx = (x'x)yx = x'(xy)x = x'x = e$.

(b) Sea f un elemento neutro a la izquierda. Se tiene entonces $fe = e$. De acuerdo a (a), se tiene también $ef = e$, es decir $f = e$.

(c) Para todo $x \in E$, se tiene $xe = x(x'x) = (xx')x = x$ ya que según (a), $xx' = e$.

(d) Resulta entonces de (a), (b) y (c).

Solución del ejercicio 6036 ▲002114

Para todos $x, y \in G$, se tiene $xyx^{-1}y^{-1} = xyxy = (xy)(xy) = 1$, es decir $xy = yx$. Entonces G es abeliano. Si G es finito, se puede considerar como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y es entonces necesariamente de dimensión finita, lo que da G isomorfo como un espacio vectorial a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ y entonces $|G| = 2^n$.

Solución del ejercicio 6037 ▲002115

Agrupando cada elemento $x \in G$, con su inversa x^{-1}, se obtiene una partición de G en subconjuntos $\{y, y^{-1}\}$ que tienen dos elementos a menos que $y = y^{-1}$, es decir si $y^2 = e$. El elemento neutro e es un elemento y. No puede ser el único, si no G es de orden impar.

Solución del ejercicio 6040 ▲002118

Para todo $h \in H$, se tiene $ha = k_h b$ para cierto $k_h \in K$. Escribiendo $ha = h(ea) = hk_e b$, se obtiene $k_h = hk_e$, lo que da $h = k_h(k_e)^{-1} \in K$.

Solución del ejercicio 6042 ▲002120

(a) Se supone que $H \cup K$ sea un subgrupo de G y que H no está incluido en K, es decir que existe $h \in H$ tal que $h \notin K$. Demostrar que $K \subset H$. Sea $k \in K$ cualquiera. Se tiene $hk \in H \cup K$. Pero $hk \notin K$ porque si no $h = (hk)k^{-1} \in K$. De donde $hk \in H$ y entonces $k = h^{-1}(hk) \in H$.

(b) Se sigue inmediatamente, de (a).

Solución del ejercicio 6043 ▲002121

Sea H una parte finita no vacía de G estable por la ley de composición. Para demostrar que H es un subgrupo, queda por ver que para todo $x \in H$, $x^{-1} \in H$. Las potencias x^k, donde $k \in \mathbb{N}$ permanecen en H, existe $m,n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$ y $x^m = x^n$. Se tiene entonces $x^{m-n-1} \cdot x = 1$, o sea $x^{-1} = x^{m-n-1}$, lo que demuestra que $x^{-1} \in H$.

Si H es infinito, la propiedad anterior no es cierta en general. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ es una parte estable de $\mathbb{Z}$, para la suma, pero no es un subgrupo.

Solución del ejercicio 6046 ▲002124

Sean $a,b \in G$ de órdenes respectivos m y n. Se define $\mu = \operatorname{mcm}(m,n)$. Se tiene $(ab)^\mu = a^\mu \cdot b^\mu = e \cdot e = e$ ($a^\mu = b^\mu = e$ resultante del hecho que m y n dividen μ). El orden de ab divide así μ.

Se supone que $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$. Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(ab)^k = 1$, sea $a^k = b^{-k}$. Se deduce que $a^{nk} = e$ y $b^{mk} = e$. De donde $m|nk$ y $n|mk$. La hipótesis $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$ da entonces $m|k$ y $n|k$ y entonces $\operatorname{mcm}(m,n)|k$. Esto combinado con la primera parte demuestra que ab es de orden $\operatorname{mcm}(m,n) = mn$.

Solución del ejercicio 6049 ▲002127

Dado $a \in F$, sea S una parte de G conteniendo a y engendrando G. Si $\langle S \setminus \{a\} \rangle \neq G$, entonces existe un subgrupo propio maximal G_i tal que $\langle S \setminus \{a\} \rangle \subset G_i$. Pero entonces $\langle S \rangle \subset \langle S \setminus \{a\} \rangle \langle a \rangle \subset G_i$. Contradicción, por lo tanto $\langle S \setminus \{a\} \rangle \neq G$. Inversamente, se supone que $a \notin F$, es decir existe $i \in I$ tal que $a \notin G_i$. Entonces, para $S = G_i \cup \{a\}$, se tiene $\langle S \rangle = G$ (por maximalidad de G_i) pero $\langle S \setminus \{a\} \rangle = G_i \neq G$.

Solución del ejercicio 6052 ▲002130

(a) ($\Rightarrow$) Si HK es un grupo, para todo $h \in H$ y $k \in K$, se tiene $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in HK$ y entonces $kh \in (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$. De donde $HK \subset KH$. La otra inclusión se obtiene de manera similar.
($\Leftarrow$) Es fácil comprobar usando la hipótesis $HK = KH$ que $(HK) \cdot (HK) \subset HK$ y que $(HK)^{-1} \subset HK$.

(b) Dados $h_0, h \in H$ y $k_0, k \in K$, se tiene $h_0k_0 = hk$ si y solo si $h_0^{-1}h = k_0k^{-1}$. Este elemento está necesariamente en la intersección $H \cap K$. Se tiene entonces $h_0k_0 = hk$ si y solo si existe $u \in H \cap K$ tal que $h = h_0u$ y $k = u^{-1}k_0$. Por cada elemento fijo $h_0k_0 \in HK$, hay por lo tanto, $|H \cap K|$ formas de escribirlo hk, con $(h,k) \in H \times K$. De donde el resultado.

Solución del ejercicio 6053 ▲002131

Por el teorema de Lagrange, los subgrupos de S_3 son de orden 1, 2, 3 o 6. Los subgrupos de orden 1 y 6 son los subgrupos triviales $\{1\}$ y S_3 respectivamente. Como 2 y 3 son primos, los subgrupos de orden 2 y 3 son cíclicos. Un subgrupo de orden 2 es todo subgrupo generado por una transposición : hay 3. Solo existe un subgrupo de orden 3, la generada por el 3-ciclo $(1\,2\,3)$.

Solución del ejercicio 6054 ▲002132

Los diferentes elementos de 1 son de orden 5, 7 o 35. Si existe un elemento g de orden 35 (*i.e.*, si el grupo es cíclico de orden 35), entonces g^5 es de orden 7 y g^7 es de orden 5. Se supone que el grupo no es cíclico y no existe ningún elemento de orden 7. Todo elemento diferente de 1, entonces es en orden 5 y el grupo sería una unión de subgrupos de orden 5. Pero tales subgrupos son iguales o son de intersección $\{1\}$ (pues

5 es primo). Se tiene entonces $35 = 4n+1$, con n el número de subgrupos distintos de orden 5, lo que da la contradicción buscada. El razonamiento es el mismo si no existe ningún elemento de orden 5.

Solución del ejercicio 6055 ▲002133

Si $p = 2$, entonces $|G|$ es de orden 4 : G es el grupo de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ de los cuales todos los elementos diferentes de 1 son de orden 2. Por lo tanto, se puede suponer para la sucesión que p es impar. Procediendo como en el ejercicio 6054, se demuestra que necesariamente existe en G un elemento de orden 2. Finalmente, si todos los elementos diferentes de 1 son en orden 2, entonces según el ejercicio 6036, el orden de G es una potencia de 2. Así también existe un elemento de orden p.

Solución del ejercicio 6056 ▲002134

Se tiene $2^{2^n} \equiv -1$ módulo p. Se deduce que $2^{2^{n+1}} \equiv 1$ módulo p. Estas dos condiciones hacen que el orden de 2 en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ es 2^{n+1}. Esta orden debe dividir el orden de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$, es decir $p-1$, se obtiene el resultado deseado.

Solución del ejercicio 6057 ▲002135

Como $2^n \equiv 1$ módulo $2^n - 1$, el orden de 2 módulo $2^n - 1$, digamos m, divide n. Si $m < n$, se tiene $2^m \equiv 1$ módulo $2^n - 1$, es decir $2^n - 1$ divide $2^m - 1$, que no es posible. El orden de 2 módulo $2^n - 1$ es, por lo tanto n, y este debe dividir el orden de $(\mathbb{Z}/(2^n-1)\mathbb{Z})^{\times}$, que vale $\varphi(2^n - 1)$.

Solución del ejercicio 6072 ▲001428

$HK = \{hk \,/ h \in H, k \in K\}$.

1. Sea $\phi : H \times K \to HK$ definida por $\phi(h,k) = hk$. Demostrar que ϕ es biyectiva : ϕ es sobreyectiva por definición de HK y si $\phi(h,k) = \phi(h',k')$, entonces $hk = h'k'$ y $h'^{-1}h = k'k^{-1}$ por lo que $H \cap K = \{e_G\}$ y entonces $h'^{-1}h = e_G$ y así $h = h'$, lo mismo que $k = k'$ y entonces ϕ es inyectiva.

   Como ϕ es biyectiva $\operatorname{card} H \times K = \operatorname{card} HK$ y entonces $\operatorname{card} HK = \operatorname{card} H \cdot \operatorname{card} K$.

2. Se supone que existen dos subgrupos H y K distintos y de orden p. Demostrar primero que $H \cap K = \{e_G\}$. En efecto, $H \cap K$ es un subgrupo de H y por lo tanto, el cardinal de $H \cap K$ divide $\operatorname{card} H = p$, con p primo. Pero como $H \neq K$, entonces $H \cap K \neq H$ y entonces $\operatorname{card} H \cap K = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

   Ahora de acuerdo con la primera pregunta HK es un conjunto de cardinal p^2 en el grupo G de cardinal $pq < p^2$. Entonces no pueden existir dos subgrupos de orden p.

   Se supone ahora que H sea un subgrupo de orden p, es, por lo tanto el único subgrupo de orden p de acuerdo con lo que acabamos de demostrar. Para $g \in G$ el subgrupo gHg^{-1} es del mismo orden que H (porque para g fija el morfismo θ_g de G en G, $\theta_g(h) = ghg^{-1}$ es un automorfismo y en particular una biyección por lo que $\operatorname{card} \theta_g(H) = \operatorname{card} H$). En consecuencia $gHg^{-1} = H$ y entonces H es un subgrupo normal.

Solución del ejercicio 6079 ▲002137

Sean $x, y \in G$ cualesquiera. De $(xy)^n = x^n y^n$, se deduce $(yx)^{n-1} = x^{n-1}y^{n-1}$, luego $(yx)^n = yx^n y^{n-1}$ y entonces $y^n x^n = yx^n y^{n-1}$, lo que da $y^{n-1}x^n = x^n y^{n-1}$. Así, para todo $y \in G$, y^{n-1} conmuta con todos los elementos de la forma x^n, con $x \in G$, y por lo tanto, está en el centro de G, ya que la aplicación $x \to x^n$ se supone sobreyectiva.

Solución del ejercicio 6080 ▲002138

Todo automorfismo φ del grupo $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permuta los tres elementos de orden 2, es decir el conjunto G^* de tres elementos no triviales. La correspondencia que $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ asocia su restricción a G^* induce un morfismo $\chi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to S_3$. Todo morfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ está determinado por su restricción a G^*, este morfismo χ es inyectivo. Además, todo automorfismo lineal (para la estructura de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espacio vectorial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) es un automorfismo de grupos. Hay 6 tales automorfismos (tantos como bases). La imagen de χ contiene, por lo tanto al menos 6 elementos. Como es un subgrupo de S_3, es S_3 él mismo y χ es un isomorfismo.

Solución del ejercicio 6081 ▲002139

El subgrupo H es a la vez la clase izquierda y la clase derecha módulo H del elemento neutro. Si $[G:H] = 2$, su complemento H^c en G es, por lo tanto la otra clase, a la derecha y a la izquierda. Las clases de la derecha y las clases de la izquierda por lo tanto coinciden, o sea $gH = Hg$ y entonces $gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H$, para todo $g \in G$.

Solución del ejercicio 6082 ▲002140

Según hipótesis, para todo $x \in G$, existe $z \in G$ tal que $xH \cdot x^{-1}H = zH$. Se deduce $xHx^{-1} \subset zH$. Esto implica que $1 \in zH$ y así como $z \in H$. De donde finalmente $xHx^{-1} \subset H$.

Solución del ejercicio 6083 ▲002141

Dados $y, z \in H$, se tiene $y \simeq 1$ y $z \simeq 1$. La compatibilidad de la ley da por un lado $yz \simeq 1$, o sea $yz \in H$, y por otro lado $yy^{-1} \simeq y^{-1}$ o sea $y^{-1} \in H$. Esto demuestra que H es un subgrupo de G. Para todo $x \in G$, se tiene también $xyx^{-1} \simeq x1x^{-1} = 1$ y entonces $xyx^{-1} \in H$. El subgrupo H es, por lo tanto normal. Además, para $x, x' \in G$, si $x \simeq x'$, entonces por compatibilidad de la ley, se tiene $x'x^{-1} \simeq xx^{-1} = 1$, es decir $x'x^{-1} \in H$. Recíprocamente, si $x'x^{-1} \in H$, entonces $x'x^{-1} \simeq 1$, y entonces, por compatibilidad de las leyes, $x \simeq x'$.

Solución del ejercicio 6084 ▲002142

Para todo $g \in G$, la conjugación $c_g : G \to G$ por g induce un automorfismo de H si H es normal en G. Si además K es característico en H, entonces K es estable por c_g. De donde K es entonces normal en G.
El subconjunto V_4 del grupo simétrico S_4 consistiendo en la identidad y los tres productos de transposiciones disjuntas : $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$ y $(1\,4)(2\,3)$ es un subgrupo (verificación inmediata) que es normal : esto resulta de la fórmula $g(i\,j)(k\,l)g^{-1} = (g(i)\,g(j))(g(k)\,g(l))$, para $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ distintos. El subgrupo K (de orden 2) generado por $(1\,2)(3\,4)$ es normal en V_4 (pues V_4 es abeliano). Pero K no es normal en S_4 (como lo muestra la fórmula anterior).

Solución del ejercicio 6087 ▲002145

El grupo μ_{mn} tiene un elemento de orden mn. Por el contrario, todo elemento $x \in \mu_m \times \mu_n$ verifica $x^\mu = 1$, con $\mu = \mathrm{mcm}(m, n)$ y es, por lo tanto de orden un divisor de μ, el cual es $< mn$ si m y n no son primos entre sí. Los grupos μ_{mn} y $\mu_m \times \mu_n$ no puede por ser lo tanto isomorfos.

Solución del ejercicio 6091 ▲002149

Se considera la sobreyección canónica $s : G \to G/H$. Según el ejercicio 6089, $|s(K)|$ divide $\mathrm{mcd}(|K|, |G/H|)$ que es igual a $\mathrm{mcd}(|H|, |G/H|)$ (ya que $|H| = |K|$) y por lo tanto, vale 1. Conclusión : $s(K) = \{1\}$, es decir $K \subset H$. De donde $K = H$ porque tienen el mismo orden.

Solución del ejercicio 6092 ▲002150

Se tiene $f(n) = f(1)^n$, para todo entero $n > 0$. Pero se tiene también $f(1/n)^n = f(1)$, para todo $n > 0$. Esto no es posible porque un número racional positivo $\neq 0, 1$ no puede ser una potencia n-ésima en $\mathbb{Q}$, para todo $n > 0$. (Para este último punto, notar por ejemplo que ser una potencia n-ésima en $\mathbb{Q}$ implica que todos los exponentes de la descomposición en factores primos son múltiplos de n). Ambos grupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}_+^\times, \times)$ por lo tanto no son isomorfos.

Solución del ejercicio 6095 ▲002153

Se tiene $n = |G/H|$. Para toda clase $aH \in G/H$, por lo tanto se tiene $(aH)^n = H$, es decir $a^n H = H$ o aún $a^n \in H$. Esto se vuelve falso si H no es normal en G. Por ejemplo, el subgrupo H de S_3 generado por la transposición $(1\,2)$ es de índice 3 en S_3 y, para $a = (2\,3)$, se tiene $a^3 = a \notin H$.

Solución del ejercicio 6096 ▲002154

Sea H' un subgrupo de G de orden n y de índice m. Para todo $h \in H'$, se tiene $h^n = 1$ y $h^m \in H$ (ver el ejercicio 6095). Porque n y m son primos entre sí, se pueden encontrar $u, v \in \mathbb{Z}$ tales que $um + vn = 1$. Se obtiene entonces $h = (h^m)^u (h^n)^v \in H$. De donde $H' \subset H$ y entonces $H = H'$ ya que $|H| = |H'|$.

Solución del ejercicio 6098 ▲002156

(a) La correspondencia $x \to \mathrm{e}^{2i\pi x}$ induce un morfismo $\mathbb{R} \to T$, sobreyectivo y núcleo $\mathbb{Z}$. De donde $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T$. La correspondencia $z \to z/|z|$ induce el isomorfismo $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+^\times \simeq T$. Similarmente $z \to z^2/|z|^2$ proporciona el isomorfismo $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \simeq T$. Los isomorfismos $T/\mu_n \simeq T$ y $\mathbb{C}^\times/\mu_n \simeq \mathbb{C}^\times$ se obtienen a partir de la correspondencia $z \to z^n$.

(b) La correspondencia $x \to \mathrm{e}^{2i\pi x}$ induce un morfismo $\mathbb{Q} \to \mu_\infty$, sobreyectivo y núcleo $\mathbb{Z}$. De donde $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \mu_\infty$. Si G es un subgrupo finito de μ_∞, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $G \subset \mu_m$. Los subgrupos del grupo cíclico μ_m son los μ_n, donde $n|m$.

(c) Sea G un subgrupo de $\mathbb{Q}$ de tipo finito, es decir generado por un número finito de racionales $p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$. Se tiene entonces $q_1 \cdots q_r G \subset \mathbb{Z}$. Sea q el entero más pequeño > 0 tal que $qG \subset \mathbb{Z}$. El subgrupo qG es de la forma $a\mathbb{Z}$, con $a \in \mathbb{N}$ primero con q (porque la existencia de un factor común contradice la minimalidad de q). Se obtiene $G = (a/q)\mathbb{Z}$. Si además $\mathbb{Z} \subset G$, entonces $1 \in G$ y se escribe por lo tanto $1 = ka/q$, con $k \in \mathbb{Z}$, lo que da $ka = q$. Como $\mathrm{mcd}(a, q) = 1$, se tiene necesariamente $a = 1$ y entonces $G = (1/q)\mathbb{Z}$.

Sea $s : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la sobreyección canónica. Si $\overline{G}$ es un subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces $G = s^{-1}(\overline{G})$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$, conteniendo $\mathbb{Z}$ y de tipo finito (si $p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$ son los antecedentes por s de generadores de $\overline{G}$, entonces $1, p_1/q_1, \ldots, p_r/q_r$ generan G). De acuerdo a lo que precede, se tiene $G = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ y entonces $\overline{G} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, que es isomorfo a $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Vía el isomorfismo de la pregunta (b), se deducen los subgrupos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de tipo finito : estos son los subgrupos $\{\mathrm{e}^{2ik\pi/q} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mu_q$, con q describiendo $\mathbb{N}^\times$.

(d) Se verifica fácilmente que para todo número primo p, μ_{p^∞} es un subgrupo de μ_∞. No es de tipo finito : de hecho, el subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que le corresponde por el isomorfismo de la pregunta (b) es generado por las clases de racionales $1/p^n$ módulo $\mathbb{Z}$, n recorriendo $\mathbb{N}$. Un tal subgrupo G no tiene denominador común, es decir no existe entero $q \in \mathbb{Z}$ tal que $qG \subset G$. En consecuencia, no puede ser de tipo finito.

Solución del ejercicio 6099 ▲002157

Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquiera y $\zeta \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima de z. El subgrupo G es normal en $\mathbb{C}$ (ya que $\mathbb{C}$ es conmutativo). Si n es el índice de G en $\mathbb{C}$, por lo tanto se tiene $\zeta^n = z \in G$ (ver el ejercicio 6095). De donde $\mathbb{C} \subset G$. La inclusión inversa es trivial.

Solución del ejercicio 6102 ▲002160

(a) Sea $\varphi : \mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^m$ un morfismo de grupos. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, se denota $\overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ su clase módulo p. Todo elemento $\overline{x} \in \mathbb{F}_p^n$ puede ser escrito $\overline{x} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Se tiene entonces $\varphi(\overline{n} \cdot \overline{x}) = \varphi(\overline{nx}) = \varphi(n\overline{x}) = n\varphi(\overline{x}) = \overline{n} \cdot \varphi(\overline{x})$. El morfismo φ por lo tanto, es compatible con las leyes externas de $\mathbb{F}_p^n$ y $\mathbb{F}_p^m$. Ya que es también aditivo, es una aplicación $\mathbb{F}_p$-lineal.

(b) Se considera la aplicación $V : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ que a todo automorfismo χ asociada $\chi(1)$. Esta aplicación es con valores en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (si $\chi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, entonces $\ker(\chi) = \{0\}$). Es un morfismo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ provisto de la composición al grupo de multiplicativo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{F}_p^\times$: de hecho, si $\chi, \chi' \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ y si se escribe $\chi'(1) = \overline{c}$ (clase de $c \in \mathbb{Z}$ módulo p), entonces $(\chi \circ \chi')(1) = \chi(\overline{c}) = c\chi(1) = \overline{c} \cdot \chi(1) = \chi'(1) \cdot \chi(1) = \chi(1) \cdot \chi'(1)$. Ce morfismo V es además inyectiva, ya que todo automorfismo χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ está determinado por $\chi(1)$. En fin, para todo $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ no nulo, la correspondencia $\overline{n} \to \overline{a} \cdot \overline{n}$ induce un automorfismo χ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tal que $\chi(1) = \overline{a}$. La imagen del morfismo V es así todo $\mathbb{F}_p^\times$. Lo que establece el isomorfismo requerido.

(c) Según la pregunta (a), se trata de contar el número de automorfismos lineales del $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial $\mathbb{F}_p^n$, que es igual al número de bases de $\mathbb{F}_p^n$, es decir $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.

Solución del ejercicio 6104 ▲002162

Sea G un grupo abeliano finito tal que $pG = \{0\}$. Para todo entero $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $g \in G$, el elemento ng depende solo de la clase de n módulo p ; se puede denotarlo $\overline{n} \cdot g$. La correspondencia $(\overline{n}, g) \to \overline{n} \cdot g$ define una ley externa sobre el grupo aditivo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ y así le da una estructura de $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial. Este espacio vectorial, es finito, es de dimensión finita. Por lo tanto es isomorfo como un espacio vectorial, y en particular como grupo a $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, para cierto entero $n \geqslant 0$.

Solución del ejercicio 6107 ▲002165

El centro $Z(G)$ no es ni trivial (pues G es un p-grupo) ni igual a G (pues G no abeliano). Usando el ejercicio 6100, se ve que tampoco es de orden p^2. Es por lo tanto de orden p. Pero entonces $G/Z(G)$ es de orden p^2 y por lo tanto, es abeliano (ejercicio 6101). Según el ejercicio 6106, se tiene entonces $D(G) \subset Z(G)$. Como $D(G) \neq \{1\}$ (si no G es abeliano), se tiene $D(G) = Z(G)$.

Solución del ejercicio 6138 ▲002167

(a) Se verifican las dos fórmulas : $(a\,b)(b\,c) = (a\,b\,c)$, para a, b, c distintos, y $(a\,b)(c\,d) = (a\,b)(b\,c)(b\,c)(c\,d) = (a\,b\,c)(b\,c\,d)$, para a, b, c, d distintos. Se deduce que toda permutación par, producto de un número par de transposiciones, puede escribirse como el producto de 3-ciclos. El grupo alternante A_n es, por lo tanto generado por los 3-ciclos si $n \geqslant 3$.

(b) Se tiene $(1\,2\,j)\,(1\,2\,i)\,(1\,2\,j)^{-1} = (2\,j\,i)$, para i, j distintos y diferentes de 1 y 2, y si además k es diferente de $1, 2, i, j$, se tiene $(1\,2\,k)\,(2\,j\,i)\,(1\,2\,k)^{-1} = (k\,j\,i)$. El grupo formado por los 3-ciclos $(1\,2\,i)$, donde $i \geqslant 3$ contiene, por lo tanto todos los 3-ciclos ; de acuerdo a (a), es el grupo alternado A_n.

Solución del ejercicio 6140 ▲002169

Los casos $n = 1$ y $n = 2$ son inmediatos. Se puede suponer $n \geqslant 3$.
Es fácil comprobar la fórmula $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_{n-1}\, a_n)\ (a_{n-1}\, a_n\, a_{n-2} \cdots\, a_2\, a_1) = (a_1\, a_n\, a_{n-1})$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son los elementos de un conjunto de cardinal n. Se deduce que el grupo PC_n generado por las permutaciones circulares contiene el 3-ciclos y por lo tanto, el grupo alternado A_n (ver ejercicio 6138). Las permutaciones circulares son de signatura $(-1)^{n-1}$. Si n es impar, por lo que son pares de donde $PC_n \subset A_n$ y así finalmente $PC_n = A_n$ en este caso. Si n par, las permutaciones circulares son impares, por lo tanto $PC_n \neq A_n$. El índice de PC_n en S_n deben dividir 2 (ya que $PC_n \supset A_n$), vale 1, es decir $PC_n = S_n$.

Solución del ejercicio 6141 ▲002170

Se supone $\sigma\tau = \tau\sigma$. Para todo $x \notin I$, se tiene $\sigma(\tau(x)) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$; $\tau(x)$, fijo por σ, no pertenece a I. Esto demuestra que el complemento de I es invariante por τ. Como τ es inyectiva, I lo es también. Demostrar que, sobre I, τ es igual a una potencia de σ. Si se reenumera $\{1, \ldots, n\}$, se puede asumir que $I = \{1, \ldots, m\}$ (donde $m \leqslant n$) y $\sigma|_I = (1\ 2\ \ldots\ m)$. El entero $\tau(1)$ está en I ; sea k el entero único entre 1 y m tal que $\tau(1) = \sigma^k(1)$. Para todo $i \in I$, se tiene entonces $\tau(i) = \tau\sigma^{i-1}(1) = \sigma^{i-1}\tau(1) = \sigma^{i-1}\sigma^k(1) = \sigma^k\sigma^{i-1}(1) = \sigma^k(i)$ (la identidad $\tau\sigma^{i-1} = \sigma^{i-1}\tau$ utilizado en el cálculo se deduce fácilmente de la hipótesis $\sigma\tau = \tau\sigma$). Se obtiene por lo tanto $\tau|_I = (\sigma|_I)^k$. La implicación recíproca es fácil.

Solución del ejercicio 6142 ▲002171

Un subgrupo normal de S_n que contiene una transposición contiene toda su clase de conjugación, es decir todas las transposiciones (ver las instrucciones para el ejercicio 6139, “Recordatorio”) y por lo tanto, el grupo que engendran, es decir S_n.

Solución del ejercicio 6143 ▲002172

El conjunto H es el subgrupo de S_4 que fija el par $\{1,2\}$. Todo elemento de H fija también el par $\{3,4\}$. Esto proporciona un morfismo $H \to S_2 \times S_2$ que es claramente biyectivo. De donde $H \simeq S_2 \times S_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Se tiene $\sigma \in K$ si y solo si $\sigma(1) \equiv \sigma(3)$ [mod 2] y $\sigma(2) \equiv \sigma(4)$ [mod 2], es decir si y solo si $\sigma(\{1,3\})$ es ya sea el par $\{1,3\}$ o ya sea el par $\{2,4\}$ (en ese caso $\sigma(\{2,4\})$ es el par $\{2,4\}$ o el par $\{1,3\}$ respectivamente). Gracias a la identidad $\sigma\,(1\,3)\,(2\,4)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3))\ (\sigma(2)\ \sigma(4))$, se ve que la condición es también equivalente al hecho de que la conjugación por σ estabiliza la permutación $(1\,3)\,(2\,4)$. Dicho de otra manera K es el subgrupo de los elementos de S_4 que conmutan con $(1\,3)\,(2\,4)$. La clase de conjugación 2-2 teniendo 3 elementos, el grupo H es de orden $4!/3 = 8$. Se puede elaborar una lista de sus elementos : si $\omega = (1\,2\,3\,4)$ y $\tau = (1\,2)\,(3\,4)$, entonces $K = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \tau, \omega\tau, \omega^2\tau, \omega^3\tau\}$. Se verifican las relaciones $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ y $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. El grupo K es igual al producto semidirecto de su subgrupo normal $\langle\omega\rangle$ por su subgrupo $\langle\tau\rangle$ y por lo tanto, es isomorfo al grupo diédrico de orden 8.

Solución del ejercicio 6145 ▲002174

El orden de una permutación $\omega \in S_n$ es el mcm de las duraciones de los ciclos de la descomposición de ω en ciclos con soportes disjuntos. Además, la suma de las longitudes de estos ciclos (los de longitud 1 incluido) vale n. Para una permutación de orden 10 en S_8, solo existe un tipo posible : 5-2-1. El signo es entonces $(-1)^{5-1}(-1)^{2-1} = -1$.

Solución del ejercicio 6146 ▲002175

(a) Un 3-ciclo ω es de orden 3 y verifica $\omega^3 = 1$ o sea aún $\omega = (\omega^2)^2$. El grupo generado por todos los cuadrados de permutaciones en S_n contiene, por lo tanto todos los 3-ciclos, y por lo tanto, también el grupo que engendran, es decir A_n. La otra inclusión es fácil ya que el cuadrado de una permutación es siempre una permutación par.

(b) Si H es un subgrupo de índice 2 de S_n, es normal. Se tiene entonces $\sigma^2 \in H$, para todo $\sigma \in S_n$ (ver ejercicio 6095). Según la pregunta (a), $H = A_n$.

Solución del ejercicio 6147 ▲002176

Las clases de conjugación de S_n corresponden a los tipos posibles de una permutación de n elementos (ver indicación de ejercicio 3 Recordatorio). Para $n = 4$, se tiene 5 clases : $1-1-1-1$, $2-1-1$, $2-2$, $3-1$ y 4.

Sea H un subgrupo normal no trivial de S_4. Si H contiene la clase $2-1-1$ (transposiciones), entonces $H = S_4$. Si H contiene la clase $3-1$, entonces $H \supset A_4$ (ver ejercicio 6138) y entonces $H = A_4$ o $H = S_4$. Si H contiene la clase 4, entonces $H = S_4$ (ver ejercicio 6140). Si H contiene la clase 2-2, entonces $H \supset V_4$ (ver la solución del ejercicio 6084 definición de V_4), lo que da $H = V_4$ o bien, en vista de los casos anteriores, $H = A_4$ o $H = S_4$. Los subgrupos normales de S_4 son, por lo tanto $\{1\}$, V_4, A_4 y S_4.

Solución del ejercicio 6149 ▲002178

Sea H un subgrupo de índice m de un grupo G. La acción de G por traslación a la izquierda en el conjunto cociente G/H de clases a la izquierda módulo H induce un morfismo $G \to \mathrm{Per}(G/H)$ que es no-trivial y por lo tanto, es inyectivo ya que el núcleo, normal en G, no puede ser trivial si G es simple. El orden de G debe así dividir el orden del grupo $\mathrm{Per}(G/H)$ que vale $m!$. Es necesario que $|G| = m!$. Pero entonces el morfismo anterior es un isomorfismo y G es isomorfo al grupo simétrico S_m, lo que contradice la simplicidad de G.

Solución del ejercicio 6151 ▲002180

(a) La identidad $a^2b^2 = (ab)^2$, por simplificación a la izquierda por a y a la derecha por b, se reescribe $ab = ba$.
(b) La correspondencia $(x,y) \to (x+y,y)$ define un automorfismo σ de $\mathbb{F}_3^2$ de orden 3.
Identificar el grupo $\langle\sigma\rangle$ al grupo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y considerar el producto semidirecto $\mathbb{F}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Para todo elemento $((x,y),i)$, se tiene $((x,y),i)^2 = ((x,y)+\sigma^i(x,y),2i)$ y $((x,y),i)^3 = ((x,y)+\sigma^i(x,y)+\sigma^{2i}(x,y),3i) = ((0,0),0)$ ya que $(\mathrm{Id}+\sigma^i+\sigma^{2i})(x,y) = (3x+iy+2iy,3y) = (0,0)$. La fórmula $a^3b^3 = (ab)^3$ por lo tanto, se satisface para todo a,b en $\mathbb{F}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Pero este producto semidirecto no es conmutativo porque la acción de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ no es la acción trivial.

Solución del ejercicio 6152 ▲002181

(a) Que R sea una relación de equivalencia es inmediata. La clase de un elemento $x \in G$ es el conjunto HxH, que es igual a la unión de los conjuntos hxH, cuando h recorre H. Estos últimos conjuntos son clases a la izquierda módulo H y por lo tanto, son iguales o disjuntos.
(b) Para todo $i = 1,\dots,d(x)$, hx_iH es una clase a la izquierda, contenida en $h(HxH)H \subset HxH$, entonces es de la forma x_jH. La fórmula $h * x_iH = hx_iH$ define así una permutación del conjunto de clases $x_1H,\dots,x_{d(x)}H$ (la permutación recíproca es la inducida por h^{-1}) y por lo tanto, una acción de H en este conjunto. Esta

acción es transitiva : para $i,j \in \{1,\ldots,d(x)\}$, $h = x_i^{-1}x_j$ verifica $h * x_iH = x_jH$.
Un elemento $h \in H$ está en el fijador $H(x_iH)$ de una clase x_iH si y solo si $hx_iH = x_iH$, es decir si $h \in x_iHx_i^{-1}$. De donde $H(x_iH) = H \cap x_iHx_i^{-1}$. Se obtiene entonces $d(x) = [H : (H \cap x_iHx_i^{-1})]$, lo que prueba que $d(x)$ divide $|H|$ y por lo tanto, también $|G|$.

(c) Si H es normal en G, entonces clases a la derecha y clases a la izquierda módulo H coinciden de donde $HxH = xHH = xH$ y entonces $d(x) = 1$, para todo $x \in G$. Inversamente, para todo $x \in G$, si $d(x) = 1$, entonces $HxH = xH$, lo que implica $Hx \subset xH$ y entonces $x^{-1}Hx \subset H$.

(d) (i) De manera general, se tiene $d(x) \leqslant [G : H]$. Se tiene así $d(x) \leqslant p$ si $[G : H] = p$. Como $d(x)$ divide $|G|$ y que p es el primo más pequeño que divide a $|G|$, necesariamente $d(x) = 1$ o $d(x) = p$.

(ii) Si H no es normal entonces existe $x \in G$, con $d(x) \neq 1$ y entonces $d(x) = p$. Pero entonces $\mathrm{card}(HxH) = d(x)\,|H| = p\,|H| = [G : H]\,|H| = |G|$. Es decir, solo existe una clase $HxH = G$, la cual es también la clase del elemento neutro $H1H = H$, lo que contradice la hipótesis $[G : H] = p > 1$. Conclusión : el subgrupo H es normal en G.

Solución del **ejercicio 6153** ▲002182

Toda órbita $\mathscr{O} = \mathscr{O}_x$ de un elemento $x \in X$ está en biyección con el conjunto $G/\cdot G(x)$ de clases a la izquierda de G módulo el fijador $G(x)$ de G. En particular, el cardinal de $\mathscr{O}$ divide el orden de G. Además, la suma de las longitudes de las órbitas es igual a la cardinalidad del conjunto X.

(a) Si $|G| = 15$, $\mathrm{card}(X) = 17$ y si no existe una órbita de un solo elemento, solo existe una posibilidad : 4 órbitas de longitud 3 y uno de longitud 5.

(b) Se supone $|G| = 33$ y $\mathrm{card}(X) = 19$. Sin suma de divisores $\neq 1$ de 33 no es igual a 19 por lo tanto necesariamente existe al menos una órbita reducida a un elemento.

Solución del **ejercicio 6154** ▲002183

(a) Si g_1', g_2' están en la misma clase a la izquierda de G módulo H, es decir si $g_1'H = g_2'H$ o incluso si $(g_2')^{-1}g_1' \in H$, entonces $(gg_2')^{-1}(gg_1') = (g_2')^{-1}g_1' \in H$: las clases $gg_1'H$ y $gg_2'H$ son iguales. Para todos $g, g' \in H$, la clase $gg'H$ por lo tanto no depende del representante elegido g' de la clase $g'H$; se puede denotar $g \cdot g'H$. Es fácil de comprobar que la correspondencia $(g, g'H) \to g \cdot g'H$ satisface las demás condiciones de la definición de una acción de G en el conjunto cociente $G/\cdot H$.

Para $g, \gamma \in G$, se tiene $\gamma \cdot gH = gH$ si y solo si $g^{-1}\gamma g \in H$, lo que equivale a $\gamma \in gHg^{-1}$. El reparador de clases gH es el subgrupo conjugado gHg^{-1} de H por g.

(b) Para todo $y \in Y$ y todo $g \in G$, se tiene $f(g \cdot f^{-1}(y)) = g \cdot f(f^{-1}(y)) = g \cdot y$. Aplicando f^{-1}, se obtiene $g \cdot f^{-1}(y) = f^{-1}(g \cdot y)$, lo que demuestra que f^{-1} es compatible con la acción de G.

(c) Sea $x \in X$ fijo. Para $g \in G$, el elemento $g \cdot x$ solo depende de la clase a la izquierda de g módulo el fijador $G(x)$ de x. Esto permite definir una aplicación $G/\cdot G(x) \to X$: a cada clase $gG(x)$ se asocia $g \cdot x$. Demostrar fácilmente que esta aplicación es compatible con la acción de G (verificación formal), inyectiva (por construcción) y sobreyectiva (por el supuesto de transitividad) ; es entonces un isomorfismo de G-conjuntos.

(d) i) Se supone que se le da una aplicación $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ compatible con la acción de G. Para todo $h \in H$, se tiene $f(hH) = f(H) = h \cdot f(H)$, lo que de acuerdo a la pregunta (a), da $h \in gKg^{-1}$, donde g es un representante de la clase $f(H)$ en $G/\cdot K$.

Recíprocamente, se supone $H \subset gKg^{-1}$, con $g \in G$. Se considera la aplicación $\varphi : G/\cdot H \to G/\cdot K$ que a toda clase γH asocia la clase γgK. Esta aplicación está bien definida : en efecto, si $\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in H$, entonces $(\gamma_2 g)^{-1}\gamma_1 g = g^{-1}(\gamma_2^{-1}\gamma_1)g \in g^{-1}Hg \subset K$; la clase γgK por lo tanto no depende del representante γ de la clase γH. Además, φ es compatible con la acción de G : para todo $\gamma, \gamma' \in G$, se tiene $\varphi(\gamma' \cdot \gamma H) = \varphi(\gamma' \gamma H) = \gamma' \gamma g K = \gamma' \cdot \varphi(\gamma H)$.

Si $f : G/\cdot H \to G/\cdot K$ es compatible con la acción de G, entonces su imagen contiene toda órbita tan pronto como contiene un elemento. Como la acción de G sobre $G/\cdot K$ solo tiene una órbita, la imagen de f contiene todo $G/\cdot K$: f es sobreyectiva.

De acuerdo con lo anterior, conjuntos $G/\cdot H$ y $G/\cdot K$ son isomorfos como G-conjuntos si y solo si $H \subset gKg^{-1}$, con $g \in G$ y $\text{card}(G/\cdot H) = \text{card}(G/\cdot K)$, lo que equivale a $H \subset gKg^{-1}$ y $|H| = |K|$ o incluso a $H = gKg^{-1}$.

ii) Es suficiente reescribir los resultados de la pregunta anterior reemplazando $G/\cdot H$ y $G/\cdot K$ por $G/\cdot G(x)$ y $G/\cdot G(y)$ que, de acuerdo a la pregunta (c) son G-isomorfos a X y Y respectivamente (donde x y y son puntos fijos de x y Y respectivamente).

Solución del ejercicio 6155 ▲002184

(a) Para $1 \leqslant i, j \leqslant r$ cualesquiera y $x_i, x_j \in X_i \times X_j$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x_i = x_j$ (por transitividad de G). Se tiene entonces $g \cdot X_i = X_j$. En particular $\text{card}(X_i) = \text{card}(g \cdot X_i) = \text{card}(X_j)$.
(b) Si la acción de G sobre $G/\cdot H$ es imprimitiva, el subconjunto $K = \{g \in G \mid g \cdot X_1 = X_1\}$, donde X_1 es por ejemplo el de los subconjuntos $x_i \subset X$ que contiene la clase neutral H de $G/\cdot H$, es un subgrupo propio de G ($K \neq G$, pues G actuando transitivamente, existe $g \in G$ tal que $(g \cdot X_1) \cap X_2 \neq \varnothing$) y conteniendo estrictamente H (porque de nuevo por transitividad, existe $g \in G$ tal que $g \cdot H$ sea un elemento de X_1 (lo que asegura que $g \in K$) pero diferente de H (lo que asegura que $g \notin H$)).
Inversamente, si tal subgrupo K de G existe, la relación "$gH \sim g'H$ si $(g')^{-1} g \in K$" está bien definida en $G/\cdot H$ (la definición no depende de los representantes en G de clases gH y $g'H$) y es una relación de equivalencia (inmediata). La partición asociada de $G/\cdot H$ en clases de equivalencia verifica las condiciones de la definición de imprimitividad (por la acción de G sobre $G/\cdot H$) : la partición es no trivial porque K está estrictamente contenido entre H y K ; y si $(\gamma H)K$ es una de estas clases de equivalencia y $g \in G$, entonces $g \cdot (\gamma H)K$ es la clase $(g\gamma H)K$: la acción de G permuta las clases que constituyen la partición de X.

(c) Según el ejercicio 6154, los conjuntos X y $G/\cdot G(x)$ son isomorfos como G-conjuntos. La acción de G sobre X es primitivo si y solo si el de G sobre $G/\cdot G(x)$ es, lo que, según la pregunta anterior, equivale a decir que el fijador $G(x)$ es maximal entre los subgrupos de G.

(d) Sean $x \in X$ y $G(x)$ su fijador. El subgrupo H es normal en G, el conjunto $HG(x)$ es un subgrupo ; es el subgrupo generado por H y $G(x)$. Además, la acción de H sobre G no es trivial, H no está contenido en $G(x)$ y por lo tanto, $HG(x)$ contiene estrictamente $G(x)$. Según la pregunta (c), resulta que $HG(x) = G$. Es fácil comprobar que la aplicación $H/\cdot(H \cap G(x)) \to (HG(x))/\cdot G(x)$ que a toda clase $h(H \cap G(x))$ asocia la clase $hG(x)$ es una biyección (que generaliza el teorema de isomorfismo $HK/K \simeq H/(H \cap K)$ lo cual es cierto bajo la hipótesis suplementaria "K normal" (que asegura que los conjuntos HK/K y $H/(H \cap K)$ son grupos y no conjuntos simples como aquí)). Se obtiene por lo tanto que los conjuntos $H/\cdot(H \cap G(x))$ y $G/\cdot G(x)$ son isomorfos como G-conjuntos (la compatibilidad de acciones es inmediata). Ahora bien, estos dos conjuntos están en biyección con las órbitas de x bajo H y bajo G respectivamente. Conclusión : la acción de H es, como el de G, transitiva en el conjunto X.

Solución del ejercicio 6156 ▲002185

Sea H un subgrupo primitivo de S_n conteniendo una transposición. Se puede suponer que H contiene la transposición $(1\,2)$. El subgrupo generado por el fijador $H(1)$ y $(1\,2)$ contiene estrictamente $H(1)$. Según el ejercicio 6155 (pregunta (c)), este grupo es H.

Se considera el conjunto $\mathscr{O}$ unión de la órbita $H(1)\cdot 2$ de 2 bajo $H(1)$ y del punto aislado $\{1\}$. Para demostrar que $\mathscr{O}$ es la órbita de 2 bajo H, es suficiente demostrar que $2 \in \mathscr{O}$ (lo que es claro) y que $\mathscr{O}$ es estable bajo la acción de H, o, que es equivalente, estable bajo la acción de $H(1)$ y de $(1\,2)$. El elemento 1 es enviado a $1 \in \mathscr{O}$ por los elementos de $H(1)$ y en $2 \in \mathscr{O}$ por $(1\,2)$. El conjunto $H(1)\cdot 2$ es invariable bajo la acción de $H(1)$. En fin, si $h\cdot 2$ denota un elemento arbitrario de $H(1)\cdot 2$, entonces su imagen por la permutación $(1\,2)$ es 2 si $h\cdot 2 = 1$, 1 si $h\cdot 2 = 2$ y $h\cdot 2$ si $h\cdot 2 \neq 1,2$; en todos los casos, la imagen está en $\mathscr{O}$.
Se tiene entonces $\mathscr{O} = H\cdot 2 = H(1)\cdot 2 \cup \{1\}$. La acción de H es transitiva, este conjunto es igual a $\{1,\dots,n\}$ y entonces $H(1)\cdot 2 = \{2,\dots,n\}$ (ya que $1 \notin H(1)\cdot 2$). Esto demuestra que la acción de $H(1)$ sobre $\{2,\dots,n\}$ es transitivo, y así como H actúa transitivamente sobre $\{1,\dots,n\}$ (ejercicio 21).
Para i,j enteros distintos entre 1 y n, choisissons entonces $g \in G$ tal que $g(1) = i$ y $g(2) = j$. Se tiene $g(1\,2)g^{-1} = (g(1)\,g(2)) = (i\,j)$. Esto demuestra que H contiene todas las transposiciones. Conclusión : $H = S_n$.

Solución del ejercicio 6159 ▲002188

Denotemos G el grupo de isometrías del espacio euclidiano de dimensión 3 dejando invariante el conjunto $\{a_1,\dots,a_4\}$ de los 4 vértices de un tetraedro regular. El arreglador $G(a_4)$ actúa transitivamente sobre $\{a_1,a_2,a_3\}$: de hecho, este subgrupo contiene el eje de rotación, la recta que une a_4 al centro de gravedad del triángulo de vértices a_1,a_2,a_3, la cual actúa sobre estos puntos como un 3-ciclo. Según el ejercicio 6157, el grupo G actúa 2-transitivamente sobre $\{a_1,\dots,a_4\}$. Además, $G(a_4)$ contiene una isometría que actúa sobre $\{a_1,\dots,a_4\}$ como una transposición, por ejemplo la simetría con respecto al plano mediador P del segmento $[a_1,a_2]$, la cual intercambio a_1 y a_2 y fijo a_3 y a_4 que están en P. Según el ejercicio 6156, se tiene $G \simeq S_4$.

Denotemos G_+ el subgrupo de G constituido de sus isometrías directas. El grupo G_+ es el núcleo del morfismo $\det : G_+ \to \{1,-1\}$ que a todo $g \in G$ vista como matriz asocia su determinante. Como este morfismo es sobreyectivo (la rotación y la simetría considerada anteriormente son respectivamente directa e indirecta), G_+ es de índice 2. De donde $G \simeq A_4$ ya que A_4 es el único subgrupo de S_4 de índice 2 (ver ejercicio 6146).

Solución del ejercicio 6167 ▲007729

1. Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito E. Entonces el número N de órbitas se calcula por
$$N = \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G}\operatorname{Card}\ \operatorname{Fix}(\phi(g)) = \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{x\in E}\operatorname{Card}\operatorname{Stab}(x).$$
2. El grupo de desplazamientos del tetraedro es isomorfo a $\mathscr{A}_4$. Existe la identidad, los $8 = 4\times 2$ rotaciones de orden 3, cuyo el eje pasa por un vértice y el centro de la cara opuesta, las 3 semi-vueltas (de orden 2) cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas.
3. Se considera el conjunto de coloraciones. Es de cardinal c^4, porque se trata de elegir un color para cada una de las cuatro caras. Sobre este conjunto actúa el conjunto de desplazamientos del tetraedro y las diferentes formas de coloración son las órbitas de esta acción. Por la fórmula de Burnside, basta con determinar el número de coloraciones fijas por cada uno de los movimientos. Para la identidad : c^4. Para las rotaciones de orden 3 : c^2 (si el eje es vertical, las tres caras oblicuas deben tener el mismo color y la cara horizontal debe tener un color.) Para los semi-giros : c^2 (las caras se corresponden de dos en dos.). En conclusión, el número de formas diferentes de colorear es
$$N = \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G}\operatorname{Card}\ \operatorname{Fix}(\phi(g)) = \frac{1}{c^4}(c^4+11c^2) = \frac{1}{c^2}(c^2+11).$$

Solución del ejercicio 6189 ▲002191

El subgrupo $H \subset G$ es normal, G actúa por conjugación sobre H. Como G es un p-grupo, H lo es también y las órbitas no triviales de esta acción son de longitud divisible por p. Se deduce que la unión de las órbitas triviales, es decir el conjunto $H \cap Z(G)$ de puntos fijos, es también de cardinal divisible por p. Como contiene el elemento neutro, el contiene al menos p elementos y por lo tanto, no se reduce al elemento neutro.

Solución del ejercicio 6190 ▲002192

(a) Sea G un p-grupo de orden p^r. Su centro $Z(G)$ es un p-grupo no trivial. Sea $x \in Z(G) \setminus \{1\}$. Si $p^\nu > 0$ es su orden, entonces $x^{p^{\nu-1}}$ es de orden p y en $Z(G)$; por lo tanto se puede suponer que x en sí es de orden p. El grupo $\langle x \rangle$ es normal en G y el grupo cociente $G/\langle x \rangle$ es de orden p^{r-1}. Por hipótesis de recurrencia, para todo $k \leqslant r$, el grupo $G/\langle x \rangle$ tiene un subgrupo normal $\mathscr{H}$ de orden p^{k-1}. Sea H el subgrupo de imágenes recíprocas de $\mathscr{H}$ por sobreyección canónica $G \to G/\langle x \rangle$. El subgrupo H, imagen inversa por un morfismo de un subgrupo normal, es normal en G y $\mathscr{H} = H/\langle x \rangle$, lo que da $|H| = |\mathscr{H}|\,|\langle x \rangle| = p^k$.

Solución del ejercicio 6191 ▲002193

Como p divide $|G|$, existe en G un elemento s de orden p. El subgrupo $H = \langle s \rangle$, de índice 2, es necesariamente normal en G. Es también el único subgrupo de orden p (ver el ejercicio 6096).
De manera general, un automorfismo χ de un grupo cíclico $\langle \zeta \rangle$ de orden p está determinado por $\chi(\zeta) = \zeta^{i_\chi}$ y este automorfismo es de orden 2 si y solo si $i_\chi^2 \equiv 1$ [mod p], es decir si $\chi(\zeta) = \zeta$ o $\chi(\zeta) = \zeta^{-1}$ lo que corresponde a los dos automorfismos “identidad” y “pasaje a la inversa” (que p sea primo no entra en juego aquí ; el resultado es válido para todo entero $p \geqslant 1$).
Sea $t \in G$ de orden 2 (que existe porque 2 divide $|G|$). La conjugación por t induce un automorfismo del subgrupo normal H. De acuerdo con lo anterior, se tiene $tst^{-1} = s$ o bien $tst^{-1} = s^{-1}$. En el primer caso, la correspondencia $(s^i, t^\varepsilon) \to s^i \cdot t^\varepsilon$ ($i = 0, 1, 2$ y $\varepsilon = \pm 1$) induce un morfismo entre el producto directo $\langle s \rangle \times \langle t \rangle$ y G, que es inyectiva (pues $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \{1\}$) y por lo tanto, es biyectiva (ya que los grupos de salida y llegada tienen el mismo orden $2p$). En este caso se tiene por lo tanto $G \simeq \mathbb{Z}/p\,z \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ cíclico. En el otro caso, G es no conmutativo (ya que $tst^{-1} = s^{-1} \neq s$) ; es engendrado por s y t que controlan las relaciones $s^p = 1$, $t^2 = 1$ y $tst^{-1} = s^{-1}$. En este caso G es isomorfo al grupo diédrico $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de orden $2p$.

Solución del ejercicio 6192 ▲002194

(a) El grupo G no siendo abeliano no es cíclico de orden 8 y tiene al menos un elemento $a \neq 1$ que no es de orden 2 (ver el ejercicio 6036). Este elemento es necesariamente de orden 4. El subgrupo $H = \langle a \rangle$ es normal, pues es de índice 2.

(b) Se supone que existe $b \in G \setminus H$ de orden 2 y se escribe $K = \langle b \rangle$. Se tiene $H \cap K = \{1\}$, pues $b \notin H$. El subgrupo H es normal en G, es inscribible que $HK/H \simeq K$, lo que da $|HK| = |H|\,|K| = 8$ y entonces $G = HK$. Además, la inclusión $K \subset G$ es una sección de la sucesión exacta $1 \to H \to G \to K \to 1$. El grupo G es, por lo tanto isomorfo al producto semidirecto de H por K. La acción sobre H del generador b de orden 2 de K está necesariamente dado por el pasaje a la inversa (ver ejercicio 6191).

(c) En caso contrario a (b), todos los elementos de $G \setminus H$ son necesariamente de orden 4. Los elementos de G de orden 2 están por lo tanto en H, que solo tiene uno : a^2, que se denota -1.
El centro $Z(G)$ es de orden diferente de 1, pues G es un 2-grupo y diferente de 8, pues G es no abeliano. Tampoco es de orden 4, porque entonces tendríamos $G = Z(G) \cup xZ(G)$, para un $x \in G \setminus Z(G)$, pero entonces

G es abeliano. El centro $Z(G)$ es, por lo tanto de orden 2. De acuerdo con lo anterior $Z(G) = \{1, -1\}$.
Sea $b \in G \setminus H$. Entonces G es generado por a y b. Por otra parte b es de orden 4 y b^2 de orden 2, lo que implica $b^2 = -1$. La conjugación por b induce un automorfismo del subgrupo normal $\langle a \rangle$; por lo tanto se tiene $bab^{-1} = a^{-1}$, el único otro caso $bab^{-1} = a$ es excluido porque G no abeliano. Entonces se obtiene fácilmente que si $ab = c$, se tiene $c^2 = -1$ ($c^2 = abab = aa^{-1}bb = b^2 = -1$) y $ba = -ab = -c$, $bc = -cb = a$, $ca = -ac = b$.

Solución del ejercicio 6194 ▲002196

(a) Se tiene $\theta(g)(xH) = gxH$ $(g, x \in G)$. El núcleo de θ es la intersección de todos los conjugados xHx^{-1} de H, es decir según los teoremas de Sylow, la intersección de todos los 3-Sylow de G. Como la intersección de dos 3-Sylow distintos es trivial, el núcleo es $\neq \{1\}$ si y solo si solo existe un 3-Sylow, que es luego automáticamente normal G.
Si H es no normal en G, entonces θ es inyectiva y proporciona un isomorfismo entre G y un subgrupo de S_4. Este subgrupo debe ser del orden 12 como G, es necesariamente A_4 (ver el ejercicio 6146).

(b) Si G no es isomorfo a A_4, entonces necesariamente H es normal en G y es entonces el único 3-Sylow de G. Denotemos $1, a, a^2$ los tres elementos distintos del grupo cíclico H.
Se supone que G contiene un elemento b de orden 4. Se tiene $b^4 = a^3 = 1$. Por otra parte, la conjugación por b dejando invariante el subgrupo normal $H = \langle a \rangle$, el elemento bab^{-1} debe ser un generador de $\langle a \rangle$, es decir a o a^{-1}. Pero la primera posibilidad queda excluida porque si no b está en el centro de G y G es abeliano (ver ejercicio 6100). La segunda posibilidad existe : se toma por ejemplo para G el producto semi-directo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, donde la acción de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ se realiza mediante sobreyección canónica $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, es decir las clases de 0 y 2 módulo 4 actúa como la identidad y las de 1 y 3 como el pasaje a la inversa.
Se supone, por el contrario, que ningún elemento de $G \setminus H$ sea de orden 4. Los 2-Sylow son, por lo tanto isomorfos al grupo de Klein $\mathbb{Z}/2\,z \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Además, dos conjuntos cualesquiera B y B' de entre ellos son forzosamente de intersección no trivial porque si no el conjunto producto BB' (que está en biyección con $B \times B'$ por $(b, b') \to bb'$) es de cardinal $|B|\,|B'| = 16 > 12$. Por lo tanto, existe estrictamente menos de $3 \times 3 = 9$ elementos de orden 2 en G. Como $G \setminus H$ es de cardinal 9, existe en G un elemento c de orden $\neq 2$. Este elemento tampoco puede ser de orden 3 (H es el único 3-Sylow), ni de orden 4 (por hipótesis) es de orden 6. El grupo $\langle c \rangle$ es entonces de índice 2 y por lo tanto, normal en G. Como $\langle c \rangle$ es cíclico, solo tiene un elemento de orden 2. Por lo tanto, se puede encontrar en un 2-Sylow de G un elemento $d \in G \setminus \langle c \rangle$ de orden 2. La conjugación por d induce un automorfismo de $\langle c \rangle$ que envía c en un generador de $\langle c \rangle$, es decir o bien c o bien c^{-1}. Pero la primera posibilidad queda excluida porque G no es abeliano. Se tiene entonces $dcd^{-1} = c^{-1}$; el grupo G es en este caso isomorfo al grupo diédrico D_6.

(c) Los grupos de orden 12 son
– los grupos abelianos : $\mathbb{Z}/3Z \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y
– los grupos no abelianos : A_4, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (para la acción dada arriba) y D_6.

Solución del ejercicio 6196 ▲002198

El grupo P es un p-sub grupo maximal de G y por lo tanto, también HP ya que $P \subset HP$ (notar que HP es un subgrupo porque H se supone normal en G); P es, por lo tanto un p-Sylow de HP.
Si $|P| = p^n$, entonces $|HP| = p^n s$, con p no dividiendo s. También se puede escribir $|H| = p^m r$, con p no dividiendo r; se tiene entonces necesariamente $m \leqslant n$ y s múltiplo de r. También se tiene $HP/H \simeq P/(H \cap P)$, lo que da $|H \cap P| = |P||H|/|HP| = p^m(r/s)$. Se obtiene por lo tanto que $s = r$ y que $H \cap P$ es un p-Sylow del grupo H.

También se tiene $|G| = p^n t$, con p no dividiendo t y t múltiplo de s. Se deduce $|G/H| = p^{n-m}(t/r)$. Como

t/r es un entero no divisible por p y que HP/H es un subgrupo de G/H de orden $|HP/H| = p^{n-m}$, el grupo HP/H es un p-Sylow de G/H.

Solución del ejercicio 6197 ▲002199

De acuerdo a los teoremas de Sylow, el número de 5-Sylow de un grupo de orden $200 = 5^2 \cdot 2^3$ es $\equiv 1$ [mod 5] y divide a 8. Este solo puede ser 1. El único 5-Sylow es necesariamente normal ya que sus conjugados son los 5-Sylow y coinciden, por lo tanto con él. El grupo no puede ser simple.

Solución del ejercicio 6198 ▲002200

Los p-Sylow de S_p son de orden p ya que p, al ser primo, no divide $p!/p = (p-1)!$. Cada p-Sylow es, por lo tanto cíclico de orden p y contiene $p-1$ elementos de orden p. Los elementos de orden p de S_p son los p-ciclos ; hay $(p-1)!$. Por lo tanto hay $(p-2)!$ p-Sylow. (Se encuentra el teorema de Wilson : $(p-2)! \equiv 1$ [mod p] (o $(p-1)!+1 \equiv 0$ [mod p]) si p es primo).

Solución del ejercicio 6200 ▲002202

El grupo alternante A_5 es de orden $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
Los 5-Sylow son orden 5, por lo tanto cíclicos ; cada uno es engendrado por un 5-ciclo y contiene cuatro 5-ciclos. Los 5-Sylow son dos a dos de intersección reducidos a $\{1\}$. Como hay 24 5-ciclos en A_5, hay 6 5-Sylow. (También se pueden usar los teoremas de Sylow : El número de 5-Sylow es $\equiv 1$ [mod 5] y divide 12 ; es, por lo tanto 1 o 6. Como este no puede ser 1 (porque entonces habría un único 5-Sylow que es normal, lo cual es imposible porque A_5 es simple), es 6.) (También se puede ver más sencillamente que el subgrupo generado por un ciclo de 5 es un 5-Sylow y que no se normal)
Los 3-Sylow son orden 3, por lo tanto cíclicos ; cada uno es engendrado por un 3-ciclo y contiene 2 3-ciclos. Los 3-Sylow son dos a dos de intersección reducidos a $\{1\}$. Como hay 20 3-ciclos en A_5, hay 10 3-Sylow. (Por los teoremas de Sylow : el número de 3-Sylow es $\equiv 1$ [mod 3] y divide 20 ; es, por lo tanto 1, 4 o 10. Como anteriormente, no puede ser 1. Si es 4, la conjugación de A_5 en estos 3-Sylow induce un morfismo $A_5 \to S_4$ no trivial (ya que esta acción por conjugación es transitiva) y por lo tanto, inyectiva (porque el núcleo, normal, es forzosamente trivial). Pero el orden de A_5 no divide al de S_4. Por lo tanto hay 10 3-Sylow.)
Los 2-Sylow son orden 4, por lo tanto conmutativos. Como no hay ningún elemento de orden 4 en A_5, cada 2-Sylow es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; es generado por dos productos de dos transposiciones que conmutan y contiene 3 elementos de orden 2. Entonces se ve que estos tres elementos de orden 2 son los 3 productos de dos transposiciones que conmutan que se pueden formar con cuatro elementos de $\{1,\dots,5\}$. Se deduce que los 2-Sylow son dos a dos de intersección reducidos a $\{1\}$. Hay 15 elementos de orden 2 en A_5 y hay 5 2-Sylow.
Todo elemento de A_5 es de orden 1, 2, 3 o 5 y por lo tanto, está contenido en un p-Sylow. Se tiene $6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1 = 60$.

Solución del ejercicio 6201 ▲002203

(a) El número de 5-Sylow en un grupo G de orden $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ es $\equiv 1$ [mod 5] y divide 12. Como G se supone simple, no puede ser 1 ; hay por lo tanto, 6 5-Sylow. El morfismo $\alpha : G \to S_6$ correspondiente a la acción de G por conjugación en los 5-Sylow (una vez una numeración de los 5-Sylow de G escogida) es forzosamente inyectiva, ya que su núcleo, es un subgrupo normal diferente de G (según los teoremas de Sylow, G actúa transitivamente sobre 5-Sylow), es necesariamente trivial. Se considera entonces el grupo $\alpha^{-1}(A_6)$. Es un subgrupo normal de G (como imagen inversa por un morfismo del subgrupo normal A_6 de

S_6). Si $\alpha^{-1}(A_6) = \{1\}$, entonces, para todo $g \in G$, como $\alpha(g^2) = \alpha(g)^2 \in A_6$, se tiene $g^2 = 1$ y entonces G abeliano, lo que es absurdo. Se tiene entonces $\alpha^{-1}(A_6) = G$, es decir $\alpha(G) = H \subset A_6$.

(b) Denotemos $\varphi : A_6 \to S_6$ el morfismo correspondiente a la acción de A_6 por traslación a la izquierda en $A_6/.H$ (una vez una numeración de los elementos de $A_6/.H$ escogida). Usando la simplicidad de A_6, se demuestra como arriba que φ es inyectiva y que $\varphi(A_6) \subset A_6$. Resulta que φ es un isomorfismo entre A_6 y $\varphi(A_6) = A_6$.

(c) Un elemento $x \in A_6$ fija la clase neutra H si y solo si $x \in H$. Se obtiene que H es isomorfo, *a través de* φ, al fijador de un entero, digamos 6, en la acción de A_6 sobre $\{1,\dots,6\}$, es decir a $A_6 \cap S_5 = A_5$.

Solución del ejercicio 6204 ▲002206

El número de q-Sylow de un grupo G de orden p^2q es $\equiv 1$ [mod q] y divide p^2. No puede ser ni p ni p^2, pues $p^2 - 1$ se supone no divisible por q; es, por lo tanto 1. Así mismo el número de p-Sylow es $\equiv 1$ [mod p] y divide q y no puede ser q, pues $q - 1$ se supone no divisible por p; es, por lo tanto 1. Así existe un único p-Sylow P de orden p^2, y por lo tanto, abeliano, y un único q-Sylow Q de orden q, ambos necesariamente normales. Resulta que todo elemento $x \in P$ conmuta con todo elemento $y \in Q$: de hecho, el conmutador $xyx^{-1}y^{-1} = (xyx^{-1})y^{-1} = x(yx^{-1}y^{-1})$ está en la intersección $P \cap Q$ que es el grupo trivial. Esto demuestra que el grupo PQ es abeliano; es isomorfo al producto directo $P \times Q$ y es, por lo tanto de cardinal $|P|\,|Q| = p^2q = |G|$. De donde finalmente $G = PQ$ es abeliano.

Solución del ejercicio 6205 ▲002207

Sea G un grupo de orden p^2q que se supone simple. Se distinguen dos casos :

1er caso : $p > q$. El número de p-Sylow de G es $\equiv 1$ [mod p] y divide q. Como G es simple, no puede ser 1 (porque si no el único p-Sylow es normal). Por lo tanto hay q p-Sylow de orden p^2, que son conjugados. La acción por conjugación de G en estos q p-Sylow define un morfismo $G \to S_q$ no trivial (porque la acción es transitiva) y por lo tanto inyectiva porque el núcleo, normal y distinto de G, es forzosamente trivial. Se deduce que p^2q divide $q!$ y entonces p divide un entero entre 1 y $q-1$, lo que contradice la hipótesis $p > q$.

2o caso : $p < q$. El número de q-Sylow de G es $\equiv 1$ [mod q] y divide p^2. Como anteriormente, G es simple, no puede ser 1. No puede ser ni p ni p^2. En efecto, en el caso contrario, p es $\equiv \pm 1$ [mod q] y entonces $p \geqslant q-1$. Como $p < q$, la única posibilidad es $p = q-1$ y entonces $p = 2$ y $q = 3$. En este último caso, hay 4 3-Sylow de orden 3 que contienen 8 elementos de orden 3. Solo queda espacio para uno 2-Sylow que debe ser normal. Este último caso por lo tanto tampoco es posible.

Conclusión : no existe grupo G simple de ordenar p^2q.

Solución del ejercicio 6206 ▲002208

(a) El número de 19-Sylow de G es $\equiv 1$ [mod 19] y divide 21 ; solo puede ser 1. El grupo G por lo tanto tiene un único 19-Sylow P que es normal.

(b) Como P es normal en G, $N = PQ$ es un subgrupo de G. De $P \cap Q = \{1\}$, se deduce que $PQ/P \simeq Q$ y así como PQ es de orden $7 \cdot 19 = 133$. Según el ejercicio 15, el grupo N es isomorfo al producto directo $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, que es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$ por el lema chino.

(c) El número de 7-Sylow de G es $\equiv 1$ [mod 7] y divide 57. Las únicas posibilidades son 1 y 57. Pero no es 1 tampoco, porque suponemos que Q no es normal. El grupo G admite entonces 57 7-Sylow, y así 57 subgrupos cíclicos de orden 133 por la pregunta precedente. Estos 57 grupos de orden 133 son distintos porque dos 7-Sylow distintos generan con P dos grupos cíclicos de orden 133 distintos porque el 7-Sylow es el único subgrupo de orden 7 del grupo cíclico. Por lo tanto, sus conjuntos de generadores son dos a dos disjuntos. Se obtiene así $57\times\phi(133)=57\times 6\times 18$ elementos de orden 133 en G (ϕ designa aquí la función indicatriz de Euler), lo que es evidentemente absurdo. Por lo tanto, se puede concluir que Q es normal en G y que el único subgrupo cíclico $N=PQ$ de orden 133 lo es también.

(d) Como N es normal en G, NR es un subgrupo de G. De $N\cap R=\{1\}$, se deduce que $NR/N\simeq R$ y así como NR es de orden $133\cdot 3=399$. Así $G=NR$ y el isomorfismo anterior $G/N\simeq R$ demuestra que la inclusión $R\to G$ es una sección de la sucesión exacta $1\to N\to G\to R\to 1$. El grupo G es, por lo tanto isomorfo al producto semidirecto del grupo cíclico N de orden 133 por el grupo cíclico R de orden 3.

Solución del ejercicio 6209 ▲007740

1. Se denota O el centro de gravedad de $\mathscr{P}_n$. En D_n, todas las isometrías, que son afines, conservando el centro de gravedad. Entonces no existe simetría de traslación o deslizamiento. Hay n rotaciones de centro O y de ángulo $2k\pi/n$, con $k=0,\dots,n-1$. Si n es par, hay $n/2$ simetrías ortogonales de eje (OS) por cada vértice S y $n/2$ simetrías de eje mediador de uno de los n lados. Si n es impar, hay n simetrías de eje mediador de uno de los n lados.
2. Se considera la acción de D_n en el conjunto finito de n vértices de $\mathscr{P}_n$. Utilizando las rotaciones de centro O y de ángulo $2k\pi/n$, se demuestra que la acción es transitiva. El estabilizador de un vértice S es el subgrupo de orden 2 generado por la simetría del eje ortogonal (OS), donde O es el centro del polígono. Por la segunda fórmula de clases, D_n es de orden $2n$. La lista precedente es, por lo tanto completa.
3. Como n es impar, los 2-Sylow son orden 2. Estos son los subgrupos generados por las simetrías ortogonales. Si s es una simetría de eje d y r la rotación de centro O y de ángulo $2k\pi/n$, rsr^{-1} es la simetría de eje $r(d)$. Como n es impar, el grupo formado por r actúa transitivamente sobre los ejes de simetría. Todas las simetrías son, por lo tanto conjugadas.
4. Los 2-Sylow son orden 4 en D_6 de orden $2^2\times 3$. El grupo generado por dos simetrías de eje ortogonal (que conmutan) es de orden 4. Conjugando por rotación de centro O y de ángulo $2\pi/6$, se obtiene otro 2-Sylow. Los 2-Sylow no son, por lo tanto normales. El número de 2-Sylow es congruente a 1 módulo 2 y divide 12 y no es 1. Por lo tanto hay tres 2-Sylow.
5. El conjugado, por un ángulo de rotación $2k\pi/6$ o por una simetría, de una simetría del eje mediador en un lado es una simetría del eje mediador en un lado. Las simetrías de eje mediador de un lado y las simetrías de eje pasando por un vértice (que difieren porque 6 es par) por lo tanto no son conjugados en D_6.
6. El subgrupo generado por una rotación de ángulo $4\pi/6$ es de orden 3 y es un 3-Sylow.

Solución del ejercicio 6210 ▲007741

Los órdenes de los elementos de G son $3,11$ o 33. Una aplicación directa del teorema de Sylow muestra que solo se tiene un grupo de orden 11 y solo un grupo de orden 3. Los elementos de orden 3 y 11 están contenidos en estos dos grupos. Se tiene a lo sumo

$$1+(3-1)+(11-1)=1+2+10=13$$

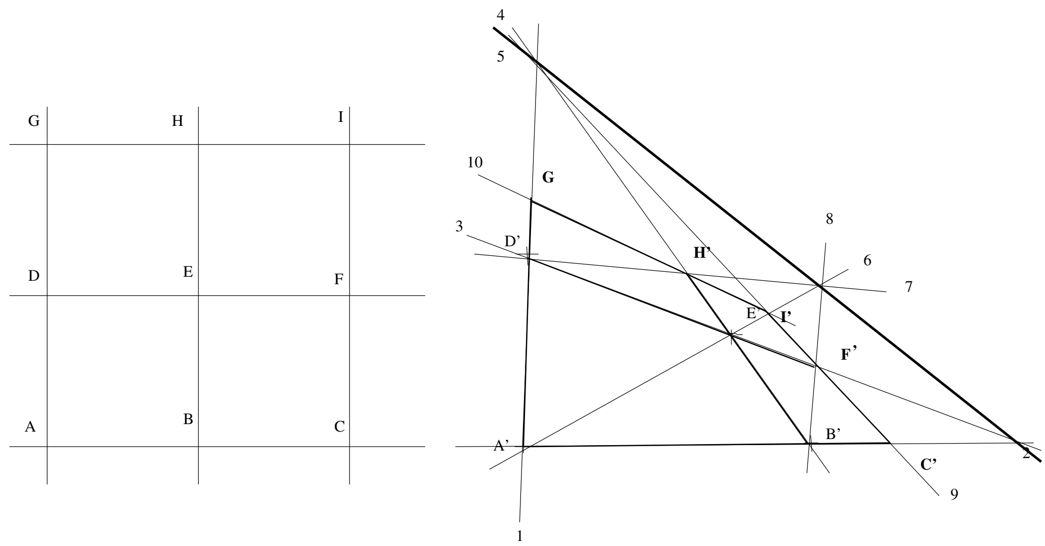
elementos de orden $1,3$ o 11. Existe por lo tanto un elemento de orden 33 en G que por lo tanto es cíclico isomorfo a $\mathbf{Z}/33\mathbf{Z}$.

Solución del ejercicio 6295 ▲007738

1. El grupo $\mathscr{A}_6$ es simple y por lo tanto, no tiene subgrupos normales. De manera más elemental,
$$(1,2)(3,4)\circ(3,4)(1,5) = (1,2)(1,5) = (1,5,2)$$
y el conjunto propuesto no es, por lo tanto un subgrupo.
2. La intersección de dos espacios vectoriales F y G de dimensión 3 en un espacio vectorial E de dimensión 4 es un subespacio vectorial de dimensión $\dim F+\dim G-\dim(F+G) = 6-\dim(F+G)$, con $3 \leqslant \dim F+G \leqslant \min(\dim E, \dim F+\dim G) = 4$, por lo tanto es 3, o es 2. La intersección de dos planos proyectivos de $\mathbb{P}^3$ es, por lo tanto un plano proyectivo o una recta proyectiva. La intersección de dos espacios vectoriales F y G de dimensión 3 en un espacio vectorial E de dimensión 5 es un subespacio vectorial de dimensión $\dim F+\dim G-\dim(F+G) = 6-\dim(F+G)$, con $3 \leqslant \dim F+G \leqslant \min(\dim E, \dim F+\dim G) = 5$, por lo tanto es 3, o 2, o 1. La intersección de dos planos proyectivos de $\mathbb{P}^3$ es, por lo tanto un plano proyectivo, es una recta proyectiva, o es un punto.
3. Como una homografía se caracteriza por la imagen de una referencia proyectiva, es suficiente tomar cinco puntos A, B, C, D E dos a dos distintos : no existe homografía que fije A, B y C y que intercambia D y E por ejemplo. Si no, se elige un marco proyectivo y coordenadas homogéneas. Los puntos de coordenadas $A[1,0], B[0,1], C[1,1]$ y $D[2,1]$ tienen por bicociente 2, entonces que las de coordenadas $A[1,0], B[0,1], C[1,1]$ y $E[3,1]$ tienen por bicociente 3. En consecuencia, para todo punto M los quíntuples
$$(A,B,C,D,M) \text{ y } (A,B,C,E,M)$$
no son imágenes el uno del otro en ninguna homografía.

Solución del ejercicio 6298 ▲007744

1.



2. No, es necesario al menos tener la imagen de un sistema de referencia proyectivo.

Solución del ejercicio 6299 ▲007745

---

1. Como F admite una recta d de puntos fijos, f fija todas las rectas de un plano. Por tanto, es en restricción a este plano, una homotecia. Incluso, si se divide por este cociente no nulo, se puede asumir que f es la identidad en este plano.

2. La aplicación f es entonces ya sea una homotecia, ya sea una transvección. En el primer caso, con un marcador adecuado, todo punto de coordenadas (X,Y,Z) y su imagen de coordenadas $(X,Y,\lambda Z)$ son coplanares con el punto de coordenadas $(0,0,1)$. En el segundo caso, todo punto de coordenadas (X,Y,Z) y su imagen de coordenadas $(X,Y+Z,Z)$ son coplanares con el punto de coordenadas $(0,1,0)$. Se deduce que por lo tanto la existencia de un centro O.
3. Se elige un marco proyectivo de P^2 compuesto de M_1 y M_2 sobre d, luego $M_3 = O$ y como punto unidad $M_4 = A$. Se obtiene un marco tal que d tiene la ecuación $Z = 0$ y O, por coordenadas homogéneas $[0:0:1]$ y A, por coordenadas homogéneas $[1:1:1]$. Denotemos $[x:x:z]$ las coordenadas homogéneas de A' alineado con O y A, con $x \neq 0$, pues $A' \neq O$ y $z \neq 0$, pues $A' \notin d$. Se puede entonces normalizar con $A'[1:1:z]$. Como d debe quedar fijo por la homografía deseada $P(f)$, incluso si se debe normalizar, se puede asumir que f es la identidad en $\mathrm{vect}(e_1,e_2)$. Como $P(f)(A) = A'$, $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+f(e_3)$ es proporcional a $e_1+e_2+ze_3$. Entonces, $f(e_3) = ze_3$.
   Recíprocamente, esta aplicación f satisface las condiciones requeridas (ver el caso de la dilatación).
4. Denotemos ϕ la homografía de recta fija d de centro O que envía P sobre P'. Se verifica sucesivamente que envía P sobre P', Q sobre Q', P' sobre P y en fin Q' sobre Q. Coincide con H en un sistema de referencia proyectivo por lo tanto en todas partes.

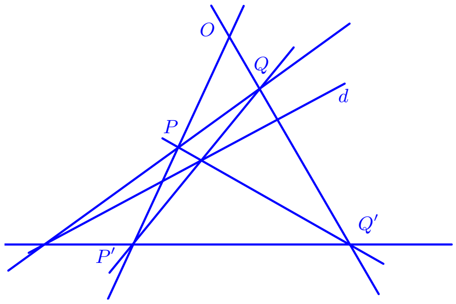


Figura 3

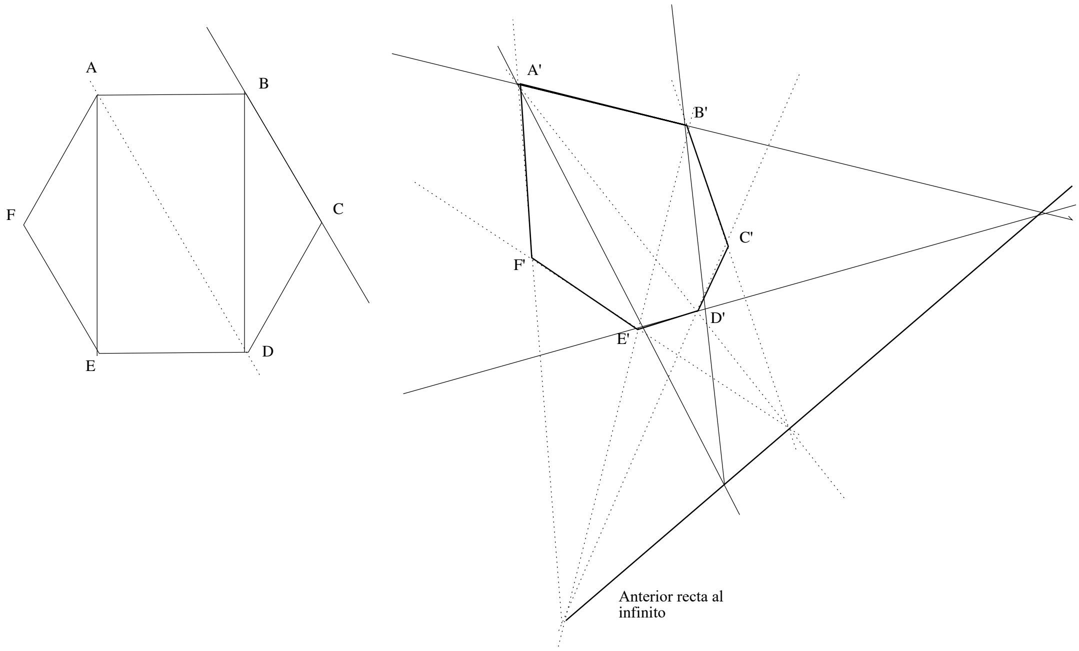
Solución del ejercicio 6300 ▲007746

---

1. Decir que F y F' tienen los mismos puntos fijos equivale a decir que f y f' tienen las mismas direcciones propias $d_1 = \mathrm{vect}(v_1)$ y $d_2 = \mathrm{vect}(v_2)$. Las matrices de f y f' en la base (v_1,v_2) son diagonales y por lo tanto, conmutan, lo que implica F y F' conmutan.
2. Como $\dim(E) = 2$, un elemento de $\mathrm{Gl}(E)$ que tiene tres direcciones propias distintas es una homotecia y por lo tanto, induce la identidad en $P(E)$.
3. Se utiliza la conmutatividad : $F(F'(A)) = F \circ F'(A) = F' \circ F(A) = F'(A)$, por lo tanto $F'(A)$ es un punto fijo de F. Igualmente $F'(B)$ es un punto fijo de F, $F(A')$ es un punto fijo de F' y $F(B')$ es un punto fijo de F'. Se deduce $\{F'(A),F'(B)\} = \{A,B\}$ y $\{F(A'),F(B')\} = \{A',B'\}$ ya que F y F' cada uno tiene solo dos puntos fijos.
4. F solo tiene dos puntos fijos (pues $F \neq \mathrm{Id}_\Delta$ ya que $F^2 \neq \mathrm{Id}_\Delta$), como A' y B' son distintos (por hipótesis sobre F') y son fijos por F, se tiene el resultado deseado.
5. F^2 solo tiene dos puntos fijos, ya que $F^2 \neq \mathrm{Id}_\Delta$. Bajo la hipótesis, A' y B' son puntos fijos de F^2, distintos por hipótesis sobre F', entonces el conjunto de puntos fijos de F^2 es $\{A',B'\}$. Por otra parte A y B son así fijos por F^2 porque fijos por F y $A \neq B$ por hipótesis sobre F, entonces el conjunto de puntos fijos de F^2 es $\{A,B\}$. En fin, por transitividad de la igualdad, $\{A',B'\} = \{A,B\}$. Se ha así obtenido un absurdo, porque se supone que F intercambia A' y B' y se ha obtenido que los fija.
6. Se tiene siempre la situación prevista en 4., y F y F' tienen los mismos puntos fijos.

Solución del ejercicio 6310 ▲007756

Sean seis puntos $A, B, \ldots F$ del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $ABCDEF$ sea un hexágono regular.



Dadas las imágenes $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $D' = h(D)$ y $E' = h(E)$ por una homografía h de $P^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, para construir las imágenes de los otros puntos con una regla, se comienza por determinar la recta anterior en infinito, determinando los puntos de intersección de la imagen del par de rectas paralelas.

Solución del ejercicio 6401 ▲007723

El teorema de Sylow da que este número N es congruente a 1 módulo 5 y divide 24. Es entonces 1 o 6. Como $(12)(12345)(12) = (21345)$ no está en el 5-Sylow (de orden 5) $\langle(12345)\rangle$ hay un 5-Sylow no normal. Así, $N = 6$.

Solución del ejercicio 6403 ▲007725

1. Como el único elemento no nulo de $\mathbb{F}^2$ es 1, $SL(4, \mathbb{F}^2) = \mathrm{GL}(4, \mathbb{F}_2)$. El centro de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{F}_2)$ compuesto de homotecias invertibles se reduce, por lo tanto, tanto a la identidad como a la de $SL(4, \mathbb{F}_2)$. Así, $|PSL(4, \mathbb{F}^2)| = |\mathrm{GL}(4, \mathbb{F}^2)| = (2^4-1)(2^4-2)(2^4-2^2)(2^4-2^3) = 15 \times 14 \times 12 \times 8 = 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^6$.
2. Estas dos matrices son de orden 2. No son conjugados porque la dimensión de los espacios propios de los valores propios 1 no es la misma para los dos.
3. Todos los elementos de $\mathbb{F}_4^\times$ son raíces 3-ésima de unidad por el teorema de Lagrange. En consecuencia, todas las homotecias invertibles están en el centro de $SL(3, \mathbb{F}_4)$. Así, $|PSL(3, \mathbb{F}^4) = \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_4)/(3 \times 3) = (4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)/9 = 63 \times 60 \times 48/9 = 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^6$.
4. (a) $P(f^3) = F^3 = F$, pues F es una involución. $g = f^3$ por lo tanto no es la identidad, pero $g^2 = f^6 = (f^2)^3 = \mathrm{Id}$, pues f^2 está en el centro de $SL(3, \mathbb{F}_4)$ que es de orden 3.
   (b) El cuerpo $\mathbb{F}_4$ es de característica 2. $(g - \mathrm{Id})^2 = g^2 - 2g + \mathrm{Id} = 0$. En consecuencia, $\dim \mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}) \leqslant \dim\ker(g - \mathrm{Id})$ y $\dim \mathrm{Im}(g - \mathrm{Id}) + \dim\ker(g - \mathrm{Id}) = 3$. Como $g \neq \mathrm{Id}$, $\dim\ker(g - \mathrm{Id}) = 2$.

(c) Así g es un elemento de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ que admite un plano de puntos fijos. Es por lo tanto una transvección.

5. En $PSL(4,\mathbb{F}_2)$, existen al menos dos clases de conjugación de elementos de orden 2 por la pregunta 1. En $SL(3,\mathbb{F}_4)$ como todas las transvecciones son conjugadas, la pregunta 4 permite afirmar que solo hay una clase de conjugación de elementos de orden 2. Por lo tanto, los dos grupos no son isomorfos.

Solución del ejercicio 6413 ▲002249

Curso... No, los roles de las dos operaciones no son intercambiables, porque uno es distributivo respecto al otro.

Solución del ejercicio 6414 ▲002250

1. Una sola solución $x = a^{-1}(c-b)$
2. No de solución, y dos soluciones. Cuidado, en $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, no se puede invertir 2. Escribir $2x = 3+10k$, para obtener que $2|3$, y $2x = 6+10k$, para simplificar por 2... En $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 6415 ▲002251

1. Escribir $(0+a)a = a\cdot a$ por un lado (0 es neutro para $+$) y $(0+a)\cdot a = 0\cdot a + a\cdot a$ (distributividad).
2. $(-1)\cdot a + a = (-1+1)\cdot a = 0\cdot a = 0$ (distributividad, luego la pregunta anterior)
3. Si $|A| = 1$, $1 = 0$. Si $1 = 0$, $\forall a \in A, a = 1\cdot a = 0\cdot a = 0$, por lo tanto $A = \{0\}$.

Solución del ejercicio 6416 ▲002252

1. Si $xy \in A^\times$, sea $z \in A, (xy)z = 1$. Entonces $x(yz) = 1$ y $(zx)y = 1$, por lo tanto x y y son invertibles.
2. Sea $x \in A^\times$, y $y \in A, xy = 0$. Entonces $x^{-1}xy = y = 0$. Así x no es divisor de 0.

Solución del ejercicio 6417 ▲002253

Sea $a \in A\setminus\{0\}$ y sea $\phi_a : A \to A, x \mapsto ax$. Si $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, entonces $ax = ay$. Pero $ax = ay$ si y solo si $a(x-y) = 0$, por lo que $a \neq 0$ y A es íntegro, por lo tanto $x = y$. Así ϕ_a es inyectiva de A en A. Como A es finito, es así también sobreyectiva : $\exists x \in A, \phi_a(x) = 1$.

Solución del ejercicio 6418 ▲002254

Estos son todos anillos. Demostrar que A es estable por la suma, pasando al opuesto, contiene 0, es estable bajo multiplicación y contiene 1. El resto (asociatividad y distributividad) es automático ya que se trata de las restricciones de las operaciones usuales en $\mathbb{C}$)

1. A es el conjunto de números cuya expansión decimal se detiene ("número finito de cifras luego de la coma). Estabilidad por adición : Sea $x = 10^{-n}a$ y $y = 10^{-m}b$. Se supone por ejemplo que $n \geqslant m$. Entonces $x+y = 10^{-n}(a+10^{n-m}b)$ y $a+10^{n-m}b \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $x+y \in A$. Los otros controles son análogos. No es un cuerpo : 3 no es invertible, porque si $3\cdot 10^{-n}a = 1$, entonces $3a = 10^n$, por lo tanto $3|10^n$, lo que es imposible. Un elemento es invertible si y solo si es de la forma $10^{-n}2^\alpha 5^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

2. Estabilidad por adición : Sea $x = \frac{a}{b} \in A$ y $y = \frac{c}{d} \in A$, con $\operatorname{mcd}(a,b) = \operatorname{mcd}(c,d) = \operatorname{mcd}(p,b) = \operatorname{mcd}(p,d) = 1$. Entonces $x+y = \frac{ad+bc}{bd}$. No es un cuerpo : p no es invertible. Un elemento es invertible si y solo si no es múltiplo de p.
3. No es un cuerpo : 2 no es invertible. Los únicos elementos invertibles son $1, -1, i, -i$. En efecto, si $z \in A^{\times}$, entonces $|z| \geqslant 1$ y $|z^{-1}| \geqslant 1$. Entonces $|z| = 1$ y $z \in \{\pm 1, \pm i\}$. Recíprocamente, estos elementos son de hecho todos invertibles.

Solución del ejercicio 6425 ▲002300

$1 \in I+J$, por lo tanto $\exists (x,y) \in I \times J, 1 = x+y$. Multiplicando esta ecuación por x, se obtiene $x^2+xy = x$. Se deduce que $xy \in I$, por lo tanto $\forall p \in \mathbb{N}$; $x^p y \in I^p$, y entonces $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $x^p y^q \in I^p$. Por simetría, se tiene también $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $x^p y^q \in J^q$.
Sea ahora $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Denotemos $N = 2\sup(m,n)$. Entonces $1 = 1^N = (x+y)^N = \sum_{p+q=N} C_N^p x^p y^q$. Como : $(p+q = 2N) \Rightarrow (p \geqslant n \text{ o } q \geqslant m)$, todos los términos de esta suma están en I^n o en J^m, y entonces $1 \in I^n + J^m$.

Solución del ejercicio 6426 ▲002301

1. $3, 5, 7, 11$ son dos a dos primos entre sí, por lo que la solución es única módulo $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.
$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 13 \bmod 15 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 88 \bmod 105 \\ x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 508 \bmod 1155. \end{cases}$$
2. Un divisor común de 2001 y 2002 divide su diferencia, y entonces $\operatorname{mcd}(2001, 2002) = 1$. Igualmente, $\operatorname{mcd}(2002, 2003) = 1$, y como $2 \nmid 2001$, $\operatorname{mcd}(2001, 2003) = 1$. $2001, 2002, 2003$ son pues dos a dos primos entre sí, y la solución es, por lo tanto única módulo $2001 \cdot 2002 \cdot 2003$.
$$\begin{cases} x \equiv 997 \bmod 2001 \\ x \equiv 998 \bmod 2002 \\ x \equiv 999 \bmod 2003 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -1004 \bmod 2001 \\ x \equiv -1004 \bmod 2002 \\ x \equiv -1004 \bmod 2003 \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv -1004 \bmod (2001 \cdot 2002 \cdot 2003).$$

Solución del ejercicio 6427 ▲002302

Se tiene $72 = 8 \cdot 9$ y $\operatorname{mcd}(8,9) = 1$, por lo tanto $\mathbb{Z}_{72} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$. Igualmente, $\mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{36} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ y $\mathbb{Z}_{168} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$. Entonces $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_{84} \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{128}$.

Solución del ejercicio 6428 ▲002303

1. $11, 31, 61$ son primos por lo tanto 2 a 2 primos entre sí. Así $20^{15} \equiv 1[11 \cdot 31 \cdot 61] \Leftrightarrow \begin{cases} 20^{15} \equiv 1[11] \\ 20^{15} \equiv 1[31] \\ 20^{15} \equiv 1[61]. \end{cases}$
   — Usando el pequeño teorema de Fermat, se obtiene que, módulo 11 : $20^{15} \equiv 20^5 \equiv -2^5 \equiv 1[11]$.

— $(20^{15})^2 = 20^{30} \equiv 1[31]$. Se deduce que $20^{15} \equiv \pm 1[31]$. Como $31 \not\equiv 1[4]$, de acuerdo con teorema de Wilson, $x^2 = -1$ no tiene solución módulo 31, y entonces $20^{15} \equiv 1[31]$. $20^2 \equiv -3[31]$ es primo

— $20^{15} \equiv (9^2)^{15} \equiv 3^{60} \equiv 1[61]$

2. $1155 = 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. Además, (pequeño teorema de Fermat) $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 5[11]$. Igualmente, $2^{6754} \equiv 2^4 \equiv 2[7]$, $2^{6754} \equiv 2^2 \equiv -1[5]$, y $2^{6754} \equiv 2^0 \equiv 1[3]$. Por lo tanto

$$\begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv 2[7] \\ a \equiv 4[5] \\ a \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv 2[7] \\ a \equiv 4[15] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 5[11] \\ a \equiv -26[105] \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv 709[1155].$$

Así el resto de la división de 2^{6754} por 1155 es 709.

Solución del ejercicio 6429 ▲002304

13 es primo y $100 = 12 \cdot 8 + 4$, por lo tanto $10^{100} \equiv 10^4 \equiv (-3)^4 \equiv 3 \equiv -10[13]$. Igualmente $10^{100} \equiv 10^{-8} \equiv 2^8 \equiv 9 \equiv -10[19]$. Usando el lema chino, se deduce que $10^{100} \equiv -10[247]$. Como $\mathrm{mcd}(10, 247) = 1$, Se puede simplificar esta expresión por 10 y se tiene $10^{99} \equiv -1[247]$, y entonces $247 | 10^{99} + 1$.

Solución del ejercicio 6430 ▲002305

$C = A \times B$. $(a,b) \in (A \times B)^\times \Leftrightarrow \exists (c,d) \in A \times B,\ (a,b)(c,d) = (1,1) \Leftrightarrow \exists (c,d) \in A \times B,\ ac = 1$ y $bd = 1$
$\Leftrightarrow a \in A^\times$ y $b \in B^\times$

por lo tanto $(A \times B)^\times = A^\times \times B^\times$. Igualmente, se obtiene que el conjunto $\mathscr{D}_{A\times B}$ divisores de 0 de $A \times B$ es

$$\mathscr{D}_{A\times B} = \mathscr{D}_A \times B \cup A \times \mathscr{D}_B \cup (A \setminus \{0\}) \times \{0\} \cup \{0\} \times (B \setminus \{0\}).$$

En fin, para los nilpotentes $\mathrm{Nil}\,(A \times B) = \mathrm{Nil}\,(A) \times \mathrm{Nil}\,(B)$.

Solución del ejercicio 6431 ▲002306

1. Poniendo $y = x + 1$, se tiene $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x^2 + x + 1) = \{0, 1, x, y, x^2, y^2, xy, xy + 1\}$. Las tablas de las operaciones son las siguientes (ellas son simétricas) :

$\oplus$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
1		0	y	x	y^2	x^2	$xy+1$	xy
x			0	1	xy	$xy+1$	x^2	y^2
y				0	$xy+1$	xy	y^2	x^2
x^2					0	1	x	y
y^2						0	y	x
xy							0	1
$xy+1$								0

$\otimes$	0	1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	x	y	x^2	y^2	xy	$xy+1$
x			x^2	xy	$xy+1$	y^2	y	1
y				y^2	y	0	y^2	xy
x^2					1	y^2	xy	x
y^2						0	0	y^2
xy							y^2	y
$xy+1$								x^2

Para $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$, $(x-1)$ y $(x+1)$ son dos ideales extraños, y el lema chino nos da $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Z}[x]/(x-1) \times \mathbb{Z}[x]/(x+1)$. Por lo tanto $\mathbb{Z}[x]/(x+1) \simeq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[x]/(x-1) \simeq \mathbb{Z}$, por lo tanto $\mathbb{Z}[x]/(x^2-1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La factorización de (x^8-1) sobre $\mathbb{Q}$ es $(x^8-1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$. Usando el lema chino, se obtiene que $\mathbb{Q}[x]/(x^8-1) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \times \mathbb{Q}[x]/(x^4+1)$ o sea :

$$\mathbb{Q}[x]/(x^8-1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q}[\mathrm{e}^{i\pi/4}].$$

Demostrar en efecto, que $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{Q}[i]$: la aplicación $\phi : \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{Q}[i]$ definida por $\bar{P} \mapsto P(i)$ es un morfismo de anillo.

— inyectividad : Sea $\bar{P} \in \ker\phi$. Entonces $P(i) = 0$. Como P es de coeficientes racionales,entonces $-i$ es también raíz de P. Entonces $x^2+1|P$.

— sobreyectividad : Sea $z = a+ib \in \mathbb{Q}[i]$, entonces $z = \phi(ax+b)$.

Igualmente para $\mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \simeq \mathbb{Q}[\mathrm{e}^{i\pi/4}]$. Se considera el morfismo $\phi : \mathbb{Q}[x]/(x^4+1) \to \mathbb{Q}[\mathrm{e}^{i\pi/4}]$ definido por $\phi(\bar{P}) = P(\mathrm{e}^{i\pi/4})$. ϕ está bien definido, es un morfismo de anillo.

— inyectividad : Sea $\bar{P} \in \ker\phi$, entonces $P(\mathrm{e}^{i\pi/4}) = 0$. Por otro lado X^4+1 es *irreducible* en $\mathbb{Q}$: su factorización sobre $\mathbb{R}$ es $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, y ninguno de estos dos polinomios, incluso con real invertible, es racional. Se deduce que si (x^4+1) no divide P, entonces $\operatorname{mcd}(X^4+1, P) = 1$. Existe por lo tanto $U, V \in \mathbb{Q}[x]$, $UP+V(X^4+1) = 1$. Evaluando en $x = \mathrm{e}^{i\pi/4}$, se obtiene una contradicción. Entonces $X^4+1|P$. (cf. Ejercicio 6475).

— sobreyectividad : Sea $z = a+b\mathrm{e}^{i\pi/4} \in \mathbb{Q}[\mathrm{e}^{i\pi/4}]$. Entonces $z = \phi(ax+b)$.

2. Se tiene $K[x]/(f^n g^m) \simeq K[x]/(f^m) \times K[x]/(g^m)$. Se deduce que los divisores de 0 son los polinomios de la forma $\bar{P}$, donde P satisface una de las condiciones siguientes :

$$\left|\begin{array}{ll} f^n|P \text{ y } g^m\nmid P & (\{0\} \times K[x]/(g^m) \setminus \{0\}) \\ g^m|P \text{ y } f^n\nmid P & (K[x]/(f^n) \setminus \{0\} \times \{0\}) \\ f|P \text{ y } f^n\nmid P & (\mathscr{D}_{K[x]/(f^n)} \times K[x]/(g^m)) \\ g|P \text{ y } g^m\nmid P & (K[x]/(f^n) \times \mathscr{D}_{K[x]/(g^m)}) \end{array}\right.$$

Los nilpotentes son dados por las condiciones

$$\begin{cases} fg|P \\ (f^n g^m \nmid P \text{ si se quiere excluir } 0) \end{cases}$$

3. Los ideales de $K[x]/(f^n)$ son los ideales generados por los divisores de f^n, o sea los f^k, para $0 \leqslant k \leqslant n$.

La demostración se puede hacer con toda generalidad exactamente de la misma manera que en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Sea $\mathscr{D}$ el conjunto de divisores de f^n (módulo K^*). Aquí, $\mathscr{D} = \{f^k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Sea $\mathscr{I}$ el conjunto de ideales de $K[x]/(f^n)$. Se tiene una flecha de $\mathscr{D} \to \mathscr{I}$, dada por $d \mapsto (\bar{d})$.

— sobreyectividad

Sea $I \in \mathscr{I}$. I es principal : se denota $I = (\bar{h})$. Sea $d = \operatorname{mcd}(f,h)$, y h_1 el polinomio determinado por $h = dh_1$. Entonces $\operatorname{mcd}(f,h_1) = 0$ y h_1 es invertible en el cociente. Se deduce que $(\bar{h}) = (\bar{d}) = I$ (por lo tanto $d \in \mathscr{D}$).

— inyectividad

Sea $d, d' \in \mathscr{D}$ tales que $(\bar{d}) = (\bar{d'})$. Se tiene entonces $d = h_1 d' + h_2 f$, por lo tanto $d'|d$. Igualmente, $d|d'$. Se deduce que $d \sim d'$.

Volvamos al ejercicio : los ideales de $K[x]/(f^n) \times K[x]/g^m$ son así de la que forma $(f^\alpha) \times (g^\beta)$. Volviendo a $K[x]/(f^n g^m)$, se obtiene que el conjunto de los ideales es

$$\{(f^\alpha g^\beta), 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n\}$$

4. Los invertibles de $K[x]/(f^n)$ son los (clases de) polinomios primos con f. El complemento está así formado por los múltiplos de f, por lo que hay tantos como polinomios de grado $(nd-1)-d$, donde d es el grado de f, o sea $p^{(n-1)d}$. Por lo tanto hay $p^{(n-1)d}(p-1)$ invertibles en $K[x]/(f^n)$. Se deduce que existe $p^{(n-1)d_f+(m-1)d_g}(p-1)^2$ en $K[x]/(f^n g^m)$, donde d_f y d_g son los grados respectivos de f y g.
5. Más generalmente, si los f_i son polinomios irreducibles distintos, en $K[x]/(f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k})$ hay $p^{\Sigma(n_i-1)d_i}(p-1)^k$ invertibles, donde d_i es el grado de f_i.

Solución del ejercicio 6432 ▲002307

Para obtener los múltiples factores, se utiliza el siguiente comentario : g es un factor múltiplo de f si y solo si g es un factor común a f y a f' (derivada formal de f).

Así $\operatorname{mcd}(f,f')$ es el producto de todos los factores múltiples de f, con exponente disminuido en 1, con respecto a f. Así $f/\operatorname{mcd}(f,f')$ es el producto de todos los factores irreducibles de f, con exponente 1, para todos. Finalmente, $\operatorname{mcd}(\operatorname{mcd}(f,f'), f/\operatorname{mcd}(f,f'))$ es el producto de todos los factores múltiples de f, con exponente 1.

Solución del ejercicio 6434 ▲002309

Sea $z = n + m\sqrt{d}, z' = n' + m'\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(n+m\sqrt{d})(n'+m'\sqrt{d})} = \overline{(nn'+mm'd)+(nm'+n'm)\sqrt{d}} \\ &= (nn'+mm'd)-(nm'+n'm)\sqrt{d} = (n-m\sqrt{d})(n'-m'\sqrt{d}) = \bar{z}\bar{z'}.\end{aligned}$$

Así $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$. Se tiene entonces $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $N(zz') = zz'\,\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z'} = N(z)N(z')$.

Solución del ejercicio 6435 ▲002310

1. — Si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es invertible :

   Entonces $zz^{-1} = 1$, por lo tanto $N(z)N(z^{-1}) = 1$. Como $N(z) \in \mathbb{Z}$ y $N(z^{-1}) \in \mathbb{Z}$, por lo tanto se tiene $N(z) \in \{1, -1\}$.

   — Si $N(z = \pm 1)$:

   Entonces $z\bar{z} = \pm 1$, por lo tanto $z(\pm\bar{z}) = 1$. Como $\pm\bar{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, z es invertible.
2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tales que $z = z_1 z_2$. Entonces $N(z_1)N(z_2) = \pm p$. Como $\pm p$ es irreducible en $\mathbb{Z}$, se deduce que $N(z_1) = \pm 1$ o $N(z_2) = \pm 1$. Según la pregunta anterior, se tiene $z_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ o $z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$: se deduce que z es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

   (Cuidado : p es primo por lo tanto irreducible en $\mathbb{Z}$, pero tal vez reducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$! cf. 2 en $\mathbb{Z}[i]$.)

3. Se tiene $N(3) = N(2+\sqrt{-5}) = 9$. De hecho, se puede demostrar que todo elemento z de norma 9 es irreducible : si $z = z_1 z_2$, entonces $N(z_1)N(z_2) = 9$. Así $\{N(z_1), N(z_2)\} = \{1,9\}$ o $\{3,3\}$ (en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la norma es siempre positiva). Pero para todo $(n,m) \in \mathbb{Z}^2, n^2+5m^2 \neq 3$.

   En efecto, si $|m| \geqslant 1, n^2+5m^2 \geqslant 5$ y para $m=0$, la ecuación equivale a $n^2 = 3$, que no tiene solución entera. Así, $N(z_1) = 1$ o $N(z_2) = 1$, por lo tanto z_1 o z_2 es invertible. z por lo tanto no tiene factorización no trivial : z es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En particular, 3 y $2+\sqrt{-5}$ lo son.

4. Todo elemento de A de norma 9 es irreducible. Por lo tanto, es suficiente para encontrar todos los elementos de norma 9. Sea $z = n+m\sqrt{-5} \in A$. Si $|m| \geqslant 2$ o $|n| \geqslant 4$, entonces $N(z) > 9$. Se buscan entonces los elementos de la norma 9 entre los elementos $z = n+m\sqrt{-5}$, con $|n| \leqslant 3$ y $|m| \leqslant 1$. Para $m=0$, las únicas soluciones son $n = \pm 3$, para $|m| = 1$, las soluciones se obtienen para $|n| = 2$. Así :

$$\forall z \in A : \ N(z) = 9 \Leftrightarrow z \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5}).\}$$

5. Se tiene $N(9) = 81$. Entonces si $9 = z_1 z_2$ es una factorización de 9 en A, $N(z_1)N(z_2)$ es una factorización de 81 (en $\mathbb{Z}$), y más precisamente se tiene $\{N(z_1), N(z_2)\} \in \Big\{\{1,81\},\{3,27\},\{9,9\}\Big\}$. Si $N(z_1) = 1$ o $N(z_2) = 1$, la factorización es trivial.

   A no tiene no de elemento de norma 3, por lo tanto la par $\{3,27\}$ no es realizable. Si en fin $N(z_1) = N(z_2) = 9$, entonces $z_1, z_2 \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5})\}$. Como $9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, todos estos elementos son divisores de 9. Los divisores de 9 son, por lo tanto $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 9\}$.

   Como $N(3(2+\sqrt{-5})) = 81$, el mismo razonamiento demuestra que si $d \in A$ divide $3(2+\sqrt{-5})$, entonces $d \in \{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 3(2 \pm \sqrt{-5})\}$.

   Si $(2-\sqrt{-5})a = 3(2+\sqrt{-5})$, entonces $N(a) = 9$, por lo tanto $a = \pm 3$ o $\pm(2 \pm \sqrt{-5})$. Como A es íntegro, si $a = \pm 3$, se obtiene $2-\sqrt{-5} = \pm(2+\sqrt{-5})$, lo que es falso. Si $a = \pm(2+\sqrt{-5})$, se obtiene $2-\sqrt{-5} = \pm 3$, lo que es falso. Si en fin $a = \pm(2-\sqrt{-5})$, se obtiene $\pm(-1-4\sqrt{-5}) = 6+3\sqrt{-5})$, lo que es todavía falso. Entonces $2-\sqrt{-5}$ no divide $3(2+\sqrt{-5})$ en A. Todos los otros elementos de norma 9 dividiendo $3(2+\sqrt{-5})$, por lo tanto, finalmente :

   Los divisores de $3(2+\sqrt{-5})$ son $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2+\sqrt{-5}), \pm 3(2+\sqrt{-5})\}$.

   (Cuidado : El solo hecho que 3 y $2+\sqrt{-5}$ sean irreducibles no permite concluir ! Si el anillo no es factorial, un producto de irreducibles $p_1 p_2$ puede tener otros divisores (salvo asociación) que p_1 y p_2... cf $3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$!)

6. Se conoce la lista divisores de 3 y de $2+\sqrt{-5}$. Los únicos que sean comunes son 1 y -1. Se deduce que 1 es un mcd de 3 y $2+\sqrt{-5}$.

   9 y $3(2+\sqrt{-5})$ son multiplos comunes de 3 y $2+\sqrt{-5}$, entonces si estos dos elementos admiten un mcm m, se tiene $m|9$ y $m|3(2+\sqrt{-5})$. Se sabe la lista divisores de 9 y $3(2+\sqrt{-5})$: salvo asociación, se deduce que $m \in \{1, 3, 2+\sqrt{-5}\}$. Como $3|m$, la única posibilidad es $m = 3$, y como $(2+\sqrt{-5})|m$, la única posibilidad es $m = 2+\sqrt{-5}$. Por lo tanto hay contradicción :

   3 y $2+\sqrt{-5}$ no tiene mcm en A.

7. Se supone I principal : sea $a \in A$ un generador : $I = (a)$. Entonces a es un divisor común de 3 y $2+\sqrt{-5}$, por lo tanto $a = \pm 1$. (En particular, $I = A$). Sean $u = u_1 + u_2\sqrt{-5}$ y $v = v_1 + v_2\sqrt{-5}$ dos elementos de A. Se tiene :

$$\begin{aligned} 3u + (2+\sqrt{-5})v = 1 &\Leftrightarrow (3u_1 + 2v_1 - 5v_2) + (3u_2 + v_1 + 2v_2)\sqrt{-5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3u_1 + 2v_1 - 5v_2 & = 1 \\ 3u_2 + v_1 + 2v_2 & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -v_1 + v_2 & \equiv 1[3] \\ v_1 - v_2 & \equiv 0[3]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Entonces $\forall u,v \in A,\ 3u+(2+\sqrt{-5})v \neq 1$. Así $1 \notin I$, lo cual es una contradicción : I no es principal. El anillo A no es principal porque el tiene al menos un ideal no principal. Tampoco es factorial, ya que $9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$ admite dos factorizaciones en irreducibles no equivalentes salvo asociación.

8. — los divisores comunes de 9 y $3(2+\sqrt{-5})$ son $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2+\sqrt{-5})\}$. Si 9 y $3(2+\sqrt{-5})$ admiten un mcd d, entonces d está en esta lista, y es divisible por todos los miembros de esta lista. Pero 3 no es divisible por $2+\sqrt{-5}$ y $2+\sqrt{-5}$ no divide 3 : 9 y $2+\sqrt{-5}$ no tiene mcd.
— Se supone que 9 y $3(2+\sqrt{-5})$ admite un mcm M. Entonces existen elementos $a,b \in A$ tales que $M = 9a = 3(2+\sqrt{-5})b$. Denotemos $m = 3a = (2+\sqrt{-5})b$ (A es íntegro). m es un múltiplo común de 3 y $2+\sqrt{-5}$. Sea k un múltiplo común de 3 y $2+\sqrt{-5}$. Entonces $3k$ es un múltiplo común de 9 y $3(2+\sqrt{-5})$, por lo tanto $M|3k : \exists c \in A, 3k = Mc = 3mc$. Se deduce que $k = mc$ (A es íntegro), por lo tanto $m|k$. Se deduce que m es un mcm de 3 y $2+\sqrt{-5}$, lo que es imposible.

Solución del ejercicio 6436 ▲002311

1. $\bar{n}$ es invertible si y solo si $\mathrm{mcd}(n,36) = 1$ (Bézout !), i.e. $\bar{n} \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17\}$. Los otros elementos son todos divisores de 0 ya que $\bar{n}$ divide 0 si y solo si $\mathrm{mcd}(n,36) \neq 1$. En fin, $\bar{n}$ es nilpotente si y solo si $2|n$ y $3|n$, por lo tanto si y solo si $6|n$, o sea $\bar{n} \in \{0, \pm 6, \pm 12, 18\}$.
2. Demostrar que el conjunto $\mathscr{I}$ de los ideales de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ está en biyección con el conjunto de los divisores (positivos) de 36 $\mathscr{D} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$.
Se considera la aplicación $\phi : \mathscr{D} \to \mathscr{I}$ definida por $\phi(d) = (\bar{d})$.
Inyectividad : Si $\phi(d) = \phi(d')$, entonces $\exists a,b \in \mathbb{Z}, d = d'a + 36b$. Como $d|36$, se deduce que $d|d'$. Igualmente, se tiene $d'|d$, y entonces $d = d'$.
Sobreyectividad : Sea $I \in \mathscr{I}$. $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ es principal, por lo tanto $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Sea $d = \mathrm{mcd}(a,36)$. Denotemos $a = da'$: $\mathrm{mcd}(a',36) = 1$. Se deduce que $\bar{a}'$ es invertible en $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Entonces $\bar{d} \sim \bar{a}$ en $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Se deduce que $I = (\bar{d}) = \phi(d)$. Finalmente, hay por lo tanto, 9 ideales en $\mathbb{Z}_{36}$:
— $(\bar{1}) = \mathbb{Z}_{36}$,
— $(\bar{2}) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 16, 18\}$,
— $(\bar{3}) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, 18\}$,
— $(\bar{4}) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16\}$,
— $(\bar{6}) = \{0, \pm 6, \pm 12\}$
— $(\bar{9}) = \{0, \pm 9, 18\}$
— $(\overline{12}) = \{0, \pm 12\}$
— $(\overline{18}) = \{0, 18\}$
— $(\overline{36}) = \{0\}$.
3. Si $a,b \in A^\times$, entonces $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$, por lo tanto $ab \in A^\times$.
Si $ab \in A^\times$, sea $c = (ab)^{-1}$, entonces $a(bc) = 1$, por lo tanto $a \in A^\times$ y $b(ac) = 1$, por lo tanto $b \in A^\times$.
4. Se tiene $(6x+1)(-6x+1) = 1$ en $\mathbb{Z}_{36}[x]$, por lo tanto $18x+1$ y es invertible.
5. Sea f un invertible de $\mathbb{Z}_{36}[x]$. Escoger $P \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\bar{P} = f$ y $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\bar{Q} = f^{-1}$. La proyección $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ se factoriza por $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{36} \to \mathbb{Z}_2$. Estas proyecciones están bien definidas, y son morfismos de anillo. Denotemos $P_{[2]}$ la reducción de P módulo 2 : se tiene entonces $P_{[2]}Q_{[2]} = (PQ)_{[2]} = 1$, y como $\mathbb{Z}_2$ es un cuerpo, $P_{[2]} = 1$, $Q_{[2]} = 1$. Se deduce que 2 divide todos los coeficientes de P, excepto el de grado 0. Igualmente, considerando la reducción módulo 3, se obtiene que 3 divide todos los coeficientes de P, excepto el de grado 0. Finalmente, 6 divide todos los coeficientes de P excepto el de grado 0, que es invertible módulo 36 : salvo asociación (en $\mathbb{Z}_{36}$), f es, por lo tanto de

la forma :

$$f = \sum_{i=1}^{d} 6a_i x^i + 1, \quad (a_i) \in \mathbb{Z}_{36}.$$

Recíprocamente, si f es de esta forma, es decir $f = 1 + 6xf_1$, con $f_1 \in \mathbb{Z}_{36}[x]$, entonces :

$$(1+6xf_1)(1-6xf_1) = 1,$$

por lo tanto f es invertible.

Solución del ejercicio 6437 ▲002312

1. El criterio de Eisenstein con 2, por módulo da directamente el resultado.
2. La reducción módulo 2 de Q es $Q_{[2]} = x^6 + x^2 + 1$, que no tiene raíz, y no es divisible por $x^2 + x + 1$, el solo irreducible de grado 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$. Así, $Q_{[2]}$ es ya sea irreducible, en cuyo caso Q lo es también sobre $\mathbb{Z}$, o ya sea el producto de dos irreducibles de grado 3.

   Si $Q_{[2]}$ no es irreducible, se considera la reducción módulo 3 de Q : $Q_{[3]} = x^6 + 1 = (x^2+1)^3$. x^2+1 es irreducible en $\mathbb{Z}_3$, pues es de grado 2 y no tiene raíz. Sea $Q = RS$ una factorización no trivial de Q sobre $\mathbb{Z}$. Se puede suponer R y S unitarios. Entonces, considerando la reducción módulo 2, se obtiene que $R_{[2]}$ y $S_{[2]}$ son dos irreducibles de grado 3 de $\mathbb{Z}_2[x]$. En particular $\mathrm{grad}(R) = \mathrm{grad}(R_{[2]}) = 3$ (pues R es unitario) y $\mathrm{grad}(S) = \mathrm{grad}(S_{[2]}) = 3$. Sin embargo, la reducción módulo 3 de Q no admite de factorización de dos polinomios de grado 3. Es una contradicción : se deduce que Q no tiene factorización no trivial.

Solución del ejercicio 6438 ▲002313

Sea p un número primo impar. Denotemos $p = 2m+1$. Se tiene

$$(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} \cdot [p]$$

En efecto, (módulo p) :

$$(p-1)! = \prod_{k=1}^{2m} k = m! \prod_{k=1}^{m} (m+k) = m! \prod_{k=1}^{m} (m+k-p) = m! \prod_{k=1}^{m} (-k) = (-1)^m (m!)^2.$$

Por tanto, en $\mathbb{Z}_p[x]$, $1^{-1} = 1$ y $(p-1)^{-1} = p-1$, por lo tanto $\forall k \in \{2,\dots,p-2\}$, $k^{-1} \in \{2,\dots,p-2\}$. Así, $\prod_{k=2}^{p-1} k \equiv 1[p]$, y entonces $(p-1)! \equiv -1[p]$. De donde el resultado.

— Si $p \equiv 1[4]$, $(-1)^{m+1} = -1$, y entonces $m!$ es una solución de $x^2 \equiv -1[p]$.

— Si esta ecuación tiene una solución, entonces $x^{2m} \equiv 1[p]$, y como $x^{p-1} \equiv 1[p]$, $1 \equiv (-1)^m[p]$. Se deduce que m es par, por lo tanto $p \equiv 1[4]$.

Solución del ejercicio 6439 ▲002314

1. $$f = g(x^3+x+1) + (x^2+x)$$
   $$g = (x^2+x)x + 1$$

   por lo tanto $\mathrm{mcd}(f,g) = 1$ y

   $$1 = g - (x^2+x)x = g - (f - g(x^3+x+1))x = (x^4+x^2+x+1)g - xf.$$

2. $f=(x^4+x+1)(x^2+x+1)$, por lo tanto f no es irreducible.
   g es de grado 3 y no tiene raíz, por lo tanto g es irreducible.
3. Los elementos de A están en biyección con los polinomios de $\mathbb{Z}_2[x]$ de grado $<\mathrm{grad}(g)=3$. Hay 8 polinomios de grado a lo sumo 2 sobre $\mathbb{Z}_2$, por lo tanto A tiene 8 elementos.
4. Se utiliza la representación lineal $uf+vg=1$ de $\mathrm{mcd}(f,g)$ obtenida más arriba. $uf=1+vg$, por lo tanto $\bar{u}\bar{f}=\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}$. Así $(\bar{f})^{-1}=\bar{u}=\bar{x}$.
5. Sea $f_1=x^2+x+1$ y $f_2=x^4+x+1$. Entonces $f_1f_2=f$, por lo tanto $\bar{f}_1\bar{f}_2=\bar{0}$. Así, f no divide ni f_1 ni f_2, por lo tanto $\bar{f}_1\neq\bar{0}$ y $\bar{f}_2\neq\bar{0}$: B no es íntegro, por lo tanto B no es un cuerpo.

Solución del ejercicio 6467 ▲002261

1. El polinomio X no es nunca invertible en $A[X]$. Si A no es íntegro, como $A\subset A[X]$, $A[X]$ no lo es tampoco y no puede ser un cuerpo. Si A es íntegro y si $X=PQ$, entonces $\mathrm{grad}(P)+\mathrm{grad}(Q)=1$, por lo tanto P o Q es una constante. Se supone por ejemplo que este sea P. $P|X$, por lo tanto $P|1$, entonces P es invertible, y $Q\sim X$.
2. Sea $P=X+a$ un polinomio mónico lineal de $A[X]$. Se supone que $P=P_1P_2$. Como A es íntegro, se tiene $\mathrm{grad}(P_1)+\mathrm{grad}(P_2)=1$, por lo tanto P_1 o P_2 es una constante. Se supone que este sea P_1. Entonces $P_1|1$ y $P_1|a$. En particular, P_1 es invertible, y entonces $P_2\sim P$.
3. Los polinomios irreducibles de $\mathbb{C}[X]$ son los polinomios de grado 1 (teorema de Gauss).
   Los irreducibles de $\mathbb{R}[X]$ son los polinomios de grado 1 y los polinomios de grado 2 sin raíces reales. En efecto, sea $P\in\mathbb{R}[X]$. P se factoriza sobre $\mathbb{C}[X]$ bajo la forma $P=a\prod(X-\lambda_i)^{\nu_i}$ (con $i\neq j\Rightarrow\lambda_i\neq\lambda_j$). Como esta factorización es única, y que $P=\overline{P}$, se deduce que si λ_i es raíz de P, con multiplicidad ν_i, entonces es lo mismo para $\overline{\lambda_i}$. Así, se obtiene una factorización de P en $\mathbb{R}[X]$: $P=a\prod\limits_{\lambda_i\in\mathbb{R}}(X-\lambda_i)^{\nu_i}\prod(X^2-2\mathrm{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)^{\nu_i}$. P es, por lo tanto irreducible si y solo si P es de la forma $P=a(X-\lambda)$, con $\lambda\in\mathbb{R}$ o $P=a(X^2-2\mathrm{Re}(\lambda_i)X+|\lambda_i|^2)$, con $\lambda\notin\mathbb{R}$.
4. Se supone que $K[X]$ tiene un número finito de polinomios unitarios irreducibles $P_1,\dots,P_k$. Sea entonces $P=\prod\limits_{i=1}^{k}P_i+1$. Como K es un cuerpo, los irreducibles son de grado al menos 1, y entonces P no es uno de los P_i. Como P es unitario, P no es irreducible. En particular, al menos uno de los P_i divide P. Se supone por ejemplo que este sea P_1 : $\exists Q\in K[X], P=P_1Q$. Entonces $P_1(Q-\prod\limits_{i=2}^{k}P_i)=1$. Así P_1 es invertible, lo que es falso.

Solución del ejercicio 6468 ▲002262

1. Se supone (X,n) principal en $\mathbb{Z}[X]$: $(X,n)=(P_0)$. Entonces $P_0|n$, por lo tanto $P_0\in\mathbb{Z}$, y $P_0|X$, por lo tanto $P_0=\pm1$. Así $(P_0)=\mathbb{Z}[X]$. De este modo (X,n) es el conjunto de polinomios cuyo el término constante es múltiplo de n : en efecto, si $P\in(X,n)$, $\exists A,B\in\mathbb{Z}[X]$, $P=AX+Bn$, por lo tanto el término constante de P es múltiplo de n. Recíprocamente, si el término constante de $P=\sum p_iX^i$ es múltiplo de n, $p_0=p_0'n$, entonces $P=X(\sum\limits_{i\geqslant1}p_iX^i)+p_0'n\in(X,n)$. Así, $1\notin(X,n)$. Entonces (X,n) no es principal.
2. Si $A[X]$ es principal, sea $a\in A\setminus\{0\}$, e $I=(X,a)$. $A[X]$ es principal, $\exists P_0\in A[X]$, $I=(P_0)$. Entonces $P_0|a$, por lo tanto $P_0\in A$, y $P_0|X$, así $P_0|1$ y P_0 es invertible. Se deduce que $I=A[X]$. En particular

$1 \in I : \exists U, V \in A[X], XU + aV = 1$. El término constante de $XU + aV$ es múltiplo de a y vale 1. a es, por lo tanto invertible.

Si A es un cuerpo, se dispone de la división euclidiana. Sea I un ideal de $A[X]$. Sea P_0 un elemento de $I \setminus \{0\}$ de grado minimal. Sea $P \in I$, $\exists!(Q,R) \in A[X]^2$, $P = P_0 Q + R$ y $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(P)$. Como $R = P - P_0 Q$, se tiene $R \in I$, y como $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(P_0)$, se tiene $R = 0$. Así $P \in (P_0)$. Se tiene entonces $I \subset (P_0) \subset I$.

Solución del ejercicio 6469 ▲002263

Denotemos $f(x^n) = P(x-1)$. Entonces $f(1) = 0 \cdot P(1) = 0$ y así $(x-1)|f$. Denotemos $f = Q(x-1)$. Se tiene entonces $f(x^n) = Q(x^n)(x^n-1)$. (x^n-1) divide a f.

Solución del ejercicio 6470 ▲002264

Denotemos (Q,R) el cociente y el resto de esta división euclidiana : $(x-2)^m + (x-1)^n - 1 = Q(x-2)(x-1) + R$, con $\mathrm{grad}(R) \leqslant 1$. Denotemos $R = ax + b$. Evaluando en 1, se obtiene $(-1)^m - 1 = a + b$, y evaluando por 2, $2a + b = 0$. Se deduce $b = -2a$ y $a = 1 - (-1)^m$, o sea $R = (1-(-1)^m)(x-2)$.

Solución del ejercicio 6471 ▲002265

1. Sea P un polinomio de grado $d = 2$ o 3 de $K[X]$.

   Si P tiene una raíz $a \in K$, entonces $(X-a)|P$, y P no es irreducible.

   Recíprocamente, si $P = AB$, con $A, B \in K[X]$ y $A, B \notin K[X]^\times = K \setminus \{0\}$, entonces $\mathrm{grad}(A) \geqslant 1$, $\mathrm{grad}(B) \geqslant 1$, y $\mathrm{grad}(A) + \mathrm{grad}(B) = d = 2$ o 3, por lo tanto al menos uno de los dos polinomios A y B es de grado 1. Se puede suponer que es A. Denotemos $A = aX + b$. Entonces $(X + a^{-1}b)|P$, y $-a^{-1}b$ es raíz de P.

   Finalmente, P tiene una raíz si y solo si P no es irreducible.

2. Irreductibles de grado 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Sea $P = aX^2 + bX + c$ un polinomio de grado 2. $a \neq 0$, por lo tanto $a = 1$.

$$P \text{ irreducible} \Leftrightarrow P \text{ no tiene raíz} \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) \neq 0 \\ P(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ 1 + b + 1 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P = X^2 + X + 1.$$

   Así, hay un solo irreducible de grado 2, es $I_2 = X^2 + X + 1$.

   Irreducibles de grado 3 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: Sea $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polinomio de grado 2. $a \neq 0$, por lo tanto $a = 1$.

$$P \text{ irreducible} \Leftrightarrow P \text{ no tiene raíz} \Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1 \\ 1 + b + c + 1 & = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d & = 1 \\ (b,c) & = (1,0) \text{ o } (b,c) = (0,1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P = X^3 + X + 1 \text{ o } P = X^3 + X^2 + 1.$$

   Así, hay dos irreducibles de grado 3 en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$: $I_3 = X^3 + X + 1$ y $I_3' = X^3 + X^2 + 1$.

3. Sea $P = 5X^3 + 8X^2 + 3X + 15 \in \mathbb{Z}[X]$. Sean A y B dos polinomios tales que $P = AB$. La aplicación $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n \mapsto \bar{n}$ induce una aplicación $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X], P = \sum a_i X^i \mapsto \bar{P} = \sum \bar{a}_i X^i$. Esta aplicación es compatible con las operaciones : en particular $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ (por qué ?). Así se tiene : $\bar{P} = \bar{A}\bar{B}$. Por lo tanto $\bar{P} = X^3 + X + 1$ es irreducible, por lo tanto (incluso si se intercambian los roles de A y B se puede asumir que) $\bar{A} = 1$ y $\bar{B} = X^3 + X + 1$. Se deduce que B es al menos de grado 3, de donde $\operatorname{grad}(A) = 0$. $A \in \mathbb{Z}$ y $A|P$, por lo tanto $A|5$, $A|8$, $A|3$, y $A|15$. Se deduce que $A = \pm 1$. Finalmente, $A = \pm 1$ y $B \sim P$. P es, por lo tanto irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

   Sea $P = X^5 + 2X^3 + 3X^2 - 6x - 5 \in \mathbb{Z}[X]$. Sean A y B dos polinomios tales que $P = AB$. Se tiene como anteriormente : $\bar{P} = \bar{A}\bar{B}$, donde $\bar{P} = X^5 + X^2 + 1$. $\bar{P}$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces si $\bar{P}$ es reducible, debe ser el producto de un irreducible de grado 2 y de un irreducible de grado 3. Por lo tanto $\bar{P} \neq I_2 I_3$ y $\bar{P} \neq I_2 I_3'$ (hacer el cálculo !), por lo tanto $\bar{P}$ es irreducible. El mismo razonamiento entonces demuestra que P es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

4. Un polinomio de grado 4 es reducible si y solo si tiene una raíz o es el producto de dos irreducibles de grado 2. Sea $P = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, con $a_4 = 1$.

$$P \text{ irreducible} \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) \neq 0 \\ P(1) \neq 0 \\ P \neq I_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ 1 + a_3 + a_2 + a_1 + 1 = 1 \\ P \neq I_2^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P \in \{X^4 + X^3 + 1, X^4 + X + 1, X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\}$$

   Un polinomio de grado 5 es irreducible si y solo si no tiene raíz y no es el producto de un irreducible de grado 2 y de un irreducible de grado 3. Luego de todos los cálculos hechos, se obtiene la lista siguiente : $\{X^5 + X^2 + 1, X^5 + X^3 + 1, X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1, X^5 + X^4 + X^3 + X + 1, X^5 + X^4 + X^2 + X + 1, X^5 + X^3 + X^2 + X + 1\}$.

Solución del ejercicio 6472 ▲002266

1. Se razona exactamente como para el ejercicio 6471. Se puede reducir un poco la discusión observando que como es un cuerpo, se pueden buscar solo los irreducibles *unitarios* : los demás se obtienen multiplicando los irreducibles unitarios por los invertibles, es decir ± 1. Los irreducibles de grado 2 se caracterizan por $P(0) \neq 0$, $P(1) \neq 0$ y $P(-1) \neq 0$.
   Se obtiene finalmente la lista siguiente : $\{X^2 + 1, X^2 - X - 1, -X^2 - 1, -X^2 + X + 1\}$.
   Sin comentarios, obtenemos la siguiente lista de los irreducibles de grado 3 de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$:
   $\{\pm(X^3 + X^2 - X + 1), \pm(X^3 - X^2 + X + 1), \pm(X^3 - X^2 + 1), \pm(X^3 - X + 1), \pm(X^3 + X^2 + X - 1), \pm(X^3 - X^2 - X - 1) \pm (X^3 + X^2 - 1), \pm(X^3 - X - 1)\}$.
2. $X^2 + X + 1 = (X - 1)^2$, $\quad X^3 + X + 2 = (X + 1)(X^2 - X + 2)$, $\quad X^4 + X^3 + X + 1 = (X + 1)(X^3 + 1) = (X + 1)^4$.

Solución del ejercicio 6473 ▲002267

Se razona como para el ejercicio 6471. Sea $P = X^5 - 6X^3 + 2X^2 - 4X + 5$, A, B dos polinomios tales que $P = AB$. Considerando la reducción módulo 2, se tiene $\bar{P} = X^5 + 1$, por lo tanto la descomposición en factores irreducibles es $\bar{P} = (X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. Como P es unitario, A y B lo son también, y la reducción módulo 2 preserva por lo tanto el grado de A y B. Se deduce que si $\bar{A} = X + 1$, entonces A es de grado 1.

La reducción módulo 3 de P debe por lo tanto tener una raíz. Pero $P \bmod 3 = X^5 - X^2 - X - 1$ no tiene raíz en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Se deduce que en la reducción módulo 2, la factorización $\bar{P} = \bar{A}\bar{B}$ es trivial ($\bar{A} = 1$ y $\bar{B} = \bar{P}$ o lo contrario), ya que la factorización $P = AB$ ella mismo es trivial ($A = \pm 1$ y $B = \mp P$ o lo contrario). Así, P es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.
Para $P = 7X^4 + 8X^3 + 11X^2 - 24X - 455$, se procede de la misma manera. Si $P = AB$, como 7 es primo, uno de polinomios A o B tiene por coeficiente dominante ± 7 y el otro ∓ 1. Se deduce que las reducciones módulo 2 o 3 preservan el grado de A y de B. Las descomposiciones en factores irreducibles son las siguientes : $P \bmod 2 = (X^2 + X + 1)^2$ y $P \bmod 3 = (X-1)(X^3 - X - 1)$. Si la factorización $P = AB$ es no trivial, entonces las reducciones módulo 2 de A y B son de grado 2, y entonces $\mathrm{grad}(A) = \mathrm{grad}(B) = 2$. Pero la descomposición módulo 3 impone que estos grados sean 1 y 3. La factorización $P = AB$ es, por lo tanto necesariamente trivial, y P es, por lo tanto irreducible.

Solución del ejercicio 6474 ▲002268

Comenzar mostrando que estos polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}$.

– El caso de $f = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) - 1$ Sean $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tales que $f = PQ$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que P y Q tienen coeficientes dominantes positivos (i.e. son unitarios).
Se tiene : $\forall i$, $f(a_i) = P(a_i)Q(a_i) = -1$, por lo tanto

$$P(a_i) = \pm 1 \qquad \text{y} \qquad Q(a_i) = \mp 1.$$

Sea $I = \{i, P(a_i) = -1\}$ y $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Se denotan $|I|$ y $|J|$ el número de elementos de I y J. *Se supone $I \neq \varnothing$ y $J \neq \varnothing$* : Entonces $\prod_{i \in I}(X - a_i) | (P+1)$ y $\prod_{i \in J}(X - a_i) | (Q+1)$. Así $\mathrm{grad}(P+1) \geqslant |I|$ y $\mathrm{grad}(Q+1) \geqslant |J| = n - |I|$, y como $\mathrm{grad}(P) + \mathrm{grad}(Q) = n$, se deduce que $\mathrm{grad}(P) = |I|$ y $\mathrm{grad}(Q) = |J|$, ya que (ya que P y Q son unitarios) :

$$P = \prod_{i \in I}(X - a_i) - 1 \ \text{ y } \ Q = \prod_{i \in J}(X - a_i) - 1.$$

Así $f = \prod_{k \in I \cup J}(X - a_k) - 1 = (\prod_{i \in I}(X - a_i) - 1)(\prod_{j \in J}(X - a_j) - 1) = f - \left(\prod_{i \in I}(X - a_i) + \prod_{j \in J}(X - a_j) - 2\right)$, por lo tanto $\prod_{i \in I}(X - a_i) + \prod_{j \in J}(X - a_j) - 2 = 0_{\mathbb{Z}[X]}$, lo que es falso. Así $I = \varnothing$ o $J = \varnothing$.
Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $I = \varnothing$. Entonces $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $Q(a_i) = -1$. Entonces los a_i son todos raíces de $Q + 1$. Como $\mathrm{grad}(Q+1) \leqslant n$ y $Q + 1 \neq 0$, se deduce que $Q = f$, y $P = 1$. f es, por lo tanto de hecho irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

–El caso de $g = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2 + 1$. Se supone que $g = PQ$, con $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Se tiene $g(a_i) = 1 = P(a_i)Q(a_i)$, por lo tanto $P(a_i) = Q(a_i) = \pm 1$. Como g no tiene raíz real, lo mismo va para P y Q, que son así de signo constante (Teorema de valores intermedios para funciones continuas en $\mathbb{R}$!). Por lo tanto, se puede suponer sin pérdida de generalidad que P y Q son positivos. Entonces $P(a_i) = Q(a_i) = 1$. Así, todos los a_i son raíces de $P - 1$ y de $Q - 1$. Se tiene entonces $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) | P - 1$ y $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) | Q - 1$. En particular, si $P - 1 \neq 0$ y $Q - 1 \neq 0$, $\mathrm{grad}(P) \geqslant n$ y $\mathrm{grad}(Q) = 2n - \mathrm{grad}(P) \geqslant n$. Así $\mathrm{grad}(P) = \mathrm{grad}(Q) = n$. Como además P y Q son unitarios, se deduce que

$$P - 1 = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i) \ \text{ y } \ Q - 1 = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i).$$

Se debe por lo tanto tener $(\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)+1)^2 = \prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^2+1$, lo que es falso $(\prod_{i=1}^{n}(X-a_i) \neq 0_{\mathbb{Z}[X]})$!
Así $P-1=0$ o $Q-1=0$, y se deduce que g es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

Irreductilidad en $\mathbb{Q}[X]$ Se tiene el lema siguiente :
Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ es unitario e irreducible en $\mathbb{Z}[X]$, entonces también lo es en $\mathbb{Q}[X]$.
El ingrediente de base de la demostración es la noción de *contenido* de un polinomio $P \in \mathbb{Z}[X]$: es el mcd de sus coeficientes, a menudo notado $c(P)$. Satisface la siguiente relación :

$$c(PQ) = c(P)c(Q).$$

Se supone que $P = QR$, con $Q,R \in \mathbb{Q}[X]$, Q y R unitarios. Reduciendo todos sus coeficientes al mismo denominador, se puede escribir Q y R bajo la forma :

$$Q = \frac{1}{a}Q_1 \text{ y } R = \frac{1}{b}R_1,$$

con $a,b \in \mathbb{Z}$, $Q_1,R_1 \in \mathbb{Z}[X]$ y $c(Q_1)=1$, $c(R_1)=1$.
Entonces $abP = Q_1R_1$, por lo tanto $c(abP) = c(Q_1)c(R_1) = 1$. Como $ab|c(abP)$, se tiene $ab = \pm 1$, y de hecho $P,Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Solución del ejercicio 6475 ▲002269

f es irreducible, entonces si f, no divide g, entonces f y g son primos entre sí. Así, $\exists u,v \in \mathbb{Q}[X], uf+vg=1$. Evaluando en α, se obtiene $u(\alpha)\cdot 0+v(\alpha)\cdot 0 = 1$, lo que es imposible !

Solución del ejercicio 6476 ▲002270

Se supone que la fracción es reducible. Entonces, existe $p,q,d \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} 11n+2m = pd \\ 18n+5m = qd.s \end{cases}$$

Se deduce que

$$\begin{cases} 19n = 5pd-2qd \\ 19m = -18pd+1qd. \end{cases}$$

En particular, $d|19n$ y $d|19m$. Si $d \neq 19$, se tiene $\mathrm{mcd}(n,m) \neq 1$. Si $d=19$, entonces

$$\begin{cases} n = 5p-2q \\ m = -18p+1q. \end{cases} \tag{38}$$

Recíprocamente, si $\mathrm{mcd}(n,m) \neq 1$ o si n,m son de la forma dada por (38), entonces la fracción es reducible.

Solución del ejercicio 6477 ▲002271

Sea $d = \mathrm{mcd}(m,n)$. Denotemos $n = dn'$ y $m = dm'$. Entonces $x^n-1 = (X^d)^{n'}-1$. Por lo tanto $(Y-1)|Y^{n'}-1$, por lo que $(X^d-1)|(X^n-1)$. Igualmente, $(X^d-1)|(X^m-1)$, y entonces $(X^d-1)|\,\mathrm{mcd}(X^n-1,X^m-1)$.

Por otro lado, sea $D = \operatorname{mcd}(X^n - 1, X^m - 1)$. Las raíces de D en $\mathbb{C}$ son a la vez raíces n-ésima y m-ésima de 1, que son todos simples : son, por lo tanto de la forma $\omega = e^{i2\pi\alpha}$, donde $\alpha = \frac{k}{n} = \frac{k'}{m}$. Así $km' = k'n'$. Se tiene $\operatorname{mcd}(m', n') = 1$, entonces por el teorema de Gauss, se deduce que k' es múltiplo de m', sea $\frac{k'}{m} = \frac{k''}{d}$, y ω es, por lo tanto una raíz d-ésima de 1. Se deduce que $D | X^d - 1$, y finalmente :

$$\operatorname{mcd}(X^n - 1, X^m - 1) = X^{\operatorname{mcd}(m,n)} - 1.$$

Solución del ejercicio 6478 ▲002272

Utilizar el algoritmo de Euclides. (se trabaja en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned}
x^5 + x^4 + 1 &= (x^4 + x^2 + 1)(x+1) + x^3 + x^2 + x \\
x^4 + x^2 + 1 &= (x^3 + x^2 + x)(x+1) + x^2 + x + 1 \\
x^3 + x^2 + x &= (x^2 + x + 1)x + 0.
\end{aligned}$$

Así $\operatorname{mcd}(x^5 + x^4 + 1, x^4 + x^2 + 1) = x^2 + x + 1$, y

$$\begin{aligned}
x^2 + x + 1 &= (x^4 + x^2 + 1) + (x^3 + x^2 + x)(x+1) \\
&= (x^4 + x^2 + 1) + \big((x^5 + x^4 + 1) + (x^4 + x^2 + 1)(x+1)\big)(x+1) \\
&= (x^4 + x^2 + 1)(1 + (x+1)^2) + (x^5 + x^4 + 1)(x+1) \\
&= (x^4 + x^2 + 1)(x^2) + (x^5 + x^4 + 1)(x+1).
\end{aligned}$$

Igualmente, $\operatorname{mcd}(x^5 + x^3 + x + 1, x^4 + 1) = x^3 + 1$ y $x^3 + 1 = (x^5 + x^3 + x + 1) + (x^4 + 1)x$.

Solución del ejercicio 6479 ▲002273

En $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: $\operatorname{mcd}(x^4 + 1, x^3 + x + 1) = x^2 + x - 1$. En $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: $\operatorname{mcd}(x^4 + 1, x^3 + x + 1) = 1$.

Solución del ejercicio 6480 ▲002274

En $\mathbb{Z}[X]$, $\operatorname{mcd}(x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, x^3 + x^2 - x - 1) = 1$.

Solución del ejercicio 6481 ▲002275

1. P es primitivo, 2 divide todos los coeficientes de P excepto el dominante, y 4 no divide el término constante : según el criterio de Eisenstein, se deduce que P es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ (luego en $\mathbb{Q}[x]$ porque es unitario...).
2. El mismo criterio se puede aplicar, con 3 esta vez.
3. f es primitivo, y su reducción módulo 2 es irreducible. Entonces f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.
4. $f(x+1) = \sum_{k=1}^{p} C_p^k x^{k-1}$. Por lo tanto $p | \frac{p!}{k!(p-k)!}$ (pues p aparece en el numerador, mientras que todos los factores del denominador son $< p$; como p es primo, son así primeros con p). Además, $C_p^1 = p$, por lo tanto p^2 no divide el término constante de $f(x+1)$. Según el criterio de Eisenstein, $f(x+1)$ es irreducible, y entonces f también.

Solución del ejercicio 6482 ▲002276

Sea $P = x^2 - x + 1$. Si P tiene una factorización no trivial, P es divisible por un polinomio de grado 1, y como P es unitario, este divisor se puede elegir unitario : se deduce que P tiene una raíz. Se calcula $P(a+bi\sqrt{3}) = (a^2 - 3b^2 - a + 1) + (2ab - b)i\sqrt{3}$. Como $1/2 \notin A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, $2a - 1 \neq 0$, entonces si $P(a+bi\sqrt{3}) = 0$, entonces $b = 0$, y $P(a) = 0$. Pero $x^2 - x + 1$ es primitivo y su reducción módulo 2 es irreducible, entonces es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. En particular, no tiene raíz en $\mathbb{Z}$. Se deduce que P no tiene raíz en A, y es, por lo tanto irreducible. Sea $K = \text{frac}(A) = \mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$. Se tiene $P(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$, por lo tanto P tiene una raíz en K, por lo tanto P es reducible a K.

Solución del ejercicio 6483 ▲002277

Si P tiene una raíz α en $\mathbb{Z}$, entonces $P(\alpha) = 0$, y considerando la reducción módulo n, $\bar{P}(\bar{\alpha}) = 0$, por lo tanto $\bar{P}$ tiene una raíz en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, para todo n.

1. Si $P(0)$ y $P(1)$ son impares, $\bar{P}(\bar{0}) = \bar{1}$ y $\bar{P}(\bar{1}) = \bar{1}$, por lo tanto $\bar{P}$ no tiene raíz en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Entonces P no tiene raíz en $\mathbb{Z}$.
2. Si n no divide ninguno de los $P(0), \ldots, P(n-1)$, entonces $\bar{P}(\bar{0}) \neq 0, \ldots, \bar{P}(\overline{n-1}) \neq 0$, por lo tanto $\bar{P}$ no tiene raíz en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Entonces P no tiene raíz en $\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 6484 ▲002278

1. $(X - \frac{a}{b})|P$, por lo tanto $\exists Q \in \mathbb{Q}[x]$, $P = (x - \frac{a}{b})Q = (bx - a)\frac{Q}{b}$. Reduciendo todos los coeficientes de Q al mismo denominador, se puede escribir Q bajo la forma : $Q = \frac{1}{m}Q_1$, con $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ primitivo. Entonces $bdP = (bx - a)Q_1$. Considerando los contenidos de estos polinomios, se tiene $c(bx - a) = \text{mcd}(a, b) = 1$, $c(Q_1) = 1$, por lo tanto $c(bdP) = bd\,c(P) = 1$. Así $bd = \pm 1$, y $(bx - a)|P$.
2. Se consideran, por ejemplo, los casos $k = 0, \ldots, 3$. (Para $k = 2$, se constata que $P(2) = 0$: se puede dividir P por $(X - 2)$ y determinar Las tres raíces complejas de P...). Se obtiene que

$$\begin{array}{ccc} (*) & a|14 & (k=0), \\ (**) & (a-b)|4 & (k=1), \\ (***) & (a-3b)|2^3 5 & (k=3). \end{array}$$

Por cierto, podemos notar que si $\alpha \leqslant 0$, $P(\alpha) < 0$, así se puede asumir $a > 0$ y $b > 0$.
— Si $a = 1$: $(**) \Rightarrow b \in \{2, 3, 5\}$. Ninguna de estas posibilidades es compatible con $(***)$.
— Si $a = 2$: $(**) \Rightarrow b \in \{1, 3, 4, 6\}$. Como $\text{mcd}(a, b) = 1$, 4 y 6 están excluidos. 3 no es compatible con $(***)$. Para 2, se verifica que $P(2) = 0$.
— Si $a = 7$: $(**) \Rightarrow b \in \{3, 5, 9, 11\}$. Pero ninguna de estas soluciones es adecuada.
— Si $a = 14$: $(**) \Rightarrow b \in \{10, 12, 16, 18\}$, pero $\text{mcd}(a, b) = 1$ excluye todas estas posibilidades.
Finalmente, 2 es la única raíz racional de P.

Solución del ejercicio 6485 ▲002279

1. Denotemos $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. En el cálculo de $P(n+km)$, desarrollando todos los términos $(n+km)^i$ usando el binomio, se obtiene que

$$P(n+km) = \sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant d} a_i C_i^j n^j (km)^{i-j} = P(n) + mN, \quad \text{donde} \quad N = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant d} a_i C_i^j n^j (km)^{i-j} - 1 \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $m|P(n+km)$.

2. Se supone que tal polinomio existe : sea $m = P(0)$. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $m|P(km)$. Como $P(km)$ es primo, se deduce que $P(km) = \pm m$. Esto está en contradicción con $\lim_{k\to+\infty} P(km) = \pm\infty$.

Solución del ejercicio 6486 ▲002280

1. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$. Sea $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ el representante irreducible de a_i. Sea $m = \text{mcm}(q_0,\ldots,q_n)$. Denotemos $m = q_i m_i$. Entonces $f = \frac{1}{m}\sum a_i m_i x^i$. Poniendo en factor $d = \text{mcd}(a_0 m_0,\ldots,a_n m_n)$, se obtiene $f = \frac{d}{m} f_0$, donde $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ es primitivo.
2. Denotemos $\alpha = \frac{p}{q}$, con $\text{mcd}(p,q) = 1$ y $q > 0$. Sea $g_1 = \alpha g$. Se tiene $qg = pg_1$, por lo tanto $qc(g) = pc(g_1)$. Se deduce que $q|p$, y así como $q = 1 : \alpha \in \mathbb{Z}$.
3. Sea $g \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f = dg$. Sea $g = \frac{p}{q} g_0$ la descomposición de g dada por la pregunta 1. Entonces $qf = pdg_0$, por lo tanto $qc(f) = pc(d)c(g_0) = p$. Entonces $q|p$ y finalmente $q = 1$. Se deduce que $g = pg_1 \in \mathbb{Z}[x]$.
4. $d = \text{mcd}_{\mathbb{Q}}(f,g) = \frac{p}{q} d_0$. Entonces d_0 es primitivo y divide f y g sobre $\mathbb{Q}$. Entonces d_0 divide f y g sobre $\mathbb{Z}$. Sea h un divisor común de f y g en $\mathbb{Z}[x]$. Se tiene $c(h)|c(f) = 1$, por lo tanto h es primitivo. Por otro lado, h es un divisor común de f y g en $\mathbb{Q}[x]$, por lo tanto $h|d_0$ en $\mathbb{Q}[x]$. Se deduce que $h|d_0$ en $\mathbb{Z}[x]$. Así, d_0 es de hecho un mcd de f y g en $\mathbb{Z}[x]$.
5. Sea $d = \text{mcd}(c(f), c(g))$, $h = \text{mcd}(f,g) = c(h)h_0$, $h' = \text{mcd}(f_0, g_0)$.
Se tiene $d|c(f)$, $d|c(g)$, $h'|f_0$ y $h'|g_0$, por lo tanto $dh'|f$ y $h'|g$, y entonces $dh'|h$.
$c(h)|c(f)$ y $c(h)|c(g)$, por lo tanto $c(h)|d$. $h|f$, entonces existe $f_1 \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f = h_0 c(h) f_1$. Se tiene entonces $c(h)c(f_1) = c(f)$, y luego de la simplificación, se deduce que $f_0 = h_0 f_1'$, con $f_1' \in \mathbb{Z}[x]$: $h_0|f_0$. Igualmente para g : $h_0|g_0$. Se deduce que $h_0|h'$, y así como $h|dh'$.

Solución del ejercicio 6487 ▲002281

Sea K un cuerpo, A un anillo no trivial, y $K \xrightarrow{\phi} A$ un morfismo de anillos. Sea $x \in K\setminus\{0\}$. Se tiene $1 = \phi(1) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}) \neq 0$ (pues A no es el anillo trivial). Entonces $\phi(x) \neq 0$. Así $\ker\phi = \{0\}$, por lo tanto ϕ es inyectiva.

Solución del ejercicio 6488 ▲002282

Sea $x \in R\setminus\{0\}$. Entonces $(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset$ es una sucesión decreciente de ideales. Por lo tanto, es estacionaria a partir de un cierto rango : $\exists k \in \mathbb{N}, (x^k) = (x^{k+1})$. En particular, $\exists a \in R$, $k^{k+1} = ax^k$. Como A es íntegro, se deduce que $ax = 1$, por lo tanto $x \in R^\times$.
$R^\times = R\setminus\{0\}$, por lo tanto R es un cuerpo.

Solución del ejercicio 6489 ▲002283

Sea A un anillo finito, e I un ideal primo. Entonces A/I es íntegro, y finito (!), por lo tanto A/I es un cuerpo (ver ejercicio 6417). Entonces I es maximal.

Solución del ejercicio 6490 ▲002284

Se recuerda que el producto de dos ideales I y J es el ideal generado por los productos de la forma ab, con $a \in I, b \in J$:

$$I \cdot J = \{\sum_{i=0}^{N} a_i b_i, N \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}$$

— Si I es un ideal primo : Sean J y K dos ideales tales que $J \cdot K \subset I$. Entonces si $J \not\subset I$, $\exists a \in x \setminus I$. Sea $y \in K$. Se tiene $xy \in J \cdot K$, por lo tanto $xy \in I$. Como I es primo, $x \in I$ o $y \in I$. Pero $x \notin I$, por lo tanto $y \in I$. Así $\forall y \in K, y \in I$: se ha demostrado que : $J \not\subset I \Rightarrow K \subset I$. Se tiene así $J \subset I$ o $K \subset I$.

— Si $\forall J, K$ ideales, $(J \cdot K \subset I \Rightarrow J \subset I$ o $K \subset I)$: Sea $a, b \in A$, con $ab \in I$. Entonces $(a) \cdot (b) = (ab)$, por lo tanto $(a) \subset I$ o $(b) \subset I$ y entonces $a \in I$ o $b \in I$. I es, por lo tanto primo.

Se tiene $M^n = M \cdot M^{n-1}$. Entonces si I es primo y contiene M^n, entonces I contiene M o M^{n-1}, y por una recurrencia finita, se obtiene que I contiene M. Así : $M \subset I \subsetneq A$. Como M es maximal se deduce que $M = I$.

Solución del ejercicio 6491 ▲002285

— $A[X]/(X)$: X es unitario, por lo que se tiene la división euclidiana por X. Se verifica (como en clase) que cada clase tiene uno y solo uno representante de grado 0. Se deduce que $A[X]/(X)$ está en biyección con A. Queda por notar que esta biyección es un morfismo de anillo.
Otra manera de decir lo mismo de observar que la aplicación $\phi : A[X] \to A, P \mapsto P(0)$ es un morfismo de anillo. $\ker\phi = (X)$ y Im $\phi = A$. Como $A/\ker\phi \sim$ Im ϕ, se tiene $A[X]/(X) \sim A$.

— Se puede considerar $\phi : A[X,Y] \to A[Y]$, $P \mapsto P(0,Y)$. Es un morfismo de anillo. Separando los términos dependiendo únicamente de Y de otros, se puede escribir todo polinomio P de $A[X,Y]$ bajo la forma $P = P_1(Y) + XP_2(X,Y)$, donde $P_1 \in A[Y]$ y $P_2 \in A[X,Y]$. Entonces $\phi(P) = 0$ si y solo si $P_1 = 0$, si y solo si $P = XP_2$, es decir $P \in (X)$. Así $\ker\phi = (X)$. Por otro lado, todo polinomio P de $A[Y]$ se puede ver como un polinomio $\tilde{P}$ de $A[X,Y]$. Entonces $P = \phi(\tilde{P})$, por lo tanto Im $\phi = A[Y]$. Finalmente : $A[X,Y]/(X) \sim A[Y]$.

— $A[X,Y]/(X,Y)$: Sea $\phi : A[X,Y] \to A$, $P \mapsto P(0,0)$. ϕ es un morfismo de anillo, y con las notaciones anteriores, para $P = P_1(Y) + XP_2(X,Y)$, con $\phi(P) = 0$, se tiene $P_1(0) = 0$, por lo tanto $Y|P_1(Y)$. Así, P es la suma de dos polinomios, uno múltiplo de X, el otro múltiplo de Y, por lo tanto $P \in (X,Y)$. Recíprocamente, si $P \in (X,Y)$, entonces $P(0,0) = 0$. Entonces $\ker\phi = (X,Y)$. $\forall a \in A \phi(a) = a$, por lo tanto ϕ es sobreyectiva. Finalmente, $A[X,Y]/(X,Y) \sim A$.

— $A[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n)$: Sea $\phi : A[X_1,\dots,X_n] \to A$, $P \mapsto P(0)$. ϕ es un morfismo de anillo. Agrupando todos los términos en función de X_n, luego todos los términos restantes dependiendo de X_{n-1}, y así sucesivamente hasta que los términos dependan solo de X_1, y finalmente el término constante, todo polinomio $P \in A[X_1,\dots,X_n]$ se puede escribir en la forma $P = X_nP_n + X_{n-1}P_{n-1} + \dots + X_1P_1 + p_0$, con $P_i \in A[X_1,\dots,X_i]$ (y $p_0 \in A$). Se deduce que $\ker\phi = (X_1,\dots,X_n)$. Por otro lado $\forall a \in A, \phi(a) = a$, por lo tanto $A[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n) \sim A$.

Como un ideal es primo (resp. maximal) si y solo si el cociente es integral (resp. un cuerpo), se deduce que

— en $A[X]$, (X) es primo si y solo si A es íntegro, maximal si y solo si A es un cuerpo,
— en $A[X,Y]$, (X) es primo si y solo si A es íntegro, y nunca es maximal,
— en $A[X_1,\dots,X_n]$, $(X_1,\dots,X_n)$ es primo si y solo si A es íntegro, maximal si y solo si A es un cuerpo.

Solución del ejercicio 6492 ▲002286

Sea $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Sea $a = mp + a'$ la división euclidiana de a por m, y $b = mq + b'$ la de b por m. Entonces $\alpha = m(p + q\sqrt{d}) + a' + b'\sqrt{d}$. Se deduce que cada clase del cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ tiene un representante en

$$\mathscr{C} = \left\{a + b\sqrt{d},\ (a,b) \in \{0,\ldots,m-1\}^2\right\}$$

Además, si dos elementos $a + b\sqrt{d}$ y $a' + b'\sqrt{d}$ de este conjunto están en la misma clase, entonces $\exists c, d \in \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{d} = (a' + b'\sqrt{d}) + m(c + d\sqrt{d})$. Se deduce que $a = a' + mc$ y $b = b' + md$, y entonces $a = a'$, $b = b'$. Entonces cada clase de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ tiene un solo representante en $\mathscr{C}$. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ y $\mathscr{C}$ están por lo tanto en biyección : en particular, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ tiene m^2 elementos.
Observación : Se tiene

$$\sqrt{d}] \sim \mathbb{Z}[X]/(X^2 - d).$$

De hecho, la aplicación $\phi : \mathbb{Z}[X]/(X^2 - d) \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $\bar{P} \mapsto P(\sqrt{d})$ está bien definida (si $(\bar{P}) = \bar{Q}$, entonces $P(\sqrt{d}) = Q(\sqrt{d})$), y es un morfismo de anillo. Además, si $\phi(P) = 0$, se denota $P = Q(X^2 - d) + (aX + b)$ la división euclidiana de P por $X^2 - d$. Evaluando en $\sqrt{d}$, se tiene $a\sqrt{d} + b = 0$, por lo tanto $R = 0$. Se deduce que $(X^2 - d)|P$, i.e. $\bar{P} = 0$. Se deduce que $\ker\phi = \{0\}$, por lo tanto ϕ es inyectiva. Por otro lado $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \phi(a + bX) = a + b\sqrt{d}$, por lo tanto ϕ es sobreyectiva.

Si d es par, como $\sqrt{d}\cdot\sqrt{d} = |d| \in (2)$, entonces que $\sqrt{d} \notin (2)$, (2) no es primo. Si d es impar : $(1 + \sqrt{d})(1 + \sqrt{d}) = (1 + d) + 2\sqrt{d} \in (2)$, pero $(1 + \sqrt{d}) \notin (2)$, por lo tanto (2) no es primo.
Observación : $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(2) \sim \mathbb{Z}_2[X]/(X^2 + \bar{d})$. $(X^2 + \bar{d})$ es X^2 o $X^2 + 1$. Ninguno de estos dos polinomios es irreducible. Por lo tanto el cociente no puede ser íntegro.

Solución del ejercicio 6493 ▲002287

— Si $x \in A$ es primo : sea $a, b \in A$ tales que $ab = x$. Entonces $ab \in (x)$, por lo tanto $a \in (x)$ o $b \in (x)$. Se deduce que $a \sim x$ o $b \sim x$. Entonces x es irreducible.
— A se supone factorial. Sea I un ideal primo. Sea $x \in I$ y $x = p_1 \cdots p_k$ "la" factorización de x en producto de irreducibles. Entonces $(p_1 \cdots p_{n-1})p_n \in I$, por lo tanto $(p_1 \cdots p_{n-1}) \in I$ o $p_n \in I$. Si $p_n \in I$, I contiene un irreducible. Si no, $(p_1 \cdots p_{n-2})p_{n-1} \in I$. Por una recurrencia finita, al menos uno de los $p_i \in I$, por lo tanto I contiene un irreducible.
— En $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $9 \in (3)$. Por lo tanto $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ y $(2 \pm \sqrt{-5}) \notin (3)$. Entonces (3) no es primo.
— 2 es irreducible : $2 = z_1 z_2$, con $z_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, entonces $|z_1|^2|z_2|^2 = 4$, por lo tanto $\{|z_1|^2, |z_2|^2\} = \{1,4\}$ o $\{2,2\}$. En el primer caso, se trata de una factorización trivial. El segundo es imposible, ya que la ecuación $a^2 + 5b^2 = 2$ no tiene solución entera (a,b).
Por otro lado, $(1 + \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5}) = 6 \in (2)$, pero $(1 \pm \sqrt{-5}) \notin (2)$, por lo tanto 2 no es el primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Solución del ejercicio 6494 ▲002288

1. Sea $\mathscr{J}$ un ideal de A/I. Sea π la proyección canónica $A \to A/I$, y $J = \pi^{-1}(\mathscr{J})$. J es un ideal de A que es principal entonces $\exists a \in A, J = (a)$. Demostrar que $\mathscr{J} = (\pi(a))$. Se tiene $\pi(a) \in \mathscr{J}$, por lo tanto $(\pi(a)) \subset \mathscr{J}$. Sea $\alpha \in \mathscr{J}$, y b un representante de α, i.e. $b \in A$ y $\pi(b) = \alpha$. Entonces $b \in J = (a)$, por lo tanto $\exists k \in A, b = ka$. Entonces $\pi(b) = \pi(ka) = \pi(k)\pi(a)$, por lo tanto $\pi(b) \in (\pi(a))$. Entonces $\mathscr{J} \subset (\pi(a))$. Finalmente, $\mathscr{J} = (\pi(a))$. Se deduce que A/I es principal.
2. — $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Sea I un ideal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. I es principal, por lo que $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Por lo tanto $(\bar{a}) = \{\alpha\bar{a}, \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} = \{\bar{p}\bar{a}, p \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{pa}, p \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\pi^{-1}(I) = \{pa + qn, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ es

el ideal generado en $\mathbb{Z}$ por a y n por lo que el ideal generado por $d = (\text{mcd}(n,a))$. Se deduce que $I = (\bar{d})$. En particular, I es generado por un divisor de n. Sea ahora d_1 y d_2 dos divisores (positivos) de n tales que $(\bar{d_1}) = (\bar{d_2})$. Se tiene $\pi^{-1}((d_1)) = d_1\mathbb{Z} = d_2\mathbb{Z}$, por lo tanto $d_1 = d_2$. Así, los ideales de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son generados por los divisores de n, y dos divisores distintos generan dos ideales distintos : hay así tantos ideales en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como divisores de n.

— $\mathbb{Q}[X]/(f)$: Se razona de la misma manera : el punto clave es que si $I = (\bar{g})$ es un ideal de $\mathbb{Q}[X]/(f)$, entonces $\pi^{-1}(I) = (f,g) = (\text{mcd}(f,g))$.

3. Los ideales maximales son aquellos para los cuales el cociente es un campo, (así también aquellos para los que el cociente es entero porque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es finito). Se tiene el siguiente diagrama ($I = (\bar{d})$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_2"] & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I \\
\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

En efecto, π_1 y π_2 son morfismos de anillo, y $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = d\mathbb{Z}$. Entonces $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I$ es un cuerpo si y solo si d es primo. Igualmente, $(\mathbb{Q}[X]/(f))/I$ es un cuerpo si y solo si $I = (\bar{g})$, donde g es un factor primo de f.

Solución del ejercicio 6495 ▲002289

1. Sea $\alpha, \beta \in \bar{J}$ y $\lambda, \mu \in A/I$. Entonces $\exists a,b \in J$, $l,m \in A$, $\alpha = \pi(a)$, $\beta = \pi(b)$, $\lambda = \pi(l)$, $\mu = \pi(m)$. Se tiene entonces $\lambda\alpha + \mu\beta = \pi(la+mb)$. Por lo tanto $la+mb \in J$ (pues J es un ideal), por lo tanto $\lambda\alpha + \mu\beta \in \bar{J}$. Entonces $\bar{J}$ es un ideal de A/I.
2. Como en el ejercicio 6494, se tiene el diagrama siguiente :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2\circ\pi_1"] \arrow[d, "\pi"] & A/I \arrow[r, "\pi_2"] & (A/I)/\bar{J} \\
A/(I+J) \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $x \in \ker(\pi_2 \circ \pi_1)$, entonces $\pi_1(x) \in \ker \pi_2 = \bar{J}$, por lo tanto $\exists y \in A, \pi_1(x) = \pi_1(y)$. Entonces $x - y \in \ker \pi_1 = I$, por lo que $\exists z \in I, x = y + z$: por lo tanto se tiene $x \in I + J$. Recíprocamente, si $x \in I + J$, entonces $\exists (x_1, x_2) \in I \times J$, $x = x_1 + x_2$. Entonces $\pi_1(x) = \pi_1(x_2) \in \bar{J}$, por lo tanto $\pi_2 \circ \pi_1(x) = 0$. Así $\ker(\pi_2 \circ \pi_1) = I + J$. Entonces $A/(I+J) \sim (A/I)/\bar{J}$.

Solución del ejercicio 6496 ▲002290

1. Sea $J \subset B$ un ideal primo de B. Sean $a,b \in A$ tales que $ab \in f^{-1}(J)$. Entonces $f(a)f(b) = f(ab) \in J$, por lo tanto $f(a) \in J$ o $f(b) \in J$. Así, $a \in f^{-1}(J)$ o $b \in f^{-1}(J)$. Se deduce que $f^{-1}(J)$ es primo. Esta proposición no es verdadera para los ideales maximales. Por ejemplo, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}[X]$, $f(k) = k$, y $J = (X)$. Entonces $f^{-1}(J) = \{0\}$ no es maximal.

2. Tomemos $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(k) = k$. $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ no es un ideal de $\mathbb{Q}$ ($1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ y por lo tanto, $1 \times \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)
   Se supone f sobreyectivo. Sea $x, y \in f(I)$, $a, b \in B$. Existe $x_0, y_0 \in I$ tales que $x = f(x_0)$ y $y = f(y_0)$. Además, como f es sobreyectiva, $\exists a_0, b_0 \in A$ tales que $a = f(a_0)$ y $b = f(b_0)$. Entonces $ax + by = f(a_0)f(x_0) + f(b_0)f(y_0) = f(a_0x_0 + b_0y_0)$ y como I es un ideal, $(a_0x_0 + b_0y_0) \in I$, por lo tanto $(ax + by) \in f(I)$. $f(I)$ es, por lo tanto un ideal de B.
3. Sea I un ideal maximal de A y $J = f(I)$. Se supone $J \neq B$. Sea K un ideal de B tal que $J \subset K$. Entonces $I \subset f^{-1}(K)$, por lo tanto $f^{-1}(K) = I$ o $f^{-1}(K) = A$. En el primer caso, se tiene $K = f(f^{-1}(K)) = J$, en el segundo caso, se tiene $K = f(f^{-1}(K)) = f(A) = B$. El ideal J es, por lo tanto maximal.
4. $(X+2)(X+3) = X^2 + 5X$ en $\mathbb{Z}_6[X]$, por lo tanto $(X+\bar{2})(X+\bar{3}) \in (X)$, pero $(X+\bar{2}) \notin (X)$ y $(X+\bar{3}) \notin (X)$, por lo tanto $r_6((X))$ no es el primo en $\mathbb{Z}_{36}[X]$. $(X+1)^2 = (X^2+1)$ en $\mathbb{Z}_2[X]$, por lo que $(X+1) \notin (X^2+1)$, por lo tanto $r_2((X^2+1))$ no es el primo en $\mathbb{Z}_2[X]$.

Solución del ejercicio 6497 ▲002291

1. Sea $J = B \cap I$. Sea $x, y \in J$, $a, b \in B$, entonces $ax + by \in B$ ya que B es un subanillo de A. $ax + by \in I$ ya que I es un ideal. Se deduce que J es un ideal. $B + I$ es estable para la suma (pues B e I lo son). Sea $\alpha = a + x \in B + I$ y $\beta = b + y \in B + I$. Entonces $\alpha\beta = (ab) + (ay + bx + xy) \in B + I$, por lo tanto $B + I$ es estable bajo la multiplicación. $1 \in B + I$, por lo tanto $B + I$ es un subanillo de A. $I \subset B + I$, e I es absorbente para la multiplicación en A, así también en B : I es un ideal de $B + I$.
2. Se tiene el diagrama (morfismos de anillo) siguiente :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\phi"] \arrow[d, "\pi_0"] & B+I \arrow[r, "\pi"] & (B+I)/I \\
B/\ker\phi \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}$$

   Por tanto, para $x \in B$, se tiene : $x \in \ker\phi \Leftrightarrow x = i(x) \in \ker\pi = I$. Entonces $\ker\phi = B \cap I$, y consecuentemente :
$$B/(B \cap I) \sim (B+I)/I.$$

Solución del ejercicio 6498 ▲002292

1. Sea $P = x^3 - x + 2$. Su reducción $\bar{P} = x^3 - x - 1$ módulo 3 es de grado 3 y no tiene raíz, por lo tanto $\bar{P}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$. Como P es primitivo, se deduce que P es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, luego en $\mathbb{Q}[x]$. Como $\mathbb{Q}[x]$ es principal, se deduce que (P) es maximal, y así como $\mathbb{Q}[x]/(P)$ es un cuerpo.
2. En $\mathbb{Q}[x]/(P)$, se tiene $y^3 - y + 2 = 0$, por lo tanto $y(y^2 - 1) = -2$ y finalmente $y(\frac{1}{2}(1 - y^2)) = 1$. Así $y^{-1} = \frac{1}{2}(1 - y^2)$.
3. $1 + y + y^2 = \pi(1 + x + x^2)$. Se tiene $\mathrm{mcd}(P, 1 + x + x^2) = 1$, y más precisamente, utilizando el algoritmo de Euclides : $13 = (x+4)P - (x^2 + 3x - 5)(x^2 + x + 1)$, por lo tanto $(y^2 + y + 1)^{-1} = -\frac{1}{13}(y^2 + 3y - 5)$.

Solución del ejercicio 6499 ▲002293

Se denota $f = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$. Se tiene $\mathrm{mcd}(a_0,\dots,a_d) \sim 1$ y $\pi \not| a_d$. Denotemos $\bar{f} \in A/(\pi)[X]$ la reducción de f módulo π. Sea $f = gh$ una factorización de f en $A[x]$. Entonces $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$, y así (aunque se intercambie g y h) $\bar{g} \sim 1$ y $\bar{h} \sim \bar{f}$. Como $\pi \not| a_d$, se tiene $\mathrm{grad}(\bar{f}) = d$, y entonces $\mathrm{grad}(\bar{h}) = d$, luego $\mathrm{grad}(h) \geqslant d$, y finalmente $\mathrm{grad}(h) = d$. En consecuencia $\mathrm{grad}(g) = 0 : g \in A$. Como $g|f$, se tiene $g|c(f) \sim 1$, por lo tanto $g \sim 1$. Así, toda factorización de f en $A[x]$ es trivial : $f$es irreducible.

Solución del ejercicio 6500 ▲002294

1. Este polinomio es unitario por lo tanto primitivo. 11 es un número primo que divide todos los coeficientes excepto el dominante. $11^2 = 121$ no divide el coeficiente de grado 0, por lo tanto, según el criterio de Eisenstein, es un polinomio irreducible de $\mathbb{Q}[X]$.
2. $f(X,Y) = (X^2+1)Y^3 + (X-1)^2Y^2 + (X-1)$. Se observa f como un polinomio de $A[Y]$, con $A = \mathbb{C}[X]$. Entonces, f es primitivo en A, y $(X-1)$ es un irreducible de A que divide todos los coeficientes de f excepto el dominante, y cuyo cuadrado no divide el término constante. Según el criterio de Eisenstein, se deduce que f es irreducible en $A[Y] = \mathbb{C}[X,Y]$. En $\mathbb{Z}_2[X,Y]$, se tiene $(X^2+1) = (X+1)^2$ y $f = (X+1)((X+1)(Y^3+Y^2)+1)$, por lo tanto f no es irreducible.
3. $f(X,Y) = Y^7+Y^6+7Y^4+XY^3+3X^2Y^2-5Y+X^2+X+1$. Se considera f como un polinomio de $A[X]$, donde $A = \mathbb{Q}[Y]$. Entonces f es primitivo en A. Sea $\pi = Y \in A$. π es irreducible, π no divide el coeficiente dominante de f, y la reducción $\bar{f}$ módulo π es $\bar{f} = X^2+X+1 \in A/(\pi)[X] = \mathbb{Q}[X,Y]/(Y) \simeq \mathbb{Q}[X]$. $\bar{f}$ es, por lo tanto irreducible en $A/(\pi)$, así que por el ejercicio previo, f es irreducible en $\mathbb{Q}[X,Y]$.

Solución del ejercicio 6501 ▲002295

Sea $f = x^2+y^2+1 \in A[x,y]$ ($A = \mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2$). Sea $B = A[y]$, y se observa f como un polinomio de $B[x]$. El coeficiente dominante de f (que es 1) es invertible en B, entonces se puede efectuar la división euclidiana de todo polinomio por f : $\forall g \in B[y], \exists (q,r) \in B[x]^2,\ g = qf + r$ y $\mathrm{grad}_x r \leqslant 1$. Denotemos $r = a(y)x + b(y),\ a,b \in A[y]$. Además, por razones de grado, el cociente y el resto de esta división son únicos. Se puede así identificar $A[x,y]/(x^2+y^2+1)$ a $\{a(y)x+b(y),\ a(y),b(y) \in A[y]\}$. Se supone que $\bar{y}$ sea invertible en este cociente. Existe $a,b \in A[y]$ tales que $y(a(y)x+b(y)) = \bar{1}$. Se tiene entonces $ya(y) = 0$ y $yb(y) = 1$, lo que es imposible.

Solución del ejercicio 6503 ▲002297

Recordar que $(a)\cdot(b) = \{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i, n \in \mathbb{N}, a_i \in (a), b_i \in (b)\} = (ab)$. Además, $(ab) \subset (a)\cap(b)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
(ab) = (a)\cap(b) &\Leftrightarrow (a)\cap(b) \subset (ab)\\
&\Leftrightarrow \forall m \in A,\ (a|m \text{ y } b|m \Rightarrow ab|m)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{mcm}(a,b) \sim ab\\
&\Leftrightarrow \mathrm{mcm}(a,b) \sim \mathrm{mcd}(a,b)\mathrm{mcm}(a,b)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{mcd}(a,b) \sim 1.
\end{aligned}$$

Si A es principal, entonces $\exists d \in A,\ (a,b) = (d)$. Así $a \in (d)$ y $b \in (d)$, por lo tanto d es un divisor común de a y b. Si además d' es otro divisor común de a y b, entonces $a \in (d')$ y $b \in (d')$ y como (a,b) es el ideal más pequeño que contiene a y b, se deduce que $(a,b) = (d) \subset (d')$, y así como $d'|d$: finalmente, $\mathrm{mcd}(a,b) = d$.

Solución del ejercicio 6504 ▲002298

---

1. $I = (5, x^2+3)$. Se tiene $\mathrm{mcd}(5, x^2+3) = 1$, entonces si I es principal, se tiene $1 \in I$, y entonces $I = \mathbb{Z}[X]$. Si $1 \in I$, existe $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$, tales que $1 = 5P + (x^2+3)Q$. Considerando la reducción módulo 5 de estos polinomios, se obtiene $(x^2+\bar{3})\bar{Q} = \bar{1}$, lo cual es imposible por razones de grado ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ es íntegro). Entonces $1 \notin I$, e I por lo tanto no es íntegro.

   $x^2+1 = (x+2)(x-2)+5$, por lo tanto $(x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. Así $(x+2, 5)$ no es principal por las mismas razones anteriores.

   Se tiene $(x-1) = (x^4-1) - x(x^3-1)$, por lo tanto $(x-1) \subset (x^4-1, x^3-1)$. Por otro lado, $(x-1)|(x^4-1)$ y $(x-1)|(x^3-1)$, por lo que $x^4-1 \in (x-1)$ y $x^3-1 \in (x-1)$, por lo tanto $(x^4-1, x^3-1) \subset (x-1)$. Entonces (x^4-1, x^3-1) es principal.
2. $I = (x, x+1) = \mathbb{Z}$, pues $1 = (x+1) - x$. Entonces I no es propio.

   $I = (5, x^2+4)$. $\mathbb{Z}[X]/I \sim \mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$. Pero $(x^2+\bar{4}) = (x-\bar{1})(x+\bar{1})$ es reducible en $\mathbb{Z}_5[x]$, por lo tanto $\mathbb{Z}_5/(x^2+\bar{4})$ no es íntegro : I no es primo.

   $I = (x^2+1, x+2) = (x+2, 5)$. $\mathbb{Z}[x]/I \simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x+\bar{2})$. $x+\bar{2}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_5[x]$, que es principal, por lo tanto $(x+\bar{2})$ es maximal, entonces el cociente es un cuerpo, e I es maximal.

Solución del ejercicio 6505 ▲002299

---

1. Sea $a, b \in B$, $ab \in I \cap B$. Entonces $ab \in I$, por lo tanto $a \in I$ o $b \in I$. Como $a, b \in B$, se tiene $a \in I \cap B$ o $b \in I \cap B$. Entonces, si $I \cap B$ es propio, $I \cap B$ es primo.
2. Sea J un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$. Entonces $J \cap \mathbb{Z}$ es ya sea $\mathbb{Z}$ o ya sea un ideal primo de $\mathbb{Z}$. Si $J \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, entonces $1 \in J$, y entonces $J = \mathbb{Z}[X]$, lo que está excluido. Se deduce que $J = (0)$ o $J = (p)$, con p primo.
3. Se supone $J \cap \mathbb{Z} = (0)$ y $J \neq (0)$. Sea entonces f un polinomio de $J \setminus \{0\}$ de grado minimal. Denotemos $f = c(f)f_0$, donde $f_0 \in \mathbb{Z}[x]$ es primitivo. Como J es primo, se tiene $c(f) \in J$ o $f_0 \in J$. Como $J \cap \mathbb{Z} = \{0\}$, se excluye el primer caso, por lo tanto $f_0 \in J$. Sea ahora $g \in J$. Sea $g = f_0 q + r$ la división euclidiana de g por f_0 en $\mathbb{Q}$ ($q, r \in \mathbb{Q}[x]$). Denotemos $q = \frac{a}{b} q_0$, con $q_0 \in \mathbb{Z}[x]$ primitivo, y $r = \frac{a'}{b'} r_0$, con $r_0 \in \mathbb{Q}[x]$ primitivo.

   Entonces $bb'g = ab'q_0 f_0 + a'b r_0$ Se deduce que $a'b r_0 \in J$, y por razones de grado, $r_0 = 0$. Finalmente, $bb'g = ab'q_0 f_0$, y considerando los contenidos, se deduce que $bb'|ab'$, por lo tanto $b|a$, y entonces $q \in \mathbb{Z}[x]$. Se deduce que $g \in (f_0)$, y finalmente $J = (f_0)$.
4. Se supone que $J \cap \mathbb{Z} = (p)$. Sea r_p la proyección $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p[x]$ tales que $\alpha\beta \in r_p(J)$. Sean f, g de representantes de α y β (i.e. $r_p(f) = \alpha$, $r_p(g) = \beta$). Así $fg \in r_p^{-1}(r_p(J)) = J + (p) = J$. Por lo tanto $f \in J$ o $g \in J$, y entonces $\alpha \in r_p(J)$ o $\beta \in r_p(J)$: $r_p(J)$ es primo. $\mathbb{Z}_p[x]$ es principal, entonces existe un polinomio π irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$ tal que $r_p(J) = (\pi)$. Sea g un representante de π. Entonces $J = (p, g)$: en efecto, se ha visto que $J = r_p^{-1}((\pi))$ y $r_p^{-1}((\pi)) = (g) + (p) = (p, g)$.
5. Se supone J maximal en $\mathbb{Z}[x]$. J es en particular primo, así tiene una de las dos formas anteriores. Se supone $J = (f)$, con f irreducible y primitivo. Sea p un número primo no divisor del coeficiente dominante de f. Entonces $J \subset (p, f) \subset \mathbb{Z}[x]$, pero $(p, f) \neq \mathbb{Z}[x]$. En efecto, si no, existe $g, h \in \mathbb{Z}[x]$

tales que $1 = pg + fh$, y considerando la reducción módulo p, $\bar{f}$ es invertible en $\mathbb{Z}_p[x]$: como grad $\bar{f} > 0$, es imposible. Se deduce que J no es maximal. J es, por lo tanto de la forma (p, g), con $r_p(g)$ irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$.

Solución del ejercicio 6563 ▲007726

1. Si q y Q son equivalentes, existe un isomorfismo lineal u de E tal que $Q = q \circ u$. En consecuencia Q toma todos los valores que toma q.
2. Se sabe en este caso, que el vector isotrópico está en un plano hiperbólico, en el cual q es equivalente a la forma $Q(x,y) = xy$ que toma todos los valores de k.
3. Se procede por inducción como en el curso utilizando el hecho de que la ortogonal de un espacio no singular en un espacio no singular es no singular y se detiene cuando la forma no tiene más vectores isotrópicos no nulos.
4. Si en tal descomposición, hay k planos hiperbólicos, y en otra k', si $k \leqslant k'$, por el teorema de Witt, la isometría entre k de los planos hiperbólicos de las dos descomposiciones induce una equivalencia de los ortogonales. En particular, no tienen vectores isotrópicos. Entonces $k' = k$. Usando la descomposición, uno puede construir fácilmente un subespacio totalmente isotrópico I de dimensión k. El número k es, por lo tanto menor que el índice de q. Se inyecta I en un subespacio totalmente isotrópico de dimensión maximal M. Por el teorema de Witt, los ortogonales son isomorfos y por lo tanto, no contienen vectores isotrópicos. Entonces, I es de dimensión maximal, y $k = \nu(q)$.

Solución del ejercicio 6564 ▲007727

1. Es necesario demostrar que σ es un morfismo de cuerpos, luego que es una biyección. La biyección inversa es entonces automáticamente un morfismo de cuerpos. Para el primer punto, σ es fácilmente multiplicativo y $\sigma(1) = 1$. Para demostrar que $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, se utiliza la fórmula binomial luego el hecho de que el cuerpo $\mathbb{F}_5$ es de característica 5. Para el segundo punto, es suficiente demostrar que σ es inyectiva ya que su conjunto de salida tiene la misma cardinalidad finita que su conjunto de llegada. Por esto, es suficiente decir que σ es un morfismo de cuerpos.
2. Las formas f_1 y f_3 son lineales con respecto a la primera variable, y usando la expresión
$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x\sigma(x') + 3z\sigma(y') + 3y\sigma(z')$$
se demuestra así que son σ-semi lineal con respecto a la segunda variable. Son por lo tanto sesquilineales. Sin embargo, ya que existen como máximo cinco elementos de $\mathbb{F}_{25}$ que verifican $\lambda^5 = \lambda$, existe un $\lambda \in \mathbb{F}_{25}$ tal que $f_2(\lambda \cdot (1,1,1), (1,1,1)) = 3\lambda^5 \neq \lambda \cdot f_2((1,1,1),(1,1,1))$. La forma f_2 por lo tanto no es sesquilineal.
3. Por un teorema del curso, es el rango que clasifica las formas sesquilineales sobre campos finitos. Como f_1 y f_3 tienen el mismo rango 3, son equivalentes.

Solución del ejercicio 6565 ▲007728

1. La restricción de una forma alternada en una recta es nula. Las rectas son, por lo tanto todas congruentes. Por el teorema de Witt, toda isometría entre dos rectas se extiende al espacio E no degenerado en un elemento de G. En consecuencia, las rectas están todas en la misma órbita para la acción de G.
2. Las formas alternativas se clasifican hasta la equivalencia por su rango, que siempre es par. En consecuencia, las restricciones a un plano son, por lo tanto la forma cero o una forma simpléctica de rango 2.
3. Por la pregunta anterior y por el teorema de Witt, se concluye como en la primera pregunta que existe dos órbitas en el conjunto de planos de E.

Solución del ejercicio 6608 ▲007838

Sea n un entero superior a 3. Sea D_{2n} el conjunto de isometrías de un polígono regular P a n lados de un plano euclidiano real. Como todas las isometrías son afines, el isobaricentro G de vértices de P se mantiene. Los elementos de D_{2n} de determinante positivo son, por lo tanto rotaciones de centro G, y los de determinante negativo son las simetrías ortogonales respecto a las rectas que pasan por G. Como una rotación que tiene dos puntos fijos es la identidad, las rotaciones son de menor orden que n. Así solo quedan los n rotaciones de ángulo múltiplo de $2\pi/n$. Como la composición de las simetrías de dos ejes que pasan por G es una rotación, hay así exactamente n simetrías, obtenidos como producto de n rotaciones por una simetría fija.
La aplicación $\det: D_{2n} \to \{-1,1\}$ es un morfismo de grupo cuya imagen es el grupo conmutativo $\{-1,1\}$ y por núcleo el grupo conmutativo R_n de rotaciones de centro G de ángulo múltiplo de $2\pi/n$. El grupo derivado $D^{(1)}(D_{2n})$ de D_{2n} por lo tanto, se incluye en el subgrupo conmutativo de rotaciones. En consecuencia, el segundo grupo derivado $D^{(2)}(D_{2n}) = \{\mathrm{Id}\}$ y D_{2n} es resolube.

Solución del ejercicio 6609 ▲007839

Las formas bilineales simétricas dadas por las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{F}_7^3$, $q(x,y,z) = x^2+6y^2+2z^2$ y $Q(x,y,z) = xy+3z^2$ tienen como matriz en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y son no-degeneradas de discriminante 5 y 1. Como $5^{\frac{7-1}{2}} = -1[7]$, 5 no es un cuadrado mientras que $1 = 1^2$ lo es, por lo tanto las formas no son equivalentes.

Solución del ejercicio 6610 ▲007840

Sea (E,f) y $(E,f')'$ dos espacios simplécticos no singulares de dimensión 4. Sea $d \subset E$ y $d' = \mathrm{vect}(x') \subset E'$ dos rectas y f una aplicación lineal biyectiva de d sobre d'. Se escribe $d = \mathrm{vect}(x)$ y $d' = \mathrm{vect}(x')$, donde $x' = f(x)$.
Notemos que como d y d' son de dimensión 1, por lo tanto isotrópicos, f es una isometría (para las formas bilineales inducidas). Porque f es no degenerada, se escoge un vector z (no colineal con x) tal que $f(x,z)$ es no nulo por lo tanto invertible en k. Se define y bajo la forma $y = \alpha x + f(x,z)^{-1}z$. Entonces, (x,y) es una par simpléctico. El ortogonal de $\mathrm{vect}(x,y)$ (provisto de la forma inducida) es un plano no-singular, ya que $\mathrm{vect}(x,y)$ es no-singular. Por la construcción precedente, se encuentra un par simpléctico (X,Y). El mismo razonamiento permite de encontrar una base (x',y',X',Y') de E' tal que (x',y') y (X',Y') sean dos

pares simplécticos ortogonales de E'. La aplicación f definida por $x \mapsto x'$, $y \mapsto y'$, $X \mapsto X'$ y $Y \mapsto Y'$ es una isometría de E sobre E' que extiende f.

Solución del ejercicio 6626 ▲002547

1. Se considera $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda$. Entonces F es de clase C^1, $J_F(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ y $S_\lambda = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\, F(x_1,x_2,x_3) = 0\}$.

   Si $\lambda \neq 0$, rango$(J_F(x_1,x_2,x_3)) = 1$ (el máximo posible) porque si no x_1,x_2,x_3 son todos nulos : imposible pues $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$. Como $(0,0,0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda$, rango$J_F(a) = 1$ y entonces S_λ es una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

   Si $\lambda = 0$, $T_0(S_\lambda) = \{$vectores tangente a S_n en $0\}$. Entonces $T_0 S_0$ es un cono y entonces S_0 no es una sub-variedad.

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ y $x \in S_\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, $J_F(x) = (2x_1, 2x_2, -2x3)$ y entonces

$$
\begin{aligned}
T_x S_\lambda &= \{u \in \mathbb{R}^3; DF(x)\cdot u = 0\} = \{u = (u_1,u_2,u_3); (2x_1, 2x_2, -2x_3)\cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0\} \\
&= \{(u_1,u_2,u_3); 2x_1u_1 + 2x_2u_2 - 2x_3u_3 = 0\} = \{(u_1,u_2,u_3); 2B(x,u) = 0\}
\end{aligned}
$$

   de donde

$$
T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3; B(x,u) = 0\}.
$$

Solución del ejercicio 6627 ▲002548

Caso de $\mathbb{R}^2$. $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$. La hipótesis sobre u implica que $u_{12} = u_{21}$. Si $x = (x_1, x_2)$, se tiene $u(x) = \begin{pmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 \end{pmatrix}$ y

$$
\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i(x) x_i = (u_{11}x_1 + u_{12}x_2)x_1 + (u_{21}x_1 + u_{22}x_2)x_2 = u_{11}x_1^2 + u_{12}x_1x_2 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2.
$$

Pongamos $f(x) = \langle u(x), x \rangle - 1$, entonces

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{21}x_2 = 2u_{11}x_1 + 2u_{12}x_2 \ \text{ y } \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2u_{22}x_2 + u_{12}x_1 + u_{21}x_1 = 2u_{21}x_1 + 2u_{22}x_2.
$$

Calculemos

$$
Df(x)\cdot x = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(u_{11}x_1^2 + u_{12}x_2x_1 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2) = 2\langle u(x), x \rangle .
$$

Si $x = (x_1,x_2) \in Q$, entonces $\langle u(x), x \rangle = 1 \neq 0$ y entonces $Df(x)$ es no nulo, es de rango al menos 1 y por lo tanto, de rango maximal. Q es de hecho una sub-variedad de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1. Determinar el plano tangente de Q.

$$
T_x Q = \{y \in \mathbb{R}^2; Df(x)(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) y_i = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n; 2\langle u(x), y \rangle = 0\}.
$$

Solución del ejercicio 6679 ▲007688

El vector velocidad es $\dot{c}(t) = (-4\operatorname{sen} t, -5\cos t, 3\operatorname{sen} t)$. Su norma es 5. En consecuencia, el ajuste por $C:\ t \mapsto (4\cos t/5, 5-5\operatorname{sen} t/5, -3\cos t/5)$ es una parametrización por la longitud del arco. El nuevo vector velocidad es $\dot{C}(t) = (-4/5\operatorname{sen} t/5, -\cos t/5, 3/5\operatorname{sen} t/5)$.
El vector aceleración es $\ddot{C}(t) = (-4/25\cos t/5, 1/5\operatorname{sen} t/5, 3/25\cos t/5)$. Su norma $1/5$ es la curvatura κ. Por lo tanto, el vector unitario normal es $n(t) = (-4/5\cos t/5, \operatorname{sen} t/5, 3/5\cos t/5)$. El vector binormal es $\dot{C}(t)\times n(t) = (-3/5, 0, -4/5)$. Como es constante, la torsión es nula por las fórmulas de Frénet.
Sí, la curva es plana, porque la torsión es cero. También se puede observar que la curva está en el plano de la ecuación $3X+4Z=0$.

Solución del ejercicio 6680 ▲007689

1. El vector velocidad de la curva C' es $(1,2t,0)$ de norma $\sqrt{1+4t^2}$. La longitud de la curva C' es, por lo tanto $l[C'] = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt$. La curva C es parametrizada por $x=t$, $y=t^2$ $z=2/3t^3$, para t recorriendo $[0,1]$. El vector velocidad de la curva C es $(1,2t,2t^2)$ de norma $\sqrt{1+4t^2+4t^4} = 1+2t^2$. La longitud de la curva C es, por lo tanto $l[C] = \int_0^1 1+2t^2dt$. Como para todo $t\in[0,1], 0\leqslant 1+4t^2 \leqslant (1+2t^2)^2$, para todo $t\in[0,1], \sqrt{1+4t^2}\leqslant(1+2t^2)$ y por integración $l[C']\leqslant l[C]$.
2. Usando el cambio de variables $2t=\sinh(u)$, se obtiene el cálculo de la primitiva

$$\begin{aligned}4\int\sqrt{1+4t^2}dt = 2\int\cosh^2 u du = \int(\cosh(2u)+1)du = \sinh(2u)/2+u \\ = \sinh u\cosh u + u = 2t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2}).\end{aligned}$$

   En consecuencia, el largo de C' es $1/4[2t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})]\Big|_0^1 = 1/4(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$. La longitud de C es $1+2/3$.

Solución del ejercicio 6681 ▲007690

1. La superficie S es el gráfico de la función $\mathscr{C}^\infty$ $f:\ (y,z)\mapsto -2(2z^2+y^2)$. Por lo tanto, es regular.
2. La superficie S es parametrizada por $F(u,v) = (-2(u^2+2v^2),u,v)$.
3. El punto A se obtiene en el punto del parámetro $(1,-1)$. Se calcula $\frac{\partial F}{\partial u} = (-4u,1,0) = (-4,1,0)$ y $\frac{\partial F}{\partial v} = (-8v,0,1) = (8,0,1)$. Estos dos vectores forman una base del espacio tangente a S en el punto de parámetro (u,v).
4. Como S es la línea de nivel 0 de la función $\varphi(x,y,z) = 2(2z^2+y^2)+x$ sobre $\mathbb{R}^3$, se calcula $(\operatorname{grad}\varphi)_A = (1,4y,8z) = (1,4,-8) =: n$. Este vector es ortogonal en el plano tangente obtenido a la pregunta 3.
5. Como $\langle V,n\rangle = \langle(27,-29,-1),(1,4,-8)\rangle = -81\neq 0$, el vector V no está en el plano tangente a S en A.

Solución del ejercicio 6682 ▲007691

Se parametriza $\mathscr{E}$ en coordenadas esféricas para $F(\theta,\varphi) = (\cos\theta - * + \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 1/\sqrt{5}\cos\varphi)$, con $\theta \in [0,2\pi[$ y $\varphi \in [0,\pi]$. El plano tangente es generado por los vectores $\frac{\partial F}{\partial\theta} = (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, 0)$ y $\frac{\partial F}{\partial\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -1/\sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi)$. En esta base, la matriz de la primera forma fundamental es $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + 1/5\operatorname{sen}^2\varphi \end{pmatrix}$. El elemento de volumen es $1/\sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\theta d\varphi$. El área del elipsoide es, por lo tanto

$$\begin{aligned} A[\mathscr{E}] &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\varphi d\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{\pi}{\sqrt{5}}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})) = \pi(2+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}). \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6683 ▲007692

Se parametriza la superficie S por $F(u,v) = (u,v,u^2-v^2)$. El espacio tangente en p es generado por $(\frac{\partial F}{\partial u})_p = (1,0,2u)_p = (1,0,0)$ y $(\frac{\partial F}{\partial v})_p = (0,1,-2v)_p = (0,1,0)$. La matriz de la primera forma fundamental en esta base es en p de parámetro $(0,0)$ $\begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$. La matriz de la segunda forma fundamental se calcula utilizando el vector normal $n = (\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial F}{\partial v})_p = (0,0,1)$ por $\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, n\right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}, n\right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}, n\right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, n\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Como la matriz de la primera forma fundamental es la identidad, esta última matriz es también la del endomorfismo de Weingarten. La curvatura de Gauss es, por lo tanto el determinante -4. Las dos direcciones principales están dirigidas por los vectores $\frac{\partial F}{\partial u}\big|_p = (1,0,0)$ y $\frac{\partial F}{\partial v}\big|_p = (0,1,0)$.

Solución del ejercicio 6684 ▲007693

1. La función de curvatura es continua y no constante en el compacto $[0,\ell]$. Por tanto, alcanza su máximo y su mínimo en dos puntos distintos P y Q. Como es continuamente derivable, en estos puntos su derivada es cero. Así estos son esquinas.
2. Se utiliza la fórmula de Frénet $\dot{n}(t) = -\kappa(t)\dot{c}(t)$.
$$\int_0^{\ell}\dot{\kappa}c(t) = -\int_0^{\ell}\kappa\dot{c}(t) = \int_0^{\ell}\dot{n}(t) = n(\ell)-n(0) = 0.$$
3. Por hipótesis, la ordenada de $\dot{\kappa}(t)c(t)$ es de signo constante en las dos partes de la curva delimitada por P y Q. Esto contradice la anulación de la integral.
4. Si solo existen tres esquinas, la curva se divide en tres partes. Sobre dos de partes adyacentes $\dot{\kappa}$ tiene el mismo signo. El razonamiento precedente en desplazando la curva, de manera que $\dot{\kappa}$ sea de signo constante en cada semiplano $(y \geqslant 0)$ y $(y \leqslant 0)$ conduce a una contradicción.

Solución del ejercicio 6688 ▲007697

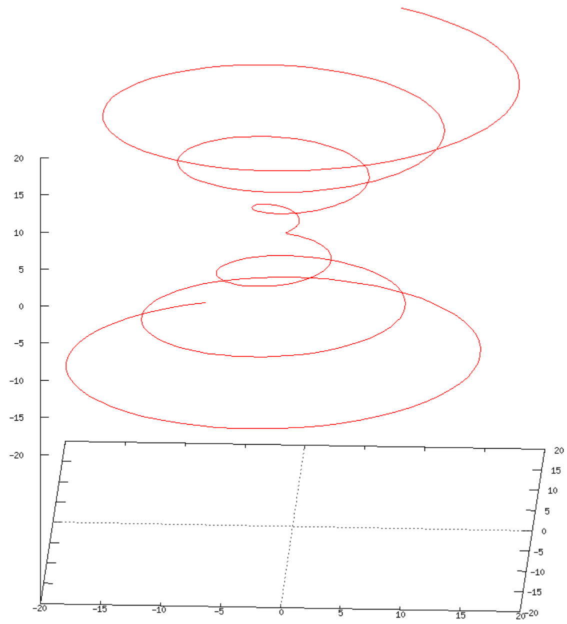
1. Los componentes de la aplicación c son de clase $\mathscr{C}^{\infty}$. La derivada de la última componente nunca es nula. La curva c es, por lo tanto regular.

2. Para todo parámetro t, $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{2+t^2} \geqslant \sqrt{2}$. Así, $L[c_{|[a,b]}] = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \geqslant \sqrt{2}(b-a)$.

3. Sea $t \in \mathbb{R}$, $(t\cos t)^2 + (t \operatorname{sen} t)^2 = t^2 = (t)^2$. En consecuencia, $\mathscr{C}$ está en la cuádrica de ecuación $x^2+y^2=z^2$.

4. Sea $t \in \mathbb{R}$, $c(-t) = \begin{pmatrix} -t\cos t \\ t\operatorname{sen} t \\ -t \end{pmatrix}$ y por lo tanto, se deduce de $c(t)$ por la semi vuelta alrededor del eje de ordenadas (de ecuación $x = z = 0$).

5.



6.

$$c(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\operatorname{sen} t \\ t \end{pmatrix}; \quad \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} t - t\cos t \\ 2\cos t - t\operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos t + t\operatorname{sen} t \\ -3\operatorname{sen} t - t\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\det \begin{pmatrix} \cos t - t\operatorname{sen} t & -2\operatorname{sen} t - t\cos t & -3\cos t + t\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t + t\cos t & 2\cos t - t\operatorname{sen} t & -3\operatorname{sen} t - t\cos t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = t^2 + 6.$$

Por otro lado,

$$\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} t - t\cos t \\ 2\cos t - t\operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t + t\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t - t\cos t \\ 2+t^2 \end{pmatrix}$$

cuyo la norma al cuadrado es t^4+5t^2+8. La función torsión de c es, por lo tanto

$$\tau(t)=\frac{t^2+6}{t^4+5t^2+8}.$$

Solución del ejercicio 6689 ▲007698

La aplicación F es inyectiva y diferenciable porque sus componentes lo son. Se calcula

$$X_u=\frac{\partial F}{\partial u}=\begin{pmatrix}\sinh(u)\cos(v)\\ \sinh(u)\operatorname{sen}(v)\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_v=\frac{\partial F}{\partial v}=\begin{pmatrix}-\cosh(u)\operatorname{sen}(v)\\ \cosh(u)\cos(v)\\ 0\end{pmatrix}$$

para determinar el rango de dF, que es así 2. En consecuencia, la imagen S de F es una superficie regular. También puede determinar

$$G=\cosh^2 u\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

También se utiliza para encontrar un campo diferenciable de vectores unitarios normales $N=\frac{1}{\cosh u}\begin{pmatrix}-\cos v\\ -\operatorname{sen} v\\ \sinh u\end{pmatrix}$.

Se puede entonces, calcular

$$W(X_u)=-dN\cdot X_u=-\frac{\partial N}{\partial u}=-(\cosh^{-2}u)X_u \ \text{ y } \ W(X_v)=-dN\cdot X_v=-\frac{\partial N}{\partial u}=(\cosh^{-2}u)X_v$$

y deducir que valores propios del endomorfismo de Weingarten W son $-\cosh^{-2}u$ y $\cosh^{-2}u$. Entonces, W es de semi-traza nula, y la curvatura media de $\operatorname{Im} F$ es nula en todas partes. Se puede también calcular $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, para obtener $H=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Se calcula $G^{-1}=\cosh^{-2}u\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, entonces $W=G^{-1}H=\begin{pmatrix}-\cosh^{-2}u&0\\0&\cosh^{-2}u\end{pmatrix}$. Como la semi traza de W es nula, la superficie S es en todas partes de curvatura media nula.

Solución del ejercicio 6690 ▲007699

1. Como para todo $t\in\mathbb{R}$, y todo $a_i n\mathbb{R}$, $c(t+a)=t_{(0,0,a)}(c(t))$, la imagen de F es invariante a todas las traslaciones del vector paralelo a $\overrightarrow{k}$, el tercer vector de la base canónica. Se observa así que $F(-t,-s)$ se obtienen a partir de $F(t,s)$ por la media vuelta del eje de abscisas. La semi-vuelta conserva, por lo tanto la imagen de F.
2. Sea $(u,v)\in\mathbb{R}^2$,
$$(1-t^2)^2(1-(1-t^2))=(1-t^2)^2t^2=[t(1-t^2)]^2.$$
Entonces, la imagen de F está incluida en el conjunto de ecuaciones $y^2=x^2(1-x)$.
Sea (x,y,z) incluido en el conjunto de ecuaciones $y^2=x^2(1-x)$.
Si $x=0$, $y=0$ y $(x,y,z)=F(1,z)$. Si $x\neq 0$, sea $s=z$ y $t=y/x$. Se verifica que $F(t,s)=(x,y,z)$.
Así, la imagen de F es el conjunto de ecuación $y^2=x^2(1-x)$.

3. En el vecindario del punto $(0,0,0)$ de la imagen de S, la proyección en el plano $x=0$ da a cada punto dos antecedentes, la proyección en el plano $y=0$ también, y la proyección en el plano $z=0$ da a cada punto ya sea una infinidad, ya sea ningún antecedente. En consecuencia, en un vecindario de $(0,0,0)$ la imagen de S no es un gráfico. La imagen de F por lo tanto no es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

Solución del ejercicio 6691 ▲007700

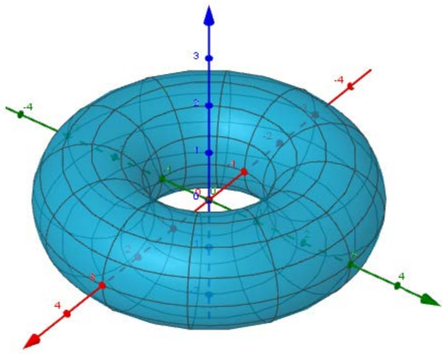
Se denota S la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$. La función f es diferenciable en la esfera como una restricción de una función polinomial en $\mathbb{R}^3$. La función f continua en el compacto S alcanza sus extremos. En un punto extremo, el diferencial de la función f restringida al espacio tangente debe ser nula. El gradiente de f debe así ser normal al espacio tangente. Se encuentra que el vector $\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ debe ser paralelo al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Como x, y y z no son simultáneamente nulas en S, $z=0$ y $x^2=y^2$. Porque $x^2+y^2+z^2=1$, $x=\pm 1/\sqrt{2}$ y $y=\pm 1/\sqrt{2}$. Comparando los valores en estos cuatro puntos, se encuentra que el mínimo absoluto de la función f es, por lo tanto $-1/2$ alcanzado en los dos puntos $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$ y $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$. El máximo absoluto de la función f es, por lo tanto $1/2$ alcanzado en los dos puntos $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ y $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$.

Solución del ejercicio 6692 ▲007701

1. Como las componentes de c son de clase $\mathscr{C}^\infty$, es de clase $\mathscr{C}^\infty$. La derivada de la última coordenada nunca se anula. La curva c es, por lo tanto regular.
2. El vector velocidad
$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\operatorname{sen} t \\ 3\cos t \\ 4 \end{pmatrix}$$
es de norma 5. Como la curva c es regular, se puede encontrar una parametrización por longitud de arco. El parametraje
$$\begin{aligned} e :]0,5[&\to \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(s/5) \\ 3\operatorname{sen}(s/5) \\ 4s/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
de la forma $e(s) = c(\phi(s))$ es una reparametrización por longitud de arco, pues de/ds es en todas partes de norma 1.
3. Se utiliza la parametrización por longitud de arco.
El primero vector es el vector velocidad $\dot{e}(s) = v(s) = \begin{pmatrix} -3/5\operatorname{sen}(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix}$.
El segundo es el vector normal. El vector aceleración es $\ddot{e}(s) = \begin{pmatrix} -3/25\cos(s/5) \\ -3/25\operatorname{sen}(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$. Se encuentra que la curvatura es $3/25$ y el vector normal $n(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\operatorname{sen}(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$.

El tercer vector es el vector binormal $b(s) = v(s) \wedge n(s) = \begin{pmatrix} -3/5\,\mathrm{sen}(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\mathrm{sen}(s/5) \\ 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 4/5\,\mathrm{sen}(s/5) \\ -4/5\cos(s/5) \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 6693 ▲007702

1. 

2. La aplicación F es de clase $\mathscr{C}^\infty$ e inyectiva.
   Se calcula $x_\varphi = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ y $X_\theta = \begin{pmatrix} -(2+\cos(\varphi))\,\mathrm{sen}(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Si $\varphi \neq 0$, $\mathrm{sen}(\varphi) \neq 0$ y las dos primeras coordenadas son independientes.
   Si $\varphi = 0$, $X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $X_\theta = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ son independientes. Así, dF es en todas partes de rango 2, entonces un homeomorfismo local. Porque es inyectiva, la aplicación F es, por lo tanto un parametraje. La imagen T es así una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

3. Se determina primero la matriz de la primera forma fundamental
   $$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos(\varphi))^2 \end{pmatrix}$$
   Se escoge como campo de vectores unitarios normales
   $$N = -\frac{X_\varphi \wedge X_\theta}{2+\cos(\varphi)} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\varphi) \end{pmatrix}.$$
   Se determina luego el endomorfismo de Weingarten W por
   $$WX_\varphi = \frac{\partial N}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = X_\varphi \;\text{ y }\; WX_\theta = \frac{\partial N}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)} X_\theta$$
   Se deduce que los valores propios de W son 1 y $\frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$, y que la curvatura gaussiana es, por lo tanto $K(\varphi,\theta) = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$.

4.

$$\begin{aligned}\int_T K(m)d\sigma(m) &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} K(\varphi,\theta)\sqrt{\det G}\,d\varphi d\theta\\ &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}(2+\cos(\varphi))d\varphi d\theta\\ &= 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi)d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6694 ▲007703

1. Como F es una parametrización de la superficie regular T, los vectores $x_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ y $X_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta}$ son independientes y forman una base del espacio tangente a T en $F(\varphi,\theta)$. La matriz impuesta es la de un producto escalar. Como es constante, depende de (φ,θ) de manera $\mathscr{C}^\infty$.
2. Dado que la matriz de la métrica de Riemann es constante, los símbolos de Christoffel son nulos en todos los puntos y el tensor de curvatura es idénticamente nulo. Se deduce que la curvatura de Gauss es idénticamente nula.
3. Según la pregunta anterior $\int_T K(m)d\sigma(m) = 0$.

Solución del ejercicio 6701 ▲007710

1. La curvatura de un círculo de radio r es en valor absoluto $1/r$.
2. Porque la función norma (al cuadrado) ϕ es diferenciablemente continua y maximal en el punto del parámetro τ, su derivada en τ se anula. Se encuentra $\phi'(\tau) = 2\langle c(\tau),\dot{c}(\tau)\rangle = 0$. Por otro lado, como la función c da una parametrización para la longitud del arco, la función $t\mapsto \|\dot{c}(t)\|^2$ es constante igual a 1, por lo tanto también de derivada nula en τ. Se encuentra $2\langle\ddot{c}(\tau),\dot{c}(\tau)\rangle = 0$. En consecuencia, denotando $\overrightarrow{n}$ un vector unitario normal a $\dot{c}(\tau)$, se encuentra $c(\tau) = \pm\overrightarrow{n}$ y $\ddot{c}(\tau) = \kappa(\tau)\overrightarrow{n}$.
3. Porque la función norma ϕ es dos veces continuamente diferenciable y maximal en el punto del parámetro τ, su segunda derivada en τ es negativa. Se encuentra $\phi''(\tau) = 2\langle c(\tau),\ddot{c}(\tau)\rangle + 2\langle\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau)\rangle = \pm 2r\kappa(\tau)+2 \leqslant 0$. Entonces, $\pm 2r\kappa(\tau) \geqslant 2$ y consecuentemente $\pm r\kappa(\tau)$ es positivo de valor absoluto al menos 1. Dividiendo por $r>0$, se encuentra el resultado.
4. La curva es en sus puntos extremos es más curvada que el círculo de radio r que la bordea.

Solución del ejercicio 6702 ▲007711

1. Plan $T_M\mathscr{S}$ tangente a $\mathscr{S}$ en el punto M es generado por los dos vectores

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix}1\\2u_0\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix}2v_0\\-2v_0\\1\end{pmatrix}.$$

Una ecuación cartesiana del plano $T_M\mathscr{S}$ se obtiene por

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \in T_M\mathscr{S} \iff \begin{vmatrix}1 & 2v_0 & X\\ 2u_0 & -2v_0 & Y\\ 0 & 1 & z\end{vmatrix} = 0 \iff -2u_0X + Y + 2(1+2u_0)v_0Z = 0.$$

2. Es suficiente decir que el plano tangente $T_M\Sigma$ es el núcleo del diferencial de la función $\psi : (x,y,z) \mapsto x^5 + y^5 + z^5 - 1$ en (x_0, y_0, z_0). Se encuentra
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff 5(x_0^4 X + y_0^4 Y + z_0^4 Z) = 0 \iff x_0^4 X + y_0^4 Y + z_0^4 Z = 0.$$
3. Una ecuación del gráfico $\mathscr{G}$ de f es $z = f(x,y)$. Una ecuación del plano tangente en M de coordenadas $(x,y,f(x,y))$ es, por lo tanto
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff Z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)Y.$$

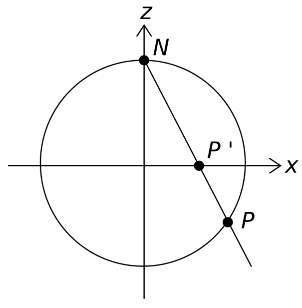
Solución del ejercicio 6703 ▲007712

---

1. Por el ejercicio anterior, $\mathscr{P}$ tiene como plano tangente en el punto $M(x,y,z)$ el plano de ecuación $Z = 2yY - 2xX$. En particular, el plano tangente en A es el plano de ecuación $Z = 0$ generado por los dos vectores base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, un campo de vectores unitarios normales es
$$N(x,y,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$
2. El endomorfismo de Weingarten se da en el punto $A(0,0,0)$ por $W_A = -dN(A) : T_A\mathscr{P} \to T_A\mathscr{P}$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. Sus valores propios son, por lo tanto -2 y 2. La curvatura de Gauss de $\mathscr{P}$ en A es, por lo tanto -4. Las direcciones propias son, por lo tanto los ejes de coordenadas x y y.

Solución del ejercicio 6704 ▲007713

Se encuentra usando la relación $\overrightarrow{NP'} \parallel \overrightarrow{NP}$ que la proyección estereográfica desde el polo norte sobre el plano ecuatorial está dada por
$$\begin{array}{rcl} p : S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



y el recíproco
$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & S^2 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{2x'}{(x')^2 + (y')^2 + 1} \\ \frac{2y'}{(x')^2 + (y')^2 + 1} \\ 1 - \frac{2}{(x')^2 + (y')^2 + 1} \end{pmatrix} \end{array}$$

en particular, el diferencial del parametraje F en el punto de parámetros $(0,0)$ es

$$\begin{array}{rcl} dF(0,0): T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 & \to & S_S^2 \\ \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2X' \\ 2Y' \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

no es ni una isometría, ni de determinante ± 1. La proyección estereográfica por lo tanto no retiene ni las longitudes, ni las áreas. Sin embargo, el diferencial del parametraje F en el punto de parámetros (x',y') es

$$\begin{array}{rcl} dF(x',y'): T_{(x',y')}\mathbb{R}^2 & \to & TS^2 \\ \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\dfrac{-(x')^2+(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' - 4\dfrac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ -4\dfrac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 2\dfrac{(x')^2-(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ 4\dfrac{x'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 4\dfrac{y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \end{pmatrix}. \end{array}$$

Se verifica entonces que

$$\left\| dF(x',y') \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{4\left\| \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|^2}{(x')^2+(y')^2+1}.$$

Así, $dF(x',y')$ conserva los ángulos.

Solución del ejercicio 6705 ▲007714

No, por ejemplo, las dos superficies regulares (gráficos) de ecuación $(z=0)$ y $(z=x^2-y^3)$ se intersecan en la curva de ecuación $(z=0, x^2-y^3=0)$ que es singular en $(0,0,0)$.

Solución del ejercicio 6731 ▲002495

1. Se tiene por definición $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}; |x-0| = |x| < 1\} = [-1,1]$.
2. Es la norma euclidiana sobre $\mathbb{R}^2$, $B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ es el disco de centro el origen y de radio 1.
3. $B_2(0,1) = \{(x,y); |x| < 1 \text{ y } |y| < 1\}$. Es un cuadrado.
4. $B_3(0,1) = \{(x,y); |x|+|y| < 1\}$.
   En el cuarto del plano $P^{++} = \{(x,y); x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, se tiene $B_3(0,1) \cap P^{++} = \{(x,y) \in p^{++}; x+y < 1\}$ es el triángulo limitado por las rectas $x=0, y=0$ y $x+y=1$. Haciendo lo mismo para las otras tres áreas del plano, se encuentra que $B_3(0,1)$ es un rombo (o cuadrado) cuyos vértices son los puntos $(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)$.

Todas estas distancias siendo invariantes por traslación (son normas), basta con demostrar que las normas asociadas $\|\cdot\|_i = d_i((x,y),0)$ son equivalentes.
Se tiene

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} ||(x,y)||_1 = \sqrt{(x^2+y^2)} &\leqslant \sqrt{\sup(x^2,y^2)+\sup(x^2,y^2)} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\sup(x^2,y^2)} \\ &\leqslant \sqrt{2}\sqrt{(\sup(|x|,|y|))^2} \leqslant \sqrt{2}||(x,y)||_2. \end{aligned}$$

Además,

$$||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{\sup(x^2,y^2)}\sqrt{(\sup(|x|,|y|)^2} \geqslant \sup(|x|,|y|) \geqslant ||(x,y)||_2.$$

Las distancias d_1 y d_2 son, por lo tanto equivalentes.
Del mismo modo se demuestra que

$$\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_3 \leqslant 2\|\cdot\|_2.$$

Solución del ejercicio 6732 ▲002496

Es necesario encontrar una sucesión de funciones de Cauchy de E que no converge en E. Es suficiente, por ejemplo, tomar una serie de funciones $\{f_n\}$ convergiendo para $\|\cdot\|$ hacia una función no continua. Por ejemplo, tomar

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 1-n(x-\frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se tiene entonces $\|f_n - f_0\|_1 = \frac{1}{2n}$, la sucesión converge simplemente y en norma $\|\cdot\|$ a la función f_0 que no es continua. Es suficiente demostrar entonces que no existe ninguna función continua g tal que $\|f-g\| = 0$ que prohíbe la existencia de un límite de f_n en E.

Solución del ejercicio 6734 ▲002498

Demostrar por recurrencia que $f(nx) = nx$ si $n \in \mathbb{N}$. Demostrar $f(-x) = -f(x)$, para llegar a $f(nx) = nf(x)$ si $n \in \mathbb{Z}$, luego $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ $p,q \in \mathbb{Z}$. Así f es lineal en $\mathbb{Q}$. Queda por demostrar que lo es en $\mathbb{R}$. Sea $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, queda a demostrar que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Tomemos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Se tiene entonces

$$f(\lambda_x) = f(\lambda_n x + (\lambda - \lambda_n)x) = \lambda_n f(x) + f((\lambda-\lambda_n)x).$$

Sea $c_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\|(\lambda-\lambda_n)x\|_E \leqslant c_n \leqslant 2\|(\lambda-\lambda_n)x\|_E.$$

Entonces

$$f((\lambda-\lambda_n)x) = f(c_n\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x) = c_n f(\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x)$$

y

$$\|\frac{\lambda-\lambda_n}{c_n}x\| \leqslant 1.$$

La aplicación f es acotada en la bola unidad por una constante $M > 0$, se tiene

$$\|f((\lambda-\lambda_n)x)\| \leqslant c_n M$$

y entonces

$$\|f((\lambda-\lambda_n)x)\| \leqslant c_n M \leqslant 2M\|(\lambda-\lambda_n)x\|_E$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} f((\lambda-\lambda_n)x) = 0,$$

observando que también se tiene
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$$
se obtiene
$$f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} [\lambda_n f(x) + f((\lambda - \lambda_n)x)] = \lambda f(x).$$

Solución del ejercicio 6735 ▲002499

Sea $X = (x,y)$, se tiene $M \cdot X = (ax+by, cx+dy)$ por lo que
$$|ax+by| \leqslant |ax| + |by| \leqslant (|a|+|b|) \sup(|x|,|y|) \leqslant (|a|+|b|)\|(x,y)\|_1.$$
Igualmente,
$$|cx+dy| \leqslant (|c|+|d|)\|(x,y)\|_1.$$
En consecuencia
$$\|M \cdot X\|_2 \leqslant \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)\|(x,y)\|_1$$
y entonces
$$\|M\| \leqslant \sup(|a|+|b|,|c|+|d|).$$
Se supone $|a|+|b| \geqslant |c|+|d|$ (invertir el orden si no) y tomar $X_0 = (a/|a|, b/|b|)$ (se supone $a \neq 0$ y $b \neq 0$ si no fácil de comprobar). Se tiene entonces $\|X_0\| = 1$ y
$$\|M \cdot X_0\|_2 = \sup(|a|+|b|, |ca/|a| + db/|b||) \geqslant |a|+|b| \cdot 1 \geqslant (|a|+|b|)\|X_0\|_1$$
y así
$$\|M\| \geqslant \sup(|a|+|b|,|c|+|d|)$$
y finalmente
$$\|M\| = \sup(|a|+|b|,|c|+|d|).$$

Solución del ejercicio 6737 ▲002501

1. Sea x una sucesión, se tiene
$$\|S(x)\|_\infty = \max(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{n-1}|, 0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1 \cdot \|x\|_\infty.$$
Así $\|S\| = 1$.
2. Sea $f \in \mathscr{C}([0,1])$
$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)g(x) \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$
Así
$$\|T\| \leqslant \|g\|_\infty.$$
Por lo tanto
$$\|T1\|_\infty = \|g\|_\infty = \|1\|_\infty \|g\|_\infty.$$
Entonces
$$\|T\| \geqslant \|g\|_\infty$$
y finalmente se tiene
$$\|T\| = \|g\|_\infty.$$

3. Sea $f \in \mathscr{C}([0,1])$, se tiene

$$\|u(f)\| = \int_0^1 f(x)g(x)dx| \leqslant \int_0^1 |f(x)||g(x)|dx \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \int_0^1 |f(x)|dx \leqslant \|g\|_\infty.\|f\|.$$

Se tiene entonces

$$\|u\| \leqslant \|g\|_\infty.$$

Como g se anula solo en el punto $x = \frac{1}{2}$, cambia de signo una sola vez. Sea

$$f_0 = g/|g|,$$

esta función no es continua (ni definida) en $x = \frac{1}{2}$, pero verifica $f_0 g = |g|$. Tomemos $f_n = g/|g|$ si $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{n}$, para $|x - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{n}$, se conectan los dos segmentos del gráfico con una línea. Entonces $1 - \frac{1}{2n} \leqslant \|f_n\| \leqslant 1$ y

$$\begin{aligned}\|u(f_n)\| &= \int_{|x-\frac{1}{2}|>\frac{1}{n}} f_n(x)g(x)dx + \int_{|x-\frac{1}{2}|\leqslant\frac{1}{n}} f_n(x)g(x)dx \\ &\geqslant \left| \int_{|x-\frac{1}{2}|>1/n} f_n(x)g(x)dx| - \int_{|x-\frac{1}{2}|\geqslant 1/n} f_n(x)g(x)dx \right| \\ &\geqslant \|g\|_\infty \int_{|x-\frac{1}{2}|>1/n} |f_n(x)|dx - \frac{2}{n}\|g\|_\infty \geqslant \|g\|_\infty(\|f_n\| - \frac{2}{n}).\end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\frac{f_n}{\|f_n\|})\| \geqslant \|g\|_\infty \big(1 - \frac{1}{2n\|f_n\|}\big) \geqslant \|g\|_\infty \big(1 - \frac{1}{2n(1-1/2n)}\big) \geqslant \|g\|_\infty \big(1 - \frac{1}{2n-1}\big)$$

y así para todo $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u\| \geqslant \|g\|_\infty \big(1 - \frac{1}{2n-1}\big),$$

haciendo tender n al infinito

$$\|u\| \geqslant \|g\|_\infty$$

que demuestra la segunda desigualdad y se obtiene $\|u\| = \|g\|_\infty$.

4. Si se toma $(x_n) = (a_n)$ se obtiene

$$u((a_n)) = \sum a_n^2 = \|(a_n)\|_2^2 = \|(a_n)\|_2 \cdot \|(a_n)\|_2$$

y entonces

$$\|u\| \geqslant \|(a_n)\|_2.$$

Por lo tanto de acuerdo a Cauchy-Schwartz, se tiene

$$\|u(a_n)\| = |u(a_n)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \|(a_n)\|_2 \|(x_n)\|_2$$

y entonces $\|u\| \leqslant \|(a_n)\|_2$, de ahí la igualdad

$$\|u\| = \|(a_n)\|_2.$$

5. Para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene $|x_j| \leqslant \|(x_n)\|_\infty$ y por lo tanto,
$$|u((x_n))| = |\lim_{j\to\infty} x_j| \leqslant \|(x_n)\|_\infty$$
y entonces
$$\|u\| \leqslant 1.$$
Tomemos la sucesión (x^0) definida por $x_n^0 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$|u(x^0)| = |\lim_{j\to\infty} 1| = 1 = \|x^0\|_\infty$$
y entonces
$$\|u\| \geqslant 1$$
de donde la igualdad $\|u\| = 1$.

Solución del ejercicio 6739 ▲002503

1. (Estudio en 0). $|\operatorname{sen}(1/x)| \leqslant 1$ en consecuencia $|x^2 \operatorname{sen}(1/x)| \leqslant x^2$. Igualmente $|y^2 \operatorname{sen}(1/y)| \leqslant y^2$. En consecuencia
$$|f(x,y)| \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (\sqrt{x^2+y^2})^2 \leqslant \|(x,y)\|_2^2,$$
y por lo tanto,
$$\lim_{\|(x,y)\|\to 0} |f(x) - f(0)| = 0$$
y entonces f es continua en el origen. Notando que $\|(x,y)\|_2^2 = o(\|(x,y)-(0,0)\|_2)$ se tiene $f(x,y) = 0 + o(\|(x,y)-(0,0)\|_2)$ y entonces f es diferenciable en 0 y
$$Df(0) = 0.$$
En consecuencia f admite derivadas parciales en todas las direcciones en el origen que son cero. La función f no es de clase C^1 en el origen. Es suficiente notar que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ en la recta $y = 0$ no es continua en 0.
2. Para $(x,y) \neq (0,0)$, f es continua en (x,y) e incluso de clase C^∞ en tanto que son composición de sumas, productos y cociente de tales funciones. Queda por estudiar f en el origen. Por tanto,
$$|f(x,y)| = \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leqslant |x| \leqslant \|(x,y)\|_2.$$
Así, f es continua en el origen y tiende a 0. Demostrar por reducción al absurdo que f no es derivable en el origen. Denotemos $Df(0)$ la (supuesta) diferencial de f en el origen. La aplicación lineal $Df(0)$ se obtiene calculando la imagen de los vectores de la base de $\mathbb{R}^2$. Calculemos las derivadas direccionales de f en el origen :
$$D_{(1,0)}f(0) = [Df(0)]((1,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(1,0)) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
$$D_{(0,1)}f(0) = [Df(0)]((0,1)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h(0,1)) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
En consecuencia, se tiene necesariamente
$$Df(0) = 0$$

Ahora bien,

$$D_{(1,1)}f(0) = [Df(0)]((1,1)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h(1,1))-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \frac{1}{2} \neq 0$$

lo que da la contradicción buscada.

Solución del ejercicio 6741 ▲002505

En todo punto (x_0,y_0), con $x_0 \neq y_0$, f es continua e incluso de clase C^2 porque es composición (proyecciones sobre (Ox) y (Oy)), diferencia y cociente de funciones de clase C^2 cuyo denominador no se anula. En estos puntos, el diferencial de f es dada por la matriz jacobiana :

$$\begin{aligned} Df(x_0,y_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \\ &= \left(\frac{g'(x_0)(x_0-y_0)-(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2}, \frac{-g'(y_0)(x_0-y_0)+(g(x_0)-g(y_0))}{(x_0-y_0)^2}\right) \end{aligned}$$

que es de clase C^1 (g es de clase C^2, g' es de clase C^1). Demostrar que F es continua en los puntos de la forma (a,a). El DL de g de orden 2 entre x y y da $g(y) = g(x)+(y-x)g'(c_{x,y})$ con $c \in [x,y]$, de donde

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = F(a,a)$$

porque como (x,y) tiende a (a,a), x y y tienden ambos hacia a y entonces $c_{x,y}$ también (y g' es continua). Para demostrar que F es C^1 (sabiendo que F es continua), es suficiente demostrar que el diferencial de F se extiende por continuidad en $\mathbb{R}^2$. El DL de g de orden 2 entre x_0 y y_0 es :

$$g(x_0) = g(y_0)+(x_0-y_0)g'(y_0)+\frac{(x_0-y_0)^2}{2}g^{(2)}(c_1), \text{ con } c_1 \in [x_0,y_0],$$

$$g(y_0) = g(x_0)+(y_0-x_0)g'(x_0)+\frac{(y_0-x_0)^2}{2}g^{(2)}(c_2), \text{ con } c_2 \in [x_0,y_0].$$

Se tiene entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_2)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{(x_0-y_0)^2 g^{(2)}(c_1)}{2(x_0-y_0)^2} = \frac{g^{(2)}(c_1)}{2}.$$

La función g es de clase C^2, se tiene

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(a,a)} Df(x_0,y_0) = \left(g^{(2)}(a)/2, g^{(2)}(a)/2\right)$$

y entonces Df se extiende por continuidad sobre todo $\mathbb{R}^2$. F es, por lo tanto de clase C^1.

Solución del ejercicio 6742 ▲002506

Sea $F_1(P) = \int_0^1 P^3 - P^2 dt$, y sea h un polinomio de grado n, entonces

$$\begin{aligned} F_1(P+h)-F_1(P) &= \int_0^1 [(P^3+3P^2h+3Ph^2+h^3)+(P^2+2Ph+h^2)-P^3-P^2]dt \\ &= \int_0^1 h(3P^2+2P)dt + \int_0^1 3Ph^2+h^3+h^2 dt. \end{aligned}$$

Entonces $\int_0^1 3Ph^2 + h^3 + h^2 dt| = o(||h||_\infty)$, por lo tanto

$$DF_1(h) = \int_0^1 (3P^2 + 2P)h dt.$$

Sea $F_2(P) = P' - P^2$ y sea h un polinomio de grado n, entonces

$$F_2(P+h) - F_2(P) = (P+h)' - (P+h)^2 - P' + P^2 = h' - 2Ph - h^2.$$

Por lo tanto $h^2 = o(||h||)$ (para toda norma a elegir). Se tiene entonces

$$DF_2(h) = h' - 2Ph.$$

Solución del ejercicio 6743 ▲002507

1. Se tiene $g(x,y) = \langle f(x,y) - a, f(x,y) - a \rangle$, donde $\langle \ , \ \rangle$ es el producto escalar euclidiano de $\mathbb{R}^2$. La aplicación g es diferenciable como composición y producto de funciones diferenciables. El diferencial Df es dada por la matriz jacobiana $(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y})$ y Dg por la matriz $(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y})$. Se tiene entonces
$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \langle f(x,y) - a, f(x,y) - a \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a), f(x,y) - a \right\rangle + \left\langle f(x,y) - a, \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f(x) - a \right\rangle. \end{aligned}$$
Igualmente,
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2 \left\langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, f(x) - a \right\rangle.$$
2. La aplicación f es continua (porque es diferenciable) y tiende a infinito cuando (x,y) tiende a infinito. Así
$$\forall A > 0, \exists B > 0, \ \|(x,y)\| \geqslant B \Rightarrow \|f(x,y)\| \geqslant A.$$
Sea $m = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y)$, para $A = m+1$, existe $B > 0$ tal que
$$||(x,y)|| \geqslant B \Rightarrow g(x,y) = ||f(x,y)||^2 \geqslant A^2 \geqslant (m+1)^2 \geqslant m+1.$$
Se tiene entonces
$$m = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x,y) = \inf_{||(x,y)|| \leqslant B} g(x,y).$$
Así la bola $\overline{B}(0,B)$ es compacta y g continua, el inf y se alcanza en un punto $X_0 = (x_0, y_0) \in B(0,B) \subset \mathbb{R}^2$. Como X_0 es un mínimo global de g, esto es también un mínimo de la restricción de g en toda recta que pasa por X_0. Como la derivada de una función real en un mínimo es nula, todas las derivadas parciales de g son nulas y por lo tanto, $Dg(X_0) = 0$ y así la matriz jacobiana de g es nula. Se tiene entonces
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), f(x) - a \right\rangle = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), f(x) - a \right\rangle = 0.$$

Como Df es inyectiva, sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, las proyecciones de $f(x)-a$ en la base $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))$ son nulas y por lo tanto,

$$f(x_0,y_0)-a=0 \Leftrightarrow f(x_0,y_0)=a$$

y así a admite un antecedente. Esto es válido para todo $a\in\mathbb{R}^2$ y se ha demostrado que f es sobreyectiva.

Solución del ejercicio 6744 ▲002508

1. Para demostrar que $||Df(x)||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\leqslant 1$, es necesario demostrar que si $h\in\mathbb{R}^n$, se tiene $|Df(x)\cdot h|\leqslant ||h||$. Entonces
$$|Df(x)\cdot h| = |D_hf(x)| = \left|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\right|.$$
Ahora f es 1-lipschitziana y entonces $|f(x+th)-f(x)|\leqslant \|th\| = |t|\|h\|$. Por lo tanto para todo $h\in\mathbb{R}^n$, $|Df(x)\cdot h|\leqslant\|h\|$, lo que da la desigualdad requerida.
2. Se tiene
$$\varphi'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}=Df(x)\cdot(y-x).$$
O bien, sea $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ la aplicación $\psi(t)=(1-t)x+ty$, se tiene entonces $\varphi(t)=f\circ\psi$ y según la fórmula del diferencial de una composición :
$$\varphi'(0)=Df(\psi(0))\cdot D\psi(0)=Df(x)\cdot(y-x).$$
Ahora bien,
$$\begin{aligned} d(x,F)=d(x,y)=\|x-y\| &= \tfrac{1}{1-t}\|(1-t)(x-y)\|\\ &= \tfrac{1}{1-t}\|[(1-t)x+ty]-[ty+(1-t)y]\| = \tfrac{1}{1-t}d((1-t)x+ty,y).\end{aligned}$$
Se denota $x_t=(1-t)x+ty$, entonces se tiene
$$d(x_t,y)=(1-t)d(x,F).$$
Ahora, $\varphi(t)=d(x_t,F)\leqslant d(x_t,y)\leqslant(1-t)d(x,y)\leqslant\varphi(0)$ y entonces
$$\begin{aligned}|\varphi'(0)| &= \lim_{t\to 0}\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(0)-\varphi(t)}{t}\\ &\geqslant \lim_{t\to 0}\frac{d(x,y)-(1-t)d(x,y)}{t}\geqslant d(x,y)=\|x-y\|.\end{aligned}$$
Entonces
$$|Df(x)(x-y)|\geqslant\|x-y\|$$
de ahí la segunda desigualdad.
3. Se razona por reducción al absurdo. Se supone que existen dos puntos y_1 y y_2 tales que $d(x,F)=d(x,y_1)=d(x,y_2)$. Entonces, de la misma manera que antes, se tiene $Df(x).(x-y_1)=Df(x).(x-y_2)=d(x,F)$ y entonces $Df(x).(x-y_1+x-y_2)=2d(x,F)$. Por tanto, $\|x-y_1+x-y_2\|<2d(x,F)$ porque los vectores $x-y_1$ y $x-y_2$ no están alineados. Pero entonces esto contradice el hecho de que $\|Df(x)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^\backslash,\mathbb{R})}=1$.

Solución del ejercicio 6754 ▲002518

Para demostrar que f se extiende por continuidad en el punto b, se debe demostrar entonces que f es derivable a la izquierda en el punto b es que esta derivada es $\lim_{x\to b^-} f'(x)$. Para esto se demuestra que existe un real k tal que toda sucesión $\{x_n\}$ tendiendo a b verifica $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$. Se observa que la derivada $f'(x)$ admitiendo un límite en el punto b, es acotada en un pequeño vecindario (a la izquierda) de b (se denota M este mayorante). Sea y_n una sucesión convergente a b. Entonces la sucesión $f(y_n)$ es de Cauchy. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$, se escribe $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. La sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy,

$$\exists N \in \mathbb{N}, p, q \geqslant N \Rightarrow |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon' \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Así por el teorema de incrementos finitos :

$$f(y_p) - f(y_q) = (y_p - y_q) f'(c_{p,q}), \text{ donde } c_{p,q} \in]y_p, y_q[.$$

En consecuencia,

$$|f(y_p) - f(y_q)| \leqslant |y_p - y_q| \cdot |f'(c_{p,q})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} M \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y así la sucesión $\{f(y_n)\}$ es de Cauchy y converge a un real que denotamos l. Demostrar que esto es así para cualquier otra sucesión $\{x_n\}$ que tiende a b. Se tiene

$$f(x_n) = f(x_n) - f(y_n) + f(y_n).$$

Según el teorema de incrementos finitos, $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant M \cdot |x_n - y_n|$ y entonces tiende a cero porque las sucesiones x_n y y_n tienden a b. Además, como hemos visto, $f(y_n)$ tiende a k y entonces $f(x_n)$ también. Se prolonga f por continuidad en el punto b poniendo $f(b) = k$. Se tiene entonces la tasa de crecimiento

$$T_x f = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{(b - x) f'(c_x)}{b - x} = f'(c_x), \text{ donde } c_x \in]x, b[.$$

Cuando x tiende a b, c_x también y por lo tanto, $T_x f$ tiende a l.

Solución del ejercicio 6755 ▲002519

Se tiene $f'(x) = ie^{ix}$ (esto se puede comprobar en las coordenadas). Si la igualdad de los incrementos finitos se verifica existe $c \in]0, \pi[$ tal que $f(\pi) - f(0) = (\pi - 0) ie^{ic}$, lo cual es imposible porque al tomar los módulos encontramos $2 = \pi$.

Solución del ejercicio 6756 ▲002520

1. f es de clase C^∞ porque sus coordenadas lo son (polinomios). g lo es porque es la composición de dos funciones C^∞.
2. La matriz jacobiana de f es :

   $$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

   Por la fórmula de diferencial de una composición, se tiene

   $$Dg(x,y) = Df(f(x,y)) \circ Df(x,y).$$

Ahora, $f(0,0)=0$ y
$$Df(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
y entonces
$$Dg(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

3. Por continuidad de $Dg(x,y)$ en el origen y tomando $\varepsilon=\frac{1}{2}$ se tiene :
$$\exists\rho>0, ||(x,y)-(0,0)||\leqslant\rho\Rightarrow||Dg(x,y)-Dg(0,0)||\leqslant\frac{1}{2}$$
de ahí el resultado pedido.
4. Según los incrementos finitos, para todo $X,Y\in\mathbb{R}^2$, se tiene
$$||g(X)-g(Y)||\leqslant\sup_{Z\in\overline{B}_\rho((0,0))}||Dg(Z)\|\cdot\|X-Y||\leqslant\frac{1}{2}||X-Y||$$
y entonces g es contractante. La bola $\overline{B}_\rho((0,0))$ es compacta y completa, el teorema del punto fijo lleva a la conclusión.

Solución del ejercicio 6757 ▲002521

---

1. Se sabe que
$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}x & -\cos y \\ \cos x & \operatorname{sen}y \end{pmatrix}.$$
Se tiene
$$|||Df(x,y)|||=\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{||Df(x,y)(a,b)||}{||(a,b)||}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2x+b^2\cos^2y+2ab\operatorname{sen}x\cos x+a^2\cos^2x+b^2\operatorname{sen}^2y+2ab\cos x\operatorname{sen}y}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\operatorname{sen}(x+y)}}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{2|a||b|}{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2}$$
pues
$$(|a|-|b|)^2\geqslant0\Rightarrow a^2+b^2\geqslant2|a||b|.$$
2. Sean $U_n=(x_n,y_n)$ y $G(x,y)=\frac{1}{2}F(x,y)$, entonces $|||G|||\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $U_{n+1}=G(U_n)$. Según los incrementos finitos, G es contractante y por lo tanto, el teorema del punto fijo da el resultado requerido.

Solución del ejercicio 6762 ▲002526

Aplicar el teorema de incrementos finitos a $g(x)=f(x)-Df(a)x$ observando que la matriz jacobiana de $Df(a)x$ es la matriz $Df(a)$.

Solución del ejercicio 6766 ▲006258

---

1. porque $\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$, es claro que φ es $\mathbb{R}$-lineal desde que es $\mathbb{C}$-lineal y que verifica en particular $\varphi(ix) = i\varphi(x)$, para todo $x \in E$. Se supone ahora φ $\mathbb{R}$-lineal, verificando $\varphi(ix) = i\varphi(x)$, para todo $x \in E$. Por hipótesis, φ es aditivo y $\varphi(t \cdot x) = t\varphi(x)$, para todo real t y $x \in E$.
   Por otra parte, si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \varphi((\alpha+i\beta)x) &= \varphi(\alpha x) + \varphi(i\beta x) \text{ por aditividad porque } E \text{ es un } \mathbb{C}\text{–ev}, \\ &= \varphi(\alpha x) + i\varphi(\beta x) \text{ por hipótesis sobre } \varphi, \\ &= \alpha\varphi(x) + i\beta\varphi(x), \text{ pues } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Si $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, se representa en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Igualmente, $\mathscr{I}$, la multiplicación por i como aplicación lineal de $\mathscr{L}(\mathbb{C})$ se representa en la identificación de $\mathbb{C}$, con $\mathbb{R}^2$ por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la condición $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ significa que φ conmuta con $\mathscr{I}$ o que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   Esto es realizado si y solo si $a = d$, y $b = -c$.
   b) f $\mathbb{C}$-diferenciable en el punto $z = x + iy \in \mathbb{C}$ significa :

$$f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h = h\varepsilon(h),$$

   con $h \in \mathbb{C}$ y $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ (la aplicación $\mathbb{C}$–lineal tangente es aquí la multiplicación en $\mathbb{C}$ por $f'(z)$) ; traducido a variables reales significa :

$$\begin{cases} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = ah_1 - bh_2 + ||h||\varepsilon(h) \\ v(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = bh_1 + ah_2 + ||h||\varepsilon(h), \end{cases}$$

   con $f'(z) = a + ib$ y $h = h_1 + ih_2$; f es, por lo tanto $\mathbb{R}$-diferenciable en el punto (x,y) y su matriz jacobiana en este punto vale $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   Recíprocamente, se supone f $\mathbb{R}$-diferenciable en (x,y) ; así

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - f'(x,y) \cdot h = ||h||\varepsilon(h),$$

   con $h \in \mathbb{R}^2$ y $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$; la matriz de $f'(x,y)$ es la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y) & \partial_2 u(x,y) \\ \partial_1 v(x,y) & \partial_2 v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   y f es $\mathbb{C}$-diferenciable en (x,y) si y solo si $f'(x,y)$ es $\mathbb{C}$–lineal o $a = d$ y $b = -c$, lo que se traduce por las condiciones de Cauchy a :

$$\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y), \quad \partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y).$$

   Es fácil ver que las aplicaciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$: $f_1(z) = \mathrm{e}^x$, $f_2(z) = x^2 + y^2$, $f_3(z) = \mathrm{e}^{x-iy}$ son $\mathbb{R}$-diferenciables, y que las condiciones de Cauchy nunca se verifican para f_1 y f_3, solo se verifican en 0, para f_2.

2. La función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ puede ser escrita $g_1 + ig_2$, donde $g_1 = \sqrt{u^2+v^2}$ y $g_2 = 0$ si $f = u+iv$. Se supone que g sea $\mathbb{C}$–diferenciable en $z = x+iy$: por lo tanto cumple las condiciones de Cauchy en este punto y $\partial_1 g_1(x,y) = \partial_2 g_1(x,y) = 0$, sea

$$\begin{cases} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) = 0, \\ u(x,y)\ \partial_2 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_2 v(x,y) = 0. \end{cases}$$

Pero como f es $\mathbb{C}$-diferenciable en $z = x+iy$, $\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y)$, $\partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y)$, y el sistema se convierte en

$$\begin{cases} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) = 0, \\ -u(x,y)\ \partial_1 v(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 u(x,y) = 0. \end{cases}$$

Esto es un sistema de Cramer, ya que el determinante $u^2(x,y)+v^2(x,y) = |f(z)|^2 \neq 0$; así $\partial_1 u(x,y) = \partial_1 v(x,y) = \partial_2 u(x,y) = \partial_2 v(x,y) = 0$ y $f'(z) = 0$.

Solución del ejercicio 6775 ▲002553

---

1. Calculemos el crecimiento :

$$f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) + 0.$$

Por tanto, por definición $f(h)$ es lineal en h, continua y $0 = o(||h||)$. En consecuencia f es diferenciable y

$$Df(x) = f, \text{ o aún } Df(x) \cdot h = f(h).$$

Se observa que Df es la aplicación constante que a $x \in E$ asocia la aplicación lineal f. En consecuencia, Df es diferenciable y su diferencial es nulo : $D^2 f = 0$.

2. Calculemos

$$\begin{aligned} f((x,y)+(h,k)) - f(x,y) = f(x+h,y+k) - f(x,y) &= f(x,y+k) + f(h,y+k) - f(x,y) \\ &= f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k) - f(x,y) \\ &= f(x,k) + f(h,y) + f(h,k). \end{aligned}$$

La aplicación que a (x,y) asocia la aplicación lineal $Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$ es, por lo tanto candidato a ser el diferencial de f. Verificar que efectivamente es continua y que $f(h,k) = o(||(h,k)||)$.

Recordemos que una aplicación bilineal $f(x,y)$ es continua si existe $M > 0$ tal que

$$\forall (x,y) \in E^2;\ ||f(x,y)|| \leqslant M\|x\|\,\|y\|.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} ||Df(x,y)(h,k)|| = ||f(x,k)+f(h,y)|| \leqslant ||f(x,k)|| + ||f(h,y)|| &\leqslant M||x|| \cdot ||k|| + M||h|| \cdot ||y|| \\ &\leqslant M(||x||+||y||)\max(||k||,||h||) \leqslant M(||x||+||y||)||(h,k)||. \end{aligned}$$

En consecuencia, $Df(x,y)$ es continua y tiene norma inferior a $M(||x||+||y||)$. Además,

$$||f(h,k)|| \leqslant M||h|| \cdot ||k|| \leqslant ||(h,k)|| \cdot \varepsilon(h,k),$$

donde ε tiende a cero cuando (h,k) tiende a cero porque

$$\varepsilon(h,k) = \frac{||h|| \cdot ||k||}{\sup(||h||,||k||)}$$

lo que demuestra que f es diferenciable y su diferencial está definida por

$$Df(x,y) \cdot (h,k) = f(x,k) + f(h,y).$$

Observando que Df es lineal con respecto a (x,y), de acuerdo con la primera pregunta, se deduce que su diferencial es

$$D^2 f(x,y)[(h,k),(u,v)] = f(u,k) + f(h,v).$$

3. $f(A+h) - f(A) = (A+h)^2 - A^2 = Ah + hA + h^2$, con $Ah + hA$ lineal en h (y en A) y $||h^2|| \leqslant ||h||^2 = o(||h||)$. En consecuencia f es diferenciable y su diferencial es $Df(A) \cdot h = Ah + hA$. Como $Df(A)$ es lineal con respecto a A, su diferencial en A es la aplicación bilineal

$$D^2 f(A)[H,K] = KH + HK.$$

Solución del ejercicio 6776 ▲002554

Sea $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$, calculemos el jacobiano de f :

$$Df(x,y) = (2x + y + \tfrac{3}{4}x^2, x + 2y).$$

Los puntos críticos de f verifican $Df(x,y) = 0$ y por lo tanto, verifican las ecuaciones $2x + y + \frac{3}{4}x^2 = 0$ y $x + 2y = 0$. En consecuencia f admite dos puntos críticos $(0,0)$ y $(-2,1)$. Para saber si estos puntos críticos son extremos de f, es necesario estudiar el hessiano de f :

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sus valores propios. En el punto $(0,0)$,

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene por polinomio característico $P(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)$ y sus dos valores propios son estrictamente positivos. La función f por lo tanto admite un mínimo local en el punto $(0,0)$. Este mínimo no es global porque $f(0,0) = 0$ y f toma valores negativos para $y = 0$ y x que tiende a $-\infty$.
En el punto $(-2,1)$,

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene por polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3$. Se pueden calcular entonces los valores propios o bien observar que el determinante del hessiano es igual al producto de los dos valores propios (aquí -3) y estos son, por lo tanto, no nulos y de signo opuesto. Por lo tanto el punto $(-2,1)$ es un punto silla de f. No es un extremo.

Solución del ejercicio 6777 ▲002555

El volumen de una caja es invariante bajo rotaciones, se puede siempre suponer que todas las cajas están centradas en el origen y tienen lados paralelos a los ejes de coordenadas. En consecuencia, dar un punto (x,y,z) en la esfera define de forma única una caja rectangular donde uno de los vértices es el punto (x,y,z). Se toma x,y y z positivos porque tal caja siempre tiene un vértice en el sector positivo del espacio. En consecuencia, se debe maximizar la función de volumen $g(x,y,z) = 8xyz$ en la sub-variedad S definida por la ecuación $f = 0$, con $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Un punto crítico de g sobre S verifica

$$Dg(x,y,z) = \lambda Df(x,y,z)$$

y $f(x,y,z) = 0$. Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} 8yz &= 2x, \\ 8xz &= 2y, \\ 8xy &= 2z, \\ x^2+y^2+z^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} 8xyz &= 2x^2, \\ 8xyz &= 2y^2, \\ 8xyz &= 2z^2, \\ x^2+y^2+z^2 &= R^2 \end{aligned}$$

y como x,y y z son positivos, se tiene $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto g es continua y $S^+ = S \cap \{x \geqslant 0; y \geqslant 0; z \geqslant 0\}$ es un compacto. Como g es nula en el borde de S^+, el máximo de g se alcanza en un punto crítico de g en el interior de S^+. El único punto crítico de g es, por lo tanto el máximo buscado. Aquí, no había necesidad de calcular el hessiano de g sobre S por la fórmula :

$$H = D^2 g - \lambda D^2 f$$

donde λ es el coeficiente de Lagrange encontrado previamente.

Solución del ejercicio 6792 ▲002527

1. La función f es derivable, es continua. Demostrar que es inyectiva. Sean $x,y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$. Si $x \neq y$, de acuerdo con teorema de Rolle, existe $c \in]x,y[$ tal que $f'(c) = 0$, lo que contradice el hecho que f' nunca se anula. En consecuencia $x = y$ y f es inyectiva. Para demostrar que f^{-1} es continua, es necesario demostrar que la imagen inversa por f^{-1} de un vecindario de un punto es un vecindario del recíproco del punto. O aún, que la imagen directa por f de un vecindario de un punto a es un vecindario de $f(a)$. Sea V un vecindario de a, contiene un intervalo del tipo $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, la imagen de este conexo por una función continua es aún conexo y por lo tanto, es un intervalo $[c,d]$ (cerrado porque f es continua y el intervalo de salida es compacto). Si $f(a) \in]c,d[$, la demostración es terminada. Si $f(a) = c$ o $f(a) = d$, entonces a es un extremo local de f y entonces $f'(a) = 0$, lo que contradice el enunciado. Así f es un homeomorfismo. f^{-1} es diferenciable porque el diferencial de f no se anula (teorema de curso..)
2. La tasa de crecimiento
$$T_x(f) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 + x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$
tiende a 1, cuando x tiende a cero ($\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ es acotada) y entonces f es derivable en el punto 0 y $f'(0) = 1 \neq 0$.

3. Por reducción al absurdo, se supone que f sea invertible en un vecindario de 0. Sea $\varepsilon>0$ tal que $]-\varepsilon,\varepsilon[$ esté incluido en este vecindario. f es continua (porque es derivable), ella es estrictamente monótona. Por lo tanto $f'(x)=1-\pi\cos\frac{\pi}{x}+2x\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$. Tomemos $k\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2k}<\varepsilon$ y $\frac{1}{1+2k}<\varepsilon$, entonces $f'(\frac{1}{2k})=1-\pi<0$ y $f(\frac{1}{2k+1})=1+\pi>0$ y entonces f no es monótona en $]-\varepsilon,\varepsilon[$, lo que da la contradicción buscada. El teorema del inverso local nos muestra además que f no es de clase C^1 en ningún vecindario de 0.

Solución del ejercicio 6793 ▲002528

1. La aplicación $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ es de clase C^∞ porque sus coordenadas lo son. Para demostrar que es un difeomorfismo global, es suficiente demostrar que es una difeomorfismo local (teorema de la inversa local) y que es biyectiva. Calculemos la matriz jacobiana de φ :

$$D\varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

El jacobiano de φ es $\det(D\varphi(r,\theta))=r(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)=r>0$ si $(x,y)\neq(0,0)$. La aplicación φ es, por lo tanto un difeomorfismo local en un vecindario de cada uno de los puntos de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. La biyectividad se verifica explicitando, por ejemplo el recíproco de φ (si se establece $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$, se puede considerar las cantidades x^2+y^2 y y/x...).

Solución del ejercicio 6794 ▲002529

1. φ tiene coordenadas de clase C^1, por lo que también lo es. Se tiene

$$Jac(\varphi)(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & -1\end{pmatrix}.$$

Se tiene $\det(Jac(\varphi)(x,y))=1-\frac{1}{4}\cos(x/2)\cos(y/2)\geqslant\frac{3}{4}>0$. Por lo tanto el jacobiano es invertible y $D\varphi(x,y)\in\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)=\operatorname{GL}(\mathbb{R}^2)$.

2. Por el teorema de la inversa local, basta con demostrar que φ es inyectiva.
Se supone $\varphi(x_1,y_1)=\varphi(x_2,y_2)$, entonces $\operatorname{sen}(y_1/2)-x_1=\operatorname{sen}(y_2/2)-x_2$ y $\operatorname{sen}(x_1/2)-y_1=\operatorname{sen}(x_2/2)-y_2$. De donde $\operatorname{sen}(y_1/2)-\operatorname{sen}(y_2/2)=x_1-x_2$ y $\operatorname{sen}(x_1/2)-\operatorname{sen}(x_2/2)=y_1-y_2$.
Por tanto, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $|\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b|\leqslant|a-b|$ (consecuencia de los incrementos finitos aplicados a $\operatorname{sen}x$).
Entonces $|x_1-x_2|\leqslant|y_1/2-y_2/2|$ y $|y_1-y_2|\leqslant|x_1/2-x_2/2|$, de donde $|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{4}|x_1-x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ y $y_1=y_2$.
$\varphi:U\to F$ es inyectiva. El conjunto $f(U)$ es abierto porque es unión de abiertos (de acuerdo con el teorema del inverso local). Es un difeomorfismo en U y $\varphi(U)$.

3. Sean $(X_1,y_1),(X_2,Y_2)\in\varphi(\mathbb{R}^2)$, con $\varphi(x_1,y_1)=(X_1,Y_1)$ y $\varphi(x_2,y_2)=(X_2,Y_2)$ o aún $\varphi^{-1}(X_1,Y_1)=(x_1,y_1)$ y $\varphi^{-1}(X_2,Y_2)=(x_2,y_2)$. Se tiene

$$||\varphi^{-1}(X_1,Y_1)-\varphi^{-1}(X_2,Y_2)||=||(x_1,y_1)-(x_2,y_2)||=||(x_1-x_2,y_1,y_2)||=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

Por lo tanto $\operatorname{sen}(y_1/2)-x_1=X_1$, $\operatorname{sen}(y_2/2)-x_2=X_2$, $\operatorname{sen}(x_1/2)-y_1=Y_1$ y $\operatorname{sen}(x_2/2)-y_2=Y_2$. En consecuencia

$$x_1-x_2=\operatorname{sen}(y_1/2)-X_1-\operatorname{sen}(y_2/2)+X_2$$

$$y_1 - y_2 = \operatorname{sen}(x_1/2) - Y_1 - \operatorname{sen}(x_2/2) + Y_2.$$

De donde

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| &\leqslant |X_2 - X_1| + |\operatorname{sen}(y_1/2) - \operatorname{sen}(y_2/2)| + |Y_2 - Y_1| + |\operatorname{sen}(x_1/2) - \operatorname{sen}(x_2/2)| \\ &\leqslant |X_2 - X_1| + \tfrac{1}{2}|y_1 - y_2| + |Y_2 - Y_1| + \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2|,\end{aligned}$$

de donde

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqslant 2(|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1|) \leqslant 2\|(X_1, Y_1) - (X_2, Y_2)\|.$$

Entonces φ^{-1} es lipschitziana.

4. Sea (X_n, Y_n) una sucesión de Cauchy en $\varphi(\mathbb{R}^2)$, $((X_n, Y_n) = \varphi(x_n, y_n)\,;\,(x_n, y_n) = \varphi^{-1}(X_n, Y_n))$.
   Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant n \Rightarrow ||(X_p, Y_p) - (X_q, Y_q)|| < \varepsilon$.
   Así, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$; $p, q \geqslant n \Rightarrow ||(x_p, y_p) - (x_q, y_q)|| < 2\varepsilon$. La sucesión (x_n, y_n) es entonces de Cauchy en $\mathbb{R}^2$, que es completo, por lo que converge.
   Sea (x, y) su límite. Como φ es continua y como $\lim_n (x_n, y_n) = (x, y)$, entonces $\lim_n \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x, y)$.
   La sucesión (X_n, Y_n) es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Ella converge.
   Sea (X, Y) su límite, entonces $(X, Y) = \varphi(x, y)$, pues $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ y $\varphi(x_n, y_n) \to \varphi(x, y)$. Entonces $(X, Y) \in \varphi(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(\mathbb{R}^2)$ es entonces completo y por lo tanto, cerrado. Como $\varphi(\mathbb{R}^2)$ es un abierto cerrado y no vacío (contiene $(0,0) = \varphi(0,0)$) en el conexo $\mathbb{R}^2$, se tiene $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
5. $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi) = \varphi(\pi/2, \pi) = \varphi(q)$, donde $q = (\pi/2, \pi)$. $\varphi : E \to F$ es un C^1-difeomorfismo por lo tanto $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y entonces

$$\mathrm{Id} = D(\varphi^{-1} \circ \varphi)(q) = D\varphi^{-1}(\varphi(q)) \circ D\varphi(q).$$

   Por lo tanto $D\varphi^{-1}(\varphi(q)) = (D\varphi(q))^{-1}$ y entonces $Jac\varphi^{-1}(p) = (Jac\varphi(\pi/2, \pi))^{-1}$. Por tanto

$$Jac\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 1/2\cos(y/2) \\ 1/2\cos(x/2) & -1 \end{pmatrix}.$$

   De donde

$$Jac\varphi(\pi/2, \pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}$$

   y entonces

$$Jac\varphi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 6795 ▲002530

Se define $\theta(t) = a + t(b - a)$ y $\Psi(x) = \langle x, b - a \rangle$ que es lineal y continua (por lo tanto C^∞).

1. f y φ son de clase C^1 porque es composición de aplicaciones de clase C^1. Se tiene

$$D\varphi(t) = \varphi'(t) = (\Psi \circ f \circ \theta)(t)'(t) = D\Psi(f(\theta(t))) \circ Df(\theta(t)) \circ D\theta(t) = \langle Df(a + t(b - a))(b - a), b - a \rangle.$$

   Así :

$$\varphi'(t) \geqslant \alpha \langle b - a, b - a \rangle.$$

   Ahora bien, $\varphi(1) - \varphi(0) = \langle f(b) - f(a), b - a \rangle$ y existe $t \in]0, 1[$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t)$ de donde

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geqslant \alpha \langle b - a, b - a \rangle.$$

Indicaciones para demostrar que f es cerrada : Se define $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, entonces

$$\alpha\|b-a\|^2 \leqslant \langle f(b)-f(a), b-a\rangle \leqslant \|f(b)-f(a)\| \cdot \|b-a\|.$$

De donde

$$\|b-a\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f(b)-f(a)\|.$$

Sea F un cerrado y y_n una sucesión de puntos de $f(F)$ convergiendo hacia un punto límite y_∞. Es necesario demostrar que $y_\infty \in f(F)$. Sea x_n una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $f(x_n) = y_n$. Queda por demostrar que esta sucesión es de Cauchy, que converge, por lo tanto y que su límite x_∞ verifica $f(x_\infty) = y_\infty$.

Solución del ejercicio 6806 ▲002541

Sea $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x_0,y_0,z_0) = (0,0)$ (por ejemplo $(1,1,1)$). La función f es C^1, pues sus coordenadas son polinomiales.

$$\operatorname{Mat} D_2 f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0z_0 & x_0y_0 \end{pmatrix}$$

$\det(\operatorname{Mat} D_2 f(x_0,y_0,z_0)) = -2x_0(y_0^2+z_0^2) \neq 0$, pues $x_0y_0z_0 = 1$, por lo tanto $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe I intervalo conteniendo x_0 y $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, para todo $x \in I$ y $\varphi(x_0) = (y_0,z_0)$.

Solución del ejercicio 6810 ▲002545

Pongamos $f(x,y) = x^4+y^3-x^2-y^2+x-y$, $f(0,0) = 0$ y $f(1,1) = 0$. $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach y f es de clase C^1, pues es polinomial.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-2y-1.$$

Estudio en el punto $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, es un isomorfismo de $\mathbb{R}$. Se tienen las condiciones de aplicación del teorema de la función implícita. Existe I conteniendo 0, J conteniendo 0 y $g : I \to J$, C^1 tal que $g(0) = 0$ y $f(x,g(x)) = 0, \forall x \in I$. Se tiene

$$x^4+(g(x))^3-x^2-(g(x))^2+x-g(x) = 0$$

derivando se tiene :

$$4x^3+3g^2(x)g'(x)-2x-2g(x)g'(x)+1-g'(x) = 0$$

de donde $g'(0) = 1$. Derivando de nuevo :

$$12x^2+6g(x)g'(x)^2+3g^2(x)g''(x)-2-2g'(x)^2-2g(x)g''(x)-g''(x) = 0$$

de donde

$$g''(0) = -4.$$

Estudio en el punto $(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$. Ya no es más un difeomorfismo, no se puede aplicar el teorema de la función implícita. En este caso, se toma la derivada con respecto a la primera variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3-2x+1$$

y entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$. Entonces, de acuerdo con teorema de funciones implícitas, existe I conteniendo 1, J conteniendo 1 y $g : I \to J$ de clase C^1 tales que $g(1) = 1$ y $f(g(x), x) = 0$, $\forall y \in I$. Se tiene

$$g(y)^4 - g^2(y) + g(y) + y^3 - y^2 - y = 0$$

derivando

$$4g^3 g' - 2gg' + g' + 3y^2 - 2y - 1 = 0$$

de donde $4g'(1) - g'(1) = 0$ y entonces $g'(1) = 0$.

$$12g^2(g')^2 + 4g^3 g'' - 2gg'' - 2(g')^2 + g'' + 6y - 2 = 0$$

de donde $g''(1) = -\frac{4}{3}$.

Solución del ejercicio 6862 ▲006883

---

1. Observación : si $x \in F$, entonces claramente $\bar{x} = x$ sirve.
   Como $F \neq \varnothing$, existe un punto $y_0 \in F$ y se escribe $r = \|x - y_0\| \geqslant 0$ por hipótesis. Se puede cortar F en dos pedazos : $F_0 = F \cap \bar{B}(x, r)$ y $F_1 = F \setminus F_0$. F_0 no es vacío porque contiene y_0. En cuanto a los puntos de F_1, están todos a una distancia de x estrictamente superior a r por lo tanto el mínimo de la distancia en F es el mínimo en F_0 :

   $$\inf_{z \in F} \|x - z\| = \inf_{z \in F_0} \|x - z\| \leqslant r.$$

   Así F_0 es cerrado y acotado, por lo tanto compacto (porque la dimensión es finita), y la función $z \mapsto \|x - z\|$ es continua, es acotada y alcanza su mínimo en un punto y.
   Cuestión subsidiaria : $\bar{x}$ no es único (excepto en algunos casos, por ejemplo si F es convexo) ; contraejemplo : F es un círculo y x es su centro.
2. (a) Se ve que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ y que la función determinante es $g : (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$. Esta función es continua porque es polinomial en las coordenadas, entonces $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{1\})$ es un cerrado.

   (b) La sucesión de matrices $M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ está en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sin ser acotada ($\|M_n\| = \sqrt{2 + n^2}$).

   (c) i. Es una consecuencia directa de (1) tomando para x la matriz nula.

   ii. Escribir $f(M) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, entonces $\nabla f(a, b, c, d) = \frac{1}{f(M)}(a, b, c, d)$, definido siempre que M no sea la matriz nula (que no pertenece $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, entonces no hay problema).

   iii. En un extremo se debe tener $\nabla f = \lambda \nabla g$ (extremos relacionados) por lo tanto

   $$\frac{1}{\|M\|}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

   lo que solo es posible si $\lambda = \varepsilon / \|M\|$, donde $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, y que $d = \varepsilon a$ y $c = -\varepsilon b$, por lo tanto $M = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$. Si añadimos la restricción $\det M = 1$, se tiene que $\varepsilon = +1$ y $a^2 + b^2 = 1$. Entonces los únicos extremos posibles son de la forma $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, y por todas estas matrices $\|M_\theta\| = \sqrt{2}$. Pero según (i) se sabe que se alcanza el mínimo, y además debe satisfacer la relación de Lagrange porque los gradientes están bien definidos. Por lo tanto hay una infinidad de mínimos (las rotaciones M_θ) y toman el mismo valor

$$\inf_{M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\| = \min_{M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \|M\| = \sqrt{2}.$$

Solución del ejercicio 6873 ▲002558

1. Sea λ_n y μ_n dos sucesiones de puntos tales que $\varphi(\lambda_n) = \varphi(\mu_n) = 0$ y convergiendo respectivamente hacia λ y μ, queda a demostrar que φ es nula en cada intervalo $[\lambda_n, \mu_n]$. Sea c un extremo de φ sobre este interval, se tiene entonces necesariamente $\varphi'(c) = 0$ y entonces $3c^{2/3} = 0$ y entonces $c = 0$ y entonces $\varphi(c) = \varphi(0) = 0$. Por lo tanto el sup y el min de φ sobre $[\lambda_n, \mu_n]$ son nulos y φ es también nula en este intervalo. Pasando al límite, se ha probado que φ es nula en $]\lambda, \mu[$.
2. Se verifica que las soluciones propuestas satisfacen la ecuación diferencial (1). La función $x^{2/3}$ es lipschitziana con respecto a x desde que $x \neq 0$. Si φ_2 es una solución maximal en $\mathbb{R}$ verificando $\varphi_2(0) = 0$, entonces existe necesariamente λ, μ (definidos previamente) tales que φ_2 es nula en $]\lambda, \mu[$. Por continuidad de la solución se verifica $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$. Pero entonces $\varphi_2' - \varphi = 0$ es, por lo tanto $\varphi_2 = \varphi + K$, donde K es una constante dada. Del hecho que $\varphi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) + K = 0 + K = 0$, se tiene $K = 0$, lo que termina la demostración.

Solución del ejercicio 6874 ▲002559

1. Sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t,x) = |x| + |t|$. f es continua y lipschitziana con respecto a la segunda variable. En efecto,
$$|f(t,x) - f(t,y)| = ||x| - |y|| \leqslant |x-y|.$$
Se observa que $x' \geqslant 0$, para todo t y que para todo punto $(0,x_0)$ pasa una única solución maximal (φ, J).
2. Tomemos $x_0 = 1$, cuando $t \geqslant 0$; la ecuación se convierte en
$$x'(t) = x(t) + t$$
pues $|t| = t$ y $x(t) \geqslant x(0) > 0$, $x(0) = 1$. Admite como solución sobre $[0, +\infty[$, con $\varphi(0) = 1$
$$\varphi(t) = 2\mathrm{e}^t - t - 1.$$
Cuando $t < 0$, se distinguen dos casos :
primer caso $x(t) \geqslant 0$; $x' = -t + x(t)$ y entonces $x(t) = c\mathrm{e}^t + t + 1$, con $x(0) = 1$, de donde $c = 0$ y $\varphi(t) = t + 1$. Esto solo es válido cuando $\varphi(t) \geqslant 0$, es decir $t \geqslant 1$. Entonces $\varphi(t) = t + 1$ sobre $[-1, 1]$.
segundo caso : $x(t) \leqslant 0$, esto sucede cuando $t \leqslant -1$, pues φ es creciente y $\varphi(-1) = 0$. Se tiene entonces $\varphi'(t) = -t - \varphi(t)$. De donde $\varphi(t) = c\mathrm{e}^{-t} - t + 1$ por lo que $\varphi(-1) = c\mathrm{e} + 2 = 0$, de donde $c = -2\mathrm{e}^{-1}$ y $\varphi(t) = -2\mathrm{e}^{-t+1} - t + 1$ sobre $]-\infty, -1]$. La solución maximal verificando $\varphi(0) = 1$ es la siguiente :
$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 2\mathrm{e}^t - t - 1 & \text{sobre } [0, +\infty[\\ t+1 & \text{sobre } [-1, 0] \\ -2\mathrm{e}^{-(t+1)} - t + 1 & \text{sobre }]-\infty, -1] \end{array} \right. \qquad \varphi'(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 2\mathrm{e}^t - 1 & \text{sobre }]0, +\infty[\\ 1 & \text{sobre }]-1, 0[\\ 2\mathrm{e}^{-(t+1)} - 1 & \text{sobre }]-\infty, -1[\end{array} \right.$$

estudiando los límites de φ' en el punto 0 y -1, se ve que φ' es continua en $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(t) = \begin{cases} 2e^t & \text{sobre }]0,+\infty[\\ 0 & \text{sobre }]-1,0[\\ -2e^{-(t+1)} & \text{sobre }]-\infty,-1[. \end{cases}$$

φ por lo tanto no es dos veces derivable en 0 y -1.

Solución del ejercicio 6875 ▲002560

$f(t,x) = \frac{4t^3x}{t^4+x^2}$ (si $(t,x) \neq (0,0)$) es de clase C^∞ en tanto que cociente, suma y producto de funciones C^∞.

1. $|f(t,x)| = |2t| \cdot |\frac{2t^2x}{(t^2)^2+x^2}| \leqslant 2|t| \underset{(t,x)\to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$. f es, por lo tanto continua en $(0,0)$. f no es localmente Lipschitz en un vecindario de $(0,0)$ porque si no existen $k,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tales que $t \in]-\alpha,\alpha[$, $x \in]-\beta,\beta[$ y
$$|f(t,x)-f(t,0)| \leqslant k|x-0|,$$
de donde $\frac{4t^3x}{t^4+x^2} \leqslant kx \Rightarrow \frac{4t^3}{t^4+x^2} \leqslant k \to \frac{4}{t} \leqslant k, \forall t \in]0,\alpha[$, lo que es absurdo. No se puede aplicar Cauchy-Lipschitz.
2. (φ,I) solución de (2), con $0 \notin I$,
$$\psi(t) = t^{-2}\varphi(t) \Rightarrow \psi'(t) = t^{-2}\varphi'(t) - 2t^{-3}\varphi(t)$$
$$\psi'(t) = 4t^{-2}\frac{t^3\varphi(t)}{t^4+\varphi^2(t)} - 2t^{-1}\psi(t)$$
donde expresando todo en función de ψ :
$$\frac{\psi'(t)(1+\psi^2(t))}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{2}{t}$$
Por lo tanto $\frac{1+\psi^2(t)}{\psi(t)(1-\psi(t))(1+\psi(t))} = \frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}$, de donde
$$\psi'(t)\left(\frac{1}{\psi(t)} + \frac{1}{1-\psi(t)} - \frac{1}{1+\psi(t)}\right) = \frac{2}{t}$$
Integrando con respecto a t se obtiene :
$$\ln\left|\frac{\psi(t)}{1-\psi^2(t)}\right| = \ln(t^2)+c, \quad \text{de donde} \quad \frac{\psi(t)}{1-\psi(t)} = ct^2.$$
$\psi(t)$ es, por lo tanto una raíz de la ecuación
$$ct^2\psi^2(t) + \psi(t) - ct^2 = 0,$$
entonces
$$\psi(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2ct^2} \text{ y } \varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c^2t^4}}{2c}.$$

Solución del ejercicio 6876 ▲002561

---

1. Se define $y_1 = x$, $y_2 = x' = y_1'$, $y_3 = x'' = y_2'$. La ecuación se convierte $y_3' - y_1 y_3 = 0$ y por lo tanto, poniendo $f(t, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 y_3 \end{pmatrix}$ la ecuación se escribe $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = f(t, y_1, y_2, y_3)$.
2. f es de clase C^∞, es Lipschitz con respecto a la segunda variable (y_1, y_2, y_3) y por lo tanto, el teorema de Cauchy–Lipschitz lleva a la conclusión.
3. La derivada de la función dada es cero. En consecuencia, es constante y por lo tanto, la exponencial es estrictamente positiva, el signo de φ'' es constante. Si esta constante es estrictamente positiva, φ es convexa, si es estrictamente negativa, φ es cóncava. Si es nula $\varphi'' = 0$ y entonces $\varphi(t) = at + b$ que es de hecho una solución de la ecuación diferencial y verifica $\varphi''(t_0) = 0$. La unicidad demuestra que todas las soluciones que verifica $\varphi''(t_0) = 0$ son de la forma $at + b$.

Solución del ejercicio 6953 ▲005933

---

1. Demostrar que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
   — Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $[a,b] \subset]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Entonces $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$.
   — Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene :
   $$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$
   Así
   $$\lim_{n \to +\infty} (a - \frac{1}{n}) \leqslant x \leqslant \lim_{n \to +\infty} (b + \frac{1}{n}),$$
   es decir $x \in [a,b]$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\subset [a,b]$ y se ha demostrado la igualdad entre estos dos conjuntos.
2. Demostrar que $]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$.
   — Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$, por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$.
   — Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Así $x \in]a,b[$ y también $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset]a,b[$, por lo tanto la igualdad de estos dos conjuntos.

Solución del ejercicio 6954 ▲005934

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $(\Sigma, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible. Demostrar que el truncamiento f_A de f definida por :
$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leqslant A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$
es medible. Denotemos
$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}(]-\infty, -A[), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leqslant A\} = f^{-1}([-A, A]), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}(]A, +\infty[). \end{aligned}$$

Como $]-\infty,-A[$, $[-A,A]$, $]A,+\infty[$ pertenecen a la tribu boreliana y f es $(\Sigma,\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible, los conjuntos E_1, E_2, y E_3 pertenecen a Σ, entonces $f_A = f\cdot\mathbf{1}_{E_2} - A\cdot\mathbf{1}_{E_1} + A\cdot\mathbf{1}_{E_3}$ es medible como suma de productos de funciones medibles.

Solución del ejercicio 6955 ▲005935

Sea $\Omega=\mathbb{N}$, $\Sigma=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo en $\mathbb{N}$ definida por :

$$\mu(E)=\sharp E=\sum_{k\in E}1,$$

donde $E\in\Sigma$. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ una función positiva o nula. Para todo boreliano E, $f^{-1}(E)$ pertenece a $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, por lo tanto f es $(\Sigma,\mathscr{B}(\mathbb{R}))$–medible. Por definición de la integral,

$$\int_\Omega f\,d\mu=\int_0^\infty \mu\left(S_f(t)\right)dt,$$

donde $S_f(t)=\{n\in\mathbb{N},\, f(n)>t\}$. Para todo $y\in[0,+\infty[$, se escribe $A_y:=\{n\in\mathbb{N},\, f(n)=y\}$. Entonces

$$S_f(t)=\bigcup_{y>t}A_y$$

donde la unión es disjunta y donde A_y es vacío excepto para un conjunto numerable $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de valores de y. Por σ-aditividad de la medida μ,

$$\mu\left(S_f(t)\right)=\mu\left(\bigcup_{y_i>t}A_{y_i}\right)=\sum_{y_i>t}\mu\left(A_{y_i}\right)=\sum_{y_i>t}\mu\left(\{f=y_i\}\right).$$

Así :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,d\mu&=\int_0^\infty\sum_{y_i>t}\mu\left(\{f=y_i\}\right)dt=\sum_{i=0}^\infty\int_{0\leqslant t<y_i}\mu\left(\{f=y_i\}\right)dt\\&=\sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\mu\left(\{f=y_i\}\right)=\sum_{i=0}^\infty y_i\cdot\sharp\{n\in\mathbb{N}, f(n)=y_i\}=\sum_{n=0}^\infty f(n).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6956 ▲005936

Sea φ una función simple positiva :

$$\varphi=\sum_{j\in J}c_j\mathbf{1}_{E_j},$$

donde J es un conjunto finito, conjuntos E_j son medibles y donde, para $i\neq j$, $c_i\neq c_j$ y $E_i\cap E_j=\varnothing$.

1. Se tiene
$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\int_0^\infty\mu\left(S_\varphi(t)\right)dt,$$
donde $S_\varphi(t)=\{x\in\Omega,\varphi(x)>t\}=\bigcup_{c_j>t}E_j$ y donde $\mu\left(S_\varphi(t)\right)=\sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)$. Así
$$\int_\Omega\varphi\,d\mu=\int_0^\infty\sum_{c_j>t}\mu\left(E_j\right)dt=\sum_{j\in J}\int_0^{c_j}\mu\left(E_j\right)dt=\sum_{j\in J}c_j\mu(E_j).$$

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se pone

$$E_{k,n} := \{x \in \Omega,\ k2^{-n} \leqslant f(x) < (k+1)2^{-n}\},\ \text{ para }\ k = 0, \dots, n2^n - 1,$$
$$E_{n,n} := \{x \in \Omega,\ f(x) \geqslant n\},\ \text{ para }\ k = n2^n.$$

Como f es medible, los conjuntos $E_{k,n}$ pertenecen a Σ. Para todo $n \in \mathbb{N}$ fijo, los conjuntos $E_{k,n}$, $0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1$ son dos a dos disjuntos y $\bigcup_k E_{k,n} = \Omega$. Se escribe

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^{-n}-1} k2^{-n} \mathbf{1}_{E_{k,n}},$$

entonces φ_n es una función simple positiva verificando $\varphi_n \leqslant f$. Además, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$, para todo $x \in \Omega$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Solución del ejercicio 6957 ▲005937

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$. Para todo $E \in \Sigma$, se establece :

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_E \cdot f\, d\mu.$$

Demostrar que λ define una medida sobre (Ω, Σ).

1$^{\text{er}}$ *método :* Se demuestra primeramente que la afirmación es cierta para las funciones simples. Según el ejercicio 6956, toda función $f \in \mathscr{M}^+(\Omega, \Sigma)$ se escribe $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, donde los φ_n son funciones simples. Porque el sup de una familia cualquiera de medidas es una medida, se concluye que λ es una medida.

2$^{\text{o}}$ *método :* Se tiene claramente $\lambda(\varnothing) = 0$. Por lo tanto, es suficiente para verificar la σ-aditividad de λ. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ una sucesión de elementos dos a dos disjuntos. Se tiene

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\, d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f\, d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^\infty \mathbf{1}_{E_i}\right) f\, d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty (\mathbf{1}_{E_i} f)\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega (\mathbf{1}_{E_i} f)\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \lambda(E_i).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6958 ▲005938

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la función definida por

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x).$$

(i) Se tiene :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)\, dx = \int_{|x|<1} |x|^{-p}\, dx = \int_0^1 \int_{\sigma\in\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-p-1} dr d\sigma \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-p-1}\, dr.\end{aligned}$$

Para $n \leqslant p$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty.$$

Para $p < n$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left.\frac{r^{n-p}}{(n-p)}\right|_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

(ii) Para $a \in [0,+\infty[$,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p}\mathbf{1}_{|x|<1} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\} \cap \mathscr{B}(0,1),$$

donde $\mathscr{B}(0,1)$ es la bola de centro 0 y de radio 1. Así

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathscr{B}(0,1).$$

Se deduce que $S_f(a) = \mathscr{B}(0,1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ y que $S_f(a)$ es igual a la bola $\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})$ de centro 0 y de radio $a^{-\frac{1}{p}}$, cuando $a \geqslant 1$. Entonces tenemos :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(S_f(a)\right)da = \int_0^1 \mu\left(\mathscr{B}(0,1)\right)da + \int_1^{+\infty} \mu\left(\mathscr{B}(0,a^{-\frac{1}{p}})\right)da \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}}\,da.\end{aligned}$$

Si $p \geqslant n$, se obtiene $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = +\infty$ y para $p < n$, se tiene :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left.\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}\right|_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(1+\frac{p}{n-p}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6959 ▲005926

Ver Proposición 5.1. del folleto de Marc Troyanov.

Solución del ejercicio 6960 ▲005927

Se desprende directamente de las definiciones.

Solución del ejercicio 6961 ▲005939

1. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Entonces $f_k = \sum_{n=1}^{k} g_n$ es una sucesión creciente de $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Por el teorema de convergencia monótona

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

2. Se define $g_n(x) = x^{s-1} \mathrm{e}^{-nx} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Los g_n pertenecen a $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Según la pregunta anterior,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Por lo tanto por un lado,

$$\int_\Omega g_n \, d\mu = \int_\Omega x^{s-1} \mathrm{e}^{-nx} \mathbf{1}_{[0,+\infty)} \, dx = \frac{1}{n^s} \int_0^{+\infty} y^{s-1} \mathrm{e}^{-y} \, dy = \frac{1}{n^s} \Gamma(s),$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \zeta(s) \Gamma(s).$$

Por otra parte,

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \right) d\mu = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1} \, dx,$$

por lo tanto se tiene la igualdad buscada.

Solución del ejercicio 6962 ▲005940

Sí, el teorema de convergencia monótona no dice no que la integral de f es finita. Se tiene

$$+\infty = \int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} n.$$

Solución del ejercicio 6963 ▲005941

No, el teorema de convergencia monótona no se aplica a una sucesión decreciente de funciones positivas.

Solución del ejercicio 6964 ▲005942

No, la sucesión de funciones no es ni monótona.

Solución del ejercicio 6965 ▲005943

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ tal que $\forall n \geqslant N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

i.e. f_n converge uniformemente a f sobre $\mathbb{R}$. Se tiene :

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \liminf_{n\to+\infty} - \int_0^n \frac{1}{n} \, d\mu = -1.$$

Por otra parte $\int_\Omega f\,d\mu = 0$. El lema de Fatou no se aplica porque las funciones f_n no son a valores en $[0,+\infty]$.

Solución del ejercicio 6966 ▲005950

1. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+\frac{x}{n})^n$ es una sucesión creciente y que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \mathrm{e}^x$. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!},$$
donde ; $a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$.

Las afirmaciones siguientes son verdaderas :
   i) $a_{n+1,k} \geqslant a_{n,k}$. En efecto, $\frac{n+1-l}{n+1} \geqslant \frac{n-l}{n}$, para $l \in \mathbb{N}$, pues $n^2+n-l\cdot n \geqslant n^2+n\cdot l+n-l$,
   ii) $a_{n,k} < 1$ (evidente) ;
   iii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Como $a_{n+1,n+1} > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!}$. Por lo tanto, se sigue de (i) que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es creciente. Las afirmaciones (ii) y (iii) implican que
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$$
y que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$. Así, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

2. Por el teorema de la convergencia monótona, se tiene para $b > 1$,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx}d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^+}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-bx}d\lambda(x)\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(1-b)x}d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6967 ▲005944

Se tiene
$$\mu(f=+\infty) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geqslant n\}\right).$$
Como los conjuntos $A_n := \{f \geqslant n\}$ verifican $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ y $\mu(A_i) < +\infty$ $(i = 1,2,\cdots)$, por continuidad de la medida, se tiene :
$$\mu(f=+\infty) = \lim_{n\to+\infty}\mu(f\geqslant n).$$
Por tanto, como f tiene valores positivos, las funciones f_n definidas por $f_n = n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}$ verifican $f_n \leqslant f$. Así
$$\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}\,d\mu = n\mu(f\geqslant n) \leqslant \int_\Omega f\,d\mu < +\infty.$$

Se deduce que

$$\mu\,(f \geqslant n) \;\leqslant\; \frac{1}{n}\int_{\Omega} f\,d\mu \to 0,$$

por lo tanto

$$\mu\,(f = +\infty) = 0.$$

Solución del ejercicio 6968 ▲005945

Como $\mu(\Omega) < +\infty$, la función constante igual a C es integrable, de integral $C\,\mu(\Omega)$. Una aplicación directa del teorema de la convergencia dominada da

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} f_n\,d\mu = \int_{\Omega} f\,d\mu.$$

Solución del ejercicio 6969 ▲005946

Sea $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Como $\cos(\pi x) < 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\cos^n(\pi x) \to 0$, cuando $n \to \infty$ casi en todas partes (para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Denotemos $f_n(x) = f(x)\cos^n(\pi x)$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ y como $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n(x)d\lambda(x) = 0.$$

Solución del ejercicio 6970 ▲005947

1. Por definición, $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ si y solo si f_+ y f_- son integrables. Se observa que $|f| = f_+ + f_-$. Entonces $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Rightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Recíprocamente, se tiene $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$, por lo tanto $|f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Rightarrow f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Por otra parte :

$$\left|\int_{\Omega} f\,d\mu\right| \;=\; \left|\int_{\Omega} f_+\,d\mu - \int_{\Omega} f_-\,d\mu\right| \;\leqslant\; \int_{\Omega} f_+\,d\mu + \int_{\Omega} f_-\,d\mu \;=\; \int_{\Omega} |f|\,d\mu.$$

2. Por monotonía de la integral, se tiene

$$\int_{\Omega} |f|\,d\mu \;\leqslant\; \int_{\Omega} |g|\,d\mu < +\infty.$$

   Por la pregunta (a), se desprende que f es integrable.

3. Se define $z = \displaystyle\int_{\Omega} f\,d\mu$. Como z es un número complejo, se escribe $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$. Sea u la parte real de $\mathrm{e}^{-i\theta}f$. Se tiene $u \leqslant |\mathrm{e}^{-i\theta}f| = |f|$. Entonces

$$\left|\int_{\Omega} f\,d\mu\right| \;=\; \mathrm{e}^{-i\theta}\int_{\Omega} f\,d\mu \;=\; \int_{\Omega}\mathrm{e}^{-i\theta}f\,d\mu \;=\; \int_{\Omega} u\,d\mu \;\leqslant\; \int_{\Omega}|f|\,d\mu,$$

   donde la tercera igualdad sale del hecho que el número $\displaystyle\int_{\Omega}\mathrm{e}^{-i\theta}f\,d\mu$ es real, por lo que es la integral de la parte real de $\mathrm{e}^{-i\theta}f$, es decir de u.

Solución del ejercicio 6971 ▲005948

Se busca una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para μ-casi todo $x\in\Omega$, dado $\varepsilon>0$, existe un $k\in\mathbb{N}$ (dependiendo a priori de x) verificando $j\geqslant k \Rightarrow |f_{n_j}(x)-f(x)|<\varepsilon$. Basta con demostrar que para μ-casi todo x, existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $j\geqslant k\Rightarrow |f_{n_j}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^j}\leqslant\frac{1}{2^k}$. Esto equivale a demostrar que el complemento del conjunto

$$A:=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|<\frac{1}{2^j}\right\}$$

es de medida nula. Por tanto

$$A^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}.$$

Pongamos $B_k:=\bigcup_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}$. Se tiene $B_1\supset B_2\supset B_3\ldots$, con B_1 de medida finita ; entonces por continuidad de la medida, tenemos :

$$\mu(A^c)=\lim_{k\to+\infty}\mu(B_k).$$

Por σ-aditividad, se tiene :

$$\mu(B_k)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\mu\left(\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}\right).$$

Se define entonces la sub-sucesión $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera. Porque f_n converge a f en medida, existe un índice n_1 tal que para $n\geqslant n_1$,

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2}.$$

Existe un índice $n_2>n_1$ tal que para $n\geqslant n_2$,

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^2}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^2},$$

y así sucesivamente : para todo $k\in\mathbb{N}$, existe un $n_k>n_{k-1}$, tal que para $n\geqslant n_k$

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^k}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

Para esta sub-sucesión se tiene entonces :

$$\mu(B_k)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\mu\left(\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}\right)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Se tiene

$$\mu(A^c)=\lim_{k\to+\infty}\mu(B_k)=0.$$

Solución del ejercicio 6972 ▲005949

La función de Dirichlet restringido en el intervalo $[a,b]$, $f(x)=\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\big|_{[a,b]}(x)$, es integrable al sentido de Lebesgue y su integral con respecto a la medida de Lebesgue vale 0. Pero esta no es integrable en el sentido de Riemann : $\underline{S}(f,\tau)=0$ y $\overline{S}(f,\tau)=b-a$, para toda subdivisión τ del intervalo $[a,b]$.

Solución del ejercicio 6973 ▲005951

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$
En efecto, como $\ln y \leqslant y-1$, para $y>0$, se tiene $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leqslant y^{-\frac{1}{n}}-1$, es decir $\left(1-\frac{\ln y}{n}\right)^n \leqslant y^{-1}$. Así, poniendo $x=\ln y$, se tiene $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Además,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$
donde $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$. Así $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}$. Se define $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}$. Entonces utilizando el teorema de convergencia dominada y sabiendo que $\Gamma(m+1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^m dx = m!$, se obtiene el resultado.
2. Sea $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\mathbf{1}_{[0,n]}$. Como la sucesión $\{f_n(x)\}$ es creciente y $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}$, se obtiene el resultado aplicando el teorema de convergencia monótona.

Solución del ejercicio 6974 ▲005952

Ver el teorema 24.2 en el folleto de Marc Troyanov.

Solución del ejercicio 6975 ▲005953

1. Denotemos $g(x,y)=\mathrm{e}^{-ixy}f(x)$. Entonces,
   i.) para todo $y\in\mathbb{R}$, la función $x\mapsto g(x,y)$ es medible;
   ii.) para casi todo $x\in\mathbb{R}$ (para todos los $x\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)$ es finita) la función $y\mapsto g(x,y)$ es continua para toda $y\in\mathbb{R}$;
   iii.) $|g(x,y)|=|\mathrm{e}^{-ixy}f(x)|\leqslant|f(x)|$ y $|f|\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

   Se debe demostrar que para todo sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergiendo a y, se tiene $\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n)=\hat{f}(y)$. Se define $g_n(x)=g(x,y_n)$. Por el teorema de convergencia dominada,
$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) := \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx =: \hat{f}(y).$$
   Así $\hat{f}$ es continua.
2. Para todo $y\in\mathbb{R}$, $|\hat{f}(y)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{e}^{-ixy}f(x)|dx\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=\|f\|_{L_1}$ y entonces
$$\sup|\hat{f}|\leqslant\|f\|_{L_1}.$$
3. Sea $g(x,y)=\mathrm{e}^{-ixy}f(x)$. Entonces, se tiene
   i) para todo $y\in\mathbb{R}$, la función $x\mapsto g(x,y)$ es integrable;
   ii) para casi todo $x\in\mathbb{R}$ la función $y\mapsto g(x,y)$ es derivable para todo $y\in\mathbb{R}$;
   iii) $|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}|=|-ix\mathrm{e}^{-ixy}f(x)|\leqslant|xf(x)|$, con $x\mapsto xf(x)$ integrable.

   Así, de acuerdo al ejercicio 6974 (el teorema de derivación bajo el signo $\int$), se tiene
$$\frac{d}{dy}\hat{f}=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-ixy}(-ixf(x))dx=\widehat{-iyf(y)}.$$

Solución del ejercicio 6976 ▲005957

Se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy &= \int_{-1}^{1}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dy\\
&= -\int_{-1}^{1}\frac{2}{(1+y^2)}dy = -2\arctan y\Big|_{-1}^{1} = -\pi.\\
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dx\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{2}{(x^2+1)}dx = 2\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \pi.
\end{aligned}$$

No existe contradicción con el teorema de Fubini porque la función f no pertenece a $\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$. En efecto, sea $S_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \varepsilon \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Se tiene

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}|f|d\mu \geqslant \int_{S_\varepsilon}|f|d\mu = \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r}dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_\varepsilon^1\frac{|\cos 2\theta|}{r}dr\,d\theta = -4\log\varepsilon \to \infty$$

cuando $\varepsilon\to 0$, y entonces $f\notin\mathscr{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$.

Solución del ejercicio 6977 ▲005958

El teorema de Tonelli da :

$$\int_{[0,1]\times(0,+\infty)}|\mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}2xy|\,dx\,dy \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy = 1 < +\infty,$$

lo que prueba que la función $(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}2xy$ es integrable para la medida de Lebesgue sobre $[0,1]\times]0,+\infty[$. El teorema de Fubini da entonces el valor I de la integral de esta función :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}2xy\,dy \overset{\text{IPP}}{=} \int_0^1(2x)(1+4x^2)^{-1}\,dx = \frac{\log 5}{4}\\
I &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,dy\int_0^1\operatorname{sen}2xy\,dx = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\,dy.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6978 ▲005959

Sean $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1\leqslant p\leqslant+\infty$, donde $\mathbb{R}^n$ es dotado de la medida Lebesgue. La identidad $f*g(x) = g*f(x)$ se obtiene por el cambio de variable. Con respecto a la desigualdad $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_p$, se distinguen los casos en función del valor de p.

1. Para $p=+\infty$, es claro.
2. Se supone que $p=1$ y se escribe $F(x,y) = f(x-y)\,g(y)$. Para casi todo $y\in\mathbb{R}^n$, se tiene :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,y)|\,dx = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx = |g(y)|\cdot\|f\|_1,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dx = \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

De acuerdo con el teorema de Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Por el teorema de Fubini, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dy < +\infty, \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dy \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

Así,

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f * g(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)\, dy \right| \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

3. Se supone que $1 < p < +\infty$. Utilizando el caso precedente, haciendo jugar aquí a g^p el rol jugado por g. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ fijado, la función $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, i.e. la función $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

   La función $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ pertenece a $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, pues $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y la medida de Lebesgue es invariante por traslación. Por la desigualdad de Hölder,

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \, |g(y)| \cdot |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

   y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

   así

$$|(f*g)(x)|^p \leqslant (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

   De acuerdo con el caso precedente, se ve que

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \|f*g\|_p^p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p^p \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

   es decir

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Solución del ejercicio 6979 ▲005960

Sean $a, b > 0$, y f y g las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ y $g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Se tiene

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\left(\frac{a|x-y|^2 + b|y|^2}{2}\right)}\, dy.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
a|x-y|^2+b|y|^2 &= \sum_{i=1}^{n} ax_i^2+(a+b)y_i^2-2ax_iy_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} ax_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2-(a+b)\left(\frac{ax_i}{a+b}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(a-\frac{a^2}{a+b}\right)x_i^2+(a+b)\left(y_i-\frac{a}{a+b}x_i\right)^2 \\
&= \frac{ab}{a+b}|x|^2+(a+b)\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2.
\end{aligned}
$$

Así

$$
f*g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{(a+b)}{2}\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2}\,dy=\mathrm{e}^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{(a+b)}{2}|z|^2}\,dz
$$

pues la medida de Lebesgue es invariante por traslación. Utilizando $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$, se obtiene entonces :

$$
f*g(x)=\left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}.
$$

Solución del ejercicio 6980 ▲005961

---

1. Para todo $t>0$, se establece : $f_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.
   (a) Se tiene

   $$
   \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,dx_i.
   $$

   Sabiendo que $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$, se deduce que $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx=1$.

   (b) Sea $\varepsilon>0$. Porque f_1 es integrable en $\mathbb{R}^n$, existe un $R>0$ tal que

   $$
   \int_{\mathscr{B}(0,R)^c} f_1(x)\,dx<\varepsilon.
   $$

   Se denota que $f_t(x)=t^{-\frac{n}{2}}f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Se tiene entonces,

   $$
   \begin{aligned}
   \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(x)\,dx &= \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}}f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)dx=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,t^{\frac{n}{2}}\,dz \\
   &= \int_{\mathscr{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,dz\leqslant\varepsilon,
   \end{aligned}
   $$

   dado que $t<\frac{\delta^2}{R^2}$.

2. Sea g una función continua acotada. Entonces existe $M>0$ tal que $|g|<M$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x-y)\,g(y)|\,dy \leqslant M \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y)\,dy = M < +\infty,$$

así $y \mapsto f_t(x-y)\,g(y)$ es integrable y $f_t * g$ está bien definida. Porque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$, se tiene

$$|f_t * g(x) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y) g(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y) g(x)\,dy \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy.$$

Sea $\varepsilon>0$. Porque g es continua en $x\in\mathbb{R}^n$, existe $\delta>0$ tal que $|y|<\delta \Rightarrow |g(x-y)-g(x)|<\varepsilon$, por lo que

$$\begin{aligned}|f_t * g(x) - g(x)| &\leqslant \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy + \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathscr{B}(0,\delta)} f_t(y)\,dy + 2M \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \leqslant \varepsilon + 2M \int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy.\end{aligned}$$

Según la pregunta 1.(b), existe $t_0>0$ tal que para $t<t_0$, $\int_{\mathscr{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Así para $t<t_0$,

$$|f_t * g(x) - g(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{t\to 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Solución del ejercicio 6981 ▲005962

Sean $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se denota $\hat{f}$ la transformada de Fourier definida por

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i \langle y,x\rangle}\,dx,$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ designa el producto escalar de $\mathbb{R}^n$.

1. Se tiene $\|\hat{g}\|_\infty \leqslant \|g\|_1$, lo que implica $f\hat{g}$ es integrable. Igualmente $\hat{f}g$ es integrable. Además, $F(x,y) = f(x)g(y)\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y\rangle}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy\, g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y)\,dx.\end{aligned}$$

2. Se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy\,\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,y-z\rangle}\mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,z\rangle} f(y-z)\,g(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,u\rangle} f(u)\,du \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle x,z\rangle} g(z)\,dz \\ &= \hat{f}(x)\,\hat{g}(x).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6982 ▲005963

Se supone primero $n=1$. Sea la gaussiana definida para $x\in\mathbb{R}$ por $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}$, donde $a>0$. Se define

$$h(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,dx=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,dx.$$

Por el teorema de convergencia dominada, h es derivable y

$$\begin{aligned}h'(t)&=-2\pi i\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,dx=2\pi i\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi itx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+(2\pi i)^2t\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,dx\\&=-(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t).\end{aligned}$$

Además,

$$h(0)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2}\,du\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solución de la ecuación diferencial $h'(t)=-(2\pi)^2\frac{1}{a}t\cdot h(t)$, con condición inicial $h(0)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ es

$$h(t)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{t^2}{2}}.$$

Para $n>1$, se tiene :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i(t,x)}\,dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{a|x|^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi i(t,x)}\,dx=\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{ax_i^2}{2}}\mathrm{e}^{-2\pi it_ix_i}\,dx_i\\&=\prod_{i=1}^n h(t_i)=\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{|t|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6983 ▲002692

— Si K es el soporte de f, $f*g(x)=\int_K f(t)g(x-t)\,dt$ está bien definida. Además, $|f*g(x)-f*g(y)|\leqslant\int_K|f(t)||g(x-t)-g(y-t)|\,dt\leqslant C\|f\|_{L^1}|x-y|^\alpha$, de ahí el resultado. Si g es derivable, entonces $f*g$ también y $(f*g)'=f*(g')$. Entonces si $g\in C^{k,\alpha}$, $f*g\in C^k$ y su derivada k-ésima es $f*(g^{(k)})$, es hölderiana por el mismo argumento.

— El mismo argumento; los productos de convolución están bien definidos y acotados pues $f\in L^1$ y las derivadas de g están en L^∞.

Solución del ejercicio 6984 ▲005954

1. Sea $a,b\geqslant 0$ y sea $p,q\in(1,+\infty)$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La función $\theta:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $\theta(a)=\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab$ es derivable y :
$$\theta'(a)=a^{p-1}-b.$$

Esta derivada se anula cuando $a = b^{\frac{1}{p-1}}$, es negativa para $a < b^{\frac{1}{p-1}}$ y positiva para $a > b^{\frac{1}{p-1}}$. Se tiene

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Así $\theta(a) \geqslant 0$, i.e.

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. Sea $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$. Según la pregunta anterior, para todo $\lambda > 0$ y para μ-casi todo x :

$$|fg|(x) = |\lambda f(x) \cdot \frac{g(x)}{\lambda}| \leqslant \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Así

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leqslant \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

Se define

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p\,d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q\,d\mu.$$

La función Φ es derivable y :

$$\Phi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\|f\|_p^p - \lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Esta derivada se anula por $\lambda_1 := \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, es negativa para $\lambda \leqslant \lambda_1$ y positiva para $\lambda \geqslant \lambda_1$. Así el mínimo de Φ vale :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1) &= \tfrac{1}{p}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p + \tfrac{1}{q}\left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q \\ &= \tfrac{1}{p}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \tfrac{1}{q}\|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}}\|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} = \|f\|_p\,\|g\|_q.\end{aligned}$$

Se deduce la desigualdad de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^\infty(\mu)$, entonces $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$, para casi todo $x \in \Omega$ y

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_\Omega |f|\,d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1$.

3. Sean $p, p' \in [1, +\infty)$. Se supone $p < p'$. Sea $p < r < p'$. Se tiene

$$|f|^r = |f|^r\mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^r\mathbf{1}_{|f|<1} \;\leqslant\; |f|^{p'}\mathbf{1}_{|f|>1} + |f|^p\mathbf{1}_{|f|<1}.$$

Se deduce que

$$\int_\Omega |f|^r\,d\mu \;\leqslant\; \int_\Omega |f|^{p'}\,d\mu + \int_\Omega |f|^p\,d\mu \;< +\infty,$$

por lo tanto f pertenece a $L^r(\mu)$.

4. Se supone que μ sea una medida finita y sea $f \in L^\infty(\mu)$. Entonces
$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$$
para casi todo $x \in \Omega$. Así para todo p
$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \;\leqslant\; \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1 \, d\mu \;=\; \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) \;<\; +\infty,$$
lo que implica $f \in L^p(\mu)$. En particular, f pertenece a la intersección $\bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\mu)$. Además, para todo p, se tiene :
$$\|f\|_p \;\leqslant\; \|f\|_\infty \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$
lo que implica
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\leqslant\; \|f\|_\infty.$$
Por otra parte, para todo $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, se tiene
$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \;\geqslant\; \int_{|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)} |f|^p \, d\mu \;\geqslant\; (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big).$$
Así para todo p, se tiene
$$\|f\|_p \;\geqslant\; (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, \mu\Big(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
Porque $\lim_{p \to +\infty} \mu\left(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)\right)^{\frac{1}{p}} = 1$, se deduce que
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\geqslant\; \|f\|_\infty - \varepsilon.$$
Como ε puede ser elegido, arbitrariamente pequeño, se tiene
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \;\geqslant\; \|f\|_\infty,$$
por lo tanto finalmente $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Se define $f_1 := f^r$ y $g_1 := g^r$. Se tiene $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\mu)$ y $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\mu)$. Denotemos que la identidad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ implica que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ y que los números $\frac{p}{r}$ y $\frac{q}{r}$ son conjugados en el sentido de Young. Por la desigualdad de Hölder por lo tanto se tiene
$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1 \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g_1^{\frac{q}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{r}{q}}.$$
De donde, finalmente,
$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Solución del ejercicio 6985 ▲005955

1. *Caso de $L^\infty(\mu)$.*

(a) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Para $k,m,n \geqslant 1$, sean los conjuntos

$$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}; \qquad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

y $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$. Por definición de la norma infinita, los conjuntos A_k y $B_{n,m}$ son de medida cero. Por σ-sub-aditividad de μ, se tiene

$$\mu(E) \leqslant \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

(b) Sobre $\Omega \setminus E$, se tiene :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty,$$

i.e. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniforme sobre $\Omega \setminus E$. En particular, para todo $x \in \Omega \setminus E$, la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy real, y es convergente pues $\mathbb{R}$ es completo. Denotemos f el límite puntual de f_n sobre $\Omega \setminus E$. Demostrar que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en el complemento de E. Se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^\infty(\mu)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe un rango N_ε tal que para $n,m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Entonces, para $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Se tiene que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre $\Omega \setminus E$.

(c) Se expande la función f a Ω poniendo $f = 0$ sobre E. Queda por demostrar que la función f pertenece a $L^\infty(\mu)$. Para $n > N_\varepsilon$, y $x \in \Omega \setminus E$, se tiene

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leqslant \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon$$

Se deduce que $\|f\|_\infty \leqslant \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon < +\infty$. Así $L^\infty(\mu)$ es completo.

2. *Caso de $L^p(\mu)$.*

(a) Sea $1 \leqslant p < +\infty$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Existe n_1 tal que para $n,m \geqslant n_1$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-1}$. Se toma entonces $n_2 > n_1$ tal que para $n,m \geqslant n_2$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-2}$, y así sucesivamente, para todo k, existe un $n_k > n_{k-1}$ tal que $n,m \geqslant n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < 2^{-k}$.

(b) Se define

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{y} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

donde g tiene valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Para todo $k \geqslant 1$, se tiene

$$\|g_k\|_p = \| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \, \|_p.$$

Por la desigualdad de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1.$$

De acuerdo con el lema de Fatou, se deduce que $\|g\|_p \leqslant 1$.

(c) Como $\int_\Omega |g|^p \, d\mu < +\infty$, necesariamente $|g| < +\infty$ μ-cpd, i.e. Para casi todo $x \in \Omega$ la serie

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

es absolutamente convergente. Denotemos $f(x)$ su suma cuando es finita y pongamos $f(x) = 0$ si no. Se tiene :

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k}$$

y $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}$ μ–cpd.

(d) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que para $n, m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Para $m > N_\varepsilon$ se tiene por el lema de Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu = \int_\Omega |\lim_{k \to +\infty} f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Así $f - f_m \in L^p(\mu)$ y $\|f - f_m\|_p \to 0$, cuando $m \to +\infty$. Además, por la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$\|f\|_p = \|(f - f_m) + f_m\|_p \leqslant \|(f - f_m)\|_p + \|f_m\|_p < +\infty,$$

es decir $f \in L^p(\mu)$. En conclusión $L^p(\mu)$ es completo.

Solución del ejercicio 6986 ▲005956

Sean f y g dos funciones de $L^p(\mu)$, con $1 < p < +\infty$. La función $\varphi(t) = |f(x) + \tan(x)|^p$ es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}$ y su derivada vale

$$\varphi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x) + \tan(x) + hg(x)|^p - |f(x) + \tan(x)|^p}{h} = p|f(x) + \tan(x)|^{p-2}(f(x) + \tan(x))g(x),$$

cuando $f(x)$ y $g(x)$ tienen un sentido, es decir para casi todo x. Además, por el teorema de incrementos finitos, se tiene

$$\frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} = \varphi'(t_0) = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-2}(f(x) + t_0 g(x))g(x),$$

para un cierto t_0 comprendido entre 0 y t. Así para $|t| \leqslant 1$,

$$\left| \frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} \right| = p|f(x) + t_0 g(x)|^{p-1}|g(x)| \leqslant p\left(|f(x)| + |g(x)|\right)^p \leqslant 2^{p-1} p\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right),$$

donde la primera desigualdad se deduce de la desigualdad triangular y de la mayoración $|g(x)| \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)$, y donde la segunda desigualdad proviene de la convexidad de la función $x \mapsto x^p$, para $p > 1$ implicando en particular : $\left(\frac{u+v}{2}\right)^p \leqslant \frac{u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$. Resulta que $t \mapsto \frac{|f(x) + \tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$ es uniformemente acotada por una función integrable. El teorema de convergencia dominada permite entonces de derivar bajo el signo de suma y

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu.$$

Solución del ejercicio 6987 ▲005964

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyo la medida de Lebesgue es *finita* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Para todo $1 \leqslant p < +\infty$, se denota $L^p(\Omega)$ el espacio de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ módulo la equivalencia $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ μ–c.p.d. El espacio de funciones esencialmente acotadas es denotado $L^\infty(\Omega)$.

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces
$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leqslant \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$
así $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, para todo p y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Demostrar que si $q \leqslant p$, entonces $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Sea $f \in L^p(\Omega)$, se tiene por ejemplo :
$$\begin{aligned}\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \int_{\{|f|\geqslant 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\ &\leqslant \int_{\{|f|\geqslant 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \leqslant \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.\end{aligned}$$
O aún, utilizando la desigualdad de Hölder para los reales conjugados $r = \frac{p}{q} > 1$ y $r' = \frac{p}{p-q}$:
$$\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)\,dx = \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} = \|f\|_p^q\,\mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}},$$
lo que implica :
$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$
En conclusión, para $1 < q < 2 < p$:
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Demostrar que para $q < p$, la inclusión $L^p(\mathscr{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathscr{B}^n(0,1))$ es estricta. La función f_α pertenece a $L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$ si y solo $\alpha \leqslant 0$, y a $L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$, con $p < +\infty$ si y solo si
$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$
Sea $1 \leqslant q < p$, entonces $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ pertenece a $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathscr{B}^n(0,1))$. En particular, $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ pertenece a $L^q(\mathscr{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathscr{B}^n(0,1))$.

Solución del ejercicio 6988 ▲005965

Sea $\Omega = \mathbb{N}$ provisto de la medida de conteo. Para todo $1 \leqslant p < +\infty$, se denota ℓ^p el espacio de las sucesiones complejas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. El espacio de las sucesiones acotadas se denota ℓ^∞.

1. Demostrar que si $q \leqslant p$, entonces $\ell^q \subset \ell^p$. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Como

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

existe un rango N tal que para $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particular la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a ℓ^∞ y

$$\|u\|_\infty \leqslant \max\{u_0, \ldots, u_N, 1\}.$$

Además, para $n > N$, se tiene $|u_n|^p \leqslant |u_n|^q$ y

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leqslant \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leqslant \|u\|_q^q < +\infty,$$

lo que implica $\|u\|_p < +\infty$. En conclusión, para $1 < q < 2 < p$, se tiene :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. La sucesión $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ pertenece a ℓ^∞, para todo $\alpha \geqslant 0$ y a ℓ^p, con $1 \leqslant p < +\infty$ si y solo si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particular la sucesión constante igual a 1 pertenece a ℓ^∞, pero no pertenece a ningún ℓ^p, para $p < +\infty$. Sea $1 < q < p < +\infty$. Para todo α tal que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la sucesión $u^{(\alpha)}$ pertenece a $\ell^p \setminus \ell^q$. Es el caso en particular que $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$. Así la inclusión $\ell^q \subset \ell^p$ es estricta cuando $q < p$.

Solución del ejercicio 6989 ▲005966

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n$ dotado de la medida Lebesgue. Para todo $1 \leqslant p < +\infty$, se denota $L^p(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ salvo la equivalencia $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ μ–c.p.d. El espacio de funciones esencialmente acotadas es denotado $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. — La función $x \mapsto \dfrac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $2\alpha p > n$.
   — La función $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p\beta < n$.
   — Sea $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$. La función

   $$f(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

   verifica $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La función

   $$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

   verifica $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ y $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. — Sea $1 \leqslant q < p < +\infty$ y f_n una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$. Como $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_{p,q}$, f_n es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto converge a una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para la norma $\|\cdot\|_p$. Igualmente, $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_{p,q}$, por lo tanto f_n converge a una función $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para la norma $\|\cdot\|_q$. Además, existe una sub-sucesión de f_{n_k} que converge a f casi-en todas partes y existe una sub-sucesión de f_{n_k} que converge a g casi-en todas partes. Así $f = g$ $|\mu$-cpd. Y f_n converge a $f = g$ en $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

— Sea r tal que $q < r < p$. Demostrar que

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{1-\alpha}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Porque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, los reales $p' = \frac{p}{\alpha r}$ y $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ son conjugados. Por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x)\cdot|f|^{(1-\alpha)r}(x)\,dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \leqslant \|f\|_p^{\alpha r}\|f\|_q^{(1-\alpha)r},\end{aligned}$$

lo que equivale a $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{(1-\alpha)}$. Se puede igualmente escribir $r = \beta q + (1-\beta)p$, con $\beta \in]0,1[$ y aplicar Hölder con los reales conjugados $\frac{1}{\beta}$ y $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x)\cdot|f|^{(1-\beta)p}(x)\,dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{(1-\beta)},$$

lo que implica

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}}\|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}},$$

que es la desigualdad buscada pues $\alpha = \frac{p\beta}{r}$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

— Si f_n converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces f_n converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en $L^q(\mathbb{R}^n)$, así en $L^r(\mathbb{R}^n)$ de acuerdo a la desigualdad precedente. En conclusión, $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ es cerrado en $L^r(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto un subespacio de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Sea $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$ y h la función definida por $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. Se denota p' el conjugado de p y q' el conjugado de q. Demostrar que h pertenece a $L^1([0,+\infty[)$. Se tiene :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr &= \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr \\ &\leqslant \left(\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^R |f(r)|^p\,dr\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_R^{+\infty} r^{-\frac{q'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_R^{+\infty} |f(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{1-\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}} R^{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_p + \left(\frac{1}{\frac{q'}{2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}} R^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_q.\end{aligned}$$

optimizando con respecto a R, se obtiene :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr \leqslant C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$

donde, poniendo $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ y $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$, se tiene $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, y

$$C_{p,q} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha^{\gamma}\beta^{1-\gamma}}\left(1-\frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}}\left(\frac{q'}{2}-1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}.$$

Solución del ejercicio 6990 ▲005967

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definidas por :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Cualquiera que sea g continua con soporte compacto,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n} g(x)\,dx \to 0, \quad \text{cuando } n \to +\infty.$$

   Por la densidad de las funciones continuas con soporte compacto, f_n converge débilmente hacia 0. Por otra parte, f_n converge casi en todas partes hacia 0. Se supone que f_n converge fuertemente a una función f en $L^2([0,+\infty[)$. Entonces existe una sub-sucesión de f_n que converge casi en todas partes hacia f, lo que implica que $f=0$ es el único límite posible. Como :

$$\|f_n\|_2 = 1$$

   para todo n, $\|f_n\|_2$ no tiende a $\|f\|_2 = 0$, lo que contradice el hecho que f_n converge a f en $L^2([0,+\infty[)$.

2. Para $p > 2$, se tiene :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|^p\,dx = \int_n^{2n} n^{-\frac{p}{2}}\,dx = n^{1-\frac{p}{2}} \to 0,$$

   cuando $n \to +\infty$, por lo tanto f_n converge fuertemente a 0 en $L^p([0,+\infty[)$.

Solución del ejercicio 6991 ▲005968

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definidas por :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Cualquiera que sea g continua con soporte compacto,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)\,dx \to 0$$

   cuando $n \to +\infty$. Por la densidad de las funciones continuas con soporte compacto, f_n converge débilmente hacia 0. Como f_n converge casi en todas partes hacia 0 se concluye como anteriormente que f_n no converge fuertemente hacia 0 en $L^2([0,+\infty[)$, pues

$$\|f_n\|_2 = 1.$$

2. Para $p < 2$, se tiene :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\,dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$

   por lo tanto f_n converge fuertemente a 0 en $L^p([0,+\infty[)$.

Solución del ejercicio 6992 ▲005977

cf E. Lieb y M. Loss, *Analysis*, p.118, American Mathematical Society (2001). (Para la pregunta 6, se puede utilizar la continuidad del producto escalar en $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Solución del ejercicio 6993 ▲005978

A la ayuda de las coordenadas sphériques, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i(x,k)}\,dx = \int_0^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_0^{2\pi} h(r)\mathrm{e}^{-2\pi i r|k|\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} h(r)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi i r|k|}\mathrm{e}^{-2\pi i r|k|\cos\theta}\right) r^2\, d\theta dr \\
&= \frac{1}{|k|}\int_0^{\infty} h(r) r\frac{1}{i}\left[\mathrm{e}^{+2\pi i r|k|} - \mathrm{e}^{-2\pi i r|k|}\right] dr = \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r) r \operatorname{sen}(2\pi|k|r)\, dr.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6994 ▲005928

1. (a) Ver curso.

   (b) Es claro.

   (c) Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión cualquiera de conjuntos m_*–medibles. Se define $B_1 = \varnothing$, $B_2 = A_1$ y $B_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$, para $j \geqslant 2$. Sea Q un subconjunto de Ω. Demostrar por inducción que la afirmación (P_k) siguiente se verifica para todo $k \geqslant 1$:

$$(P_k) \qquad m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c \cap A_j).$$

— Para $k=1$, (P_1) dice simplemente que $m_*(Q) = m_*(Q\cap A_1^c) + m_*(Q\cap A_1)$. Esto es una consecuencia de la m_*-medibilidad de A_1 y del hecho que

$$m_*(Q) \leqslant m_*(Q\cap A_1^c) + m_*(Q\cap A_1)$$

(se aplica la σ-sub-aditividad de m_* a $C_1 = Q\cap A_1^c$, $C_2 = Q\cap A_1$ y $C_i = \varnothing$, para $i \geqslant 3$.)

— Demostrar que $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$:
Porque A_{k+1} es m_*-medible, se tiene :

$$m_*(Q\cap B_{k+1}^c) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) + m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}).$$

Por lo tanto $B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c = (B_{k+1}\cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$. Así :

$$m_*(Q\cap B_{k+1}^c) = m_*(Q\cap B_{k+2}^c) + m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1}). \tag{39}$$

Se supone que la afirmación (P_k) se verifica, entonces

$$m_*(Q) = m_*(Q\cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j),$$

y de acuerdo a (39)

$$\begin{aligned}
m_*(Q) &= m_*(Q\cap B_{k+2}^c)+m_*(Q\cap B_{k+1}^c\cap A_{k+1})+\sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j)\\
&= m_*(Q\cap B_{k+2}^c)+\sum_{j=1}^{k+1} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j),
\end{aligned}$$

que no es otra cosa que (P_{k+1}).

— En conclusión, como (P_1) es verdadero y $(P_k)\Rightarrow(P_{k+1})$, se deduce que la afirmación (P_k) es cierta para todo $k\geqslant 1$.

(d) Como $B_{k+1}\subset A$, se tiene $Q\cap B_{k+1}^c\supset Q\cap A^c$ y, por la monotonía de m_*,

$$m_*(Q\cap B_{k+1}^c)\geqslant m_*(Q\cap A^c).$$

La condición (P_k) implica entonces que para todo k :

$$m_*(Q)\geqslant m_*(Q\cap A^c)+\sum_{j=1}^{k} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j).$$

Entonces, haciendo tender k hacia $+\infty$:

$$m_*(Q)\geqslant m_*(Q\cap A^c)+\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j).$$

(e) Se tiene : $Q\cap A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(Q\cap B_j^c\cap A_j)$ y por σ-sub-aditividad de m_* :

$$\begin{aligned}
m_*(Q\cap A^c)+m_*(Q\cap A) &= m_*(Q\cap A^c)+m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q\cap B_j^c\cap A_j\right)\\
&\leqslant m_*(Q\cap A^c)+\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q\cap B_j^c\cap A_j)\leqslant m_*(Q).
\end{aligned}$$

Se concluye que $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ es m_*-medible.

2. (a) Ver curso.

(b) Sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de elementos m_*-medibles, dos a dos disjuntos.

Se escoge $Q=A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$, entonces $Q\cap A^c=\varnothing$ y $Q\cap B_j^c\cap A_j=A_j$, para todo j. De acuerdo a la pregunta 1.d),

$$m_*(Q)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

De acuerdo a la σ-sub-aditividad de m_*, se tiene :

$$m_*(Q)=\sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

3. Sea E un conjunto m_*-medible tal que $m_*(E)=0$ y B un subconjunto de E. Como $Q\cap B^c\subset Q$, se tiene por la monotonía de m_* la desigualdad $m_*(Q\cap B^c)\leqslant m_*(Q)$. Como $Q\cap B\subset E$, se tiene también $m_*(Q\cap B)=0$. Se deduce que

$$m_*(Q)\geqslant m_*(Q\cap B^c)+m_*(Q\cap B).$$

Así B es m_*-medible y m es completo.

Solución del ejercicio 6995 ▲005929

Está claro que $m_*(\varnothing)=0$ y que si $A\subset B\subset\mathbb{R}$, entonces $m_*(A)\leqslant m_*(B)$, por lo tanto, solo es necesario demostrar que m_* es σ-sub-aditiva. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{P}(\mathbb{R})$, se fija $\varepsilon>0$ y se denota $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Por definición del ínfimo, para todo $n\in\mathbb{N}$, se puede encontrar una sucesión $\{(a_i^n,b_i^n)\}$ tal que $A_n\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i^n,b_i^n[$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^n-a_i^n)\leqslant m_*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Como $A\subset\bigcup_{i,n}]a_i^n,b_i^n[$, se tiene

$$m_*(A)\leqslant\sum_{n,i}(b_i^n-a_i^n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i^n-a_i^n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(m_*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n})=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}m_*(A_n).$$

Se tiene por lo tanto la σ-sub-aditividad $m_*(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m_*(A_n)$, pues ε es arbitrario.

Solución del ejercicio 6996 ▲005930

1. Está claro que $m_*(\varnothing)=0$ y que m_* es monótona. Sea ahora $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{P}(\Omega)$. Si entre los A_i existe al menos un conjunto A_j no vacío, se tiene

$$m_*(\bigcup_i A_i)=1=m_*(A_j)\leqslant\sum_i m_*(A_i).$$

Si todos los A_i son vacíos, entonces $\bigcup_i A_i=\varnothing$, y entonces

$$m_*(\bigcup_i A_i)=0=\sum_i m_*(A_i).$$

Así m_* es σ-sub-aditiva y en consequent m_* es una medida exterior.

2. Los únicos conjuntos medibles son $\varnothing$ y Ω, porque si $A\in\mathscr{P}(\Omega)$ es tal que $A\neq\varnothing$ y $A\neq\Omega$, entonces, para todo $Q\in\mathscr{P}(\Omega)$ no vacío y no incluido en A, se tiene $A\cap Q\neq\varnothing$ y $A^c\cap Q\neq\varnothing$, y entonces

$$m_*(A\cap Q)+m_*(A^c\cap Q)=1+1=2\neq m_*(Q)\in\{0,1\}.$$

3. Es claro que el conjunto de partes m_*-medibles de Ω, $\mathscr{M}_{m_*}=\{\varnothing,\Omega\}$, es una σ-álgebra. Es fácil también ver que

$$\mu=m_*|_{\mathscr{M}_{m_*}},\ \mu(\varnothing)=0,\ \ \mu(\Omega)=1,$$

es una medida sobre $(\Omega,\mathscr{M}_{m_*})$.

Solución del ejercicio 6997 ▲005931

1. Sea $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$. Se tiene :
$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$
La aplicación $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \geqslant 0\}$ definida por :
$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
es un $\mathscr{C}^1$-difeomorfismo. Además
$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\geqslant 0\}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$
pues el conjunto $\{(x,0), x \geqslant 0\}$ es despreciable. Se deduce que :
$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \left. \frac{-\mathrm{e}^{-r^2}}{2} \right|_0^{+\infty} = \pi.$$
Así $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

2. *Cálculo del área de la esfera unitaria de* $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathscr{S}_{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$ la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$. Se denota $\mathscr{A}_{n-1}$ su área. Según la pregunta anterior, se tiene :
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,dx_1\cdots dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$
Por otra parte, ya que el área de la esfera de radio r en $\mathbb{R}^n$ vale $r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}$, se tiene :
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,dx_1\cdots dx_n = \mathscr{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,dr.$$
Usando el cambio de variable $x = r^2$, se obtiene :
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\frac{n}{2}-1}\,dx,$$
de donde :
$$\mathscr{A}_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

3. *Cálculo del volumen de la bola unidad de* $\mathbb{R}^n$.
Sea $\mathscr{B}_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$ la bola cerrada radio 1 en $\mathbb{R}^n$. Se denota $\mathscr{V}_n$ su volumen. Se tiene :
$$\mathscr{V}_n = \int_0^1 r^{n-1}\mathscr{A}_{n-1}\,dr = \mathscr{A}_{n-1} \left. \frac{r^n}{n} \right|_0^1 = \frac{\mathscr{A}_{n-1}}{n}.$$

Se deduce que :

$$\mathscr{V}_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

lo que se reduce a :

$$\mathscr{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

utilizando la identidad : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

4. *Aplicación :* El área de la esfera radio R en $\mathbb{R}^2$ vale

$$\mathscr{A}_1 R = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R,$$

que es de hecho el perímetro del círculo de radio R en el plano. Sabiendo $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, el área de la esfera de radio R en $\mathbb{R}^3$ vale

$$\mathscr{A}_2 R^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} R^2 = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R^2 = 4\pi R^2$$

que es bien el área de la esfera S^2. El volumen de la bola de radio R en $\mathbb{R}$ vale

$$\mathscr{V}_1 R = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} R = 2R,$$

que es la longitud del segmento $[-R, R]$. El volumen de la bola de radio R en $\mathbb{R}^2$ es

$$\mathscr{V}_2 R^2 = \frac{2\pi}{2\Gamma(1)} R^2 = \pi R^2,$$

que es bien el área del disco radio R. El volumen de la bola de radio R en $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathscr{V}_3 R^3 = \frac{\mathscr{A}_2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Solución del ejercicio 6998 ▲005932

1. Se tiene

$$\mathscr{V}_n = \int_{\mathscr{B}_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant 1 - x_1^2} dx_2 \dots dx_n = \mathscr{V}_{n-1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x_1^2}\right)^{n-1} dx_1$$

Se define $x_1 = \cos\theta$, para $\theta \in [0, \pi]$. Entonces $\sqrt{1-x_1^2} = |\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}\theta$ y $dx_1 = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Se tiene así

$$\mathscr{V}_n = -\mathscr{V}_{n-1} \int_{\pi}^{0} (\operatorname{sen}\theta)^n d\theta = \mathscr{V}_{n-1} \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen}\theta)^n d\theta = I_n \cdot \mathscr{V}_{n-1}.$$

2. Se tiene

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n d\theta = \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-1} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\ &= -\cos\theta(\operatorname{sen}\theta)^{n-1}\Big]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-2}(\cos\theta)^2 \, d\theta \\ &= (n-1)\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-2}(1-(\operatorname{sen}\theta)^2)\, d\theta = (n-1)(I_{n-2}-I_n). \end{aligned}$$

Así $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$.

3. Se tiene $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$. Entonces $I_2 = \frac{\pi}{2}$, $I_3 = \frac{4}{3}$, $I_4 = \frac{3\pi}{8}$, $I_5 = \frac{16}{15}$, $I_6 = \frac{15\pi}{48}$, $I_7 = \frac{32}{35}$. Como $\mathscr{V}_1 = 2$ se encuentra :

$$\mathscr{V}_2 = \pi,\ \mathscr{V}_3 = \frac{4\pi}{3},\ \mathscr{V}_4 = \frac{\pi^2}{2},\ \mathscr{V}_5 = \frac{8\pi^2}{15},\ \mathscr{V}_6 = \frac{\pi^3}{6},\ \mathscr{V}_7 = \frac{16}{105}\pi^3.$$

4. Se tiene $\mathscr{V}_n = \int_0^1 \int_{\mathscr{S}_{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{1}{n}\mathscr{A}_{n-1}$, de donde $\mathscr{A}_{n-1} = n\mathscr{V}_n$. Entonces

$$\mathscr{A}_1 = 2\pi, \quad \mathscr{A}_2 = 4\pi, \quad \mathscr{A}_3 = 2\pi^2, \quad \mathscr{A}_4 = \frac{8}{3}\pi^2, \quad \mathscr{A}_5 = \pi^3, \quad \mathscr{A}_6 = \frac{16}{15}\pi^3.$$

Solución del ejercicio 6999 ▲005969

Ver el lema 2.17 p.61 en *Analysis* de E. Lieb y M. Loss, American Mathematical Society (2001).

Solución del ejercicio 7000 ▲005970

1. Sea E un espacio de Banach. Se supone que existe una familia $(O_i)_{i\in I}$ tal que
   (a) Para todo $i \in I$, O_i es un abierto no vacío de E.
   (b) $O_i \cap O_j = \varnothing$ si $i \neq j$.
   (c) I no es numerable.
   Se supone que E es separable. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en E. Gracias a (a), para cada $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Se escoge $n(i)$ tal que $u_{n(i)} \in O_i$. Se tiene $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$, por lo tanto $i = j$ por (b). La aplicación $i \mapsto n(i)$ es inyectiva. Así I es numerable lo que contradice (c).

2. Para todo $a \in \mathbb{R}^n$, se establece $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$, donde $\mathscr{B}(a,1)$ es la bola de $\mathbb{R}^n$ radio 1 centrada en a. Sea la familia

$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \tfrac{1}{2}\},$$

   donde a recorre los puntos de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ no es numerable, por lo tanto (c) se verifica. El conjunto O_a es la bola abierta de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ radio $\frac{1}{2}$ centrada en f_a. En particular (a) es verificado. Se observa que cuando $a \neq b$, se tiene $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Se supone que existe $f \in O_a \cap O_b$, con $a \neq b$. Entonces

$$\|f_a - f_b\|_\infty \leqslant \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

   que no es posible. Entonces (b) se verifica. Se concluye que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es no separable.

Solución del ejercicio 7001 ▲005971

cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies en mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Los conjuntos $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ y $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ son introducidos para demostrar que los conjuntos $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ y $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ son de μ-medida nula (ver más adelante). En consecuencia, la función $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ puede ser escogida tal que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. (Se recuerda que $L^2(\Omega, \alpha)$ designa el conjunto de funciones de cuadrado-integrables definidas, módulo conjuntos de medida nula.) Esto implica que la función h definida en la pregunta 3 es positiva como cociente de dos funciones positivas.
- Para demostrar que $\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}\right) = 0$, se puede utilizar por ejemplo la continuidad de la medida : se tiene $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \cdots$ y $\bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, así
$$\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \tfrac{1}{2}\}\right) = \mu\left(\bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{1l}\right) = \lim_{l \to +\infty} \mu(S_{1l}) = 0.$$
Igualmente, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \cdots$ y $\bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, de donde $\mu(\{x \in \Omega, g > 2\}) = 0$.
- Para demostrar que se tiene la igualdad (10) del teorema para toda función positiva medible, se utiliza el hace que las funciones esencialmente acotadas pertenecen a $L^2(\Omega, \alpha)$ (para una medida finita se tiene en efecto, $L^\infty(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, \alpha)$), por lo tanto la igualdad
$$\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu = \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.$$
de la pregunta 2 es en particular verificada para toda función medible positiva acotada. Sea ahora una función f medible positiva (no necesariamente acotada). El teorema de convergencia monótona aplicada la sucesión de funciones $f_n = f\mathbf{1}_{\{f \leqslant n\}}$ da :
$$\begin{aligned}\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu &= \int_\Omega \lim_{n \to +\infty} f_n(2g-1)\, d\nu \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(2g-1)\, d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(2-g)\, d\mu \\ &= \int_\Omega \lim_{n \to +\infty} f_n(2-g)\, d\mu \\ &= \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.\end{aligned}$$
Se deduce que la igualdad (1) del teorema es verificada para toda función F de la forma $F = f(2g-1)$, donde $f \in \mathscr{M}^+$. Porque $(2g-1) > 0$, el conjunto de funciones F de esta forma es igualmente $\mathscr{M}^+$.

Solución del ejercicio 7002 ▲005972

1. Se define la función Beta por $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, demostremos que
$$B\left(1+\frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1} dr$$

utilizando el cambio de variable $1-r^2 \to s$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr &= -\frac{1}{2}\int_1^0 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m-2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m}{2}-1} ds = \frac{1}{2}B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right).\end{aligned}$$

2. Por el cambio de variables $t \to t^2$ y $u \to u^2$ se tiene

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{a-1}\, dt\right)\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{b-1}\, du\right) = 4\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2a-1}\, dt\right)\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} u^{2b-1}\, du\right)$$

utilizando el teorema de Fubini y la integración a polares se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(t^2+u^2)} t^{2a-1} u^{2b-1}\, dt\, du \\ &= 4\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{2a-1} r^{2b-1} r\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2a-1}(\operatorname{sen}\varphi)^{2b-1}\, d\varphi\right).\end{aligned}$$

Por tanto, por el cambio de variable $r^2 \to r$,

$$2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{2(a+b)-1}\, dr = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r} r^{a+b-1}\, dr = \Gamma(a+b);$$

y por el cambio de variable $u = \cos^2\varphi$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2a-1}(\operatorname{sen}\varphi)^{2b-1}\, d\varphi = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du = B(a,b).$$

Las tres últimas identidades implican

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

3. Se tiene :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\, dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha} > t\right) dt = \int_0^1 \operatorname{Vol}\left(\mathscr{B}\left(0,\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) dt \\ &= \mathscr{V}_n \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{n}{2}} dt = \mathscr{V}_n \int_0^1 \left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2\alpha}}\, dt \\ &= \alpha\mathscr{V}_n \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{2}} s^{\alpha-\frac{n}{2}-1}\, ds = \alpha\mathscr{V}_n B\left(\alpha-\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7003 ▲005973

1. Se define $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ y } x_{n-1} \geqslant 0\}$. Como $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$, la imagen de Ω' por S está incluido en Ω. Recíprocamente, sea x un elemento de Ω. Se define $r = |x|$, así que para todo $i \in \{1,\ldots,n-2\}$, se puede definir por inducción $\theta_i \in]0,\pi[$ gracias a su coseno :

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{r\operatorname{sen}\theta_1\cdots\operatorname{sen}\theta_{i-1}}.$$

En cuanto a θ_{n-1}, está determinado por su seno o su coseno. Como $x_n \neq 0$ o $x_{n-1} < 0$, necesariamente $\theta_{n-1} \neq 0$ (módulo 2π). La aplicación S es continuamente diferenciable, pues cada una de sus componentes lo es. La matriz jacobiana tiene sus vectores columnas ortogonales, y de norma respectivamente $1, r, r\operatorname{sen}\theta_1, \ldots, r\operatorname{sen}\theta_1\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}$. Su determinante es entonces $r^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}$. Como este determinante nunca se anula, S es un difeomorfismo de Ω' sobre Ω.

2. Esto es la fórmula del cambio de variable.
3. Se tiene :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_4 &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \, dr \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta_1 d\theta_1 \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_2 d\theta_2 \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta_1}{2} d\theta_1 \right) \left.(-\cos\theta_2)\right|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}. \\
\mathscr{A}_3 &= \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7004 ▲005974

Sea g una función en $\mathbb{R}^+$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(|x|)$.

1. Se define

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(|y|)}{|x-y|} dy,$$

y $r = |x|$, $s = |y|$. Entonces $|x-y| = \sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}$, donde θ es el ángulo entre el eje (Ox) y el eje (Oy). Se consideran las coordenadas esféricas de centro O y de eje (Ox) siguientes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= s\cos\theta \\
y_2 &= s \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\
y_3 &= s \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{g(s)}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}} s^2 \operatorname{sen}\theta \, ds d\theta d\varphi.$$

Se observa que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{rs} \sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}.$$

Así :

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_0^{+\infty} \left. \frac{1}{rs} \sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta} \right]_{\theta=0}^{\pi} g(s) s^2 \, ds \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{rs} \left(\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} \right) g(s) s^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Cuando $s \leqslant r$, se tiene

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (r-s) = 2s,$$

y cuando $s > r$, se tiene

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (s-r) = 2r.$$

Se deduce que entonces :

$$I = \frac{4\pi}{r} \int_0^r g(s) s^2 \, ds + 4\pi \int_r^{+\infty} g(s) s \, ds.$$

2. Cuando g es a soporte en $[0,R]$, el potencial newtoniano creado por la distribución de masa $f(y)=g(|y|)$ en un punto $x\in\mathbb{R}^3$ tal que $|x|>R$, es idéntico al potencial creado por una masa total igual concentrada en el origen.

Solución del ejercicio 7005 ▲005975

Sea $x\in\mathbb{R}^d$, $d=1,2$ y $r=|x|$. Se considera $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. La función h alcanza su máximo en $r=1$ y $h(1)=\frac{1}{4}$. Para un real positivo $t\leqslant\frac{1}{4}$ dado, se quiere resolver $t=h(r)=r^2(1+r^2)^{-2}$. Se obtienen dos soluciones

$$r_+=\left(\frac{1-2t}{2t}+\frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad r_-=\left(\frac{1-2t}{2t}-\frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   Así $\mu\,(f>t)=\mathscr{V}_d\left(r_+^d-r_-^d\right)$. Además, por definición, f^* verifica $\mu\,(f^*>t)=\mu\,(f>t)$ y $\mu\,(f^*>t)=\mathscr{V}_d\,r^d$, donde r y t están ligados por $t=f^*(r)$. Para $d=1$, por lo tanto se tiene $r=r_+-r_-$ y t es dado por :

$$r^2=r_+^2+r_-^2-2r_+r_-=\frac{1-2t}{t}-2\sqrt{\frac{(1-2t)^2}{4t^2}-\frac{1-4t}{4t^2}}=\frac{1-4t}{t}.$$

   Resulta que $t=f^*(r)=(4+r^2)^{-1}$.

2. Para $d=2$, se tiene

$$r^2=r_+^2-r_-^2=\frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

   lo que implica

$$t=f^*(r)=r^{-4}\left(\sqrt{4+r^4}-2\right).$$

3. Calculemos $\|f\|_2^2$, para $d=1$. Se tiene

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2=\|f^*\|_2^2=2\int_0^{+\infty}(4+r^2)^{-2}\,dr&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-2}\,ds\\&=\tfrac{1}{8}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx=\frac{\pi}{16},\end{aligned}$$

   donde la última igualdad se sigue del ejercicio 7002 (pregunta 3.) en la función Beta, pues :

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx=2\mathscr{V}_1B\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right)=4\frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\Gamma(3)}=4\frac{(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{2!}=\frac{\pi}{2}.$$

   Para $d=2$, se tiene

$$\|f\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^2}f(x)^2\,dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}h(r)^2\,r\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^{+\infty}r^5(1+r^2)^{-4}\,dr=\frac{\pi}{3},$$

   donde la última igualdad se sigue del ejercicio 7002 en la función Beta, pues :

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx=4\mathscr{V}_6B\left(4-\frac{6}{2},\frac{6}{2}+1\right)=4\mathscr{V}_6B\,(1,4)\,,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx=\int_0^{+\infty}\int_{\mathscr{S}^5}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr\,d\sigma=\mathscr{A}_5\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr$$

de donde :

$$\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr=4\frac{\mathscr{V}_6}{\mathscr{A}_5}B(1,4)=\frac{4}{6}\frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)}=\frac{2}{3}\frac{3!}{4!}=\frac{1}{6}.$$

Solución del ejercicio 7006 ▲005976

Sea $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2+ax}$, donde $a\in\mathbb{R}$. Por traslación, el reordenamiento con simetría esférica decreciente f^* de f es dado por

$$f^*(x)=\mathrm{e}^{\frac{a^2}{4}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Solución del ejercicio 7007 ▲005979

Sea $1\leqslant p<+\infty$.

1. Si f es continua con soporte compacto en la bola $\mathscr{B}(0,M)$ centrada en 0 y de radio M, y si $|h|\leqslant 1$, entonces

$$|f(x-h)-f(x)|^p\leqslant(|f(x-h)|+|f(x)|)^p\leqslant\left(2\|f\|_\infty\mathbf{1}_{\mathscr{B}(0,M+1)}\right)^p=\mathbf{1}_{B(0,M+1)}2^p\|f\|_\infty^p,$$

donde $\mathscr{B}(0,M+1)$ es la bola centrada en 0 radio $M+1$.

2. Para f continua, se tiene $\lim\limits_{h\to 0}|f(x-h)-f(x)|=0$. Porque la función $g(x)=2^p\|f\|_\infty^p\mathbf{1}_{B(0,M+1)}(x)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, el teorema de la convergencia dominada permite invertir límite e integral, y se tiene :

$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p^p=\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{h\to 0}|f(x-h)-f(x)|^p\,dx=0.$$

3. Sea f una función cualquiera en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<+\infty$. Por la densidad de las funciones continuas con soporte compacto en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $\varepsilon>0$, existe f_ε continua con soporte compacto tal que $\|f-f_\varepsilon\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Así :

$$\begin{aligned}\|\tau_h f-f\|_p&=\|\tau_h(f-f_\varepsilon)-(f-f_\varepsilon)+\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p\\&\leqslant\|\tau_h(f-f_\varepsilon)\|_p+\|f-f_\varepsilon\|_p+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p\\&=2\|f-f_\varepsilon\|_p+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p=\frac{2}{3}\varepsilon+\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p,\end{aligned}$$

porque f_ε es continua con soporte compacto, según la pregunta anterior, existe $\delta>0$ tal que para $|h|<\delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon-f_\varepsilon\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$. Así, para $|h|<\delta$, se tiene $\|\tau_h f-f\|_p<\varepsilon$. En otros términos $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p=0$.

4. Para $p=\infty$, las funciones continuas con soporte compacto no son densas en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, lo que hace que la prueba anterior no puede aplicarse en este caso. Además, se verifica que, para $f=\mathbf{1}_{B(0,1)}$ y $h\neq 0$, se tiene

$$\|\tau_h f-f\|_\infty=1.$$

Entonces solo para $h=0$, se tiene $\|\tau_h f-f\|_\infty=0$. Se puede igualmente verificar que $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_\infty=0$ si y solo si la función f tiene un representante uniformemente continuo.

Solución del ejercicio 7008 ▲005980

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones verificando las hipótesis (i), (ii) y (iii) del teorema, y sea $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Notando q el exponente conjugado de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), se tiene

$$|\varphi_n * f - f|^p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n(y)\,dy|^p$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy\right)^p.$$

   Utilizando la desigualdad de Hölder para la medida $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, se tiene

$$\begin{aligned}|\varphi_n * f - f|^p(x) &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1^q\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{p}}\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

2. Se deduce que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)dx$$

   Por el teorema de Tonelli :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)|\varphi_n|(y)\,dy\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}^n}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy.\end{aligned}$$

3. Sea $\delta > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(\int_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p\int_{|y|\leqslant\delta}|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}(\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)^p\,|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + (2\|f\|_p)^p\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p\|f\|_p^p\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right).\end{aligned}$$

4. Sea $\varepsilon > 0$. Por continuidad de las traslaciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver ejercicio anterior), existe un $\delta > 0$ tal que

$$|y| \leqslant \delta \Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \frac{K^{-\left(\frac{p}{q}+1\right)}}{2}\,\varepsilon.$$

De acuerdo a la hipótesis (iii), existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, se tiene

$$\int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy < \frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1}\|f\|_p^p}\,\varepsilon.$$

Así para todo $n > N$,

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p < \varepsilon,$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Solución del ejercicio 7009 ▲005981

Ver E. Lieb y M. Loss, *Analysis*, p.123, American Mathematical Society (2001).

Solución del ejercicio 7012 ▲002340

1. A una parte no vacía de $\mathbb{R}$, un *mayorante* de A es un real $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M.$$

Si A es una parte no vacía y mayorada, entonces por definición $\sup A$ es la menor de las cotas superiores. Se tiene las siguientes propiedades :

(a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

(b) $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;

(c) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A\cap B \neq \varnothing$;

(d) $\inf(A\cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;

(e) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A\cap B \neq \varnothing$;

Probar las dos primeras igualdades,

(a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$: para todo $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $a \leqslant \sup A$ y $b \leqslant \sup B$, por lo tanto $a+b \leqslant \sup A + \sup B$, por lo tanto $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A+B$ y como $\sup(A+B)$ es la menor de las cotas superiores de $A+B$, entonces $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$. Recíprocamente, existe una sucesión (a_n) de elementos de A tal que esta sucesión converge a $\sup A$, igualmente existe una sucesión (b_n) de elementos de B que converge a $\sup B$, la sucesión (a_n+b_n) es una sucesión de elementos de $A+B$ que converge a $\sup A + \sup B$, por lo que la cota superior de $A+B$ es más grande que $\sup A + \sup B$, sea $\sup(A+B) \geqslant \sup A + \sup B$. De donde la igualdad.

(b) $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$: Se observa primero que si $P \subset Q$, entonces $\sup P \leqslant \sup Q$: en efecto, $\sup Q$ es una cota superior de Q por lo tanto de P (por la inclusión $P \subset Q$), por lo tanto, el más pequeño de los mayorantes, $\sup P$, para P es menor que la cota superior particular $\sup Q$. Aplicar esto a $A \subset A\cup B$, por lo tanto $\sup A \leqslant \sup(A\cup B)$ y para $B \subset A\cup B$ se obtiene $\sup B \leqslant \sup(A\cup B)$. Se acaba de demostrar $\sup(A\cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$. Para la otra desigualdad : sea $M = \max(\sup A, \sup B)$. Para $x \in A\cup B$, entonces sea $x \in A$ y entonces $x \leqslant \sup A \leqslant M$, o sea $x \in B$ y entonces $x \leqslant \sup B \leqslant M$; por lo tanto cualquiera que sea $x \in A\cup B$, $x \leqslant M$, por lo tanto M es una cota superior de $A\cup B$, así $\sup(A\cup B) \leqslant M = \max(\sup A, \sup B)$.

2. (a) $d(0, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$, observar dos elementos del tipo $\frac{\sqrt{2}}{n}$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})=0$, es la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ o entonces ver la sucesión definida por $u_0=1, u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n}), n\in\mathbb{N}$, que es una sucesión de racionales que convergen a $\sqrt{2}$.

(c) Se supone que $\mathscr{D}$ pasa por el origen, entonces $d(M,\mathscr{D})=x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)^2$.

3. $d(A,B)=0$.
4. $\operatorname{diam}(]0,1[\cap\mathbb{Q})=1=\operatorname{diam}([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))$.

Solución del ejercicio 7013 ▲002341

1. J_x es un abierto no vacío porque es una unión de abiertos que contienen a x. Además, J_x es un intervalo porque es una unión de intervalos que todos contienen el punto x. Así J_x es un intervalo abierto. Por lo tanto, se puede escribir $\mathscr{O}=\bigcup_{x\in\mathscr{O}} J_x$. Pero esta unión no es necesariamente numerable.
   Primero si $z\in J_x$, entonces $J_x=J_z$. De hecho, sea I un intervalo incluido en $\mathscr{O}$ conteniendo x y z. Si $x'\in J_x$, sea J un intervalo incluido en $\mathscr{O}$ conteniendo x y x'. Entonces $I\cup J$ es un intervalo (pues x está en los dos intervalos I y J), $I\cup J$ está incluido en $\mathscr{O}$ y contiene x' y z. Entonces $x'\in J_z$. Entonces $J_x\subset J_z$. Finalmente, como $z\in J_x$ se tiene también $x\in J_z$, entonces se demuestra igualmente $J_z\subset J_x$ y $J_x=J_z$.
   Para $x,y\in\mathscr{O}$, entonces $J_x=J_y$ o $J_x\cap J_y=\varnothing$. De hecho, supongamos que $J_x\cap J_y\neq\varnothing$ y sea $z\in J_x\cap J_y$. Como $z\in J_x$, entonces $J_x=J_z$, como $z\in J_y$ y $J_y=J_z$. De esta manera $J_x=J_y$. Para cada intervalo abierto J_x existe $q\in\mathbb{Q}\cap J_x$, con por supuesto $J_x=J_q$. Como $\mathbb{Q}$ es numerable $\mathscr{O}\cap\mathbb{Q}$ lo es también. Así, escribimos
   $$\mathscr{O}=\bigcup_{q\in\mathscr{O}\cap\mathbb{Q}} J_q,$$
   que es lo pedido.
2. Para $\mathbb{R}^n$ se puede demostrar el siguiente resultado : todo abierto $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como la unión numerable de bolas abiertas. Se considera J_x la unión de bolas abiertas de radio racional centradas en x, entonces nos fijamos solo en los x perteneciendo a $\mathscr{O}\cap\mathbb{Q}^n$. Por otro lado permitimos que dos bolas se intersequen.

Solución del ejercicio 7014 ▲002342

1. Sean $d=p+q\sqrt{2}$ y $d'=p'+q'\sqrt{2}$ dos elementos de D. Entonces $d+d'=(p+p')+(q+q')\sqrt{2}$ es un elemento de D y $dd'=(pp'+2qq')+(pq'+p'q)\sqrt{2}$ también.
2. Se tiene $u<1$, por lo tanto u^k tiende a 0, cuando k tiende a $+\infty$. Entonces, para $\varepsilon=b-a$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geqslant n$ se tiene $u^k<\varepsilon=b-a$. En particular $u^n<b-a$. Si se busca un real entonces $r=\frac{a}{u^n}+1$ sirve, pero se busca un entero digamos, $m=E(\frac{a}{u^n})+1$. Entonces $m-1\leqslant\frac{a}{u^n}<m$. La desigualdad de la derecha da $a<mu^n$. La desigualdad de la izquierda también se escribe $mu^n-u^n\leqslant a$, o sea $mu^n\leqslant a+u^n<a+b-a=b$, por lo tanto $a<mu^n<b$. De esto se deduce que D es denso en $\mathbb{R}$: para todo intervalo $[a,b]$, $a<b$ existen m,n enteros tales que $mu^n\in[a,b]$. Por lo tanto mu^n está en D, pues $u\in D$, entonces por multiplicación $u^n\in D$.

Solución del ejercicio 7015 ▲002343

1. Este ejercicio justifica la terminología de "bola cerrada". Se trata de demostrar que el complemento de una bola cerrada es un abierto. Se recomienda hacer un dibujo. Sea $C = E \setminus B'(a,r)$. Sea $x \in C$, se busca una bola abierta $B(x,\varepsilon)$ contenida en C. Como $x \in C$, $x \notin B'(a,r)$, por lo tanto $d(a,x) > r$. Sea ε tal que $0 < \varepsilon < d(a,x) - r$. Demostrar que $B(x,\varepsilon) \subset C$: para $y \in B(x,\varepsilon)$, la desigualdad triangular $d(a,x) \leqslant d(a,y) + d(y,x)$, por lo tanto $d(a,y) \geqslant d(a,x) - d(y,x) \geqslant d(a,x) - \varepsilon > r$. Como $d(a,y) > r$, entonces $y \notin B'(a,r)$, por lo tanto $y \in C$. Como la prueba es válida cualquiera que sea $y \in B(x,\varepsilon)$, se tiene $B(x,\varepsilon) \subset C$. Y por lo tanto C es un abierto.
2. Para $a = (\frac{1}{2},0)$ y $r = \frac{1}{2}$ se tiene $B'(a,r) = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,\frac{1}{2}]$, $B(a,r) =]0,1[\times \{0\}$ y $\overline{B(a,r)} = [0,1] \times \{0\}$.

Solución del ejercicio 7016 ▲002344

---

1. Se denota $B = B(a,r)$, $B' = B'(a,r)$, $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$. Es necesario demostrar $B' = \bar{B}$. B' es una bola cerrada, por lo que un cerrado conteniendo B, entonces que $\bar{B}$ es el más pequeño cerrado que contiene B, por lo tanto $\bar{B} \subset B'$. Estudiar la inclusión inversa : sea $x \in B'$, es necesario demostrar $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$, entonces $x \in \bar{B}$, se supone de modo que $x \notin B$, entonces $\|x-a\| = r$. Sea $B(x,\varepsilon)$ una bola centrada en x. x es adherente a B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ es no vacío cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Se fija $\varepsilon > 0$ y sea el punto
$$y = x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}.$$
Hacer un dibujo y colocar y en este dibujo. Por una parte $y \in B(x,\varepsilon)$, pues $\|y-x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Por otra parte $y \in B = B(a,r)$, pues $\|y-a\| = \|x-a-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x-a\|(1-\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$. Entonces $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, lo que prueba que $B' \subset \bar{B}$. Entonces $B' = \bar{B}$.
2. $(\Leftarrow)$ Sea $x \in \bar{B}(a,r)$, entonces $\|x-b\| = \|x-a+a-b\| \leqslant \|x-a\| + \|a-b\| \leqslant r+R-r \leqslant R$, por lo tanto $x \in \bar{B}(b,R)$.
   $(\Rightarrow)$ Sea
   $$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$
   entonces $\|x-a\| = r$, por lo tanto $x \in \bar{B}(a,r)$, por lo tanto $x \in \bar{B}(b,R)$ y $\|x-b\| \leqslant R$ o sea que $\|x-b\| = \|a-b\|+r$ (es el mismo cálculo que para la pregunta anterior). Entonces $\|a-b\|+r \leqslant R$, o sea $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R-r$ y, en particular $r \leqslant R$.

Solución del ejercicio 7017 ▲002345

---

1. (a) Si $||(x,y)|| = 0$, entonces $\max(|x+y|,|x-2y|) = 0$, por lo tanto $x+y = 0$ y $x-2y = 0$, es decir $x = 0$ y $y = 0$. Recíprocamente, $\|(0,0)\| = 0$.
   (b) $||\lambda.(x,y)|| = ||(\lambda x,\lambda y)|| = \max(|\lambda x+\lambda y|,|\lambda x-2\lambda y|) = |\lambda|\max(|x+y|,|x-2y|) = |\lambda|\cdot||(x,y)||$.
   (c) $\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x',y+y')\| = \max(|x+x'+y+y'|,|x+x'-2y-2y'|) \leqslant \max(|x+y|+|x'+y'|,|x-2y|+|x'-2y'|) \leqslant \max(|x+y|,|x-2y|)+\max(|x'+y'|,|x'-2y'|) \leqslant ||(x,y)||+||(x',y')||$.

   La bola unitaria cerrada centrada en el origen es la región del plano comprendida entre las rectas de ecuaciones $x+y = +1$, $x+y = -1$, $x-2y = +1$, $x-2y = -1$.
2. Sentido $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$, entonces $q(x) \leqslant 1$, por lo tanto $p(x) \leqslant 1$, así que $x \in B_p$.

Sentido $\Rightarrow$: Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$, por lo que $\frac{x}{q(x)} \in B_q$, por lo tanto $\frac{x}{q(x)} \in B_p$, por ende $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ o sea $p(x) \leqslant q(x)$. Esto es también válido para $x = 0$.

$B_q \subset 2B_p$ es equivalente a $p(x) \leqslant 2q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (cuidado con el sentido !). Y $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ es equivalente a $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si las dos inclusiones son verdaderas entonces $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ y en particular las normas p y q son equivalentes. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, para las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ se tiene

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Solución del ejercicio 7018 ▲002346

1. Una sucesión de l^∞ es denotada $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$, para cada $p \geqslant 0$, x^p es en sí misma una sucesión $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \dots)$. (Conviene mantener la cabeza fría : ¡se está ante sucesiones de sucesiones !) Es necesario demostrar que Y es cerrado en X. Sea así (x^p) una sucesión de Y que converge a $x \in X$. Por lo tanto, se debe demostrar que de hecho $x \in Y$, es decir que $x = (x(0), x(1), \dots)$ es una sucesión que tiende a 0. Sea $\varepsilon > 0$ como $x^p \to x$, entonces existe P tal que si $p \geqslant P$ se tiene $d(x^p, x) < \varepsilon$. Por la definición de d se tiene para $p \geqslant P$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Se fija $p = P$, entonces $x^P \in Y$, por lo tanto x^P es una sucesión que tiende a 0, entonces existe N tal que si $n \geqslant N$, entonces $|x^P(n)| < \varepsilon$. Juntemos todo, para $n \geqslant N$:
$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leqslant |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$
Entonces la sucesión x tiende a 0, por lo tanto $x \in Y$ y Y es cerrado.
2. Denotemos Z el conjunto de sucesiones nulas a partir de un cierto rango.
Para $y = (y(0), y(1), y(2), \dots) \in Y$, se define la sucesión
$$y^0 = (y(0), 0, 0, \dots), y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \dots), \dots, y^p = (y(0), \dots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \dots).$$
La sucesión (y^p) es de hecho una sucesión de elementos de Z. Además, $d(y^p, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n>p} |y(n)|$ por lo que la sucesión $y(n)$ tiende a 0, por lo tanto $d(y^p, y)$ tiende a 0, cuando p tiende a $+\infty$. Demostrar fácilmente (por contradicción) que el elemento $x = (1, 1, 1, \dots) \in X$ no es el límite de ninguna sucesión de elementos de Z, (ni fuera de Y).

Solución del ejercicio 7019 ▲002347

Por la desigualdad triangular $|f(x) + f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$ se obtiene $\|f\| \leqslant N(f)$. Para una desigualdad en el otro sentido, se desglosa el trabajo :

— $\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|$: de hecho, por la desigualdad triangular $|f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x) + f(x)|$.

— $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$: en efecto, f es continua en $[0,1]$ por lo tanto es acotada y alcanza sus límites. Sea $x_0 \in [0,1]$ este punto del máximo.
Si $x_0 \in]0,1[$, entonces $f'(x_0) = 0$, por lo tanto $\|f\|_\infty = |f(x_0)| = |f(x_0) + f'(x_0)| \leqslant \|f\|$.
Si $x_0 = 1$, entonces f y f' tienen el mismo signo en un intervalo $[1-\varepsilon, 1]$, entonces en este intervalo $|f(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)|$ y de este modo $\|f\|_\infty = |f(1)| \leqslant \|f\|$. (Finalmente, $f(0) = 0$, entonces si $x_0 = 0$, tenemos que f es nula y la desigualdad es trivial.)

— Queda recopilar las expresiones :
$$N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f\| + \|f\|_\infty \leqslant 3\|f\|.$$
(La primera desigualdad proviene del primer punto y la segunda del segundo.)

Las normas $\|f\|$ y $N(f)$ son equivalentes :

$$\tfrac{1}{3}N(f) \leqslant \|f\| \leqslant N(f).$$

Solución del ejercicio 7021 ▲002349

1. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leqslant \|f\|_\infty$. Entonces $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Sin embargo, no existe ninguna constante $C > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$, para todo f. Para demostrar esto por reducción al absurdo, se supone que existe una constante $C > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$, para todo f de $C([0,1],\mathbb{R})$. Veamos las funciones f_k definidas por $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0,\frac{1}{k}]$ y $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Entonces $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_k\|_\infty = 2k$, y $\|f_k\|_1 = 1$. Se obtiene $2k \leqslant C \cdot 1$ lo cual es contradictorio para k bastante grande. Esto prueba que las normas no son equivalentes.
2. Como las métricas están definidas por de las normas y que las normas no son equivalentes, entonces las métricas no definen la misma topología.

Solución del ejercicio 7022 ▲002350

1. Se demuestra fácilmente
$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$
2. Sin embargo, no existe una constante $C > 0$ tal que $N_3 \leqslant CN_4$ o $N_2 \leqslant CN_4$. Se supone que existe $C > 0$ tal que $N_3 \leqslant CN_4$ se observa f_k definida por $f_k(x) = x^k$, luego del cálculo se tiene $N_3(f_k) = k+1$ y $N_4(f_k) = 2$, para k suficientemente grande tenemos una contradicción. Como N_1 y N_2 son equivalentes se va a probar que no existe constante $C > 0$ tal que $N_3 \leqslant CN_1$. Se toma g_k, definida por $g_k(x) = 1 + \operatorname{sen}(2\pi kx)$. Entonces $N_1(g_k) = 2$ y $N_3(g_k) = 4k$, lo que prueba el resultado deseado.

Solución del ejercicio 7023 ▲002351

1. (a) Por ejemplo, una sucesión constante $x_n = a$, para todo n.
   (b) Por ejemplo, $x_n = \frac{1}{n}$ y $a = 0$.
   (c) Como $\mathbb{Q}$ es numerable se puede encontrar una sucesión x_n tal que $A = \{x_1, x_2, \dots\} = \mathbb{Q}$. Se toma $a = \sqrt{2}$, entonces $a \in \bar{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Son justo las definiciones : un punto de acumulación de A es siempre un valor de adherencia de A.

Solución del ejercicio 7024 ▲002352

1. (Solución para $n = 1$, para $n > 1$ reemplazar intervalos por bolas.) Como 0 es aislado sea $I =]-\varepsilon,+\varepsilon[$ un vecindario de 0 tal que $I \cap G = \{0\}$. Sea $g \in G$ y considerar $I_g = g + I =]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$. Se supone, por contradicción, que $I_g \cap G$ no se reduce a g. Entonces existe $g' \in I_g \cap G$, $g' \neq g$. Pero $g - \varepsilon < g' < g + \varepsilon$ y entonces $g - g' \in I$ y como G es un grupo se tiene $g - g' \in G$ y $g - g' \neq 0$. Se ha encontrado así un elemento $g - g' \in G \cap I$ que no es 0. Lo que es una contradicción.

   Para demostrar que G es discreto (es decir G es numerable y sus puntos son aislados) se observa que la distancia entre dos elementos de G es al menos ε, por lo tanto para $J_g =]g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}[$ se tiene $g \neq g'$ implica $J_g \cap J_{g'} = \varnothing$.

Para cada $g \in G$ se escoge $q(g) \in \mathbb{Q} \cap J_g$, lo que da una aplicación : $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $\Phi(g) = q(g)$, y Φ es inyectiva, por lo tanto G es numerable. Demostrar que G es cerrado : sea (g_n) una sucesión de G que converge a $g \in \mathbb{R}$. Para N lo suficientemente grande y para todo $n \geqslant N$ se tiene $|g_n - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Para $n \geqslant N$ se tiene $|g_n - g_N| \leqslant |g_n - g| + |g - g_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Así como $g_N \in J_{g_N}$, entonces $g_n \in J_{g_N}$ igualmente, por lo que J_{g_N} contiene un solo elemento de G, por lo tanto $g_n = g_N$, para todo $n \geqslant N$. Así, la sucesión es estacionaria (i.e. constante a partir de cierto rango) y el límite g vale g_N y, en particular $g \in G$.

2. Se supone $G \neq \{0\}$. Sea $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. Como 0 es aislado entonces $a > 0$. Como G es cerrado, $a \in G$. Sea $g \in G$ y sea $k = E(\frac{g}{a})$, entonces $k \leqslant \frac{g}{a} < k+1$. De este modo $0 \leqslant g - ka < a$. Por lo tanto $g - ka$ está en G y en $\mathbb{R}_+$, ya que es más pequeño que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ y necesariamente $g - ka = 0$, o sea $g = ka \in a\mathbb{Z}$.
3. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, se busca $g \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Como 0 es un punto de acumulación de G existe $h \in G$ tal que $0 < h < \varepsilon$, para $k = E(\frac{x}{h})$, se tiene $kh \leqslant x < kh + h$, por lo tanto $g = kh \in G \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Entonces G es denso en $\mathbb{R}$. Para un grupo G cualquiera ya sea 0 es aislado, o ya sea 0 es un punto de acumulación. si además G es cerrado entonces ya sea $G = a\mathbb{Z}$ o $G = \{0\}$, sea $\bar{G} = \mathbb{R}$, por lo tanto $G = \mathbb{R}$. Los subgrupos cerrados de $(\mathbb{R}, +)$ son, por lo tanto 0, $\mathbb{R}$ y los $a\mathbb{Z}$, con $a > 0$.
4. Sea $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Si G no es denso en $\mathbb{R}$, entonces, por las cuestiones anteriores, existe $a > 0$ tal que $G = a\mathbb{Z}$. En particular $1 \in G$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = ka$ y análogamente $\alpha \in G$, entonces existe $k' \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha = k'a$. Por división $\alpha = \frac{k'}{k}$, lo que contradice $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Así $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{R}$.
   Se define $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ por $t \mapsto e^{2i\pi t}$ (S^1 es el círculo de $\mathbb{C}$ de números complejos de módulo 1). Entonces Φ es continua y sobreyectiva. Como Φ es continua entonces para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se $\Phi(\bar{A}) \subset \overline{\Phi(A)}$. Aplicado al conjunto $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, se tiene $\bar{G} = \mathbb{R}$, por lo tanto $\Phi(\bar{G}) = S^1$, pues Φ es sobreyectiva; por otra parte $\Phi(G) = \{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $S^1 = \Phi(\bar{G}) \subset \overline{\Phi(G)} = \overline{\{e^{2i\pi k\alpha}\}}$. La adherencia de $\{e^{2i\pi k\alpha} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ es, por lo tanto el círculo S^1 entero.

Solución del ejercicio 7025 ▲002418

1. Define una topología.
2. No define una topología, pues $\{a\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\}$ no está en la colección.
3. No define una topología, pues $\{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\}$ no está en la colección.

Solución del ejercicio 7026 ▲002419

Por lo tanto, se debe probar que la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ conteniendo $\varnothing$, $\mathbb{R}$ y todos los conjuntos finitos verifica las propiedades de una colección de conjuntos cerrados :
- toda intersección de conjuntos cerrados es cerrada;
- toda unión finita de conjuntos cerrados es cerrada;
- $\varnothing$ y todo el espacio son cerrados.

Las tres propiedades se cumplen obviamente en este caso. La topología así definida en $\mathbb{R}$ no es separada. En efecto, dos abiertos no vacíos Ω y Ω' son de la forma $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ y $\Omega' = \mathbb{R} \setminus F'$, donde F, F' son finitos o vacíos. Entonces $\Omega \cap \Omega' = \mathbb{R} \setminus (F \cup F')$ no es vacío, porque si no esto implica que $\mathbb{R} = F \cup F'$ es finito o vacío, lo que es falso.

Solución del ejercicio 7027 ▲002420

1. Se supone que $\mathscr{B}$ es una base de $\mathscr{T}$, y sea $\mathscr{O}$ un abierto arbitrario en $\mathscr{T}$ y x un punto de $\mathscr{O}$. El abierto $\mathscr{O}$ se escribe como $\mathscr{O} = \bigcup_{i\in I} B_i$, donde $B_i \in \mathscr{B}$, para todo $i \in I$. En particular existe un $i_0 \in I$ tal que $x \in B_{i_0}$.
2. Recíprocamente, si $\mathscr{O}$ es un abierto arbitrario, para todo punto $x \in \mathscr{O}$ existe un $B_x \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subset \mathscr{O}$. En consecuencia $\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} B_x$.
3. Es suficiente demostrar la propiedad enunciada en (1). Sea $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_n$ y sea x un punto arbitrario de $\mathscr{O}$. De acuerdo con el curso, existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. *Observación.* Otra forma de formular esto es decir que el conjunto de bolas abiertas euclidianas forma una base de la topología $\mathscr{T}_n$. Dado que el conjunto $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, se sigue que $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ contiene un vector $q \in \mathbb{Q}^n$. En particular $\operatorname{dist}(x,q) < \frac{r}{2}$, de donde $B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset \mathscr{O}$. El intervalo $]\operatorname{dist}(x,q), \frac{r}{2}[$ es no vacío, por lo que contiene un número racional R. Así $x \in B(q,R) \subset B\left(q, \frac{r}{2}\right) \subset \mathscr{O}$.
4. porque $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}_n$, lo que queda por demostrar es aún la propiedad establecida en (1). Sea $\mathscr{O}$ un abierto y $x \in \mathscr{O}$. Existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \mathscr{O}$. Por el curso
$$\operatorname{dist}(y,x) = \|y-x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|y-x\|_\infty .$$
Se sigue que
$$B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{y \,;\, \|y-x\|_\infty < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\} \subset B(x,r) \subset \mathscr{O} . \tag{40}$$
Por lo tanto $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ no es más que el cubo de centro de simetría x y de longitud de las aristas $\frac{2r}{\sqrt{n}}$. En particular $B_\infty\left(x, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \in \mathscr{B}'$. Se concluye que $\mathscr{B}'$ es una base de $\mathscr{T}_n$.
5. Sea $]0,1[\in \mathscr{T}_1$. No existe intervalo de la forma $]-\infty,a[$, $a \in \mathbb{R}$, o $]b,+\infty[$, $b \in \mathbb{R}$, contenido en $]0,1[$. Entonces $\mathscr{B}''$ no es una base para $\mathscr{T}_1$.
6. Se supone que $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. En particular $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$. Para todo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, donde $m \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$, se escoge M_a, N_a dos puntos en la recta δ_a tales que $O \in]M_a, N_a[$ y $\operatorname{dist}(O,M_a) = \operatorname{dist}(O,N_a) = \frac{1}{n}$. Para $a = 0$ se escoge $M_0 = (1,0)\,, N_0 = (-1,0)$. Sea
$$\mathscr{C} = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}}]M_a, N_a[.$$
Por hipótesis $\mathscr{C} \in \mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$. En particular, ya que O es un punto de $\mathscr{C}$, existe $r > 0$ tal que $Y \cap B(O,r) \subset \mathscr{C}$. Para todo $a \in \mathbb{Q}$ por lo tanto se tiene $\delta_a \cap B(O,r) \subset]M_a, N_a[$, de donde $r < \operatorname{dist}(O,M_a) = \frac{1}{n}$. Como esto es verificado para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se sigue que $r \leqslant 0$, lo que contradice la escogencia de r. Se ha obtenido una contradicción. Entonces no se puede tener $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$.

Solución del ejercicio 7028 ▲002421

---

1. Se verifican fácilmente las tres propiedades de una métrica.
2. Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$. Se tiene que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, por lo tanto la función f es creciente en $\mathbb{R}_+$. La desigualdad $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}_+$ es equivalente a
$$\frac{1}{x+y+1} \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+1} + 1 \geqslant \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow 1 + x + y \leqslant (1+x)(1+y) .$$
La última igualdad es evidentemente verificada para $x \geqslant 0\,, y \geqslant 0$.

3. Por el curso, la métrica dist y la métrica $\mathrm{dist}_2 = \min(\mathrm{dist}, 1)$ son topológicamente equivalentes. Por lo tanto, basta con demostrar que dist_1 y dist_2 son topológicamente equivalentes. Porque $1+\mathrm{dist} \geqslant 1$, se tiene que $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}$. Así $\mathrm{dist}_1 \leqslant 1$, de donde $\mathrm{dist}_1 \leqslant \mathrm{dist}_2$. La función f es creciente, para todo x,y se tiene que $\mathrm{dist}_1(x,y) = f(\mathrm{dist}(x,y)) \geqslant f(\mathrm{dist}_2(x,y))$. Por otra parte, $\mathrm{dist}_2(x,y) \leqslant 1$ implica $f(\mathrm{dist}_2(x,y)) = \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{1+\mathrm{dist}_2(x,y)} \geqslant \frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2}$. Se ha obtenido que para todo x,y,

$$\frac{\mathrm{dist}_2(x,y)}{2} \leqslant \mathrm{dist}_1(x,y) \leqslant \mathrm{dist}_2(x,y).$$

Así, las métricas dist_1 y dist_2 son equivalentes.

Solución del ejercicio 7029 ▲002422

1. Como $d(x,y) = 1$, si $x \neq y$, se tiene que $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Además, como la relación $x \neq y$ es simétrica, tenemos $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in E$. Sean $x,y,z \in E$, se supone $x = z$; o bien $y = x$ o bien y es distinto de x. En el primero caso, $d(x,z) = d(x,y) = d(y,z) = 0$ y $d(x,z) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. En el segundo caso, $d(x,y) = 1$, de donde

$$0 = d(x,x) = d(x,z) < \sup(d(x,y),d(x,y)) = 1.$$

Se supone $x \neq z$; o y es distinto de x y de z, o entonces se tiene una de las posibilidades : $y = x$ o $y = z$. Si los tres elementos son dos a dos distintos, la desigualdad es trivialmente verificada ($1 = 1$!). Si no, $d(x,y) = 1$ o $d(y,z) = 1$, de donde

$$1 = d(x,z) \leqslant \sup(d(x,y),d(y,z)).$$

2. Se supone que $d(x,y) \neq d(y,z)$ y que $d(x,z) < \sup(d(x,y),d(y,z))$ y para fijar las ideas que $d(x,y) = \sup(d(x,y),d(y,z))$. Entonces $d(y,z) < d(x,y)$ y $d(x,z) < d(x,y)$, de lo que se deduce que $\sup(d(x,z), d(z,y)) < d(x,y)$. Por otro lado, $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,z),d(z,y))$. Las últimas dos desigualdades son contradictorias.

3. Sea $B_d(a,r)$ una bola abierta ; demostrar que es cerrado. Sea $y \in E \setminus B_d(a,r)$; demostrar que existe una bola abierta $B_d(y,\eta)$, contenida en $E \setminus B_d(a,r)$. Si se elige $\eta = r/2$ o más generalmente $\eta < r$, se obtiene que, para todo $z \in B_d(y,\eta)$,

$$d(a,z) \leqslant \sup(d(a,y),d(y,z)) \leqslant \sup(d(a,y),\eta)).$$

Como $d(a,y) \geqslant r$ y $d(y,z) < \eta < r$, se tiene, (de acuerdo con la segunda pregunta), $d(a,z) = d(a,y) \geqslant r$. Se deduce que $B_d(y,\eta) \subset E \setminus B_d(a,r)$ y por lo tanto, la bola abierta $B_d(a,r)$ es también cerrada. La prueba de que la bola cerrada $B'_d(a,r)$ es también abierta es análoga.

4. Sean $B_d(a,r)$ y $B_d(b,s)$ dos bolas abiertas que tienen una intersección no vacía y sea $z_0 \in B_d(a,r) \cap B_d(b,s)$. Se supone que $r \leqslant s$ y se debe demostrar entonces que $B_d(a,r) \subset B_d(b,s)$. Si se observa la distancia a b de todo $z \in B_d(a,r)$:

$$d(b,z) \leqslant \sup(d(b,z_0),d(z_0,z)) < \sup(s,d(z_0,z))$$

ya que z_0 está en $B_d(b,s)$. Por otro lugar, se tiene que : $d(z_0,z) \leqslant \sup(d(z_0,a),d(a,z)) < r$. Se obtiene una mayoración de $d(b,z)$: $d(b,z) < \sup(r,s) = s$, por lo tanto, una inclusión de $B_d(a,r)$ en $B_d(b,s)$. Consecuencia : dos bolas abiertas de mismo radio r que se intersecan se confunden.

5. Sean $A = B_d(a,r)$ y $B = B_d(b,r)$ dos bolas abiertas de radio r contenidas en una bola cerrada $C = B'_d(c,r)$ del mismo radio. Demostrar que :
$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \qquad r \leqslant d(a,b) \leqslant r.$$
La desigualdad ultramétrica demuestra que $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,c), d(c,y))$ y este sup es menor que r ya que cada una de las bolas A y B está incluido en C. Entonces $d(x,y) \leqslant r$.
Por otro lado, se introducen en la estimación de $d(x,y)$ el centro de las bolas respectivas a las que pertenecen : $d(x,y) \leqslant \sup(d(x,a), d(a,y))$. Si $d(x,a) = d(a,y)$, se tiene $d(a,y) < r$ y y está en A, lo que es imposible, A y B son disjuntos según la cuarta cuestión. Entonces $d(a,y) \neq d(x,a)$, y de hecho $d(a,y) > d(x,a)$ y
$$d(x,y) = d(a,y).$$
Entonces se ve que en el cálculo de la distancia $d(x,y)$ se puede reemplazar x o y por el centro de la bola abierta a la que pertenece. Así
$$d(x,y) = d(a,b) \geqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$
Y finalmente
$$r \leqslant d(x,y) \leqslant r, \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$
de donde $d(A,B) = r$.

Solución del ejercicio 7030 ▲002423

---

1. Sea $x = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{a'}{b'}$. Se escribe $a = p^\alpha a_1$, $b = p^\beta b_1, \ldots$ Entonces la ecuación $ab' = a'b$ se convierte en $p^{\alpha+\beta'} a_1 b'_1 = p^{\alpha'+\beta} a'_1 b_1$. Por ende $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$ o aún $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$. Así $\nu(\pm\frac{a}{b}) = \nu(\frac{a'}{b'})$.
2. Sea $x = p^\alpha x_1$, $y = p^\beta y_1$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y los numeradores y denominadores de $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ no divisible por p. Entonces $xy = p^{\alpha+\beta} x_1 y_1$ y por consiguiente $\nu(xy) = \alpha + \beta = \nu(x) + \nu(y)$.
3. Sea $x, y \in \mathbb{Z}$, $x = p^\alpha x_1$, $y = p^\beta y_1$. Se supone por ejemplo $\alpha \leqslant \beta$, entonces $x + y = p^\alpha(x_1 + p^{\beta-\alpha} y_1)$, con $x_1 + p^{\beta-\alpha} y_1 \in \mathbb{Z}$. Así $\nu(x+y) \geqslant \alpha = \min(\nu(x), \nu(y))$. Sea ahora $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$. Entonces
$$\begin{aligned}
\nu(x+y) = \nu(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}) &= \nu(\frac{ab' + a'b}{bb'}) = \nu(ab' + a'b) - \nu(bb') \\
&\geqslant \min(\nu(ab'), \nu(a'b)) - \nu(bb') \qquad \text{(gracias a la desigualdad sobre los enteros),} \\
&\geqslant \min(\nu(a) + \nu(b'), \nu(a') + \nu(b)) - \nu(b) - \nu(b') \\
&\geqslant \min(\nu(a) + \nu(b') - \nu(b) - \nu(b'), \nu(a') + \nu(b) - \nu(b) - \nu(b')) \\
&\geqslant \min(\nu(a) - \nu(b), \nu(a') - \nu(b')) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y)).
\end{aligned}$$
4. Es claro que $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$ y que $d(x,y) = d(y,x)$. Para un triplete (x,y,z) se tiene
$$\begin{aligned}
d(x,z) = p^{-\nu(x-z)} &= p^{-\nu(x-y+y-z)} \leqslant p^{-\min(\nu(x-y), \nu(y-z))} \\
&\leqslant \max(p^{-\nu(x-y)}, p^{-\nu(y-z)}) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7031 ▲002424

---

1. (a) Si $x \in \mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la bola $B(x, \frac{1}{n})$ interseca necesariamente A (respectivamente $E \setminus A$). Sea así (axioma de elección) x_n (respectivamente y_n) en $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ (respectivamente y_n en $B(x, \frac{1}{n}) \cap (E \setminus A)$. Las sucesiones x_n y y_n responden claramente la pregunta : Se tiene una sucesión (x_n) de elementos de A y una sucesión (y_n) de elementos complementarios $E \setminus A$ de A en E, que convergen una y la otra a x.

   (b) Se ve, que escribiendo para $n \geqslant 1$, por un lado $x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$ y por otro lado, $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$, se obtiene, respectivamente como antes, una sucesión de puntos en A y otra en $E \setminus A$ que convergen al mismo punto $\frac{1}{2} \in A$ que, adherente a A como a su complemento en E y está, por lo tanto en la frontera de A en E. Sin embargo, si $x \in A$ es diferente de $+\frac{1}{2}$, se ve que la bola (en E) de centro x y de radio $\frac{1}{2} - x > 0$ no interseca el complemento de A y que en consecuencia $[0, \frac{1}{2}[$ está en el interior de A *en* E.

   Por el contrario, una bola de centro 0 y de radio estrictamente positivo siempre se interseca con el complemento de A *en* $\mathbb{R}$, lo que hace que sea fácil ver que el límite de A *en* $\mathbb{R}$ es $\{0, \frac{1}{2}\}$.

2. Sean E y F dos espacios métricos respectivamente con las distancias d y d'.

   (a) Para abreviar las notaciones sea : $\delta = \sup(d, d')$. Sea sobre $E \times F$, la distancia dada por la fórmula :
$$\delta\big((x,x'),(y,y')\big) = \sup\big(d(x,y), d'(x',y')\big).$$
   Una bola para δ, por lo tanto, no es otra cosa que el producto cartesiano de una bola por d, con una bola para d'. Ahora bien, estos productos cartesianos forman precisamente una base de abiertos que define la topología producto que es, por lo tanto, también la topología asociada a la métrica δ.

   (b) Sean $A \subset E$ y $B \subset F$. Sea $(x,x') \in A \times B \setminus \mathrm{Fr}(A \times B)$ en el interior de $A \times B$ en $E \times F$. Este interior es un abierto para la topología producto. La definición de esta topología producto de ser generada a partir de los productos cartesianos de conjuntos abiertos de E, con los abiertos de F resulta en la existencia de un abierto U_x de E que contiene x y de otro $U_{x'}$ de F que contiene x' tales que $U_x \times U_{x'}$ están enteramente contenidos dentro de este interior de $A \times B$ y por lo tanto, a fortiori en $A \times B$ él mismo. Pero esto no es posible que si U_x y $U_{x'}$ son respectivamente completamente incluidos en A y B, lo que implica x y x' son respectivamente interiores en A y B. Recíprocamente, si x es interior a A y x' interiores a B y que U_x y $U_{x'}$ sean entonces los abiertos para los cuales $x \in U_x \subset A$ y $x' \in U_{x'} \subset B$, se ve que $U_x \times U_{x'} \subset A \times B$ es un abierto para la topología que contiene (x,x') que es, por lo tanto interior a $A \times B$. $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ de A en E, con el interior $B \setminus \mathrm{Fr}(B)$ de B en F.

3. E y F son siempre como en la segunda pregunta anterior.

   (a) Si (ξ_n, ξ'_n) es una sucesión de puntos en el complemento $E \times F \setminus A \times B$ de $A \times B$ en $E \times F$, denotados por N_1 (respectivamente N_2) el conjunto de los $n \in \mathbb{N}$, para los cuales $\xi_n \notin A$ (respectivamente $\xi'_n \notin B$.) La hipótesis muestra que : $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, es necesario que al menos una de las dos partes N_1 o N_2 lo sea también. Si por ejemplo N_1 es infinito, se puede ordenar sus elementos en orden ascendente
$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$
   pero entonces, por definición, la sucesión extraída ξ_{n_k} tiene todos sus términos en $E \setminus A$. Mutatis mutandis cuando N_2 es infinito, lo que está garantizado cuando N_1 no lo es.

   (b) Comenzar mostrando, por ejemplo, que : $\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B} \subset \mathrm{Fr}(A \times B)$. En efecto, si $(x,x') \in \mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}$, existe una sucesión b_n en B que converge a $x' \in \bar{B}$. De la misma forma, se encuentra una sucesión a_n de elementos de A que converge a $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A}$. Pero también, como vimos arriba, una sucesión de elementos c_n en el complemento $E\setminus A$ de A en E que también converge a x. Pero entonces (a_n,b_n) es una sucesión de puntos de $A\times B$ que converge a (x,x') y (c_n,b_n) es una sucesión de puntos del complemento de $A\times B$ que también converge a (x,x') que se encuentra así a la vez en la adherencia de $A\times B$ y de su complemento lqfd.

Al intercambiar los papeles de A y B, se ve como demostrar que : $\overline{A}\times \mathrm{Fr}(B)\subset \mathrm{Fr}(A\times B)$. Solo queda demostrar la inclusión : $\mathrm{Fr}(A\times B)\subset \big(\mathrm{Fr}(A)\times\overline{B}\big)\cup\big(\overline{A}\times\mathrm{Fr}(B)\big)$. Por tanto, $(x,x')\in\mathrm{Fr}(A\times B)$, es el límite de una sucesión de puntos (ξ_n,ξ_n') en el complemento $E\times F\setminus A\times B$ de $A\times B$ en $E\times F$, como también el límite de una sucesión de puntos (η_n,η_n') de $A\times B$, segunda observación que demuestra inmediatamente, que $x\in\bar{A}$ y $x'\in\bar{B}$. Finalmente, se ha visto en a) arriba, que se puede extraer ξ_{n_k} en $E\setminus A$ de la sucesión x_n o $\xi'_{n'_k}$ en $E\setminus B$ de la sucesión x'_n que asegura que x está en la adherencia de $E\setminus A$ o que x' está en la de $F\setminus B$, lo que asegura que $x\in\mathrm{Fr}(A)$ o $x'\in\mathrm{Fr}(B)$, y demuestra la última inclusión buscada.

4. (a) La hipótesis $(x,x')\notin A\times B$ y $x\in A$ implica que $x'\notin B$, aunque $E\times\{x'\}$ está enteramente contenido en el complemento de $A\times B$. Obviamente, $y\notin A$ implica que $\{y\}\times F$ está también enteramente contenida en este mismo complemento de $A\times B$. Pero entonces la parte $E\times\{x'\}\cup\{y\}\times F$ es conexa por la razón que $E\times\{x'\}$ y $\{y\}\times F$ respectivamente homeomorfos a E y F son conexos y que su intersección que es el punto (y,x') es no vacía. Esta parte responde por lo tanto la pregunta.

   (b) Tomemos $(x,x')\notin A\times B$ y $(y,y')\notin A\times B$, exactamente como antes y que están en la misma componente conexo de $(E\times F)\setminus(A\times B)$. Sea ahora $(z,z')\in(E\times F)\setminus(A\times B)$; si $z\notin A$, el razonamiento a) se repite para ver que (z,z') está vinculado a (x,x') por una parte conexa. Pero si $z\in A$, el a) demuestra que (z,z') está vinculado a (y,y') por una parte conexa, y por lo tanto, también a (x,x') que tiene por tanto a $(E\times F)\setminus(A\times B)$ como componente conexa.

Solución del ejercicio 7054 ▲006061

1. El conjunto $\varnothing$ es una unión vacía de semirrectas. Es claro que $\mathbb{C}$ está en $\mathscr{T}$ si, cuando $z_0=0$, toda semi-recta $[0,\rightarrow[$ es admisible (lo que debió ser precisado en el enunciado...¡Disculpas !) ; además esta familia de conjuntos es estable para cualquier unión. Se observa que si $U\in\mathscr{T}$, $z\in U\iff[z,\rightarrow[\subset U$ (es decir, las semi-rectas forman una base de abiertos). En efecto, si $z\in U$ existe z' tal que $z\in[z',\rightarrow[\subset U$ y a fortiori $[z,\rightarrow[\subset U$. Así la familia es estable en la intersección finita : si $z\in U\cap U'$, $[z,\rightarrow[\subset U\cap U'$ y $U\cap U'\in\mathscr{T}$. Se tiene una topología. Esta topología no es separada ya que, si $z\in[z',\rightarrow[$, todo vecindario de z' contiene z.
2. La topología ni siquiera es cuasi-separada, un punto aislado puede no ser cerrado. Sea z_0 ; $z\in\overline{\{z_0\}}$ si y solo si todo vecindario de z interseca z_0 ; porque todo vecindario de z contiene $[z,\rightarrow[$, es equivalente a $z_0\in[z,\rightarrow[$ o aún $z\in[0,z_0]$.
   $\{0\}$ es el único punto aislado cerrado.
3. De lo anterior se deduce que si $A\subset X$, $\overline{A}=\bigcup_{z\in A}[0,z]$. En efecto, si $z\in A$, $\overline{A}$ contiene $\overline{\{z\}}$ y por lo tanto, el segmento $[0,z]$; recíprocamente, si $z'\in[0,z]$, con $z\in A$, $[z',\rightarrow[$, y por lo tanto, todo vecindario de z', interseca A ; así $z'\in\overline{A}$.
   Se supone A estrellado con respecto a 0 ; A contiene $\bigcup_{z\in A}[0,z]=\overline{A}$ y A es cerrado.
   Recíprocamente, se supone A cerrado ; $A=\bigcup_{z\in A}[0,z]$ y, en particular A es estrellado con respecto a 0.

Solución del ejercicio 7098 ▲002370

1. (a) Si A es compacto y $B = \{b\}$, con $b \notin A$. Sea $a \in A$, entonces $a \neq b$, entonces existe un vecindario abierto de a, U_a y un vecindario abierto de b, V_a tales que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Evidentemente $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Como A es compacto podemos extraer un conjunto finito $\mathscr{A} \subset A$ tal que $A \subset \bigcup_{a \in \mathscr{A}} U_a =: U^b$. Se denota entonces $V^b := \bigcap_{a \in \mathscr{A}} V_a$. U^b es abierto como unión de abiertos y V^b es abierto como intersección *finita* de abiertos. Además, $U^b \cap V^b = \varnothing$.

   (b) Ahora B es compacto. Para cada $b \in B$ el punto anterior nos da U^b y V^b disjuntos que son los vecindarios abiertos respectivos de A y b. Se tiene $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$. Se extrae un conjunto finito $\mathscr{B}$ de tal manera que $B \subset \bigcup_{b \in \mathscr{B}} V^b =: V'$. V' es un vecindario abierto de B. Y si $U' := \bigcap_{b \in \mathscr{B}} U^b$, entonces U' es un abierto conteniendo A, y $U' \cap V' = \varnothing$.

2. Si se supone que esto no es cierto entonces

$$\forall r > 0\ \exists x \in X\ (d(x,K) < r) \text{ y } x \notin U.$$

Tomando $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ se obtiene una sucesión (x_n) tal que $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ y $x_n \notin U$. Como $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$, entonces existe $y_n \in K$ tal que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Se tiene una sucesión (y_n) en K compacto entonces se puede extraer una sub-sucesión $y_{\phi(n)}$ que converge ; se denota ℓ su límite, entonces $\ell \in K$, pues K es compacto.
Se observa que la sucesión extraída $(x_{\phi(n)})$, también converge a ℓ :

$$d(x_{\phi(n)},\ell) \leqslant d(x_{\phi(n)},y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)},\ell).$$

Los dos términos a la derecha de la desigualdad tienden a 0, por lo tanto $(x_{\phi(n)})$ tiende a ℓ. Sea $F = X \setminus U$, entonces F es un cerrado (pues U es abierto) y $(x_{\phi(n)}) \in F$, entonces el límite ℓ está en F igualmente. Así $\ell \notin U$ y como $K \subset U$, entonces $\ell \notin K$. Se ha demostrado dos cosas contradictorias $\ell \in K$ y $\ell \notin K$, lo que demuestra el resultado deseado.

Solución del ejercicio 7099 ▲002371

Usar el hecho de que un conjunto K es compacto si y solo si de toda sucesión de elementos de K se puede extraer una sub-sucesión que converge hacia un elemento de K. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente y sea ℓ su límite. Denotemos

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Sea (v_n) una sucesión de elementos de K. Si (v_n) solo toma un número finito de valores, se puede extraer una sub-sucesión constante, por lo tanto convergente. Si no (v_n) toma una infinidad de valores. Se va a construir una sucesión convergente(w_n) extraída de (v_n). Sea w_0 el primero de los $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ que pertenecen a $\{u_0, u_1, \ldots\}$. Sea w_1 el primero de los $(v_1, v_2, \ldots)$ que pertenecen a $\{u_1, u_2, \ldots\}\ldots$ Sea w_n el primero de los $(v_n, v_{n+1}, \ldots)$ que pertenece a $\{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$. Entonces (w_n) es una sucesión extraída de (v_n) y por construcción (w_n) converge al límite de (u_n), o sea a $\ell \in K$.

Solución del ejercicio 7100 ▲002372

1. Denotemos $\ell = \mathrm{dist}(K,F)$. Entonces existe (x_n) sucesión de elementos de K y (y_n) sucesión de elementos de F tales que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Como K es compacto entonces podemos extraer de (x_n) una sub-sucesión $(x_{\phi(n)})$ que converge en K. Denotemos $a \in K$ este límite, entonces la sucesión extraída $(y_{\phi(n)})$ es acotada porque
$$\|y_{\phi(n)}\| \leqslant \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$
La sucesión $(x_{\phi(n)})$ que converge es, por lo tanto acotada, y la sucesión $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ que converge en $\mathbb{R}$ (hacia ℓ) es acotada igualmente. Entonces la sucesión $(y_{\phi(n)})$ es acotada y podemos extraer una sub-sucesión convergente $(y_{\phi\circ\psi(n)})$. Además, como F es cerrado, esta sucesión converge a $b \in F$. La sucesión $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ extraída de $(x_{\phi(n)})$ converge a $a \in K$. Y como extrajimos dos sucesiones (x_n) y (y_n) se tiene siempre $\|x_{\phi\circ\psi(n)} - y_{\phi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. En el límite se obtiene $\|a-b\| = \ell$, con $a \in K$ y $b \in F$.
2. Observación : si K se supone cerrado pero no compacto, entonces el resultado anterior puede ser falso. Por ejemplo, para $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ y } y \geqslant 0\}$ y $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ se tiene $d(K,F) = 0$, pero $K \cap F = \varnothing$.

Solución del ejercicio 7101 ▲002373

Como E es compacto y $E \subset \bigcup_{y\in E} V_y$ existe un conjunto finito $\mathscr{Y} \subset E$ tal que $E \subset \bigcup_{y\in\mathscr{Y}} V_y$. En cada vecindario V_y, f es acotada por una constante M_y. Denotemos $M = \max_{y\in\mathscr{Y}} M_y$. Entonces f es acotada en E por M. De hecho, para cualquier elemento $x \in E$, existe $y \in \mathscr{Y}$ tal que $y \in V_y$, por lo tanto $f(x)$ es acotada por M_y, luego por M.

Solución del ejercicio 7102 ▲002374

1. Sea $x = \lim x_n$. Sea $N \in \mathbb{N}$; demostremos que x está en F_N. Se tiene $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Así para todo $n \geqslant N$, entonces $x_n \in F_N$. Como F_N es cerrado, entonces el límite x está también en F_N. Siendo esto cierto cualquiera que sea N, entonces $x \in \bigcap_N F_N$. Para construir un ejemplo como se solicita es necesario que de toda sucesión no podamos extraer una sub-sucesión convergente. Se toma por ejemplo en $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$, entonces $\bigcap_n F_n = \varnothing$.
2. (a) Para cada n se toma $x_n \in K_n$, así que para todo n, $x_n \in K_0$ que es compacto por lo que se puede extraer una sub-sucesión convergente. Si x es el límite de esta sub-sucesión entonces $x \in K$ y es no vacío.

   (b) Por reducción al absurdo se supone que es falso, entonces
   $$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N\ \exists x_n \in K_n \text{ tal que } x_n \notin \Omega.$$
   De la sucesión (x_n), se puede extraer una sub-sucesión $x_{\phi(n)}$ que converge a $x \in K$. Por lo tanto $x_n \in X \setminus \Omega$ que es cerrado así $x \in X \setminus \Omega$. Como $K \subset \Omega$, entonces $x \notin K$ lo cual es contradictorio.

Solución del ejercicio 7103 ▲002375

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

1. Para todo $y \in [0,1]$ f es continua en (x,y), entonces existe un vecindario $U(y)$ de x y $[a(y),b(y)]$ vecindario de y tal que para $(x',y') \in U(y) \times [a(y),b(y)]$ se tiene $|f(x,y) - f(x',y')| \leqslant \varepsilon$.

2. Como $[0,1] \subset \bigcup\limits_{y\in[0,1]} [a(y),b(y)]$ y que $[0,1]$ es un compacto de $\mathbb{R}$, existe un conjunto finito $\mathscr{Y}$ tal que $[0,1] \subset \bigcup\limits_{y\in\mathscr{Y}} [a(y),b(y)]$. Además, incluso si se reducen los intervalos se puede suponer que son disjuntos e incluso si se reordenan, se puede suponer que este recubrimiento se escribe :
$$[0,1] = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup \cdots [t_k,1].$$
3. Denotemos $U = \bigcap\limits_{y\in\mathscr{Y}} U(y)$, es un vecindario de x porque la intersección es finita. Para $x' \in U$ se tiene
$$\begin{aligned}|g(x)-g(x')| = \left|\int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy\right| &\leqslant \int_0^1 |f(x,y)-f(x',y)|dy\\ &\leqslant \int_0^{t_1} |f(x,y)-f(x',y)|dy + \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y)-f(x',y)|dy\\ &\leqslant \varepsilon(t_1-0)+\varepsilon(t_2-t_1)+\cdots+\varepsilon(1-t_k) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$
Entonces g es continua.

Solución del ejercicio 7104 ▲002376

1. Para demostrar que $A+B$ es cerrado, vamos a demostrar que toda sucesión de $A+B$ que converge, converge a un elemento de $A+B$. Sea (x_n) una sucesión de $A+B$ que converge a $x \in E$. Entonces existe $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tal que $x_n = a_n + b_n$. Como A es compacto podemos extraer una sub-sucesión $(a_{\phi(n)})$ que converge a $a \in A$. Entonces $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ es convergente a $x-a$. Denotemos $b = x-a$ como B es cerrado entonces $b \in B$. Ahora $x = a+b$, por lo tanto $x \in A+B$.
2. Sea $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ y } x \geqslant 0\}$, sea $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0 \text{ y } x \geqslant 0\}$. Entonces $F+G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cup \{0\} \times [0,+\infty[$ que no es un cerrado (ni un abierto).

Solución del ejercicio 7105 ▲002377

1. Se supone f propio y sea F un cerrado. Demostrar que $f(F)$ es un cerrado. Sea (y_n) una sucesión de $f(F)$ que converge a $y \in \mathbb{R}^n$. Denotemos K la unión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y de $\{y\}$. Entonces K es compacto. Como $y_n \in f(F)$, existe $x_n \in F$ tal que $f(x_n) = y_n$. De hecho $x_n \in f^{-1}(K)$ que es compacto porque f es propio. Entonces de (x_n) se puede extraer una sub-sucesión convergente $(x_{\phi(n)})$, se denota x el límite de esta sub-sucesión. Como $x_{\phi(n)} \in F$ y F es cerrado entonces $x \in F$. Como f es continua, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tiende a $f(x)$, por lo que $y_{\phi(n)}$ también tiende a y. Por unicidad del límite $y = f(x)$, $y \in f(F)$ y $f(F)$ es cerrado.
2. Decir que $\|f(x)\| \to \infty$, cuando $\|x\| \to \infty$ es equivalente a
$$\forall M>0\ \exists m>0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$
   (a) Se supone f propio, sea $M>0$, entonces $B(0,M)$ es un compacto (se está en $\mathbb{R}^n$) por lo tanto $f^{-1}(B(0,M))$ es compacto, por lo tanto acotado, es decir que existe $m>0$ tal que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Entonces si $x \notin B(0,m)$, se tiene $f(x) \notin B(0,M)$.
   (b) Recíprocamente, sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$. Como f es continua y K es cerrado, entonces $f^{-1}(K)$ es un cerrado. Queda por demostrar que $f^{-1}(K)$ es acotado. Como K es compacto entonces existe $M>0$ tal que $K \subset B(0,M)$, por hipótesis existe $m>0$ tal que si $x \notin B(0,m)$, entonces $f(x) \notin B(0,M)$, que también se escribe por contraposición : "si $f(x) \in B(0,M)$, entonces $x \in B(0,m)$", por lo tanto $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Así $K \subset B(0,M)$, luego $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Entonces $f^{-1}(K)$ es acotado por lo tanto compacto.

Solución del ejercicio 7106 ▲002378

1. Sea f_n la función afín siguiente $f_n(t) = 0$, para $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ y para $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sobre $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ se define un "diente" que vale 0 en los extremos y 1 en medio del segmento. Entonces si B denota la bola unidad cerrada (centrada en la función nula), se tiene $d_\infty(f_n, 0) = \sup|f_n(t)| = 1$, por lo tanto $f_n \in B$. Sin embargo, si $p \neq q$, entonces $d(f_p, f_q) = 1$ y la sucesión (f_n) y todas las sub-sucesiones no son de Cauchy. Si B es compacto entonces se puede extraer una sub-sucesión convergente por lo tanto de Cauchy. Contradicción.
2. Denotemos $x^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ la sucesión de l^∞ (el 1 está en el n-ésimo lugar). Entonces x^n está en la bola de unidad cerrada B centrada en 0. Además, si $p \neq q$, entonces $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Así, toda sub-sucesión extraída de (x_n) no es Cauchy por lo que no puede converger. Así B no es compacto.

Solución del ejercicio 7108 ▲002380

1. Si f tiene dos puntos fijos $x \neq y$, entonces $d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Lo que es absurdo. Entonces f tiene como máximo un punto fijo.
2. f es continua y X compacto, por lo tanto $X_1 = f(X)$ es compacto, por inducción si X_{n-1} es compacto entonces $X_n = f(X_{n-1})$ es compacto. Además, $f : X \to X$, por lo que $f(X) \subset X$ sea $X_1 \subset X$, luego $f(X_1) \subset f(X)$ sea $X_2 \subset X_1$, etc. Por recurrencia $X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X$. Como cada X_n es no vacío, entonces Y es no vacío (ver el ejercicio 7101).
3. Demostrar primero que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, así que para todo $n \geqslant 0$ se tiene $y \in X_n$, por lo tanto $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$, para todo $n \geqslant 0$. Entonces, para todo $n > 0$, $f(y) \in X_n$, por lo que $f(y) \in X_0 = X$. Entonces $f(y) \in Y$. Recíprocamente, se demuestra $Y \subset f(Y)$. Sea $y \in Y$, para cada $n \geqslant 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Entonces existe $x_n \in X_n$ tal que $y = f(x_n)$. Construir (x_n) una sucesión de elementos de X compacto, por lo tanto se puede extraer una sub-sucesión convergente $(x_{\phi(n)})$. Denotemos x el límite, por el ejercicio 7101, $x \in Y$. Entonces $y = f(x_{\phi(n)})$, para todo n y f es continua por lo que en el límite $y = f(x)$. Entonces $y \in f(Y)$. Sea $y \neq y' \in Y$ tal que $d(y,y') = \operatorname{diam} Y > 0$. Como $Y = f(Y)$, entonces existe $x, x' \in Y$ tal que $y = f(x)$ y $y' = f(x')$. Por lo tanto $d(y,y') = d(f(x), f(x')) < d(x,x')$. Se han encontrado dos elementos de Y tal $d(x,x')$ es estrictamente mayor que el diámetro de Y, lo que es absurdo. Entonces $y = y'$ y el diámetro es cero.
4. Como el diámetro es cero, entonces Y se compone de un solo punto $\{p\}$ y como $f(Y) = Y$, entonces $f(p) = p$. Así p tiene un punto fijo y sabemos que es el único. Por la construcción de Y, para todo punto $x_0 \in X$ la sucesión $x_n = f^n(x_0)$ converge a p.

Solución del ejercicio 7109 ▲002381

1. Como $E \times E$ es compacto entonces de la sucesión (a_n, b_n) se puede extraer una sub-sucesión $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$ que converge a (a_∞, b_∞). Sea $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant n$, entonces $d(a_{\phi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(b_{\phi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces en particular $d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) \leqslant d(a_{\phi(n+1)}, a_\infty) + d(a_\infty, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$.
La propiedad para f se escribe aquí $d(a_k, b_{k'}) \leqslant d(a_{k+1}, b_{k'+1})$. Entonces
$$d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)}, a_0) \leqslant d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1}, a_1) \leqslant \cdots \leqslant d(a_{\phi(n+1)-1}, a_{\phi(n)-1}) \leqslant d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) < \varepsilon.$$
Así para $k = \phi(n+1) - \phi(n)$, sabiendo que $a_0 = a$, se tiene $d(a_k, a) < \varepsilon$. Lo mismo con (b_n).

2. (a) Sea $a \in E$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $k \geqslant 1$ tal que $a_k = f^k(a) \in f(E)$ con $d(a, a_k) < \varepsilon$. Entonces $f(E)$ es denso en E.

   (b) Sea $u_n = d(a_n, b_n)$. Luego por la propiedad de f, (u_n) es una sucesión creciente de $\mathbb{R}$. Como E es compacto, su diámetro es acotado, por lo tanto (u_n) es mayorada. La sucesión (u_n) es creciente y acotada superiormente por lo que converge a u. Ahora $u_n - u_0 \geqslant 0$ y

   $$0 \leqslant u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a, b) \leqslant d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) - d(a, b) = d(a_n, a) + d(b_n, b).$$

   Así u_n tiende a u_0. Como (u_n) es creciente entonces $u_n = u_0$, para todo n. En particular $u_1 = u_0$, por lo que $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$, o sea $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$, por lo cual f es una isometría.

   (c) f es una isometría por lo que es continua (Es 1–lipschitziana !). E es compacto por lo que $f(E)$ es compacto, luego es cerrado o $f(E)$ es denso así $f(E) = E$. Por consiguiente f es sobreyectiva.

Solución del ejercicio 7110 ▲002382

Decir que $i : (X, |\cdot|) \to (X, d)$ es continua es exactamente decir que todo conjunto U abierto para d es abierto para $|\cdot|$ (pues $i^{-1}(U) = U$).

1. Sea K un compacto para $|\cdot|$. Sea U_i, $i \in I$ tales que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ y tales que los U_i sean abiertos para d. Entonces los U_i son también abiertos para la topología definida por $|\cdot|$. Como K es compacto para $|\cdot|$, entonces podemos extraer un conjunto finito $J \subset I$ tal que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Así K es también compacto para d.
   Si F es un cerrado para $|\cdot|$, entonces $F \subset [0, 1]$ es compacto para $|\cdot|$. Así compacto para d, cerrado para d.
2. Si U es un abierto para d, entonces U es un abierto para $|\cdot|$, pues i es continua.
   Recíprocamente, si U es un abierto para $|\cdot|$, entonces $F = X \setminus U$ es un cerrado para $|\cdot|$, por lo tanto F es un cerrado para d por la pregunta precedente, $U = X \setminus F$ es un abierto para d. Conclusión, los abiertos para $|\cdot|$ y d son los mismos entonces $|\cdot|$ y d definiendo la misma topología.

Solución del ejercicio 7158 ▲002353

1. Sentido directo. Si f es continua entonces $\{x \mid f(x) < \lambda\} = f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$ es un abierto como imagen inversa por una aplicación continua del intervalo abierto $]-\infty, \lambda[$. Del mismo modo con $]\lambda, +\infty[$.
   Recíproco. En primer lugar, todo intervalo abierto $]a, b[$, $(a < b)$ puede ser escrito

   $$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[.$$

   Entonces
   $$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]-\infty, b[) \cap f^{-1}(]a, +\infty[)$$
   es intersección de dos abiertos, por lo tanto un abierto de X. Sea O un abierto de $\mathbb{R}$, entonces O se puede escribir como la unión numerable de intervalos abiertos :

   $$O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[.$$

   Entonces
   $$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(]a_i, b_i[)$$
   es una union de abiertos, por lo tanto un abierto de X.

2. Se hace primero para un intervalo abierto $]a,b[$.

$$]a,b[= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}].$$

Entonces

$$f^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a+\frac{1}{j}, b-\frac{1}{j}]),$$

es una unión numerable de cerrados. Ahora como para la primera pregunta, todo abierto O de $\mathbb{R}$ se escribe $O = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$, con I numerable. Entonces se puede escribir

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}([a_i+\frac{1}{j}, b_i-\frac{1}{j}]),$$

que es una unión numerable de cerrados (¡pero es un abierto !).

Solución del ejercicio 7159 ▲002354

---

1. Sea F la aplicación definida por $F(f) = \int_0^1 |f|$. Entonces

$$|F(f) - F(g)| = |\int_0^1 |f| - |g|| \leqslant \int_0^1 |f-g| = d_1(f,g) \leqslant d_\infty(f,g).$$

Entonces, para las dos distancias d_1 y d_∞, F es lipschitziana de cociente 1.

2. Sea $\varepsilon > 0$, entonces poniendo $\eta = \varepsilon$ se obtiene la continuidad : si $d(x,y) < \varepsilon$, entonces

$$|\ell(x) - \ell(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Por lo tanto ℓ es continua, y $c_0 = \ell^{-1}(\{0\})$ es un cerrado, porque es la imagen inversa del cerrado $\{0\}$ por la aplicación continua ℓ.

Solución del ejercicio 7160 ▲002355

Sea $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. Entonces sea $C = X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Sea $x \in C$ como $f(x) \neq g(x)$ y Y es separado, existe un vecindario abierto V_1 de $f(x)$ y V_2 de $g(x)$ tales que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Denotemos $U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$. Entonces U es un abierto de X conteniendo x. Ahora para $x' \in U$, entonces $f(x') \in V_1$, $g(x') \in V_2$, por lo tanto $f(x') \neq g(x')$ y $x' \in C$.
Balance U está incluido en C, entonces C es abierto.
Aplicación : si A es denso en X, entonces $\bar{A} = X$, pero como A es cerrado $A = \bar{A}$, entonces $A = X$, es decir f y g son iguales en todas partes.

Solución del ejercicio 7161 ▲002356

---

1. Sea P un polinomio, y F un cerrado de $\mathbb{R}$. Sea (y_n) una sucesión convergente de elementos de $P(F)$, y $y \in \mathbb{R}$ su límite. Existe $x_n \in F$ tal que $y_n = P(x_n)$. Como (y_n) es acotada (porque es convergente) entonces (x_n) también es acotada, de hecho, un polinomio tiene un límite infinito solo en $\pm\infty$. Como (x_n) es una sucesión acotada de $\mathbb{R}$ se puede extraer una sub-sucesión convergente $(x_{\phi(n)})$ de límite x. Como F es cerrado, $x \in F$ y como P es continua (es un polinomio) entonces $y_{\phi(n)} = P(x_{\phi(n)}) \to P(x)$, pero $(y_{\phi(n)})$ converge también a y. Por unicidad del límite $y = P(x) \in P(F)$. Así $P(F)$ es cerrado.

2. Sea $X = Y = \mathbb{R}$ y $H = (xy = 1)$ es un cerrado de $X \times Y$, pero si $\pi(x,y) = x$, entonces $\pi(H) = \mathbb{R}^*$ no es un cerrado de $X = \mathbb{R}$.
3. A verificar...

Solución del ejercicio 7162 ▲002357

---

1. $(\Rightarrow)$ Sea f continua y $y \in f(\bar{A})$. Existe $x \in \bar{A}$ tal que $y = f(x)$. Sea $x_n \in A$ tal que (x_n) converge a x. Entonces $y_n = f(x_n) \in A$. Como f es continua, (y_n) converge a $f(x) = y$, con lo cual y es adherente a $f(A)$. Conclusión $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

   $(\Leftarrow)$ Sea $f : X \to Y$ y sea F un cerrado de Y. Denotemos $A = f^{-1}(F)$, entonces $f(A) \subset F$, por lo que la ecuación $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ se convierte en $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$, pues F es cerrado. Así $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$, o sea $\bar{A} \subset A$, de donde $\bar{A} = A$ y A es cerrado.

   Balance la imagen inversa de todo cerrado F es un cerrado, por lo que f es continua.

   Aplicación : si A es denso, entonces $\bar{A} = X$, y bajo las hipótesis anteriores, $f(A)$ es denso en la imagen de X por f : en efecto, $\overline{f(A)}$ contiene $f(\bar{A}) = f(X)$.
2. $(\Rightarrow)$ Sea f cerrado y sea $A \subset X$. Entonces $A \subset \bar{A}$, por lo que $f(A) \subset f(\bar{A})$. Como $\bar{A}$ es un cerrado y f es cerrada entonces $f(\bar{A})$ es un cerrado conteniendo $f(A)$. Pero como $\overline{f(A)}$ es el más pequeño cerrado que contiene $f(A)$, se tiene $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

   $(\Leftarrow)$ La relación por un cerrado F da $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$, es decir $\overline{f(F)} = f(F)$ y $f(F)$ es cerrado. Entonces f es cerrada.

   El mismo tipo de razonamiento con f abierta.

Solución del ejercicio 7165 ▲002360

---

1. Se supone que f no tiende no a 0. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Para todo $n \geqslant 0$, existe $x_n \geqslant n$ tal que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $f(x_n) > \varepsilon$. Aplicar la continuidad uniforme : sea $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $\eta > 0$ tal que para $|x_n - y| \leqslant \eta$ se tiene $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon'$. Así para tal y, $f(y) > \frac{\varepsilon}{2} > 0$, por lo que f es estrictamente positiva en $[x_n - \eta, x_n + \eta]$. Se define (p_n) por $p_{2n} = x_n - \eta$, $p_{2n+1} = x_n + \eta$. Sea $I(x) = \int_0^x f$, así $I(p_{2n+1}) - I(p_{2n}) = \int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} f(t)dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\eta = \varepsilon\eta$, por lo que la sucesión $(I(p_n))$ no es de una sucesión de Cauchy y no converge, por lo tanto la función $x \mapsto I(x)$ tampoco converge, y $\int_0^{\infty} f(t)dt$ diverge.
2. Por el cambio de variable $u = t^2$, luego de una integración por partes, se demuestra que la integral $\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(t^2)dt$ converge, pero como $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ no tiende a 0, entonces f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 7213 ▲002361

Para $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ se define $\|x\| = \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

1. Sentido $\Leftarrow$ Sea $M > 0$ tal que $\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|$. Se va a demostrar que B es continua en el punto $x = (x_1, x_2)$ fijo. Sea $y = (y_1, y_2)$, entonces

$$B(x+y) - B(x) = B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) = B(x_1, y_2) + B(x_2, y_1) + B(y_1, y_2).$$

Entonces

$$\|B(x+y)-B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|y_2\|+M\|x_2\|\|y_1\|+M\|y_1\|\|y_2\|.$$

Para $\|y_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}$ se tiene $M\|x_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_1=0$ no hay nada que escoger aquí). Para $\|y_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}$ se tiene $M\|x_2\|\|y_1\| \leqslant \varepsilon$ (si $x_2=0$ no existe nada que escoger aquí). Finalmente, para $\|y_1\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ y $\|y_2\| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$ se tiene $M\|y_1\|\|y_2\| \leqslant \varepsilon$. Así tomando $\eta=\min(\frac{\varepsilon}{M\|x_1\|}, \frac{\varepsilon}{M\|x_2\|}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}})$, se obtiene que para $\|y\|=\max(\|y_1\|,\|y_2\|) \leqslant \eta$ se tiene $\|B(x+y)-B(x)\| \leqslant 3\varepsilon$. Lo que prueba la continuidad. Así, B es continua en $E_1 \times E_2$.

2. Sentido $\Rightarrow$ Si B es continua en todas partes, en particular es continua en 0. Se escoge $\varepsilon=1$, existe $\eta>0$ tal que $\|x\| \leqslant \eta$, implica $\|B(x)\| \leqslant 1$. Entonces, para $\|x_1\| \leqslant \eta$ y $\|x_2\| \leqslant \eta$ se tiene $\|B(x_1,x_2)\| \leqslant 1$. Sea ahora $y=(y_1,y_2) \in E_1 \times E_2$, $(y_1 \neq 0, y_2 \neq 0)$ se tiene $(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta\frac{y_2}{\|y_2\|})$ de norma $\leqslant \eta$, por lo tanto $B(\eta\frac{y_1}{\|y_1\|}, \eta\frac{y_2}{\|y_2\|}) \leqslant 1$ y por bilinealidad esto proporciona : $B(y_1,y_2) \leqslant \frac{1}{\eta^2}\|y_1\|\|y_2\|$, para todo (y_1,y_2). La constante buscada es $\frac{1}{\eta^2}$.

Solución del ejercicio 7214 ▲002362

Como L es lineal es suficiente demostrar que L es continua en 0. Se supone que no es cierto, entonces se debe negar la continuidad de L en 0 que se escribe :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x \in E,\ (\|x\|<\eta \Rightarrow \|L(x)\|<\varepsilon).$$

La negación entonces se escribe :

$$\exists \varepsilon>0,\ \forall \eta>0,\ \exists x \in E,\ (\|x\|<\eta \text{ y } \|L(x)\| \geqslant \varepsilon).$$

Sea así un tal $\varepsilon>0$ de negación, para η de la forma $\eta=\frac{1}{n}$, se obtiene y_n tal que $\|y_n\|<\frac{1}{n}$ y $\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon$. Se define $x_n=\sqrt{n}y_n$, entonces $\|x_n\|=\sqrt{n}\|y_n\|<\frac{1}{\sqrt{n}}$, por lo tanto (x_n) es una sucesión de E que tiende a 0. Sin embargo, $\|L(x_n)\|=\sqrt{n}\|L(y_n)\| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}$, por lo tanto la sucesión $(L(x_n))$ no es acotada.
Por contraposición se tiene el resultado deseado.

Solución del ejercicio 7215 ▲002363

1. Si f es lineal y acotada en la bola unidad, entonces es continua (ver el curso o rehacer la demostración).
2. Queda por demostrar que f es lineal : se tiene $f(x+y)=f(x)+f(y)$, para todo x,y, queda por probar $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in E$.
   - Para $\lambda \in \mathbb{Z}$, es una recurrencia, $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$. Luego $f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$ etc. Entonces $f(nx)=nf(x)$, para $n \in \mathbb{N}$. Además, $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$, por lo tanto $f(-x)=-f(x)$. Así se tiene $f(-nx)=-nf(x)$, para $n \in \mathbb{N}$.
     Balance : para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$ se tiene $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.
   - Para $\lambda \in \mathbb{Q}$, sea $\lambda=\frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$.

     $$f(\tfrac{p}{q}x)=pf(\tfrac{1}{q}x)=\tfrac{p}{q}qf(\tfrac{x}{q})=\tfrac{p}{q}f(q\tfrac{x}{q})=\tfrac{p}{q}f(x).$$

     Se ha utilizado intensivamente el primero punto.

— Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existe una sucesión (λ_n) de elemento de $\mathbb{Q}$ que converge a λ. Se fija $x \in E$.

$$f(\lambda x) - \lambda f(x) = f(\lambda x) - f(\lambda_n x) + f(\lambda_n x) - \lambda f(x) = f((\lambda - \lambda_n)x) + (\lambda_n - \lambda) f(x).$$

Se ha utilizado el segundo punto. Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Para n lo suficientemente grande se tiene $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < \varepsilon$. Entonces $\|\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x\| \in B(0,1)$ y f es acotada en la bola unidad por lo que existe $M > 0$ tal que $f(\frac{1}{\varepsilon}(\lambda - \lambda_n)x) \leqslant M$ (cualquiera que sea n). Así $f(\lambda - \lambda_n)x) \leqslant M\varepsilon$ (ε es racional, entonces se puede "sacar"). Igualmente para n lo suficientemente grande se tiene $(\lambda_n - \lambda) f(x) < \varepsilon$. Ahora

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leqslant \|f((\lambda - \lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) f(x)\| < M\varepsilon + \varepsilon.$$

Entonces, para x, λ fijos, $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|$ es tan pequeño como se quiera, así que es nulo !, es decir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 7216 ▲002364

1. Para todo x, $\|S(x)\| = \|x\|$, por lo tanto $\|S\| = 1$.
2. $\|T(f)\|_\infty = \|f \times g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Entonces, para $f \neq 0$, $\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant \|g\|_\infty$. Además, en g, se obtiene $\frac{\|T(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \frac{\|g^2\|_\infty}{\|g\|_\infty} = \|g\|_\infty$ i,e, $\|T\| = \|g\|_\infty$.
3. Se tiene $|u(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$, por lo tanto $\|u\| \leqslant \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g no cambia de signo en $[0,1]$, entonces para f la función constante igual a 1, se obtiene $|u(f)| = \|f\|_\infty \int_0^1 |g(x)|dx$, por lo tanto $\|u\| = \int_0^1 |g(x)|dx$. Si g cambia de signo entonces solo lo hace una vez y en $\frac{1}{2}$. Sea h_n la función definida por $h_n(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, $h_n(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ y h_n es afín a $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ y continua en $[0,1]$. Esta función se construye de tal manera que si g es positiva, luego negativa entonces $h_n \times g$ es una función continua que converge uniformemente a $|g|$: $\|h_n g - |g|\|_\infty \to 0$. Entonces $|u(h_n)| = \int_0^1 h_n \times g$ y por la convergencia uniforme entonces $|u(h_n)|$ converge a $\int_0^1 |g|$ y $\|u\| = \int_0^1 |g|$.
4. $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \|a_n\|_2 \|x_n\|_2$ (es Cauchy-Schwartz) por lo tanto $\|u\| \leqslant \|a_n\|_2$. Para la sucesión $x = a$ se tiene igualdad de donde $\|u\| = \|a_n\|_2$.
5. $|u(x)| = |\sum a_n x_n| \leqslant \sum |a_n x_n| \leqslant \|a\|_\infty \sum |x_n| = \|a\|_\infty \|x_n\|_1$, por lo tanto $\|u\| \leqslant \|a\|_\infty$. Sea p fijo, sea $i(p)$ un índice tal que $|a_{i(p)}| = \max_{j=1,\dots,p} |a_j|$. Se construye una sucesión x^p de la siguiente manera : $x^p = (0,0,\dots,0,a_{i(p)},0,0,0\dots)$ (ceros en todas partes excepto $a_{i(p)}$ en lugar $i(p)$). Entonces $\|x^p\|_1 = |a_{i(p)}|$ y $|u(x^p)| = a_{i(p)}^2$. Así $\frac{|u(x^p)|}{\|x^p\|_1} = |a_{i(p)}|$. Cuando p tiende a $+\infty$, $|a_{i(p)}| \to \|a\|_\infty$. Así $\|u\| = \|a\|_\infty$.
6. $|u(x)| = |\lim x_n| \leqslant \|x\|_\infty$, por lo tanto $\|u\| \leqslant 1$. Para $x = (1,1,1,\dots)$ se obtienen la igualdad $\|u\| = 1$.

Solución del ejercicio 7217 ▲002365

1. Es suficiente escribir...
2. Calculemos la norma de U : $\|U(P)\| = \sup_k |\frac{1}{k} a_k\| \leqslant \sup_k |a_k| \leqslant \|P\|$. Así para todo P, $\frac{\|U(P)\|}{\|P\|} \leqslant 1$. Y para $P(x) = x$ se tiene la igualdad $\|U\| = 1$.

3. Para V, tomemos $P_k(x) = x^k$, entonces $\|P_k\| = 1$, pero $\|V(P_k)\| = k$. Entonces V no es acotada en la bola unidad, por lo que V no es continua.

Solución del ejercicio 7218 ▲002366

1. A inyectiva : Si $A(x_1,x_2,\dots) = A(y_1,y_2,\dots)$, entonces $(x_1,x_2/2,\dots,x_n/n,\dots) = (y_1,y_2/2,\dots,y_n/n,\dots)$, por lo tanto $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2,\dots,x_n = y_n,\dots$ A es inyectiva.
   A continua : $\|A(x)\|_\infty = \sup_n \frac{x_n}{n} \leqslant \sup_n x_n \leqslant \|x\|_\infty$. Entonces $\|A\| \leqslant 1$, por lo tanto A es continua.
   Norma de A : Para $x = (1,0,0,\dots)$. Se tiene $\|x\|_\infty = 1$ y $\|A(x)\|_\infty = 1$, entonces la norma de A es exactamente 1.
   A no es sobreyectiva : se escribe $y = (1,1,1,\dots) \in l^\infty$. Sea x una sucesión tal que $A(x) = y$, entonces $x = (1,2,3,4,\dots)$. Pero $\|x\|_\infty = +\infty$, por lo que $x \notin l^\infty$. En consecuencia $A : l^\infty \to l^\infty$ no es sobreyectiva.
2. El inverso izquierdo de A es B definido por
   $$B(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots) = (x_1,2x_2,\dots,nx_n,\dots)$$
   de modo que para $x \in l^\infty$ se tiene $B \circ A(x) = x$. Se define la sucesión $x^p = (0,0,\dots,0,1,0,0\dots) \in l^\infty$ (ceros en todas partes y 1 a la p-ésimo lugar). Entonces $\|x^p\|_\infty = 1$ y $\|B(x^p)\|_\infty = p$. Así $\frac{\|B(x^p)\|_\infty}{\|x^p\|_\infty} = p$, por lo tanto la norma de B no es finita y B no es continua.

Solución del ejercicio 7219 ▲002367

1. Si $L(a) = 0$, entonces $a \in H$, por lo tanto $\operatorname{dist}(a,H) = 0$ y la relación es verdadera. Se supone que $L(a) \neq 0$, entonces se tiene $X = H + \mathbb{R}\cdot a$. En efecto, para $x \in X$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $L(x) = \lambda L(a)$, se tiene $L(x-\lambda a) = 0$. Se define $h = x - \lambda a$, entonces $h \in H$ y $x = h + \lambda a$ es la descomposición siguiendo $H + \mathbb{R}\cdot a$. Si L es continua entonces $\|L\|$ es finita.
   $$\begin{aligned}\|L\| &= \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{h\in H\\ \lambda\in\mathbb{R}\\ h+\lambda a\neq 0}} \frac{\|L(h+\lambda a)\|}{\|h+\lambda a\|} = |L(a)| \sup_{\substack{h\in H\\ \lambda\in\mathbb{R}\\ h+\lambda a\neq 0}} \frac{|\lambda|}{\|h+\lambda a\|}\\ &= |L(a)| \sup_{h\in H} \frac{1}{\|h+a\|} = |L(a)| \frac{1}{\inf_{h\in H} \|h+a\|} = |L(a)| \frac{1}{\operatorname{dist}(a,H)}\end{aligned}$$
   lo que es la igualdad pedida.
2. Si H es cerrado entonces $\operatorname{dist}(a,H) > 0$ si $a \notin H$ (ver los ejercicios sobre compactos), por la igualdad mostrada antes, se tiene $\|L\|$ finita y así L es continua.
3. Sea $X = \mathbb{R}[x]$. Para $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ se establece $\|P\| = \sup_k |a_k|$, y $V(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k$. Entonces $\ker V = \{0\}$ es cerrado pero V no es continua (ver el ejercicio 7217).

Solución del ejercicio 7220 ▲002368

Denotemos $L : X \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por $L(f) = f(0)$. Tomemos f_n definida por $f_n(t) = 2n(1-nt)$, para $t \in [0,\frac{1}{n}]$ y $f(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$. Entonces $\|f_n\| = 1$ y $L(f_n) = 2n$. Así el cociente $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|} = 2n$

no es acotado, por lo que L no es continua. Si $H=\{f \mid f(0)=0\}$, entonces $H=\ker L=L^{-1}(0)$. Como L no es continua, H no es cerrado (ver el ejercicio 7219).

Solución del ejercicio 7221 ▲002369

N es una norma. Y se tiene para todo x, $(1+x^2)|f(x)| \leqslant N(f)$.

$$|L(f)| = \int_{\mathbb{R}} f| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{N(f)}{1+x^2}dx \leqslant N(f)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = N(f)\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = N(f)\pi.$$

Así para todo f se tiene

$$\frac{\int f}{N(f)} \leqslant \pi.$$

Además, para $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ se obtienen la igualdad. Así la norma $\|L\|$ de la aplicación L es π.

Solución del ejercicio 7225 ▲006207

1. Se observa primero que si $0\in K$, la aplicación u (lineal) admite 0 como un punto fijo en K.
   Se supone por lo tanto $0\notin K$. Si $x\in K$, $u^j(x)\in K$, para todo $0\leqslant j\leqslant n-1$ y $S_n(x)\in K$ como una combinación convexa de estos n puntos de K.
2. Sea $x\in K$. Por 1., $S_{n_1}\circ\cdots\circ S_{n_k}(x)\in K$ y se escribe $S_{n_1}(S_{n_2}\circ\cdots\circ S_{n_k})(x)$: por lo tanto pertenece a $S_{n_1}(K)$. Por otro lado, como aplicaciones lineales S_{n_j} conmutan entre ellas (son polinomios en u), lo mismo se aplica a $S_{n_2},\dots,S_{n_k}$ de ahí la inclusión.
   Cada S_n es continua y K compacto, los conjuntos $S_n(K)$ también son compactos y están incluidos en K ; si $A=\bigcap_{n\geqslant 1} S_n(K)$ es vacío, por la propiedad de la intersección finita, se pueden encontrar números enteros $n_1,n_2,\dots,n_k$ en un número finito tal que $S_{n_1}(K)\cap S_{n_2}(K)\cap\cdots\cap S_{n_k}(K)=\varnothing$. Pero esta intersección contiene la imagen de K por $S_{n_1}\circ\cdots\circ S_{n_k}$ y no puede ser vacía.
3. Sea $a\in A$; para todo n existe $x_n\in K$ tal que $a=S_n(x_n)$. Se va demostrar que $u(a)=a$:
   $$\begin{aligned} u(a)-a = u(S_n(x_n))-S_n(x_n) &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)}{n}-\frac{x_n}{n}-S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)-nS_n(x_n)-x_n}{n} = \frac{u^n(x_n)-x_n}{n}. \end{aligned}$$
   Pero $\|u^n(x_n)-x_n\|\leqslant \operatorname{diam}K=d<+\infty$ ya que es K compacto, es acotado y $\|u(a)-a\|\leqslant\frac{d}{n}$, para todo n, por lo tanto es nulo.

Solución del ejercicio 7260 ▲001900

I

1. Sea $\mathscr{P}$ el espacio vectorial de funciones polinomiales. Se supone $\mathscr{P}$ de dimensión finita n. Denotemos f_k la función $x\mapsto x^k$. Entonces la familia $\{f_0,\dots,f_n\}$ que cuenta $n+1$ elementos es ld, o sea existen $a_0,\dots,a_n$ de escalares no todos nulos tales que, para todo $x\in\mathbb{R}$ se tiene $a_0+a_1x+\cdots a_nx^n=0$. Se desprende que el polinomio no nulo con coeficientes reales $a_0+a_1X+\cdots a_nX^n$ tiene infinidad de raíces, lo que es absurdo.

2. Se define $M = \sup(\bar{X})$. Se debe verificar que :
   i) para todo $x \in X, x \leqslant M$ y
   ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $M - \varepsilon \leqslant x$.
   Como $X \subset \bar{X}$ y, para todo $x \in \bar{X}, x \leqslant M$ la propiedad i) es verificada para M. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Existe $x \in \bar{X}$ tal que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x$. Como $x \in \bar{X}$, también existe $y \in X$ tal que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $M - \varepsilon < y$ y M satisface a ii).
   Observación : se nota también que $\sup(X) \in \bar{X}$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$, se escoge un elemento $x_n \in X$ tal que $x_n \geqslant \sup(x) - \frac{1}{n}$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constituida de elementos de X converge en $\mathbb{R}$ al $\sup(X)$, que por lo tanto pertenece a $\bar{X}$. Se puede por supuesto deducir la propiedad ii) de M.

II

1. Es claro $\mathscr{L}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de funciones de $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$. Sea $f \in \mathbb{C}^1$ y $x, y \in [0,1]$, con $x < y$. Por el teorema de incrementos finitos, existe $c_x \in]x, y[$ tal que $f(y) - f(x) = f'(c_x)(y - x)$. Así f' es continua, por lo tanto acotada en $[0,1]$.
   Sea $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f'(t)|$, se tiene la desigualdad $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$ que demuestra que $f \in \mathscr{L}$.
   Resulta que $\mathscr{L}$ contiene a $\mathscr{P}$ y así es de dimensión infinita.
2. (a) Es suficiente verificar que si $N_1(f) = 0$ y $N_2(g) = 0$, entonces $f = g = 0$, las otras propiedades son claras. Pero si $N_1(f) = 0$, entonces f es constante y $f(0) = 0$, por lo tanto $f = 0$. Lo mismo se aplica a N_2.

   (b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$. Se define $X_n = \left\{\frac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}, x \neq 0\right\}$. Como $f_n(0) = 0$, se ve que $N_1(f_n) = \sup(X_n)$. Por lo tanto $|f_n'(0)| = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|f_n(x) - f_n(0)|}{|x|}$, pertenece a $\bar{X}_n$, por lo que aplicando I 2) se constata que $|f_n'(0)| \leqslant \sup(\bar{X}_n) = \sup(X_n)$.

   Finalmente, $f_n'(0) = 2\pi n$, por lo que $N_2(f_n) \geqslant 2\pi n$. Así, no existe $K > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $N_2(f_n) < K\|f_n\|_\infty$, o sea N_2 y $\| \ \|_\infty$ no son equivalentes.
   Observaciones : a) se puede obtener este resultado (y especificarlo) observando que la función $f_n : x \mapsto \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{x}$ definida en $]0,1]$ se extiende a una función continua en 0 poniendo $f_n(0) = 2\pi n$. Luego notar (de hecho, es un caso particular de I 2)) que $\sup\limits_{]0,1]} |f_n| = \sup\limits_{[0,1]} |f_n|$ y demostrar (por un estudio clásico de función) que esta última cantidad es $2\pi n$.
   b) Lo que hace tan interesante este problema de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es que son acotadas por 1, pero que su pendiente en el origen puede hacerse, arbitrariamente grande con n. Se puede así obtener el mismo resultado con la sucesión $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $k_n(x) = nx$ si $x \leqslant \frac{1}{n}$ y 1 si no, para lo cual un cálculo directo da $N_1(k_n) = n$ y $\|k_n\|_\infty = 1$.

   (c) Como, para todo $f \in \mathscr{L}$, $N_1(f) \geqslant N_2(f)$, se deduce de lo anterior que N_1 no es equivalente a $\| \ \|_\infty$. Se define $g_n(x) = x^n$, para $n \geqslant 1$. Para todo $n \geqslant 1$, $N_2(g_n) = 1$. Además, $g_n'(1) = n$, por lo tanto, por el mismo razonamiento que el anterior, $N_1(g_n) \geqslant n$, lo que demuestra que N_1 no es equivalente a N_2.

   Observación : lo que hace interesante este problema de las funciones $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es que son acotadas por 1, pero que su pendiente en 1 puede hacerse, arbitrariamente grande con n. Se puede así obtener el mismo resultado con la sucesión $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $l_n(x) = 0$ si $x \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ y $nx - (n-1)$ si no.

   (d) Se define $g_n(x) = x$ si $x \leqslant \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n}$ si no. Está claro que $g_n \in \mathscr{L}$, $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ y $N_2(g_n) = 1$. Entonces no existe constante $K' \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \geqslant K' N_2(g_n)$, por lo tanto N_2 no es equivalente a $\| \ \|_\infty$. Finalmente, $N_2(g_n) = N_1(g_n)$, que establece el mismo resultado para N_1.

(e) Es claro que para todo $f \in \mathscr{L}$, que $\lambda(f) \geqslant N_1(f)$. Sea $x \in]0,1]$. De la identidad $f(x) = f(0) + x\frac{f(x)-f(0)}{x}$ se deduce que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + |\frac{f(x)-f(0)}{x}|$ (pues $|x| \leqslant 1$), o sea $|f(x)| \leqslant N_1(f)$. La aplicación $x \mapsto f(x)$ es continua en $[0,1]$ (o aplicando I 2)) se deduce que, para todo $x \in [0,1]$ se tiene igualmente $|f(x)| \leqslant N_1(f)$. En otros términos $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$ y $\lambda(f) \leqslant 2N_1(f)$. Las normas λ y N_1 son, por lo tanto equivalentes.

3. Se pone, para todo $f \in \mathbb{C}^1$: $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ y $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) Se constata fácilmente que si $\nu_1(f) = 0$, entonces f es constante y, como además $f(0) = 0$, es nula. Las otras propiedades son inmediatas, por lo tanto ν y ν_1 son normas en $\mathbb{C}^1$.

(b) Sea $f \in \mathbb{C}^1$, se denota $X = \{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; (x,y) \in [0,1]^2, x \neq y\}$. Para demostrar que $\nu_1(f) = N_1(f)$, es suficiente verificar que $\sup(X) = \|f'\|_\infty$. Sean $x, y \in [0,1], x \neq y$. Por el teorema de incrementos finitos, existe c comprendido entre x y y tal que $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = f'(c) \leqslant \|f'\|_\infty$, por lo tanto $\sup(X) \leqslant \|f'\|_\infty$. Como f' es continua, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f'(x_0) = \|f'\|_\infty$. Entonces $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ pertenece a $\bar{X}$, por lo tanto, aplicando I 2), $\|f'\|_\infty \leqslant \sup(\bar{X}) = \sup(X)$.

Observación : Se puede formular este razonamiento de la siguiente manera : sea $Y = \{f'(x); x \in [0,1]\}$. Por el teorema de incrementos finitos, $x \subset Y$. Se tiene así, por definición de la derivada, $Y \subset \bar{X}$. Entonces $\sup(X) \leqslant \sup(Y) \leqslant \sup(\bar{X})$, luego se aplica I 2).

(c) Las normas ν y ν_1 son equivalentes. En efecto, es claro que $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$, para todo $f \in \mathbb{C}^1$. Sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Si $t_0 = 0$, entonces $\nu_1(f) \leqslant \nu(f)$. Si no, por el teorema de incrementos finitos, existe $c \in]0, t_0[$ tal que $f(t_0) = f(0) + f'(c)t_0$ de lo que se deduce que $\|f\|_\infty \leqslant \nu_1(f)$, ya que $\nu(f) \leqslant 2\nu_1(f)$.

4. (a) Sea $x \in [0,1]$. La sucesión de los números reales $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy i.e. convergente. Se define $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Sea $\varepsilon > 0$. La sucesión (f_n) es de Cauchy, existe N tal que, si $m, n \geqslant N$, entonces $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Sean $x \in [0,1]$ y $m, n \geqslant N$. Se tiene $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ y, esto es verdadero para todo $m \in \mathbb{N}$, se deduce que, pasando al límite para m, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, o sea $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Así f es el límite, de convergencia uniforme, de una sucesión de funciones continuas y es continua.

(b) Por definición de ν, una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy para ν es de Cauchy para $\| \|_\infty$, por lo tanto (uniformemente) convergente por la pregunta que precede. Igualmente $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para $\| \|_\infty$, por lo tanto converge uniformemente a una función continua g. Resulta que f es derivable y tiene por derivada la función continua g. Finalmente, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f, para ν, por lo tanto $(\mathbb{C}^1, \nu)$ es completo. Sea ahora $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$. Como ν_1 es equivalente a ν, ella es de Cauchy para ν por lo tanto convergente. Existe por lo tanto $h \in \mathbb{C}^1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(h - g_n) = 0$. Pero como ν_1 es equivalente a ν, se tiene también $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_1(h - g_n) = 0$, por lo tanto $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$ es completo.

(c) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathscr{L}, \lambda)$. Como $\lambda(f_n) \geqslant \|f_n\|_\infty$, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igualmente de Cauchy en $(\mathbb{C}^0, \| \|_\infty)$. Como $(\mathbb{C}^0, \| \|_\infty)$ es completo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función continua que se denota f.

(d) Sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe N tal que, para $m, n \geqslant N$ se tiene, para todo x, y y $z \in [0,1]$, con $x \neq y$:

$$|f_n(z) - f_m(z)| + \left|\frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))}{x-y}\right| < \varepsilon.$$

haciendo tender m al infinito, se deduce que :

$$|f_n(z)-f(z)|+\left|\frac{(f_n(x)-f(x))-(f_n(y)-f(y))}{x-y}\right|<\varepsilon,$$

por lo tanto

$$\sup_{z\in[0,1]}|f_n(z)-f(z)|+\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}}\left|\frac{(f_n(x)-f(x))-(f_n(y)-f(y))}{x-y}\right|\leqslant\varepsilon.$$

Así la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f, para la norma λ. Por otro lado, se deduce de la segunda desigualdad que, para todo $x,y\in[0,1]$, con $x\neq y$: $|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|<\varepsilon|x-y|$, así que para n bastante grande $f-f_n$ pertenece a $\mathscr{L}$. Por lo tanto $\mathscr{L}$ es un espacio vectorial y $f_n\in\mathscr{L}$, por lo tanto f pertenece a $\mathscr{L}$.

(e) Toda sucesión de Cauchy $\mathscr{L}$ admite un límite en $\mathscr{L}$ que es, por lo tanto, completo.

Solución del ejercicio 7261 ▲006055

1.) La necesidad de las condiciones (i), (ii), (iii) resulta de las propiedades de una norma. En efecto, si $x\in K$, $||-x||=||x||\leqslant 1$ y $-x\in K$, lo que prueba (i). K es cerrado porque más generalmente toda bola cerrada de un espacio métrico es cerrada ; y K es acotado por definición (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ está acotado si está contenido en una bola cerrada). En fin, K es convexa porque, si $x,y\in K$ y $\lambda\in[0,1]$, $||(1-\lambda)x+\lambda y||\leqslant(1-\lambda)||x||+\lambda||y||\leqslant 1$ y $(1-\lambda)x+\lambda y\in K$. 0 es un punto interior a K : por ejemplo $B(0,\frac{1}{2})\subset K$ y K contiene un vecindario de 0 (toda bola cerrada de radio >0 es un vecindario de su centro).

2. Sea K verificando las propiedades (i), (ii), (iii). Tenemos que demostrar que $p(x)$ está bien definida para todo x ; que p es una norma y que K es la bola unidad cerrada que le es asociada.

   Si $x=0$, $\frac{x}{a}\in K$, para todo $a>0$ y $p(0)=0$. Si $x\neq 0$, el conjunto $\{a>0;\ \frac{x}{a}\in K\}$ es minorado ; si no es vacío admite una cota inferior. Por lo tanto 0 es punto interior a K ; existe por lo tanto $\varepsilon>0$ tal que $B(0,\varepsilon)\subset K$ y para a bastante grande, $\frac{||x||}{a}\leqslant\varepsilon$, en particular $\frac{x}{a}\in K$, y el conjunto no es vacío.

   Verificar los tres axiomas de una norma.

   • Por definición de una cota inferior, $p(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists a,\ 0<a<\varepsilon$ tal que $\frac{x}{a}\in K$. K es acotada, se puede asumir que $K\subset\overline{B}(0,R)$, de manera que $\|\frac{x}{a}\|\leqslant R$ o $\|x\|\leqslant\varepsilon R$, para todo $\varepsilon>0$, lo que implica $x=0$.

   • Sea $\lambda>0$; $p(\lambda x)=\inf\{a>0;\ \frac{\lambda x}{a}\in K\}=\inf\{\lambda b>0;\ \frac{x}{b}\in K\}$ poniendo $a=\lambda b$, y $p(\lambda x)=\lambda p(x)$. Basta con demostrar que $p(-x)=p(x)$, para tener la propiedad de homogeneidad. Pero $p(-x)=\inf\{a>0;\ -\frac{x}{a}\in K\}=\inf\{a>0;\ \frac{x}{a}\in -K\}=p(x)$, pues K es simétrica.

   • Usando la definición de una cota inferior, se va a demostrar que para todo $\varepsilon>0$, $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon$, lo que da el resultado. Entonces, fijemos $\varepsilon>0$; se puede encontrar $a>0$ tal que $p(x)\leqslant a<p(x)+\varepsilon$ y $\frac{x}{a}\in K$, luego $b>0$ tal que $p(y)\leqslant b<p(y)+\varepsilon$ y $\frac{y}{b}\in K$. Si $\frac{x+y}{a+b}\in K$, entonces $p(x+y)\leqslant a+b$ por propiedad de la cota inferior y se ha demostrado $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon$. Pero $\frac{x+y}{a+b}$ se escribe $\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$, combinación convexa de $\frac{x}{a}$ y $\frac{y}{b}$, y K se supone que es convexo. La demostración de la desigualdad del triángulo queda así completa.

   Queda por establecer $K=\{x;\ p(x)\leqslant 1\}$. Si $x\in K$ y $a=1$, $\frac{x}{a}\in K$, lo que implica $p(x)\leqslant 1$. Recíprocamente, se supone $p(x)\leqslant 1$; se puede asumir $x\neq 0$.

Si $p(x) < 1$, existe $p(x) \leqslant a < 1$ tal que $\frac{x}{a} \in K$; pero $x = a\frac{x}{a} + (1-a)0$ está aún en K. Si $p(x) = 1$ existe (a_n) sucesión de números positivos tales que $\frac{x}{a_n} \in K$, para todo n y tendiendo hacia 1. Pero K es cerrado, $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$.

Solución del ejercicio 7268 ▲002395

1. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy para d. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p,q \geqslant N, \ d(u_p,u_q) = |u_p^3 - u_q^3| \leqslant \varepsilon.$$

   Entonces la sucesión (u_n^3) es una sucesión de Cauchy para la distancia usual $|\cdot|$. Como $(\mathbb{R},|\cdot|)$ es completo entonces (u_n^3) converge para el valor absoluto, se denota v el límite, y se tiene $|u_n^3 - v|$ que tiende a 0. Entonces, para $u = v^{\frac{1}{3}}$ se tiene $d(u_n,u) = |u_n^3 - u^3| = |u_n^3 - v|$ que tiende a 0, por lo tanto u_n converge a u para la distancia d. Entonces $\mathbb{R}$ es completo para d.

2. Demostrar que d no define una distancia completa. Sea (u_n) la sucesión definida por $u_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $d(u_p,u_q) = |\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-q}|$. Así para $\varepsilon > 0$ fijo, sea N tal que $\mathrm{e}^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces para $p,q \geqslant N$ se tiene $d(u_p,u_q) = |\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-q}| \leqslant \mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-q} \leqslant 2\mathrm{e}^{-N} \leqslant \varepsilon$. Por lo que (u_n) es de Cauchy. Se supone que (u_n) converge, se denota $u \in \mathbb{R}$ su límite, de donde $d(u_n,u) = |\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{u}|$ tiende a 0 por un lado y hacia e^u por otro lado y $\mathrm{e}^u = 0$, lo que es absurdo para $u \in \mathbb{R}$.

3. La función $\ln(1+u)$ es continua y se anula solo en $u = 0$. Entonces, para $\ln(1+u)$ suficientemente pequeño se tiene u suficientemente pequeño y por lo tanto, (por la relación $\ln(1+u) = u + o(u)$) se tiene

$$\frac{1}{2}u \leqslant \ln(1+u) \leqslant 2u.$$

   Para (u_n) una sucesión de Cauchy para d, la primera desigualdad prueba que (u_n) es una sucesión de Cauchy para $|\cdot|$. Entonces converge para $|\cdot|$ La segunda desigualdad muestra que (u_n) converge para d. Entonces d define una distancia completa.

Solución del ejercicio 7269 ▲002396

f es inyectiva afín que d sea una distancia. Se define $F = f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$.

- $\Rightarrow$ Se supone que la distancia d es completa. Sea (y_n) una sucesión de F que converge a $y \in \mathbb{R}^2$. Es necesario demostrar que $y \in F$. Existe $x_n \in \mathbb{R}$, tal que $y_n = f(x_n)$. Como (y_n) es una sucesión convergente, es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}^2$, por lo que $d(x_p,x_q) = \|f(x_p) - f(x_q)\| = \|y_p - y_q\|$. Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy para d. Como d es completa entonces (x_n) converge x y como $x_n \to x$ (para d) se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ (para $\|\cdot\|$). (Se observa que por la definición de d, la aplicación $f : (\mathbb{R},d) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ es continua.) Entonces (y_n) converge a $f(x)$ y por la unicidad del límite $f(x) = y$. Así $y \in f(\mathbb{R}) = F$ y F es cerrado.
- $\Leftarrow$ Se supone que F es cerrado. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy para $(\mathbb{R},d)$. Denotemos $y_n = f(x_n)$. Como $d(u_p,u_q) = \|f(u_p) - f(u_q)\| = \|y_p - y_q\|$, entonces (y_n) es una sucesión de Cauchy para $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$. Como este espacio es completo, entonces (y_n) converge a y. Así $y_n \in F$ y F es cerrado por lo que $y \in F$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Queda por demostrar que (x_n) tiende a x. En efecto, $d(x_n,x) = \|f(x_n) - f(x)\| = \|y_n - y\|$ tiende a 0 y (x_n) tiende a x, para d. Así, d es completo.

Solución del ejercicio 7270 ▲002397

---

1. (a) Demostrar que (X, d_ω) es completo. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy para esta distancia. Así para cada $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ es una sucesión de Cauchy para $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Como $\mathbb{R}$ es completo entonces esta sucesión converge, se denota $f(t)$ su límite.

   Es necesario demostrar dos cosas : primero que (f_n) converge a f por la distancia considerada y en segundo lugar que f está de hecho en el espacio X.

   (b) Como (f_n) es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \geqslant 0$ tal que para todo $p \geqslant 0$: $d_\omega(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon$. Así
$$\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t) - f_{n+p}(t))| < \varepsilon.$$
   Si se hace tender p hacia $+\infty$, se obtiene : $\sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)(f_n(t) - f(t))| < \varepsilon$. Entonces (f_n) converge a f para la distancia d_ω.

   (c) ω es una función no nula en el compacto $[a,b]$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\omega(t) > \alpha$, para todo $t \in [a,b]$. Se deduce que
$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\alpha} d_\omega(f_n, f).$$
   Como $d_\omega(f_n, f)$ tiende a 0, entonces f_n converge a f, para la norma infinito. Entonces f es continua. Conclusión : (X, d_ω) es completo.

2. Se define f_n sobre $[0,1]$ por $f_n(t) = 1$, para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = (1 - n(t - \frac{1}{2}))$, para $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ y $f(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. En efecto, (f_n) converge (en el sentido de convergencia simple) a la función f, donde f es definida por $f(t) = 1$ sobre $[0, \frac{1}{2}]$ y $f(t) = 0$ sobre $]\frac{1}{2}, 1]$. Se demuestra fácilmente que (f_n) es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_1$ al demostrar que para $p, q \geqslant n$ se tiene $\|f_p - f_q\|_1 \leqslant \frac{1}{n}$. Sin embargo, (f_n) no converge en X, pues f no es continua, por lo tanto no pertenece al espacio X. Entonces X no es completo.

Solución del ejercicio 7271 ▲002398

---

1. Se toma el ejemplo del ejercicio 7270. Y se define g_n sobre $[0,1]$ por $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Entonces g_n es $\mathscr{C}^1$, y converge (así en particular (g_n) es de Cauchy) a g que no es una función $\mathscr{C}^1$ y no es un espacio completo.
2. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy para la norma N. Para cada $t \in [a,b]$, $(f_n(t))_n$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$ por lo tanto converge. Denotemos $f(t)$ su límite. Igualmente $(f_n'(t))_n$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$ por lo tanto converge a $g(t)$. Se va a demostrar que f está en X y que f_n converge a f, para N y que $f' = g$.

   Sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \geqslant 0$,
$$N(f_n - f_{n+p}) < \varepsilon$$
   y haciendo tender p a $+\infty$, f_{n+p} converge (simplemente) hacia f. Se obtiene que $\|f_n - f\|_\infty$ y que $\|f_n' - g\|_\infty$ tienden a 0. Entonces f_n converge uniformemente a f. Como las f_n son continuas, f es continua. Igualmente f_n' converge uniformemente a g, por lo que g es continua. Además, implica que $g = f'$. (Recordar : si (f_n) es una sucesión de funciones $\mathscr{C}^1$ sobre $[a,b]$ que converge simplemente a f, y tal que (f_n') converge uniformemente a g, entonces f es $\mathscr{C}^1$ y su derivada es $f' = g$). Se ha demostrado que $N(f_n - f)$ tiende a 0 y que f está en X. Entonces (X, N) es completo.

Solución del ejercicio 7272 ▲002399

---

1. Denotemos x^p la sucesión
$$x^p = (1,1,\dots,1,1,0,0,0,\dots).$$
(de los 0 a partir del $p+1$-ésimo lugar y de 1's antes. Si Y es el espacio de todas las sucesiones, se denota
$$x^\infty = (1,1,1,1,\dots).$$
La sucesión x^∞ no está en X. Sin embargo, $x^p \to x^\infty$ por la distancia ρ. En efecto,
$$\rho(x^p,x) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{p+1}} \to 0.$$
La sucesión (x^p) es de Cauchy, pero no converge en X, por lo tanto X no es completo.

2. (a) Sea Y el espacio de todas las sucesiones. Entonces X es denso en Y (para la topología definida por ρ), porque inmediatamente, $y = (y_1,y_2,\dots)$ de Y se aproxima por una sucesión de sucesión (x^p) obtenida al truncar la sucesión $y : x^1 = (y(1),0,0,\dots), x^2 = (y(1),y(2),0,0,\dots),\dots$ En efecto,
$$\rho(x^p,y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|} \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^p}$$
que tiende a 0, cuando p tiende a $+\infty$.

(b) Sea $(x^n)_n$ una sucesión de Cauchy de Y. Se va a demostrar que para k fijo, $(x_k^n)_n$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$. Tomemos $\varepsilon > 0$, entonces existe N tal que para $p,q \geqslant N$ se tiene $\rho(x^p,x^q) \leqslant \varepsilon$.
$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^p - x_k^q|}{1+|x_k^p - x_k^q|} \leqslant \rho(x^p,x^q) \leqslant \varepsilon.$$
Se define la función $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, f es invertible para $\alpha \geqslant 0$, de inversa $f^{-1}(\beta) = \frac{\beta}{1-\beta}$. Un estudio de f y su inversa demuestra que si $f(\alpha) \leqslant \varepsilon' \leqslant 1$, entonces $\alpha \leqslant 2\varepsilon'$. Como k es fijo, sea $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2^k}$ y $\alpha = |x_k^p - x_k^q|$ tenemos que demostrar que : $f(\alpha) \leqslant \varepsilon'$ implica $\alpha \leqslant 2\varepsilon'$. Recapitulando :
$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ |x_k^p - x_k^q| < 2\varepsilon',$$
así la sucesión $(x_k^n)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo tanto converge y se denota x_k^∞ su límite.

(c) Se va a construir una sucesión $x^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty,\dots)$. Como (x^n) es de Cauchy entonces
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ \rho(x^p,x^q) < \varepsilon,$$
Cuando se fija p y que se hace tender q hacia $+\infty$ se tiene
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \rho(x^p,x^\infty) < \varepsilon,$$
por lo tanto (x^n) converge a x^∞ para la distancia ρ.

(d) Evidentemente $x^\infty \in Y$, por lo tanto (x^n) converge a $x^\infty \in Y$, para ρ. Entonces (Y,ρ) es un espacio completo.

3. $(X,\|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio completo. Por ejemplo, se observa la sucesión $x^p = (1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{p},0,0,\dots)$, entonces (x^p) es una sucesión de Cauchy, que no converge en X, pero en Y su límite es $x^\infty = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$. Denotemos Z el espacio de sucesiones que tienden a 0. La adherencia de X, para la topología definida por $\|\cdot\|_\infty$ es Z. Y $(Z,\|\cdot\|_\infty)$ es completo.

Solución del ejercicio 7273 ▲002400

1. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall q \geqslant n_0, \ \ \|x_{n_0} - x_q\| < 1.$$

Luego para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $n_1 > n_0$ tal que

$$\forall q \geqslant n_1, \ \ \|x_{n_1} - x_q\| < \tfrac{1}{2}.$$

Luego por recurrencia para $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, se establece $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\forall q \geqslant n_k, \ \ \|x_{n_k} - x_q\| < \frac{1}{2^k}.$$

Entonces en particular en cada paso se tiene

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

Sea $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, entonces $\|u_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}$, por lo tanto

$$\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Así la serie $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ es normalmente convergente. Si esta serie converge se denota $T = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ su suma, es decir, el límite de $T_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. Pero entonces $T_N = x_{n_{N+1}} - x_{n_0}$ converge a T. Entonces la sucesión extraída $(x_{n_k})_k$ converge (hacia $T + x_{n_0}$). Consecuencia : si toda serie normalmente convergente es convergente, entonces se puede extraer de toda sucesión de Cauchy una sub-sucesión convergente, por lo tanto E es completo.

2. Sea $p \leqslant q$.

$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$$

Pero la serie $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ es normalmente convergente por lo que el resto $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\|$ tiende a 0, cuando $p \to +\infty$. Se fija $\varepsilon > 0$, existe por lo tanto $N \in \mathbb{N}$ tal que para $p \geqslant N$ se tiene $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \|u_k\| \leqslant \varepsilon$, por lo tanto para todo $p, q \geqslant N$ se tiene también $\|S_q - S_p\| \leqslant \varepsilon$. Entonces la sucesión (S_n) es de Cauchy. Si E es completo entonces (S_n) converge, se denota S su límite. Entonces $\|S_n - S\|$ tiende a 0. Así la serie $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ es convergente (de suma S).

Solución del ejercicio 7274 ▲002401

1. (1) $\Rightarrow$ (2) Se supone que A_n converge a A en $\mathscr{L}(E,F)$. Sea $M \subset E$ una parte acotada, se denota B su cota (es decir para todo $x \in M$, $\|x\| \leqslant B$). Entonces

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|A_n - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{B} \\
\Rightarrow &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in M,\ \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|}{B} \\
\Rightarrow &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in M,\ \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

lo que es exactamente la convergencia uniforme de A_n hacia A sobre M.

2. (2) $\Rightarrow$ (1) Por definición de la norma de un operador, se tiene $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n(x) - A(x)\|$. Tomemos como parte acotada la esfera unidad : $M = S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Entonces :

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in S(0,1),\ \|A_n(x) - A(x)\| \leqslant \varepsilon \\
\Rightarrow &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|A_n - A\| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir $\|A_n - A\|$ tiende a 0.

Solución del ejercicio 7275 ▲002402

Es del curso, pero es importante saber escribir esto correctamente. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy de $\mathscr{L}(E,F)$.

1. Encontrar primero el candidato al límite. Por definición de una sucesión de Cauchy, se tiene :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ \|f_p - f_q\| < \varepsilon.$$

Se fija $x \in E$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon\|x\|_E.$$

Si se escribe $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|x\|}$ (x es fijo, si $x = 0$ es trivial) entonces se tiene que demostrar :

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geqslant N,\ \|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \varepsilon'.$$

Entonces la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy de F. Como F es completo, esta sucesión converge y se denota $f(x)$ su límite.

2. Construir una función $f : E \longrightarrow F$. Demostrar que f está en el espacio $\mathscr{L}(E,F)$, es decir que f es lineal. Como para todo n, f_n es lineal entonces, para todo $x,y \in E$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y).$$

En el límite ($n \to +\infty$) se tiene

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

por lo que f está en $\mathscr{L}(E,F)$.

3. Queda por demostrar que (f_n) converge bien a f (que a priori no es evidente). Se vuelve a la definición de una sucesión de Cauchy (escrito de forma ligeramente diferente) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall k \geqslant 0,\ \|f_p - f_{p+k}\| < \varepsilon.$$

Cuando se fija p y se hace tender k a $+\infty$, entonces $f_p - f_{p+k}$ tiende a $f_p - f$. Así, pasando al límite se tiene :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \|f_p - f\| < \varepsilon.$$

Entonces (f_n) converge a f, para la norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathscr{L}(E,F)$.

Observación : en algunos ejercicios puede ser útil demostrar primero el tercer punto antes del segundo.

Solución del ejercicio 7303 ▲002404

---

1. Comenzar con la singularidad, si x,y son dos puntos fijos entonces $f(x) = x$ y $f(y) = y$, entonces la relación para f se escribe

$$d(x,y) \leqslant \alpha_n d(x,y),\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge entonces (α_n) tiende a 0, entonces existe n_0 lo suficientemente grande con $\alpha_{n_0} < 1$, la relación se convierte

$$d(x,y) \leqslant \alpha_{n_0} d(x,y) < d(x,y),$$

lo cual es contradictorio.

2. Sea $x_0 \in X$, se denota $x_n = f^n(x_0)$. Entonces

$$d(x_{n+1},x_n) \leqslant \alpha_n d(x_1,x_0),\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se va a demostrar que (x_n) es una sucesión de Cauchy, es decir

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \geqslant 0 \qquad d(x_{n+p},x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Para n,p fijos, se evalúa $d(x_{n+p},x_n)$.

$$d(x_{n+p},x_n) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1},x_k) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k d(x_1,x_0) = d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k.$$

Además, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge así la sucesión (S_n) definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ es Cauchy y por lo tanto, existe N tal que para todo $n \geqslant N$ y todo $p \geqslant 0$ se tiene

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k = S_{n+p-1} - S_{n-1} \leqslant \varepsilon.$$

Así para todo $n \geqslant N$ y todo $p \geqslant 0$ se tiene $d(x_{n+p},x_n) \leqslant d(x_1,x_0)\varepsilon$. Si se escribe $\varepsilon' = d(x_1,x_0)\varepsilon$, esto prueba que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Como el espacio es completo, esta sucesión converge, se denota x su límite. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

En el límite, la sucesión (x_{n+1}) tiende a x, y como f es continua (Es α_1-lipschitziana : $d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha_1 d(x,y)$) entonces $(f(x_n))$ converge a $f(x)$. Por unicidad del límite se tiene

$$x = f(x).$$

Entonces f tiene un punto fijo, que es único y se obtiene a partir de cualquier punto $x_0 \in X$ como límite de $(f^n(x_0))_n$.

3. Queda por estimar la velocidad de convergencia, se ha visto

$$d(x_{n+p},x_n) \leqslant d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k,$$

Se hace tender p hacia $+\infty$ en esta desigualdad entonces

$$d(x,x_n) \leqslant d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k.$$

Esta es la estimación buscada.

Solución del ejercicio 7304 ▲002405

Denotemos $g = f^n$. Entonces g es una aplicación estrictamente contratactante en X completo, por lo tanto g tiene un único punto fijo que denotamos x. Se va a demostrar la unicidad de un punto fijo para f. Sea $y \in X$ tal que $f(y) = y$, entonces $g(y) = f^n(y) = y$. Entonces y es también un punto fijo para g, por lo que $y = x$. Queda por demostrar que f de hecho tiene un punto fijo.
Se tiene

$$f^n(x) = x \;\Rightarrow\; f(f^n(x)) = f(x) \;\Rightarrow\; f^n(f(x)) = f(x) \;\Rightarrow\; g(f(x)) = f(x).$$

Venimos de demostrar que $f(x)$ es un punto fijo de g. Como g tiene un único punto fijo x, entonces $f(x) = x$! ! y x es de hecho un punto fijo para f.

Solución del ejercicio 7305 ▲002406

1. $(T\circ Tf)(x) = 1 + \int_0^x Tf(t-t^2)dt = 1 + \int_0^x (1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)du)dt = 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)dudt$. Además, $(T\circ Tf)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(u-u^2)du$.
   Notando que para $t \in [0,1]$, $t-t^2 \leqslant \frac{1}{4}$, se demuestra que $|T\circ Tf(x) - T\circ Tg(x)| \leqslant \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$ y que $|(T\circ Tf)'(x) - (T\circ Tg)'(x)| \leqslant \frac{1}{4}\|f-g\|_\infty$, entonces $N(T\circ Tf - T\circ Tg) \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}N(f-g)$. Así $T\circ T$ es una contracción y X es completo, $T\circ T$ admite un único punto fijo, por el ejercicio 7304, T admite un único punto fijo.
2. Se observa que $Tf = f$ es equivalente a $f(0) = 1$ y $f'(x) = f(x-x^2)$. Así la existencia y unicidad del punto fijo para T da la existencia y unicidad de la solución al problema dado.

Solución del ejercicio 7306 ▲002407

1. ! !
2. Se sabe que

$$\begin{aligned}\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty = \|\int_a^b k(s,t)(x_1(t)-x_2(t))dt\|_\infty &\leqslant \int_a^b \|k(s,t)\|_\infty \|x_1(t)-x_2(t)\|_\infty dt \\ &\leqslant \|x_1(t)-x_2(t)\|_\infty \times \lambda < \|x_1(t)-x_2(t)\|_\infty.\end{aligned}$$

   Así A es contractante y el espacio $\mathscr{C}([a,b])$ es completo, por el teorema del punto fijo, A admite un único punto fijo, x. Además, para toda función $x_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, la sucesión $(A^n x_0)$ converge a x, pero aquí la norma es la norma uniforme, por lo que $\|A^n x_0 - x\|_\infty$ tiende a 0. De este modo $(A^n x_0)$ converge uniformemente a x.

3. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\|_\infty &= \|A_1 x_1 - A_2 x_2\|_\infty \quad (\text{ pues } A_i x_i = x_1),\\
&= \Big\| \int_a^b k_1(s,t)x_1(t)dt + y_1(s) + \int_a^b k_2(s,t)x_2(t)\,dt + y_2(s)\Big\|_\infty\\
&\leqslant \| \int_a^b k(s,t)(x_1(t) - x_2(t))dt\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty\\
&\leqslant \lambda\|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

que expresa la dependencia continua de la solución con respecto a la función y.

Solución del ejercicio 7319 ▲002392

---

1. Por reducción al absurdo se supone que X no tiene un punto aislado. Como $\{x\}$ es un cerrado, entonces $\omega_x = X \setminus \{x\}$ es un abierto (de X). Además, como el punto x no es aislado, ω_x es denso en X. Ahora se puede aplicar el teorema de Baire a X que es un cerrado del espacio completo $\mathbb{R}$. Así una intersección numerable de abiertos densos en X es aún denso. Pero aquí se tiene una contradicción porque los ω_x son abiertos densos, X es numerable pero

$$\bigcap_{x\in X} \omega_x = \varnothing.$$

Y el conjunto vacío no es denso en X ! !

2. En el conjunto de Cantor ningún punto es aislado, entonces por la pregunta anterior el conjunto de Cantor es no numerable.

Solución del ejercicio 7320 ▲002393

---

1. Por reducción al absurdo se supone que sobre ningún abierto f es mayorada. $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente por lo tanto

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},'; O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\} \quad \text{es un abierto.}$$

Además, O_λ es denso, de hecho, para $x \in X$ y para V_x un vecindario abierto de x, por hipótesis f no es mayorada en V_x así en particular existe $y \in V_x$ tal que $f(y) > \lambda$, por lo tanto $y \in V_x \cap O_\lambda$. Esto prueba que O_λ es denso en X (V_x es tan pequeño como se quiera). Ahora para $n = 0,1,2,\ldots$, los O_n son conjuntos numerables abiertos y densos. Como X es completo, verifica el teorema de Baire por lo que la intersección de los O_n es aún un conjunto denso. Pero es fácil ver por la definición de los O_n que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$

Lo que da la contradicción buscada.

2. Se denota $\phi : B \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

No es difícil demostrar que ϕ es semi-continua inferiormente : en efecto, sea $F_\lambda := \{x \in X \mid \phi(x) \leqslant \lambda\}$. Sea λ fijo y sea (x_k) una sucesión de elementos de F_λ. Para n fijo y para todo k se tiene $f_n(x_k) \leqslant k$, entonces por continuidad de f_n, se tiene $f_n(x) \leqslant k$, esto es cierto para todo n y se tiene $x \in F_\lambda$.
De este modo F_λ es un cerrado por lo que $O_\lambda := \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$ es un abierto. Entonces ϕ es semi continua inferiormente. Por la primera pregunta existe un abierto no vacío O y una constante $M > 0$ tal que ϕ es mayorada por M sobre O. Es decir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in O,\ |f_n(x)| \leqslant M.$$

Por traslación se puede suponer que el origen o está incluido en O. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}(o,\varepsilon) \subset O$. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \bar{B}(o,\varepsilon),\ \ |f_n(x)| \leqslant M,$$

que es equivalente a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in \bar{B}(o,1),\ \ |f_n(x)| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}.$$

Así :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|f_n\| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}.$$

Solución del ejercicio 7332 ▲002383

1. Es del curso.
2. Si $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ es continua entonces induce una aplicación restringida $f_{|A} : A \longrightarrow \{0,1\}$ continua. Entonces f es constante en A. Sea $b \in B$ y sea (a_n) una sucesión de elementos de A que tienden a b (es posible pues $B \subset \bar{A}$), entonces $f(a_n)$ es constante, por ejemplo igual a 1, pues A es conexo. Pero f es continua en B, por lo tanto $f(b) = \lim f(a_n) = 1$. Demostrar así que f es constante en B. Entonces B es conexo. (De paso se ha demostrado que $\bar{A}$ es conexo.)
3. Sea $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ una función continua, donde $A = \bigcup A_n$. A_0 es conexo así f es constante en A_0 y vale v_0, igualmente A_1 es conexo, así f es constante en A_1 y vale v_1. Pero para $a \in A_0 \cap A_1 \neq \varnothing$, se tiene $f(a) = v_0$, pues $a \in A_0$ y $f(a) = v_1$, pues $a \in A_1$, o sea $v_0 = v_1$ y f es constante en $A_0 \cup A_1$. Por recurrencia f es constante en A.

Solución del ejercicio 7333 ▲002384

1. En $\mathbb{R}^2$ hay dos componentes conexas : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y\}$.
2. En $\mathbb{C}^2$ solo existe una : $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2;\ z \neq w\}$

Solución del ejercicio 7334 ▲002385

Se denota la frontera $\mathrm{Fr}A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Se tiene la partición $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}A \cup (X \setminus \bar{A})$. Si $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$, entonces $B \subset \mathring{A} \cup (X \setminus \bar{A})$. Además, por hipótesis, $B \cap A \neq \varnothing$ y $B \cap \mathrm{Fr}A = \varnothing$ por lo que $\mathring{A} = A \setminus \mathrm{Fr}A$, por lo tanto $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. Como $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$ se tiene $B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A) = \varnothing$. Por hipótesis $B \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$, por lo tanto $B \cap (X \setminus \bar{A}) = (B \cap (X \setminus A)) \setminus (B \cap \mathrm{Fr}(X \setminus A)) \neq \varnothing$. Se va a demostrar que B está incluido en la unión de dos abiertos disjuntos $\mathring{A}$ y $X \setminus \bar{A}$, de intersección no vacía con B, por lo tanto B no es conexo. Por la contraposición, si B es conexo entonces B no interseca la frontera de A.

Solución del ejercicio 7335 ▲002386

1. T es compacto porque es un cerrado acotado de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : T \longrightarrow \{0,1\}$ una aplicación continua. Por conexidad del segmento $[-1,1]$, g es constante en $\{0\} \times [-1,1]$ (y vale v); g es también constante en $[-1,1] \times \{0\}$ y vale v'. Pero entonces $v = g(0,0) = v'$, por lo tanto g es constante en T. Así T es conexo. Para $f : T \to \mathbb{R}$ una función continua. T es compacto por lo que $f(T)$ es compacto. T es conexo y $f(T)$ es conexo. Entonces $f(T)$ es un compacto conexo de $\mathbb{R}$, por lo que es un segmento compacto.
2. Estos son los cuatro puntos cardinales $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$, $E = (1,0)$, $O = (-1,0)$.
3. Por reducción al absurdo, se supone que T sea homeomorfa a una parte I de $\mathbb{R}$, entonces existe un homeomorfismo $f : T \longrightarrow I$. Por el primer punto I es un segmento compacto $I = [a,b]$. $T \setminus \{N\}$ es conexo, su imagen por f, $f(T \setminus \{N\})$ es conexa, pero es también el segmento I privado de un punto. Como I privado de un punto es conexo, el punto eliminado es necesariamente un extremo.

   Así $f(N) = a$ o $f(N) = b$. Se supone por ejemplo $f(N) = a$. Repetimos el mismo razonamiento con S, que también envía sobre un extremo, como f es biyectiva, no puede ser a, por lo tanto $f(S) = b$. Ahora $f(E)$ es también una extremo por lo que $f(E) \in \{a,b\}$. Pero entonces f ya no es inyectiva porque se tiene $f(E) = f(N)$ o $f(E) = f(S)$. Contradicción.

Solución del ejercicio 7336 ▲002387

1. (a) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\phi(t) = \mathrm{e}^{it}$ es una sobreyección continua.

   (b) $\mathbb{S}^1$ es un compacto conexo por lo que, razonando por contradicción, si $\psi : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una inyección continua entonces $\psi(\mathbb{S}^1)$ es un compacto conexo de $\mathbb{R}$ por lo tanto un segmento compacto I. Sea $y \in \mathring{I}$, como I es la imagen de $\mathbb{S}^1$, entonces existe un único $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = y$. La aplicación f induce entonces una biyección continua $f : \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \longrightarrow I \setminus \{y\}$. Pero $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ es conexo mientras que su imagen por f, que es $I \setminus \{y\}$ no lo es (pues $y \in \mathring{I}$). La imagen de un conexo por una aplicación continua debe ser un conexo, entonces se tiene una contradicción.
2. Si $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una inyección continua. Como $\mathbb{R}^2$ es conexo $f(\mathbb{R}^2) = I$ es un conexo de $\mathbb{R}$, entonces un segmento (no reducido a un punto !). Tomemos y un elemento de $\mathring{I}$, sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ es conexo, $I \setminus \{y\}$ no lo es, y f es una biyección continua entre estos dos conjuntos, por lo tanto, una contradicción.

Solución del ejercicio 7337 ▲002388

El conjunto B es conexo si y solo si toda función continua $f : B \to \{0,1\}$ es constante. Sea entonces $f : B \to \{0,1\}$ una función continua y demostrar que es constante. Se observa que la restricción de f a todo conjunto B_a es constante (B_a es conexo). Se define $g : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $g(x)$ toma el valor que tiene f sobre B_x. Demostrar que g es localmente constante (no se sabe si g es continua).

— Sea $a \notin \mathbb{Q}$, entonces se tiene $(a,0) \in B$, f es una función continua y $\{f(a,0)\}$ es un abierto de $\{0,1\}$, por lo tanto $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ es un abierto de B. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $(x,y) \in (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[) \times B$, se tiene $f(x,y) = f(a,0)$. Para $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ es claro que $g(x) = g(a)$: si $x \notin \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; y si $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. sí g es localmente constante en un vecindario de los puntos irracionales.

— Si $a \in \mathbb{Q}$ y sea $b \in]0,1]$, f es continua en (a,b), entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap\mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. Si ahora $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, se toma una sucesión (x_n) de racionales que tienden a x. Como f es continua entonces $g(a) = g(x_n) = f(x_n,b)$ tiende a $f(x,b) = g(x)$. Entonces $g(a) = g(x)$. Se ha demostrado que g es localmente constante en un vecindario de los puntos racionales.

— Balance : g es localmente constante en $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ es conexo, entonces g es constante en $\mathbb{R}$. Por lo tanto f es constante en $\mathbb{R}$, lo que teníamos que demostrar.

Solución del ejercicio 7338 ▲002389

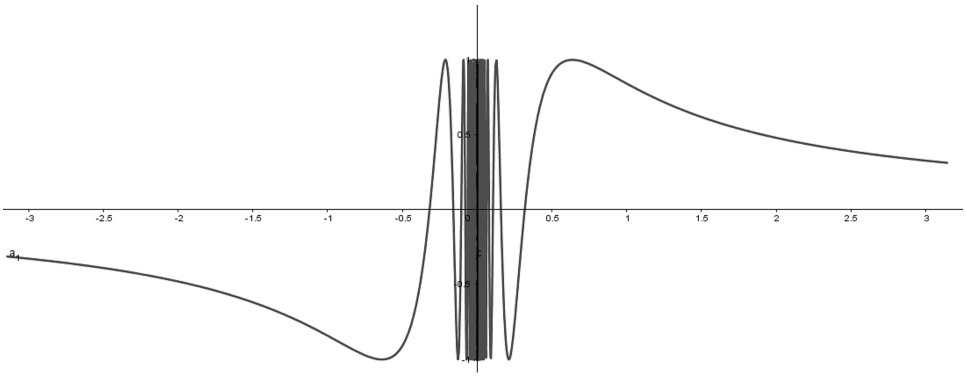
1. A es conexo porque es conexo por arcos.
2. Si $z \in g(A)$, entonces existe $(x,y) \in A$ tal que $g(x,y) = z$. Entonces $z = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ por el teorema de incrementos finitos existe $t \in]x,y[\subset I$ tal que $z = f'(t)$, por lo tanto $z \in f'(I)$ y $g(A) \subset f'(I)$.
   Si ahora $z \in f'(I)$, existe $y \in I$ tal que $z = f'(y)$, pero por definición de la derivada $f'(y)$ es el límite de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, cuando x tiende a y (y se puede decir que es el límite por la izquierda, i.e. $x < y$). Así $f'(y)$ es límite de puntos de $g(x,y)$, con $x < y$, entonces de puntos de A.
   Conclusión $z = f'(y)$ está en $\overline{g(A)}$, y entonces $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. A es conexo, g es continua en A, por lo tanto $g(A)$ es un conexo de $\mathbb{R}$. Por el ejercicio 7332 como se tiene
   $$g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$$
   con $g(A)$ conexo entonces $f'(I)$ es conexo. Como $f'(I)$ es un conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

Solución del ejercicio 7339 ▲002390

Sea $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$; sea $x,y \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Existe i_1 tal que $x \in A_{i_1}$ se tiene también $a \in A_{i_1}$ así que existe una camino γ_1 que enlaza x a a. Así mismo existe i_2 tal que $x \in A_{i_2}$ y se tiene igualmente $a \in A_{i_2}$ así que existe una camino γ_2 que enlaza a a y. El camino $\gamma_2 \circ \gamma_1$ conecta x a y. Esto es válido cualquiera que sean x y y, $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo por arcos.

Solución del ejercicio 7340 ▲002391

1. Si $(x_1, \operatorname{sen}\frac{1}{x_1})$ y $(x_2, \operatorname{sen}\frac{1}{x_2})$ son dos puntos de A, entonces el gráfico de arriba $[x_1,x_2]$ define un camino que conecta estos dos puntos. Específicamente el camino es la aplicación $\gamma : [x_1,x_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t, \operatorname{sen}\frac{1}{t})$. Entonces A es conexo por arcos por lo tanto conexo.
2. $\bar{A} = A \cup (\{0\}\times[-1,1])$. Se puede usar el ejercicio 7332 para demostrar que $\bar{A}$ es conexo. Aquí se va a demostrar directamente. Se supone, por contradicción, que $\bar{A} \subset U \cup V$, con U y V los abiertos de $\mathbb{R}^2$ disjuntos, de intersección no vacía con A. Como $\{0\}\times[-1,1]$ es conexo, está completamente incluido en uno de los conjuntos abiertos, Se supone que está incluido en U. Como A es conexo, entonces está incluido en uno de los conjuntos abiertos, por lo que está incluido en V (porque si está incluido en U, todo $\bar{A}$ está contenido en U). Hay que encontrar una contradicción que pruebe que de hecho $U \cap A \neq \varnothing$. En efecto, U es un abierto y $(0,0) \in U$, sea $B((0,0),\varepsilon)$ una bola contenida en U. Para n suficientemente grande se tiene $x_n = \frac{1}{2\pi n} < \varepsilon$, con $\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen} 2\pi n = 0$, por lo tanto $(x_n, \operatorname{sen}\frac{1}{x_n}) = (x_n, 0)$ es un elemento de A y de U. Como V contiene A, entonces $U \cap V \neq \varnothing$. Lo que proporciona la contradicción.



3. Demostrar que $\bar{A}$ no es conexo por arcos. Sea $O = (0,0)$ y $P = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ dos puntos de $\bar{A}$, por reducción al absurdo se supone que existe un camino $\gamma : [0,1] \longrightarrow \bar{A}$ tal que $\gamma(0) = O$ y $\gamma(1) = P$. Se descompone en coordenadas $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. $\gamma_1^{-1}(\{0\})$ es un cerrado porque γ_1 es continua y además no es vacía porque $\gamma_1(0) = 0$. Sea $t_0 = \sup \gamma_1^{-1}(\{0\})$, como el conjunto es cerrado entonces $\gamma_1(t_0) = 0$ y además $t_0 < 1$, pues $\gamma_1(1) = \frac{1}{2\pi}$. Se observa lo que sucede con el tiempo t_0, es el momento en que nuestro camino "sale" del conjunto $\{0\} \times [-1,1]$. Denotemos $y_0 = \gamma_2(t_0)$. Como γ_2 es continua en y_0 y para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $\eta > 0$ tal que $(|t - t_0| < \eta \Rightarrow |\gamma_2(t) - y_0| < \frac{1}{2})$. Se escoge $t_1 \in]t_0, t_0 + \eta[$, entonces $t_1 > t_0$ y $\gamma_1(t_1) > 0$. Así el punto $\gamma(t_1) = (\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1))$ está en A (y no solo en $\bar{A}$). Se supone por ejemplo $y_0 \leqslant 0$, cuando x recorre $]\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_1)[$, sen $\frac{1}{x}$ alcanzando el valor 1 una infinidad de veces, por lo que existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tal que $\gamma_2(t_2) = 1$. Entonces $\gamma(t_2) = (\gamma_1(t_2), 1)$. Pero como $|t_2 - t_0| < \eta$, por lo tanto $|\gamma_2(t_2) - y_0| = |1 - y_0| > \frac{1}{2}$, lo que contradice la continuidad de γ_2. Se obtiene una contradicción por lo que $\bar{A}$ no es conexo por arcos.

Solución del ejercicio 7369 ▲002408

Sea $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, entonces por linealidad de la integral y gracias a la relación del enunciado :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t)\, dt = 0.$$

La función f es continua en el compacto $[a,b]$, entonces por el teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente a f. Se fija $\varepsilon > 0$. Sea P tal que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Entonces

$$\left| \int_a^b f(t)^2 dt \right| = \left| \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt \right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \leqslant \varepsilon \int_a^b |f|.$$

Pero $C = \int_a^b |f|$ es una constante (independiente de ε y P). Así acabamos de demostrar que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leqslant \varepsilon C$, con para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto $\int_a^b f^2 = 0$, por lo que f^2 es una función continua y positiva, su integral es nula, entonces f es la función nula.

Solución del ejercicio 7371 ▲002410

Sea $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ definida por $\Phi = (f_1, \ldots, f_n)$, entonces Φ es continua porque los f_i son continuas. Φ es inyectiva : de hecho, si $x \neq y$, entonces como $\{f_i\}$ separa los puntos se tiene $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, por la contraposición Φ es inyectiva. Denotemos $F = \Phi(E)$ la imagen directa de E. Entonces $\Phi : E \to F$ es continua y biyectiva. Como E es compacto entonces Φ es un homeomorfismo. Así E es homeomorfo a F que es una parte de $\mathbb{R}^n$.

Recordar : Si $\Phi : E \to F$ es continua y biyectiva y E es un espacio compacto, entonces Φ es un homeomorfismo.
La prueba es simple : sea K un cerrado de E, como E es compacto, K lo es también y como Φ es continua, $\Phi(K)$ es un compacto de F y por ende un cerrado. Pero al escribir esto con ayuda de la aplicación Φ^{-1} acabamos de demostrar para todo cerrado K de E, la imagen inversa de K por Φ^{-1} (que es $(\Phi^{-1})^{-1}(K) = \Phi(K)$) es un cerrado. Entonces Φ^{-1} es continua y Φ es un homeomorfismo.

Solución del ejercicio 7372 ▲002411

Se busca verificar las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass.

— En primer lugar, $X \times Y$ es compacto, porque es producto de espacios compactos.

— Luego $\mathscr{A}$ es una subálgebra de $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$: de hecho, para $f, g \in \mathscr{A}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene :

$$f + g \in \mathscr{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathscr{A} \quad \text{y} \quad f \times g \in \mathscr{A}.$$

— $\mathscr{A}$ separa los puntos : sean $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Se supone que $x_1 \neq x_2$, sea $u \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ tal que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (claramente tal función existe !), sea v la función en Y constante igual a 1. Entonces f definida por $f(x,y) = u(x) \cdot v(y)$ está en $\mathscr{A}$ y $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$, entonces necesariamente $y_1 \neq y_2$ y se hace un razonamiento similar.

— Para todo $(x,y) \in X \times Y$ existe una función $f \in \mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq 0$: se toma la función f constante igual a 1 que está en $\mathscr{A}$.

Por el teorema de Stone-Weierstrass $\mathscr{A}$ es denso en $\mathscr{C}(X \times Y, \mathbb{R})$, para la norma uniforme.

Solución del ejercicio 7373 ▲002412

1. Para $f \in \mathscr{F}$, por el teorema de incrementos finitos, para todo $t_0, t \in [a,b]$ existe $c \in]t_0, t[$ tal que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Entonces $|f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0|$. Se fija $t_0 \in [a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$, sea $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$, entonces
$$\forall t \in [a,b], \ |t - t_0| \leqslant \eta, \ \Rightarrow \ |f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0| \leqslant \varepsilon.$$
Lo es exactamente la equicontinuidad de $\mathscr{F}$ en t_0. Como se puede tomar para t_0 cualquier punto de $[a,b]$, entonces $\mathscr{F}$ es equicontinua.
2. (a) Denotemos $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\|$. Así al escribir $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ como arriba demostramos la equicontinuidad de $\mathscr{H}$ en x_0, luego en todas partes.

   (b) Denotemos $\mathscr{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Entonces por hipótesis, $\mathscr{H}(0) \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$. Así $\bar{\mathscr{H}}(0)$ es un cerrado de $\bar{B}(0, \sqrt{2})$ que es compacto (se está en $\mathbb{R}^n$), por lo que $\bar{\mathscr{H}}(0)$ es también compacto, de donde $\mathscr{H}(0)$ relativamente compacto. Ahora se tiene $\|f_n(x) - f_n(0)\| \leqslant L\|x - 0\|$ por lo que $\|f_n(x)\| \leqslant L\|x\| + \sqrt{2}$. Entonces, para x fijo, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$, lo que implica $\mathscr{H}(x)$ es relativamente compacto.

   (c) Como $\mathbb{R}^n$ no es compacto, no podemos aplicar directamente el teorema de Ascoli. Sea $B_R = \bar{B}(0, R)$ que es un compacto de $\mathbb{R}^n$. Denotemos $\mathscr{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restricción de $\mathscr{H}$ a B_R. Entonces por el teorema de Ascoli, $\mathscr{H}_R$ es relativamente compacto. Así de la sucesión $(f_{n|B_R})_n$ se puede extraer una sub-sucesión convergente (sobre B_R).

(d) Para $R=1$ se extrae de $(f_n)_n$ una sub-sucesión $(f_{\phi_1(n)})_n$ que converge en B_1. Para $R=2$, se extrae de $(f_{\phi_1(n)})_n$ una sub-sucesión $(f_{\phi_2(n)})_n$ que converge en B_2. Luego por recurrencia para $R=N$, se extrae de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ una sub-sucesión $(f_{\phi_N(n)})_n$ que converge en B_N. Entonces la sucesión $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge en $\mathbb{R}^n$. Este es el proceso diagonal de Cantor. De hecho, sea $x\in\mathbb{R}^n$ y sea $N\geqslant \|x\|$. Entonces $x\in B_N$, por lo tanto $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge a $f(x)$, pero $(f_{\phi_n(n)})_{n\geqslant N}$ es extraída de $(f_{\phi_N(n)})_n$, por lo tanto $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge también a $f(x)$. Se viene de demostrar que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplemente a f en todo $\mathbb{R}^n$.

Solución del ejercicio 7374 ▲002413

1. (a) Sea (x_n) una sucesión que converge en a, entonces

$$|f_n(x_n)-b|\leqslant |f_n(x_n)-f_n(a)|+|f_n(a)-b|.$$

   (b) Sea $\varepsilon>0$, existe N_1 tal que para $n\geqslant N_1$ se tiene $|f_n(a)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

   (c) (f_n) es equicontinua en a, entonces existe $\eta>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\in E$, $(|x-a|<\eta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(a)|<\frac{\varepsilon}{2})$.

   (d) Como $x_n\to a$, entonces existe N_2 tal que para $n\geqslant N_2$ se tiene $|x_n-a|<\eta$.

   (e) Entonces, para $n\geqslant \max(N_1,N_2)$ se tiene $|f_n(x_n)-b|\leqslant |f_n(x_n)-f_n(a)|+|f_n(a)-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Así $(f_n(x_n))$ converge a b.

2. Sean las funciones reales definidas por $f_n(x)=(1+x)^n$. Tomemos $x_n=\frac{1}{n}$, entonces $x_n\to a=0$. Sin embargo, $f_n(a)=f_n(0)=1$, para todo n. Pero $f_n(x_n)=f_n(\frac{1}{n})=(1+\frac{1}{n})^n$ converge a e. Por lo tanto, la equicontinuidad es muy necesaria.

Solución del ejercicio 7375 ▲002414

Denotemos G el conjunto de los $x\in E$, para los cuales $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en F. Sea (x_n) una sucesión de elementos de G que converge a $x\in E$. Es necesario demostrar $x\in G$, es decir que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy de F. Se escribe para $p,q,n\in\mathbb{N}$,

$$\|f_p(x)-f_q(x)\|\leqslant \|f_p(x)-f_p(x_n)\|+\|f_p(x_n)-f_q(x_n)\|+\|f_q(x_n)-f_q(x)\|.$$

Sea $\varepsilon>0$, como (f_n) es equicontinua en x, existe $\eta>0$ tal que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall y\in E,\ \|x-y\|<\eta \ \Rightarrow\ \|f_n(x)-f_n(y)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $x_n\to x$ existe $N\geqslant 0$ tal que $\|x_N-x\|<\eta$, entonces

$$\forall p,q\geqslant N,\ \|f_p(x_N)-f_p(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ y }\ \|f_q(x_N)-f_q(x)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

En fin N es fijo, $x_N\in G$, la sucesión $(f_n(x_N))_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $N'\geqslant N$ tal que para $p,q\geqslant N'$ se tiene,

$$\|f_p(x_N)-f_q(x_N)\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

El resultado de todas estas desigualdades es, por lo tanto

$$\forall p,q\geqslant N'\ \|f_p(x)-f_q(x)\|<\varepsilon.$$

Entonces $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto $x\in G$ y G es cerrado.

Solución del ejercicio 7376 ▲002415

---

1. (a) Hay que demostrar que A es abierto. Sea $x \in A$, entonces $\mathscr{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathscr{H}\}$ es acotada, se denota M una cota. Se va a escribir la equicontinuidad : para $\varepsilon = 1$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\forall f \in \mathscr{H},\ \forall y \in E,\ (\|x-y\| < \eta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| < 1).$$

Pero si $|f(x)-f(y)| < 1$, entonces $|f(y)| < |f(x)|+1 \leqslant M+1$. Por lo tanto, se ha demostrado

$$\forall f \in \mathscr{H},\ \forall y \in E,\ (y \in B(x,\eta) \Rightarrow |f(y)| < M+1).$$

Entonces $B(x,\eta) \subset A$ y A es abierto.

(b) Demostrar que A es cerrado. Sea (x_n) una sucesión de elementos de A que converge a $x \in E$. Se retoma $\varepsilon = 1$ y se obtiene un η por equicontinuidad. Como $x_n \to x$, entonces existe N tal que $\|x_N - x\| < \eta$. Así para todo f en $\mathscr{H}$, $|f(x)-f(x_N)| < 1$; por lo tanto $|f(x)| < |f(x_N)|+1$. Así $x_N \in A$ y existe M tal $|f(x_N)|$ es acotada por M, para todo f en $\mathscr{H}$. Luego para todo $f \in \mathscr{H}$, $|f(x)| < M+1$ por lo que $x \in A$ y A es cerrado.

2. $x_0 \in A$, por lo tanto A es no vacío, como A es abierto y cerrado y E es conexo entonces $A = E$. por lo tanto para todo $x \in E$, $\mathscr{H}(x)$ es acotado en $\mathbb{R}$, por lo tanto $\overline{\mathscr{H}(x)}$ es un compacto de $\mathbb{R}$. Por el teorema de Ascoli, $\mathscr{H}$ es equicontinua y E es compacto entonces $\bar{\mathscr{H}}$ es compacto.

Solución del ejercicio 7377 ▲002416

1. (a) Para $t \geqslant 0$ fijado, entonces

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \operatorname{sen}\sqrt{t+4(n\pi)^2} = \operatorname{sen} 2n\pi\sqrt{1+\frac{t}{4n^2\pi^2}} = \operatorname{sen} 2n\pi(1+\frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2}+o(\frac{1}{n^2}))\\ &= \operatorname{sen}(2n\pi+\frac{t}{4n\pi}+o(\frac{1}{n})) = \operatorname{sen}(\frac{t}{4n\pi})+o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Así, cuando $n \to +\infty$, $f_n(t) \to 0$. Entonces (f_n) converge simplemente a 0.

(b) Para $n \geqslant 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{t+4n^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Para $t \geqslant 0$ fijo y $\varepsilon > 0$ dado, se establece $\eta = 4\pi\varepsilon$, entonces por la desigualdad de incrementos finitos

$$\forall n \geqslant 1,\ |t-t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t)-f_n(t')| \leqslant \frac{1}{4\pi}|t-t'| < \varepsilon.$$

Entonces (f_n) es una familia equicontinua.

2. Denotemos $\mathscr{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathscr{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, entonces según la convergencia simple, $\overline{\mathscr{H}(t)} = \mathscr{H}(t) \cup \{0\}$. Pero (f_n) no converge uniformemente (i.e. para la norma $\|\cdot\|_\infty$) hacia $f = 0$. En efecto, para n impar, se escribe $t_n = 5n^2\pi^2$, entonces $f_n(t_n) = \operatorname{sen}\sqrt{9n^2\pi^2} = \operatorname{sen}(3n\pi) = 0$. Para n par, se establece $t_n = \frac{\pi^2}{4}+2n\pi^2$, entonces

$$f_n(t_n) = \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+2n\pi^2+4n^2\pi^2} = \operatorname{sen}\sqrt{(\frac{\pi}{2}+2n\pi)^2} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1.$$

Así para todo n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Se supone que $\mathscr{H}$ sea relativamente compacto, entonces de la sucesión (f_n) se puede extraer una sub-sucesión que converge, necesariamente el límite es $f = 0$, pero como para todo n, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, se obtiene una contradicción. Por supuesto el teorema de Ascoli no falla, porque se verifican todas las hipótesis excepto $E = [0,+\infty[$ que no es compacto.

Solución del ejercicio 7378 ▲002417

1. k es continua en el compacto $[a,b]\times[a,b]$, entonces es uniformemente continua. Se va a escribir esta continuidad uniforme en el caso particular donde las segundas coordenadas son iguales :

$$\forall \varepsilon'>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x,y,t\in[a,b],\ \ |x-y|<\eta \Rightarrow |k(x,t)-k(y,t)|<\varepsilon'.$$

2. Como (f_n) es acotada existe $M>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Se fija $x\in[a,b]$. Sea $\varepsilon>0$, se escribe $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, por la continuidad uniforme de k, se obtiene un $\eta>0$, tal que si $|x-y|<\eta$, $|k(x,t)-k(y,t)|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$. Así para $|x-y|<\eta$,

$$\begin{aligned}|Kf_n(x)-Kf_n(y)| &\leqslant \int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|\|f_n\|_\infty dt \leqslant M\int_a^b |k(x,t)-k(y,t)|dt\\ &\leqslant M\int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)}dt \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Lo que es la equicontinuidad de (Kf_n) en x. Como esto es válido cualquiera que sea $x\in[a,b]$, entonces (Kf_n) es equicontinua.

3. Denotemos $\mathscr{H}=(Kf_n)_n$, para x dado $\mathscr{H}(x)$ es acotado porque $\int_a^b k(x,t)f_n(t)dt| \leqslant M\int_a^b |k(x,t)|dt$ es acotada independientemente de $n\in\mathbb{N}$. Entonces $\overline{\mathscr{H}(x)}$ es un cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, por lo tanto un compacto. Así, se verifican todas las hipótesis para aplicar el teorema de Ascoli, por lo tanto $\mathscr{H}=(Kf_n)_n$ es relativamente compacto y de la sucesión (Kf_n) se puede extraer una sub-sucesión convergente. (Cuidado el límite de esta sub-sucesión está en $\overline{\mathscr{H}}\subset X$ y no necesariamente en $\mathscr{H}$.)

Solución del ejercicio 7382 ▲002681

Utilizando las relaciones de Cauchy, se encuentra fácilmente

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}\ \text{ y }\ \frac{\partial Q}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

Estas condiciones son verificadas por la función $\log(z)$. Su derivada es $1/z$.

Solución del ejercicio 7383 ▲002682

La función f es meromorfa como composición de funciones meromorfas. Su único polo es -1. El contorno está completamente incluido en el dominio Ω y se tiene

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f,-1) = 2i\pi\left[\exp((a-1)\log z\right]_{z=-1} = 2i\pi \mathrm{e}^{i(a-1)\pi} = -2i\pi\mathrm{e}^{ia\pi}.$$

Denotemos γ el pequeño círculo (orientado negativamente), Γ el gran círculo (orientado positivamente) en C, y se observa que en el segmento $[\varepsilon,R]+0i$, el argumento de z debe tomarse nulo, mientras que debe tomarse igual a 2π en el segmento opuesto $[R,\varepsilon]-0i$. Se obtiene

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{1+x}dx+\int_\Gamma f(z)\,dz+\int_R^\varepsilon \frac{x^{a-1}\mathrm{e}^{i2\pi(a-1)}}{1+x}dx+\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to 0$, $\int_\gamma f \to 0$ y $\int_\Gamma f \to 0$, por los lemas de Jordan, pues $|zf(z)| \to 0$, cuando $|z| \to 0$ o $+\infty$. Finalmente,

$$\int_C f(z)\,dz \to (1-\mathrm{e}^{i2\pi a})I$$

y entonces

$$I = \frac{-2i\pi \mathrm{e}^{ia\pi}}{1-\mathrm{e}^{i2\pi a}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Solución del ejercicio 7384 ▲002783

Es suficiente verificar que f es derivable en el sentido complejo. Para todo $z \neq 0$:

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{z}}{w-z} = \lim_{w\to z} \frac{1}{w-z}\left(\frac{z-w}{wz}\right) = -\frac{1}{z^2}\,.$$

La función f es de hecho holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, con $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Solución del ejercicio 7385 ▲002784

Se considera el producto fg. Usando la definición misma de la derivada, se tiene :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)\right) &= f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + g(z)\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\ &\longrightarrow f(z)g'(z)+g(z)f'(z), \text{ cuando } h\to 0.\end{aligned}$$

De otra manera :

$$\begin{aligned}f(z+h)g(z+h) &= (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))(g(z)+g'(z)h+h\varepsilon(h))\\ &= f(z)g(z)+(f(z)g'(z)+f'(z)g(z))h+h\varepsilon(h)\,.\end{aligned}$$

De donde $(fg)'(z) = f(z)g'(z)+f'(z)g(z)$.

Solución del ejercicio 7386 ▲002785

De la misma manera que para la solución del ejercicio 7385 se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)}{g(z+h)} &= \frac{f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h)}{g(z)\left(1+\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)} = (f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h))\frac{1}{g(z)}\left(1-\frac{g'(z)}{g(z)}h+h\varepsilon(h)\right)\\ &= \frac{f(z)}{g(z)} + \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}h+h\varepsilon(h)\end{aligned}$$

si $g(z)\neq 0$.

Solución del ejercicio 7387 ▲002786

Se utiliza de nuevo la definición de la derivada, primero para f en z, luego para g en el punto $f(z)$:

$$f(z+h) = f(z)+f'(z)h+h\varepsilon(h).$$

Denotemos $w_h = f'(z)h + h\varepsilon(h)$. Entonces (y como en los ejercicios precedentes se utiliza « epsilon » para cualquier función que tienda a cero cuando su variable tiende a cero) :

$$g(f(z+h)) = g(f(z)+w_h) = g(f(z)) + g'(f(z))w_h + w_h\varepsilon(w_h).$$

Así :

$$\frac{1}{h}\big(g(f(z+h)) - g(f(z))\big) = \big(g'(f(z)) + \varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, se tiene $w_h \to 0$, por lo tanto $\varepsilon(w_h) \to 0$ y por otra parte $\frac{w_h}{h} \to f'(z)$. Finalmente,

$$(g\circ f)'(z) = \lim_{h\to 0}\big(g'(f(z)) + \varepsilon(w_h)\big)\frac{w_h}{h} = g'(f(z))f'(z).$$

Solución del ejercicio 7388 ▲002787

La fórmula de Leibniz se demuestra por recurrencia. El caso $n=1$, es decir $(fg)' = fg' + f'g$, se ha demostrado en el ejercicio 7385. Se supone entonces que esta fórmula sea cierta al rango $n \geqslant 1$. En este caso,

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz}\left((fg)^{(n)}\right)(z) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{f^{(j+1)}(z)g^{(n-j)}(z) + f^{(j)}(z)g^{(n-j+1)}(z)\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(z)g^{(n+1-j)}(z).\end{aligned}$$

La conclusión viene del hecho : $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ que es fácil de comprobar.

Solución del ejercicio 7389 ▲002788

Tomemos $r < \min(R_1, R_2)$. Entonces, existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $|a_n|r^n \leqslant C\lambda^n$ y $|b_n|r^n \leqslant C\lambda^n$ (verificarlo !). De donde

$$\sum_{j=0}^{n}|a_j|r^j|b_{n-j}|r^{n-j} \leqslant (n+1)C^2\lambda^n\ ,$$

lo que permite afirmar, para todo z, con $|z| = r$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}|a_jz^j||b_{n-j}z^{n-j}|\Big) < \infty\ .$$

Por el teorema del curso en las series doble (ver el folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol, Anexo 8.2), esto quiere decir que la serie doble

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_jz^jb_kz^k)$$

es absolutamente convergente. Entonces, por este teorema, se puede decir :

$$f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}(a_jz^j)(b_{n-j}z^{n-j})\Big)\ .$$

Por tanto, la serie de la derecha es $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, con $c_n = \sum_{j=0}^{n}a_jb_{n-j}$. Por cierto, se tiene que el radio de convergencia de esta serie es al menos igual a r. Como $r < \min(R_1, R_2)$ es arbitrario, el radio de convergencia es de hecho al menos igual a $\min(R_1,R_2)$ (puede ser más grande como se ve por ejemplo con $f(z)=\frac{1}{1-z}$ y $g(z)=1-z$, o aún con $f(z)=\frac{2-z}{(1-z)(3-z)}$ y $g(z)=\frac{1-z}{(2-z)(3-z)}$).

Solución del ejercicio 7390 ▲002789

Es suficiente usar la fórmula de Leibniz del ejercicio 7388 y el hecho que el coeficiente a_n del desarrollo de f en el origen es $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Solución del ejercicio 7391 ▲002790

La función $f(z)=\bar{z}$ no es derivable en ninguna parte en el sentido complejo (y así en ninguna parte holomorfa) : pues

$$\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z)) = \frac{\overline{h}}{h}$$

y el límite de esta expresión no existe cuando $h \to 0$.

Observación. Más generalmente, una aplicación $\mathbb{R}$–lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es de la forma

$$w \mapsto \alpha w + \beta \overline{w} \tag{41}$$

(es solo una escritura compleja de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$); tal aplicación es holomorfa si y solo si $\beta = 0$. Esta es exactamente la diferencia entre diferenciabilidad (por lo tanto real) y holomorfía (derivabilidad en sentido complejo). En efecto, las ecuaciones de Cauchy–Riemann son equivalentes a la ecuación $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$, donde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Es una reescritura compleja de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. Si se tiene una función f diferenciable, entonces su diferencial $Df(z)$ es una aplicación lineal de la forma (41). Un simple cálculo muestra que en este caso

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \quad y \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

con $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. De nuevo, f es complejo diferenciable en z si y solo si $\beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$. En este caso $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

Volvamos al ejercicio. Si se está de acuerdo con el comentario, entonces está también de acuerdo sobre el hecho que :

$$z \mapsto x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

no es holomorfa. Este razonamiento también se aplica a $z \mapsto y$. Se volverá a este tipo de aplicación en el ejercicio 7393.

Solución del ejercicio 7392 ▲002791

Para evitar el razonamiento topológico, se supone primero que Ω sea un disco, por ejemplo la unidad de disco $\Omega = D = D(0,1)$, y demostrar que f es constante e igual a $f(0)$. Si $z \in D$, entonces el segmento $[0,z] \subset D$ (y es por esta razón que tomamos $\Omega = D$). Se puede escribir

$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(z)\,dz = 0.$$

Solamente, aquí es necesario explicar el significado de esta integral (no conocido por el instante). Sea $\gamma:[0,1]\to[0,z]$, $\gamma(t)=tz$, una parametrización del segmento $[0,z]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^z f'(w)\,dw &= \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 f'(tz)z\,dt\\ &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(f'(tz)z\right)dt + i\int_0^1 \mathrm{Im}\left(f'(tz)z\right)dt = 0.\end{aligned}$$

Para el caso de un abierto conexo Ω cualquiera que sea el razonamiento anterior muestra que en un vecindario de todo punto $z_0\in\Omega$ la función f es constante. Por lo tanto, es una propiedad abierta. Dicho de otra manera, si $z_0\in\Omega$ es un punto arbitrario, el conjunto

$$\mathscr{E}=\{z\in\Omega;\ \ f(z)=f(z_0)\}$$

es un abierto. Para concluir, se debe establecer que $\mathscr{E}$ es también un cerrado de Ω (¡topología inducida!). Por lo tanto esto es evidente ya que $\mathscr{E}=f^{-1}(\{f(z_0)\})$ y f es continua. Denotemos que $\mathscr{E}\neq\varnothing$ ya que $z_0\in\mathscr{E}$. Los únicos conjuntos tanto abiertos como cerrados de los conexos Ω es el conjunto vacío y Ω, se tiene $\Omega=\mathscr{E}$. La función f es constante en Ω. Si Ω no es conexo, f puede tomar diferentes valores en las diferentes componentes conexas de Ω.

Solución del ejercicio 7393 ▲002792

Sea $f(z)=u(z)+iv(z)$, para $z\in U$. Si f solo toma valores reales, entonces $v\equiv 0$. Se saca de las ecuaciones de Cauchy–Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0.\end{aligned}$$

La derivada de f es entonces idénticamente nula en el abierto conexo Ω, lo que implica f es constante (ver el ejercicio 7392).

Solución del ejercicio 7394 ▲002793

1. La fórmula de Taylor con resto integral es

$$g(b)=g(a)+g'(a)(b-a)+\cdots+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\,dt,$$

luego se reemplaza con $a=0$ y $b=1$.

2. Si $f'=f$ y si f es n–veces derivable en el sentido complejo, entonces $\lim\limits_{h\to0}(f^{(n)}(z+h)-f^{(n)}(z))/h=\lim\limits_{h\to0}(f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z))/h=f^{(n)}(z)$. Por inducción, se deduce, por un lado, que f es infinitamente derivable y, por otra parte, que $f^{(n)}(z)=f(z)$, para todo $n\geqslant 0$. En particular, $f^{(n)}(0)=1$, para todo $n\geqslant 0$. Usando la fórmula de Taylor de la pregunta anterior se tiene

$$\begin{aligned}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| &\leqslant |z|^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}|f^{(n+1)}(uz)|\,du\\ &\leqslant |z|^{n+1}\sup_{|w|\leqslant|z|}|f^{(n+1)}(w)|\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}\,du\leqslant \sup_{|w|\leqslant|z|}|f(w)|\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Esta última expresión tiende a 0, cuando $n\to\infty$. De donde $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$.

3. Se fija $z \in \mathbb{C}$ y denotar $a_k = \frac{z^k}{k!}$. Entonces :

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |z|\frac{1}{k+1} \to 0,$$

cuando $k \to \infty$. Se deduce que el radio de convergencia de esta serie es ∞ (d'Alembert) y que F es holomorfa en $\mathbb{C}$. Además :

$$F'(z) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{kz^{k-1}}{k!} = F(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema de las series dobles (de hecho el ejercicio 7389)

$$\begin{aligned} F(z)F(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} z^j w^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = F(z+w). \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7395 ▲002794

No $\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n| = +\infty$, pero no hay razón para que $\liminf_{n\to\infty} |a_n z^n| = +\infty$. Se toma por ejemplo la serie : $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, radio de convergencia $R = 1$, pero $(|a_n z^n|)$ no tiene límite (el valor es 0, para n impar y $|z|^n$, para n par, que tiende a infinito cuando $|z| > 1$).

Solución del ejercicio 7396 ▲002795

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k && \text{para } |z| < 1. \\ \frac{1}{(1-z)^2} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} && \text{para } |z| < 1. \\ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7397 ▲002796

Discutir primero el radio de convergencia. Por otro lado, que se aplica igualmente a los siguientes ejercicios. Entonces, por el teorema de analiticidad de las funciones holomorfas (ver el folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol : teorema 10 del capítulo 6), si f es holomorfa en $U \subset \mathbb{C}$, si $z_0 \in U$ y si $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset U$, entonces la serie de Taylor de f en z_0 converge y su suma es f en este disco $D(z_0, r)$. Aquí $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Esta función es holomorfa en $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$. En consecuencia, si $z_0 \in U$, entonces la serie de Taylor de f en z_0 vale f en el disco $D(z_0, R_1)$ si $R_1 = |z_0 - 1|$. El cálculo de la serie es clásico :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - 1} = \frac{1}{z_0 - 1} \frac{1}{1 - \left(\frac{z_0 - z}{z_0 - 1}\right)} = \frac{1}{z_0 - 1} \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{z_0 - z}{z_0 - 1}\right)^k,$$

para $|z - z_0| < |z_0 - 1| = R_1$.

Solución del ejercicio 7398 ▲002797

La función $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ es holomorfa en $U=\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Por lo que se acaba de decir en el ejercicio anterior, el radio de convergencia solicitado es $R=\min\{|z_0-1|,|z_0-2|\}$, donde $z_0\in U$ es un punto arbitrario fijo. Se tiene $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$ y :

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-z_0+z_0-2}=\frac{1}{z_0-2}\frac{1}{1-\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)}=\frac{1}{z_0-2}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z_0-z}{z_0-2}\right)^k$$

para $|z-z_0|<|z_0-2|=R_2$. La serie solicitada es entonces la diferencia entre esta y la del ejercicio anterior. Denotar también que el radio de convergencia es exactamente el mínimo de los radios R_1 y R_2.

Solución del ejercicio 7400 ▲002799

El radio de convergencia es $R=1$. Sea $0<t<1$ y estudiar $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{2^k}$. Se trata de una serie de términos positivos. De donde

$$f(t)\geqslant\sum_{k=0}^{N-1}t^{2^k},\quad \text{para todo } N\in\mathbb{N}.$$

Resulta $\liminf_{t\to 1}f(t)\geqslant N$ pero N es arbitrario, por lo tanto $\lim_{t\to 1}f(t)=\infty$. Sea ahora w un número complejo del círculo unitario que satisface $w^{2^N}=1$, para un $N\in\mathbb{N}$. En este caso $w^{2^k}=1$, para todo $k\geqslant N$. Si otra vez $0<t<1$, entonces

$$f(tw)=\sum_{k=0}^{N-1}(tw)^{2^k}+\sum_{k\geqslant N}t^{2^k}.$$

Cuando $t\to 1$, entonces la primera suma tiende a un número complejo (finito, de hecho, de módulo como máximo N) y la segunda a ∞. Los números complejos w teniendo la propiedad $w^{2^N}=1$ para cierto $N\in\mathbb{N}$ son densos en el círculo unidad $\{|z|=1\}$. Esto, y el principio de extensión analítica, prohíbe la existencia de la función g holomorfa en U como se describe en el ejercicio. Si $z_0\in D(0,1)$, entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en z_0 es $R=1-|z_0|$.

Solución del ejercicio 7403 ▲002802

Se trata de fórmulas bien conocidas cuando los argumentos z,w son reales. La verificación a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas dadas en el enunciado del ejercicio se deja al lector. Veamos cómo obtener la fórmula :

$$\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w),\quad \text{para } z,w\in\mathbb{C}. \tag{42}$$

Se fija $w\in\mathbb{R}$. Sea $f_w(z)=\cos(z+w)-\big(\cos(z)\cos(w)-\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)\big)$. La fórmula (42) es cierta para $z,w\in\mathbb{R}$, $f_w(z)=0$, para todo $z\in\mathbb{R}$. Se deduce del principio de ceros aislados que f_w es idénticamente nula. Dicho de otra manera, se acaba de establecer la fórmula (42) para $(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Es suficiente ahora rehacer el mismo argumento fijando primero $z\in\mathbb{C}$ arbitrariamente y observando que la función holomorfa

$$g_z(w)=\cos(z+w)-(\cos(z)\cos(w)-\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$$

es nula para todo $w\in\mathbb{R}$. De nuevo $g_z\equiv 0$ por el principio de ceros aislados, de ahí la fórmula (42) para todo $z,w\in\mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 7404 ▲002803

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a)ch(b)+i\cos(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{1}{4i}\{(\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{-ia})(\mathrm{e}^{b}+\mathrm{e}^{-b})-(\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{-ia})(\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{-b})\}\\ &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ia-b}-\mathrm{e}^{-ia+b}\right)=\operatorname{sen}(a+ib).\end{aligned}$$

Si $a,b\in\mathbb{R}$, entonces :

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen}(a+ib)|^2 &= (\operatorname{sen}(a)\operatorname{ch}(b))^2+(\cos(a)\operatorname{sh}(b))^2\\ &= \operatorname{sen}^2(a)(1+\operatorname{sh}^2(b))+(1-\operatorname{sen}^2(a))\operatorname{sh}^2(b)\\ &= \operatorname{sen}^2(a)+\operatorname{sh}^2(b).\end{aligned}$$

Esta suma de cuadrados de números reales, solo puede ser cero si $\operatorname{sen}(a)=0$ y $\operatorname{sh}(b)=0$, es decir $a\in\pi\mathbb{Z}$ y $b=0$. Entonces $\operatorname{sen}(z)=0 \iff z\in\pi\mathbb{Z}$.

Solución del ejercicio 7448 ▲007214

Aquí se tiene $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, donde $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$ y $v(x,y)=0$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. Se tiene $\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0$ y $\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$ sobre $\mathbb{R}^2$. En el punto $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

y

$$\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0.$$

Entonces u es derivable con respecto a la primera y la segunda variable en $(0,0)$ y además $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$. En particular f verifica las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

2. La función f no es $\mathbb{C}$–derivable en 0 porque para $h\in\mathbb{R}_+^*$ se tiene

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$$

y

$$\frac{f(h+ih)-f(0)}{h+ih}=\frac{\sqrt{|h^2|}}{h+ih}=\frac{h}{h+ih}=\frac{1}{1+i}.$$

Las dos cantidades no tienen el mismo límite cuando $h\to 0$.

3. Esto no es una contradicción con el teorema de Cauchy–Riemann porque la función u (y por lo tanto, la función f) no es diferenciable en $(0,0)$. En efecto, si u es diferenciable en $(0,0)$ se tiene

$$\begin{aligned}u(s,t) &= u(0,0)+du_{(0,0)}(s,t)+o(\|(s,t)\|)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+t\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)+o(\|(s,t)\|)\\ &= o(\|(s,t)\|).\end{aligned}$$

Por lo tanto $u(s,s)=|s|$ que no es un $o(\|(s,s)\|)$ por lo tanto, hay una contradicción.

Solución del ejercicio 7509 ▲002806

Se tienen las ecuaciones de Cauchy–Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. De donde :

$$\Delta u=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

por el teorema de Schwarz. Se procede de la misma manera con v, para deducir que una función holomorfa es armónica.

Solución del ejercicio 7510 ▲002807

Este ejercicio y los siguientes se refieren a cambios de variables. Recordar que, si $\Phi : U \to V$ es un difeomorfismo entre abiertos U,V de $\mathbb{R}^n$ y si se denota $y=\Phi(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in U$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)\in V$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j},$$

para todo $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Se tiene $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$. Así

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y}=-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}.$$

Se puede reescribir esto como :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix},\quad \text{con } M=(Jac(f))^t=\begin{pmatrix}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta)}{\partial r}\\ \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta}\end{pmatrix}.$$

Para encontrar los $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ en función de $\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial \theta}$ solo se invierte esta matriz M. El resto es claro.

Solución del ejercicio 7511 ▲002808

Se tiene $w=g(z)$, con $g(z)=a(z)+ib(z)$ una función holomorfa y con $z=x+iy$. Utilizar de nuevo el cambio de coordenadas :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial a(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial b(z)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial b},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial a(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial b(z)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial b}.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann se deduce

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}&=\left(\frac{\partial a(z)}{\partial x}+i\frac{\partial a(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial a}+\left(\frac{\partial b(z)}{\partial x}+i\frac{\partial b(z)}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial b}\\ &=\left(\frac{\partial a(z)}{\partial x}-i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial a}+\left(\frac{\partial b(z)}{\partial x}+i\frac{\partial a(z)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial b}\\ &=\left(\frac{\partial a(z)}{\partial x}-i\frac{\partial b(z)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}\right).\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7513 ▲002810

Sea Q el cuadrado cuyo borde es $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_4$, donde

$$\gamma_1(t) = A + 2it, \quad \gamma_2(t) = B - 2t, \quad \gamma_3(t) = C - 2it, \quad y \quad \gamma_4(t) = D + 2t,\ t \in [0,1].$$

Se denota también $\gamma_{j,x} = \mathrm{Re}(\gamma_j)$ y $\gamma_{j,y} = \mathrm{Im}(\gamma_j)$, $j = 1,\ldots,4$, entonces :

$$\int_\gamma dx = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma'_{j,x}(t)\, dt = 0$$

y

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\, dx &= \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} x\, dx = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma'_{j,x}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt = 0.\end{aligned}$$

Se pasa a responder la pregunta 3. Así

$$\int_\gamma dz = \int_\gamma z\, dz = 0$$

ya que en ambos casos se integra una función holomorfa ($f(z) \equiv 1$ y $f(z) = z$) en el cuadrado Q. Se tiene :

$$\begin{aligned}\int_\gamma x\, dz &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t) d\gamma_j(t) = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \gamma_{j,x}(t)\gamma'_j(t)\, dt \\ &= \int_0^1 2idt + \int_0^1 (1-2t)(-2)dt + \int_0^1 (-1)(-2i)dt + \int_0^1 (-1+2t)2dt \\ &= 2i + 2i = 4i.\end{aligned}$$

En lo que concierne a la pregunta 4., se integra la función $f_n(z) = z^n$ sobre el camino cerrado γ. Pero cuidado, esta función admite una primitiva solo si $n \neq -1$. De donde

$$\int_\gamma z^n dz = 0, \ \text{ para } \ n \neq -1.$$

En el caso restante $n = -1$ se encuentra :

$$\int_\gamma f_{-1}(z) dz = 2i\pi.$$

Por otro lado, y aquí nos encontramos con el ejercicio 7515, se tiene :

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_C f_n(z)\, dz$$

donde $C = \{|z| = 1\}$. Este círculo está parametrizado por $\sigma(\theta) = \mathrm{e}^{2i\pi\theta}$. De este modo :

$$\int_C f_n(z)\, dz = \int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi n\theta} 2i\pi \mathrm{e}^{2i\pi\theta}\, d\theta = 2i\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi(n+1)\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } \ n = -1 \\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

De manera análoga se tiene

$$\int_C \bar{z}^n\, dz = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2i\pi n\theta} 2i\pi \mathrm{e}^{2i\pi\theta}\, d\theta = 2i\pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi(1-n)\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Solución del ejercicio 7514 ▲002811

Para toda función $f = u + iv$, con valores en $\mathbb{C}$, se tiene :

$$\int_\gamma \overline{f(z)} dz = \int_0^1 (u - iv)(\gamma_1' + i\gamma_2') dt = \overline{\int_0^1 (u + iv)(\gamma_1' - i\gamma_2') dt} = \overline{\int_\gamma f(z) \overline{dz}}.$$

Ver la solución del ejercicio 7513.

Solución del ejercicio 7515 ▲002812

Ver la solución de ejercicio 7513.

Solución del ejercicio 7516 ▲002813

En el caso donde C no circunscribe el origen de la función $z \mapsto z^n$ es holomorfa en un vecindario del disco limitado por C y esto para todo $n \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, $\int_C z^n dz = 0$. Si no, se encuentran los valores previamente obtenidos. Se recuerda también que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{z} dz$$

es el índice $\mathrm{Ind}(C, 0)$ de la curva C, con respecto al origen. Este índice es 1, cuando C circundando el origen y 0 si no.

Solución del ejercicio 7517 ▲002814

Se tiene

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = 2i\pi \mathrm{Ind}(C, a).$$

Por tanto, $\mathrm{Ind}(C, a) = 0$ si $r < a$ y $\mathrm{Ind}(C, a) = 1$ si $r > a$. El mismo razonamiento se aplica a $\int_C \frac{1}{z-b} dz$, de ahí el resultado anunciado.

Solución del ejercicio 7518 ▲002815

Se tiene que

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z^{k-n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2k-n-1}.$$

Ahora $\int_C z^j\, dz \neq 0$ si y solo si $j = -1$. El único término en la suma anterior que da una contribución no nula a la integral es cuando k verifica $2k - n - 1 = -1$. Denotemos que esto es posible solo si n es un número par ! De donde :

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Si no, si $n=2k$ es par, se tiene :

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2k} \frac{dz}{z} = 2i\pi \binom{2k}{k}.$$

Como $\cos t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it})$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n t\, dt = \frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it})^n \frac{i\mathrm{e}^{it}\,dt}{i\mathrm{e}^{it}} = \frac{-i}{2^n}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

De donde $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = 0$ si n es impar y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2k} t\, dt = \frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k}.$$

Por periodicidad del coseno esto da :

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} t\, dt = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2^{2k-1}}\binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}.$$

Solución del ejercicio 7596 ▲002680

Se escribe $f(z)=\mathrm{e}^{xz}$, entonces $f^{(n)}(0)=x^n$, por lo tanto

$$x^n = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{\mathrm{e}^{xz}}{z^{n+1}}\,dz$$

de donde la fórmula solicitada por la multiplicación por $x^n/(n!)^2$. Sobre C, se tiene $|z|=1$, y por lo tanto, la serie $\sum x^n/(n!z^n)$ es uniformemente convergente con respecto a z (y su límite es por supuesto igual a $\mathrm{e}^{x/z}$). Entonces podemos invertir los signos $\sum$ y $\int$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C \frac{\mathrm{e}^{xz}}{z}\left(\frac{x^n}{n!z^n}\right)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}\mathrm{e}^{xz}\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\,dz\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{x(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})}\,i\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta, \quad (z=\mathrm{e}^{i\theta})\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2x\cos\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7611 ▲002672

Se escribe $\theta = 2\varphi$, y se obtiene

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{a\,d\theta}{2a^2+1-\cos\theta} = \int_C f(z)\,dz,$$

donde c es el círculo trigonométrico, $z=\mathrm{e}^{i\theta}$ y

$$f(z) = \frac{2ia}{z^2-2(2a^2+1)z+1} = \frac{2ia}{P(z)},$$

que tiene dos polos simples (raíces del denominador P), de los cuales solo uno es interior al círculo, o sea

$$\alpha = 2a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2+1}$$

Así

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,\alpha) = 2\pi i \frac{2ia}{P'(\alpha)} = \frac{-4\pi a}{2\alpha - 2(2a^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Solución del ejercicio 7612 ▲002673

El polinomio $P(z) = z^4 + z^2 + 1$ tiene como raíces, las raíces cuadradas de j y j^2, o sea $\pm j^2$ y $\pm j$. Solo j y $-j^2$ tienen una parte imaginaria positiva, por lo tanto

$$I = 2i\pi(\operatorname{Res}(1/P, j) + \operatorname{Res}(1/P, -j^2)) = 2i\pi\left(\frac{1}{P'(j)} + \frac{1}{P'(-j^2)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Luego se tiene

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx = (I-K)/2$$

Se tiene por el mismo método

$$K = 2i\pi\left(\frac{e^{2ij}}{P'(j)} + \frac{e^{2i(-j^2)}}{P'(-j^2)}\right)$$

Por lo tanto

$$e^{2ij} = \exp\left(2i\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = e^{-\sqrt{3}-i}$$

e igualmente $e^{2i(-j^2)} = e^{-\sqrt{3}+i}$. Finalmente,

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[1 - e^{-\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\operatorname{sen} 1 + \cos 1\right)\right].$$

Solución del ejercicio 7613 ▲002674

Se tiene, sabiendo que $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$:

$$W_n = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{2n+2}}\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz},$$

donde C es el círculo trigonométrico y $z = e^{i\theta}$. Usando

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$$

se tiene inmediatamente,

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\operatorname{Res}(f,0)$$

pues 0 es el único polo de f. El residuo es de hecho el coeficiente en $1/z$ en el desarrollo de f, es decir el coeficiente constante en $(z+1/z)^{2n}$, es decir por la fórmula binomial, C_{2n}^n. Entonces

$$W_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Solución del ejercicio 7614 ▲002675

Para $n \geqslant 1$, se tiene :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{2-\cos(t)}dt.$$

Se puede escribir

$$a_n = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}dt = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{C}}\frac{z^n}{2-\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{i\pi}\int_{\mathscr{C}}\frac{2z^n}{4z-z^2-1}dz$$
$$= 4\,\mathrm{Re}\sum_{\alpha} Res\left(\frac{z^n}{4z-z^2-1},\alpha\right).$$

Como $n \geqslant 1$, existe un único polo en el disco : el polo único $2-\sqrt{3}$. El residuo en este polo vale $\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ que es ya un número real. Se deduce que

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n.$$

El coeficiente a_0 se obtiene de la misma manera, pero hay que dividir por dos, dada la definición particular cuando $a=0$. Se obtiene por lo tanto $a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Finalmente, se tiene :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos nx\right].$$

Solución del ejercicio 7615 ▲002676

Se utiliza

$$\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\,\mathrm{sen}\,x\sinh y$$

Aquí se debe tener $\cos x\cosh y = a$ y $\mathrm{sen}\,x\sinh y = 0$. La última ecuación implica $x=0$ o π, o $y=0$. La solución $y=0$ no sirve, porque ningún número real tiene por coseno $a>1$. Entonces es necesario que $x=0$, y $\cosh y = a$ o bien $x=\pi$ y $\cosh y = -a$. Esta última ecuación no tiene soluciones ($\cosh y \geqslant 1$, para todo y). Las soluciones son, por lo tanto $z = \pm i\arg\cosh a$. Su seno es $\mathrm{sen}\,x\cosh y + i\cos x\sinh y = i\sinh y$ aquí, sea $\pm i\sqrt{a^2-1}$ (pues $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$). Se tiene entonces, poniendo $f(z) = 1/[(1+z^2)(2-\cos z)]$ (función par) :

$$I_a = i\pi\mathrm{Res}(f,i) + i\pi\mathrm{Res}(f,i\arg\cosh a)$$

pues i y $i\arg\cosh a$ son los dos únicos polos de f parte imaginaria >0. Así

$$\mathrm{Res}(f,i) = \left(\frac{1}{2z(a-\cos z)}\right)_{z=i} = \frac{1}{2i(a-\cosh 1)}$$
$$\mathrm{Res}(f,i\arg\cosh a) = \left(\frac{1}{(1+z^2)\,\mathrm{sen}\,z}\right)_{z=i\arg\cosh a} = \frac{1}{i(1-\arg\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}},$$

por lo que

$$I_a = \frac{\pi}{(1-\arg\cosh^2 a)\sqrt{a^2-1}} + \frac{\pi}{2(a-\cosh 1)}.$$

Solución del ejercicio 7616 ▲002677

En el lado $[R, R+i\pi]$, la función $f(z) = \mathrm{e}^{az}/\cosh z$ es mayorada en módulo par

$$\frac{\mathrm{e}^{aR}}{|\cosh(R+iy)|} = \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\cosh^2 R - \operatorname{sen}^2 y} < \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\cosh^2 R - 1} \to 0, \text{ cuando } R \to \infty$$

Igualmente en el otro lado. La integral del lado $[R+i\pi, -R+i\pi]$ vale $\mathrm{e}^{ia\pi}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.
La función f tiene un solo polo en el rectángulo, que es $i\pi/2$. Entonces en el límite

$$(1+\mathrm{e}^{ia\pi})I = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi/2) = 2i\pi\frac{\mathrm{e}^{ia\pi}}{i} = 2\pi\mathrm{e}^{ia\pi}$$

y el resultado se tiene dividiendo.

Solución del ejercicio 7617 ▲002678

Se integra $f(z) = \mathrm{e}^{2iaz-z^2}$ en el rectángulo. No existe ningún polo, entonces la integral sobre el rectángulo es nula; la integral en el lado $[R, R+ia]$ tiende a cero. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2iax-x^2}\,dx &= \int_{[0,ia]} f(z)\,dz + \int_{[ia,ia+\infty]} f(z)\,dz \\ &= \int_0^a \mathrm{e}^{-2ay+y^2}\,i\,dy + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(ia-x)(ia+x)}\,dx \\ &= i\int_0^a \mathrm{e}^{y^2-2ay}\,dy + \mathrm{e}^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

de donde el resultado se tiene manteniendo solo la parte real.

Solución del ejercicio 7618 ▲002679

— El borde del cuarto de disco está formado por tres partes : el segmento $[0,a]$, el cuarto de círculo, y el segmento $[ia,0]$. La integral sobre el cuarto de círculo tiende a cero cuando $a \to \infty$ (lema de Jordan), y escribiendo $z = iy$, se ve que

$$\int_{[ia,0]} zR(z^4)\,dz = \int_0^a yR(y^4)\,dy,$$

por lo que la integral sobre el contorno tiende a $2I$. Entonces I es igual a $i\pi$ veces la suma de los residuos de $zR(z^4)$ en el cuarto de plano $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

— Los polos son $\mathrm{e}^{i\pi/8}$ y $\mathrm{e}^{i3\pi/8}$ y se encuentra que $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

— Se integra igualmente en el contorno formado por el borde de $\{0 < \arg z < \frac{2\pi}{p}, 0 < |z| < a\}$. Se obtiene

$$\left(1-\mathrm{e}^{i2\pi\frac{n+1}{p}}\right)I = 2\pi i \sum_{\substack{\text{polos } z_k \\ 0<\arg z_k<\frac{2\pi}{p}}} \operatorname{Res}\left(z^n R(z^p), z_k\right).$$

La fórmula solo es interesante si el miembro izquierdo es no nulo, es decir si $n+1$ no es un múltiplo de p.

— En este caso, es necesario por lo tanto $p \geqslant 2$. Se es forzado a tomar una potencia par, porque se supone R sin raíces reales : aquí $R(x) = 1/(1+x^2)$, y $n = 1$. Hay dos polos en el ángulo en cuestión, o sea $\mathrm{e}^{i\pi/2p}$ y $\mathrm{e}^{i3\pi/2p}$. El cálculo es similar al caso (b), y da

$$I_p = \frac{\pi}{2p \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{p}}.$$

Solución del ejercicio 7619 ▲002820

Sea $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. Entonces

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_0 - z}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{z_0^k} (z_0 - z)^k, \quad \text{para } |z - z_0| < |z_0|.$$

Notemos que $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < |z_0|\} = D(z_0, |z_0|)$ es óptimo porque no podemos extender $\mathrm{Log}(z)$ en 0. El desarrollo es :

$$f(z) = \mathrm{Log}(z_0) - \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k z_0^k} (z - z_0)^k.$$

En lo que concierne a la segunda pregunta, La respuesta es NO. Por el curso f coincide con su serie de Taylor si $D(z_0, R) \subset \Omega$. Por tanto, si $\mathrm{Re}(z_0) < 0$, este no es el caso y $D(z_0, |z_0|) \cap]-\infty, 0[\neq \varnothing$. El Log y la serie de Taylor no coinciden en $D(z_0, |z_0|) \cap \Omega$ porque el Log no puede extenderse continuamente en ningún punto de $]-\infty, 0[$. Se observa que aquí $D(z_0, |z_0|) \cap \Omega$ no es conexo, lo cual es crucial en el ejercicio 7622.

Solución del ejercicio 7620 ▲002821

Se tiene $\operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}) = 0$ si y solo si $\mathrm{e}^{2i\pi z} = 1$ que es el caso sí y solo si $z \in \pi\mathbb{Z}$. Sea $z_0 \in U = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Entonces, el radio de convergencia de la serie de Taylor de f es

$$R = \mathrm{dist}(z_0, \pi\mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |z_0 - \pi n|.$$

Solución del ejercicio 7621 ▲002822

Si $f(z)g(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces al menos una de las funciones f, g tiene un cero no aislado.

Solución del ejercicio 7622 ▲002823

Comenzar por dar el contraejemplo tomando $U = \Omega$, es decir $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, y $f = \mathrm{Log}$. Es suficiente entonces elegir $z_1 = -1 + i$ y $z_2 = -1 - i$ y aplicar el ejercicio 7619. Se supone ahora U convexo, se denota $D_i = D(z_i, R_i)$, $i = 1, 2$, y se supone que $V = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Las consecuencias inmediatas de la convexidad de U son :

(a) $U \cap D_1$ y $U \cap D_2$ son conexos (e incluso convexos).

(b) $[z_1, z_2] \subset U$ y entonces $V \cap U$ es un abierto no vacío. Se considera g_1. Si $r > 0$ es suficientemente pequeño para que $D(z_1, r) \subset U$, entonces $f = g_1$ en $D(z_1, r)$. Por el principio de continuación analítica (o la de ceros aislados) se tiene $f = g_1$ en el conexo $U \cap D_1$. Por lo tanto, es también cierto en $V \cap U \subset D_1 \cap U$. El mismo razonamiento se aplica a g_2 y entonces $g_1 = g_2$ en $V \cap U$. Una vez más, el principio de extensión analítica asegura, por lo tanto, que $g_1 = g_2$ en V (que es conexo).

Solución del ejercicio 7623 ▲002824

1. Sea $\phi(t,z) = \frac{z-1}{1+t(z-1)}$ y denotar $D = \{|z-1| < 1\}$. Para todo $t \in [0,1]$ y todo $z \in D$ se tiene
$$\phi(t,z) = (z-1)\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k t^k (z-1)^k.$$
Por lo tanto $|(-1)^k t^k (z-1)^k| \leqslant |z-1|^k$. Si $0 < r < 1$, entonces la serie anterior converge normalmente en $D(1,r)$ que permite tener (cf. El folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol, capítulo 15, teorema 29)
$$\int_0^1 \phi(t,z)dt = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k (z-1)^{k+1}\int_0^1 t^k dt = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}.$$
Esta serie es la serie de Taylor de $\mathrm{Log}(z)$ en 1 que coincide con $\mathrm{Log}(z)$ en el disco D. En consecuencia, $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ y $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ coinciden en D. Se concluye por extensión analítica y observando que $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ es una función holomorfa en Ω (cf. el folleto 2005/2006 de J.F. Burnol, capítulo 14, teorema 26). En lo que concierne al resto R_N aquí está el cálculo :
$$\begin{aligned}R_N(z) &= \int_0^1 \sum_{k\geqslant N}(-1)^k (z-1)^{k+1} t^k dt = (-1)^N \int_0^1 (z-1)^{N+1} t^N \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k (z-1)^k t^k dt\\ &= (-1)^N (z-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{1+t(z-1)}dt.\end{aligned}$$

2. Si $\mathrm{Re}(z) \geqslant \delta$, entonces
$$|1+t(z-1)| \geqslant |\mathrm{Re}(1+t(z-1))| = |1+t\,\mathrm{Re}(z-1)| \geqslant \delta.$$
En consecuencia,
$$|R_N(z)| \leqslant |z-1|^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N\,dt}{|1+t(z-1)|} \leqslant \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}.$$
De ahí la convergencia uniforme.

3. Ver más arriba.

4. Se tiene $z = 1 + \mathrm{e}^{i\phi} = (\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}})\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}} = 2\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}$. De donde $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\phi}{2}$ y $r = |z| = 2|\cos\frac{\phi}{2}| = 2\cos\frac{\phi}{2}$. Como :
$$\begin{aligned}\log(2\cos\frac{\phi}{2}) + i\frac{\phi}{2} = \mathrm{Log}(z) &= \sum_{k\geqslant 1}(-)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(k\phi) + i\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\mathrm{sen}(k\phi)\end{aligned}$$
es suficiente identificar las partes reales e imaginarias para deducir las igualdades pedidas. La convergencia uniforme resulta de la pregunta 3 ya que
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(1+\mathrm{e}^{i\phi}) = 1 + \cos\phi \geqslant 1 + \cos(\pi - \varepsilon) = \delta > 0.$$

Solución del ejercicio 7624 ▲002825

1. Este es el principio del máximo.
2. La función $g(z) = f(z)f(-z)$ es nula en el círculo de radio 1.

Solución del ejercicio 7625 ▲002826

Sea $z = e^{i\theta}$. Entonces $|4z+3| = |e^{i\theta}(4+3e^{-i\theta})| = |\overline{4+3e^{i\theta}}| = |4+3z|$. Por el principio del máximo

$$|\Phi(z)| < 1 = \sup_{\theta} |\Phi(e^{i\theta})|, \text{ para todo } z \in D.$$

Solución del ejercicio 7626 ▲002827

Se supone que existe $z \in \mathbb{C}$, con $F(z) \neq 0$ y denotar $\alpha = |F(z)| > 0$. Si $n > 1$ tal que $\frac{1}{n} < \alpha$, entonces el principio del máximo establece que

$$|F(z)| < \frac{1}{n} < \alpha, \text{ para todo } |z| < n.$$

Contradicción.

Solución del ejercicio 7628 ▲002829

Sea $g(z) = e^{f(z)}$. Se tiene $|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(f(z))}$. En consecuencia g es una función entera acotada. Por lo tanto, es constante por d'Alembert-Liouville.

Solución del ejercicio 7629 ▲002830

La fórmula de Cauchy para $f^{(n+1)}(z)$ es

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}}\, d\xi,$$

donde $C_R = \{|\xi| = R\}$. Para las siguientes estimaciones, tomemos $R > \min(2|z|, 1)$. Como $|\xi - z| \geqslant |\xi| - |z| = R - |z| \geqslant R/2$,

$$\frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z)^{n+2}|} \leqslant M\frac{(1+R)^n}{(R/2)^{n+2}} \leqslant M\frac{(2R)^n}{(R/2)^{n+2}} = 2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}.$$

Junto con la fórmula de Cauchy se tiene por lo tanto

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} 2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}|d\xi| = 2^{2n+2}M\frac{1}{R}$$

para cualquier $R > 2|z|$. Se acaba de demostrar que $f^{n+1}(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
Se utiliza ahora $g(z) = \frac{f(z) - P(z)}{z^{n+1}}$, donde P es el polinomio de Taylor de f en el origen de orden n. Primero se nota que el origen es cero de orden $n+1$ de $f(z) - P(z)$, lo que explica que g se extiende holomórficamente en el origen. Por tanto, es una función entera para la que se tiene

$$|g(z)| \leqslant \frac{C|z|^n}{|z|^{n+1}} = C\frac{1}{|z|},$$

para cierto $C > 0$ y para z de módulo suficientemente grande. De nuevo, g es una función entera acotada, entonces es constante (la estimación incluso da $g \equiv 0$ y entonces $f = P$).

Solución del ejercicio 7630 ▲002831

Sea $z = Re^{i\theta}$, entonces $|e^z| = e^{R\,\mathrm{Re}(e^{i\theta})} = e^{R\cos(\theta)}$. Para $f(z) = z + e^z$, se tiene, para θ tal que $\cos(\theta) \leqslant 0$, $|f(z)| \geqslant R - e^{R\cos(\theta)} \geqslant R - 1$. Si por el contrario $\cos(\theta) > 0$, entonces $|f(z)| \geqslant e^{R\cos\theta} - R$. En los dos casos

$$|f(Re^{i\theta})| \to \infty \quad \text{para } R \to \infty.$$

Los cálculos no implican que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$! Como de hecho e^z NO es un polinomio, incluso se puede decir que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ es FALSO.

Solución del ejercicio 7631 ▲002832

1. El residuo es $a_{-1} = 1$.
2. $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$, para $|z| < 1$. Es una serie entera porque f es holomorfa en el disco unitario y $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.
3. $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k-1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - \cdots$ y $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.

Solución del ejercicio 7632 ▲002833

Como $e^w = \sum_{n\geqslant 0} \frac{w^n}{n!}$,

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n.$$

En consecuencia, $\mathrm{Res}(f,0) = 1$. Si no, si $z_0 \neq 0$, entonces $\mathrm{Res}(f,z_0) = 0$ por la holomorfía de f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solución del ejercicio 7633 ▲002834

1. Como $\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots = z(1 + o(z))$,

   $$f(-z) = \frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = \frac{1}{z}(1+o(z))^{-1} = \frac{1}{z}(1+o(z)) = \frac{1}{z} + o(1).$$

   En consecuencia f tiene un solo polo en el origen (lo cual es evidente ya que $\mathrm{sen}(z)$ tiene un cero simple en el origen) y $\mathrm{Res}(f,0) = 1$. Se obtiene así por la fórmula del ejercicio 7639 y el hecho que el origen es un polo simple :

   $$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\mathrm{sen}(z)} = 1.$$

   La parte singular de la serie de Laurent es $\frac{1}{z}$ y el término constante es 0.
2. Se tiene $\mathrm{sen}(z) - \mathrm{sh}(z) = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) - (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) = -\frac{z^3}{3} + O(z^7)$, de donde

   $$f(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}(z) - \mathrm{sh}(z)} = -\frac{3}{z^3}(1 + O(z^4)) = -\frac{3}{z^3} + O(z).$$

3. Se obtiene de manera similar que
$$f(z)=\frac{1}{z\,\mathrm{sen}(z)\,\mathrm{sh}(z)}=\frac{1}{z^3}+O(z).$$

Solución del ejercicio 7634 ▲002835

Se observa primero que :
$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1-z}.$$
Se tiene
$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geqslant 0}z^n \qquad \text{para } |z|<1$$
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geqslant 0}z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n \quad \text{para } |z|>1.$$
De la misma forma
$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n,\ \text{si } |z|<2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{z-2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \text{ si } |z|>2.$$
Se deducen las expresiones de la serie de Laurent en 0 en los tres anillos centrados en el origen. En $z=1$ y $z=2$, f tiene polos simples. De donde
$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=-1 \quad \text{y} \quad \mathrm{Res}(f,2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=1.$$
Determinar de nuevo la serie de Laurent f en 1 :
$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}(-1)\sum_{n\geqslant 0}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$
para $|z-1|<1$.

Solución del ejercicio 7635 ▲002836

Sea $\gamma:I\to\mathbb{C}$ el circuito cualquiera. Se escribe
$$H(t,u)=u\gamma(t),\ \text{para } t\in I \text{ y } u\in[0,1].$$
Esto es claramente una homotopía de circuitos (ver la definición de curso !) tal que $H(t,1)=\gamma(t)$ y $H(t,0)=0$, para todo $t\in I$.

Solución del ejercicio 7636 ▲002837

Sea γ el circuito en $\mathbb{C}$. Entonces $\sup_{t\in I}|\gamma(t)|=R/2<\infty$. Si $|z|>R$, la función $\xi\mapsto\frac{1}{\xi-z}$ es holomorfa en el disco $D(0,R)$. En consecuencia,
$$\mathrm{Ind}(\gamma,z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}=0.$$
Se observa que esto implica que $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$, para todo z en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Solución del ejercicio 7637 ▲002838

1. El cálculo del índice de c_N es evidente. La afirmación sobre la existencia de g continua tal que $\gamma = e^g$ y $g(1) - g(0) = 2\pi i N$ es el contenido del folleto de J. F. Burnol 2005/2006, capítulo 30. El resto se deja al lector.

Solución del ejercicio 7639 ▲002840

Si f tiene un polo de orden N en z_0, se tiene, con $a_{-N} \neq 0$,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots$$

de donde

$$(z-z_0)^N f(z) = a_{-N} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + a_0 (z-z_0)^N + \cdots$$

lo que da

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} \left[(z-z_0)^N f(z)\right] = (N-1)!\, a_{-1} + o(z-z_0).$$

La fórmula resulta haciendo tender z hacia z_0. El caso $N = 1$ es importante para la práctica. Notemos que, si f tiene un solo polo en z_0, esta función se escribe $f = h/g$ en un vecindario de z_0, donde h, g son funciones holomorfas en un vecindario de z_0 tales que h no se anula en z_0 y g tiene un solo cero en z_0, i.e. $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Como

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = h(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{g(z) - g(z_0)}$$

también se tiene la fórmula útil

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{43}$$

Solución del ejercicio 7641 ▲002842

La función $f(z) = 1/(z-a)(z-b)(z-c)$ es holomorfa en el disco $D(0,a)$. Por lo tanto la integral es cero si $r < a$. Por el teorema de residuos,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz = \begin{cases} \operatorname{Res}(f,a) & \text{si } a < r < b, \\ \operatorname{Res}(f,a) + \operatorname{Res}(f,b) & \text{si } b < r < c \\ \operatorname{Res}(f,a) + \operatorname{Res}(f,b) + \operatorname{Res}(f,c) & \text{si } c < r. \end{cases}$$

El cálculo de estos residuos se hace por la fórmula del ejercicio 7639 porque todos los polos son simples :

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}, \quad \operatorname{Res}(f,b) = \frac{1}{(b-a)(b-c)} \text{ y } \operatorname{Res}(f,c) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Se deduce fácilmente el valor de la integral en los tres casos. En lo que concierne el cálculo de esta integral a través de la descomposición en elementos simples, observemos justo que

$$\int_C \frac{1}{z-d} dz$$

vale $2i\pi$ si d está en el interior de C y 0 si d está en el exterior.

Solución del ejercicio 7643 ▲002844

Se tiene

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=\int_\gamma\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}-\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$
$$=2i\pi\Big(\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\Big)=2i\pi\Big(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\Big).$$

De donde

$$\lim_{z_2\to z_1}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=2i\pi f'(z_1).$$

Solución del ejercicio 7644 ▲002845

Análogo al ejercicio 7641

Solución del ejercicio 7646 ▲002847

Como $\tan(\pi z)=\frac{\mathrm{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ esta función es una función meromorfa de $\mathbb{C}$ teniendo solo polos simples en $1/2 \bmod 1$. En efecto, $\cos(w)=0$ si y solo si $w=\pi/2 \bmod \pi$ y $\cos'(\pi/2+k\pi)\neq 0$. Denotemos $z_k=1/2+k$, $k\in\mathbb{Z}$. La fórmula (43) se aplica y da

$$\mathrm{Res}(\tan(\pi z),z_k)=\frac{\mathrm{sen}(\pi z_k)}{-\pi\,\mathrm{sen}(\pi z_k)}=-\frac{1}{\pi}.$$

En consecuencia :

$$\int_{|z|=N}\tan(\pi z)\,dz=2i\pi 2N\Big(-\frac{1}{\pi}\Big)=-4iN.$$

Solución del ejercicio 7647 ▲002848

Si $A=R\cos(\Phi)$ y $B=R\,\mathrm{sen}(\Phi)$ se tiene

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A+B\,\mathrm{sen}(\theta)+C\cos(\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A+R\,\mathrm{sen}(\theta+\Phi)}=\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{A+R\,\mathrm{sen}(\alpha)}.$$

Para encontrar el valor de esta última integral se escribe $z=\mathrm{e}^{i\alpha}$. Entonces $d\alpha=-i\frac{dz}{z}$ y

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{A+R\,\mathrm{sen}(\alpha)}=\int_{|z|=1}\frac{-i\,dz}{z(A+R\frac{z-\bar{z}}{2i})}=\int_{|z|=1}\frac{2dz}{Rz^2+2iAz-R}.$$

El denominador de esta última expresión se anula en

$$z^{\pm}=\frac{-2iA\pm\sqrt{-4A^2+4R^2}}{2R}=-i\left(\frac{A}{R}\mp\sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2-1}\right)$$

Un cálculo elemental demuestra que solamente la raíz $z^+ = -i\left(\frac{A}{R} - \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$ está en el disco unidad abierto siempre que $A > 0$ (el caso $A < 0$ es similar). Por el teorema del residuo se sigue que

$$\frac{1}{2\pi} I = i\frac{2}{R}\frac{1}{z^+ - z^-} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - R^2}}.$$

Solución del ejercicio 7650 ▲002853

Si $z = e^{i\theta}$, entonces $\operatorname{sen}\theta = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ y $dz = ie^{i\theta}d\theta$. De donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{a + \operatorname{sen}\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{z - \bar{z}}{2ia + z - \bar{z}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 2iaz - 1}\frac{dz}{z}.$$

Entonces es suficiente usar el teorema del residuo.

Solución del ejercicio 7654 ▲002857

Recordar la fórmula de Cauchy para f holomorfa en $\overline{\Omega}$ (así sin singularidades) :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Se trata aquí de obtener una versión generalizada para funciones f teniendo singularidades $z_1, \ldots, z_N \in \Omega$. Se fija $z \in \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ y se considera $G(w) = \frac{f(w)}{w - z}$. Esta función tiene un solo polo en $w = z$ y :

$$\operatorname{Res}(G, z) = \lim_{w \to z}(w - z)G(w) = f(z).$$

Las otras singularidades de G en Ω son $z_1, \ldots, z_N$. Por definición, el residuo de G en z_j es el « coeficiente a_{-1} » de la serie de Laurent de G en z_j. Por lo tanto

$$G(w) = \frac{1}{w - z} f(w) = \sum_{k \geqslant 0} b_k (w - z_j)^k \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l (w - z_j)^l$$

ya que $w \mapsto \frac{1}{w - z}$ es holomorfa en un vecindario de z_j (y por supuesto se puede calcular el b_k, pero no es útil). Se observa que para calcular a_{-1} intervienen solo los índices (k, l) que verifica $k + l = -1$. Como $k \geqslant 0$ se tiene $l = -1 - k < 0$. De donde :

$$\operatorname{Res}(G, z_j) = \operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w - z}, z_j\right).$$

Se puede ahora utilizar el ejercicio 7653 o bien deducirlo directamente : si $R_0 = 2\max\{|z|, |z_j|\}$, entonces para todo $R > R_0$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R} \frac{g_j(w)}{w - z} dw = \sum_{\xi \in \{z, z_j\}} \operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w - z}, \xi\right).$$

En consecuencia, la integral $\int_{|w|=R} \frac{g_j(w)}{w - z} dw$ no depende de $R > R_0$. Ahora, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{g_j(w)}{w - z}\right| \leqslant \frac{C}{|w|^2}, \quad |w| > R_0,$$

lo que implica

$$\left|\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw\right|\leqslant\lim_{|w|=R}\int_{|w|=R_0}\frac{C}{|w|^2}|dw|=0.$$

De donde

$$0=\frac{1}{2i\pi}\int_{|w|=R_0}\frac{g_j(w)}{w-z}dw=\operatorname{Res}\left(\frac{g_j(w)}{w-z},z_j\right)+g_j(z).$$

Es suficiente entonces aplicar el teorema del residuo a G para concluir :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega}G(w)\,dw=f(z)-g_1(z)-\cdots-g_N(z).$$

Solución del ejercicio 7655 ▲002858

En el cálculo de las integrales a menudo se encuentra enfrentado al paso al límite (de tipo $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\,dz$ o $\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\,dz$ en el caso donde 0 es una singularidad que se contorna, C_R un trozo de círculo como en los ejercicios aquí). Este ejercicio y el siguiente proporcionan herramientas muy prácticas para este tipo de cálculos.

Si f a z_0 como polo único, su serie de Laurent en z_0 es de la forma

$$f(z)=a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots=\sum_{k\geqslant -1}a_k(z-z_0)^k.$$

Por convergencia normal de esta serie

$$\begin{aligned}\int_{C_r(\alpha,\beta)}f(z)\,dz&=\sum_{k\geqslant -1}a_k\int_{C_r(\alpha,\beta)}(z-z_0)^k\,dz=\sum_{k\geqslant -1}a_k\int_\alpha^\beta(re^{i\theta})^k ire^{i\theta}\,d\theta\\&=ia_{-1}(\beta-\alpha)+r\sum_{k\geqslant 0}\left(r^k a_k\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right).\end{aligned}$$

Se deduce el enunciado del ejercicio observando que $\left|\frac{e^{i(k+1)\beta}-e^{i(k+1)\alpha}}{(k+1)}\right|\leqslant\frac{2}{k+1}$ y haciendo tender $r\to 0$.

Solución del ejercicio 7656 ▲002859

Para $\varepsilon>0$ existe $R>0$ tal que $|f(z)|\leqslant\varepsilon$, para todo $|z|\geqslant R$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$. Si C_R es el semicírculo superior orientado entonces

$$\begin{aligned}|\int_{C_R}f(z)e^{iz}\,dz|&=|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i(Re^{i\theta})}iRe^{i\theta}\,d\theta|\leqslant\varepsilon\int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}\theta}R\,d\theta\\&=2\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}Re^{-R\operatorname{sen}\theta}\,d\theta\leqslant 2\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}Re^{-R\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\varepsilon(1-e^{-R\frac{\pi}{4}})\leqslant 8\varepsilon.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7657 ▲002860

Utilizar los ejercicios 7655 y 7656.

Solución del ejercicio 7658 ▲002861

Por holomorfía de $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$,

$$\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}dx + \int_{C_R} \mathrm{e}^{-z^2}dz + \int_{R\mathrm{e}^{i\pi/4}}^0 \mathrm{e}^{-z^2}dz = 0.$$

Denotemos $I_{1,R}$ la primera integral de arriba, $I_{2,R}$ la segunda y $I_{3,R}$ la tercera, así

$$\lim_{R\to\infty} I_{1,R} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi u^2}\sqrt{\pi}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Como $\mathrm{e}^{-z^2} = \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{e}^{i\pi/4}t\right)^2} = \mathrm{e}^{-it^2} = \cos(t^2) - i\,\mathrm{sen}(t^2)$, para $z = \mathrm{e}^{i\pi/4}t$ se tiene

$$\begin{aligned} I_{3,R} &= -\int_0^R \left(\cos(t^2) - i\,\mathrm{sen}(t^2)\right)\mathrm{e}^{i\pi/4}dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int_0^R \cos(t^2) + \mathrm{sen}(t^2)dt + i\int_0^R \cos(t^2) - \mathrm{sen}(t^2)dt\right). \end{aligned}$$

Es suficiente entonces determinar $\lim\limits_{R\to\infty} I_{2,R}$, para deducir las integrales de Fresnel. Si se establece $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$\int_{C_R} \mathrm{e}^{-z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\mathrm{e}^{2i\theta}}iR\mathrm{e}^{i\theta}d\theta$$

lo que implica

$$|I_{2,R}| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\cos(2\theta)}d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R^2\cos(\alpha)}d\alpha.$$

Del cambio de variables $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y del hecho que $\mathrm{sen}\,\beta \geqslant \frac{\beta}{2}$, para $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se deduce que :

$$|I_{2,R}| \leqslant -\frac{R}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \mathrm{e}^{-R^2\mathrm{sen}(\beta)}d\beta \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R^2\frac{\beta}{2}}d\beta = -\frac{R}{2}\mathrm{e}^{-R^2\frac{\beta}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \leqslant \frac{2}{R} \to 0,$$

cuando $R \to \infty$. Conclusión $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \mathrm{sen}(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Solución del ejercicio 7667 ▲002879

1. Sea $C_R = \{R\mathrm{e}^{i\theta};\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\}$. La función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

tiene un solo polo $z_0 = \mathrm{e}^{i\pi/n}$ en el sector. Es un polo simple y el residuo es

$$\mathrm{Res}\left(f, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{z_0}{n} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}.$$

De donde

$$-\frac{2i\pi}{n}\mathrm{e}^{i\pi/n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{R\mathrm{e}^{i\pi/n}}^0 \frac{dz}{1+z^n}$$

para todo $R>1$. Porque $n>1$, se tiene :

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}\right|\leqslant\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R^n-1}\int_{C_R}|dz|\right)=0.$$

Por otra parte,

$$\int_{Re^{2i\pi/n}}^{0}\frac{dz}{1+z^n}=-\int_0^R\frac{1}{1+x^n}e^{2i\pi/n}dx=-e^{2i\pi/n}\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}.$$

Resulta que

$$\int_0^R\frac{dx}{1+x^n}=\frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}-\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^n}}{1-e^{2i\pi/n}}\longrightarrow\frac{-\frac{2i\pi}{n}e^{i\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}}=\frac{2i\pi}{n}\frac{1}{2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

cuando $R\to\infty$.

2. La función $z^a=\exp\left(a(\log r+i\alpha)\right)$ no está definida en un vecindario del origen. Es la razón por la que se lleva a considerar el pequeño trozo de círculo $\gamma_\varepsilon=\{\varepsilon e^{i\theta};\ \frac{2\pi}{a}\geqslant\theta\geqslant 0\}$. Nuevamente se denota $C_R=\{Re^{i\theta};\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{n}\}$ y

$$\Omega=\left\{z=re^{i\alpha};\ 0<r<\infty\ ,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{a}\right\}.$$

Para $z=re^{i\alpha}\in\Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}&z^a=-1\\ \Longleftrightarrow\quad&a(\log r+i\alpha)=i\pi\pmod{2i\pi}\\ \Longleftrightarrow\quad&r=1\ \text{ y }\ \alpha=\frac{\pi}{a}.\end{aligned}$$

En consecuencia, $f(z)=\frac{1}{1+z^a}$ tiene una sola singularidad $z_0=e^{i\frac{\pi}{a}}$ en Ω. Como $f(z)=\frac{1}{h(z)}$, con $h(z_0)=1+z_0^a=0$ y

$$h'(z_0)=\left(\exp(a\log z)\right)'\Big|_{z=z_0}=\frac{a}{z_0}z_0^a\neq 0,$$

el punto z_0 es un polo simple y se tiene

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0)=\frac{1}{h'(z_0)}=-\frac{z_0}{a}=-\frac{1}{a}e^{i\frac{\pi}{a}}.$$

Es suficiente entonces proceder como en la pregunta 1, para establecer

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^a}=\frac{\frac{\pi}{a}}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right)}\ \text{ para }\ a>1.$$

3. Sea $x\in(0,\infty)$ y $a=u+iv$, con $u>1$. Entonces

$$|x^a|=|x^{iv}||x^u|=|\exp\left(i(v\log x)\right)|x^u=x^u.$$

En consecuencia se tiene, para todo $x>1$,

$$\left|\frac{1}{1+x^a}\right|\leqslant\frac{1}{x^u-1},$$

lo que implica la convergencia de la integral $J(a)$. Demostrar que la aplicación $a \mapsto J(a)$ es holomorfa en $\Omega = \{\mathrm{Re}\, a > 1\}$. Para esto se utilizan criterios de holomorfía de integrales con parámetros (ver el capítulo 14 del folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol).

Consideremos primeramente $J_1(a) = \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x^a}$. Se tiene

(1) $(a,x) \mapsto g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ es continua.

(2) $\forall x \in [0,2] : a \mapsto g(a,x)$ es holomorfa en Ω.

Por un criterio de holomorfía de integrales con parámetros (teorema 26 del capítulo 14 del folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol) $a \mapsto J_1(a)$ es holomorfa en Ω. Para $J_2(a) = \displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^a}$ es necesario además de (1) y (2) mayorar $g(a,x) = \frac{1}{1+x^a}$ por una función integrable k (dependiendo solo de la variable x). Para hacer esto, se debe trabajar en un dominio más pequeño

$$\Omega_T = \{\mathrm{Re}\, a > T\} \subset \Omega, \;\; T > 1.$$

En este caso

$$|g(a,x)| = \left|\frac{1}{1+x^a}\right| \leqslant \frac{1}{x^T - 1}, \;\; \forall x \geqslant 2 \;\text{ y }\; a \in \Omega_T.$$

Como $T > 1$, $k(x) = \frac{1}{x^T - 1}$ es integrable : $\displaystyle\int_2^\infty k(x)\,dx < \infty$. Por un criterio de holomorfía de las integrales con parámetros (aquí el teorema 27 del capítulo 14 del folleto 2005/2006 de J.-F. Burnol), $a \in \Omega_T \mapsto J_2(a)$ es holomorfa. Esto es verdadero para todo $T > 1$, J_2 es holomorfa en Ω. En conclusión,

$$a \mapsto J(a) = J_1(a) + J_2(a)$$

es holomorfa en Ω. La afirmación $J(a) = \dfrac{\frac{\pi}{a}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right)}$, $a \in \Omega$, es consecuencia del principio de ceros aislados y del hecho que ya hemos establecido esta relación para todo real $a > 1$.

4. Evidente.

5. Se puede proceder como en la pregunta 3. Notemos que

$$|h(p,t)| = \left|\frac{e^{pt}}{1+e^t}\right| = \frac{e^{\mathrm{Re}(p)t}}{1+e^t}.$$

En consecuencia, $|h(p,t)| \sim e^{(\mathrm{Re}(p)-1)t}$, para $t \to \infty$ y $|h(p,t)| \sim e^{\mathrm{Re}(p)t}$, para $t \to -\infty$. La integral $K(p)$ es, por lo tanto convergente. Para establecer la holomorfía de esta función es necesario trabajar con

$$U_\varepsilon = \{0 < \mathrm{Re}(p) < 1 - \varepsilon\}, \;\text{ con }\; \varepsilon > 0 \;\text{ pequeño.}$$

6. Se ha visto en la pregunta anterior que la función $h(p,t) = \frac{e^{pt}}{1+e^t}$ decrece exponencialmente para $0 < \mathrm{Re}(p) < 1$, cuando $t \to \pm\infty$. Se deduce "fácilmente" (hacer los detalles !) que

$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R+2i\pi}^{-R} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = 0$$

Por el teorema del residuo se sigue que :

$$2i\pi \mathrm{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt + \int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz\right].$$

Ahora $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz = -e^{2i\pi p} \int_{-R}^{R} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$, de donde :

$$2i\pi\left(-e^{i\pi p}\right) = 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{e^{pz}}{1+e^z}, i\pi\right) = \left(1 - e^{2i\pi p}\right) K(p).$$

Finalmente, se tiene

$$K(p) = \pi \frac{2i}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi p)}.$$

Solución del ejercicio 7751 ▲002883

$|Q(z)| = |z^{50}(z^{61}+3)| = |z^{61}+3| \geqslant 2$, para $|z| = 1$, por lo que

$$|P(z) - Q(z)| = 1 < |Q(z)| \text{ en } \{|z| = 1\}.$$

Por el teorema de Rouché, P, Q tienen el mismo número de ceros en $D(0,1)$. El resto se deduce observando que $P' = Q'$ y $P(0) \neq 0$.

Solución del ejercicio 7752 ▲002884

La aplicación $\Phi(z) = \frac{3z+5}{z+2}$ es una homografía. La imagen de un círculo es entonces de nuevo un círculo o una recta. Además, notamos que
(1) $\Phi(x) \in \mathbb{R}$, para todo real $x \neq -2$.
(2) $\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$.
Como $\Phi(-1) = 2$ y $\Phi(1) = \frac{8}{3}$, la imagen del círculo unitario es un círculo simétrico con respecto al eje real (cf. (2)) con centro $\left(\frac{8}{3}+2\right)\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ y de radio $\frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$. El círculo radio 2 centrado en el origen contiene -2. Es el único punto cuya imagen es $\Phi(-2) = \infty$. La imagen de este círculo es entonces una recta y es

$$\Phi(2) + i\mathbb{R} = \frac{11}{4} + i\mathbb{R}.$$

Solución del ejercicio 7754 ▲002886

Se tiene $\Phi_\alpha(0) = \alpha$ y $\Phi_\alpha(\alpha) = 0$. Se observa que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ fija el origen. Por el ejercicio 7753, el automorfismo $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ de $D(0,1)$ es una rotación $z \mapsto e^{i\alpha} z$. Un cálculo explícito muestra que $\Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \mathrm{Id}$, es decir $\Phi_\alpha^{-1} = \Phi_\alpha$. Sea Ψ un automorfismo del disco unitario $D(0,1)$ tal que $\Psi(z_1) = z_2$. Entonces

$$\Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = \Phi_{z_2}(0) \Longleftrightarrow \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}(0) = 0,$$

y entonces $A = \Phi_{z_2}^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_{z_1}$ es un automorfismo del disco unitario fijando el origen. Se deduce de nuevo que A es una rotación : $A(z) = e^{i\alpha} z$. En consecuencia,

$$\Psi = \Phi_{z_2} \circ A \circ \Phi_{z_1}^{-1}. \tag{44}$$

Se acaba de determinar la forma general de un automorfismo Ψ del disco unidad verificando $\Psi(z_1) = z_2$. Se observa que es único “módulo una rotación”; Ψ está determinado por (44) donde A es una rotación cualquiera.

Solución del ejercicio 7818 ▲007597

---

1. Por definición de cosh, se tiene para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. En consecuencia, z es solución de $\cosh(z) = 8i$ si y solo si e^z es solución de
$$X^2 - 8iX + 1 = 0,$$
si y solo si $e^z = (4+\sqrt{17})i = (4+\sqrt{17})e^{-i\frac{\pi}{2}}$ o $e^z = (4-\sqrt{17})i = (\sqrt{17}-4)e^{-i\frac{\pi}{2}}$,
si y solo si $z \in \log(4+\sqrt{17}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z})$ o $z \in \log(\sqrt{17}-4) + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z})$.
2. Sea $z \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned} z^i = -1 &\iff e^{i\log z} = e^{i\pi} \\ &\iff i\log z = i\pi \operatorname{mod} 2i\pi \\ &\iff \log z = \pi \operatorname{mod} 2\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{(2k+1)\pi}. \end{aligned}$$
Las soluciones son los números complejos de la forma $e^{(2k+1)\pi}$, con k entero.

Solución del ejercicio 7819 ▲007598

1. Se define una determinación del logaritmo estableciendo
$$\begin{aligned} l_+ : \mathbb{C} \setminus [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta} &\longmapsto \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta. \\ (r > 0, 0 < \theta < 2\pi) & \end{aligned}$$
2. Se define una determinación del logaritmo estableciendo
$$\begin{aligned} \ell : \mathbb{C} \setminus L &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta} &\longmapsto \begin{cases} \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i(\theta + 2\pi) & \text{si } |z-2| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \geqslant 0, \\ \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta & \text{si } |z-2| > 1. \end{cases} \\ (r > 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi) & \end{aligned}$$
Se verifica que ℓ es continua : en particular sobre el disco abierto de centro $(2,0)$ y de radio 1, ℓ coincide con la función $\log + 2i\pi$, que es continua. Se verifica así que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus L$, $e^{\ell(z)} = z$: por lo tanto, es una determinación del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus L$.

Solución del ejercicio 7820 ▲007599

1. La aplicación
$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto e^{i\theta} \end{aligned}$$
es una parametrización del círculo unitario del plano complejo euclidiano recorrido en sentido antihorario.
2. Como el radio de convergencia de la serie que define cosh es infinito, la serie de funciones $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ es normalmente por lo tanto uniformemente convergente en el círculo unitario hacia la función $\frac{\cosh z}{z}$. En consecuencia,
$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial\Delta} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma(\theta))^{2n-1}}{(2n)!} \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} ie^{i(2n)\theta} d\theta = 2i\pi. \end{aligned}$$

3. Como la integral de la función $\frac{\cosh(z)}{z}$ en el camino cerrado $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$ no es nula, la función $\frac{\cosh(z)}{z}$ no admite una primitiva en $\mathbb{C}^\times$.

Solución del ejercicio 7821 ▲007600

1. Pregunta del curso.
2. La aplicación sen es holomorfa en $\mathbb{C}$, por lo tanto
$$I_1 = \int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z-0} dz = (2i\pi)\operatorname{sen}(0) = 0.$$
3. La aplicación $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ se extiende en 0 por la suma de la serie entera $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ de infinito radio de convergencia, por lo tanto holomorfa en $\mathbb{C}$. Entonces
$$I_2 = \int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}}{z-0} dz = (2i\pi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}(0) = 2i\pi.$$
4. La aplicación $\frac{\operatorname{sen}(z)-1}{z^2}$ se extiende en 0 por la suma de la serie entera $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ holomorfa en $\mathbb{C}$. Entonces $\int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)-1}{z^3} dz = (2i\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}(0) = 0$. Así,
$$I_3 = \int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\operatorname{sen}(z)-1}{z^3} dz + \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = 0.$$
5. La aplicación $\operatorname{sen}(z)$ admite $-\cos(z)$ como primitiva en $\mathbb{C}^\times$ e incluso en $\mathbb{C}$.
La aplicación $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ se extiende sobre $\mathbb{C}$ en la suma de la serie entera $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ y admite entonces sobre $\mathbb{C}$ (y por lo tanto, en $\mathbb{C}^\times$) la primitiva $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.
La aplicación $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}$ tiene una integral no nula sobre el camino cerrado $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$: por lo tanto no admite una primitiva en $\mathbb{C}^\times$.
La aplicación $\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^3} = \frac{\operatorname{sen}(z)-1}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} + \frac{1}{z^3}$ admite como primitiva en $\mathbb{C}^\times$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n}}{2n} - \frac{1}{4z^4}.$$

Solución del ejercicio 7822 ▲007601

1. Se define una determinación del logaritmo estableciendo
$$\begin{aligned} l_+ : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta} &\longmapsto \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta. \\ (r>0, -\pi<\theta<\pi) & \end{aligned}$$
Esta es una aplicación continua, e incluso holomorfa tal que
$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0],\ \ e^{l_+(z)} = z.$$

2. Se define una determinación del logaritmo estableciendo

$$\begin{array}{rcl} \ell : \mathbb{C} \setminus L & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta} & \longmapsto & \begin{cases} \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i(\theta + 2\pi) & \text{sobre } U, \\ \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta & \text{sobre } V. \end{cases} \\ (r > 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi) & & \end{array}$$

Se verifica que ℓ es continua : en particular en el disco abierto de centro $(2,0)$ y de radio 1, ℓ coincide con la función $\log + 2i\pi$, que es continua. Se verifica así que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus L$, $e^{\ell(z)} = z$: por lo tanto, es una determinación del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus L$.

Solución del ejercicio 7823 ▲007602

1. Sea $\Delta_r(a)$ el disco central $a \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$. Se supone que $\mathrm{Im}(f)$ no interseca $\Delta_r(a)$. Entonces,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z) - a| \geqslant r.$$

La aplicación $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z) - a}$ está entonces bien definida, holomorfa en $\mathbb{C}$ y mayorada en módulo por $\frac{1}{r}$. Por el teorema de Liouville, entonces es constante. Como $w \mapsto \frac{1}{w - a}$ es inyectiva en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, se deduce que f es constante.

2. Tal aplicación entera no interseca el disco $\Delta_1(-2i)$: entonces es constante, según la pregunta anterior.
3. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$,

$$\begin{aligned} 1 - |h(z)|^2 &= 1 - \frac{z - i}{z + i} \frac{\overline{z} + i}{\overline{z + i}} = 1 - \frac{|z|^2 + i(z - \overline{z}) + 1}{|z + i|^2} \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - i(z - \overline{z}) + 1 + 2i(z - \overline{z})}{|z + i|^2} = \frac{4Im(z)}{|z + i|^2}. \end{aligned}$$

4. Sobre $\mathbb{H}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ y entonces $|h(z)| < 1$. La imagen del semiplano $\mathbb{H}$ por la aplicación h es, por lo tanto incluida en el disco unidad Δ; es, por lo tanto una parte acotada de $\mathbb{C}$.
5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ una aplicación holomorfa. Por composición, $h \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa cuya imagen es acotada. Por el teorema de Liouville, entonces es constante. Como h es inyectiva, se deduce que f es constante.

Solución del ejercicio 7824 ▲007603

1. Sea $r > 0$ tal que $\overline{\Delta_r(c)}$ es un disco cerrado incluido en D. El residuo de f en c es

$$\mathrm{Res}_c(f) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta_r(c)} f(z) dz.$$

Este integral no depende de r tal que $\overline{\Delta_r(c)}$ está incluido en D.

2. Si f admite una primitiva en $D \setminus \{c\}$, la integral de f en todo camino cerrado de $D \setminus \{c\}$ es nula. En particular, el residuo de f en c es nulo.

3. Según la pregunta anterior, es necesario que el residuo de f en c sea nulo. Recíprocamente, si el residuo de f en c es nulo, se debe demostrar que f admite una primitiva en Δ. Por el desarrollo en un vecindario de c, se sabe que existen $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} \in \mathbb{C}$ y una función $\tilde{f}$ holomorfa en Δ tales que

$$\forall z \in \Delta,\ \ f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-c)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + \tilde{f}(z).$$

Como el residuo de f en c es nulo, $a_{-1} = 0$. La aplicación $z \mapsto \frac{a_{-3}}{(z-c)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2}$ admite $z \mapsto -\frac{a_{-3}}{2(z-c)^2} - \frac{a_{-2}}{z-c}$ como primitiva en $\Delta \setminus \{c\}$. Dado que Δ es estrellado y que $\tilde{f}$ es holomorfa en Δ, admite una primitiva en Δ por lo tanto en $\Delta \setminus \{c\}$. En conclusión, si el residuo de f en c es nulo, f admite una primitiva en $\Delta \setminus \{c\}$.

Solución del ejercicio 7825 ▲007604

1. Sea D un abierto estrellado de $\mathbb{C}$. Sea Γ un camino cerrado D. Sea C un conjunto finito de puntos de $D - \Gamma$. Sea $f : D \setminus C \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces

$$\sum_{c \in C \cap \mathrm{Int}(\Gamma)} \mathrm{Ind}_\Gamma(c) \mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z) dz.$$

2. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Sea $\Delta_r(a)$ un disco cuya adherencia está incluida en D. Sea $b \in \Delta_r(a)$. Sea $R > 0$ tal que $\overline{\Delta_r(a)} \subset \Delta_R(a) \subset D$. El abierto $\Delta_R(a)$ es estrellado, el camino $\partial\Delta_r(a)$ está incluido en $\Delta_R(a)$ y no contiene b; la aplicación $f : \Delta_R(a) \setminus \{b\} \to \mathbb{C},\ \ z \mapsto \frac{f(z)}{z-b}$ es holomorfa : por el teorema de residuos, se deduce que

$$\mathrm{Ind}_{\partial\Delta_r(c)}(b) \mathrm{Res}_b(\frac{f(z)}{z-b}) = \mathrm{Res}_b(\frac{f(z)}{z-b}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-b} dz.$$

Queda por señalar que, desarrollando f en series enteras en un vecindario de b, $\mathrm{Res}_b(\frac{f(z)}{z-b}) = f(b)$.

3. Se reitera el razonamiento anterior con la aplicación $f_k : \Delta_R(a) \setminus \{b\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$. El residuo de $\frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$ en b es el coeficiente de $(z-b)^k$ en el desarrollo en serie entera de f centrado en b. Como este desarrollo es dado por el desarrollo de Taylor, el coeficiente de $(z-b)^k$ es $\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$.

Solución del ejercicio 7826 ▲007605

1. Sea f y g dos aplicaciones holomorfas en un abierto estrellado D de $\mathbb{C}$. Sea Γ un camino cerrado simple en D. Se supone que

$$\forall z \in \Gamma,\ \ |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

Entonces f y g tienen el mismo número de ceros contados con multiplicidad en el interior de Γ.

2. El abierto $\mathbb{C}$ es estrellado y contiene el camino $\partial\Delta_2$ cuyo interior es Δ_2. Las dos aplicaciones $z \mapsto z^4$ y p son polinomiales por lo tanto holomorfas en $\mathbb{C}$. Sea $z \in \partial\Delta_2$. Entonces

$$|p(z) - z^4| = |7z+1| \leqslant 7|z| + 1 \leqslant 7 \times 2 + 1 = 15 < 2^4 = |z^4|.$$

Por el teorema de Rouché, el polinomio p y $z \mapsto z^4$ tienen el mismo número de ceros contados con multiplicidades en Δ_2, es decir 4. Como p es no nulo de grado 4, todos sus ceros están en Δ_2.

Solución del ejercicio 7827 ▲007606

1. La aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ está asociada con la aplicación $f_{\mathbb{R}} : (x,y) \mapsto (x,-y)$. Como $f_{\mathbb{R}}$ es polinomial, es de clase C^∞. Sin embargo, $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = 1 = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}$. La aplicación f que no satisface la ecuación de Cauchy–Riemann en ningún punto y no es holomorfa.
2. Se parametriza el círculo de centro 3 y de radio 1 por $z = 3 + e^{i\theta}$.
$$\int_{|z-3|=1} \frac{dz}{z-3} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi \neq 0.$$
Como la integral de $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ en el camino cerrado círculo de centro 3 y de radio 1 incluido en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ no es nula, esta aplicación no permite ninguna primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{3\}$.
3. El disco unitario es convexo : por lo tanto es estrellado con respecto a cada uno de sus puntos.
4. El abierto $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ no es estrellado, porque la aplicación holomorfa $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ no admite una primitiva.

Solución del ejercicio 7828 ▲007607

1. El punto de afijo $r\frac{1+it}{1-it}$ es de módulo r y sus coordenadas $x = \operatorname{Re}(\xi(t)) = r\frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $y = \operatorname{Im}(\xi(t)) = r\frac{2t}{1+t^2}$ verifican la ecuación $y = t(x+r)$. Es por lo tanto la intersección de la recta de ecuación $y = t(x+r)$, con el círculo C_r. Como la ecuación $r\frac{1+it}{1-it} = -r$ es equivalente a $1 = -1$, el afijo $r\frac{1+it}{1-it}$ no es para ningún valor de t igual a $-r$.
2. Como t es real, $t \mapsto r\frac{1+it}{1-it}$ es el cociente de dos polinomios cuyo denominador nunca se anula. Por lo tanto, es derivable y
$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \frac{i}{1+it} - \frac{-i}{1-it} = \frac{2i}{1+t^2}.$$
3. $$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_{C_r - \{-r\}} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i}{1+t^2}.$$
4. Por otro lado, $\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\pi \operatorname{Res}_0(\frac{1}{z}) = 2i\pi$. Así, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Solución del ejercicio 7829 ▲007608

1. Sea $z \in \mathbb{H}$.
$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(h_A(z)) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{\det A}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z) > 0.\end{aligned}$$
Entonces, $h_A(z) \in \mathbb{H}$ y h_A envía el semi plano $\mathbb{H}$ en sí mismo.

2. Sea $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Sea $A \in SL(2,\mathbb{R})$.

$$h_A(i) = z \iff ai + b = z(ci+d) \iff ai + b = (dx - cy) + i(cx + dy) \iff \begin{cases} b = dx - cy \\ a = cx + dy. \end{cases}$$

Se puede por ejemplo elegir, ya que y es estrictamente positivo, $A = \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución del ejercicio 7830 ▲007609

1. Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : D \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Entonces, para todo disco $\Delta_r(a)$ cuya adherencia está incluida en D,

$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$

2. Sea D un abierto estrellado de $\mathbb{C}$. Sea Γ un camino cerrado D. Sea C un conjunto finito de puntos de $D \setminus \Gamma$. Sea $f : D \setminus C \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces,

$$\sum_{c \in C \cap \mathrm{Int}(\Gamma)} \mathrm{Ind}_\Gamma(c)\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z)dz.$$

3. Sea f una función holomorfa en Δ. Se parametriza el círculo $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$ por $z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta}$. Entonces

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z-0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta})}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta}} \frac{1}{2}i\mathrm{e}^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta}) d\theta$$

es una cantidad real porque f toma valores reales en el círculo $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$. La aplicación f por lo tanto toma un valor real en 0.

4. Sea f una función holomorfa en Δ constante igual a c en el círculo $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$. Sea $b \in \Delta_{\frac{1}{2}}$. Por el teorema de representación,

$$f(b) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_{\frac{1}{2}}} \frac{f(z)dz}{z-b} = c \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta_{\frac{1}{2}}} \frac{dz}{z-b} = c\mathrm{Res}_b(\frac{1}{z-b}) = c.$$

Solución del ejercicio 7831 ▲007610

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa acotada en módulo por M. Se sabe que es desarrollable en series enteras sobre $\mathbb{C}$, con una serie $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de infinito radio de convergencia. Se puede así aplicar la fórmula de Gutzmer : para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant M^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M^2$$

Entonces, para todo n en $\mathbb{N}$ y todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$|a_n|^2 r^{2n} \leqslant M^2.$$

En particular, todos los a_n, con $n \neq 0$ son nulos y f es constante

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa tal que $M(r) \leqslant r$.

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant M(r)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M(r)^2 \leqslant r^2.$$

Entonces, para todo n en $\mathbb{N}$ y todo $r \in \mathbb{R}^+$, $|a_n|^2 r^{2n} \leqslant r^2$. En particular, todos los a_n, con $n \neq 0, 1$ son nulos y f es afín.

Solución del ejercicio 7832 ▲007611

1. Se denota R el radio de convergencia de la serie entera $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$ y $r \in]0, R[$. Entonces se sabe que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en módulo. Sea $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leqslant |a_n r^n| \frac{\left| \frac{z}{r} \right|^n}{n!}$$

es el término general de una sucesión acotada en módulo pues $\dfrac{\left| \frac{z}{r} \right|^n}{n!}$ es acotada. En consecuencia, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$ tiene un radio de convergencia infinito.

2. La aplicación $f - g$ es suma en Δ_r conexo de una serie entera centrada en 0 y se anula en el conjunto no discreto $]-R, R[$. Por el principio de los ceros aislado, $f = g$ sobre Δ_r.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$, las dos aplicaciones $z \mapsto \operatorname{sen}(a+z)$ y $z \mapsto \operatorname{sen}(a)\cos(z) + \cos(a)\operatorname{sen}(z)$ son desarrollables en series enteras en $\mathbb{C}$ y coinciden en $\mathbb{R}$ por la fórmula de suma de los senos en $\mathbb{R}$. Por la pregunta precedente, coinciden en $\mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 7833 ▲007612

1. Sea $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = c &\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = c \iff e^{iz} - 2ic - e^{-iz} = 0 \\ &\iff (e^{iz})^2 - 2ice^{iz} - 1 = 0, \text{ pues } e^{iz} \neq 0. \end{aligned}$$

2. Sea $c \in [-1, 1]$. Sea $z \in \mathbb{C}$ una solución de $\operatorname{sen} z = c$. Entonces e^{iz} es solución de $X^2 - 2icX - 1 = 0$. Como $c \in [-1, 1]$, las soluciones de esta ecuación son $ic + \sqrt{1 - c^2}$ y $ic - \sqrt{1 - c^2}$, ambas de módulo 1,

$$|e^{iz}| = e^{-y} = 1$$

y entonces $y = 0$, y z es, por lo tanto real.

3. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) + i(\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b)$. $e^{-i(a+b)} = e^{-ia}e^{-ib} = (\cos a - i \operatorname{sen} a)(\cos b - i \operatorname{sen} b) = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) - i(\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b)$.

4. $\operatorname{sen}(a+b) = \dfrac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ según la pregunta anterior.

5. Sea $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\cos z + \operatorname{sen} z = 2 &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} z = \sqrt{2}\\
&\iff \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + z) = \sqrt{2}\\
&\iff (\mathrm{e}^{iz}) \text{ es solución de } X^2 - 2i\sqrt{2}X - 1 = 0\\
&\iff \mathrm{e}^{iz} = i\sqrt{2} + i \ \text{ o } \ \mathrm{e}^{iz} = i\sqrt{2} - i\\
&\iff \mathrm{e}^{iz} = (\sqrt{2}+1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \text{ o } \mathrm{e}^{iz} = (\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) + i(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ o } iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1) + i(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi)\\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = (\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) \text{ o } z = (\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación $\cos z + \operatorname{sen} z = 2$ en $\mathbb{C}$ son los números complejos de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1)$ o $z = (\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1)$, con k entero.

Solución del ejercicio 7834 ▲007613

1. $\operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \dfrac{1}{2i}(\dfrac{az+b}{cz+d} - \overline{\dfrac{az+b}{cz+d}}) = \dfrac{1}{2i}(\dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}) = \dfrac{1}{2i}\dfrac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

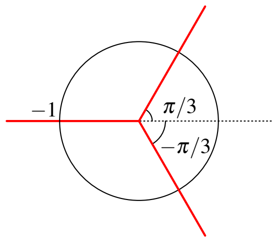
   En consecuencia, si $\operatorname{Im}(z) > 0$, entonces $\operatorname{Im}(h_A(z)) > 0$ y h_A envía $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{H}$.

2. Sea $z = x + iy$. Se tiene $\dfrac{xi - y}{1 \times i + 0} = z$. La matriz $\begin{pmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sirve así por lo tanto que la matriz $\frac{1}{y}\begin{pmatrix} x & -y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de determinante 1.

Solución del ejercicio 7835 ▲007614

1. Sea $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $r \geqslant 0$ y $\theta \in]-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}
z^3 \notin \mathbb{C}^- &\iff z^3 \in \mathbb{R}^-\\
&\iff r^3\mathrm{e}^{i3\theta} \in \mathbb{R}^-\\
&\iff 3\theta \simeq \pi \operatorname{mod} 2\pi\\
&\iff \theta \simeq \tfrac{\pi}{3} \operatorname{mod} \tfrac{2\pi}{3}\\
&\iff \theta = -\tfrac{\pi}{3} \ \text{ o } \ \theta = \tfrac{\pi}{3} \ \text{ o } \ \theta = \pi.
\end{aligned}$$



   El dominio D consta de $\mathbb{C}$ menos las semi-rectas en rojo.

2. Sea $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $r \geqslant 0$ y $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   — Si $\theta \in]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$, $3\theta \in]-\pi, \pi[$ y entonces, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i3\theta = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta = 3\log(z)$.
   — Si $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, $3\theta \in]\pi, 3\pi[$ y $3\theta - 2\pi \in]-\pi, \pi[$ y entonces, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i(3\theta - 2\pi) = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta - 2i\pi = 3\log(z) - 2i\pi$.
   — Si $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{3}, [$, $3\theta \in]-3\pi, -\pi[$ y $3\theta + 2\pi \in]-\pi, \pi[$ y entonces, $f(z) = \log(z^3) = \log_{\mathbb{R}}(r^3) + i(3\theta + 2\pi) = 3\log_{\mathbb{R}}(r) + 3i\theta + 2i\pi = 3\log(z) + 2i\pi$.

La función f por lo tanto, no es continua en los puntos de la semirrecta de ángulo $\frac{\pi}{3}$ ni en los puntos de la semirrecta de ángulo $-\frac{\pi}{3}$, donde la función log es continua. Se sabe que el salto de la rama principal log del logaritmo entre $(-\pi^+$ y π^- es de $2i\pi$. El salto de f es, por lo tanto de $6i\pi$ y no es continua en los puntos de la semirrecta de ángulo π.

3. La respuesta fue dada en la pregunta anterior.

Solución del ejercicio 7848 ▲007627

1. Se utiliza la escritura $z = re^{i\theta}$ con $r \in [0, +\infty[$ y $\theta \in]-\pi, \pi[$:

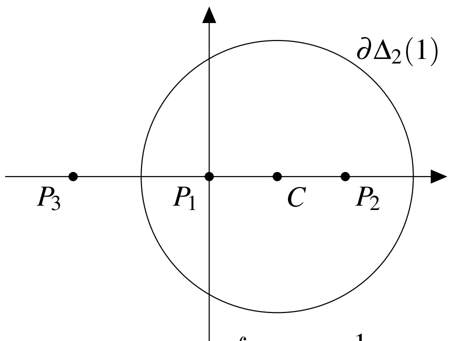
$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \ln_{\mathbb{R}}(r) + i\theta. \end{aligned}$$

2. Una primitiva de una aplicación continua f sobre $\mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa F sobre $\mathbb{C}$ cuya derivada compleja F' es la aplicación f.
3. Como la derivada compleja de una aplicación holomorfa es holomorfa, no existen tales ejemplos.
4. $\begin{aligned} \mathrm{Id} : \Delta &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z \end{aligned}$ es holomorfa no constante.
5. Por el teorema de Liouville, todo aplicación entera acotada es constante : entonces no existen tales ejemplos.
6. $\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\longrightarrow \Delta \\ z &\longmapsto \tfrac{z-i}{z+i} \end{aligned}$ o bien $\begin{aligned} e : \mathbb{H} &\longrightarrow \Delta \\ z &\longmapsto \exp(2i\pi z). \end{aligned}$

Solución del ejercicio 7849 ▲007628

Se escribe la descomposición en elementos simples de la fracción racional

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} = \frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4z^2}.$$



El primer y tercer término corresponden a los polos simples P_2 y P_1 al interior del círculo $\partial\Delta_2(1)$. Así,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \left(\frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4z}\right) dz = (2i\pi)(\frac{5}{16} - \frac{1}{4}) = \frac{i\pi}{8}.$$

El segundo término corresponde al polo P_3 al exterior del círculo $\partial\Delta_2(1)$, por lo tanto, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{16(z+2)} dz = 0$. El último término es la integral en un camino cerrado de la aplicación exacta $z \mapsto \frac{1}{4z^2}$ primitivo $z \mapsto -\frac{1}{4z}$. Así, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{4z^2} dz = 0$. En conclusión,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z(z^2-4)} dz = \frac{i\pi}{8}.$$

Otro enfoque es : Se escribe la descomposición en elementos simples de la fracción racional

$$\frac{1}{z^2(z^2-4)} = \frac{1}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z^2}.$$

y así con $f(z)=z^2+z-1$ holomorfa en $\mathbb{C}$

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}=\frac{1}{16}\frac{f(z)}{z-2}-\frac{f(z)}{16(z+2)}-\frac{f(z)}{4z^2}.$$

Por el teorema de Cauchy en los discos, ya que 0 y 2 están en $\Delta_2(1)$, pero no -2

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}dz&=\frac{1}{16}\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{z-2}dz-\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{16(z+2)}dz-\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{4z^2}dz\\&=\frac{2i\pi f(2)}{16}-0-\frac{2i\pi f'(0)}{4}=\frac{5i\pi}{8}-\frac{i\pi}{2}=\frac{i\pi}{8}.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7850 ▲007629

1. Se supone que 0 no está en la adherencia de la imagen de f. Entonces existe $r>0$ tal que $f(\mathbb{C})\cap\Delta_r=\varnothing$. Dicho de otra manera,
$$\forall z\in\Delta,\ |f(z)|\geqslant r.$$
La aplicación f por lo tanto no se anula en $\mathbb{C}$ y la función holomorfa $1/f$ es mayorada por $1/r$ sobre $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville, entonces es constante, así como f.
2. Sea $c\in\mathbb{C}$. Aplicando el resultado anterior a $f-c$ se obtiene que c está en la adherencia de la imagen de f. En consecuencia, la adherencia de la imagen de f es $\mathbb{C}$.

Solución del ejercicio 7851 ▲007630

1. Si f tenía una singularidad aparente o polar en 0, como $z\mapsto 1/z$ tiene una singularidad polar en 0, $f+1/z$ tendría una singularidad aparente o polar. Pero para todo entero natural n, y para todo real x estrictamente positivo, $x^n\exp(\frac{1}{x})\geqslant x^n\frac{1}{(n+1)!x^{n+1}}$. Entonces, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\exp(\frac{1}{x})=+\infty$. En consecuencia $z\mapsto\exp(\frac{1}{z})$ tiene una singularidad esencial en 0, así como f.
2. Escribiendo la expansión en series enteras de la exponencial, se obtiene
$$\forall z\in\mathbb{C}^\star,\ \ f(z)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{n!}.$$
Pero la serie, $z+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{-n+1}}{(-n+1)n!}$ es, como la aplicación exponencial, normalmente convergente en $\mathbb{C}^\star$ y por lo tanto, y define una aplicación holomorfa F tal que F' que se calcula como suma de las derivadas, por convergencia normal, verifica $F'=f$: es una primitiva de f.
3. Porque la aplicación f es exacta en D y que $\partial\Delta$ es un camino orientado cerrado en D, $\int_{\partial\Delta}fdz=0$. Se deduce
$$\int_{\partial\Delta}\exp(\tfrac{1}{z})dz=\int_{\partial\Delta}\tfrac{1}{z}dz=2i\pi.$$

Solución del ejercicio 7852 ▲007631

1. Esta aplicación es continua en i : por lo tanto, no tiende a $+\infty$ en módulo cuando z tiende a i y no tiende a $+\infty$ en módulo cuando $|z|$ tiende a 1.
2. Por el principio del máximo aplicado a la función holomorfa $\Delta \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/f(z)$,
$$|1/f(0)| \leqslant \sup_{|z|=r_n} |1/f(z)| = \frac{1}{\inf\limits_{|z|=r_n} |f(z)|} \leqslant 1/n.$$
Entonces, para todo n, $|f(0)| \geqslant n$, lo que es absurdo. Entonces no existe tal sucesión. Entonces, en el caso donde f no tiene cero, $|f(z)|$ no tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1.
3. Como $|f(z)|$ tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1, existe $r \in]0,1[$ tal que para todo $z \in \Delta$, con $|z| > r$, $|f(z)| > 1$. La aplicación f por lo tanto no se anula en $\Delta \setminus \overline{\Delta_r}$. Por el teorema de los ceros aislados, ya que f holomorfa no es constante, solo admite un número finito de ceros en el compacto $\overline{\Delta_r}$ y por consecuencia a lo largo del disco Δ. Sea $P(z)$ el polinomio mónico cuyos ceros son los ceros de f, con las mismas multiplicidades. La aplicación $h = \frac{f}{P}$ tiene singularidades aisladas en los ceros de f. En el vecindario de estos ceros, el desarrollo en la serie entera de f demuestra que las singularidades son aparentes y que h tiende a un valor finito no nulo en estos puntos. La aplicación h se extiende así por continuidad en una aplicación holomorfa g sobre Δ. La igualdad $f = hP$ sobre $\Delta - f^{-1}(0)$ se extiende por continuidad en $f = gP$ sobre Δ. Por construcción, por la elección de multiplicidades, la aplicación g no tiene ceros en los ceros de f, y por lo tanto, no tiene cero en Δ. Como $|f(z)|$ tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1 y que $|P|$ tiende a un valor finito en todo punto de $\partial\Delta$, $|g|$ tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1. El caso anterior demostrar que la existencia de tal solicitud g es absurda. Entonces, $|f(z)|$ no tiende a $+\infty$, cuando $|z|$ tiende a 1.

Solución del ejercicio 7854 ▲007633

Tal aplicación es mayorada en módulo, por el máximo del módulo de sus valores en el cuadrado compacto limitado por los puntos de afijo $0, 1, 1+i, i$. Por lo tanto, es entera y acotada, o sea es constante, por el teorema de Liouville. Entonces no existe tal aplicación.

Solución del ejercicio 7855 ▲007634

1. Bajo esta hipótesis, se puede considerar las aplicaciones holomorfas en D, f/g y g/f. Están mayoradas en módulo por 1 en la unidad , y por lo tanto, también sobre el disco cerrado por el principio del máximo. Por lo tanto, ambos son de módulo 1 en la unidad, y por lo tanto, constantes en el disco unitario por el teorema de la aplicación abierta. Por conexidad de D, son constantes en D. Existe por lo tanto $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$ sobre D. Por igualdad de los módulos, se concluye que $|\lambda| = 1$.
2. No, las aplicaciones $z \mapsto z$ y $z \mapsto z^2$ son del mismo módulo en el disco unidad, pero no son proporcionales.

Solución del ejercicio 7856 ▲007635

1. Se observa primero que los índices de w_1, w_2, w_3, con respecto a Γ son respectivamente $-1, 1$ y 0. La aplicación $\mathbb{C} \setminus \{w_1, w_2, w_3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en w_1, w_2, w_3 del respectivo residuo :
$$\lim_{z \to w_1} (z-w_1)\frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)} = \frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}, \frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}, \frac{1}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}.$$

Por el teorema de Cauchy,

$$\begin{aligned}
A &= 2i\pi\left(\operatorname{Ind}_\Gamma(w_1)\operatorname{Res}_{w_1}(f)+\operatorname{Ind}_\Gamma(w_2)\operatorname{Res}_{w_2}(f)+\operatorname{Ind}_\Gamma(w_2)\operatorname{Res}_{w_3}(f)\right)\\
&= 2i\pi\left(-\frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}+\frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}+0\right)\\
&= \frac{2i\pi(w_1+w_2-2w_3)}{(w_2-w_1)(w_1-w_3)(w_2-w_3)}
\end{aligned}$$

2. La aplicación $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \operatorname{sen} z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ estrellado : su integral en el camino cerrado Γ es, por lo tanto nula.
3. Por el teorema de Cauchy para derivadas,

$$C = 2i\pi\operatorname{Ind}_\Gamma(w_1)\operatorname{sen}'(w_1) = -2i\pi\cos(w_1).$$

Solución del ejercicio 7857 ▲007636

1. En el borde de Δ_2

$$|P(z)-z^4| = |6z+3| \leqslant 6\times 2+3 = 15 < 16 = 2^4 = |z|^4.$$

Por el teorema de Rouché, P de grado 4 por lo tanto tiene, como $z\mapsto z^4$ sus cuatro raíces en Δ_2.

2. En el borde de Δ

$$|P(z)-(6z+3)| = |z^4| = 1 < 6-3 \leqslant |6z|-3 \leqslant |6z+3|.$$

Por el teorema de Rouché, el polinomio P solo tiene, como $z\mapsto 6z+3$ una raíz en Δ.

3. En el borde de $\Delta_{\frac{1}{3}}$

$$|P(z)-(6z+3)| = |z^4| = \frac{1}{81} < 3-6/3 = 3-|6z| \leqslant |6z+3|.$$

Por el teorema de Rouché, el polinomio P no tiene, como $z\mapsto 6z+3$ ninguna raíz en $\Delta_{\frac{1}{3}}$.

4. Por la pregunta 2, $z\mapsto \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3}z$ es meromorfa en $\Delta_{1+\varepsilon}$, con un solo polo como punto a. El residuo en a de P'/P es la multiplicidad 1 de a como cero de P. En consecuencia, el residuo en a de $\frac{4z^3+6}{z^4+6z+3}z$ es a. La fórmula solicitada resulta así del teorema del residuo.

Solución del ejercicio 7860 ▲007639

1. Se denota $f = u+iv$.

$$\begin{aligned}
\Delta|f|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2(x,y)+v^2(x,y))\\
&= 2(\left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right|^2)+2u\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2v\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Por las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la función holomorfa $f = u+iv$, y por simetría de Schwarz, las dos últimas cantidades entre paréntesis son cero. Se encuentra por lo tanto

$$\Delta|f|^2 = 4|f'|^2.$$

2. Se aplica la fórmula anterior a cada f_i, para obtener

$$\Delta \sum_{i=1}^{N} |f_i(z)|^2 = 4 \sum_{i=1}^{N} |f_i'(z)|^2 = 0.$$

Se deduce que cada aplicación holomorfa f_i tiene derivada idénticamente nula y por lo tanto, es constante en D conexa.

Solución del ejercicio 7861 ▲007640

Sea $\varphi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$ y sea $\zeta \in \partial\Delta$,

$$|\varphi(\zeta)|^2 = \frac{16|\zeta|^2 + 9 + 12(\zeta + \overline{\zeta})}{16 + 9|\zeta|^2 + 12(\zeta + \overline{\zeta})} = 1.$$

Por el principio del máximo aplicado a φ holomorfa en el disco $\Delta_{4/3}$ se obtiene que para todo $z \in \Delta$, $|\varphi(z)| \leqslant 1$.

Solución del ejercicio 7862 ▲007641

Los ceros del polinomio $2z^2 - 5z + 2 = (z-2)(2z-1)$ y por lo tanto, las singularidades de la aplicación meromorfa $f(z) = \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ son 2 y $1/2$. Estos son polos simples. Sus residuos respectivos son $\operatorname{Res}_2(f) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{2z^2-5z+2} = \frac{1}{3}$ y $\operatorname{Res}_{1/2}(f) = \lim_{z\to 1/2}(z-\frac{1}{2})\frac{1}{2z^2-5z+2} = -\frac{1}{3}$. Sus índices con respecto al camino orientado $\partial\Delta_r$ son 0 o 1, dependiendo de si están o no en el disco Δ_r. Se encuentra por lo tanto, por el teorema del residuo aplicado a la aplicación meromorfa f : (los valores de r excluidos son $1/2$ y 2 porque los círculos correspondientes pasan por una singularidad.)

1. si $0 < r < \frac{1}{2}$, $I_r = 0$.
2. si $1/2 < r < 2$, $I_r = -2i\frac{\pi}{3}$.
3. si $2 < r$, $I_r = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Solución del ejercicio 7863 ▲002210

1. $V_{ij}A$ reemplaza la línea i por su suma con la fila j multiplicada por λ. AV_{ij} reemplaza la columna j por la suma con la columna i multiplicada por λ.
2. $V_{ij}(\lambda)V_{kj}(\lambda') = I + \lambda E_{ij} + \lambda' E_{kj}$
3. Basta con demostrar que $(I + l_i e_i^T)(I - l_i e_i^T) = I$.
4. $L(l_i) = V_{i+1,i}(l_{i+1,i}) \cdots V_{n,i}(l_{n,i})$.
5. $L^{-1} = L(-l_{n-1})L(-l_{n-2}) \cdots L(-l_1) \neq I - l_1 e_1^T - \cdots - l_{n-1} e_{n-1}^T$.
6. (a) algoritmo usando la expresión de L^{-1}

   Para $i = 1$ a $n-1$

   cálculo de $L(-l_i)b$

   Para $j = i+1$ a n

   $b_j \leftarrow b_j - l_{ji} b_i$

   (b) algoritmo resolviendo el sistema triangular $x_1 = b_1$

Para $i = 2$ a n

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j$$

Conclusión : el número de cálculos y el espacio de memoria utilizado son los mismos.

Solución del ejercicio 7864 ▲002211

Para probar la igualdad, basta con multiplicar el lado derecho por $(A+UBV)$ y demostrar que se tiene la identidad.
Dominio de validez :$A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ invertible, $U \in \mathscr{M}_{n\times p}$, $B \in \mathscr{M}_{p\times q}$, $V \in \mathscr{M}_{q\times n}$, $I + BVA^{-1}U$ invertible.

1. Se obtiene la fórmula de Shermann-Morrisson :

$$(A+\beta uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{\beta}{1+\beta v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$$

que permite el cálculo de la inversa de una matriz que aparece como una perturbación de rango 1 de una matriz de la que conocemos la inversa.

2. $$B\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (A+uv^T)x + yu = 0 \\ v^T x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -yA^{-1}u \\ v^T x = -yv^T A^{-1} u = 0, \end{cases}$$

lo que da $x = 0$, $y = 0$ y entonces B es invertible.

3. Aplicando la fórmula general, se tiene

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}uv^T A^{-1} & A^{-1}u \\ v^T A^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

4. Aplicando la misma fórmula, se tiene

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} + P^{-1}Q\Delta^{-1}RP^{-1} & -P^{-1}Q\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}RP^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix},$$

con $\Delta = S - RP^{-1}Q$.

5. Cálculo recursivo de la inversa : se dispone de A_{n-1}^{-1} de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ y se desea calcular la inversa de

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & s \end{pmatrix}, \text{ con } u, v \in \mathbb{R}^{n-1},\ s \in \mathbb{R}$$

usando la fórmula anterior, se tiene

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{\delta} A_{n-1}^{-1} vu^T A_{n-1}^{-1} & -A_{n-1}^{-1} \frac{v}{\delta} \\ -u^T A_{n-1}^{-1}/\delta & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix},$$

con $\delta = s - u^T A_{n-1}^{-1} v$, y se deduce fácilmente el algoritmo.

Solución del ejercicio 7865 ▲002212

1. $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$ radio espectral de la matriz A^*A. Por otro lado, se tiene :
$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^*A) \begin{cases} \geqslant \rho(A^*A) \\ \leqslant n\rho(A^*A) \end{cases}$$
donde tr es la traza de la matriz y λ_i sus propios valores.

2. $$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant (mn \max_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|$$
Sea x tal que : si $\max |a_{ij}| = |a_{i_0 j_0}|$, entonces ponemos $x = e_{j_0}, \|x\|_2 = 1$. Así
$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2 \Rightarrow \sup \|Ax\|_2^2 \geqslant \max |a_{ij}|^2.$$

3. Se recuerda que $\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|$, para cierto i_0. Entonces
$$\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \times \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \leqslant m \max \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)^2 = m\|A\|_\infty.$$
Se escoge ahora $x = (x_i)$, con $x_i = \operatorname{sign}(a_{i_0 i})$. Entonces
$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|A\|_\infty$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{n} \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)^2 \geqslant \|A\|_\infty^2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}},$$
lo que implica $\|A\|_2 \geqslant \|A\|_\infty / \sqrt{n}$.

4. La misma demostración que antes o entonces constatar que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

5. $$\|E\|_F^2 = \sum_{i,j} u_i^2 v_j^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i^2 v_j^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2,$$
$$\|E\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |u_i v_j|\right) = \max_i \left(|u_i| \sum_{j=1}^n |v_j|\right) = \|v\|_1 \|u\|_\infty$$
$$\|Ex\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(u_i \sum_{j=1}^n v_j x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 \times (x,x)^2 = \|u\|_2^2 (x,v)^2,$$
$$\frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \frac{(x,v)}{\|x\|_2} \|u\|_2 \Rightarrow \sup_x \frac{\|Ex\|_2}{\|x\|_2} = \|v\|_2 \|u\|_2.$$

Solución del ejercicio 7866 ▲002213

$\rho(A) < 1 \Rightarrow 1$ no es valor propio de $A \Rightarrow 0$ no es valor propio de $I - A \Rightarrow I - A$ invertible.
$$(I-A)C_k = (I-A)(I + A + \cdots + A^k) = I - A^{k+1}$$
$$C_k = (I-A)^{-1}(I - A^{k+1}) \Rightarrow (I-A)^{-1} - C_k = (I-A)^{-1} A^{k+1}$$
y concluir
$$\|(I-A)^{-1} - C_k\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A^{k+1}\| \leqslant \|(I-A)^{-1}\| \|A\|^{k+1}.$$

Como $\|A\| < 1$, para al menos una norma subordinada finalmente se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \|(I-A)^{-1} - C_k\| = 0.$$

Solución del ejercicio 7867 ▲002214

$AB = I - X \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (I-X)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = B(I-X)^{-1} = B(I+X+X^2+\cdots)$

$$\|A^{-1} - B\| \leqslant \|BX\|\|I+X+\cdots\| \leqslant \|BX\|(1+\|X\|+\|X\|^2+\cdots) \leqslant \frac{\|BX\|}{1-\|X\|},$$

para $\|X\| < 1$.

Solución del ejercicio 7869 ▲002216

4. Se calcula

$$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y sus valores propios

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 = \mu_1^2, \lambda_2 = 2 = \mu_2^2.$$

Se calculan luego los vectores propios asociados a estos valores propios

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y la matriz V es la matriz cuyas columnas son

$$v_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T, \quad v_2 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})^T$$

las columnas de U, entonces están dadas por

$$u_1 = Av_1/\mu_1 = 1/(\sqrt{7}\sqrt{5})(3,5,-1)^T, \quad u_2 = Av_2/\mu_2 = 1/(\sqrt{2}\sqrt{5})(-1,0,-3)^T,$$

en cuanto a u_3 se elige ortogonal a u_1 y u_2 y de norma 1.

Solución del ejercicio 7870 ▲002217

1. $\Sigma^\dagger\Sigma e_i = e_i$, $i = 1,\dots,r$ es la aplicación identidad.
2. $AA^\dagger = U\Sigma V^* V\Sigma^\dagger U = U\Sigma\Sigma^\dagger U^* = I$.
   Se tiene entonces una generalización de la inversa.
3. $U^* \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i u_i^*$ con $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\}$ base canónica de $\mathbb{R}^m$. Como $\Sigma^\dagger\varepsilon_i = 0$, para $r+1 \leqslant i \leqslant m$ se tiene

$$\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1} e_i u_i^* \Rightarrow A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^* = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1}(Ve_i)u_i^* = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1} v_i u_i^*.$$

4. Se tiene
$$AA^\dagger = \sum_{i=1}^r \mu_i u_i v_i^* \sum_{j=1}^r \mu_j^{-1} v_j u_j^* = \sum_{j=1}^r \mu_j \mu_j^{-1} u_j u_j^*.$$
Como $\mathrm{Im}(A)$ =gen$\{u_1,\dots,u_r\}$ el resultado se sigue.

5. Sea $y \in \mathrm{Im}A^* \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^r x_i v_i$, entonces
$$A^*A = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 v_i v_i^* \Rightarrow A^*Ay = \sum_{i=1}^r \mu_i^2 x_i v_i$$
y finalmente
$$\Big(\sum_{i=1}^r \mu_i^{-2} v_i v_i^*\Big)(A^*Ay) = \sum_{i=1}^r x_i v_i.$$

Solución del ejercicio 7871 ▲002218

1. $\|A\|_2 = \|U\Sigma V^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max|\sigma_j| = \sigma_1$.
2. $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = \mathrm{tr}(U^*A^*AU) = \|AU\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*U^*UA) = \|UA\|_F^2$ y entonces
$$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_r^2}.$$
3. $A^*A = (V\Sigma^*U^*)(U\Sigma V^*) = V(\Sigma^*\Sigma)V^*$ y entonces A^*A es semejante a $\Sigma^*\Sigma$, las dos matrices por lo tanto tienen los mismos valores propios. Los valores propios de $\Sigma^*\Sigma$ son $\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$ más $n-r$ valores propios nulos si $n>r$.
4. $|\det A| = |\det(U\Sigma V^*)| = |\det U|\det|\Sigma||\det V^*| = |\det\Sigma| = \prod_{i=1}^r \sigma_i$.
5. Una matriz hermitiana que es diagonalizable tiene una base ortonormal de vectores propios
$$A = Q\Lambda Q^* = Q|\Lambda|\mathrm{sign}(\Lambda)Q^*,$$
con U =sign$(\Lambda)Q^*$ es una matriz unitaria : $U^*U = Q\mathrm{sign}(\Lambda)\mathrm{sign}(\Lambda)Q^* = QQ^* = I$. Entonces $Q|\Lambda|U$ es una descomposición en valores singulares de A, los valores singulares son $|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|$.

Solución del ejercicio 7872 ▲002219

1. $\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A) = \mu_1^2(A)$ el más grande valor singular de A.
$\|A^{-1}\|_2^2 = \rho(A^{-1}(A^{-1})^*) = \max_i \lambda_i((A^*A)^{-1}) = \frac{1}{\mu_n(A)^2}$, con $\mu_n(A)$ el más pequeño valor singular de A. Entonces
$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mu_n(A)/\mu_1(A).$$
2. Si A es normal, entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$ radio espectral y así
$$A^{-1} = UD^{-1}U^* \Rightarrow (A^{-1})^*A^{-1} = U(D^{-1})^*D^{-1}U^* \Rightarrow \rho((A^{-1})^*A^{-1}) = 1/\min_i|\lambda_i(A)|^2$$
$$\mathrm{cond}_2(A) = \max|\lambda_i(A)|/\min|\lambda_i(A)|.$$

3. $\mathrm{cond}_2(QA) = \|QA\|_2\|A^{-1}Q^*\|_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)$.

Solución del ejercicio 7874 ▲002221

$B = A+\delta A = A(I+A^{-1}\delta A)$ matriz invertible si $\|A^{-1}\delta A\| < 1$.

$$B^{-1}-A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} \Rightarrow \|B^{-1}-A^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\| \Rightarrow$$
$$\frac{\|B^{-1}-A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A-B\| = \|A^{-1}\|\|\delta A\| = \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Solución del ejercicio 7875 ▲002222

1. En la k-ésima etapa de eliminación gaussiana, el elemento a_{ij}^{k+1} es dado por

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{kj}^k a_{ik}^k}{a_{kk}^k}, \quad k+1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

y se nota inmediatamente, por recurrencia que todas las matrices $\tilde{A}_k$ son simétricas. Se tiene

$$(\tilde{A}_{k+1}v',v') = \sum_{i=k+1}^n v_i\Big(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)}v_j\Big) - \frac{1}{a_{kk}^k}\big(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i\big)^2$$
$$(\tilde{A}_k v,v) = \sum_{i=k+1}^n v_i\Big(\sum_{j=k+1}^n a_{ij}^k v_j\Big) + \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^k + a_{ki}^k)v_i v_k + a_{kk}^k v_k^2.$$

Por simetría $a_{ik}^k = a_{ki}^k$ y entonces

$$(\tilde{A}_k v,v) = (\tilde{A}_{k+1}v',v') + \frac{1}{a_{kk}^k}\Big[\Big(\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i\Big)^2 + 2v_k\sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i a_{kk}^k + (a_{kk}^k)^2 v_k^2\Big]$$
$$= (\tilde{A}_{k+1}v',v') + \frac{1}{a_{kk}^k}\Big[a_k k^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i\Big]^2.$$

2. Hacer un razonamiento por recurrencia :
   — $\tilde{A}_1$ es definida positiva simétrica;
   — Se supone por hipótesis que $\tilde{A}_k$ es definida positiva;
   — Se supone por contradicción que $\tilde{A}_{k+1}$ no es definida positiva : entonces $\exists v' \neq 0 : (\tilde{A}_{k+1}v',v') \leqslant 0$.
   Se define el vector $v \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ por :
   — $v_i = v_i'$, $k+1 \leqslant i \leqslant n$,
   — v_k es solución de $a_{kk}^k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i = 0$.
   Entonces $(\tilde{A}_k v,v) = 0$ y $v \neq 0$; por lo tanto $\tilde{A}_k$ no es definida positiva, lo que contradice la hipótesis de inducción.

3. Primera desigualdad : usando la relación de eliminación se tiene : $a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^k - \dfrac{\left|a_{ki}^k\right|^2}{a_{kk}^2}$.
   — una matriz definida positiva tiene todos sus elementos diagonales estrictamente positivos, por lo tanto $a_{ii}^{k+1} > 0$
   — $\left|a_{ki}^k\right|^2 / \left|a_{kk}^k\right|^2 \geqslant 0$, $k+1 \leqslant i \leqslant n$,

por lo tanto $a_{ii}^{k+1} \leqslant a_{ii}^k$, $k+1 \geqslant i$.
Segunda desigualdad : se supone que existe un elemento a_{ij}^k, $i<j$, tal que $\left|a_{ij}^k\right| \geqslant \max\limits_{k\leqslant 1l\leqslant n} a_{ll}^k$. Se considera el vector $v \neq 0$ definido por

$$v_i = 1,\ v_j = -\operatorname{sign}(a_{ij}^k),\ v_l = 0, \quad l \neq i, j.$$

Entonces

$$(\tilde{A}_k v, v) = (a_{ii}^k - \left|a_{ij}^k\right|) - (\left|a_{ij}^k\right| - a_{jj}^k) \leqslant 0,$$

lo que es imposible. Así

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}^k\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|a_{ii}^k\right|$$

Solución del ejercicio 7877 ▲002224

Demostrar por inducción que $A_n = U$ es una matriz banda.
$A_1 = A,\ \ A_{k+1} = L_k A_k = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A,\ \ k = 1, \ldots, n-1.$
Se supone que A_k es una matriz banda i.e., $a_{ij}^k = 0$, para $|i-j| \geqslant p$ y demostrar que A_{k+1} es una matriz banda.

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{a_{kk}^k}.$$

Sea $|i-j| \geqslant p \Leftrightarrow |(i-k)-(j-k)| \geqslant p$. Se consideran dos casos :
— $k+1 \leqslant i \leqslant n$ y $k \leqslant j \leqslant n$. Entonces $i-k \geqslant p$ o $j-k \geqslant p \Rightarrow a_{ik}^k a_{kj}^k = 0 \Rightarrow a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$
— $i \leqslant k$ o $j \leqslant k-1$, entonces $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$
por lo tanto A_{k+1} es una matriz banda y U es una matriz banda. Se tiene $A = LU$ y la matriz triangular inferior L tiene los elementos $l_{ij} = a_{ij}^j / a_{jj}^j$, $j \leqslant i \leqslant n$.
Todas las matrices A_j son matrices bandas, se tiene $a_{ij}^j = 0$, para $i-j \geqslant p \Rightarrow l_{ij} = 0$, para $i-j \geqslant p$.

Solución del ejercicio 7878 ▲002225

Sea LU la factorización LU de A. Se va a insertar en esta factorización la matriz real $\Lambda = \operatorname{diag}(\sqrt{|u_{ii}|})$.
$A = (L\Lambda)(\Lambda^{-1}U) = BC$. La simetría de A implica $BC = C^T B^T$. Se tiene $C(B^T)^{-1}$ matriz triangular superior, $B^{-1}C^T$ matriz triangular inferior y $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T$ y entonces

$$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = \operatorname{diag}(\operatorname{sign}(u_{ii}) = S \Rightarrow C(B^T)^{-1}S^{-1} = I = S^{-1}B^{-1}C^T \Leftrightarrow C^T = BS = \tilde{B}.$$

Entonces A puede ser escrita de la forma

$$A = B\tilde{B}^T, \ \text{ con } \tilde{B} = BS,$$

i.e. la i-ésima columna de $\tilde{B}$ es igual a la i-ésima columna de B afectada por el signo de u_{ii}.
Aplicación numérica :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 7881 ▲002228

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$$

A^T es a diagonal estrictamente dominante, se tiene :

$$|\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i|, \quad |u_i| + \sum_{j\neq i} |b_{ji}| < |b_{ii}|.$$

Basta con demostrar que

— la primera columna de L verifica $|l_{11}| > \sum_{i\neq 1} |l_{i1}|$

— B_2 es tal que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = B_2 = B_1 - \frac{1}{\alpha} v u^T,$$

verifica $|c_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ji}|$, con $C_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i u_j$ e iterar.

— primera columna de L : $l_{i1} = v_i/\alpha \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} |l_{i1}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|v_i|}{\alpha} < 1$

— $\sum_{i\neq j} |c_{ij}| = \sum_{i\neq j} \left| b_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i w_j \right| \leqslant \sum_{i\neq j} |b_{ij}| + \frac{1}{|\alpha|} |w_j| \sum_{i\neq j} |v_i|$

$$\leqslant |b_{jj}| - |u_j| + \frac{1}{|\alpha|} |u_j| (|\alpha| - |v_j|) \leqslant \left| b_{jj} - \frac{1}{\alpha} u_j v_j \right| = |c_{jj}|,$$

por lo tanto B_2^T es de diagonal estrictamente dominante. La demostración termina usando inducción.

Solución del ejercicio 7882 ▲002229

1. Sea P el operador de proyección en el subespacio U de dimensión 1 generado por v. Entonces $Q = I - P$ es el operador de proyección en el hiperplano $U^\perp$ ortogonal a U. Ya se ha visto que $Pw = vv^T w \quad \forall w$, y entonces $Qw = w - vv^T w$. Se obtiene
$P(H(v)w) = P(w_(2v^T w)v) = (v^T w)v - 2v^T w v v^T v = -(v^T w)v = -Pw$
$Q(H(v)w) = H(v)w - P(H(v)w) = w - 2vv^T w + v^T wv = w - v^T wv = Qw.$
La matriz $H(v)$ representa así una simetría con respecto al hiperplano $U^\perp$. Se concluye que los vectores de $U^\perp$ son invariantes por $H(v)$.
$V(v)w = w, \forall w \in U^\perp, \dim U^\perp = n - 1 \Rightarrow \lambda = 1$ es valor propio de $H(v)$, con multiplicidad $n-1$.
$H(v)v = -v \mp \lambda = -1$ es valor propio de la multiplicidad 1. Entonces
$$\det H(v) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(H(v)) = -1.$$

2. Se sabe que existen matrices de Householder $H_1, H_1, \ldots, H_{n-1}$ tales que $H_{n-1} \cdots H_1 A = A_n$ matriz triangular superior. Como A es ortogonal, concluimos que A_n es ortogonal. Pero una matriz triangular superior ortogonal es necesariamente diagonal $\Rightarrow A_n = \mathrm{diag}(\pm 1)$. Se puede arreglar para que $(A_n)_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Así sea $A_n = I$, sea $A_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1) = H(e_n)$ y finalmente la matriz ortogonal A se escribe
$$A = H_1 \cdots H_{n-1} H(e_n).$$

Solución del ejercicio 7883 ▲002230

1. Para $k = 1, \ldots, n$, $a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i$, con $r_{ik} = q_i^T a_k$ por ortonormalidad de q_i.
2. Se sigue inmediatamente, de la pregunta anterior.
3. Algoritmo de Gram-Schmidt :
   Para $k = 1, \ldots, n$ hacer
   $r_{ik} = q_i^T a_k$, para $i = 1, \ldots, k-1$
   $z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i$
   $r_{kk} = (z_k^T z_k)^{1/2}$
   $q_k = z_k / r_{kk}$.
4. (a)
$$\sum_{i=k}^{n} q_i r_i^T = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & r_{kk} & \cdots & \cdots & r_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_{k+1,k+1} & \cdots & r_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}.$$
$$A^{(k)} e_k = z = [q_k \cdots q_n] \begin{pmatrix} r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{kk} q_k \Rightarrow r_{kk} = \|z\|_2, q_k = z / r_{kk}.$$
   (b)
$$q_k^T A^{(k)} = [q_k^T z, q_k^T B] = [1, 0, \ldots, 0] \begin{pmatrix} r_k^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{pmatrix} = r_k^T$$
   y entonces
$$[r_{k,k+1}, \ldots, r_{kn}] = q_k^T B.$$
   (c)
$$[0, \ldots, 0, A^{(k+1)}] = \sum_{i=k+1}^{n} q_i r_i^T = [0, \ldots, 0, A^{(k)}] - q_k r_k^T = [0, \ldots, 0, A^{(k)} - q_k (r_{kk}, \ldots, r_{kn})]$$
$$[0, \ldots, 0, z - q_k r_{kk}, B - q_k (r_{k,k+1}, \ldots, r_{kn})] \Rightarrow A^{(k+1)} = B - q_k (r_{k,k+1}, \ldots, r_{kn}).$$
   (d) Dadas : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = n$.
   Se calcula la factorización $A = Q_1 R_1$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortonormal, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior.
   El cálculo de Q_1 se hace en el sitio.
   Para $k = 1, \ldots, n$
   $r_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$
   para $i = 1, \ldots, m$
   $a_{ik} \leftarrow a_{ik} / r_{kk}$
   para $j = k+1, \ldots, n$
   $r_{kj} \leftarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}$
   para $i = 1, \ldots, m$
   $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} r_{kj}$
   (e) complejidad : mn^2 fallos.

Solución del ejercicio 7884 ▲002231

1. $G_{p,q}(c,s) = I + (c-1)e_pe_p^T + se_qe_p^T - se_qe_q^T + (c-1)e_pe_q^T$, con e_i los vectores de la base canónica.
2. Se demuestra que $e_i^T G^T Ge_j = \delta_{ij}$, $\forall i,j = 1,\dots,n$ y entonces $G^TG = I$, lo que permite la conclusión que G es invertible con inversa G^T y por lo tanto, ortogonal.
3. $e_i^T GA = e_i^T A = a_i^T$, para $i \neq p,q$
   $e_p^T GA = ca_p^T - sa_q^T$, $e_q^T GA = sa_p^T + ca_q^T$, y entonces G solo cambia las líneas p y q.
4. Se define $\alpha = a_{pj}$ y $\beta = a_{qj}$. Se tiene así que resolver en el primer caso el sistema

$$\begin{cases} c\alpha - s\beta = 0 \\ c^2+s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \pm\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

   lo que nos da dos matrices G. Para el segundo caso y procediendo de la misma forma, se tiene

$$\begin{cases} c = \pm\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ s = \mp\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \end{cases}$$

Solución del ejercicio 7887 ▲002234

Método rápido de Givens

1. $MM^T = \text{diag}(d_1,\dots,d_m) = \Delta^2$, con $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1},\dots,\sqrt{d_m})$.
   $\Delta^{-1}MM^T\Delta^{-1} = (\Delta^{-1}M)(\Delta^{-1}M)^T = I \Rightarrow \Delta^{-1}M$ es una matriz ortogonal.
   $A = M^{-1}S = (M^{-1}\Delta\Delta^{-1}S = (\Delta^{-1}M)^{-1}(\Delta^{-1}S) = (\Delta^{-1}M)^T(\Delta^{-1}S) = (M^T\Delta^{-1})(\Delta^{-1}S)$.
   Como $\Delta^{-1}S$ es triangular superior se tiene $A = QR$, con $Q = M^T\Delta^{-1}$, $R = \Delta^{-1}S$.
2. (a) $$M_1x = \begin{pmatrix} \beta_1x_1 + x_2 \\ x_1 + \alpha_1x_2 \end{pmatrix}, \quad M_1DM_1^T = \begin{pmatrix} d_2 + \beta_1^2d_1 & d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 \\ d_1\beta_1 + d_2\alpha_1 & d_1 + \alpha_1^2d_2 \end{pmatrix}.$$
   Entonces
   — $x_1 + \alpha_1x_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -x_1/x_2$
   — $d_1\beta_1 + d_2(-x_1/x_2) = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = -\alpha_1d_2/d_1 = x_1d_2/(x_2d_1)$.
   Por las escogencias precedentes se quiere determinar γ_1 tal que

$$x_2(1+\gamma_1) = \beta_1x_1 + x_2 = x_2(\beta_1x_1/x_2 + 1) \Rightarrow \gamma_1 = (d_2/d_1)(x_1/x_2)^2,$$

   es decir

$$\gamma_1 = -\alpha_1\beta_1,$$

   para esta valor se tiene

$$d_2 + \beta_1^2d_1 = d_2(1+\alpha_1^2d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1), \quad d_1 + \alpha_1^2d_2 = d_1(1+\alpha_1^2d_2/d_1) = d_2(1+\gamma_1).$$

   (b) El mismo tipo de cálculo nos da

$$\beta_2 = -x_2/x_1, \quad \alpha_2 = -(d_1/d_2)\beta_2, \quad \gamma_2 = -\alpha_2\beta_2 = (d_1/d_2)(x_2/x_1)^2.$$

   (c) Se observa que $\gamma_1\gamma_2 = 1$ y así $\gamma_1 \leqslant 1$, o $\gamma_2 \leqslant 1$.

3. $$\begin{pmatrix} m_{pp} & m_{pq} \\ m_{qp} & m_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix},$$
con los α_i, β_i definidos como antes.

4. *algoritmo*

   $d_i = 1$, para $i = 1, \dots, m$

   Para $p = 1, \dots, \min\{n, m-1\}$

   Para $q = p+1, \dots, m$

   si $a_{qp} \neq 0$, entonces

   $\alpha = -a_{pp}/a_{qp}, \quad \beta = -\alpha d_q/d_p, \quad \gamma = -\alpha\beta$

   si $\gamma \leqslant 1$, entonces

   $$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$$

   intercambiar d_p y d_q

   $d_p \leftarrow (1 + \gamma d_p)$

   $d_q \leftarrow (1 + \gamma d_q)$

   sinon

   intercambiar α y β

   $\alpha = 1/\alpha$, $\beta = 1/\beta$, $\gamma = 1/\gamma$

   $$\begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ a_{qp} & \cdots & a_{qn} \end{pmatrix}$$

   $d_p \leftarrow (1 + \gamma d_p)$

   $d_q \leftarrow (1 + \gamma d_q)$

   el costo de este algoritmo es de $n^2(m - n/3)$ fallos.

5. (a) Se tiene $MA = R = \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con S_1 triangular superior y $MM^T = D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. La matriz $D^{-1/2}M$ es una matriz ortogonal

   $$\|Ax - b\|_2^2 = \|D^{-1/2}MAx - D^{-1/2}Mb\|_2^2 = \left\| D^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - Mb \right] \right\|_2^2$$
   $$= \left\| D^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \right\|_2^2 = \left\| D^{-1/2} \begin{pmatrix} S_1x - c \\ d \end{pmatrix} \right\|_2^2.$$

   La solución es obtenida resolviendo el sistema triangular superior $S_1x = c$ de tamaño $n \times n$.

   (b) — actualización de b, para el cálculo de Mb al mismo tiempo que la actualización de A, para $p = 1, \dots, \min\{n, m-1\}$

   para $q = p+1, \dots, m$ hacer

   $$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \text{ o}$$
   $$\begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p \\ b_q \end{pmatrix}$$

   — resolución del sistema triangular superior $S_1x = c$ $x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$

   Para $i = n-1, \dots, 1$ hacer

   $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)$

6. Aplicación numérica :

$$M=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}8&16&24\\40&10&-20\\15&-30&15\end{pmatrix},\quad D=\mathrm{diag}(14/9,175/48,75/32)$$

$$M[A,b]=\begin{pmatrix}14/3&32/3&50/3\\0&15/4&15/2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad x_{ls}=(-1,2)^T$$

7. Se tiene
$$MD^{-2}M^T=\tilde{D}\Leftrightarrow(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})^T=I,$$
por lo tanto $(\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1})$ es una matriz ortogonal y se tiene
$$\|D(Ax-b)\|_2=\|\tilde{D}^{-1/2}MD^{-1}D(Ax-b)\|_2=\|\tilde{D}^{-1/2}(MAx-Mb)\|_2=\left|\tilde{D}^{-1/2}\begin{pmatrix}Sx-c\\e\end{pmatrix}\right|_2.$$
De este modo el min se alcanza para $Sx=c$, con $Mb=(C,e)^T$.
La modificación en el algoritmo anterior consiste en inicializar la matriz diagonal D, con D^{-2} (en lugar de la identidad).

Solución del ejercicio 7889 ▲002236

---

1. Para el lado izquierdo se tiene
$$(x,Ax)-(y,Ay)=(x,AM^{-1}Mx)+(M^{-1}Ax,Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax)$$
Para el miembro dela derecha se obtiene $y=Bx=x-M^{-1}Ax\Rightarrow x-y=M^{-1}Ax$ y entonces
$$\begin{aligned}&(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=(M^{-1}Ax,(M+M^*-A)M^{-1}Ax)=\\&(M^{-1}Ax,Ax)+(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)-(M^{-1}Ax,AM^{-1}Ax).\end{aligned}$$
Pero
$$(M^{-1}Ax,M^*M^{-1}Ax)=(x,(M^{-1}A)^*M^*M^{-1}Ax)=(x,AM^{-1}Ax),$$
lo que termina la demostración.
2. $y=Bx=\lambda x\Rightarrow x-y=(1-\lambda)x$. Usando la igualdad anterior
$$\begin{aligned}&(x,Ax)-(y,Ay)=(x,Ax)-(\lambda x,A(\lambda x))=(1-|\lambda|^2)(x,Ax)\\&(x-y,(M+M^*-A)(x-y))=((1-\lambda)x,(M+M^*-A)((1-\lambda)x))=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x),\end{aligned}$$
y entonces
$$(1-|\lambda|^2)(x,Ax)=|1-\lambda|^2(x,(M+M^*-A)x).$$
λ no puede ser $=1$ porque si no $y=Bx=x\Leftrightarrow x-M^{-1}Ax=x\Leftrightarrow M^{-1}Ax=0\Leftrightarrow x=0$.
Así $\lambda\neq 1$, $M+M^*-A$ es definida positiva, $|1-\lambda|^2>0$,
A definida positiva implica que $1-|\lambda|^2>0\Leftrightarrow|\lambda|<1$.
Entonces $\rho(B)<1$ y el método iterativo converge.

3. Demostración por reducción al absurdo. Se supone que no es cierto : $\exists x_0 \neq 0$, $\alpha_0 = (x_0, Ax_0) \leqslant 0$. Entonces la sucesión $x_n = Bx_{n-1} = B^n x_0$ tiende a 0 y $\lim \alpha_n = \lim(x_n, Ax_n) = 0$.
   Se utiliza ahora la relación de la pregunta 1 con $x = x_{n-1}$ y $y = Bx_{n-1} = x_n$ y se obtiene
$$\alpha_{n-1} - \alpha_n = (x_{n-1} - x_n, (M + M^* - A)(x_{n-1} - x_n) > 0.$$
   Si $x_{n-1} - x_n \neq 0$ (lo cual es cierto porque si no $x_{n-1} = x_n = Bx_{n-1}$ y B tiene un valor propio $= 1$). Entonces $(\alpha_{n-1} - \alpha_n)$ es una sucesión estrictamente decreciente que converge a 0, con $\alpha_0 < 0$. Esto es imposible y por lo tanto, A es definida positiva.
4. Sea $A = D - E - F$ la descomposición usual de A. Como A es hermitiana, $D = D^*$ y $F = E^*$. Para el método de relajación, se tiene $M = D/w - E$ y entonces
$$M^* + M - A = D/w - F + D/w - E - D + E + F = \frac{2-w}{w} D,$$
   que es hermitiana. Para $0 < w < 2$, $M^* + M - A$ es definida positiva, entonces de las dos preguntas anteriores concluimos que el método converge si y solo si A es definida positiva.

Solución del ejercicio 7890 ▲002237

---

1. Se tiene $x_{2k+1} = (I-E)^{-1}E^* x_{2k} + (I-E)^{-1}b$ y entonces
$$x_{2k+2} = (I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}E^* x_{2k} + (I-E^*)^{-1}E(I-E)^{-1}b + (I-E^*)^{-1}b.$$
   Pero $E(I-E)^{-1} = (I-E)^{-1}E$ y entonces
$$x_{2k+2} = (I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}EE^* x_{2k} + (I-E^*)^{-1}(I-E)^{-1}(E+I-E)b = M^{-1}Nx_{2k} + M^{-1}b,$$
   con
$$M = (I-E)(I-E^*), \quad N = EE^*, \quad M - N = I - E - E^* = A.$$
2. $M^* + N = I - E - E^* + 2EE^*$ y entonces
$$v^*(M^*+N)v = \|v\|_2^2 - v^*Ev - v^*E^*v + 2v^*EE^*v = \|E^*v\|_2^2 + (\|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v, E^*v)),$$
   Se tiene la desigualdad
$$-2\|v\|\|E^*v\| \leqslant -2|(v, E^*v)| \leqslant -2|\mathrm{Re}(v, E^*v)|$$
   y entonces
$$\begin{gathered}(\|v\|_2 - \|E^*v\|_2)^2 \leqslant \|v\|_2^2 + \|E^*v\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(v, E^*v) \Rightarrow \\ v^*(M^*+N)v \geqslant \|E^*v\|_2^2 + (\|v\| - \|E^*v\|_2)^2 \Rightarrow \\ v^*(M^*+N)b = 0 \Leftrightarrow \|E^*v\|_2 = 0 \text{ y } \|v\|_2 = \|E^*v\|_2 \Leftrightarrow \|v\|_2 = 0.\end{gathered}$$
   Entonces $M^* + N$ es positiva y aplicando un resultado de un ejercicio anterior se concluye que el método converge si y solo si A es definida positiva.

Solución del ejercicio 7891 ▲002238

---

1. Es fácil ver que si (x_k) converge a x^* y (y_k) converge a y^*, entonces x^* y y^* son solución de los sistemas $(I-BA)x^* = Bb+a$ y $(I-AB)y^* = Aa+b$. Se tiene :

$$\begin{cases} x_{k+1} = B(Ax_{k-1}+b)+a = BAx_{k-1}+Bb+a \\ y_{k+1} = A(By_{k-1}+a)+b = ABy_{k-1}+Aa+b, \end{cases}$$

y entonces (x_k) converge si y solo si $\rho(BA) < 1$ y (y_k) converge si y solo si $\rho(AB) < 1$.

2. $z_{k+1} = Cz_k + c$, con $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

3. Sea λ valor propio no nulo de C y $z = (x,y)^T$ vector propio asociado

$$Cz = \lambda z \Leftrightarrow \begin{cases} By = \lambda x \\ Ax = \lambda y \end{cases} \Rightarrow ABy = \lambda Ax = \lambda^2 y \Rightarrow \lambda^2 \text{ es valor propio de } AB.$$

Sea ahora α valor propio de $AB \Leftrightarrow \exists u \neq 0 : ABu = \alpha u$. Se define $\beta^2 = \alpha$ y $x = Bu$, $y = \beta u$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ ABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta Bu \\ \beta^2 u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, $\rho^2(C) = \rho(AB)$.

4. $D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} a \\ Aa+b \end{pmatrix}$. La demostración de $\rho(D) = \rho(AB)$ se hace como en la pregunta anterior.

5. (a) $\mathrm{e}^k = M^k \mathrm{e}^0 \Rightarrow \frac{\|\mathrm{e}^k\|}{\|\mathrm{e}^0\|} \leqslant \|M^k\| \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto, es suficiente tener $\|M^k\|^{1/k} \leqslant \varepsilon^{1/k} \Rightarrow \log(\|M^k\|^{1/k}) \leqslant \frac{1}{k}\log\varepsilon$, es decir $k \geqslant \frac{\log\varepsilon}{\log(\|M^k\|^{1/k})}$. Pero como $\rho(M) \leqslant \|M^k\|^{1/k}$ finalmente se obtiene

$$k \geqslant -\log\varepsilon / R(M).$$

   (b) Se tiene $\rho^2(C) = \rho(AB) \Rightarrow \rho(C) = \sqrt{\rho(AB)}$ y $\rho(D) = \rho(AB)$. Entonces $\rho(D) < \rho(C) \Rightarrow R(D) > R(C)$. Así logramos la misma reducción de error con un menor número de iteraciones del método 2)

Solución del ejercicio 7892 ▲002239

1.
2. Iteración de Gauss-Seidel : $(D-E)X_{n+1} = FX_n + b$, con

$$D-E = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 3 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. $e_n = X_n - X^*$, $\quad X_{n+1} = (D-E)^{-1}FX_n + (D-E)^{-1}b$, $\quad X^* = (D-E)^{-1}FX^* + (D-E)^{-1}b \Rightarrow e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$.
Se obtiene entonces $(D-E)e_{n+1} = (D-E)^{-1}Fe_n$ y si se escribe componente a componente se tiene

$3e_{n+1}^1 = -e_n^2 \Rightarrow |e_{n+1}^1| \leqslant \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty$

$e_{n+1}^1 + 2e_{n+1}^2 = -e_n^3 \Rightarrow |e_{n+1}^2| \leqslant \frac{1}{6}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{2}\|e_n\|_\infty = \frac{2}{3}\|e_n\|_\infty$

$2e_{n+1}^2 + 3e_{n+1}^3 = -e_n^4 \Rightarrow |e_{n+1}^3| \leqslant \frac{2}{3}\frac{2}{3}\|e_n\|_\infty + \frac{1}{3}\|e_n\|_\infty = \frac{7}{9}\|e_n\|_\infty$

$e_{n+1}32 + 4e_{n+1}^4 = -3e_n^5 \Rightarrow |e_{n+1}^4| \leqslant \frac{1}{4}\frac{7}{9}\|e_n\|_\infty + \frac{3}{4}\|e_n\|_\infty = \frac{34}{16}\|e_n\|_\infty$

$e_{n+1}^4 + e_{n+1}^5 = 0 \Rightarrow |e_{n+1}^5| \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$

y entonces

$$\|e_n\|_\infty \leqslant \frac{17}{18}\|e_n\|_\infty$$

4. $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$, $L_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$
y por lo tanto, $\|L_1\|_\infty = \max(\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{17}{18}, \frac{32}{36}, \frac{32}{36}) = \frac{17}{18}$.
Se deduce que por lo tanto la convergencia de (X_n) hacia X^*.

Solución del ejercicio 7904 ▲006938

Sea f la densidad de X y g la densidad de Y. X es independiente de Y, por lo tanto X es independiente de $-Y$.

$$\begin{aligned} P(-Y \in [a,b]) = P(Y \in [-b,-a]) &= \int_{-b}^{-a} g(t)\,dt \\ &= \int_a^b g(-u)\,du \ \text{ (cambio de variable } u = -t\text{)}, \end{aligned}$$

entonces la densidad de $-Y$ es $h(t) = g(-t)$. Por independencia, $X + (-Y)$ tiene una ley de densidad continua $f * h$, por lo tanto $P(X = Y) = P(X - Y = 0) = \displaystyle\int_0^0 f * h(x)\,dx = 0$.

Solución del ejercicio 7906 ▲006940

1. $P(Z \leqslant t) = 0$ si $t < 0$ y $P(Z \leqslant t) = P(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t})$ si $t \geqslant 0$. Entonces, para $t \geqslant 0$, $F_Z(t) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$. $F_X(t)$ es derivable de derivada $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$, por lo tanto F_Z es derivable en $]0,+\infty[$ y $F_Z'(t)$ es la densidad de Z. $F_Z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(F_X'(\sqrt{t}) + F_X'(-\sqrt{t}))$. Entonces la densidad de Z es $f_Z(t) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-t/2}$.
2. $F_{Y^3}(t) = P(Y^3 \leqslant t) = P(Y \leqslant \sqrt[3]{t}) = F_Y(\sqrt[3]{t})$. Se tiene $F_Y(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ y $F_Y(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ si $t > 0$. Entonces $F_{Y^3}(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ y $F_{Y^3}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt[3]{t}}$ si $t > 0$. La función de repartición es continua en $\mathbb{R}$ y C^1 a trozos para que podamos derivar para encontrar la densidad de X^3, que es $\mathbf{1}_{]0,+\infty[}\frac{\lambda}{3}t^{-2/3}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt[3]{t}}$.

Solución del ejercicio 7907 ▲006941

$1-F(t)=P(X>t)=P_X(]t,+\infty[)=\int_{]t,+\infty[}1\,dP_X(x)$. Entonces

$$\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\int_{]t,+\infty[}1\,dP_X(x)\right)dt.$$

Se aplica Fubini-Tonelli, el área de integración es $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant t<x\}$:

$$\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt=\int_{]0,+\infty[}\left(\int_{[0,x[}1\,dt\right)dP_X(x)=\int_{]0,+\infty[}x dP_X(x).$$

Por otro lado, como X es positiva,

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\,dP_X(x),\quad \text{por lo tanto}\quad E(X)=0\times P_X(\{0\})+\int_{]0,+\infty[}x\,dP_X(x).$$

Se deduce que $E(X)=\int_0^{+\infty}(1-F(t))\,dt$.

Observación : si la ley de X es continua, no tiene que preocuparnos si los intervalos son abiertos o cerrados ya que $P(X>a)=P(X\geqslant a)$.

Solución del ejercicio 7908 ▲006942

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ y esta unión es disjunta, por lo tanto $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$. Por independencia, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, por lo tanto $P(A\cap B^c)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c)$, dicho de otro modo $A\perp B^c$. Se aplica el resultado a $A'=B$, $B'=A$ y se encuentra $A^c\perp B$. Volvemos a aplicar el resultado a A^c y B, para encontrar $A^c\perp B^c$.

Solución del ejercicio 7909 ▲006943

1. $P(A\mid B):=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, por lo tanto $P(X>t+s\mid X>t)=\dfrac{P(X>t+s)}{P(X>t)}$.
   Ahora $P(X>y)=\int_y^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda y}$ si $y\geqslant 0$ y $P(X>t+s\mid X>t)=\dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}=P(X>s)$.
2. Sea $H(t)=1-F_X(t)=P(X>t)$. Por hipótesis, se tiene $H(t+s)=H(t)H(s)$. Como la densidad de X es continua en $\mathbb{R}_+$, F es derivable en $\mathbb{R}_+$, por lo tanto H también. Si se deriva con respecto a s, se encuentra : $H'(t+s)=H(t)H'(s)$. Si $s=0$, se tiene $H'(t)=H(t)H'(0)$. Se define $\lambda=-H'(0)$. La función H es solución en $[0,+\infty[$ de la ecuación $y'+\lambda y=0$, entonces existe K tal que $H(t)=Ke^{-\lambda t}$, y $F_X(t)=1-Ke^{-\lambda t}$, para todo $t\geqslant 0$. El caso $K=0$ es excluido, si no $P_X=\delta_0$, lo cual es imposible porque X es una variable aleatoria con densidad. Se tiene

$$\lim_{t\to+\infty}F_X(t)=1 \;\text{ y }\; F_X(0)=0 \;\text{ pues }\; X \text{ es una variable aleatoria positiva,}$$

   por lo tanto necesariamente $\lambda>0$ y $K=1$. Derivando $F_X(t)=1-e^{-\lambda t}$, se encuentra que la densidad de X sobre $\mathbb{R}_+$ es $\lambda e^{-\lambda t}$, es decir que X es de ley exponencial de parámetro λ.

Solución del ejercicio 7910 ▲006944

1. $\{\omega \mid T_1(\omega) = +\infty\} = \{\omega \mid X_n(\omega) = 0, \text{ para todo } n \geqslant 1\} \subset \{\omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ para } 1 \leqslant n \leqslant N\}$. Entonces $P(T_1 = +\infty) \leqslant P(X_n = 0 \text{ para } 1 \leqslant n \leqslant N) = \prod_{n=1}^{N} P(X_n = 0)$ por la independencia, de donde $P(T_1 = +\infty) \leqslant (1-p)^N$. Ahora $1-p \in]0,1[$ y N es, arbitrariamente grande, por lo tanto $P(T_1 = +\infty) = 0$, dicho de otro modo T_1 es finito casi seguramente.
2. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $\{T_1 = k\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$, por lo tanto por la independencia $P(T_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$.
   $E(T_1) = \sum_{k \geqslant 1} kP(T_1 = k) = p \sum_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$. Se reconoce la derivada de una serie. Si se introduce la serie $f(x) = \sum_{k \geqslant 0} x^k$ (bien definida si $|x| < 1$), entonces $E(T_1) = pf'(1-p)$. Ahora $f(x) = \frac{1}{1-x}$, por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. De donde $E(T_1) = pf'(1-p) = \frac{1}{p}$.
3. Demostrar por inducción que T_n es finita casi seguramente (hipótesis verificada por T_1 por a) y que las variables aleatorias $T_1, (T_2 - T_1), \dots, (T_n - T_{n-1}), \dots$ tienen la misma ley que T_1 (hipótesis evidentemente verificada por T_1).
   Se supone que T_{n-1} es finita casi seguramente y hay que demostrar que $T_n - T_{n-1}$ tiene la misma ley que T_1 y que T_n es finita casi seguramente. Si $T_{n-1} = j$, entonces $\{T_n = j+k\} = \{X_{j+1} = 0, \dots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1\}$. Como T_{n-1} es finita casi seguramente, la fórmula de la probabilidad condicional se aplica y da :
$$\begin{aligned} P(T_n - T_{n-1} = k) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k \mid T_{n-1} = j) P(T_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} P(X_{j+1} = 0, \dots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1) P(T_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} p(1-p)^{k-1} P(T_{n-1} = j) \text{ por la independencia} \\ &= p(1-p)^{k-1} \sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_{n-1} = j). \end{aligned}$$
   Ahora $\sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_{n-1} = j) = P(T_{n-1} < +\infty) = 1$ (hipótesis de recurrencia para $n-1$), por lo tanto $P(T_n - T_{n-1} = k) = (1-p)^{k-1} p$. Se verifica que $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k) = 1$, por lo tanto $T_n - T_{n-1} < +\infty$ casi seguramente, y así $T_n < +\infty$ casi seguramente (se puede también calcular directamente $P(T_n - T_{n-1} = +\infty) = 0$, como para T_1). Se viene de demostrar que $T_n - T_{n-1}$ tiene la misma ley que T_1. Esto termina la recurrencia.
   Para demostrar la independencia, se observa $\{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n\}$, lo que recorre exactamente los valores de X_i, para $0 \leqslant i \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Es un poco pesado de escribir :
$$\begin{aligned} \{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n\} = \{ & X_0 = \cdots = X_{k_1 - 1} = 0, X_{k_1} = 1, \\ & X_{k_1+1} = \cdots = X_{k_1+k_2-1} = 0, X_{k_1+k_2} = 1, \\ & \vdots \\ & X_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1} = \cdots = X_{k_1+\cdots+k_n-1} = 0, X_{k_1+\cdots+k_n} = 1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por independencia de los X_i :

$$\begin{aligned}P(T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n) &= p^n (1-p)^{(k_1-1)+\cdots+(k_n-1)} \\ &= P(T_1 = k_1)P(T_2 - T_1 = k_2)\cdots P(T_n - T_{n-1} = k_n).\end{aligned}$$

Conclusión : las variables aleatorias $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}$ son independientes.

4. De lo anterior se desprende que, para tener $T_n = k$, por un lado, es necesario que $X_k = 1$, y por otro lado entre los $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ es necesario que $n-1$ sean iguales a 1 y los demás sean iguales a 0. Hay C_{k-1}^{n-1} formas de elegir los 1 (a condición por supuesto que $k \leqslant n$), y cada combinación tiene la misma probabilidad, que es $p^n(1-p)^{k-n}$. Se puede deducir que la ley de T_n es $P(T_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ si $k \geqslant n$ y $P(T_n = k) = 0$ si $k < n$.

Solución del ejercicio 7911 ▲006945

1. $G_X(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k}$, por lo tanto $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$.
2. $G_Y(z) = (pz + 1 - p)^m$ por a). Por independencia, $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = (pz + 1 - p)^{n+m}$. Esta es la función generatriz de la distribución binomial $\mathscr{B}(n+m, p)$. Pero la ley de $X+Y$ es $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p)$, por lo tanto $\mathscr{B}(n,p) * \mathscr{B}(m,p) = \mathscr{B}(n+m,p)$.

Solución del ejercicio 7912 ▲006946

Sea G la función generatriz de X_1. Como los X_n tienen la misma ley que X_1, $G_{X_n} = G$. Por independencia, la función generatriz de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ es $G_{S_n} = G_{X_1} G_{X_2} \dots G_{X_n} = G^n$.

$$\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = k\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\omega \in \Omega \mid N(\omega) = n,\ X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) = k\}$$

y esta unión de conjuntos es disjunta, por lo tanto $P(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n,\ X_1 + \cdots + X_n = k)$.

Además, para n fijado, las variables aleatorias N y $X_1 + \cdots + X_n$ son independientes, por lo tanto

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P(X_1 + \cdots + X_n = k).$$

Las series generadoras convergen para $|x| \leqslant 1$. Para todo $x \in [0,1]$, se tiene :

$$G_Y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P(X_1 + \cdots + X_n = k) x^k = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) x^k$$

(todos los términos son positivos por lo que se puede invertir las sumas de Fubini-Tonelli)

$$G_Y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) G_{S_n}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)(G(x))^k = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)(G(x))^k = G_N(G(x))$$

(se puede empezar la suma en $n = 0$, pues $P(N = 0) = 0$).
Conclusión : $G_Y = G_N \circ G$ (la igualdad de la serie para $x \geqslant 0$ implica la igualdad de la serie en todas partes identificando los coeficientes).
Las funciones del generador siempre se definen en $[-1, 1]$.

Como X_1 y N son integrables, G_N y G son derivables y $G'_N(1) = E(N)$, $G'(1) = E(X_1)$ (G_N y G solo se definen a priori en $[-1,1]$, $G'_N(1)$ y $G'(1)$ son de hecho derivadas por la izquierda en 1, las derivadas a la derecha pueden no estar definidas). Entonces $G_Y = G_N \circ G$ es derivable por composición (notar que $|G(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k) = 1$ –este es el caso para toda función generadora– entonces $G([-1,1]) \subset [-1,1]$ y la composición está bien definida).
Como $G(1) = 1$, se tiene $G'_Y(1) = G'(1)G'_N(1)$.
Conclusión : Y es integrable y $E(Y) = E(X_1)E(N)$.

Solución del ejercicio 7913 ▲006947

---

1. $G_X(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$.
2. $E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.
3. $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = \mathrm{e}^{(\lambda+\lambda')(z-1)}$. Así $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$, y entonces $\mathscr{P}(\lambda) * \mathscr{P}(\lambda') = \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Solución del ejercicio 7914 ▲006948

La densidad de X es $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, se debe calcular $\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$. Se tiene

$$\int_0^M \mathrm{e}^{itx}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{1}{it-\lambda}\mathrm{e}^{(it-\lambda)x}\right]_0^M = \frac{\lambda}{it-\lambda}\left(\mathrm{e}^{(it-\lambda)M} - 1\right).$$

(Se observa que $it - \lambda \neq 0$, pues $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$). Se tiene $|\mathrm{e}^{(it-\lambda)M}| = |\mathrm{e}^{it}|\mathrm{e}^{-\lambda M} = \mathrm{e}^{-\lambda M} \to 0$, cuando $M \to +\infty$, por lo tanto la integral es convergente y $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.

Solución del ejercicio 7915 ▲006949

---

1. $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{itk}\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda \mathrm{e}^{it})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\exp(\lambda \mathrm{e}^{it})$, por lo tanto $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(\mathrm{e}^{it}-1))$.
2. $\varphi_Y(t) = \exp(\lambda'(\mathrm{e}^{it}-1))$ por 1. Por independencia, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \exp((\lambda+\lambda')(\mathrm{e}^{it}-1))$. Esta es la función característica de la ley de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\lambda')$ y así $\mathscr{P}(\lambda) * \mathscr{P}(\lambda') = \mathscr{P}(\lambda+\lambda')$.

Solución del ejercicio 7916 ▲006952

---

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{\lambda}$ por integración por partes.
2. $E(X) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}k = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$.
   $E(X^2) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}k^2 = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}k$.
   Se escribe $k = (k-1)+1$:

$$E(X^2)=\lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k\geqslant 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k\geqslant 2}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+1\right)=\lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})=\lambda^2+\lambda.$$

$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E(X)^2$, por lo tanto $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.

Solución del ejercicio 7917 ▲006953

Sea $g(t)=E((X-t)^2)=E(X^2)-2tE(X)+t^2$. Es una parábola cuyo mínimo está en $t=E(X)$ (se puede también derivar g y encontrar el mínimo de esta manera).

Solución del ejercicio 7918 ▲006950

1. Se define $A_n(\alpha)=\{X_n>\alpha\ln n\}$ y $A(\alpha)=\limsup A_n(\alpha)$. Las $(A_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ son los eventos independientes.
   Si $\alpha\geqslant 0$, entonces $\alpha\ln n\geqslant 0$ y $P(A_n(\alpha))=\int_{\alpha\ln n}^{+\infty}e^{-x}\,dx=e^{-\alpha\ln n}=\frac{1}{n^\alpha}$, por lo tanto $\sum P(A_n(\alpha))=\sum\frac{1}{n^\alpha}$. Es una serie de Riemann.
   Si $\alpha>1$ la serie converge y el lema de Borel-Cantelli implica que $P(A(\alpha))=0$.
   Si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ la serie diverge y el lema de Borel-Cantelli implica que $P(A(\alpha))=1$.
   Si $\alpha<0$, entonces $P(A_n(\alpha))=1$, para todo n pues X_n es positiva casi seguramente, así se tiene $P(A(\alpha))=1$. Lo que responde la pregunta 1.
2. Para todo $\varepsilon>0$, se tiene $P(A(1-\varepsilon))=1$. Por lo tanto $A(1-\varepsilon)=\left\{\frac{X_n}{\ln n}>1-\varepsilon \text{ para una infinidad de } n\right\}$, entonces si ω pertenece a $A(1-\varepsilon)$, $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1-\varepsilon$.
   Sea N_k el complemento a $A(1-1/k)$ y $N=\bigcup_{k\geqslant 1}N_k$. Se tiene $P(N_k)=0$, por lo tanto $P(N)\leqslant\sum_{k\geqslant 1}P(N_k)=0$ (suma numerable de conjuntos de medida cero).
   Si $\omega\notin N$, entonces $\forall k\geqslant 1$, $\omega\notin N_k$, por lo tanto $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1-1/k$, y como $1/k$ tiende a 0, entonces $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\geqslant 1$, $\forall\,\omega\notin N$.
   $\forall\varepsilon>0$, se tiene $P(A(1+\varepsilon))=0$, por lo tanto $P((A(1+\varepsilon))^c)=1$. Por lo tanto
   $$(A(1+\varepsilon))^c=\liminf(A_n(1+\varepsilon))^c=\left\{\frac{X_n}{n}\leqslant\alpha \text{ a partir de un cierto rango}\right\},$$
   por lo tanto si $\omega\in(A(1+\varepsilon))^c$, entonces $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}\leqslant 1+\varepsilon$. Sea $N'=\bigcup_{k\geqslant 1}A(1+1/k)$. Se tiene $P(A(1+1/k))=0$, para todo $k\geqslant 1$, por lo tanto $P(N')=0$. Si $\omega\notin N'$, para todo $k\geqslant 1$, $\omega\in(A(1+1/k))^c$, por lo tanto
   $$\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\leqslant 1+1/k,$$
   y como $1/k$ tiende a 0, entonces $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{n}\leqslant 1$.
   Conclusión : $\forall\,\omega\notin N\cup N'$, entonces $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n(\omega)}{\ln n}=1$. Dicho de otra manera $\limsup_{n\to+\infty}\frac{X_n}{\ln n}=1$ casi seguramente, ya que $P(N\cup N')\leqslant P(N)+P(N')=0$.

Solución del ejercicio 7919 ▲006951

1. Integración por partes : $u = 1/t, v' = te^{-t^2/2}, u' = -1/t^2, v = -e^{-t^2/2}$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt \leqslant \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$$ porque la integral a la derecha es positiva.

Se hace una nueva integración por partes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} \frac{3}{t^4}e^{-t^2/2}dt \leqslant \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2},$$

por lo tanto $\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \geqslant \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}$.

2. Sea $Y_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Se tiene $P(Y_n \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t) = P(X_1 \leqslant t)^n$ e igualmente $P(Y_n \geqslant t) = P(X_1 \geqslant t)^n$. Se quiere demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}} - 1| \geqslant \varepsilon) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty \text{ (convergencia en probabilidad).}$$

Se puede escribir

$$\{\Big|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}} - 1\Big| \geqslant \varepsilon\} = \{|Y_n - \sqrt{2\ln n}| \geqslant \varepsilon\sqrt{2\ln n}\} = \{Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\} \cup \{Y_n \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\}$$

y esta unión es, por lo tanto disjunta

$$P(|\frac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}} - 1| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) + P(Y_n \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}).$$

Se va a demostrar que estas dos probabilidades tienden a 0.

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) = P(X_1 \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^n &= \left(1 - P(X_1 > (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt\right)^n \\
&\leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}} - \frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right)\right)^n \text{ por 1.}
\end{aligned}$$

Como $e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2} = n^{-(1-\varepsilon)^2}$, la cantidad

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln n)(1-\varepsilon)^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}} - \frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right)\right)$$

es equivalente a

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}} - \frac{1}{((1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})^3}\right) \text{ y por lo tanto, a } -\frac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}(1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}.$$

Si $\varepsilon > 0$ es bastante pequeño, $\alpha = 2\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$, por lo tanto $\frac{n^{2\varepsilon-\varepsilon^2}}{\sqrt{\ln n}} \to +\infty$.

Retomado la exponencial, se obtiene que $P(Y_n \leqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2\ln n})$ tiende a 0, cuando $n \to +\infty$.

$$P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) = (P(X_1 \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}))^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\right)^n.$$

Entonces por 1., $\ln(P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}))$ es inferior o igual a

$$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\ln n)(1+\varepsilon)^2}\frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}}\right) = -n(\ln n)(1+\varepsilon)^2 - n\ln(\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}) \to -\infty$$

por lo tanto $P(Y_n \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n})$ tiende a 0, cuando $n \to +\infty$. Conclusión : $\dfrac{Y_n}{\sqrt{2\ln n}} \xrightarrow{P} 1$.